

# **Grundwissen Physik am bayerischen Gymnasium (G8)**

Richard Reindl

2004–2009

Das Grundwissen ist zweispaltig dargestellt, links die Definitionen, Sätze und Beweise, rechts Abbildungen und Beispiele.

Es handelt sich nicht nur um einen Grundwissenskatalog, sondern um eine kompakte Darstellung des Stoffes mit den notwendigen Herleitungen und Beweisen. Daher eignet sich der Text zur Wiederholung und zum Selbststudium des Stoffes.

Die Auswahl des Stoffes beruht auf meinem Unterricht und den von mir gesetzten Schwerpunkten und Vertiefungen, ist also nicht unbedingt eine 1:1-Umsetzung des Lehrplans. Es wird auch kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben.

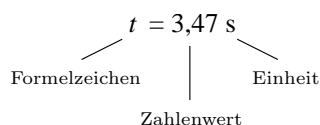
# Grundwissen Physik – Jahrgangsstufe 7

## Größen in der Physik

### Definitionen und Regeln

#### Grundgrößen

Eine physikalische Größe besteht aus einem Zahlenwert und aus einer Einheit (Benennung).



Wenn möglich, verwendet man für gleiche Größen immer gleiche Formelzeichen, z.B.  $t$  für die Zeit (engl.: time, lat.: tempus).

#### Die Zeit

Zur Definition der Grundeinheit der Zeit, der Sekunde, kann jeder periodisch ablaufende Vorgang verwendet werden. Die Sekunde wird als Vielfaches der Schwingungsdauer einer ganz bestimmten Strahlung definiert, die von Cäsiumatomen ausgesandt wird. Realisiert wird diese äußerst genaue Zeitmessung mit Atomuhren. Eine solche Atomuhr geht in  $10^{14}$  s, das sind ungefähr drei Millionen Jahre, nur um eine Sekunde falsch.

#### Die Länge

Die Grundeinheit der Länge ist das Meter.

Ein Meter ist die Strecke, die Licht in der Zeit  $\frac{1}{299792458}$  s zurücklegt.

#### Die Masse

Ein Kilogramm (kg) ist definiert als die Masse des in der Nähe von Paris aufbewahrten Urkilogramms (ein Zylinder aus einer Platin-Iridium-Legierung). An einer moderneren Definition der Masse wird derzeit gearbeitet.

Grundgrößen		
Größe	Einheit	Zeichen
Zeit	Sekunde	s
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg

### Beispiele

#### Historisches

Früher wurde die Sekunde als der 86400-ste Teil eines Tages festgelegt.

Das Meter wurde um 1800 folgendermaßen definiert:

Ein Meter ist der zehnmillionste Teil der Länge des Meridianbogens, der vom Nordpol über Paris bis zum Äquator reicht.

Mit dieser Definition hat der Erdumfang, eine exakte Kugel für die Gestalt der Erde vorausgesetzt, die Länge 40 000 km.

Ein Kilogramm hat man früher als die Masse von einem Liter ( $1 \text{ dm}^3$ ) Wasser bei  $20^\circ$  definiert.

#### Schreibweise großer und kleiner Zahlen

$$10^n = \underbrace{1\,000\dots0}_n, \quad 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0,\underbrace{00\dots0}_{n-1}1$$

$$10^3 = 1\,000, \quad 10^{-6} = \frac{1}{1\,000\,000} = 0,000\,001$$

Multiplizieren mit  $10^n$  bedeutet eine Kommaverschiebung um  $n$  Stellen nach rechts, multiplizieren mit  $10^{-n}$  bedeutet eine Kommaverschiebung um  $n$  Stellen nach links:

$$5,73 \cdot 10^5 = 573\,000, \quad 3,45 \cdot 10^{-6} = 0,000\,003\,45$$

Vorsilben für Zehnerpotenzen:

Name	Zeichen	Bedeutung
Hekto	h	$10^2$
Kilo	k	$10^3$
Mega	M	$10^6$
Giga	G	$10^9$
Tera	T	$10^{12}$
Zenti	c	$10^{-2}$ Hundertstel
Milli	m	$10^{-3}$ Tausendstel
Mikro	$\mu$	$10^{-6}$ Millionstel
Nano	n	$10^{-9}$ Milliardstel
Pico	p	$10^{-12}$ Billionstel

# Elektrizität

## Definitionen und Regeln

### Bausteine der Materie

Die ganze uns umgebende Materie besteht aus nur drei Bausteinen, den **Protonen** ( $p^+$ ), **Neutronen** ( $n$ ) und **Elektronen** ( $e^-$ ).

Die Protonen tragen eine positive elektrische **Elementarladung**  $e$ , die Elektronen eine negative Elementarladung  $-e$ . Gleichnamig geladene Teilchen (z.B. zwei Protonen oder zwei Elektronen) stoßen sich ab, zwei ungleichnamig geladene Teilchen ziehen sich an.

Protonen und Neutronen heißen auch **Nukleonen** (Kernbausteine).

Protonen, Neutronen und Elektronen sind die Bausteine der **Atome**. Protonen und Neutronen sind die Teile des positiv geladenen, sehr kleinen und schweren **Atomkerns**, die Elektronen bilden die negativ geladene Atomhülle. Dabei darf man sich die Elektronen **nicht** als kleine Kugeln vorstellen, die um den Kern kreisen wie die Planeten um die Sonne. Wenn sich ein Elektron einem Kern nähert, geschieht etwas sehr Merkwürdiges: Es bläht sich auf und aus dem zunächst winzigen Teilchen wird eine Ladungswolke, die ungefähr 100 000-mal größer ist als der Atomkern.

Atome enthalten im Normalzustand (neutrale Atome) genauso viele Elektronen wie Protonen, d.h. die Gesamtladung eines neutralen Atoms ist null ( $n \cdot e + n \cdot (-e) = 0$ ).

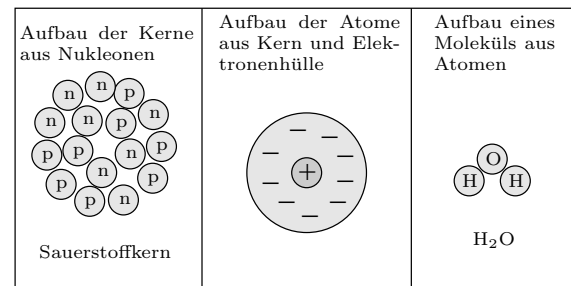
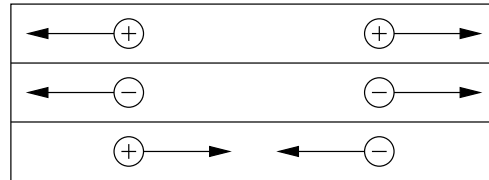
Die Radien der Atome liegen im Bereich von ungefähr  $10^{-10}$  m bis  $10^{-9}$  m, die der Kerne von  $10^{-15}$  m bis  $10^{-14}$  m.

Das einfachste und leichteste Atom ist das Wasserstoffatom (H), dessen Kern aus einem Proton und dessen Hülle aus einem Elektron besteht. Das schwerste in der Natur vorkommende Atom ist das Uranatom (U) mit 92 Protonen und 146 Neutronen im Kern und 92 Elektronen in der Hülle. Noch schwerere Atome können künstlich erzeugt werden, sind aber nicht stabil (sie zerfallen in leichtere Atome).

Stoffe, die aus nur einer Atomsorte bestehen, heißen **chemische Elemente**. In der Natur kommen also 92 verschiedene chemische Elemente vor. Die chemischen Eigenschaften eines Elements hängen nur von der Zahl der Elektronen in der Hülle ab.

## Beispiele

Kräfte zwischen elektrisch geladenen Teilchen:



In unserer Umwelt gibt es aber mehr als 92 verschiedene Materialien. Das liegt daran, dass sich die **Atome** zu **Molekülen** verbinden können. So ist z.B. das kleinste Teilchen, das noch die Eigenschaften von Wasser besitzt, das Wassermolekül. Es besteht aus einem Sauerstoffatom (O) und aus zwei Wasserstoffatomen (H), man schreibt dafür auch  $H_2O$ .

### Die Massen der wichtigsten Teilchen in kg

$p^+$	$n$	$e^-$
$1,67265 \cdot 10^{-27}$	$1,67495 \cdot 10^{-27}$	$9,1095 \cdot 10^{-31}$

Ein Atom, das mehr oder weniger Elektronen als Protonen enthält, nennt man ein negatives oder positives **Ion**.

Ein Sauerstoffatom O enthält 8 Protonen im Kern. Ein O-Atom mit 9 Elektronen hat die Gesamtladung  $8e + 9(-e) = -e$ , also eine negative Elementarladung. Dieses einfach negativ geladene Ion bezeichnet man mit  $O^-$ .

### Beispiele für Ionen

Stoff	Protonen	Elektronen	Symbol
Magnesium	12	10	$Mg^{++}$
Schwefel	16	18	$S^{--}$

**Definitionen und Regeln**

**Der elektrische Strom**

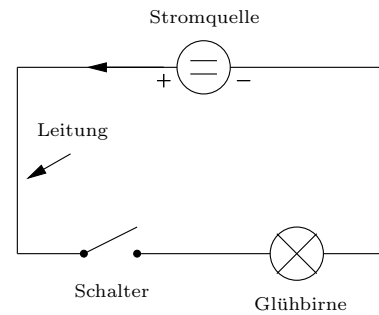
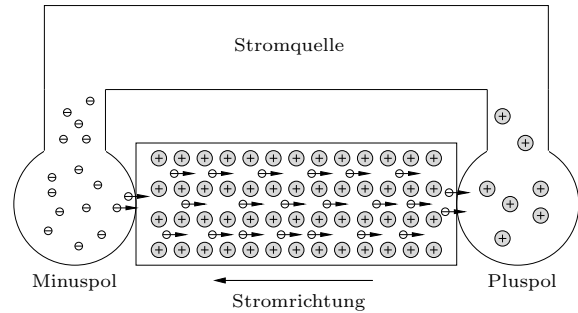
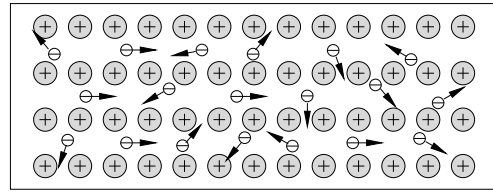
In einem (metallischen) elektrischen **Leiter** gibt es frei bewegliche, nicht fest an ein Atom gebundene Elektronen (ungefähr ein bis zwei Elektronen pro Atom). Diese frei beweglichen Elektronen schwirren wie ein Mückenschwarm in ungeordneten Bewegungen zwischen den positiven Atomrümpfen hindurch.

Eine elektrische Stromquelle (Batterie, Steckdose) besitzt einen Plus- und einen Minuspol. Am Pluspol herrscht Elektronenmangel, d.h. er ist positiv geladen. Am Minuspol herrscht Elektronenüberschuss, d.h. er ist negativ geladen. Verbindet man den Plus- und den Minuspol einer Stromquelle mit einem Leiter, dann zieht der Pluspol die Leiterelektronen an und der Minuspol stößt sie ab, die Leiterelektronen bewegen sich also vom Minus- zum Pluspol (wie ein Mückenschwarm, der sich von einer Straßenlaterne zur nächsten bewegt). Elektronen fließen am Minuspol in den Leiter hinein und am Pluspol wieder in die Stromquelle zurück. Die Stromquelle wirkt also wie eine Elektronenpumpe.

Fließende elektrische Ladung bezeichnet man als **elektrischen Strom**.

Ein **Stromkreis** besteht aus einer Stromquelle, den Leitungen und einem Verbraucher (z.B. einer Glühlampe). Die Richtung des elektrischen Stromes ist so definiert, dass ein positiver Strom außerhalb der Stromquelle vom Pluspol zum Minuspol fließt.

**Beispiele**



**Mechanik**

**Definitionen und Regeln**

**Die Geschwindigkeit**

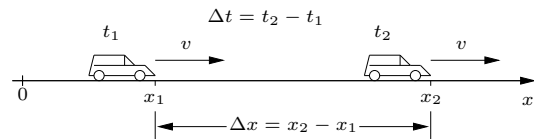
Ein Auto bewegt sich entlang der  $x$ -Achse. Zur Zeit  $t_1$  befindet es sich am Ort  $x_1$ , zur Zeit  $t_2$  am Ort  $x_2$ . Die Zeitspanne zwischen  $t_1$  und  $t_2$  ist  $\Delta t = t_2 - t_1$ , die Länge des Weges zwischen  $x_1$  und  $x_2$  ist  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Die **Geschwindigkeit** des Autos ist dann

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Geschwindigkeit =  $\frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{dazu benötigte Zeit}}$

$$1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

**Beispiele**



PKW auf der Autobahn: Um 13:07:22 bei der km-Marke 27, um 13:17:37 bei der km-Marke 47,5.

$$\Delta t = 10 \text{ min } 15 \text{ s} = 10,25 \text{ min} = 615 \text{ s}$$

$$\Delta x = 20,5 \text{ km} = 20500 \text{ m}$$

$$v = \frac{20,5 \text{ km}}{10,25 \text{ min}} = 2 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{20500 \text{ m}}{630 \text{ s}} = 33,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Definitionen und Regeln**

Startet ein Körper zur Zeit  $t_0 = 0$  am Ort  $x_0$  mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  und ist er zur Zeit  $t$  am Ort  $x(t)$ , dann ist

$$\Delta x = x(t) - x_0 \quad \text{und} \quad \Delta t = t - t_0 = t$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x_0}{t}$$

Für die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit gilt also:

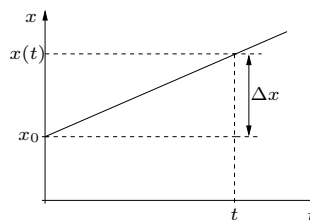
$$x(t) = x_0 + vt$$

In der Zeit  $\Delta t$  bewegt sich ein Körper mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  um die Strecke  $\Delta x = v \cdot \Delta t$ . Nebenstehendem  $tv$ -Diagramm entnimmt man:

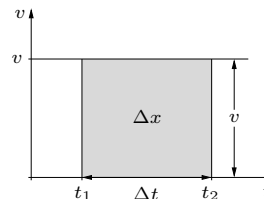
Weg = Fläche unter dem  $tv$ -Diagramm.

**Beispiele**

$tx$ -Diagramm mit konstanter Geschwindigkeit:



$tv$ -Diagramm mit konstanter Geschwindigkeit:



**Die Beschleunigung**

Ein Auto bewegt sich entlang der  $x$ -Achse. Zur Zeit  $t_1$  ist seine Geschwindigkeit  $v_1$ , zur Zeit  $t_2$  beträgt sie  $v_2$ . Die Geschwindigkeitsänderung in der Zeitspanne  $\Delta t = t_2 - t_1$  ist  $\Delta v = v_2 - v_1$ . Die **Beschleunigung** des Autos ist dann

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Beschleunigung =  $\frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{dazu benötigte Zeit}}$

Startet ein Körper zur Zeit  $t_0 = 0$  mit der Geschwindigkeit  $v_0$  mit konstanter Beschleunigung  $a$  und hat er zur Zeit  $t$  die Geschwindigkeit  $v(t)$ , dann ist

$$\Delta v = v(t) - v_0 \quad \text{und} \quad \Delta t = t - t_0 = t$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t) - v_0}{t}$$

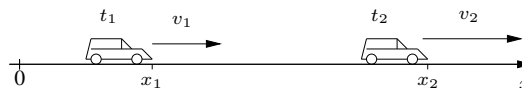
Für die Bewegung mit konstanter Beschleunigung gilt also:

$$v(t) = v_0 + at$$

Startet ein Körper zur Zeit null mit  $x_0 = x(0) = 0$  und  $v_0 = v(0) = 0$ , dann gilt  $v(t) = at$ :

$$x(t) = \Delta x = \frac{1}{2} \cdot t \cdot v = \frac{1}{2} at^2$$

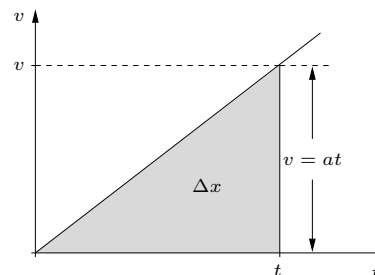
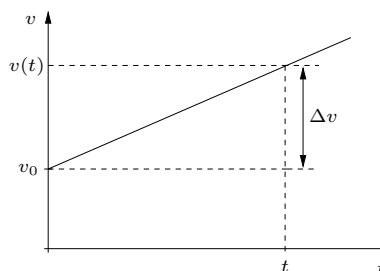
$$x(t) = \frac{1}{2} at^2$$



Ein Auto beschleunigt in 10 s von null auf  $108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

$$\Delta v = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} - 0 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{30 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \text{s}} = 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



**Definitionen und Regeln**

**Masse und Trägheit**

Die Beeinflussung eines Körpers durch einen anderen, z.B. durch Gravitation (Schwerkraft) oder durch Reibung, nennt man *Wechselwirkung* zwischen den Körpern. Ein wechselwirkungsfreier Körper wird also von keinem anderen Körper beeinflusst. Die Eigenschaft eines Körpers, sich einer Bewegungsänderung zu widersetzen, nennt man *Trägheit*. GALILEI hat um 1590 den *Trägheitssatz* formuliert:

Ein wechselwirkungsfreier Körper erfährt die Beschleunigung null, d.h. er bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

(Newton 1)

Bringt man zwei zunächst ruhende Körper in Wechselwirkung (indem man z.B. eine zusammengedrückte Feder zwischen sie bringt) und misst ihre Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  nach der Wechselwirkung, dann definiert man die Massen  $m_1$  und  $m_2$  der beiden Körper über die Beziehung

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$$

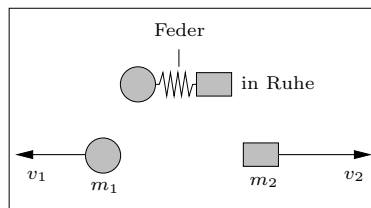
Um mit dieser Definition die Masse eines der beiden Körper bestimmen zu können, muss die Masse des anderen Körpers bekannt sein (z.B. das Urkilogramm oder eine Kopie davon).

Der schwerere Körper ist nach der Wechselwirkung langsamer als der leichtere, die Masse ist also ein Maß für die Trägheit eines Körpers.

In der Praxis misst man die Masse nicht mit Wechselwirkungsversuchen, sondern mit Waagen. Dabei wird die Tatsache ausgenutzt, dass gleiche Massen von der Erde gleich stark angezogen werden. Die Abbildung zeigt eine Balkenwaage, mit der man Massen sehr genau vergleichen kann.

**Beispiele**

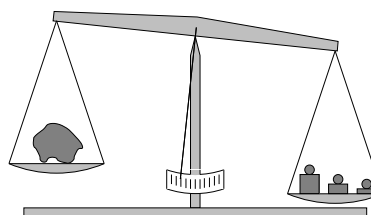
Definition der Masse:



Beispiel:

Ein Körper der zunächst unbekanntes Masse  $m_2$  wird in Ruhe durch eine Feder mit einer Kopie des Urkilogramms ( $m_1 = 1 \text{ kg}$ ) verbunden. Nach dem Auseinanderschellen der Feder hat der Körper der Masse  $m_2$  die Geschwindigkeit  $v_2 = 5,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und das Kilogrammstück die Geschwindigkeit  $v_1 = 8,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \implies m_2 = \frac{m_1 \cdot v_1}{v_2} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 8,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,7 \text{ kg}$$



Die Massen in den beiden Waagschalen sind gleich, wenn der Zeiger der Waage genau in der Mitte steht.

**Die Dichte**

Hat ein Körper, der aus einem bestimmten Stoff (z.B. Blei) besteht, das Volumen  $V$  und die Masse  $m$ , dann nennt man den Quotienten

$$\rho = \frac{m}{V}$$

die *Dichte* dieses Stoffes ( $\rho$  ist der griechische Buchstabe „rho“).

$$m = \rho \cdot V \implies V = \frac{m}{\rho}$$

Einheiten der Dichte:

$$1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Stoff	Dichte in $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ bei 20 °C
Styropor	$\approx 0,04$
Holz (Fichte)	0,5
Holz (Buche)	0,7
Alkohol	0,789
Wasser	1,00
Eisen	7,86
Kupfer	8,93
Blei	13,35
Quecksilber	13,55
Gold	19,3

**Definitionen und Regeln**

**Die Kraft**

Erfährt ein Körper der Masse  $m$  die Beschleunigung  $a$ , dann wirkt auf ihn die *Kraft*

$$\boxed{F = ma}$$

(Newton 2)

oder in Worten

$$\boxed{\text{Kraft} = \text{Masse mal Beschleunigung}}$$

Einheit der Kraft:

$$\boxed{1 \text{ Newton} = 1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}}$$

Zur vollständigen Beschreibung einer Kraft muss neben ihrem Betrag auch noch ihre Richtung bekannt sein. Die Kraft ist ein *Vektor* (Kraftpfeil). Die Länge des Vektors ist der Betrag der Kraft.

Bewegt sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit, dann ist seine Beschleunigung null und wegen Newton 2 muss dann auch die auf ihn wirkende Gesamtkraft null sein:

$$\boxed{v \text{ konstant} \iff a = 0 \iff F_{\text{ges}} = 0}$$

Kräfte wirken immer zwischen zwei Körpern. Ist  $\vec{F}_1$  die Kraft, die der Körper  $K_2$  auf den Körper  $K_1$  ausübt und  $\vec{F}_2$  die Kraft, die der Körper  $K_1$  auf den Körper  $K_2$  ausübt, dann sind die Beträge der beiden Kräfte gleich, ihre Richtungen aber entgegengesetzt:

$$\boxed{\vec{F}_2 = -\vec{F}_1}$$

(Newton 3)

**Die Gewichtskraft**

Im Vakuum, d.h. ohne Luftwiderstand, fallen alle Körper gleich schnell.

Der Mittelwert der Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche ist

$$\boxed{g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}}$$

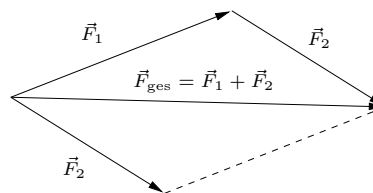
Die Ursache für die Fallbeschleunigung ist die *Gewichtskraft* (Gravitationskraft, Schwerkraft)  $F_G$ :

$$\boxed{F_G = mg}$$

Die Masse eines Körpers ist überall gleich, die Fallbeschleunigung ist vom Ort abhängig und heißt deshalb auch *Ortsfaktor*.

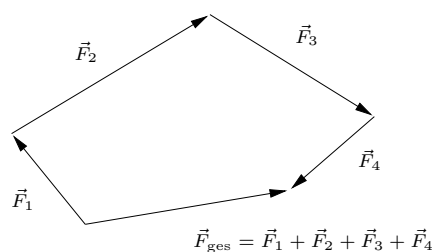
**Beispiele**

Addition von Kräften (Kräfteparallelogramm):

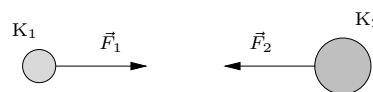


Wirken mehrere Kräfte, z.B.  $\vec{F}_1$  bis  $\vec{F}_4$  auf einen Körper, dann ist die Gesamtkraft auf den Körper die Vektorsumme

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$



Kraft und Gegenkraft:



Einige Ortsfaktoren:

Ort	$g$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
N- oder S-Pol	9,832
Äquator	9,780
45° nördl. Breite	9,80665
Zugspitze	9,797
Mond	1,57
Mars	3,83
Jupiter	24,5

Beispiel: Ein Astronaut wiegt auf dem Mars 306 N. Wie schwer ist er auf dem Mond?

$$F_{\text{Mars}} = m \cdot g_{\text{Mars}} \implies m = \frac{F_{\text{Mars}}}{g_{\text{Mars}}}$$

$$F_{\text{Mond}} = m \cdot g_{\text{Mond}} = \frac{F_{\text{Mars}} \cdot g_{\text{Mond}}}{g_{\text{Mars}}} = 125 \text{ N}$$

**Definitionen und Regeln**

**Die Reibungskraft**

Die Kraft, mit der ein Körper senkrecht auf seine Unterlage drückt, heißt *Normalkraft* und wird mit  $F_N$  bezeichnet. Bewegt sich der Körper, dann wirkt entgegen der Bewegungsrichtung die *Reibungskraft* (genauer Gleitreibungskraft) mit dem Betrag

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

$\mu$  heißt *Reibungszahl* (Gleitreibungszahl) und ist Abhängig von den Materialien des Körpers und der Unterlage.

Um einen ruhenden Körper auf einer Unterlage in Bewegung zu versetzen, muss die *Haftreibungskraft*  $F_{Haft}$  überwunden werden, die etwas größer als die Gleitreibungskraft ist. Auch  $F_{Haft}$  ist proportional zu  $F_N$ :

$$F_{Haft} = \mu_H \cdot F_N$$

$\mu_H$  heißt *Haftreibungszahl*.

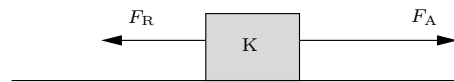
**Die Federkraft**

Eine Feder wird von der Kraft  $F$  um die Strecke  $\Delta x$  gedehnt oder zusammengedrückt. Dabei gilt im Elastizitätsbereich das HOOKEsche Gesetz:

$$F = D \cdot \Delta x$$

mit der *Federkonstanten*  $D$ .

**Beispiele**



Antriebskraft  $F_A$ , Reibungskraft  $F_R$ , Beschleunigung  $a$ :

$$ma = F_{ges} = F_A - F_R$$

Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, wenn  $F_A = F_R$ .

Stoffpaar	$\mu$	$\mu_H$
Autoreifen–Straße (trocken)	0,5	0,8
Autoreifen–Straße (nass)	0,3	0,5
Ski–Schnee	0,05	0,1

**Kräfte an der schiefen Ebene**

Ein Körper  $K$  befindet sich auf einer schiefen Ebene (z.B. einem Skihang) mit dem Neigungswinkel  $\varphi$ . Die Gewichtskraft  $F_G = mg$  kann in eine Kraft parallel zum Hang, der *Hangabtriebskraft*  $F_H$  und in die *Normalkraft*  $F_N$ , die senkrecht auf die Unterlage drückt, zerlegt werden:

$$\vec{F}_G = \vec{F}_H + \vec{F}_N$$

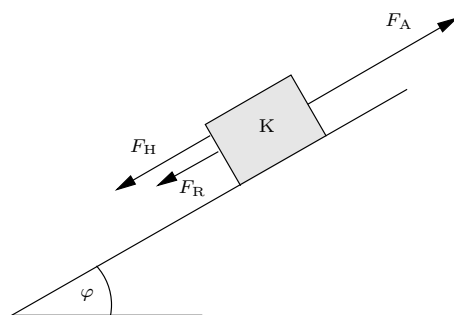
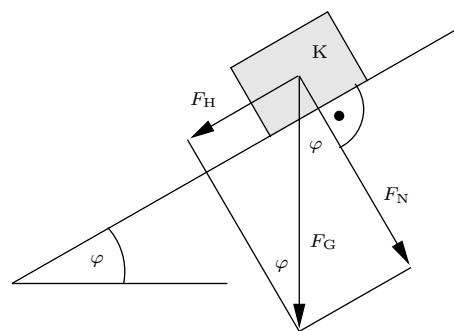
$F_H$  und  $F_N$  werden durch Konstruktion ermittelt (Kräfteparallelogramm).

Aufwärtsfahren mit der Antriebskraft  $F_A$ :

$$ma = F_{ges} = F_A - F_H - F_R$$

Abwärtsfahren mit der Antriebskraft  $F_A$ :

$$ma = F_{ges} = F_A + F_H - F_R$$





# Grundwissen Physik – Jahrgangsstufe 8

## Mechanik

### Definitionen und Regeln

#### Die Arbeit

Ein Körper K wird unter dem Einfluss der Kraft  $\vec{F}_0$  um die Strecke  $\Delta\vec{x}$  bewegt.  $\vec{F}$  ist der Teil von  $\vec{F}_0$ , der parallel zu  $\Delta\vec{x}$  ist und  $F$  ist der Betrag von  $\vec{F}$ . Die am Körper K verrichtete *Arbeit* ist dann

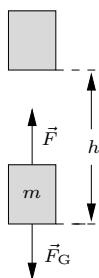
$$\Delta W = F \cdot \Delta x$$

Die Einheit der Arbeit ist

$$[W] = 1 \text{ J} = 1 \text{ Joule} = 1 \text{ Nm} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

Arbeit = Fläche unter dem  $xF$ -Diagramm

Ein Körper der Masse  $m$  wird mit konstanter Geschwindigkeit um die Höhe  $h$  senkrecht gehoben. Dabei muss die Gesamtkraft auf K null sein, d.h. der Betrag der hebenden Kraft  $\vec{F}$  muss gleich dem Betrag der Gewichtskraft sein:  $F = mg$ . Die *Hubarbeit* ist dann



$$W_H = mgh$$

Ein Körper der Masse  $m$  wird auf waagrechter Unterlage ohne Reibung von der Kraft  $F$  beschleunigt. In der Zeit  $t$  ändert sich die Geschwindigkeit des Körpers von null auf  $v$  und er bewegt sich um die Strecke  $\Delta x$ :

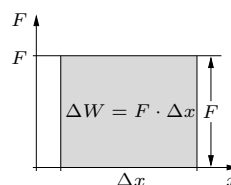
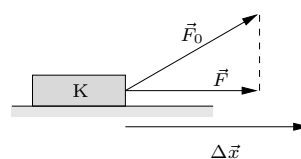
$$F = ma, \quad v = at, \quad \Delta x = \frac{a}{2} t^2$$

Die *Beschleunigungsarbeit* ist dann

$$W_B = F \cdot \Delta x = ma \cdot \frac{a}{2} t^2 = \frac{m}{2} \underbrace{(at)}_v^2$$

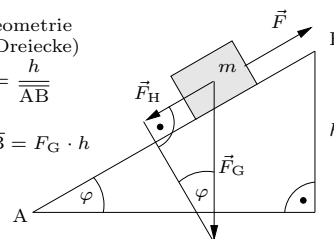
$$W_B = \frac{m}{2} v^2$$

### Beispiele



Aus der Geometrie (Ähnliche Dreiecke) folgt:  $\frac{F_H}{F_G} = \frac{h}{\overline{AB}}$

$$F_H \cdot \overline{AB} = F_G \cdot h$$



Ein Körper der Masse  $m$  wird mit konstanter Geschwindigkeit und ohne Reibung von der Kraft  $F$  eine schiefe Ebene der Länge  $\overline{AB}$  und der Höhe  $h$  hinaufgezogen. Wegen der konstanten Geschwindigkeit ist die Gesamtkraft auf den Körper null, insbesondere ist  $F = F_H$ . Die am Körper verrichtete Arbeit ist dann

$$W = F \cdot \overline{AB} = F_H \cdot \overline{AB} = F_G \cdot h = mgh$$

Allgemein gilt:

Ohne Reibung ist die Hubarbeit immer  $W_H = mgh$ , ganz gleich auf welchem Weg die Höhe  $h$  überwunden wird.

Ein Bergsteiger ( $m = 70 \text{ kg}$ ) steigt von Garmisch (700 m) auf die Zugspitze (2962 m). Dabei verrichtet er die Hubarbeit

$$W_h = mgh = 70 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 2262 \text{ m} = 1,55 \text{ MJ}$$

**Definitionen und Regeln**

Um die Arbeit zu berechnen, die beim Spannen oder Zusammendrücken einer Feder verrichtet wird, zeichnet man das  $xF$ -Diagramm. Nach HOOKE ist  $F(x) = Dx$ . Die *Spannarbeit* einer Feder ist dann (Fläche unter dem  $xF$ -Diagramm):

$$W_S = \frac{1}{2}x \cdot F(x) = \frac{1}{2}x \cdot Dx = \frac{D}{2}x^2$$

$$W_S = \frac{D}{2}x^2$$

Praktisch jede Bewegung ist mit Reibung verbunden. Die *Reibungsarbeit* ist einfach Reibungskraft mal Weg:

$$W_R = F_R \cdot \Delta x = \mu F_N \Delta x$$

**Die Energie**

*Energie* ist gespeicherte Arbeit, Energie ist die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.

Energieform	ist gespeicherte
potentielle Energie	Hubarbeit
kinetische Energie	Beschleunigungsarbeit
Spannenergie	Spannarbeit

Die potentielle Energie ist abhängig von der Wahl des Nullpunktes. In der Höhe  $h$  über dem Nullpunkt ist die potentielle Energie

$$W_{\text{pot}} = mgh$$

In einem Körper der Masse  $m$ , der sich mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, ist die kinetische Energie

$$W_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2$$

gespeichert.

In einer Feder mit der Federkonstanten  $D$ , die um die Strecke  $\Delta x$  gedehnt oder gestaucht ist, ist die Spannenergie

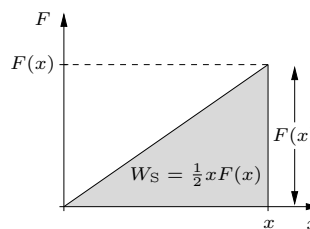
$$W_S = \frac{D}{2} \Delta x^2$$

gespeichert.

Bei Reibung entsteht Wärme:

Die Reibungsarbeit wird in *innere Energie*  $W_i$  eines Körpers umgewandelt.

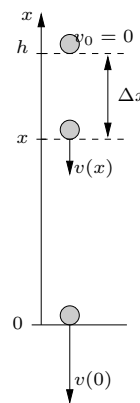
**Beispiele**



Beispiel: Ein Auto der Masse  $m = 900 \text{ kg}$  wird auf der Strecke  $\Delta x = 200 \text{ m}$  von null auf  $v = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  beschleunigt, die Reibungszahl (Rollreibung) ist  $\mu = 0,05$ . Die gesamte zu verrichtende Arbeit ist

$$W_{\text{ges}} = \underbrace{\frac{m}{2}v^2}_{405 \text{ kJ}} + \underbrace{\mu mg \Delta x}_{99 \text{ kJ}} = 504 \text{ kJ}$$

Ein Körper der Masse  $m$  ruht in der Höhe  $h$  über dem Boden und besitzt somit die potentielle Energie  $W_{\text{pot}} = mgh$  bezüglich des Bodens. Der Körper fällt nach unten. Während des Falls wirkt immer die Gewichtskraft  $F_G = mg$  auf den Körper und zwar über die ganze Strecke  $h$ . Deshalb wird am Körper die Beschleunigungsarbeit  $\Delta W = mgh$  verrichtet, d.h. seine kinetische Energie beim Aufprall auf den Boden ist  $W_{\text{kin}} = \Delta W = mgh$ .



In der Höhe  $x$  ist die kinetische Energie  $mg\Delta x = mgh - mgh(x)$ . Fassen wir zusammen:

Position	$W_{\text{pot}}$	$W_{\text{kin}}$	$W_{\text{ges}} = W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}}$
$x = h$	$mgh$	0	$mgh$
$x$	$mgx$	$mg(h - x)$	$mgh$
$x = 0$	0	$mgh$	$mgh$

Beim freien Fall ist die Gesamtenergie  $W_{\text{ges}} = W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}}$  des fallenden Körpers konstant, d.h.  $W_{\text{ges}}$  hat immer den gleichen Wert:

$$W_{\text{ges}} = W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}} = \text{konstant}$$

Die Atome eines Körpers sind in ständiger Bewegung (Schwingungen um eine Ruhelage). Die Summe aller Energien, die in der Bewegung und der Lage der Atome zueinander stecken, nennt man die *innere Energie*  $W_i$  des Körpers. Einer großen inneren Energie entspricht eine große Temperatur!

**Definitionen und Regeln**

Ein *abgeschlossenes System* ist ein System von Körpern, die zwar untereinander aber nicht mit anderen Körpern in Wechselwirkung stehen. Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist die Summe aller kinetischen, potentiellen, Spann- und inneren Energien der Körper des Systems.

Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist konstant.

(**Energiesatz**)

Für Anwendungen ist der Energiesatz in folgender Form am besten geeignet:

$$W_{\text{ges, vorher}} = W_{\text{ges, nachher}}$$

**Die Leistung**

Wer viel Arbeit in wenig Zeit verrichtet, der leistet viel, wer wenig Arbeit in viel Zeit verrichtet, der leistet wenig. Daher definiert man die Leistung  $P$ :

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Die Einheit der Leistung ist

$$[P] = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ W} = 1 \text{ Watt}$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Ws}$$

Als **Wirkungsgrad** oder **Leistungsziffer** einer Maschine definiert man

$$\eta = \frac{\text{Nutzleistung}}{\text{aufgewendete Leistung}} = \frac{P_N}{P_g}$$

Die aufgewendete Leistung oder Gesamtleistung  $P_g$  ist dabei die Summe aus der Nutzleistung  $P_N$  und der Verlustleistung  $P_V$ .  $P_V$  führt meistens zu einer Erwärmung der Maschine und der Umgebung (außer bei einer Heizung, da ist gerade die Wärmeleistung die Nutzleistung).

$$\eta = \frac{P_N}{P_g} = \frac{P_g - P_V}{P_g} = 1 - \frac{P_V}{P_g} \leq 1$$

**Beispiele**

Beispiele für die Anwendung des Energiesatzes:

Ein Eisstock der Masse  $m$  gleitet mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  über eine ebene Eisfläche, die Reibungszahl ist  $\mu = 0,09$ . Wie weit gleitet der Stock?

Am Anfang ist die Gesamtenergie des Eisstocks seine kinetische Energie, am Ende der Bewegung hat sich die gesamte kinetische Energie in innere Energie verwandelt (Reibungsarbeit):

$$\frac{m}{2} v_0^2 = \mu mg \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{15^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 0,09 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 127 \text{ m}$$

Wir können auch berechnen, welche Geschwindigkeit  $v_1$  der Eisstock nach der Strecke  $\Delta x_1 = 50 \text{ m}$  hat:

$$\frac{m}{2} v_0^2 = \mu mg \Delta x_1 + \frac{m}{2} v_1^2$$

$$v_1^2 = v_0^2 - 2\mu g \Delta x_1 = 137 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$v_1 = 11,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aus  $\Delta W = P \cdot \Delta t$  erhält man eine oft gebrauchte Einheit der Arbeit (Energie):

$$1 \text{ kWh} = 1 \text{ Kilowattstunde} = 1 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \text{ MJ}$$

Als Beispiel betrachten wir ein Auto der Masse  $m = 1000 \text{ kg}$ , das in  $\Delta t = 10 \text{ s}$  von 0 auf die Geschwindigkeit  $v = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  beschleunigt. Der Wirkungsgrad des Motors ist  $\eta = 30\%$ , ein Liter Benzin liefert die Energie  $30 \text{ MJ}$ , d.h. der Energieinhalt des Benzins ist  $E = 30 \frac{\text{MJ}}{\text{dm}^3}$ .

Beschleunigungsarbeit:  $\Delta W = \frac{m}{2} v^2 = 450 \text{ kJ}$

Nutzleistung des Motors:  $P_N = \frac{\Delta W}{\Delta t} = 45 \text{ kW}$

$$P_g = \frac{P_N}{\eta} = \frac{45 \text{ kW}}{0,3} = 150 \text{ kW}$$

Vom Benzin verrichtete Arbeit

$$W_B = \frac{\Delta W}{\eta} = P_g \cdot \Delta t = 1,5 \text{ MJ}$$

Der Benzinverbrauch für die Beschleunigung ist

$$V = \frac{W_B}{E} = \frac{1,5 \text{ MJ}}{30 \frac{\text{MJ}}{\text{dm}^3}} = 0,05 \text{ dm}^3 = 50 \text{ cm}^3$$

**Definitionen und Regeln**

**Kraftwandler**

Ein Kraftwandler ist eine mechanische Maschine mit einem Eingangspunkt E (z.B. ein Hebel oder ein Seilende) und einem Ausgangspunkt A. E wird von einer Kraft  $F_e$  um die Strecke  $e$  bewegt. Dabei bewegt sich A um die Strecke  $a$  und bewirkt dabei die Kraft  $F_a$  auf einen anderen Gegenstand. Bei einer idealen (reibungsfreien) Maschine folgt aus dem Energiesatz

$$F_e \cdot e = F_a \cdot a \implies F_a = \frac{e}{a} \cdot F_e$$

Mechanische Maschinen sind z.B. der Hebel, Flaschenzüge, Kettengeräte (Fahrrad), Zahnradgetriebe usw.

**Flaschenzüge**

Flaschenzüge bestehen aus Seilen und Rollen. Zur einfacheren Beschreibung nehmen wir an, dass die Rollen reibungsfrei und die Seile nicht dehnbar sind. Der einfachste Flaschenzug besteht aus einem Seil und einer Rolle (siehe nebenstehende Abbildung, links). Da die Seillänge konstant ist, gilt

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \implies h = a_1 - b_1 = b_2 - a_2$$

$$e + a_2 = h + b_2 \implies e = h + b_2 - a_2 = 2h$$

Um die Last um die Höhe  $h$  zu heben, muss man den Eingangspunkt E um die Strecke  $e = 2h$  bewegen. Da die Kraft  $F_a$  am Ausgang A gleich der Gewichtskraft  $mg$  der Last sein muss, muss man mit der Kraft  $F_e = \frac{a}{e} F_a = \frac{1}{2} mg$  am Eingangspunkt E ziehen.

Einfacher findet man die Ausgangskraft mit folgenden Regeln:

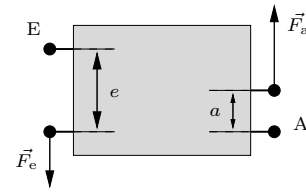
- Bei reibungsfreien Rollen ist die Spannkraft in einem Seilstück überall gleich.
- Parallele Kräfte addieren sich.

**Der Hebel**

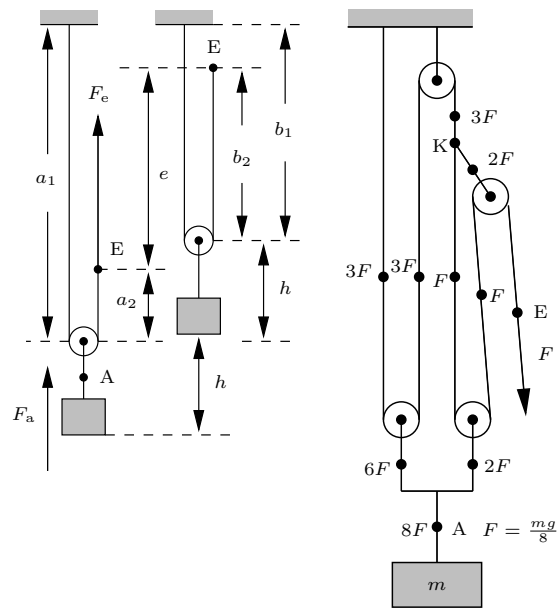
Ein Hebel ist ein starrer Körper mit einem Drehpunkt D. Auf den Eingangspunkt E wird die Kraft  $F_1$  ausgeübt, der Ausgangspunkt A bewirkt die Kraft  $F_2$  auf einen anderen Körper. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass  $\vec{F}_1 \perp \overline{ED}$  und  $\vec{F}_2 \perp \overline{AD}$ . E und A bewegen sich auf Kreisbögen mit den Längen  $b_1$  und  $b_2$ . Aus dem Energiesatz folgt  $F_1 b_1 = F_2 b_2$  und damit

$$F_1 a_1 = F_2 a_2$$

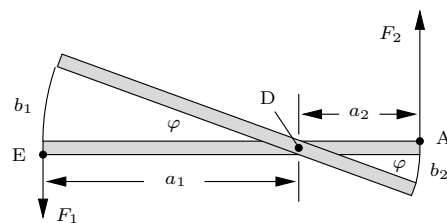
**Beispiele**



Ist die Ausgangskraft  $n$ -mal so groß wie die Eingangskraft, dann ist der Eingangsweg  $n$ -mal so groß wie der Ausgangsweg.



Die rechte Abbildung zeigt einen komplizierten Flaschenzug, der aber doch recht einfach zu berechnen ist. Im Seilstück von E bis zum Knoten K herrscht die Seilspannung  $F$ . An der rechten Rolle addieren sich zwei parallele Kräfte  $F$  zu  $2F$ , in K addieren sich  $2F$  und  $F$  zu  $3F$ . Die Seilspannung  $3F$  herrscht dann im Reststück des Seils.



$$b_1 = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot 2a_1\pi \text{ und } b_2 = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot 2a_2\pi$$

**Definitionen und Regeln**

**Der Druck**

Wirkt eine Kraft  $F$  senkrecht auf eine Fläche  $A$ , dann erzeugt die Kraft auf die Fläche den *Druck*

$$p = \frac{F}{A}$$

Die Einheit des Drucks ist

$$1 \text{ Pascal} = 1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Da 1 Pa ein sehr kleiner Druck ist, verwendet man häufig folgende Einheiten:

- 1 hPa = 100 Pa
- 1 kPa = 1000 Pa
- 1 MPa =  $10^6$  Pa
- 1 bar =  $10^5$  Pa (alte Einheit)
- 1 mbar = 100 Pa = 1 hPa (alte Einheit)

$$1 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 10^4 \text{ Pa} = 100 \text{ hPa}$$

**Druck in Flüssigkeiten**

Wirkt eine Kraft  $F_1$  über einen beweglichen, aber gut dichtenden Stempel der Fläche  $A_1$  (wie bei einer Spritze) auf eine eingeschlossene Flüssigkeit, dann herrscht überall in der Flüssigkeit der gleiche Druck

$$p = \frac{F_1}{A_1} \quad (\text{Stempeldruck})$$

Auf einen zweiten Stempel der Fläche  $A_2$  wirkt dann die Kraft

$$F_2 = p \cdot A_2 = \frac{A_2}{A_1} \cdot F_1$$

In der Tiefe  $h$  einer Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  herrscht der Druck der darüber befindlichen Flüssigkeitssäule (*Schweredruck*):

$$p(h) = \rho g h$$

Ein quaderförmiger Körper der Grundfläche  $A$  und der Höhe  $\Delta h = h_2 - h_1$  befindet sich wie in nebenstehender Abbildung in einer Flüssigkeit der Dichte  $\rho$ . Am Boden des Quaders herrscht der Druck  $p_2 = \rho g h_2$ , an der Deckfläche der kleinere Druck  $p_1 = \rho g h_1$ . Die von der Flüssigkeit auf den Quader ausgeübte Gesamtkraft (*Auftrieb*) ist

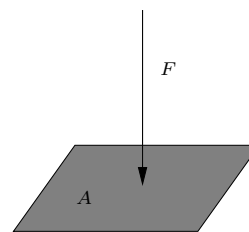
$$F_A = F_2 - F_1 = p_2 A - p_1 A = \rho g A (h_2 - h_1)$$

$$F_A = \rho V g$$

**Beispiele**

$F$  wirkt gleichmäßig über die ganze Fläche  $A$ .

$$\text{Druck} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$$

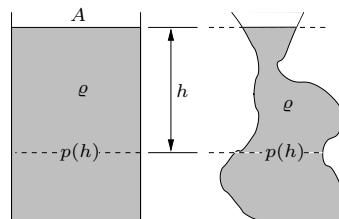
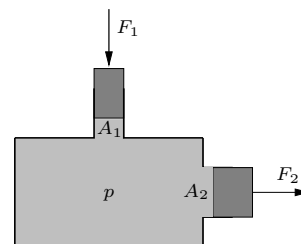


Ein Skifahrer der Masse  $m = 80 \text{ kg}$  mit 2 m langen und 9 cm breiten Skiern übt auf den Schnee folgenden Druck aus:

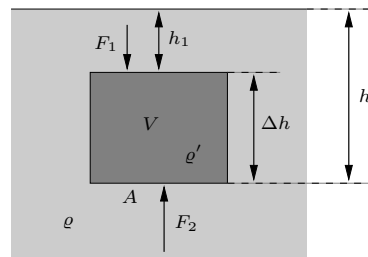
$$p = \frac{mg}{A} = \frac{80 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}}{2 \cdot 200 \cdot 9 \text{ cm}^2} = 0,218 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 21,8 \text{ hPa}$$

Eine Eisläuferin der Masse  $m = 50 \text{ kg}$  mit 30 cm langen und 0,5 cm breiten Schlittschuhkufen übt auf das Eis folgenden Druck (sie steht nur mit einem Schlittschuh auf dem Eis) aus:

$$p = \frac{mg}{A} = \frac{50 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}}{30 \cdot 0,5 \text{ cm}^2} = 32,7 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 327 \text{ kPa}$$



Der Schweredruck ist für alle Gefäßformen gleich!



Allgemein gilt:

$$\text{Der Auftrieb ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.}$$

# Wärme

## Die Temperatur

Auf S.3 haben wir den Aufbau der Materie aus Atomen und Molekülen kennen gelernt. Da in der uns umgebenden Materie viel Energie vorhanden ist, sind die Atome und Moleküle in einer andauernden Bewegung; die gesamte kinetische Energie aller Atome eines Körpers nenne wir  $W_k$ .

Ein Körper fühlt sich heiß an, wenn seine Moleküle beim Auftreffen auf die Haut deren Zellen zerstören können. Dazu müssen die Teilchen eine große kinetische Energie besitzen. Man definiert die *Temperatur* eines Körpers also so, dass sie proportional zur mittleren kinetischen Energie  $\overline{W}_k$  der Teilchen ist.

Da die kinetische Energie nicht kleiner als null werden kann, gibt es eine kleinste Temperatur  $T = 0$ , den *absoluten Temperaturnullpunkt*, die nicht unterschritten werden kann. Der absolute Nullpunkt entspricht einem vollständigen Stillstand der Teilchen:  $\overline{W}_k(0) = 0$ .

Definition der Temperatureinheit K (Kelvin):

Ist  $T_1$  die Temperatur des schmelzenden Eises und  $T_2$  die Temperatur des siedenden Wassers (bei Normaldruck), dann ist

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 100 \text{ K}$$

Experimente ergeben (siehe Kasten rechts), dass dem Schmelzpunkt des Eises die Temperatur  $T_1 = 273,15 \text{ K}$  entspricht. Die eben eingeführte Temperatur  $T$  nennt man die *absolute Temperatur*. Neben der Kelvinskala (absolute Temperatur) wird, hauptsächlich im Alltag, die *Celsiuskala* der Temperatur verwendet. Die Celsiuskala ist die um  $273,15 \text{ K}$  verschobene Kelvinskala, d.h.

$$0 \text{ K} = -273,15 \text{ }^\circ\text{C}, \quad 273,15 \text{ K} = 0 \text{ }^\circ\text{C}, \quad \text{usw.}$$

Bezeichnen wir die absolute Temperatur mit  $T$  und die gleiche Temperatur in der Celsiuskala mit  $\vartheta$ , dann gelten die Umrechnungsformeln

$$T = \left( \frac{\vartheta}{^\circ\text{C}} + 273,15 \right) \text{ K}$$

$$\vartheta = \left( \frac{T}{\text{K}} - 273,15 \right) \text{ }^\circ\text{C}$$

Temperaturdifferenzen gibt man immer in Kelvin an.

**Temperatenausgleich:**

Sich berührende Körper nehmen nach einiger Zeit die gleiche Temperatur an (Ausgleichstemperatur).

Ein Körper (es kann auch ein Gas oder eine Flüssigkeit sein) enthält  $N$  Moleküle. Ist  $W_{kn}$  die kinetische Energie von Teilchen Nummer  $n$ , dann ist die gesamte kinetische Energie der Teilchen

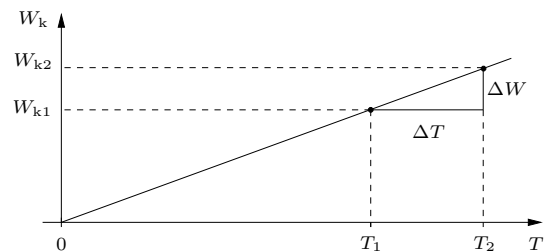
$$W_k = W_{k1} + W_{k2} + \dots + W_{kN}$$

Die mittlere kinetische Energie eines Teilchens ist

$$\overline{W}_k = \frac{1}{N} (W_{k1} + W_{k2} + \dots + W_{kN}) = \frac{W_k}{N}$$

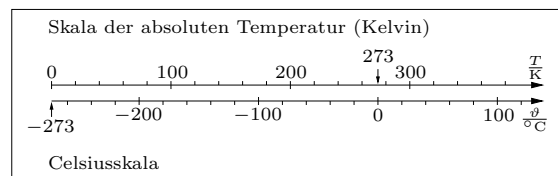
**Experiment zur Temperaturdefinition:**

Einen Behälter mit Sauerstoffgas ( $\text{O}_2$ ) taucht man einmal in Eiswasser ( $T_1$ ) und einmal in siedendes Wasser ( $T_2$ ). Durch ein feines Loch im Behälter treten  $\text{O}_2$ -Moleküle aus, deren mittlere kinetische Energie mit raffinierten Methoden gemessen wird. Als Ergebnis erhält man  $W_{k1} = 5,657 \cdot 10^{-21} \text{ J}$  und  $W_{k2} = 7,728 \cdot 10^{-21} \text{ J}$ .



$$\frac{W_{k1}}{T_1} = \frac{\Delta W}{\Delta T} = \frac{W_{k2} - W_{k1}}{\Delta T} \implies$$

$$T_1 = \frac{W_{k1} \cdot \Delta T}{W_{k2} - W_{k1}} = \frac{5,657 \cdot 100 \text{ K}}{2,071} = 273,15 \text{ K}$$



$$20 \text{ }^\circ\text{C} = \left( \frac{20 \text{ }^\circ\text{C}}{^\circ\text{C}} + 273,15 \right) \text{ K} = 293,15 \text{ K}$$

$$180 \text{ K} = \left( \frac{180 \text{ K}}{\text{K}} - 273,15 \right) \text{ }^\circ\text{C} = -93,15 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\vartheta_1 = 23 \text{ }^\circ\text{C}, \quad \vartheta_2 = -11 \text{ }^\circ\text{C}, \quad \Delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2 = 34 \text{ K}$$

Beispiele für Temperaturen:

- Siedepunkt von Helium: 4,21 K
- Zündholzflamme: 800 °C
- Sonnenoberfläche: 5800 K
- im Inneren der Sonne:  $1,6 \cdot 10^7 \text{ K}$

## Aggregatzustände

Zwischen den Atomen wirken Kräfte, die eine potentielle Energie hervorrufen; die gesamte potentielle Energie aller Atome eines Körpers nenne wir  $W_p$ .

Die *innere Energie*  $W_i$  eines Körpers ist die Summe aller kinetischen Energien der Teilchen und der potentiellen Energie:

$$W_i = W_k + W_p$$

Alle Eigenschaften eines Körpers folgen daraus, wie sich die potentielle Energie aus der Lage der Moleküle zueinander berechnet. Dabei spielen nicht nur die Orte der Teilchen eine Rolle, sondern auch ihre räumliche Ausrichtung. Die potentielle Energie kann sich somit sogar ändern, wenn die Moleküle nur gedreht werden und ihre Abstände zueinander gleich bleiben.

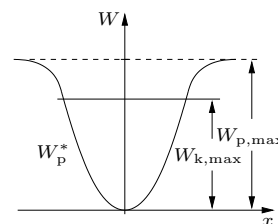
Die gesamte potentielle Energie eines Körpers ist minimal, wenn die Moleküle regelmäßig angeordnet sind (Gitterstruktur, Kristallgitter). Wenn die mittlere kinetische Energie der Teilchen nicht zu groß ist, d.h. wenn die Temperatur  $T$  einen gewissen Wert  $T_s$  nicht überschreitet, sind die Teilchen im Energietal gefangen und bleiben, bis auf Zitterbewegungen, an ihrem Ort. Die Teilchen bilden also ein stabiles Gebilde, einen *Festkörper*.

Erwärmt man einen Festkörper bis zur Temperatur  $T_s$  und führt noch weiter Energie zu, dann können die Teilchen ihr Energietal verlassen und die regelmäßige Anordnung der Moleküle wird zerstört. Dadurch erhöht sich die potentielle Energie  $W_p$  des Körpers,  $\bar{W}_k$  und damit auch  $T$  bleiben konstant, bis das ganze Gitter zerstört ist: der Körper schmilzt, er geht vom festen in den flüssigen Zustand über.  $T_s$  heißt *Schmelztemperatur*.

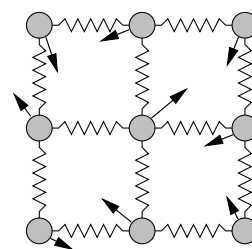
Am Rand der Flüssigkeit macht die potentielle Energie eines Teilchens einen Sprung der Höhe  $\Delta W_p$ . Ein Molekül an der Flüssigkeitsoberfläche kann diese also nur dann verlassen, wenn seine kinetische Energie größer als  $\Delta W_p$  ist. Auch wenn die *mittlere* kinetische Energie  $\bar{W}_k < \Delta W_p$  ist, haben einige Teilchen an der Oberfläche eine kinetische Energie größer als  $\Delta W_p$ . Diese Teilchen verlassen die Flüssigkeit, sie *verdunsten*. Beim Verdunsten verlassen nur die schnellsten Teilchen die Flüssigkeit, die mittlere kinetische Energie der verbleibenden Teilchen wird dadurch kleiner, die Flüssigkeit wird kälter.

Die verdunsteten Teilchen schwirren über der Flüssigkeit frei durch den Raum, sie bilden jetzt ein *Gas* bzw. einen *Dampf*.

Nebenstehende Abb. zeigt den Verlauf der potentiellen Energie  $W_p^*$  eines Teilchens in einem Kristallgitter. Dabei ist  $x$  die Entfernung des Teilchens von seiner Ruhelage. Ist die maximale kinetische Energie  $W_{k,max}$  des Teilchens kleiner als  $W_{p,max}$ , dann ist das Teilchen im Energietal gefangen und schwingt um seine Ruhelage hin und her (wie eine Kugel in einer Schüssel hin und her rollt.).



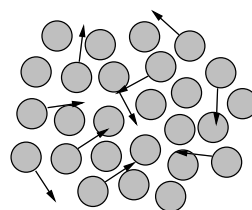
Im Festkörper schwingen die Teilchen um eine feste Ruhelage.



Modell: Durch Federn verbundene Kugeln.

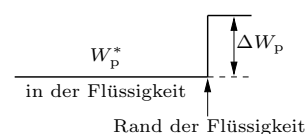
Modell für eine Flüssigkeit:

Sich aneinander vorbeimogelnde Menschen in einer dichten Menschenmenge.

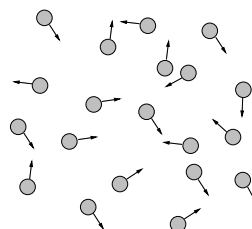


In der Flüssigkeit ändert sich die potentielle Energie nicht, wenn sich die Teilchen nur gegenseitig verschieben, ohne dass sich ihre mittlere gegenseitige Entfernung ändert. Daher ist eine Flüssigkeit nicht mehr formstabil wie ein Festkörper, aber sie ist bestrebt ihr Volumen konstant zu halten.

Verlauf der potentiellen Energie  $W_p^*$  eines Teilchens am Rand der Flüssigkeit.



In einem Gas bewegen sich die Teilchen frei durch den Raum.



Modell für ein Gas: Ein Mückenschwarm.

**Die drei Aggregatzustände:**  
fest – flüssig – gasförmig

### Druck in Gasen

Die Gasteilchen werden an den Gefäßwänden reflektiert und erzeugen dadurch einen Druck  $p$  auf die Wände. Wird das Gasvolumen  $V$  bei gleich bleibender Gasmenge (konstanter Teilchenzahl  $N$ ) halbiert, dann treffen in der gleichen Zeit doppelt so viele Moleküle pro  $\text{cm}^2$  auf die Gefäßwand, d.h. der Druck wird doppelt so groß. Der Gasdruck  $p$  ist bei konstanter Teilchenzahl  $N$  also umgekehrt proportional zum Gasvolumen  $V$ . Bei doppelter Teilchenzahl verdoppelt sich der Druck ebenfalls, d.h.  $p$  ist proportional zu  $N$ . Bei doppelter Teilchengeschwindigkeit  $v$  verdoppelt sich die Kraft, die bei einem Stoß auf die Wand übertragen wird und es verdoppelt sich auch die Zahl der Stöße auf die Wand. Daher wird bei doppeltem  $v$  der Druck viermal so groß:  $p$  ist proportional zu  $v^2$  und damit proportional zur kinetischen Energie und damit proportional zur Temperatur  $T$ .

$$p \sim \frac{1}{V} \text{ und } p \sim N \text{ und } p \sim T \implies$$

$$p \sim \frac{NT}{V} \quad \text{oder} \quad p = k \cdot \frac{NT}{V}$$

$$\boxed{\frac{pV}{T} = Nk}$$

(Allgemeine Gasgleichung)

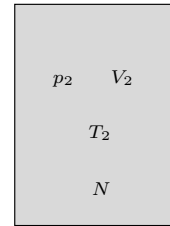
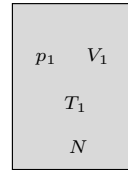
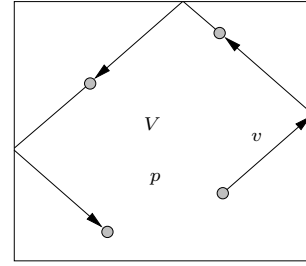
An der Erdoberfläche leben wir am Grund eines „Luftozeans“. Den Schweredruck der ganzen über uns befindlichen Luftsäule verspüren wir als *Luftdruck*. Im Mittel ist der Luftdruck auf Meereshöhe

$$\boxed{p_0 = 1013 \text{ hPa} \quad (\text{Normaldruck})}$$

In einem geschlossenen Gefäß üben die verdunsteten Moleküle über einer Flüssigkeit (Dampf) auf die Gefäßwände einen Druck aus, den *Dampfdruck*  $p_D$ . Da bei einer höheren Temperatur mehr Teilchen im gasförmigen Zustand sind und jedes dieser Teilchen auch mehr kinetische Energie hat, ist der Dampfdruck bei einer höheren Temperatur größer.

Wenn der Dampfdruck  $p_D$  einer Flüssigkeit genauso groß oder größer als der Druck  $p$  in der Flüssigkeit ist, dann bilden sich Dampfblasen in der Flüssigkeit, sie *siedet* (kocht). In einem offenen Gefäß setzt sich der Druck  $p$  in der Flüssigkeit aus dem Luftdruck  $p_L$  und dem Schweredruck  $\rho gh$  zusammen. Dicht unter der Flüssigkeitsoberfläche gilt  $p \approx p_L$ , die Flüssigkeit siedet also, wenn  $p_D > p_L$ . Die *Siedetemperatur* oder *Verdampfungstemperatur*  $T_v$  markiert den Beginn des Siedens und es gilt  $p_D(T_v) = p_L$ .

In der Höhe  $h = 3000 \text{ m}$  ist der mittlere Luftdruck  $701 \text{ hPa}$ , bei diesem Druck siedet das Wasser bei  $90^\circ\text{C}$ .



Für ein Gas mit konstanter Teilchenzahl  $N$  lautet die Gasgleichung:

$$\frac{pV}{T} = \text{konstant} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}}$$

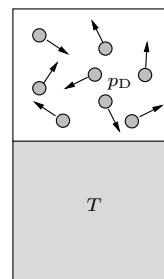
Spezialfälle der Gasgleichung:

Bei konstantem Druck ist  $V \sim T$ , d.h.  $\boxed{\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}}$ .

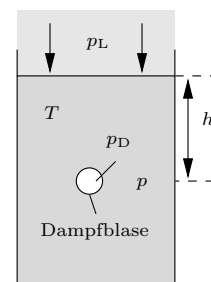
Bei konstanter Temperatur ist  $p$  umgekehrt proportional zu  $V$ , d.h.  $\boxed{p_1 V_1 = p_2 V_2}$ .

Der mittlere Luftdruck  $p_L$  in Abhängigkeit von der Höhe  $h$  über dem Meeresspiegel:

$\frac{h}{\text{m}}$	0	700	1000	2000	3000
$\frac{p_L}{\text{hPa}}$	1013	933	899	795	701



Dampfdruck



siedendes Wasser

Dampfdruck von Wasser:

$\frac{T}{^\circ\text{C}}$	0	20	80	90	100	120
$\frac{p_D}{\text{hPa}}$	6,1	23,4	474	701	1013	1985

Siedetemperatur  $T_v$  von Wasser in Abhängigkeit von der Höhe  $h$  über dem Meer:

$\frac{h}{\text{m}}$	0	500	700	1000	2000	3000
$\frac{T_v}{^\circ\text{C}}$	100	98,4	97,7	96,7	93,4	90,0



## Innere Energie

Da der Nullpunkt der potentiellen Energie beliebig gewählt werden kann, wählen wir ihn so, dass die potentielle Energie der Teilchen am absoluten Nullpunkt null ist:  $W_p(0) = 0$ . Damit gilt für die gesamte kinetische, potentielle und innere Energie eines Körpers

$$W_k(0) = W_p(0) = W_i(0) = 0$$

Wir betrachten die Erwärmung eines Körpers der Masse  $m$ , beginnend beim absoluten Nullpunkt  $T = 0$ :

Beim Erwärmen steigt  $W_k$ , durch das heftigere Schwingen der Teilchen wird die mittlere Entfernung der Teilchen etwas größer und damit steigt auch die potentielle Energie  $W_p$ . Die kinetische Energie  $W_k$  ist nach Definition der Temperatur proportional zu  $T$ , für  $W_p$  sind die Verhältnisse in der Nähe des absoluten Nullpunkts sehr kompliziert, aber für nicht zu kleine  $T$  ist die Änderung  $\Delta W_p$  der potentiellen Energie proportional zur Änderung  $\Delta T$  der Temperatur:

$$\Delta W_k = k_1 \Delta T, \quad \Delta W_p = k_2 \Delta T \implies$$

$$\Delta W_i = \Delta W_k + \Delta W_p = \underbrace{(k_1 + k_2)}_C \Delta T$$

Die Proportionalitätskonstante  $C$  selbst ist zur Masse  $m$  des Körpers proportional (doppelte Masse – doppelte Teilchenzahl – doppelte Energie), d.h.  $C = cm$ .  $c$  ist nur vom Material abhängig und heißt *spezifischen Wärmekapazität*.

Erreicht die Temperatur beim Erwärmen des Festkörpers die Schmelztemperatur  $T_s$ , dann wird die ganze zugeführte Energie zum Schmelzen (Zerstören der regelmäßigen Anordnung der Teilchen) verwendet. Die Temperatur und damit auch  $W_k$  bleiben während des Schmelzens konstant, die potentielle Energie nimmt um den Betrag

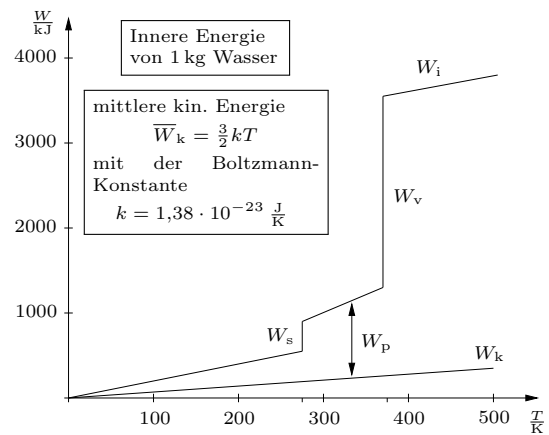
$$W_s = q_s m$$

zu.  $W_s$  ist die *Schmelzenergie* oder *Schmelzwärme*,  $q_s$  heißt *spezifische Schmelzwärme*.

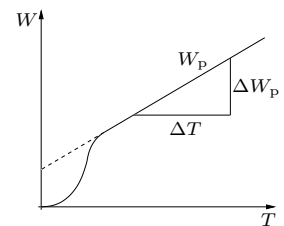
Ist der ganze Körper geschmolzen, erwärmt sich die Flüssigkeit, die mittlere Teilchenentfernung wird größer,  $W_k$  und  $W_p$  werden größer. Wenn  $T$  die *Siedetemperatur*  $T_v$  erreicht, wird die ganze zugeführte Energie zum Verdampfen verwendet. Die Temperatur und damit auch  $W_k$  bleiben während des Verdampfens konstant, die potentielle Energie nimmt um den Betrag

$$W_v = q_v m$$

zu.  $W_v$  ist die *Verdampfungswärme*,  $q_v$  heißt *spezifische Verdampfungswärme*.



Ungefäher Verlauf der potentiellen Energie eines Körpers in der Nähe des absoluten Nullpunkts.  $W_p$  ist nicht exakt proportional zu  $T$ , aber für nicht zu kleine  $T$  ist  $\Delta W_p \sim \Delta T$ .



Allgemein gilt:

Innerhalb eines Aggregatzustands ist die Änderung  $\Delta W_i$  der inneren Energie eines Körpers proportional zu seiner Masse  $m$  und zur Änderung  $\Delta T$  der Temperatur:

$$\Delta W_i = mc\Delta T$$

mit der *spezifischen Wärmekapazität*  $c$ .

Die spezifische Wärmekapazität von  $H_2O$ :

	fest (Eis)	flüssig (Wasser)	gasförmig (Dampf)
$c$ in $\frac{kJ}{kg K}$	2,06	4,19	1,87

Thermische Daten einiger Stoffe:

Stoff	$H_2O$	Eisen	Quecksilber
$T_s$ in $^{\circ}C$	0	1535	-38,9
$q_s$ in $\frac{kJ}{kg}$	334	277	11,8
$T_v$ in $^{\circ}C$	100	2730	356,6
$q_v$ in $\frac{kJ}{kg}$	2257	6340	285

Der Übergang vom gasförmigen in den flüssigen Zustand heißt *Kondensieren*, der Übergang vom flüssigen in den festen Zustand *Erstarren*.

Beim Kondensieren wird die Verdampfungswärme und beim Erstarren die Schmelzwärme wieder an die Umgebung abgegeben.

### Wärmekapazität von Gasen

Da die mittlere Entfernung der Moleküle in Gasen relativ groß ist, sind die Kräfte zwischen den Gasmolekülen sehr klein und die potentielle Energie eines Gases ändert sich fast nicht mehr, wenn sich die Temperatur ändert.

Bei einatomigen Gasen (Edelgase wie Helium, Neon, Argon) ist die Änderung der inneren Energie gleich der Änderung der kinetischen Energie, d.h.  $\Delta W_i = \Delta W_k$ . Ist  $M$  die Masse eines Moleküls und  $N$  die Zahl der Moleküle, dann gilt  $m = NM$  und  $\Delta W_k = N\Delta\bar{W}_k$  und damit für die spezifische Wärmekapazität

$$c = \frac{\Delta W_k}{m} = \frac{\Delta\bar{W}_k}{M} = \frac{3k}{2M}$$

(einatomiges Gas)

### Wärmeausdehnung

Festkörper und Flüssigkeiten dehnen sich bei Erwärmung aus. Ein Stab der Länge  $x$  dehnt sich bei der Temperaturerhöhung  $\Delta T$  um die Länge  $\Delta x$  aus. Ein doppelt so langer Stab dehnt sich bei der gleichen Temperaturerhöhung um  $2\Delta x$  aus. Die Längenänderung  $\Delta x$  ist also proportional zu  $x$ .  $\Delta x$  ist auch proportional zur Temperaturerhöhung  $\Delta T$ . Zusammengefasst ergibt sich

$$\Delta x = \alpha x \Delta T$$

mit der vom Material abhängigen *Längenausdehnungszahl*  $\alpha$ .  $x(T)$  ist die Länge eines Stabes bei der Temperatur  $T$ :

$$x(T + \Delta T) = x(T) + \Delta x = x(T) + \alpha x(T) \Delta T$$

$$x(T + \Delta T) = x(T)(1 + \alpha \Delta T)$$

Ein Würfel hat bei der Temperatur  $T$  die Kantenlänge  $a$  und das Volumen  $V = a^3$ . Bei der Temperatur  $T + \Delta T$  hat er die Kantenlänge

$$a' = a(1 + \alpha \Delta T)$$

und das Volumen

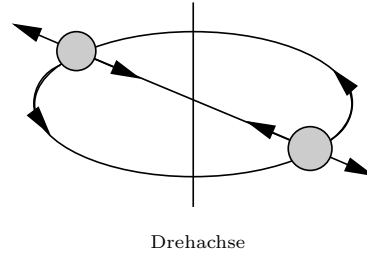
$$V' = (a')^3 = a^3(1 + \alpha \Delta T)^3 = V(1 + \alpha \Delta T)^3$$

Da  $\alpha \Delta T$  sehr klein ist, gilt in guter Näherung

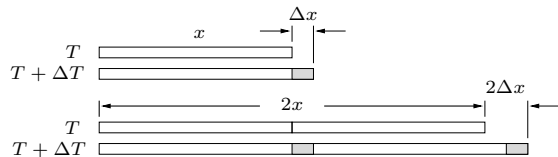
$$V' \approx V(1 + 3\alpha \Delta T) = V(1 + \gamma \Delta T)$$

mit der *Volumenausdehnungszahl*  $\gamma = 3\alpha$ .

Da Flüssigkeiten meistens in einem Gefäß sind, macht die Angabe der Längenausdehnungszahl für Flüssigkeiten wenig Sinn. Für Flüssigkeiten gibt man also die Volumenausdehnungszahl  $\gamma$  an. Die Wärmeausdehnung von Gasen regelt die allgemeine Gasgleichung.



Mehratomige Moleküle können um eine Achse rotieren und die Atome können gegeneinander schwingen. Die Rotationsenergie und die Schwingungsenergie der Moleküle sind Teil der inneren Energie des Gases und tragen zur spezifischen Wärmekapazität bei.



Längenausdehnungszahlen einiger fester Stoffe:			
Stoff	Alu	Eisen	Gold
$\alpha$ in $\frac{1}{K}$	$2,38 \cdot 10^{-5}$	$1,20 \cdot 10^{-5}$	$1,43 \cdot 10^{-5}$

Ein Eisenwürfel mit der Kantenlänge  $a = 1$  m und dem Volumen  $V = 1 \text{ m}^3$  wird um  $\Delta T = 10$  K erwärmt:

$$\begin{aligned} V' &= V(T + \Delta T) = 1 \text{ m}^3 \cdot (1 + 1,2 \cdot 10^{-4})^3 = \\ &= 1 \text{ m}^3 \cdot 1,00012^3 = 1,000360043201728 \text{ m}^3 \approx \\ &\approx 1,00036 \text{ m}^3 = 1 \text{ m}^3 \cdot (1 + 3 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4}) \end{aligned}$$

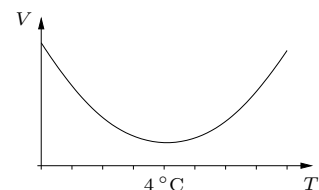
An dem Beispiel erkennt man:

$$(1 + \alpha \Delta T)^3 \approx 1 + 3\alpha \Delta T$$

Volumenausdehnungszahlen von Flüssigkeiten:			
Stoff	Wasser	Quecksilber	Benzin
$\gamma$ in $\frac{1}{K}$	$20,7 \cdot 10^{-5}$	$18,1 \cdot 10^{-5}$	$106 \cdot 10^{-5}$

### Anomalie des Wassers:

Bei  $4^\circ\text{C}$  hat das Volumen von Wasser ein Minimum, die Dichte ein Maximum.



# Elektrizität

## Definitionen und Regeln

### Stromstärke

Die Einheit der elektrischen Ladung ist das **Coulomb** (die Ladung von  $6,242 \cdot 10^{18}$  Protonen):

$$1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ C} = 6,242 \cdot 10^{18} e$$

Dabei ist  $e$  die *Elementarladung* (Ladung eines Protons):

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Die Ladung eines Elektrons ist  $-e$  (eine negative Elementarladung).

Fließt in der Zeit  $\Delta t$  die Ladung  $\Delta Q$  durch die Querschnittsfläche eines Leiters, dann ist die *Stromstärke* im Leiter

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$\Delta Q = I \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\Delta Q}{I}$$

Die Einheit der Stromstärke ist

$$1 \text{ Ampere} = 1 \text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}}$$

$$1 \text{ C} = 1 \text{ As}$$

## Die elektrische Spannung

Im Raum um elektrische Ladungen herum wirkt auf eine weitere Ladung  $q$  eine Kraft. Man spricht davon, dass im Raum um Ladungen herum ein elektrisches Kraftfeld oder kurz ein *elektrisches Feld* herrscht. Wird die Ladung  $q$  vom Punkt A zum Punkt B bewegt, dann wird vom elektrischen Feld die Arbeit  $W_{AB}$  an  $q$  verrichtet. Eine Eigenschaft elektrischer Felder ist, dass  $W_{AB}$  auf jedem Weg von A nach B gleich ist. Diese Wegunabhängigkeit der Arbeit bedeutet, dass  $W_{AB}$  eindeutig festgelegt ist. Die Kraft auf  $q$  und damit auch die Arbeit  $W_{AB}$  ist zu  $q$  proportional (doppelte Ladung, doppelte Arbeit). Die Proportionalitätskonstante

$$U = \frac{W_{AB}}{q}$$

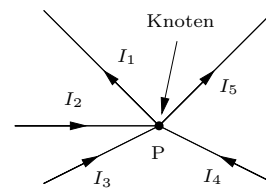
heißt *elektrische Spannung* zwischen A und B.  $W_{AB} = qU$  ist die potentielle Energie der Ladung  $q$  am Ort B bezüglich des Punktes A.

## Beispiele

Es ist eine experimentell abgesicherte Tatsache, dass sich ein Verzweigungspunkt P (*Knoten*) einer elektrischen Schaltung nicht auflädt, d.h. die pro Sekunde in den Knoten hineinfließende Ladung muss gleich der pro Sekunde vom Knoten abfließenden Ladung sein. Da aber „Ladung pro Zeit“ nichts anderes als die Stromstärke ist, gilt folgende Regel:

Die Summe der in einen Knoten P hineinfließenden Ströme ist gleich der Summe der von P abfließenden Ströme.

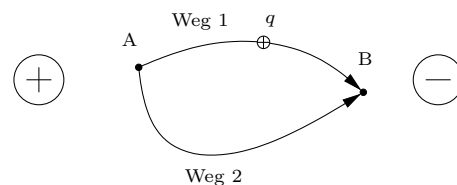
### (1. Kirchhoff'sche Regel)



$$I_2 + I_3 + I_4 = I_1 + I_5$$

Beispiel: Durch eine Überlandleitung fließt ein Strom der Stärke  $I = 800 \text{ A}$ . In einer Stunde fließt also die Ladung  $\Delta Q = 800 \text{ A} \cdot 3600 \text{ s} = 2,88 \cdot 10^6 \text{ C}$  durch den Leiterquerschnitt, das sind

$$n = \frac{\Delta Q}{e} = 1,80 \cdot 10^{25} \text{ Elektronen.}$$



Die Einheit der elektrischen Spannung ist

$$1 \text{ Volt} = 1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

Beispiel: In einer Bildröhre wird ein zunächst ruhendes Elektron von der Spannung  $U = 5000 \text{ V}$  beschleunigt. Die am Elektron verrichtete Arbeit wird in kinetische Energie des Teilchens verwandelt:

$$\frac{m}{2} v^2 = eU \implies v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 4,2 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Definitionen und Regeln**

**Die Leistung einer Stromquelle**

An den Enden A und B eines Leiters liegt die Spannung  $U = U_{AB}$  und durch den Leiter fließt der Strom  $I$ . In der Zeit  $\Delta t$  fließt dann die Ladung  $\Delta Q = I \cdot \Delta t$  durch einen Leiterquerschnitt. In dieser Zeitspanne  $\Delta t$  wird an der Ladung  $\Delta Q$  von  $U$  die Arbeit  $\Delta W = \Delta Q \cdot U$  verrichtet. Die an die bewegte Ladung  $\Delta Q$  abgegebene Energie  $\Delta W$  stammt von der Stromquelle. Die Stromquelle abgegebene Leistung ist also

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{U \Delta Q}{\Delta t} = U \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t} = UI$$

Fließt von einer Stromquelle der Spannung  $U$  der Strom  $I$  durch einen Leiter, dann ist die von der Stromquelle abgegebene Leistung

$$P = UI$$

Für die Einheiten gilt:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ VA} \quad \text{und} \quad 1 \text{ J} = 1 \text{ Ws} = 1 \text{ VAs}$$

1 kWh (Kilowattstunde) ist die Energie, die bei der Leistung 1 kW in 1 h umgesetzt wird:

$$1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

**Der elektrische Widerstand**

Liegt an den Enden eines Leiters die Spannung  $U$  und fließt durch den Leiter der Strom  $I$ , dann heißt

$$R = \frac{U}{I}$$

der *Widerstand* des Leiters.

Die Einheit des elektrischen Widerstands ist

$$1 \Omega = 1 \text{ Ohm} = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

**Ohmsches Gesetz:**

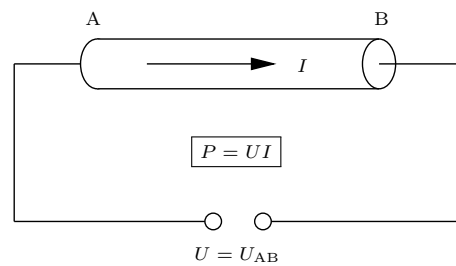
Bei konstanter Temperatur ist der Widerstand eines Leiters konstant.

Andere Formulierung des Ohmschen Gesetzes:

Bei konstanter Leitertemperatur  $T$  ist die Spannung  $U$  zwischen den Leiterenden zum Strom  $I$  durch den Leiter proportional, die Proportionalitätskonstante ist der Widerstand:

$$\frac{U}{I} = R = \text{konst. wenn } T \text{ konstant}$$

**Beispiele**



Beispiel: Ein Elektromotor mit dem Wirkungsgrad  $\eta = 75\%$ , der an das Haushaltsnetz angeschlossen ist ( $U = 230 \text{ V}$ ), wird von einem Strom der Stärke  $I = 3,6 \text{ A}$  durchflossen. In welcher Zeit kann dieser Motor eine Last der Masse  $m = 50 \text{ kg}$   $h = 16 \text{ m}$  hoch heben?

Die mechanische Leistung des Motors ist

$$P = \eta UI = 0,7 \cdot 230 \text{ V} \cdot 3,6 \text{ A} = 621 \text{ W}$$

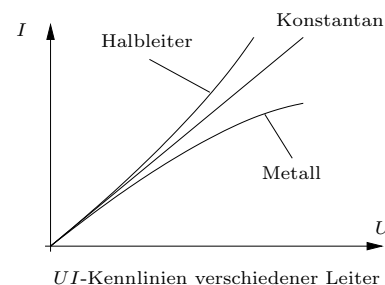
Die zu verrichtende Arbeit ist

$$\Delta W = mgh = P \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\Delta W}{P} = \frac{7848 \text{ J}}{621 \text{ W}} = 13 \text{ s}$$

Der Widerstand der meisten Leiter ist temperaturabhängig:

- Bei Metallen (Kupfer, Eisen, ...) steigt der Widerstand mit steigender Temperatur
- Bei Halbleitern (Germanium, Silizium, ...) fällt der Widerstand mit steigender Temperatur
- Bei bestimmten Legierungen (z.B. Konstantan) ist der Widerstand in einem großen Temperaturbereich konstant.



Beispiel: Ein Bügeleisen, das bei  $U = 230 \text{ V}$  vom Strom  $I = 5,75 \text{ A}$  durchflossen wird, hat den Widerstand

$$R = \frac{U}{I} = 40 \Omega.$$

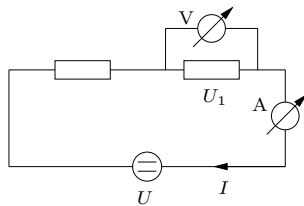
**Definitionen und Regeln**

An den Enden eines Widerstands  $R$  liegt die Spannung  $U$ , der Widerstand wird vom Strom  $I$  durchflossen. Die im Widerstand umgesetzte Leistung ist

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

Ein Strommessgerät (Ampèremeter) muss von dem Strom, den es messen soll, durchflossen werden.

Ein Spannungsmessgerät (Voltmeter) muss an die Punkte angeschlossen werden, zwischen denen die Spannung gemessen werden soll. In nebenstehender Schaltung misst das Ampèremeter den Strom  $I$  und das Voltmeter die Spannung  $U_1$ .



**Beispiele**

Schaltsymbole:

- Stromquelle (Gleichstrom)
- Stromquelle (Wechselstrom)
- Stromquelle
- Batterie
- Glühlampe
- Widerstand
- Spannungsmessgerät
- Strommessgerät
- Schalter
- Diode (lässt den Strom nur in einer Richtung durch)

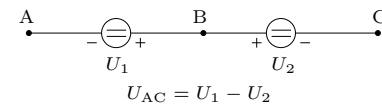
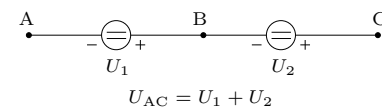
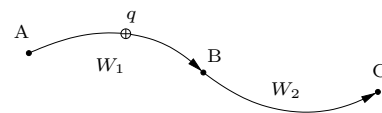
**Schaltung von Stromquellen**

A, B und C sind drei beliebige Punkte. Eine Testladung  $q$  wird von A über B nach C transportiert, die an  $q$  verrichteten Arbeiten sind  $W_1 = W_{AB}$  und  $W_2 = W_{BC}$ . Dann gilt

$$U_{AC} = \frac{W_1 + W_2}{q} = \frac{W_1}{q} + \frac{W_2}{q} = U_{AB} + U_{BC}$$

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$$

Die Spannungen hintereinander geschalteter Stromquellen addieren bzw. subtrahieren sich entsprechend ihrer Polung.

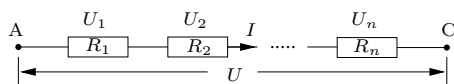


**Reihenschaltung von Widerständen**

Zwei hintereinander geschaltete Widerstände werden vom gleichen Strom  $I$  durchflossen. Für den Gesamtwiderstand  $R_{AC}$  der Schaltung gilt:

$$R_{AC} = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} = R_1 + R_2$$

Widerständen in Reihe addieren sich:

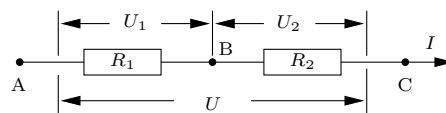


$$R_{ges} = R_{AC} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

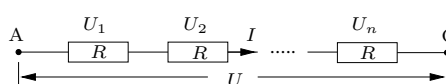
$$I = \frac{U}{R_{ges}}$$

$$U_1 = R_1 I = \frac{R_1 U}{R_{ges}}, \dots, U_n = R_n I = \frac{R_n U}{R_{ges}}$$

Hintereinanderschaltung oder Reihenschaltung von zwei Widerständen:



Spezialfall  $n$  gleicher Widerstände  $R$ :



$$R_{ges} = R_{AC} = nR$$

$$I = \frac{U}{R_{ges}} = \frac{U}{nR}$$

$$U_1 = U_2 = \dots = U_n = RI = \frac{RU}{nR} = \frac{U}{n}$$

**Definitionen und Regeln**

**Parallelschaltung von Widerständen**

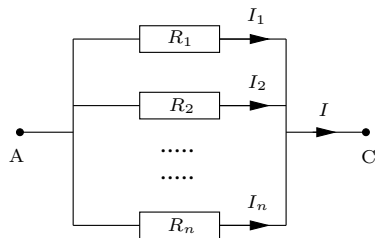
An zwei parallel geschalteten Widerständen liegt die gleiche Spannung  $U$ . Der Gesamtstrom von A nach C ist  $I = I_1 + I_2$ : Daher gilt für den Gesamtwiderstand  $R = R_{AC}$  der Schaltung:

$$I = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \implies$$

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\implies R_{\text{ges}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Der Kehrwert des Gesamtwiderstandes von mehreren parallel geschalteten Widerständen ist die Summe der Kehrwerte der Teilwiderstände:



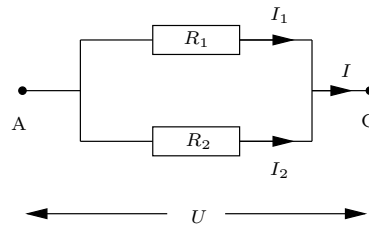
$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \frac{U}{R_{\text{ges}}}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \dots, I_n = \frac{U}{R_n}$$

**Beispiele**

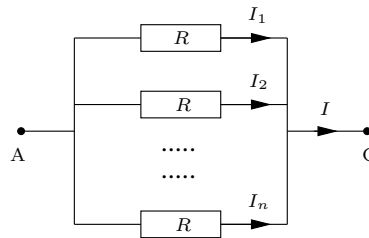
Parallelschaltung von zwei Widerständen:



Beispiel: Parallelschaltung von  $R_1 = 1 \Omega$  und  $R_2 = 9 \Omega$ :

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{1 \Omega} + \frac{1}{9 \Omega} = \frac{10}{9 \Omega} \implies R_{\text{ges}} = 0,9 \Omega$$

Spezialfall  $n$  gleicher Widerstände  $R$ :



$$R_{\text{ges}} = R_{AC} = \frac{R}{n}$$

$$I = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{nU}{R}$$

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = \frac{U}{R} = \frac{I}{n}$$

Beispiel: In nebenstehende Abbildung gilt:  
 $R_1 = 1,9 \Omega$ ,  $R_2 = 7 \Omega$ ,  $R_3 = 3 \Omega$ ,  
 $R_4 = 6 \Omega$ ,  $U = 24 \text{ V}$ .

$R_{BC}$  ist der Widerstand der Parallelschaltung von  $R_2$  und  $R_3$ :

$$\frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{7 \Omega} + \frac{1}{3 \Omega} = \frac{10}{21 \Omega}$$

$$R_{BC} = \frac{21 \Omega}{10} = 2,1 \Omega$$

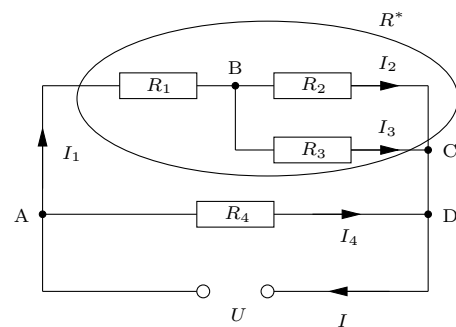
$R^*$  ist der Widerstand der Reihenschaltung von  $R_1$  und  $R_{BC}$ :

$$R^* = R_1 + R_{BC} = 4 \Omega$$

Der Gesamtwiderstand  $R_{AD}$  ist der Widerstand der Parallelschaltung von  $R^*$  und  $R_4$ :

$$\frac{1}{R_{AD}} = \frac{1}{R^*} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{4 \Omega} + \frac{1}{6 \Omega} = \frac{10}{24 \Omega}$$

$$R_{AD} = \frac{24 \Omega}{10} = 2,4 \Omega$$



$$I = \frac{U}{R_{AD}} = \frac{24 \text{ V}}{2,4 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 10 \text{ A}, \quad I_4 = \frac{U}{R_4} = 4 \text{ A}$$

$$I_1 = I - I_4 = 6 \text{ A} \text{ oder } I_1 = \frac{U}{R^*} = 6 \text{ A}$$

$$U_1 = U_{AB} = R_1 I_1 = 11,4 \text{ V}$$

$$U_2 = U_3 = U_{BC} = U - U_1 = 12,6 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 1,8 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{U_3}{R_3} = 4,2 \text{ A}$$

# Grundwissen Physik – Jahrgangsstufe 9

## Elektrizität und Magnetismus

### Definitionen und Regeln

#### Elektrizität und Magnetismus

##### Magnetismus

Ein Magnet hat zwei Pole (N und S). Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an.

Magnetpole treten nur paarweise auf, es gibt keine einzelnen Nord- oder Südpole.

Die Kraft zwischen den Magnetpolen nimmt mit wachsender Entfernung ab.

Die Kräfte zwischen Magneten werden durch magnetische Feldlinien beschrieben.

- Magnetische Feldlinien zeigen vom magnetischen Nordpol zum magnetischen Südpol.
- In einem Magnetfeld  $\vec{B}$  wirkt auf einen Nordpol eine Kraft in Richtung der Feldlinien, auf einen Südpol in entgegengesetzte Richtung.

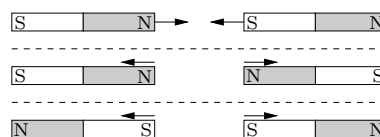
Die elementaren Bausteine der Materie, Proton, Neutron und Elektron, sind selbst kleine Magnete. Manche Atome, in denen die Elementarteilchen entsprechend angeordnet sind, bilden auch kleine Magnete (*Elementarmagnete*). Stoffe mit diesen Atomsorten (z.B. Eisen) heißen *ferromagnetisch*. Normalerweise sind die Elementarmagnete drehbar und wegen der Wärmebewegung der Atome liegen sie wild durcheinander (nicht geordnet oder ausgerichtet). Bringt man jedoch einen Magneten in die Nähe eines ferromagnetischen Körpers, dann richten sich seine Elementarmagnete aus und der Körper wird selbst zum Magneten (*magnetische Influenz*).

Fremdatome in Ferromagneten können die Drehbarkeit der Elementarmagnete unterhalb einer bestimmten Temperatur  $T_C$  (*Curietemperatur*) verhindern. Erhitzt man einen solchen Körper in einem starken Magnetfeld über die Curietemperatur und lässt ihn, immer noch im Magnetfeld, abkühlen, dann bleibt die Ausrichtung der Elementarmagnete erhalten (*Permanentmagnete*).

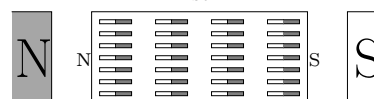
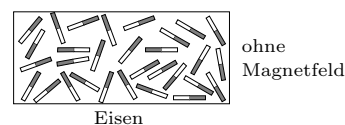
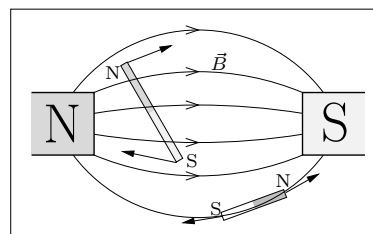
Einige ferromagnetische Materialien:

Material	$T_C$ in K
Eisen (Fe)	1033
Nickel (Ni)	627
Kobalt (Co)	1395

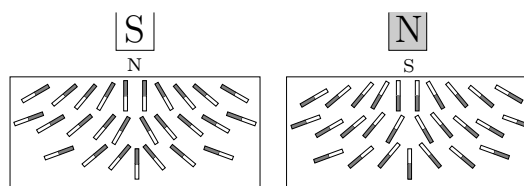
### Beispiele



Frei drehbare Magneten stellen sich parallel zu den Feldlinien ein:

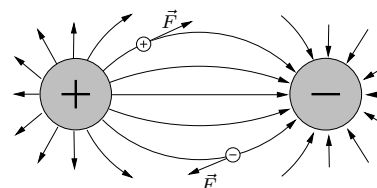


Eisen wird durch die Influenzwirkung (Ausrichtung der Elementarmagnete) von einem Nordpol genauso angezogen wie von einem Südpol:



#### Das elektrische Feld

Elektrische Feldlinien zeigen von plus nach minus.



In einem elektrischen Feld  $\vec{E}$  wirkt auf eine positive Ladung eine Kraft in Richtung der Feldlinien, auf eine negative Ladung in entgegengesetzte Richtung.

**Definitionen und Regeln**

**Magnetfeld von Strömen**

Ein stromdurchflossener Leiter ist von geschlossenen magnetischen Feldlinien umgeben, deren Orientierung mit der *Korkenzieherregel* bestimmt wird:

Die Spitze des Korkenziehers zeigt in Stromrichtung, die Drehrichtung gibt die Orientierung des Magnetfeldes  $\vec{B}$  an.

Ein *Elektromagnet* ist eine Spule mit vielen Windungen. Das Magnetfeld in der Spule ist umso stärker, je mehr Windungen die Spule hat (bei gleicher Stromstärke). Das Magnetfeld wird durch einen Eisenkern in der Spule verstärkt (Ausrichtung der Elementarmagnete).

Anwendungen: Elektromotor, Klingel, ...

**Kraft auf Ströme im Magnetfeld**

Auf einen stromdurchflossenen Leiter in einem Magnetfeld wirkt eine Kraft, deren Richtung man mit der UVW-Regel (Rechte-Hand-Regel) bestimmt (**U**rsache-**V**ermittlung-**W**irkung):

Ursache ist der Strom, Vermittlung das Magnetfeld und die Wirkung ist die Kraft.  $\vec{I}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{F}$  bilden in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem*. Es gilt

$$\vec{F} \perp \vec{I} \quad \text{und} \quad \vec{F} \perp \vec{B}$$

**Die Lorentzkraft**

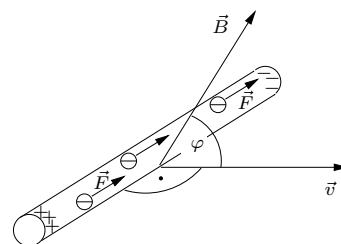
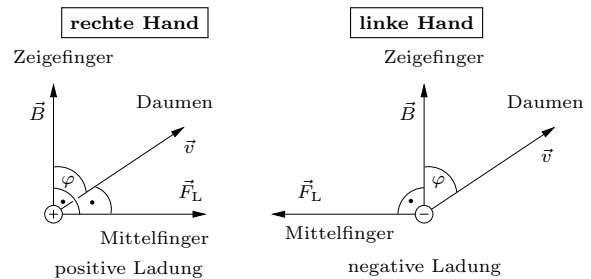
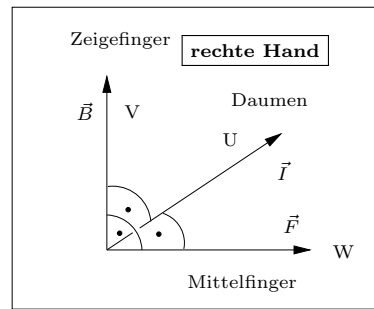
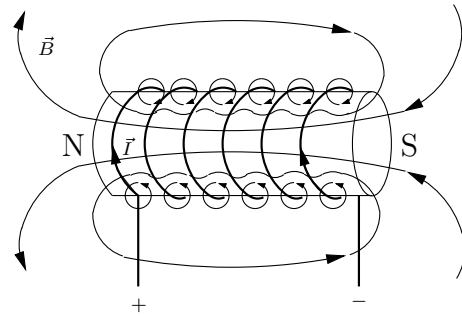
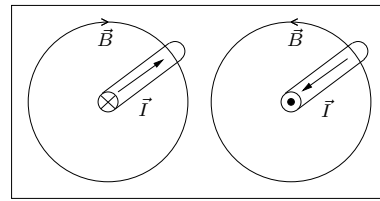
Da bewegte Ladungen Ströme sind, wirkt auf bewegte Ladungen in einem Magnetfeld eine Kraft, die *Lorentzkraft*  $\vec{F}_L$ . Die Richtung der Lorentzkraft auf eine *positive* Ladung findet man wieder mit der UVW-Regel, allerdings mit der Teilchengeschwindigkeit  $\vec{v}$  statt der Stromstärke.

Die Lorentzkraft auf eine *negative* Ladung zeigt in die entgegengesetzte Richtung wie die Kraft auf eine positive Ladung.

**Bewegungsinduktion**

Ein gerader Leiter bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  durch ein Magnetfeld  $\vec{B}$ . Damit bewegt sich auch jedes Elektron im Leiter mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Auf jedes Elektron im Leiter wirkt also die Lorentzkraft  $\vec{F}$ . Die freien Elektronen bewegen sich dann zu einem Leiterende und laden es negativ auf, am anderen Ende des Leiters herrscht Elektronenmangel, d.h. dieses Ende ist positiv geladen. Zwischen den geladenen Leiterenden liegt eine Spannung  $U_i$ , die sogenannte **Induktionsspannung**.

**Beispiele**



Bei Umkehrung der Bewegungsrichtung ändert sich die Polung der Induktionsspannung.



**Definitionen und Regeln**

**Induktionsgesetz**

Wir betrachten ein scharf begrenztes Magnetfeld wie in nebenstehender Abbildung. Eine *Leiterschleife* wird einmal aus dem Feld gezogen und das andere Mal in das Feld geschoben. Die Leiterschleife wird als Stromquelle betrachtet, d.h. der Induktionsstrom fließt *außerhalb* der Leiterschleife von  $\oplus$  nach  $\ominus$ . Die Richtung des Induktionsstroms ermittelt man über die Lorentzkraft auf die Leiterektronen. Der Induktionsstrom  $I$  erzeugt selbst ein Magnetfeld, das wir mit  $\vec{B}_i$  bezeichnen. Wird die Schleife *aus* dem Feld gezogen, dann wird das Feld durch die Schleife kleiner. Der Abbildung entnimmt man, dass  $\vec{B}_i$  in diesem Fall *innerhalb* der Schleife in die Richtung von  $\vec{B}$  zeigt, d.h.  $\vec{B}_i$  wirkt der Schwächung des Feldes entgegen. Wird die Schleife *in* das Feld geschoben, dann wird das Feld durch die Schleife größer.  $\vec{B}_i$  zeigt in diesem Fall *innerhalb* der Schleife entgegen der Richtung von  $\vec{B}$ , d.h.  $\vec{B}_i$  wirkt dem Größerwerden des Feldes entgegen.

Bewegt sich ein Leiter in einem ruhenden Magnetfeld, dann wird an den Enden des Leiters eine Spannung induziert. Die gleiche Spannung wird induziert, wenn sich das Magnetfeld relativ zu einem ruhenden Leiter bewegt.

Ein zeitlich veränderlicher Strom (z.B. ein Wechselstrom) erzeugt in einem Elektromagneten ein zeitlich veränderliches Magnetfeld.

**Der Transformator**

Sitzen zwei Spulen auf einem geschlossenen Eisenring, dann spricht man von einem *Transformator*. Wird eine Spule (*Primärspule*) an eine Wechselspannung  $U_1$  angeschlossen, dann wird diese Spule von einem Wechselstrom  $I_1$  durchflossen. Durch diesen zeitlich veränderlichen Strom entsteht im Eisenkern ein zeitlich veränderliches Magnetfeld. Der geschlossene Eisenkern überträgt dieses zeitlich veränderliche Feld in das Innere der zweiten Spule (*Sekundärspule*), d.h. an der Sekundärspule wird eine Spannung  $U_2$  induziert.

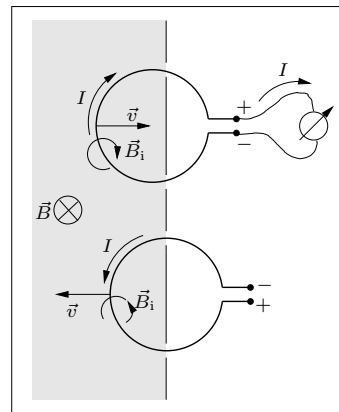
Die Spannungen an den Transformatorspulen verhalten sich wie die Windungszahlen:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Im Idealfall, d.h. wenn die Spulen den Ohm'schen Widerstand Null haben und wenn das *ganze* Feld der Primärspule auch die Sekundärspule durchsetzt, folgt aus dem Energiesatz:

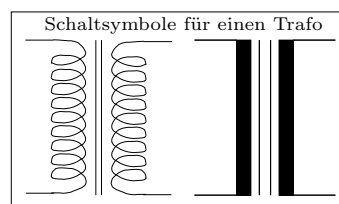
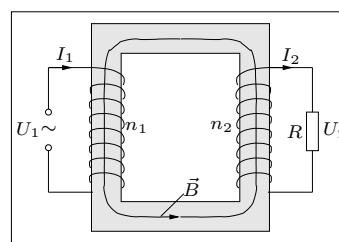
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

**Beispiele**



Das vom Induktionsstrom erzeugte Magnetfeld  $\vec{B}_i$  ist **innerhalb** der Leiterschleife so gerichtet, dass es der **Feldänderung** durch die Schleife entgegen wirkt. (**Lenz'sche Regel**).

An den Enden einer Spule oder Leiterschleife, die von einem *zeitlich veränderlichen* Magnetfeld durchsetzt ist, wird eine Spannung induziert. Die Lenzsche Regel liefert die Richtung des Induktionsstroms und damit auch die Polung der Induktionsspannung (**Induktionsgesetz**).



Energiesatz beim realen Transformator:

$$P_2 = U_2 I_2 = \eta U_1 I_1 = \eta P_1$$

mit dem Wirkungsgrad  $\eta$ . Beim idealen Trafo ist  $\eta = 1$ .

# Atome und Kerne

## Definitionen und Regeln

### Der Baukasten des Universums

#### Elementarteilchen

Unser Universum besteht aus *Quarks*, *Leptonen* und den Austauschteilchen der vier bekannten Wechselwirkungen (WW):

Ladung	Quarks		
$+\frac{2}{3}e$	u (up)	c (charm)	t (top)
$-\frac{1}{3}e$	d (down)	s (strange)	b (bottom)

Lad.	Leptonen		
$-e$	$e^-$ (Elektron)	$\mu$ (Muon)	$\tau$ (Tauon)
0	$\nu_e$ Elektron- neutrino	$\nu_\mu$ Muon- neutrino	$\nu_\tau$ Tauon- neutrino

Austauschteilchen		
Kraft	Teilchen	Symbol
Elektromagnetisch	Photon	$\gamma$
Schwache WW	Bosonen	$Z^0, W^+, W^-$
Starke WW	Gluonen	$g_1, \dots, g_8$
Gravitation	Graviton	G

Die atomare Masseneinheit u:

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} M_{C12} = 1,6605402 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

M: Atommasse,  $A_r$ : relative Atommasse:

$$M = A_r u$$

Teilchen	Masse		Größe in m ( $\approx$ )
	in kg	in u	
$^1_1\text{H}$	$1,673533 \cdot 10^{-27}$	1,0078250	$10^{-10}$
$p^+$	$1,672623 \cdot 10^{-27}$	1,0072765	$10^{-15}$
n	$1,674929 \cdot 10^{-27}$	1,0086649	$10^{-15}$
$e^-$	$9,109383 \cdot 10^{-31}$	0,0005486	$< 10^{-19}$

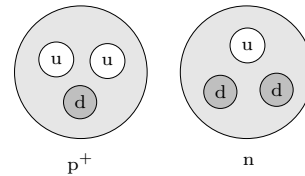
Zu jedem Elementarteilchen gibt es ein *Antiteilchen* mit entgegengesetzter Ladung aber gleicher Masse. Die Antiteilchen bezeichnet man mit einem Querstrich. Das Antiteilchen des Elektrons hat einen eigenen Namen (*Positron*) und ein eigenes Zeichen ( $e^+$ ).

Teilchen	Antiteilchen
Elektron $e^-$	Positron $e^+$
Proton $p^+ = uud$	Antiproton $p^- = \bar{u}\bar{u}\bar{d}$
Neutron $n = udd$	Antineutron $\bar{n} = \bar{u}\bar{d}\bar{d}$

## Beispiele

Protonen und Neutronen bestehen aus Quarks:

$$p^+ = uud \quad n = udd$$



Die uns umgebende Materie besteht fast ausschließlich aus Atomen und damit aus Protonen, Neutronen und Elektronen (siehe S.3).

Die uns umgebende Materie besteht nur aus den drei Bausteinen u, d und  $e^-$ .

Bei kleinen Entfernungen ( $\approx 10^{-15} \text{ m}$ ) ist die durch die starke WW vermittelte Anziehungskraft zwischen den Nukleonen ( $p^+$  und n) größer als die elektrische Abstoßung zwischen den  $p^+$ ; daher gibt es stabile Atomkerne.

### Atombau

Protonen und Neutronen heißen auch *Nukleonen* (Kernbausteine). Im neutralen Atom ist die Zahl  $Z$  der Protonen (*Kernladungszahl*) gleich der Zahl der Elektronen. Mit  $N$  bezeichnen wir die Zahl der Neutronen im Kern,  $A = Z + N$  ist die *Massenzahl* (Zahl der Nukleonen).

$^A_Z\text{X}$	chem. Symbol:	X
	Protonen:	Z
	Elektronen:	Z
	Neutronen:	$N = A - Z$
	Atommasse:	$M = A_r u \approx Au$

Atome mit gleichem  $Z$  haben die gleichen chemischen Eigenschaften. Mit dem chemischen Symbol X ist auch  $Z$  bekannt (Periodensystem!), d.h. folgende Schreibweisen sind gleichberechtigt:

$$^A_Z\text{X} = {}^A\text{X} = \text{X} A$$

Alle Atome mit gleichem  $Z$  heißen *Isotope*.

Einige H- und He-Isotope:

(D: Deuterium, T: Tritium)

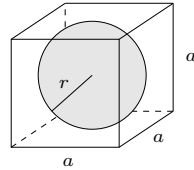
Atom	Z	N	A
$^2_1\text{H} = {}^2\text{H} = \text{H} 2 = \text{D}$	1	1	2
$^3_1\text{H} = {}^3\text{H} = \text{H} 3 = \text{T}$	1	2	3
$^4_2\text{He} = {}^4\text{He} = \text{He} 4$	2	2	4
$^3_2\text{He} = {}^3\text{He} = \text{He} 3$	2	1	3

**Definitionen und Regeln**

**Masse und Größe von Atomen**

Durch radioaktive Bestrahlung kann man Atome ionisieren (ein Elektron entfernen). Ein somit positiv geladenes Ion wird von einer Spannung  $U$  auf die Geschwindigkeit  $v$  beschleunigt und tritt dann senkrecht zu den Feldlinien in ein homogenes Magnetfeld ein. Durch die Lorentzkraft wird das Ion auf eine Kreisbahn gezwungen. Aus dem Radius der Kreisbahn kann man die Masse des Ions und damit (eine Elektronenmasse addieren) die Atommasse berechnen (*Massenspektrometer*).

Aus der Atommasse  $M$  und der Dichte  $\rho$  kann man das Volumen  $V$  berechnen, das einem Atom in einem Festkörper zur Verfügung steht.



Aluminium besteht zu 100 % aus  $^{27}_{13}\text{Al}$ , seine Dichte ist  $\rho = 2,70 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 2,70 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Einem Al-Atom steht also das Volumen

$$V = \frac{M}{\rho} = \frac{26,98 \text{ u}}{2,70 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 1,66 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$$

zur Verfügung. Der Radius eines Al-Atoms ist dann ungefähr  $r = \frac{1}{2} \sqrt[3]{V} = 1,3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

**Elektromagnetische Wellen**

Eine elektromagnetische Welle ist eine räumlich periodische Anordnung elektrischer ( $\vec{E}$ ) und magnetischer ( $\vec{B}$ ) Felder, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ( $c$ ) ausbreitet. Eine volle Periodenlänge  $\lambda$  der Welle heißt *Wellenlänge*. In der Zeit  $T$ , in der eine volle Periode der Welle über einen ruhenden Beobachter hinwegstreicht, schwingen die Felder für den Beobachter einmal hin und her. Der Beobachter „sieht“ also eine Schwingung mit der *Schwingungsdauer*  $T$  und der Frequenz

$$f = \frac{1}{T}$$

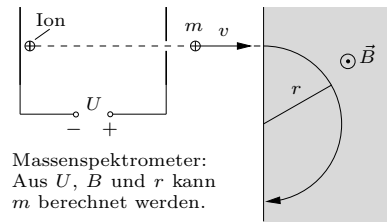
Einheit der Frequenz:

$$1 \text{ Hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} \implies \lambda f = c$$

Ein feines Gitter oder ein Glasprisma lenkt elektromagnetische Wellen aus ihrer ursprünglichen Richtung ab. Der Ablenkwinkel  $\varphi$  steht in einer eindeutigen Beziehung zur Wellenlänge. Somit lässt sich  $\lambda$  sehr genau messen (Spektrometer).

**Beispiele**

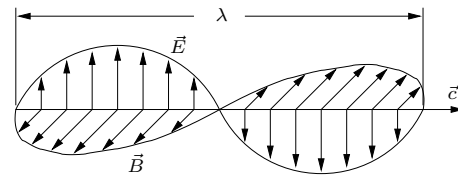


Massenspektrometer: Aus  $U$ ,  $B$  und  $r$  kann  $m$  berechnet werden.

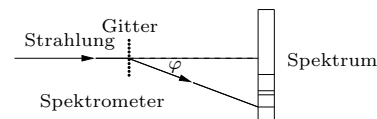
Atom	Masse in u
$^1_1\text{H}$	1,00782503
$^4_2\text{He}$	4,00260325
$^{12}_6\text{C}$	12,00000000
$^{27}_{13}\text{Al}$	26,98153863
$^{56}_{26}\text{Fe}$	55,93493743
$^{238}_{92}\text{U}$	238,0507882

Atomradien liegen in der Größenordnung  $10^{-10} \text{ m} = 0,1 \text{ nm}$ .

Atome haben keine scharf definierte Grenze, der Atomradius hängt also davon ab, wie man ihn misst (z.B. über den Platzbedarf in einem Festkörper)!



EM Welen	$\lambda$ in m
Radiowellen	1 – 10 000
Handy	0,33
Wärmestrahlung (IR)	$8 \cdot 10^{-7} - 10^{-3}$
sichtbares Licht	$4 \cdot 10^{-7} - 8 \cdot 10^{-7}$
UV	$10^{-8} - 4 \cdot 10^{-7}$
Röntgenstrahlung	$10^{-11} - 10^{-8}$



Sichtbares Licht			
	$\lambda$ in nm		$\lambda$ in nm
violett	380 – 420	blau	420 – 490
grün	490 – 575	gelb	575 – 585
orange	585 – 650	rot	650 – 780

Weißes Licht enthält alle Wellenlängen aus dem sichtbaren Bereich.

**Definitionen und Regeln**

**Quantenphysik**

Ein *gebundenes Quantensystem* sind zwei oder mehrere Elementarteilchen, die durch anziehende Kräfte (elektrisch, starke Kraft) zu einer Einheit verbunden sind (Atomkern, Atom, Molekül, Festkörper).

Aus der *Quantenmechanik*, der mathematisch sehr anspruchsvollen Physik der Atome und Teilchen, folgt:

Ein gebundenes Quantensystem, dessen potentielle Energie die Form eines Tales aufweist (Potentialtopf), kann nur diskrete Energiewerte annehmen (*Energieniveaus*).

In einem Atom entspricht jedem der diskreten Energiewerte eine bestimmte Konfiguration der Elektronenhülle.

Der Zustand mit der kleinsten möglichen Energie eines gebundenen Quantensystems ist der *Grundzustand*, die anderen Zustände heißen *angeregte Zustände*.

Ein gebundenes Quantensystem, dessen potentielle Energie eine periodische Struktur aufweist (z.B. ein Elektron in einem Metall), kann nur Energiewerte annehmen, die in bestimmten Intervallen liegen (*Energiebänder*).

Die Energie, die ein Elektron oder ein Proton erhält, wenn es von der Spannung 1 V beschleunigt wird, heißt *Elektronenvolt* (eV):

$$1 \text{ eV} = e \cdot 1 \text{ V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

**Photonen**

Trifft eine elektromagnetische Welle (EMW) der Frequenz  $f$  auf Materie (ein Elementarteilchen, ein Atom, ein Molekül oder einen Festkörper), dann kann die Materie der Welle einen Energiebetrag  $W$  entziehen, der proportional zu  $f$  ist. Die Proportionalitätskonstante  $h$  ist für jede Materie und alle Wellen die gleiche und heißt *Planckkonstante* oder *Plancksches Wirkumsquantum*:

$$W = hf \quad \text{mit} \quad h = 6,6260693 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

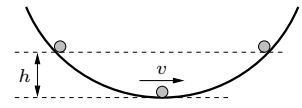
Einer EMW kann man also Energie nur in Portionen (*Quanten*)  $hf$  entziehen (folgt aus dem Formalismus der *Quantenmechanik*).

Ein Teil der EMW mit der Energie  $hf$  heißt ein *Photon*.

**Beispiele**

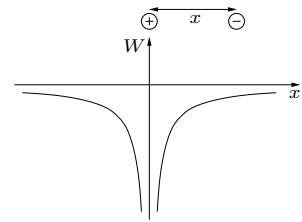
Beispiel eines gebundenen klassischen Systems (Kugel in einer Schüssel):

Start der Kugel in der Höhe  $h$  mit der Geschwindigkeit null. Die Energie der Kugel ist immer  $W = mgh$ , im tiefsten Punkt liegt sie in Form von kinetischer Energie vor. Da  $h$  beliebig gewählt werden kann, kann auch  $W$  jeden beliebigen Wert annehmen.



Beispiel eines gebundenen Quantensystems (Wasserstoffatom):

Potentielle Energie im System Proton-Elektron (H-Atom) in Abhängigkeit von der Teilchenentfernung  $x$ .



Energiestufen im H-Atom (*Energieniveaus*):

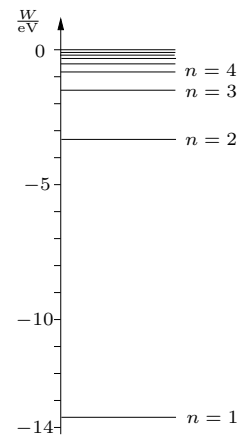
$$W_n = -\frac{13,60 \text{ eV}}{n^2}$$

$$W_1 = -13,60 \text{ eV}$$

$$W_2 = -3,40 \text{ eV}$$

$$W_3 = -1,51 \text{ eV}$$

$$W_4 = -0,85 \text{ eV}$$



Für  $W > 0$  ist das Elektron frei und es sind beliebige Energiewerte möglich (Kontinuum).

Entzieht Materie einer EMW die Energie  $hf$ , dann sagt man auch, *ein Photon wird absorbiert*. Über die Größe von Photonen kann man keine klaren Aussagen treffen. Sie hängt vom Zustand des Photons und von der Art der Beobachtung ab. Ein Photon eines Lasers kann senkrecht zur Ausbreitungsrichtung eine Querschnittsfläche von einigen  $\text{mm}^2$  und eine Länge von einigen cm bis zu einigen km haben. Trifft ein Photon auf den Sensor einer Digitalkamera, dann wird es nur von *einem* Sensorelement (1 Pixel:  $\approx 10^{-5} \text{ mm}^2$ ) absorbiert.

Photonen sind keine sehr kleinen Teilchen, sondern einfach Teile einer EMW mit der Energie  $hf$ .

**Definitionen und Regeln**

**Wechselwirkung einer EMW mit Atomen**

Eine EMW fällt auf Atome im Grundzustand der Energie  $W_1$ . Ein Atom kann der Welle nur die Energie  $hf$  entziehen. Das geht aber nur, wenn im Atom ein Zustand mit einer passenden Energie  $W_n$  vorhanden ist, d.h. wenn  $W_n - W_1 = hf$ .

Freie Atome oder Moleküle (Gase) können einer EMW nur dann Energie entziehen, wenn die Frequenz der Welle gleich einer der *Resonanzfrequenzen*

$$f_n = \frac{W_n - W_1}{h}$$

ist (*Resonanzabsorption*).

EMW mit anderen Frequenzen werden von den Atomen ignoriert (keine Wechselwirkung), das Gas ist für diese Wellen durchsichtig.

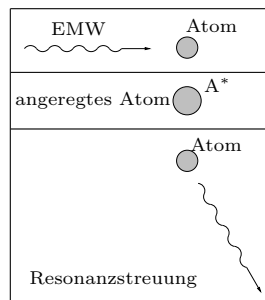
Absorbiert ein Atom oder Molekül im Grundzustand ein Photon mit der Frequenz  $f_n$ , dann geht es in einen angeregten Zustand mit der Energie

$$W_n = W_1 + hf_n$$

über. Nach einer durchschnittlichen Zeit  $\tau$  ( $\approx 1 \mu\text{s}$  bis einige s), der Lebensdauer des angeregten Zustands, geht das Atom in einem oder in mehreren Schritten in den Grundzustand über. Bei jeder Änderung in einen Zustand mit weniger Energie sendet das Atom ein Photon mit der entsprechenden Energiedifferenz aus. Die Richtung, in die das Photon ausgesandt wird, ist vollkommen zufällig und hängt nicht von der Richtung der einfallenden Welle ab.

- Der ganze Vorgang
- Absorption
- angeregtes Atom
- Ausstrahlung

heißt *Resonanzstreuung*.



Fällt ein Strahl weißen Lichts durch ein Gas, dann werden die Anteile des Lichtes mit den Resonanzfrequenzen des Gases in alle Richtungen gestreut und fehlen daher im durchgehenden Strahl fast vollständig. Im Spektrum des durchgehenden Strahls finden sich also dunkle Linien, deren Lage (Wellenlängen) Auskunft über das durchstrahlte Gas gibt. Die dunklen Linien im Spektrum des Sonnenlichts (Fraunhoferlinien) geben Auskunft über die chemischen Elemente in der Hülle der Sonne.

**Beispiele**

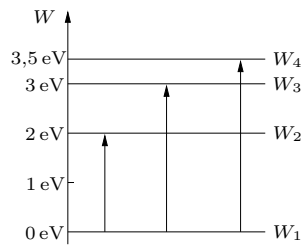
**Beispiel zur Resonanzfluoreszenz:**

Ein Atom mit nebenstehendem Termschema kann im Grundzustand Photonen mit folgenden Energien absorbieren:

$$hf_{12} = W_{12} = 2 \text{ eV}$$

$$hf_{13} = W_{13} = 3 \text{ eV}$$

$$hf_{14} = W_{14} = 3,5 \text{ eV}$$



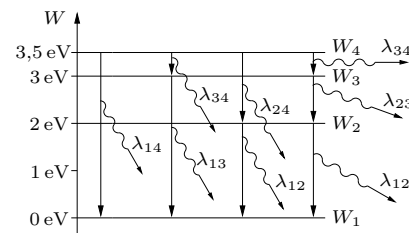
Die zugehörigen Wellenlängen sind

$$\lambda_{12} = \frac{hc}{W_{12}} = 620 \text{ nm (orange)}$$

$$\lambda_{13} = \frac{hc}{W_{13}} = 413 \text{ nm (violett)}$$

$$\lambda_{14} = \frac{hc}{W_{14}} = 354 \text{ nm (UV)}$$

Wir nehmen an, dass das Atom ein Photon der Wellenlänge 354 nm absorbiert und in den angeregten Zustand mit  $W_4 = 3,5 \text{ eV}$  übergeht.



Das angeregte Atom kann direkt oder über Zwischenzustände in den Grundzustand zurückkehren. Bei jeder Zustandsänderung sendet das Atom ein Photon mit der entsprechenden Energiedifferenz aus:

$W_4 \rightarrow W_1:$	$\lambda_{41} = 354 \text{ nm}$
$W_4 \rightarrow W_3 \rightarrow W_1:$	$\lambda_{43} = 2480 \text{ nm}$
$W_4 \rightarrow W_2 \rightarrow W_1:$	$\lambda_{31} = 413 \text{ nm}$
$W_4 \rightarrow W_3 \rightarrow W_2 \rightarrow W_1:$	$\lambda_{42} = 827 \text{ nm}$
	$\lambda_{21} = 620 \text{ nm}$
	$\lambda_{43} = 2480 \text{ nm}$
	$\lambda_{32} = 1240 \text{ nm}$
	$\lambda_{21} = 620 \text{ nm}$

In heißen Körpern oder Gasen haben die Teilchen genügend kinetische Energie, die sich bei Stößen in Anregungsenergie umwandeln kann. Die angeregten Atome senden dann bei der Rückkehr in den Grundzustand Photonen aus (Leuchten, Glühen). Das Licht leuchtender Gase enthält nur bestimmte Wellenlängen (diskretes Spektrum, Spektrallinien). Anhand dieses Spektrums können die Stoffe, die das Licht aussenden, identifiziert werden (Spektralanalyse).

**Definitionen und Regeln**

In einem Festkörper mit regelmäßig angeordneten Atomen ist die potentielle Energie eines Elektrons eine periodische Funktion. Aus der Quantenmechanik folgt, dass die möglichen Energiewerte für die Elektronen nicht diskret sind wie bei einzelnen Atomen, sondern ganze Energieintervalle (*Energiebänder*) von den Elektronen besetzt werden können. Die meisten Elektronen befinden sich in einem *Valenzband* und sind durch die Form der potentiellen Energie an ein Atom gebunden (siehe nebenstehende Abbildung). Elektronen mit einer höheren Energie befinden sich im *Leitungsband* und können sich frei im Festkörper bewegen. Je mehr Elektronen im Leitungsband sind, umso besser leitet der Körper. In einem Nichtleiter enthält das Leitungsband keine Elektronen.

**EMW auf Metall (Fotoeffekt):**

Die Energie  $A$ , die benötigt wird um eines Elektron aus dem Leitungsband ins Kontinuum zu befördern (aus dem Metall zu entfernen) heißt *Austrittsarbeit*. Fällt eine EMW auf eine Metalloberfläche, dann kann die Energie  $hf$  eines Photons z.B. an ein Elektron im Leitungsband übertragen werden. Ist  $hf$  größer als  $A$ , kann das Elektron das Metall mit der kinetischen Energie  $W_k$  verlassen (*äußerer Fotoeffekt*):

$$W_k = hf - A$$

Wird die Photonenenergie von einem Elektron im Valenzband absorbiert, kann es ins Leitungsband wechseln (*innerer Fotoeffekt*). Ist die Energielücke  $\Delta W$  zwischen Leitungs- und Valenzband kleiner als die Photonenenergie des sichtbaren Lichts, dann wechseln beim Bestrahlen mit Licht viele Elektronen ins Leitungsband, der Widerstand des Materials sinkt (*Fotowiderstand*).

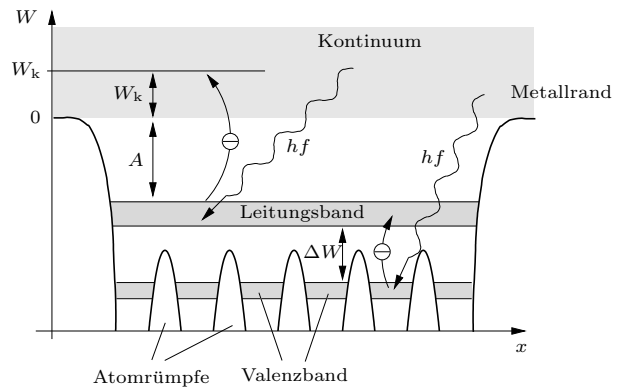
**Röntgenstrahlung**

Sind bei der Umkonfiguration der Elektronenhülle eines Atoms auch innere (kernnahe) Elektronen beteiligt, dann treten größere Energieänderungen auf wie bei einer Konfigurationsänderung mit nur äußeren Elektronen. Die absorbierten und emittierten Photonen haben also größere Energien und damit kleinere Wellenlängen (Röntgenstrahlung).

Röntgenstrahlung entsteht auch beim Abbremsen schneller Elektronen (Röntgenröhre).

Röntgenstrahlung	
mm Wellenlänge	$10^{-8}$ nm bis $10^{-11}$ nm
mm Photonenenergie	0,1 keV bis 100 keV

**Beispiele**



Beispiel: Die Austrittsarbeit von Zink ist  $A = 4,34$  eV. Um den Photoeffekt auszulösen, müssen Photonen mindestens die Energie  $A$  besitzen:

$$hf = \frac{hc}{\lambda} > A \implies \lambda < \frac{hc}{A} = 286 \text{ nm}$$

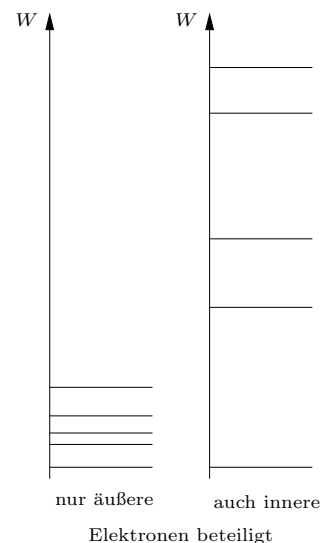
Sichtbares Licht kann bei Zink also keinen Photoeffekt auslösen, man braucht dazu UV-Licht.

Beispiel: Licht der Wellenlänge  $\lambda = 400$  nm trifft auf Barium mit der Austrittsarbeit  $A = 2,52$  eV. Die Maximalenergie der austretenden Elektronen ist

$$W_k = \frac{hc}{\lambda} - A = 0,58 \text{ eV} = 9,3 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

Die Geschwindigkeit der Elektronen ist  $v$ :

$$\frac{m}{2}v^2 = W_k \implies v = \sqrt{\frac{2W_k}{m_e}} = 4,5 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



**Definitionen und Regeln**

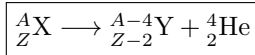
**Radioaktivität**

**Alphastrahlung**

Zwischen den positiven Protonen im Atomkern herrscht eine starke elektrische Abstoßungskraft  $F_e$ . Für Abstände kleiner als  $r_0 \approx 10^{-15}$  m ist aber die anziehende *starke Kraft* zwischen den Nukleonen größer als die abstoßende elektrische Kraft, der Grund für das Zusammenhalten der Atomkerne. In den Kernen haften immer zwei Protonen und zwei Neutronen besonders fest zusammen ( $\alpha$ -Teilchen). Die potentielle Energie eines  $\alpha$ -Teilchens im Kern schaut ungefähr wie der Querschnitt durch einen Vulkan aus (siehe Abbildung). Dabei ist  $r$  die Entfernung zum Kernmittelpunkt. Ist die Energie des  $\alpha$ -Teilchens negativ, kann es den Kern nicht verlassen. Bei einer positiven Energie des  $\alpha$ -Teilchens könnte es den Kern nach der klassischen Physik auch nicht verlassen, da der Energiebetrag  $\Delta W$  bis zum „Kraterrand“ fehlt. Nach den Regeln der Quantenphysik kann das Teilchen aber mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $p$  durch den Energieberg *tunneln*.  $p$  ist umso kleiner, je kleiner  $\Delta W$  und die Dicke  $\Delta r$  des Berges sind (GAMOW, 1928).

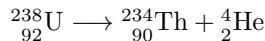
Ein Atom, das ein  $\alpha$ -Teilchen aussendet, ist ein  $\alpha$ -Strahler, es unterliegt einem  $\alpha$ -Zerfall.

Reaktionsgleichung eines  $\alpha$ -Zerfalls:



Die beiden überschüssigen Elektronen des Tochterelements Y werden abgestoßen und bilden mit dem  $\alpha$ -Teilchen ein neutrales  ${}^4_2\text{He}$ -Atom.

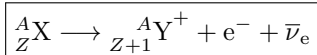
Beispiel:



**Betastrahlung**

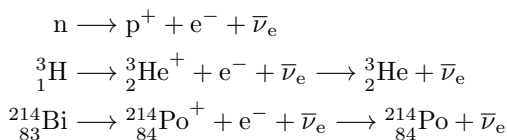
Beim *Betazerfall* (genauer  $\beta^-$ -Zerfall) wandelt sich ein Neutron im Kern in ein Proton, ein Elektron und ein *Elektronantineutrino* um. Das Elektron und das Neutrino werden ausgestoßen.

Reaktionsgleichung eines  $\beta^-$ -Zerfalls:

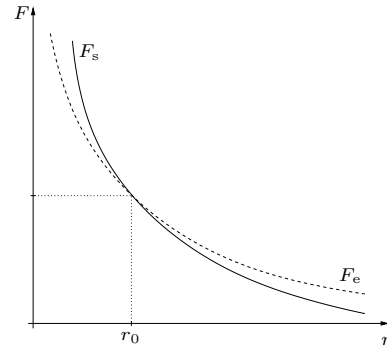


Das mit großer Energie ausgesandte Elektron wird nach dem Abbremsen von einem zunächst einfach positiv geladenen Tochteratom eingefangen.

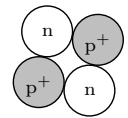
Beispiele:



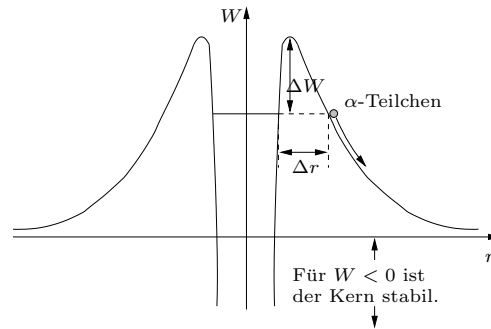
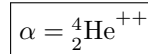
**Beispiele**



Das Alphateilchen ist ein  ${}^4_2\text{He}$ -Kern, besteht also aus zwei Protonen und zwei Neutronen (zweifach positives Heliumion):



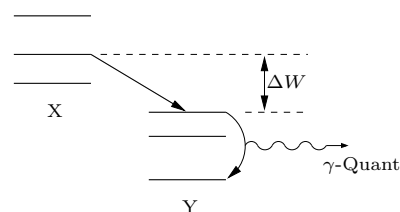
$\alpha$ -Teilchen



**Neutrinos**

Neutrinos bewegen sich (fast? Man weiß es noch nicht ganz genau) mit Lichtgeschwindigkeit. Die Wechselwirkung der Neutrinos mit Materie ist sehr gering. Um die Hälfte eines Neutrinoschwarms abzuschirmen, bräuchte man eine mehrere Lichtjahre dicke Bleimauer.

**Gammastrahlung**

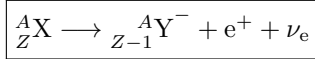


Die Tochterkerne beim Alpha- und Betazerfall entstehen meist in einem angeregten Zustand und geben beim Übergang in den Grundzustand ein energiereiches Photon (Gammaquant) ab (Gammastrahlung).

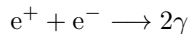
**Definitionen und Regeln**

Neben dem  $\beta^-$ -Zerfall gibt es noch den  $\beta^+$ -Zerfall. Dabei wandelt sich ein Proton im Kern in ein Neutron, ein Positron (Antiteilchen des Elektrons) und ein *Elektronneutrino* um. Das Positron und das Neutrino werden ausgestoßen.

Reaktionsgleichung eines  $\beta^+$ -Zerfalls:



Das einfach negativ geladene Tochteratom stößt sein überschüssiges Elektron ab. Das ausgesandte Positron zerstrahlt mit einem Elektron in zwei Photonen:



**Das Zerfallsgesetz**

Ein Element X (Mutterelement) zerfällt in das Element Y (Tochterelement).  $N(t)$  ist die Zahl der Atome des Mutterelements zur Zeit  $t$ , die Zahl der Mutteratome zur Zeit  $t = 0$  bezeichnen wir mit  $N_0 = N(0)$ .

Jedes Atom ein und desselben radioaktiven Elements hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, in der Zeitspanne  $\Delta t$  zu zerfallen. Diese Wahrscheinlichkeit ist unabhängig vom Alter des Atoms und den Umgebungseinflüssen wie Druck, Temperatur usw.

Für jedes radioaktive Element gibt es eine charakteristische Zeit  $T$ , die sogenannte *Halbwertszeit*, nach der im Mittel die Hälfte der anfänglich vorhandenen Atome zerfallen ist.

$t$	$N(t)$
0	$N_0$
$T$	$\frac{N_0}{2} = \frac{N_0}{2^1} = N_0 \cdot 2^{-1}$
$2T$	$\frac{N(T)}{2} = \frac{N_0}{4} = N_0 \cdot 2^{-2}$
$3T$	$\frac{N(2T)}{2} = \frac{N_0}{8} = N_0 \cdot 2^{-3}$
$nT$	$\frac{N_0}{2^n} = N_0 \cdot 2^{-n}$

Daraus folgt das *Zerfallsgesetz*:

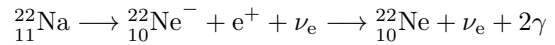
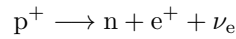
Ist  $N_0 = N(0)$  die Zahl der Atome eines radioaktiven Elements zur Zeit  $t = 0$ , dann gilt für die Zahl  $N(t)$  der zur Zeit  $t$  noch vorhandenen Atome:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

$\approx$	$2^{10}$	$2^{20}$	$2^{30}$	$2^{40}$
	$10^3$	$10^6$	$10^9$	$10^{12}$

**Beispiele**

Beispiele:

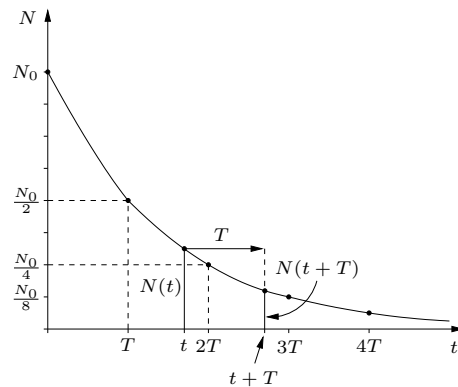


Der  $\beta^+$ -Zerfall des *freien* Protons ist äußerst unwahrscheinlich und noch nicht nachgewiesen.

Nützliche Matheformeln ( $a > 0$ ):

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \frac{1}{a^{-x}} = a^x \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad a^0 = 1$$



$$N(t+T) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t+T}{T}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T} - 1} =$$

$$= \underbrace{N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}}_{N(t)} \cdot 2^{-1}$$

$$N(t+T) = \frac{1}{2} \cdot N(t)$$

Beispiel:  $N_0 = 1,60 \cdot 10^{20}$ ,  $T = 250,0$  a

$$N(250 \text{ a}) = \frac{N_0}{2} = 8,00 \cdot 10^{19}$$

$$N(1 \text{ a}) = 1,60 \cdot 10^{20} \cdot 2^{-\frac{1}{250}} = 1,59997 \cdot 10^{20}$$

$$N(7000 \text{ a}) = 1,60 \cdot 10^{20} \cdot 2^{-28} = 5,56 \cdot 10^{11}$$

Wann ist  $N(t) = 8,00 \cdot 10^{12}$ ?

$$N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N(t) \implies 2^{-\frac{t}{T}} = \frac{N(t)}{N_0}$$

$$x = \frac{t}{T} \implies 2^{\frac{t}{T}} = 2^x = \frac{N_0}{N(t)} = 2,00 \cdot 10^7$$

$x$	24	25	24,2	24,3	24,25
$\frac{2^x}{10^7}$	1,68	3,36	1,93	2,07	1,995

$$x = \frac{t}{T} \approx 24,25 \implies t \approx 24,25 T = 6063 \text{ a}$$



**Definitionen und Regeln**

**Die Aktivität**

Im Zeitintervall  $[t; t + \Delta t]$  ändert sich die Zahl der Atome eines radioaktiven Elements mit der Halbwertszeit  $T$  um

$$\begin{aligned} \Delta N &= N(t + \Delta t) - N(t) = \\ &= N_0 \cdot 2^{-\frac{t+\Delta t}{T}} - N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = \\ &= N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} \cdot \left( 2^{-\frac{\Delta t}{T}} - 1 \right) = \\ &= N(t) \cdot \left( \frac{1}{2^{\frac{\Delta t}{T}}} - 1 \right) < 0 \end{aligned}$$

Die Zahl der im Intervall  $[t; t + \Delta t]$  zerfallenen Atome ist

$$|\Delta N| = -\Delta N = N(t) \cdot \left( 1 - 2^{-\frac{\Delta t}{T}} \right)$$

Wie man die Momentangeschwindigkeit als  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  mit immer kleiner werdendem  $\Delta t$  definiert, so definiert man die *Aktivität*  $A$  eines radioaktiven Stoffes als  $\frac{|\Delta N|}{\Delta t}$  mit immer kleiner werdendem  $\Delta t$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ):

$$A(t) = \frac{|\Delta N|}{\Delta t} = \frac{N(t) \cdot \left( 1 - 2^{-\frac{\Delta t}{T}} \right)}{\Delta t}$$

Mit  $\alpha = \frac{\Delta t}{T}$  ist  $\Delta t = \alpha T$  und damit

$$A(t) = N(t) \cdot \frac{1}{T} \cdot \underbrace{\frac{1 - 2^{-\alpha}}{\alpha}}_{f(\alpha)} \quad \text{mit} \quad \alpha \rightarrow 0$$

$\alpha$	0,01	0,001	$10^{-6}$
$f(\alpha)$	0,69075	0,692907	0,693147

Je kleiner  $\alpha$  gewählt wird, um so mehr nähert sich  $f(\alpha)$  dem Wert 0,693147... an. Auf dem Taschenrechner findet man diese Zahl mit  $\boxed{\ln} \boxed{2} \boxed{=} \boxed{}$ .  
Mit der *Zerfallskonstanten*

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

ist die Aktivität

$$A(t) = \lambda N(t) = \underbrace{\lambda N_0}_{A_0} \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

Die Einheit der Aktivität ist

$$1 \text{ Becquerel} = 1 \text{ Bq} = 1 \frac{1}{\text{s}}$$

$A = 500 \text{ Bq}$  bedeutet also 500 Zerfälle pro Sekunde.

**Beispiele**

Aktivität von Uran:

$^{235}_{92}\text{U}$  hat die Halbwertszeit  $T = 7,0 \cdot 10^8 \text{ a}$  und die Atommasse  $M = 235,044 \text{ u}$ . Ein Stück U 235 der Masse  $m = 1 \text{ kg}$  besteht aus  $N_0 = \frac{m}{M} = 2,56 \cdot 10^{24}$  Atomen. Die Zerfallskonstante von U 235 ist

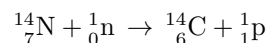
$$\lambda = \frac{\ln 2}{7 \cdot 10^8 \cdot 365,25} \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 3,14 \cdot 10^{-17} \frac{1}{\text{s}}$$

Die Aktivität des Uranstücks zur Zeit  $t = 0$  ist

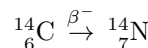
$$A_0 = \lambda N_0 = 8,04 \cdot 10^7 \text{ Bq}$$

**Radioaktive Altersbestimmung**

Als Beispiel der Altersbestimmung mittels der Radioaktivität besprechen wir die *C14-Methode* oder *Radiokarbon-Methode* (WALTER LIBBY, 1949). Durch kosmische Höhenstrahlung werden in der Atmosphäre freie Neutronen produziert, die sich mit Stickstoff zu  $^{14}_6\text{C}$  verbinden:



Der Zerfall



hat die Halbwertszeit  $T = 5730 \text{ a}$ . Ist die Intensität der Höhenstrahlung konstant, dann stellt sich mit der Zeit ein konstantes Verhältnis von  $^{14}\text{C}$  zu  $^{12}\text{C}$ -Isotopen ein (radioaktives Gleichgewicht). Im Jahre 1950 betrug dieses Verhältnis in lebendem Gewebe

$$k_0 = \frac{N_{\text{C14}}}{N_{\text{C12}}} = 1,18 \cdot 10^{-12}$$

Im toten Gewebe findet kein Austausch mit dem  $\text{CO}_2$  der Luft statt und das  $^{14}\text{C}$  wird immer weniger. Das Verhältnis  $k = \frac{N_{\text{C14}}}{N_{\text{C12}}}$  einer toten Probe wird im Allgemeinen durch Massenspektroskopie bestimmt. Aus dem Zerfallsgesetz für die Zahl der  $^{14}\text{C}$ -Kerne folgt nach Division durch  $N_{\text{C12}}$

$$k(t) = k_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

und daraus die Zeit  $t$  vom Absterben der Probe bis zur Messung.

In einem Stück Holzkohle aus der Höhle von Lascaux wird das Verhältnis  $\frac{N_{\text{C14}}}{N_{\text{C12}}}$  zu  $k = 1,80 \cdot 10^{-13}$  bestimmt.

$$2^{\frac{t}{T}} = \frac{k_0}{k(t)} = 6,55 \implies \frac{t}{T} = 2,71$$

$$t = 2,71 T = 1,55 \cdot 10^4 \text{ a}$$

**Definitionen und Regeln**

**Dosimetrie**

Die Wirkung von einer radioaktiven Strahlung auf ein Stück Materie wird beschrieben durch die Energie  $\Delta W$ , die von der Masse  $\Delta m$  absorbiert wird. Man nennt

$$D = \frac{\Delta W}{\Delta m} \quad \text{mit} \quad [D] = 1 \text{ Gy} = 1 \text{ Gray} = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

die *Energiedosis*. Da verschiedene Stoffe radioaktive Strahlung verschieden stark absorbieren, ist die Energiedosis nicht nur von der Art und der Energie der Strahlung, sondern auch vom Absorbiermaterial abhängig. Um die Wirkung von radioaktiver Strahlung auf den Menschen beschreiben zu können, wird der Begriff der *Äquivalentdosis* eingeführt:

Ruft eine Strahlung beim Menschen die gleichen Schäden hervor wie

1 Gy  $\gamma$ -Strahlung mit  $hf = 1 \text{ MeV}$ ,

dann hat diese Strahlung die *Äquivalentdosis* oder *Organdosis*

$H = 1 \text{ Sv} = 1 \text{ Sievert}$

Für eine bestimmte Strahlenart ist die Äquivalentdosis proportional zur Energiedosis:

$$H = q \cdot D \quad \text{mit} \quad [q] = 1 \frac{\text{Sv}}{\text{Gy}}$$

Der Proportionalitätsfaktor  $q$  heißt RBE (**R**elative **B**iological **E**ffectivness).

Es ist zu beachten, dass die gleiche Dosis, in kürzerer Zeit aufgenommen, gefährlicher ist, da die Reparaturmechanismen des Körpers dann weniger Zeit haben, die Schäden zu beheben.

Die größten Schäden bei gleicher Aktivität richten  $\alpha$ -Strahler an, die durch Nahrungsaufnahme oder Atmung in den Körper gelangen (*Inkorporation*). Wegen ihrer geringen Reichweite geben die  $\alpha$ -Teilchen nämlich ihre ganze Energie auf kurzer Strecke innerhalb des Körpers ab.

Strahlung	RBE
$\gamma$ bis 3 MeV	1
$\beta$	1
$\alpha$	20
$p^+$	10
$n$ (langsam)	2
$n$ (schnell)	20

**Beispiele**

Durchschnittliche Strahlenbelastung in der BRD:

Belastungsart	pro Person
natürliche Belastung	2,4 $\frac{\text{mSv}}{\text{a}}$
künstlich	1,9 $\frac{\text{mSv}}{\text{a}}$

Die Strahlenschutzverordnung von 2001 erlaubt, zusätzlich zur natürlichen Belastung:

20 $\frac{\text{mSv}}{\text{a}}$	(beruflich bedingt)
1 $\frac{\text{mSv}}{\text{a}}$	(allgemein)

Wirkungen einer kurzen, einmaligen Belastung:

bis 0,25 Sv:	keine Behandlung erforderlich (aber Folgeschäden! Krebs!)
bis 1 Sv:	leichte Strahlenkrankheit, selten Tote (außer durch Folgeschäden)
bis 4 Sv:	Erbrechen, Haarausfall, innere Blutungen (50 % Todesfälle)
ab 7 Sv:	fast sicher tödlich

Die Wirkungen schwacher Dosen sind noch wenig erforscht und die Resultate stark umstritten. Die geschätzte Zahl von Krebstoten pro  $10^6$  Personen nach einer Ganzkörperdosis von 0,01 Sv schwankt, je nach Autor, zwischen 200 und 3700 (Sterbewahrscheinlichkeit: 0,0002 bis 0,0037). Bei einer mittleren Dosis von 2 mSv für die nächsten 50 Jahre, bedingt durch den Unfall in Tschernobyl, erhält man für die 80 Millionen Bundesbürger zwischen 3200 und 59200 Krebstote!!

Beispiel: Eine Person der Masse  $m = 70 \text{ kg}$  hat  $m_0 = 1 \mu\text{g}$  Po 210 (Polonium) mit der Nahrung aufgenommen. Po 210 ist ein  $\alpha$ -Strahler mit der Halbwertszeit  $T = 138,4 \text{ d}$  und der  $\alpha$ -Energie  $W_\alpha = 5,304 \text{ MeV}$ . Mit  $N_0 = \frac{m_0}{210 \text{ u}} = 2,87 \cdot 10^{15}$  ist die Aktivität

$$A = \lambda N_0 = \frac{\ln 2}{T} N_0 = 1,66 \cdot 10^8 \text{ Bq}.$$

In 10 Tagen nimmt der Körper die Energiedosis

$$D = \frac{10 \text{ d} \cdot A \cdot W_\alpha}{m} = \frac{864\,000 \text{ s} \cdot 1,66 \cdot 10^8 \frac{1}{\text{s}} \cdot 8,50 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{70 \text{ kg}} = 1,74 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 1,74 \text{ Gy}$$

auf. Mit RBE = 20 folgt die absolut tödliche Organdosis

$$H = \text{RBE} \cdot D = 35 \text{ Sv}.$$

**Definitionen und Regeln**

**Masse und Energie**

Jede Masse  $m$  enthält die Energie

$$W = mc^2$$

(EINSTEIN, 1905). Dabei ist

$$c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Die Masse  $M$  eines Atoms des Elements  ${}^A_ZX$  ist kleiner als die Summe  $M_S$  der Massen seiner Bausteine:

$$M < M_S = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n$$

Die Differenz

$$\Delta M = M_S - M$$

nennt man den *Massendefekt* des Atoms. Das Atom hat um  $\Delta M$  weniger Masse und um  $\Delta M c^2$  weniger Energie als die getrennten Bausteine.

$$W_B = -\Delta M c^2$$

ist die *Bindungsenergie* des Atoms. Bezeichnet  $W_S = M_S c^2$  die Gesamtenergie der einzelnen Bausteine, dann ist die Gesamtenergie des Atoms

$$W = W_S + W_B = M c^2 = (M_S - \Delta M) c^2$$

**Kernenergie**

Bei der Verschmelzung (*Fusion*) von zwei leichten Kernen (wegen der elektrischen Abstoßung der Kerne nur bei Temperaturen von einigen Millionen Kelvin möglich) entsteht ein Kern mit einer Masse, die kleiner als die Summe der Massen der Ausgangskerne ist.

Bei der durch Neutronenbeschuss ausgelösten Spaltung schwerer Kerne entstehen zwei Kerne und einige Neutronen, deren Massensumme kleiner als die Masse des Ausgangskerns ist. Die bei der Spaltung frei werdenden Neutronen lösen nach geeigneter Abbremsung weitere Spaltungen aus (*Kettenreaktion*).

Bei der Fusion leichter und der Spaltung schwerer Kerne wird also Energie frei, die in Form von Photonen (Gammastrahlung) oder Hitze (kinetische Energie der Atome) an die Umgebung abgegeben wird.

**Kernfusion:** Sterne, Wasserstoffbombe, am Fusionsreaktor wird schon seit 50 Jahren geforscht und seit 50 Jahren heißt es, er wird in 20 Jahren einsatzbereit sein.

**Kernspaltung:** Kernreaktor, Atombombe

**Beispiele**

Erwärmt man  $m = 1 \text{ kg}$  Wasser der Temperatur  $10^\circ\text{C}$  auf  $90^\circ\text{C}$ , dann nimmt die innere Energie des Wassers um

$$\begin{aligned} \Delta W &= c_W m \Delta T = 4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 1 \text{ kg} \cdot 80 \text{ K} = \\ &= 335 \text{ kJ} = 3,35 \cdot 10^5 \text{ J} \end{aligned}$$

zu. Dies entspricht einer Massenzunahme von

$$\Delta m = \frac{\Delta W}{c^2} = 3,7 \cdot 10^{-12} \text{ kg}$$

Massendefekt von U 238:

$$M = 238,0508 \text{ u}$$

Massensumme der Bausteine:

$$M_S = 92(m_p + m_e) + 146 m_n = 239,9850 \text{ u}$$

$$\Delta M = M_S - M = 1,9342 \text{ u} = 3,2118 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Um das U 238-Atom vollständig in seine Bausteine zu zerlegen, muss die Energie

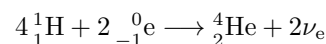
$$\Delta W = \Delta M \cdot c^2 = 2,887 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 1802 \text{ MeV}$$

aufgewendet werden. Die Bindungsenergie des U 238-Atoms ist

$$W_B = -1802 \text{ MeV}$$

**Energieerzeugung in Sternen**

Unsere Sonne bezieht ihre Energie durch die Fusion von vier Wasserstoffkernen (Protonen) zu einem He 4-Kern (über einige Zwischenreaktionen). Die Zusammenfassung aller Reaktionen lautet:



Wegen der gewaltigen Hitze im Sterninneren liegen keine Atome, sondern die Kerne und die Elektronen bilden zusammen ein Gas, das sogenannte *Plasma*. Daher rechnen wir nicht mit Atom-, sondern mit Kernmassen, um den Energiegewinn einer solchen Fusionsreaktion zu berechnen:

$$\begin{aligned} \Delta W &= (4m_p + 2m_e - m_{\text{He4}})c^2 = \\ &= (4 \cdot 1,67262 \cdot 10^{-27} + 2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} - \\ &\quad - 6,6447 \cdot 10^{-27}) \text{ kg} \cdot c^2 = \\ &= 4,28 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 26,7 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Von dieser Energie werden  $0,5 \text{ MeV}$  durch die Neutrinos abtransportiert, die restlichen  $26,2 \text{ MeV}$  dienen der Leuchtkraft der Sonne.

# Mechanik

## Definitionen und Regeln

### Kinematik

#### Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

Die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit heißt auch *gleichförmige Bewegung*.

$$\underbrace{x(t)}_{\text{Ort zur Zeit } t} = \underbrace{x(t_0)}_{\text{Startort}} + v \cdot \underbrace{(t - t_0)}_{\text{Fahrzeit}}$$

Das  $tx$ -Diagramm der gleichförmigen Bewegung ist eine Gerade, die Geschwindigkeit  $v$  ist die Steigung der Geraden:

- steil : schnell ( $|v|$  groß)
- flach : langsam ( $|v|$  klein)

In der Zeit  $\Delta t = t_2 - t_1$  bewegt sich ein Körper mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  um die Strecke

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = v \cdot \Delta t$$

Nebenstehendem  $tv$ -Diagramm entnimmt man:

$$\text{Weg} = \text{Fläche unter dem } tv\text{-Diagramm.}$$

Dieser Satz gilt auch für Bewegungen mit nicht konstanter Geschwindigkeit:

Die Differenz der Ortskoordinaten  $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$  ist gleich der Fläche unter dem  $tv$ -Diagramm zwischen  $t_1$  und  $t_2$ , wobei Flächen unterhalb der  $t$ -Achse negativ zählen.

#### Mittlere Geschwindigkeit

Wir betrachten die Bewegung eines punktförmigen Körpers  $K$  entlang einer Geraden ( $x$ -Achse). Der Ort  $x$  des Körpers ist eine beliebige Funktion der Zeit  $t$ .  $t_1$  und  $t_2$  sind zwei beliebige Zeiten,  $x_1 = x(t_1)$  und  $x_2 = x(t_2)$ . Mit den Abkürzungen

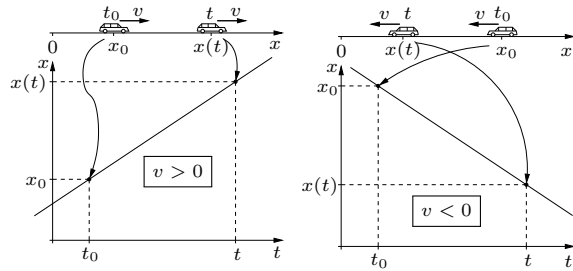
$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{und} \quad \Delta x = x(t_2) - x(t_1)$$

definiert man die *mittlere Geschwindigkeit* im Intervall  $[t_1, t_2]$

$$\bar{v} = v_{12} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

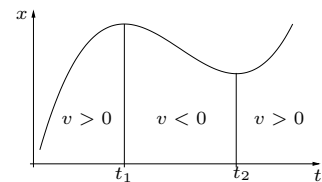
Die mittlere Geschwindigkeit oder auch Durchschnittsgeschwindigkeit gibt an, wie schnell sich  $K$  von  $x_1$  nach  $x_2$  bewegen würde, wenn die Geschwindigkeit konstant wäre.

## Beispiele

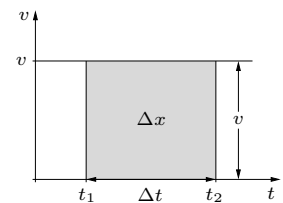


- $v > 0$  : Bewegung in die positive  $x$ -Richtung
- $v < 0$  : Bewegung in die negative  $x$ -Richtung

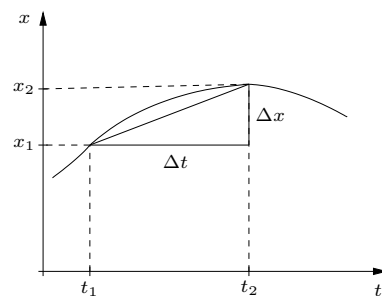
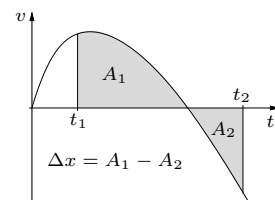
$tx$ -Diagramm mit nicht konstanter Geschwindigkeit:



$tv$ -Diagramm mit konstanter Geschwindigkeit:



$tv$ -Diagramm mit nicht konstanter Geschwindigkeit:



Beispiel:  $x(t) = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$  mit  $t_1 = 1 \text{ s}$ :

$\frac{t_2}{\text{s}}$	$\frac{\Delta t}{\text{s}}$	$\frac{x_1}{\text{m}}$	$\frac{x_2}{\text{m}}$	$\frac{\Delta x}{\text{m}}$	$\bar{v}$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
2	1	0,5	2	1,5	1,5
1,1	0,1	0,5	0,605	0,105	1,05
1,01	0,01	0,5	0,51005	0,01005	1,005
1,001	0,001	0,5	0,5010001	0,0010005	1,0005

**Definitionen und Regeln**

**Die Momentangeschwindigkeit**

Die *Momentangeschwindigkeit* oder einfach die Geschwindigkeit zur Zeit  $t$  ist der Grenzwert der mittleren Geschwindigkeit im Intervall  $[t, t + \Delta t]$  mit immer kleiner werdendem  $\Delta t$ :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Die Geschwindigkeit  $v(t)$  ist die Steigung der Tangente an den Grafen von  $x(t)$  im Punkt  $A(t|x(t))$ .

Für die Bewegung mit

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2$$

gilt (siehe rechte Spalte)

$$v(t) = at$$

Dabei ist  $a$  die Beschleunigung (siehe S.5), denn

$$\begin{aligned} \text{Beschleunigung} &= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \\ &= \frac{at_2 - at_1}{t_2 - t_1} = a \end{aligned}$$

**Bewegung mit konstanter Beschleunigung**

Definition der (konstanten) Beschleunigung:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \implies$$

$$v(t) = v(t_0) + a \cdot (t - t_0)$$

Bei konstanter Beschleunigung ist der Graf der Funktion  $v(t)$  ( $tv$ -Diagramm) eine Gerade.

$$A_{\square} = v(t_0) \cdot \Delta t, \quad \Delta v = a\Delta t$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot \Delta v = \frac{a}{2} \Delta t^2$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(t) - x(t_0) = A_{\square} + A_{\Delta} = \\ &= v(t_0)\Delta t + \frac{a}{2}\Delta t^2 \implies \end{aligned}$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{a}{2} \cdot (t - t_0)^2$$

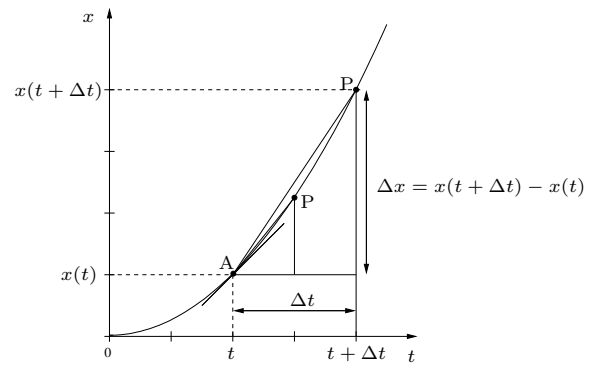
Spezialfall:  $t_0 = 0, x_0 = x(0), v_0 = v(0)$ :

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

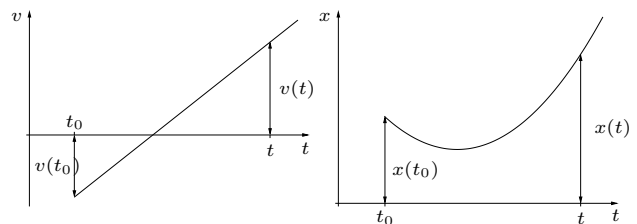
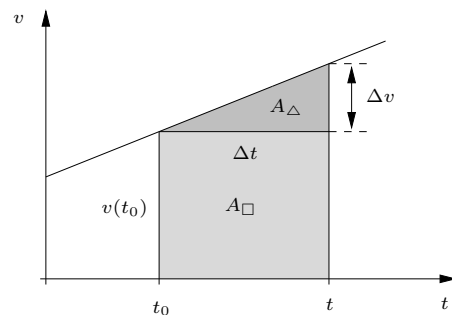
Für  $a = \text{konst.}$  ist das  $tv$ -Diagramm eine Gerade und das  $tx$ -Diagramm eine Parabel.

**Beispiele**



$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) - x(t) &= \frac{a}{2}(t + \Delta t)^2 - \frac{a}{2}t^2 = \\ &= \frac{a}{2}(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2) = \\ &= \frac{a}{2}\Delta t(2t + \Delta t) \implies \end{aligned}$$

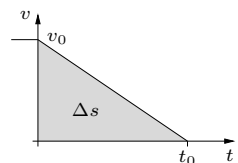
$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{2}\Delta t(2t + \Delta t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{a}{2}(2t + \Delta t) \right] = at \end{aligned}$$



Beginn des Bremsvorgangs zur Zeit 0 mit der Beschleunigung  $a < 0$ :

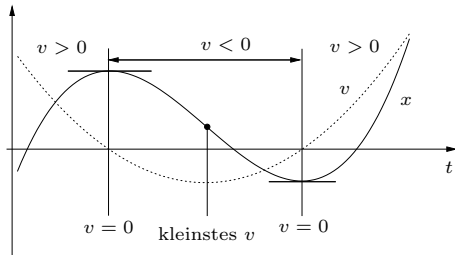
$$t_0 = -\frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{|a|}$$

$$\Delta s = \frac{1}{2}v_0 t_0 = \frac{v_0^2}{2|a|} \quad (\text{Bremsweg})$$



**Definitionen und Regeln**

Zusammenhang zwischen  $x(t)$  und  $v(t)$ :



**Der freie Fall**

Alle Körper fallen an der Erdoberfläche mit der gleichen Beschleunigung mit dem Betrag

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (\text{Erdbeschleunigung}).$$

Zwei Möglichkeiten eines geeigneten Koordinatensystems für die Behandlung des freien Falls:

$x$ -Achse zeigt nach oben:

$$x(0) = h \implies$$

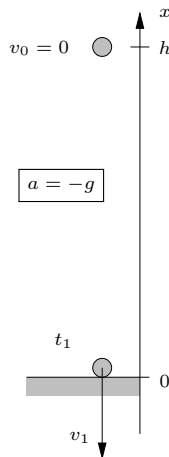
$$x(t) = h - \frac{g}{2} t^2$$

$$x(t_1) = 0 \implies$$

$$h - \frac{g}{2} t_1^2 = 0$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v_1 = v(t_1) = -gt_1 = -\sqrt{2gh}$$

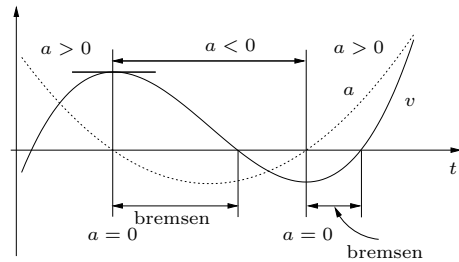


Die Aufprallgeschwindigkeit  $v_1$  einfach mit dem Energiesatz:

$$\frac{m}{2} v_1^2 = mgh \implies |v_1| = \sqrt{2gh}$$

**Beispiele**

Zusammenhang zwischen  $v(t)$  und  $a(t)$ :



Genauere Messungen zeigen, dass  $g$ , abhängig von der geografischen Lage und der Höhe, leichten Schwankungen unterworfen ist (alle Werte auf (Meereshöhe):

Ort	N-, S-Pol	Äquator	45° nördl. Breite
$g$	$9,832 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$9,780 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$x$ -Achse zeigt nach unten:

$$x(0) = 0 \implies$$

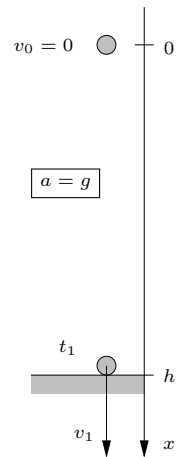
$$x(t) = \frac{g}{2} t^2$$

$$x(t_1) = h \implies$$

$$\frac{g}{2} t_1^2 = h$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v_1 = v(t_1) = gt_1 = \sqrt{2gh}$$



# Grundwissen Physik – Jahrgangsstufe 10

## Das astronomische Weltbild

Definitionen und Regeln	Beispiele
<b>Erde und Sonnensystem</b>	
<b>Geschichtliche Daten</b>	
<p>≈ -600 <b>Thales</b> von Milet (*-624, †-546), der Begründer der griechischen Mathematik, sieht die Erde noch als Scheibe an. Thales kann aber als der erste wahre Physiker betrachtet werden, da er die Natur für rational erklärbar hält, ohne auf die Mythologie zurückgreifen zu müssen.</p> <p>≈ -500 <b>Pythagoras</b> von Samos (*-580, †-497), kennt schon die kugelförmige Gestalt der Erde.</p> <p>≈ -330 <b>Aristoteles</b> aus Athen (*-383, †-322) glaubte, dass jede Bewegung, auch die mit konstanter Geschwindigkeit, einer Kraft bedarf. Diese Vorstellung wurde erst von Galilei und Newton revidiert.</p> <p>≈ -300 <b>Euklid</b> aus Alexandria. Seine berühmten <i>Elemente</i> waren ein Standardwerk der Geometrie bis ins 19. Jahrhundert. Er baute die Geometrie auf ein Axiomensystem auf.</p> <p>≈ -220 <b>Archimedes</b> aus Syrakus, (*-287, †-212): Statik, Hebelgesetz, Auftrieb, Geometrie.</p> <p>≈ -200 <b>Eratosthenes</b> aus Alexandria (*-276, †-194) misst den Erdumfang.</p> <p>≈ 150 <b>Ptolemäus</b>, Claudius aus Alexandria (*90, †168) entwirft ein <i>geozentrisches</i> Weltmodell, das es gestattete, die Positionen der inneren Planeten vorauszuberechnen: Ein Punkt S bewegt sich auf einem Kreis um die Erde, dessen Mittelpunkt nicht die Erde ist, die Planeten beschreiben Kreisbahnen um S (Sonne). Ptolemäus hat ein für die Darstellung ungünstiges Bezugssystem gewählt, eben das der Erde.</p>	<p>1543 <b>Kopernikus</b>, Nikolaus (*19.2.1473 in Thorn, †24.5.1543 in Frauenburg) veröffentlicht in seinem Todesjahr das berühmte Werk <i>De revolutionibus orbium coelestium</i> (<i>Über die Umdrehungen der Himmelsbahnen</i>), in dem er das geozentrische durch das heliozentrische Weltbild ersetzt (die Planeten kreisen um die Sonne, nicht um die Erde).</p> <p>1602 Das Hauptwerk von <b>Brahe</b>, Tycho (*14.12.1546 in Knudstrup auf Schonen, †24.10.1601 Benatky/Böhmen) wird von Kepler in Prag veröffentlicht. Brahe hat die Bahnen der Planeten, noch ohne Fernrohr, mit äußerster Präzision aufgezeichnet, und zwar mit der bemerkenswerten Beobachtungsgenauigkeit von 2'.</p> <p>1602 <b>Kepler</b>, Johannes (*1571 in Weil der Stadt, †1630 in Regensburg) findet das 2. Keplersche Gesetz (Flächensatz).</p> <p>1605 1. Keplersches Gesetz (Planetenbahnen sind Ellipsen).</p> <p>1609 <b>Galilei</b>, Galileo (*15.2.1564 in Pisa, †8.1.1642 in Arcetri bei Florenz) erfindet ein Fernrohr und entdeckt damit die Jupitermonde, die Phasen der Venus, die Sonnenflecken und die Tatsache, dass die Milchstraße aus vielen einzelnen Sternen besteht. Im gleichen Jahr findet Galilei die Fallgesetze, d.h. die Formeln der Bewegung mit konstanter Beschleunigung. Beginn der modernen Physik.</p> <p>1614 <b>Napier</b>, John (*1550 in Edinburgh, †1617 in Edinburgh) veröffentlicht die erste Logarithmentafel (Hilfe für die komplizierten Berechnungen der Astronomen).</p> <p>1619 3. Keplersches Gesetz (Verhältnis der Umlaufzeiten).</p>

Definitionen und Regeln	Beispiele
1672 <b>Cassini</b> , Giovanni (*1625 in Perinaldo bei Nizza, †1712 in Paris) misst trigonometrisch die Entfernung des Mars von der Erde und bestimmt daraus mit den Keplergesetzen die Entfernung Erde-Sonne mit nur 8% Fehler. Entdeckung von vier weiteren Saturnmonden und der Lücke in den Saturnringen ( <i>Cassini-Teilung</i> , 1675).	1796 <b>Laplace</b> , Pierre-Simon (*1749 in Beaumont-en-Auge, †1827 in Arcueil bei Paris) veröffentlicht sein Buch <i>Exposition du système du monde</i> , in dem er unter anderem eine Theorie der Entstehung des Sonnensystems und die Möglichkeit Schwarzer Löcher beschreibt. Ein fünfbändiges Werk über Himmelsmechanik (1799-1825), in dem er die Gezeiten und die Planetenbewegungen unter dem Einfluss der anderen Planeten beschreibt. 1812 veröffentlicht er sein bekanntes Werk über die Wahrscheinlichkeitsrechnung ( <i>Théorie analytique des probabilités</i> ).
1676 <b>Roemer</b> , Olaus (*1644 in Aarhus, †1710 in Kopenhagen): Messung der Lichtgeschwindigkeit durch Beobachtung der Jupitermonde.	1798 <b>Cavendish</b> , Henry (*1731 in Nizza, †1810 in London) veröffentlicht seine Bestimmung der Erddichte (und damit der Erdmasse und der Gravitationskonstanten) mit Hilfe der Drehwaage.
1686 <b>Newton</b> , Isaac (*1643 in Woolsthorpe, †1727 in Kensington) legt das Manuskript seiner berühmten <i>Philosophiae naturalis principia mathematica</i> ( <i>Mathematische Grundlagen der Naturwissenschaft</i> ) der Royal Society vor. Von 1665 bis 1686 hat Newton unter anderem Folgendes entdeckt: Newton 1 (Trägheitssatz), Newton 2 ( $F = \frac{dp}{dt}$ ), Gravitationsgesetz, Ableitung der Keplergesetze aus dem Gravitationsgesetz, Spektralzerlegung des Lichts, Korpuskulartheorie des Lichtes, Infinitesimalrechnung (unabhängig von Leibnitz), Bewegung des Mondes unter dem Schwerkrafteinfluss von Erde, Sonne und Planeten. Auf die Erkenntnisse Newtons aufbauend, kommt die moderne Physik erst richtig in Schwung.	1838 <b>Bessel</b> , Friedrich Wilhelm (*1784 in Minden, †1846 in Königsberg): Erste Entfernungsbestimmung eines Fixsterns mit der Parallaxenmethode.
1705 <b>Halley</b> , Edmond (*1656 in Haggerston, †1762 in Greenwich) entdeckt „seinen“ Kometen und wendet die Newton'sche Gravitationstheorie auf Kometenbahnen an. Er erkennt, dass auch die Fixsterne ihre Lage zueinander langsam ändern (1718). Quecksilberthermometer, Verbesserung der Taucherglocke.	1846 <b>Le Verrier</b> , Urbain Jean Joseph (*1818, †1877) und <b>Adams</b> , John Couch, berechnen aus den Störungen der Uranusbahn die Position eines weiteren Planeten (Pluto), der nach Le Verrier's Angaben von Johann Gottfried Galle, einem Assistenten an der Berliner Sternwarte, entdeckt wird.
1781 <b>Herschel</b> , Friedrich Wilhelm (*1738 in Hannover, †1822 in Slough bei Windsor) entdeckt den Planeten Uranus. Er erkennt, dass Doppelsterne einander umkreisende Sonnen sind und sich unser Sonnensystem relativ zu den Fixsternen bewegt (1782). Entdeckung infraroter Strahlen im Sonnenlicht (1800).	1905 <b>Einstein</b> , Albert (*1879 in Ulm, †1955 in Princeton, USA), spezielle Relativitätstheorie
	1915 <b>Einstein</b> , allgemeine Relativitätstheorie (Theorie der Gravitation)
	1929 <b>Hubble</b> , Edwin (*1889 Marshfield (USA), †1953 San Marino (USA)), Rotverschiebung des Lichtes entfernter Galaxien, damit Ausdehnung des Universums.
	1948 <b>Gamow</b> , Edwin (*1904 Odesa, †1968 Boulder (USA)), Urknalltheorie.
	1965 <b>Penzias</b> , Arno (*1933) und <b>Wilson</b> , Robert (*1936) entdecken die kosmische Hintergrundstrahlung.
	2001 <b>WMAP</b> (Satellit) vermisst die Hintergrundstrahlung und bestätigt die Urknalltheorie.



**Definitionen und Regeln**

**Stellung der Erde im Sonnensystem**

Die Erde ist angenähert eine Kugel mit dem Radius  $R_E = 6380 \text{ km}$ .

Die Erde umrundet die Sonne auf einer ungefähren Kreisbahn mit dem Radius  $r_E = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ .

Die Rotationsachse der Erde bildet mit der Senkrechten auf die Bahnebene den Winkel  $\varepsilon = 23^\circ 26' 21''$  (Entstehung der Jahreszeiten).

Der Mond umrundet die Erde auf einer ungefähren Kreisbahn mit dem Radius  $r_M = 384\,000 \text{ km}$ , die Ebene der Mondbahn ist gegen die Ebene der Erdbahn um den Winkel  $5^\circ 9'$  geneigt (Entstehung von Sonnen- und Mondfinsternissen).

Die Planeten umrunden wie die Erde die Sonne. Die Planeten und der Mond leuchten nicht selbst, sondern sie reflektieren das Sonnenlicht.

**Die Ellipse**

Die Ellipse ist die Menge aller Punkte P, die von zwei festen Punkten  $S_1$  und  $S_2$ , den *Brennpunkten*, eine konstante Abstandssumme haben:

$$\overline{S_1P} + \overline{S_2P} = k = \text{konstant}$$

Symmetrie  $\implies \overline{S_1A} = \overline{S_2B} \implies$

$$k = \overline{S_1B} + \overline{S_2B} = \overline{S_1B} + \overline{S_1A} = 2a, \text{ also}$$

$$\boxed{\overline{S_1P} + \overline{S_2P} = 2a}$$

$a$ : große Halbachse,  $b$ : kleine Halbachse

$d$ : lineare Exzentrizität

Exzentrizität:  $e = \frac{d}{a} \implies d = ea$

$$r_0 = a - d = a(1 - e)$$

Für  $r_1 = \overline{S_1P}$  und  $r_2 = \overline{S_2P}$  gilt

$$a - d \leq r_{1,2} \leq a + d$$

$$\overline{S_1C} + \overline{S_2C} = 2a \text{ und } \overline{S_1C} = \overline{S_2C} \implies$$

$$\overline{S_1C} = \overline{S_2C} = a$$

Pythagoras:  $b^2 = a^2 - d^2 = a^2 - e^2d^2 = a^2(1 - e^2)$

$$\boxed{b = a\sqrt{1 - e^2}}$$

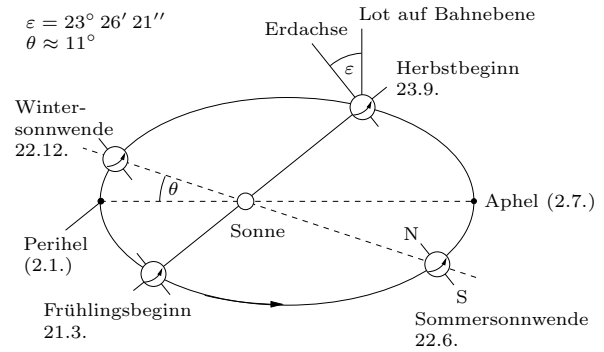
Für  $e = 0$ , d.h.  $b = a$  ist die Ellipse ein Kreis.

Gleichung der Ellipse:  $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Fläche der Ellipse:  $\boxed{A = ab\pi}$

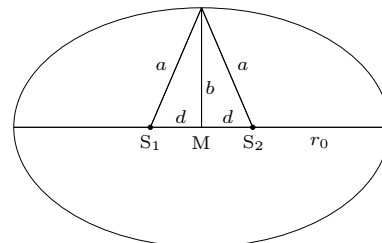
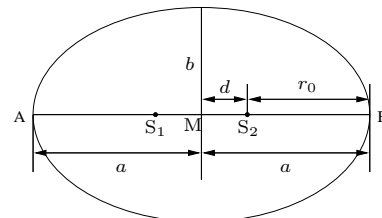
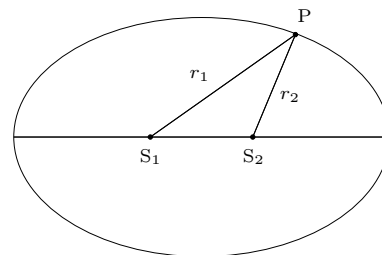
**Beispiele**

Die Bahn der Erde um die Sonne:



- Perihel : sonnennächster Punkt der Erdbahn
- Aphel : sonnenfernster Punkt der Erdbahn

Die *Fixsterne* sind viel weiter von uns entfernt als die Planeten und sind selbstleuchtende Himmelskörper wie unsere Sonne.



Konstruktion von Punkten P der Ellipse:

$S_1$  und  $S_2$  zeichnen,  $r_1$  mit

$$a - d \leq r_1 \leq a + d$$

wählen, dann Kreis um  $S_1$  mit Radius  $r_1$  und Kreis um  $S_2$  mit Radius  $r_2 = 2a - r_1$ .

**Definitionen und Regeln**

**Kepler und das Sonnensystem**

Gestützt auf die Daten von TYCHO BRAHE fand KEPLER nach langwierigen Berechnungen seine drei Gesetze für die Bewegung der Planeten um die Sonne:

1. Die Bahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der Leitstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (*Flächensatz*).
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen.

Für zwei Planeten mit den Umlaufzeiten  $T_1$  und  $T_2$  und den großen Halbachsen  $a_1$  und  $a_2$  lautet das 3.Keplersche Gesetz:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \implies \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = C$$

Dabei ist  $C$  für alle Körper, die sich um den gleichen Zentralkörper bewegen, konstant, d.h.für jeden umlaufenden Körper gilt

$$\frac{T^2}{a^3} = C$$

Die große Halbachse der Erdbahn wird als Längeneinheit in der Astronomie verwendet (Astronomische Einheit oder astronomical unit):

$$1 \text{ AE} = 1 \text{ au} = 1,49597870 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Die Konstante  $C$  im 3. Keplergesetz findet man aus den Daten eines umlaufenden Körpers. Für die Sonne (Symbol:  $\odot$ ) als Zentralkörper folgt aus den Daten der Erde

$$C_{\odot} = 1 \frac{\text{a}^2}{\text{AE}^3} = 2,9746 \cdot 10^{-19} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

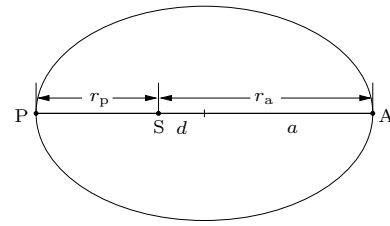
Für die Erde als Zentralkörper folgt aus den Daten der Mondbahn ( $a_{\text{Mond}} = 384400 \text{ km}$ ,  $T_{\text{Mond}} = 27,32166 \text{ d}$ ):

$$C_{\text{Erde}} = 1 \frac{T_{\text{Mond}}^2}{a_{\text{Mond}}^3} = 9,8105 \cdot 10^{-14} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

Der Flächensatz bedeutet, dass die vom Leitstrahl in der Zeit  $\Delta t$  überstrichene Fläche  $\Delta A$  proportional zu  $\Delta t$  ist. Mit der Umlaufdauer  $T$  und der Ellipsenfläche  $A = \pi ab$  folgt

$$\frac{\Delta t}{\Delta A} = \frac{T}{\pi ab}$$

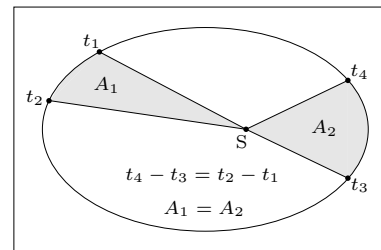
**Beispiele**



P: Perihel (kleinste Entfernung von der Sonne)  
A: Aphel (größte Entfernung von der Sonne)

$$r_p = a - d = a(1 - e), \quad r_a = a + d = a(1 + e)$$

Der Flächensatz (2. Keplersches Gesetz):



Einige Objekte im Sonnensystem

	Name	$\frac{a}{\text{AE}}$	$e$	$\frac{M}{M_{\text{E}}}$
P	Merkur	0,3871	0,2056	0,055
l	Venus	0,7233	0,0068	0,815
a	Erde	1,0000	0,0167	1,000
n	Mars	1,5237	0,0934	0,107
e	Jupiter	5,2026	0,0485	317,9
t	Saturn	9,5549	0,0555	95,2
e	Uranus	19,2184	0,0463	14,6
n	Neptun	30,1104	0,0090	17,2
Klein-	Pluto	39,543	0,2490	0,0017
pla-	Eris	67,695	0,441	0,0028
neten	Makemake	45,660	0,156	0,0010
Kometen	Halley	17,94	0,967	
	Hale-Bopp	187	0,99511	
Asteroiden	Ceres	2,7669	0,0767	0,00017
	Pallas	2,7701	0,2348	0,00004

Beispiel: Der Komet Halley

$$T = \sqrt{C_{\odot} a^3} = \sqrt{1 \frac{\text{a}^2}{\text{AE}^3} \cdot 17,94^3 \text{ AE}^3} = 76,0 \text{ a}$$

$$r_p = a(1 - e) = 0,592 \text{ AE}$$

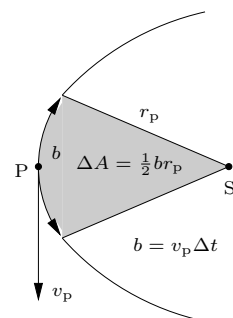
$$r_a = a(1 + e) = 35,29 \text{ AE}$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = 4,57 \text{ AE}$$

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\frac{1}{2} v_p \Delta t r_p}{\pi ab}$$

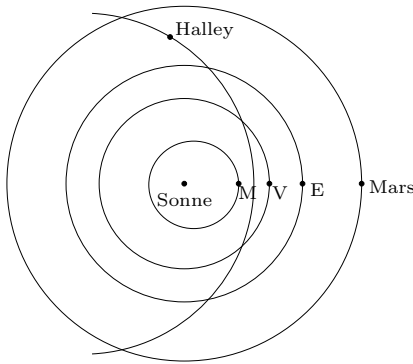
$$v_p = \frac{2\pi ab}{r_p T} = \frac{2\pi b}{(1 - e)T}$$

$$v_p = 54,3 \frac{\text{km}}{\text{s}} \text{ (im Perihel)}$$



**Definitionen und Regeln**

Innere Planeten:



Merksatz für die Reihenfolge der acht Planeten:

„Mein Vater erklärt mir jeden Sonntag unseren Nachthimmel.“

**Aufbau des Weltalls**

**Astronomische Längenmaße**

Lichtgeschwindigkeit:

$$c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$1 \text{ a} = 365,25 \text{ d} = 31557600 \text{ s}$$

Ein *Lichtjahr* (LJ, ly) ist die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt:

$$1 \text{ LJ} = 9,460730473 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

1 *Parsec* (1 pc) ist die Entfernung, aus der 1 AE unter dem Winkel 1'' erscheint:

$$1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ AE}}{\sin 1''} = 3,0857 \cdot 10^{16} \text{ m} = 3,2616 \text{ LJ}$$

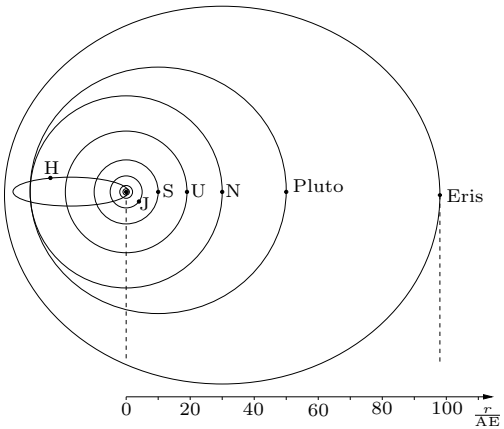
**Sterne**

Sterne sind riesige Gasbälle, die aus den leichten Elementen (im Periodensystem vor dem Eisen) bestehen. Der hohe Gravitationsdruck im Inneren der Sterne bewirkt so hohe Temperaturen, dass Kernfusion einsetzt. Die Fusion ist die Quelle der gewaltigen Energiemengen, die von den Sternen abgestrahlt werden. Die Strahlungsleistung *L* eines Sterns nennt man auch seine *Leuchtkraft*.

Die Lebensdauer eines Sterns reicht von einigen Millionen Jahren bei sehr schweren Sternen (*blauen Riesen*) bis zu vielen Milliarden Jahren bei leichten Sternen wie unserer Sonne. Je nach Masse ist der Endzustand eines Sterns ein *weißer Zwerg*, ein *Neutronenstern* oder ein *schwarzes Loch*.

**Beispiele**

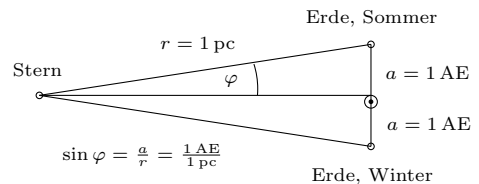
Äußere Planeten (H ist der Halley'sche Komet):



Zwischen Mars und Jupiter befindet sich der *Asteroidengürtel*, eine Ansammlung von vielen kleinen Himmelskörpern mit Durchmessern im Meterbereich bis zu 960 km (Ceres).

- Lichtsekunde: 1 Ls =  $c \cdot 1 \text{ s} \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}$
- Lichtminute: 1 Lmin =  $c \cdot 60 \text{ s} \approx 1,80 \cdot 10^{10} \text{ m}$
- Lichtstunde: 1 Lh =  $c \cdot 3600 \text{ s} \approx 1,08 \cdot 10^{12} \text{ m}$

- Erde-Mond: 384400km = 1,28 Ls
- Erde-Sonne: 1 AE = 499 Ls = 8,32 Lmin
- Eris-Sonne: 67,7 AE = 563 Lmin = 9,38 Lh



Die uns nächsten Fixsterne sind *Proxima Centauri* (4,22 LJ) und *Alpha Centauri* (4,36 LJ).

Eigenschaften unserer Sonne:

$M_{\odot}$	$R_{\odot}$	$L_{\odot}$
$1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	696 000 km	$3,84 \cdot 10^{26} \text{ W}$
$p_{\odot, \text{Zentrum}}$	$T_{\odot, \text{Zentrum}}$	$T_{\odot, \text{Oberfläche}}$
$3 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$	$1,5 \cdot 10^7 \text{ K}$	5780 K

**Weißer Zwerg:** Keine Kernfusion mehr, langsames Ausglühen

**Neutronenstern:** Ungeheure Dichte (ungefähr 1,5 Sonnenmassen bei 20 km Radius)

**Definitionen und Regeln**

Der Übergang eines schweren Sterns in seinen Endzustand ist eine dramatische *Supernova*. Die dabei frei werdende Energie führt zur Fusion der schweren Elemente, die in den Raum geschleudert werden. Aus diesen Gasen bilden sich neue Sterne und, da die schweren Elemente jetzt vorhanden sind, auch Planeten wie die Erde.

Alle schweren Elemente im Kosmos sind in Supernovaexplosionen entstanden!

**Beispiele**

**Schwarzes Loch:** Ist der Radius eines Himmelskörpers der Masse  $M$  kleiner als der zu  $M$  proportionale *Schwarzschildradius*  $R_S$ , dann kollabiert die ganze Masse auf Punktgröße (*Singularität*). Eine gedachte Kugelfläche um die Singularität mit Radius  $R_S$  heißt *Ereignishorizont* (Grenze des schwarzen Lochs). Nichts, nicht einmal Licht, kann das Innere des Ereignishorizonts verlassen. Der Schwarzschildradius einer Sonnenmasse ist ungefähr 3 km.

Endstadien eines Sterns ( $M_a$ : Anfangsmasse,  $M_e$ : Endmasse)

$M_a \lesssim 0,08 M_\odot$	$0,08 M_\odot \lesssim M_a \lesssim 10 M_\odot$	$10 M_\odot \lesssim M_a \lesssim 40 M_\odot$	$M_a \gtrsim 40 M_\odot$
$M_e \lesssim 0,08 M_\odot$	$0,08 M_\odot \lesssim M_e \lesssim 1,44 M_\odot$	$1,44 M_\odot \lesssim M_e \lesssim 3 M_\odot$	$M_e \gtrsim 3 M_\odot$
brauner Zwerg	weißer Zwerg	Neutronenstern	schwarzes Loch

**Unsere Milchstraße (Galaxis)**

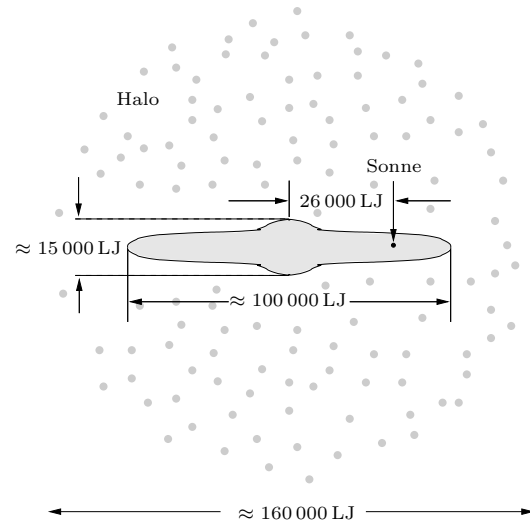
Die Sterne sind nicht gleichmäßig über das ganze All verteilt, sondern sie konzentrieren sich in Galaxien (Sternsystemen). Unsere Galaxis besteht aus ca.  $4 \cdot 10^{11}$  Sternen, deren Masse ungefähr  $1,75 \cdot 10^{11} M_\odot$  beträgt. Die Sterne der Galaxis konzentrieren sich auf eine dünne Scheibe mit verdicktem Kern. Der Kern ist ein riesiger Sternhaufen mit einigen  $10^{10} M_\odot$ , in dem die Abstände zwischen den Sternen sehr klein sind (einige Lichtwochen). Ganz im Zentrum der Galaxis befindet sich ein riesiges schwarzes Loch der Masse  $M \approx 2,5 \cdot 10^6 M_\odot$ . Von oben gesehen ist die Scheibe in Spiralarme aufgeteilt. Die Scheibe ist von einem kugelsymmetrischen *Halo* umgeben, der hauptsächlich aus Kugelhaufen besteht. Die Masse des sichtbaren Teils des Halos ist ca.  $1 \cdot 10^{10} M_\odot$ . Die Umlaufgeschwindigkeit unserer Sonne um das galaktische Zentrum ist

$$v_\odot \approx 220 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

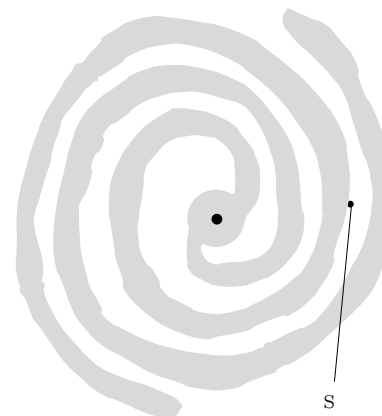
Aus dieser Umlaufgeschwindigkeit und den Umlaufzeiten von zwei Zwerggalaxien (Magellansche Wolken) um unsere Galaxis folgt, dass die Galaxis viel mehr Masse als die der sichtbaren Sterne enthalten muss (*dunkle Materie*).

Ungefähr die Hälfte aller Sterne bildet ein Doppel- oder Mehrfachsystem, d.h. zwei oder mehr Sterne umrunden ihren gemeinsamen Schwerpunkt.

Die meisten Einfachsterne besitzen Planeten, in Mehrfachsystemen sind Planetenbahnen oft chaotisch und die Planeten können aus dem System geschleudert werden.



Spiralstruktur der Galaxis:



**Definitionen und Regeln**

**Kosmologie**

Die Kosmologie ist die Lehre vom Aufbau und der Entwicklung des gesamten Universums.

Die Andromeda-Galaxie (M31) ist das unserer Milchstraße am nächsten stehende größere Sternsystem ( $\approx 1 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ ). Mit einigen kleineren Galaxien bilden die Milchstraße und M31 ein gravitativ gebundenes System, die *lokale Gruppe*. Der nächste größere Galaxienhaufen ist der rund 70 MLJ entfernte Virgohaufen, der ca. 2500 Galaxien enthält. Die Galaxienhaufen in einem kugelförmigen Gebiet um den Virgohaufen mit einem Radius von ungefähr 80 MLJ bilden den Virgo-Superhaufen. Die Haufen und Superhaufen bilden eine netzartige Struktur, die von fast galaxienfreien Blasen durchsetzt ist. Damit sind wir bei den größten Strukturen des Universums angekommen.

Die Gesamtzahl der Galaxien im sichtbaren Universum ist  $\approx 10^{11}$ , der Beitrag der hellen Sterne zur Masse des sichtbaren Universums ist dann  $\approx 10^{22} M_{\odot} \approx 10^{52} \text{ kg}$ , die Gesamtmasse des beobachtbaren Weltalls liegt bei ungefähr  $10^{54} \text{ kg}$ . Die *baryonische Materie*, bestehend aus Quarks und Leptonen (siehe S. 3 und S. 26), d.h. alle Sterne, Planeten, schwarzen Löcher und das interstellare Gas, machen nur ungefähr 5% der Gesamtmasse des Universums aus. Weitere 25% bestehen aus *dunkler Materie*, von der man noch nicht weiß, aus was sie genau besteht und die restlichen 70% sind die noch mysteriösere *dunkle Energie*.

Die Spektrallinien des Lichtes einer von uns weg bewegten Quelle sind verschoben (*Rotverschiebung*). Bei der Untersuchung des Lichtes ferner Galaxien entdeckten GEORGES LEMAÎTRE (1927) und EDWIN HUBBLE (1929) eine Rotverschiebung der Spektrallinien, d.h. die Galaxien bewegen sich von uns weg. Die Geschwindigkeit  $v$ , mit der sich die Galaxien von uns entfernen, ist proportional zur Entfernung  $D$  der Galaxien (*Hubblegesetz*):

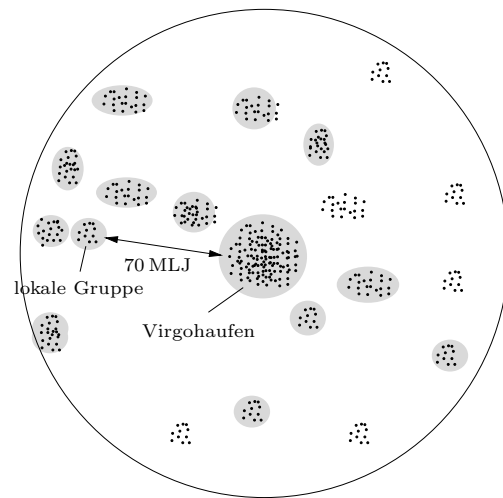
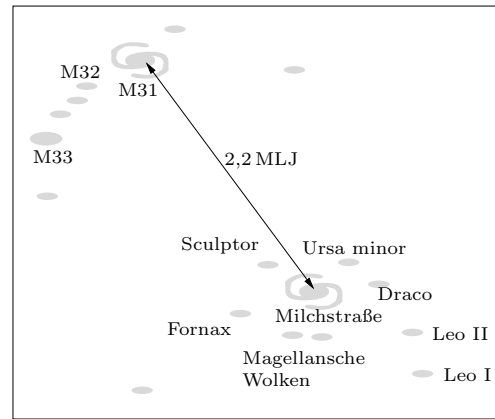
$$v = H_0 D$$

mit der *Hubblekonstanten*  $H_0 = 73 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$ .

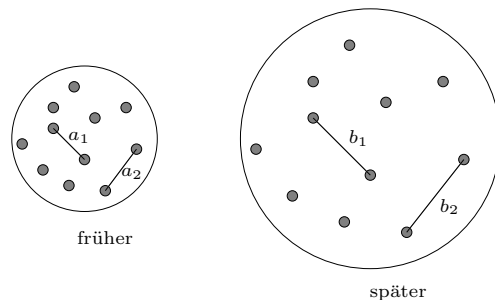
Aus dem Hubblegesetz und einer genauen Vermessung der Hintergrundstrahlung durch Satelliten (COBE (1989–1993), WMAP (2001–2009)) folgt:

Vor  $13,7 \cdot 10^9$  a entstand unser Universum aus einer punktförmigen Region (*Urknall*). Seit dem Urknall dehnt sich das Universum aus (Expansion).

**Beispiele**



Ausdehnung des Weltalls:



**Die Hintergrundstrahlung**

Bis ca. 300000 a nach dem Urknall war das Universum so heiß, dass die Materie ionisiert war. Ionisierte Gase sind undurchsichtig. Ab ca. 300000 a nach dem Urknall wurde das Universum für Licht durchlässig. Dieses Licht ist heute noch vorhanden und trifft uns aus allen Richtungen (*kosmische Hintergrundstrahlung*, entdeckt von PENZIAS und WILSON, 1965). Allerdings ist die Wellenlänge dieser Strahlung wegen der Expansion des Universums jetzt viel größer als damals (Mikrowellen).

# Newtonsche Mechanik

## Definitionen und Regeln

### Die Bewegungsgleichung

#### Näherungen

Ist der Ort  $x$  eines Körpers als Funktion der Zeit gegeben ( $x(t)$ ), dann gilt für die Momentangeschwindigkeit zur Zeit  $t$  (siehe S. 37)

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$v(t)$  ist die Steigung der Tangente an den Grafen von  $x(t)$  im Punkt  $(t|x(t))$ .

Näherungsweise gilt also für ein kleines  $\Delta t$  (umso genauer, je kleiner  $\Delta t$  ist):

$$v(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

(einseitiger Differenzenquotient)

Eine viel bessere Näherung ist

$$v(t) \approx \frac{x(t + \frac{\Delta t}{2}) - x(t - \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t}$$

(zweiseitiger Differenzenquotient)

Analog folgt aus der Definition

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

der Momentanbeschleunigung für kleine  $\Delta t$  die Näherungsformel

$$a(t) \approx \frac{v(t + \frac{\Delta t}{2}) - v(t - \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t}$$

Umgekehrt berechnet man näherungsweise bei bekanntem  $v(t)$  die Wegdifferenz  $\Delta x$  im kleinen Zeitintervall  $\Delta t = t_2 - t_1$ :

$$\Delta x \approx v(\bar{t})\Delta t \quad \text{mit} \quad \bar{t} = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

Analog:  $\Delta v \approx a(\bar{t})\Delta t$

Für größere Intervalle  $[T_1, T_2]$  zerlegt man in  $n$  Teilintervalle der Breite

$$\Delta t = \frac{T_2 - T_1}{n}$$

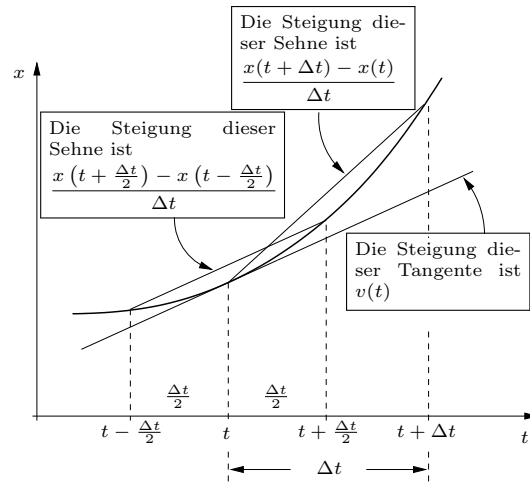
Mittelpunkte der Zeitintervalle:

$$t_1 = T_1 + \frac{\Delta t}{2}, t_2 = t_1 + \Delta t, t_3 = t_2 + \Delta t, \dots$$

$$\Delta x \approx \Delta t \cdot [v(t_1) + v(t_2) + \dots + v(t_n)]$$

(Mid-Point-Rule)

## Beispiele



Wir testen die Näherungsformeln für

$$x(t) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 \quad \text{mit} \quad v(t) = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$$

und den Werten  $t = 1 \text{ s}$  und  $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ .

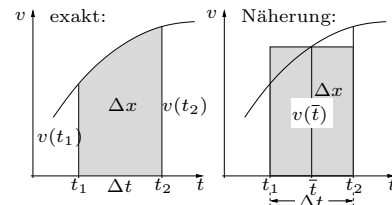
Exakt gilt  $v(1 \text{ s}) = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Mit einseitigem Differenzenquotienten:

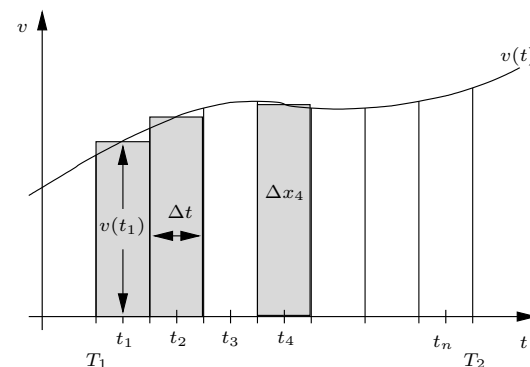
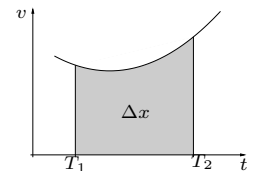
$$v(1 \text{ s}) \approx \frac{1,21 \text{ m} - 1 \text{ m}}{0,1 \text{ s}} = 2,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Mit zweiseitigem Differenzenquotienten:

$$v(1 \text{ s}) \approx \frac{1,1025 \text{ m} - 0,9025 \text{ m}}{0,1 \text{ s}} = 2,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Wegdifferenz gleich Fläche unter dem  $tv$ -Diagramm.



**Definitionen und Regeln**

**Die Bewegungsgleichung**

Newtonsche Gesetze (siehe S. 6 und S. 7):

Bewegt sich ein Körper der Masse  $m$  mit der Beschleunigung  $a(t)$ , dann wirkt auf ihn die Kraft

$$F(t) = m \cdot a(t)$$

Umgekehrt gilt die *Bewegungsgleichung*:

Wirkt auf einen Körper der Masse  $m$  die Gesamtkraft  $F(t)$ , dann erhält er die Beschleunigung

$$a(t) = \frac{F(t)}{m}$$

**Numerische Lösung der Bewegungsgleichung (Halbschrittverfahren)**

Die Kraft  $F$  auf einen Körper der Masse  $m$  kann von seinem Ort  $x$ , von seiner Geschwindigkeit  $v$  und von der Zeit  $t$  abhängen:

$$F = F(x, v, t)$$

Eine Grundaufgabe der Mechanik ist es, bei Kenntnis der Funktion  $F(x, v, t)$  und den *Anfangsbedingungen*  $x(t_0) = x_0$  und  $v(t_0) = v_0$  den Ort  $x(t)$  und die Geschwindigkeit  $v(t)$  für ein beliebiges  $t$  zu berechnen. Ist  $F(x, v, t)$  nicht konstant, dann fehlen uns die mathematischen Mittel für eine analytische Lösung der Bewegungsgleichung. Wir können aber unter Ausnutzung der Ergebnisse von S. 46  $x(t)$  und  $v(t)$  mit beliebiger Genauigkeit näherungsweise berechnen (*numerische Lösung*).

Zuerst wählt man eine kleine Zeitspanne  $\Delta t$  (*Schrittweite*). Um jetzt aus  $x_0 = x(t_0)$  und  $v_0 = v(t_0)$  die Werte  $x_1 = x(t_1)$  und  $v_1 = v(t_1)$  mit  $t_1 = t_0 + \Delta t$  mit der *Mid-Point-Rule* zu ermitteln, berechnet man zuerst die Zwischenwerte

$$v_0^* = v_0 + a_0 \frac{\Delta t}{2} = v_0 + \frac{F(x_0, v_0, t_0)}{m} \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

und

$$x_0^* = x_0 + v_0 \frac{\Delta t}{2}$$

an der Stelle  $t_0^* = t_0 + \frac{\Delta t}{2}$ . Mit diesen Werten berechnet man

$$a_0^* = \frac{F(x_0^*, v_0^*, t_0^*)}{m}$$

und damit

$$v_1 = v_0 + a_0^* \Delta t \quad \text{und} \quad x_1 = x_0 + v_0^* \Delta t$$

**Beispiele**

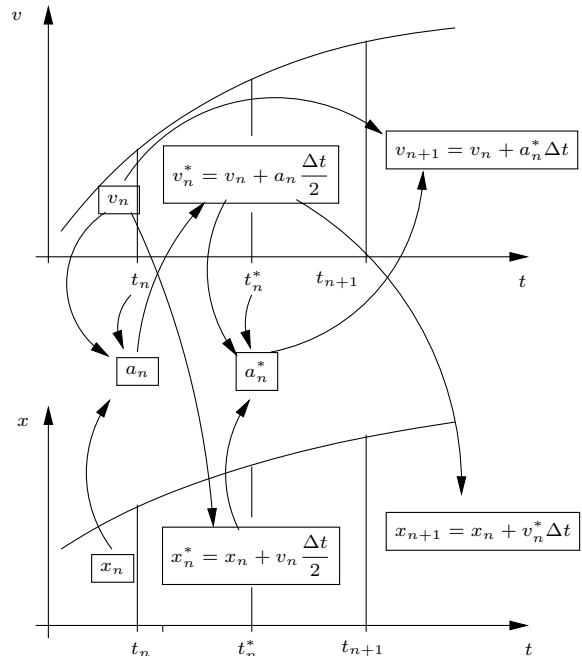
Ein Spezialfall der Bewegungsgleichung ist:

Wirkt auf einen Körper der Masse die Gesamtkraft null, dann ist auch seine Beschleunigung gleich null, d.h. er bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

(*Trägheitssatz*)

Für eine konstante Kraft  $F$  ist auch  $a = \frac{F}{m}$  konstant, d.h. wir haben eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung, deren Beschreibung wir schon kennen (siehe S. 37).

Das bekannteste Beispiel für eine Bewegung unter dem Einfluss einer konstanten Kraft ist der freie Fall in der Nähe der Erdoberfläche (siehe S. 38).



Berechnung von  $v_{n+1}$  und  $x_{n+1}$  aus  $v_n$  und  $x_n$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{F(x_n, v_n, t_n)}{m} \\ t_n^* &= t_n + \frac{\Delta t}{2} \\ v_n^* &= v_n + a_n \frac{\Delta t}{2} \\ x_n^* &= x_n + v_n \frac{\Delta t}{2} \\ a_n^* &= \frac{F(x_n^*, v_n^*, t_n^*)}{m} \\ v_{n+1} &= v_n + a_n^* \Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + v_n^* \Delta t \end{aligned}$$

**Definitionen und Regeln**

**Die harmonische Schwingung**

Wirkt auf einen Körper der Masse  $m$  die ortsabhängige Kraft  $F = -D \cdot x$ , dann lautet die Bewegungsgleichung:

$$F(x) = ma(t) = -D \cdot x(t)$$

(Schwingungsgleichung)

Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung ist

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

und

$$v(t) = v_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

mit der *Amplitude*  $A$ , der *Phase*  $\varphi$  und der *Kreisfrequenz*

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$$

(Frequenz)

Einheit der Frequenz:  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ Hertz} = 1 \frac{1}{\text{s}}$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

(Schwingungsdauer)

Die Gesamtenergie der Schwingung ist

$$W = \frac{m}{2} v(t)^2 + \frac{D}{2} x(t)^2 = \frac{m}{2} v_0^2 = \frac{D}{2} A^2$$

$$\Rightarrow v_0 = A \sqrt{\frac{D}{m}} = A\omega$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Die maximale Geschwindigkeit  $v_0$  erreicht der schwingende Körper beim Durchgang durch den Nullpunkt.

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin \left[ \omega \left( t + \frac{\varphi}{\omega} \right) \right]$$

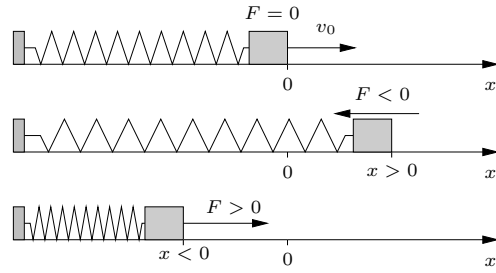
Der Phase  $\varphi$  entspricht also eine Verschiebung der Funktion  $\sin \omega t$  um  $t_A = -\frac{\varphi}{\omega}$  auf der  $t$ -Achse.

Beispiel:

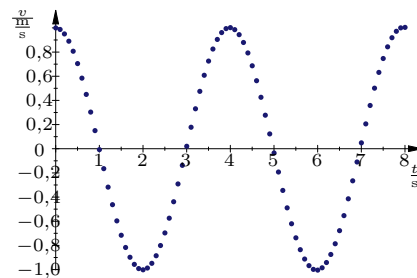
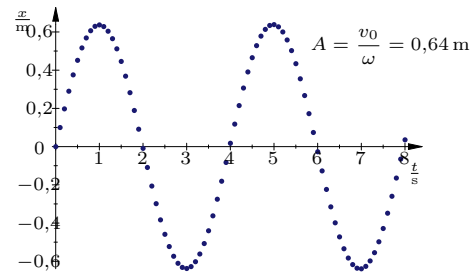
$$x(t) = A \sin \left( \frac{\pi}{4\text{s}} t - \frac{\pi}{2} \right)$$

ist die um  $t_A = 2\text{s}$  nach rechts verschobene Funktion  $A \sin \left( \frac{\pi}{4\text{s}} t \right)$  mit der Schwingungsdauer  $T = 8\text{s}$  und der Frequenz  $f = 0,125\text{ Hz}$ .

**Beispiele**



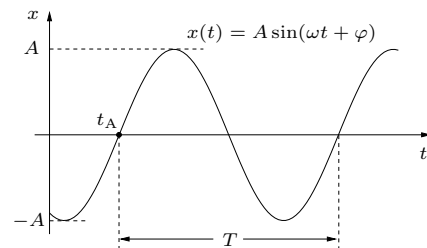
Numerische Lösung der Schwingungsgleichung für  $m = 0,81 \text{ kg}$ ,  $D = 2,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $x(0) = 0$  und  $v(0) = v_0 = 1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  mit der Schrittweite  $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ .



Die Schwingungsdauer ist  $T = 4,0\text{s}$ . Für  $x(t)$  passt am besten  $x(t) = A \sin \omega t$ , wobei  $T$  die Periode ist. Es gilt also  $\omega T = 2\pi$  oder

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1,57 \frac{1}{\text{s}} \quad \text{oder} \quad \omega^2 = 2,47 \frac{1}{\text{s}^2}$$

Andererseits ist  $\frac{D}{m} = 2,47 \frac{1}{\text{s}^2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{D}{m}$ .





**Definitionen und Regeln**

**Die gleichförmige Kreisbewegung**

P bewegt sich mit konstanter *Winkelgeschwindigkeit*

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \implies \varphi = \omega t$$

auf einer Kreisbahn mit Radius  $r$ . Die Einheit von  $\omega$  ist  $\frac{1}{s}$ , wird aber nicht mit Hertz bezeichnet. Wählt man für  $\Delta t$  die Umlaufdauer  $T$ , dann ist

$$\Delta\varphi = 360^\circ = 2\pi = \omega T$$

oder

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Betrag der Geschwindigkeit:

$$v = \frac{2r\pi}{T} = \omega r$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix}$$

Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}(t)$  ist tangential zur Bahn, d.h. er steht senkrecht auf  $\vec{r}(t)$ :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \end{pmatrix}$$

Die Beschleunigung  $\vec{a}(t)$  berechnet sich genauso aus  $\vec{v}(t)$ , wie sich  $\vec{v}(t)$  aus  $\vec{r}(t)$  berechnet:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t)}{\Delta t}, \quad \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Daher gilt für den Betrag der Beschleunigung (siehe Abb. rechts)

$$a = \frac{2\pi v}{T} = \omega v \frac{v}{r} = \omega^2 r$$

und  $\vec{a}(t)$  steht senkrecht auf  $\vec{v}(t)$ .  $\vec{a}(t)$  zeigt also von P zum Kreismittelpunkt.

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos \omega t \\ -r\omega^2 \sin \omega t \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}$$

$\vec{a}$  heißt *Zentripetalbeschleunigung*.

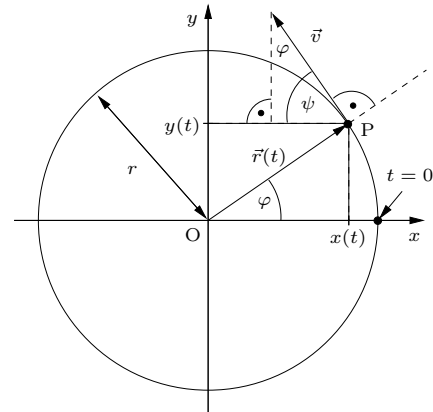
Durchläuft ein Körper der Masse  $m$  eine Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , dann wirkt auf ihn die *Zentripetalkraft*

$$\vec{F}_Z = m\vec{a} = -m\omega^2 \vec{r}$$

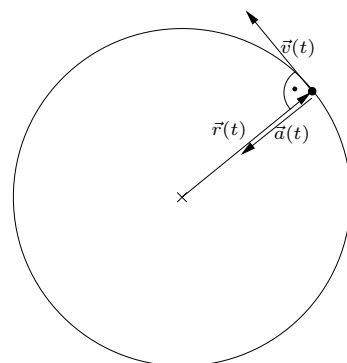
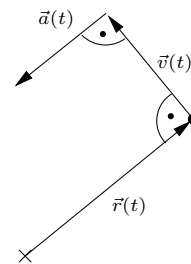
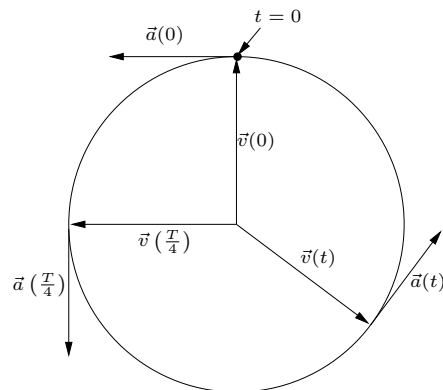
mit dem Betrag

$$F_Z = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r}$$

**Beispiele**



Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}(t)$  dreht sich einmal in der Zeit  $T$  um  $360^\circ$ , seine Spitze beschreibt einen Kreis der „Länge“  $2\pi v$ :



**Definitionen und Regeln**

**Bezugssysteme**

**Galileitransformation**

Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, in dem der Trägheitssatz gilt (siehe S.47).

Das Inertialsystem  $S'$  bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  relativ zum Inertialsystem  $S$ . Zur Zeit  $t = 0$  sind die Ursprünge beider Systeme am gleichen Ort.

$$\boxed{x' = x - vt}$$

(Galileitransformation)

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} - v = u - v$$

$$\begin{aligned} a' &= \frac{\Delta u'}{\Delta t} = \frac{u'(t_2) - u'(t_1)}{\Delta t} = \\ &= \frac{u(t_2) - v - (u(t_1) - v)}{\Delta t} = \\ &= \frac{u(t_2) - u(t_1)}{\Delta t} = a \end{aligned}$$

$$\boxed{x' = x - vt, \quad u' = u - v, \quad a' = a}$$

**Trägheitskräfte**

$S'$  bewegt sich mit der konstanten Beschleunigung  $b$  relativ zu  $S$ ,  $K$  bewegt sich mit der Beschleunigung  $a$  in  $S$  und mit  $a'$  in  $S'$ :

$$x = \frac{a}{2}t^2 = \xi + x' = \frac{b}{2}t^2 + \frac{a'}{2}t^2 = \frac{b+a'}{2}t^2$$

$$\Rightarrow a = b + a' \quad \text{oder} \quad a' = a - b$$

In  $S$  wirkt auf den Körper  $K$  mit der Masse  $m$  also die Kraft  $F = ma$ , in  $S'$  verspürt  $K$  dagegen die Kraft

$$F' = ma' = m(a - b) = F - mb$$

Die angestellten Überlegungen gelten auch vektoriell:

In einem System  $S'$ , das sich relativ zu einem Inertialsystem mit der Beschleunigung  $\vec{b}$  bewegt, wirkt auf einen Körper der Masse  $m$  die Gesamtkraft

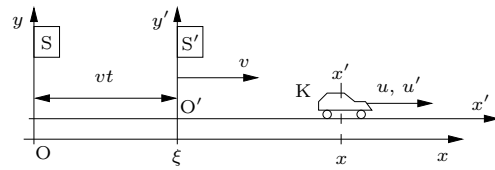
$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_T = \vec{F} - m\vec{b}$$

wobei  $\vec{F}$  die Wechselwirkungskraft und

$$\boxed{\vec{F}_T = -m\vec{b}}$$

die *Trägheitskraft* ist.

**Beispiele**

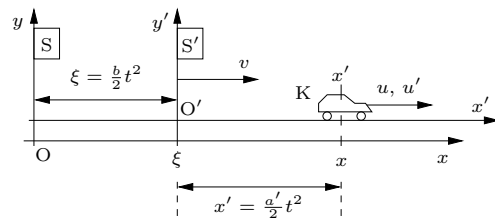


Geschwindigkeit des Körpers  $K$  in  $S$ :  $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Geschwindigkeit des Körpers  $K$  in  $S'$ :  $u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t}$

$$t_2 = t_1 + \Delta t \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Delta x' &= x'(t_2) - x'(t_1) = \\ &= x(t_2) - vt_2 - (x(t_1) - vt_1) = \\ &= x(t_2) - x(t_1) - v(t_2 - t_1) = \\ &= \Delta x - v\Delta t \end{aligned}$$



In diesem Beispiel sei  $g = -10 \frac{m}{s^2}$  ( $x$ -Achse zeigt nach oben). Eine Person der Masse  $m = 70 \text{ kg}$  verspürt in einem Aufzug, der mit konstanter Geschwindigkeit nach oben fährt, die Gewichtskraft  $F_G = mg = -700 \text{ N}$ .

Beschleunigt der Aufzug mit  $b_1 = 2 \frac{m}{s^2}$  nach oben, verspürt die Person die Kraft

$$F = mg - mb_1 = m(g - b_1) = -840 \text{ N}.$$

Beschleunigt der Aufzug mit  $b_2 = -2 \frac{m}{s^2}$  nach unten, verspürt die Person die Kraft

$$F = mg - mb_2 = m(g - b_2) = -560 \text{ N}.$$

**Definitionen und Regeln**

Eine Masse  $m$  beschreibt in einem Inertialsystem  $S$  eine Kreisbahn (Radius  $r$ , Mittelpunkt  $O$ ) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Die Beschleunigung der Masse in  $S$  ist die Zentripetalbeschleunigung  $a_Z = -\omega^2 \vec{r}$ . In einem ebenfalls mit  $\omega$  um  $O$  rotierenden System  $S'$  ruht die Masse  $m$ , verspürt aber die nach außen wirkende Trägheitskraft (Zentrifugalkraft)

$$F_T = -ma_Z = m\omega^2 \vec{r}$$

(Zentrifugalkraft)

**Wurfbewegungen**

Ein Körper  $K$  (Masse  $m$ ) startet zur Zeit null am Ort  $(0|h)$  mit der Anfangsgeschwindigkeit

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{pmatrix}$$

$$v_0 = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$$

$$v_{x0} = v_0 \cdot \cos \varphi, \quad v_{y0} = v_0 \cdot \sin \varphi$$

$K$  unterliegt nur der Gravitationskraft

$$F_G = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$K$  erfährt also in  $x$ -Richtung keine Beschleunigung, d.h.

$$v_x(t) = v_{x0} \quad (\text{konstant})$$

$$x(t) = v_{x0}t$$

Die Beschleunigung in  $y$ -Richtung ist  $-g$ :

$$v_y(t) = v_{y0} - gt$$

$$y(t) = h + v_{y0}t - \frac{g}{2}t^2$$

$$x = v_{x0}t \implies t = \frac{x}{v_{x0}} \implies$$

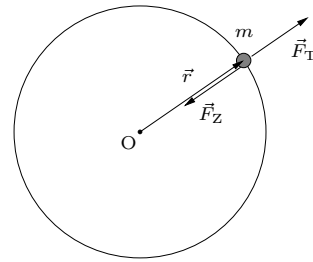
$$y = h + v_{y0}t - \frac{g}{2}t^2 =$$

$$= h + \frac{v_{y0}x}{v_{x0}} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_{x0}^2}$$

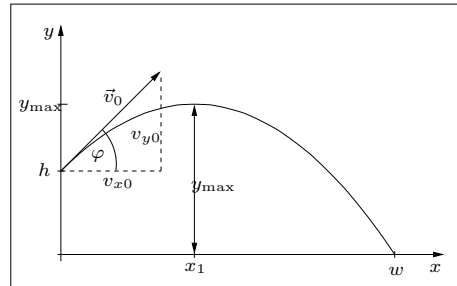
$$y = -\frac{g}{2v_{x0}^2} \cdot x^2 + \frac{v_{y0}}{v_{x0}} \cdot x + h$$

Die Bahnkurve ist also eine Parabel.

**Beispiele**



- Zentripetalkraft : Kraft im Inertialsystem, die den Körper auf die Kreisbahn zwingt.
- Zentrifugalkraft : Trägheitskraft im rotierenden System, in dem der Körper ruht.



Beispiel: Ein Kugelstoßer stößt die Kugel in der Höhe  $h = 2,00$  m mit der Geschwindigkeit  $v_0 = 14,5 \frac{m}{s}$  unter dem Winkel  $\varphi = 40,0^\circ$  gegen die Horizontale ab.

Höchster Punkt H:

$$v_y(t_1) = v_{y0} - gt_1 = 0 \implies$$

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \varphi}{g} = 0,95 \text{ s}$$

$$x_1 = v_{x0}t_1 = 10,6 \text{ m}$$

$$y_1 = y(t_1) = h + v_{y0}t_1 - \frac{g}{2}t_1^2 = 6,43 \text{ m}$$

$$\implies H(10,6 \text{ m} | 6,43 \text{ m})$$

Wurfweite:

$$y(t_2) = h + v_{y0}t - \frac{g}{2}t^2 = 0 \implies$$

$$t_2 = \frac{1}{g} \left( v_{y0} + \sqrt{v_{y0}^2 + 2gh} \right) = 2,09 \text{ s}$$

$$x_2 = v_{x0}t_2 = 23,3 \text{ m}$$

**Definitionen und Regeln**

**Der Impulssatz**

Definition des Impulses:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Ein System aus  $n$  Körpern heißt *abgeschlossen*, wenn die Körper zwar untereinander, aber mit keinen anderen Körpern in Wechselwirkung stehen.

Aus der Definition der Masse (siehe S.6) folgt:

Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems ist konstant:

$$\vec{p}_{\text{ges}} = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_n = \text{konst.}$$

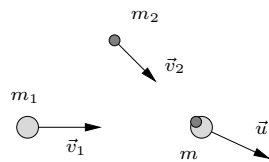
**(Impulssatz)**

Andere Formulierung:

$$\vec{p}_{\text{ges, vorher}} = \vec{p}_{\text{ges, nachher}}$$

**Total inelastischer Stoß**

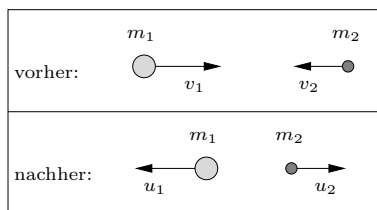
Zwei Körper mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  und den Geschwindigkeiten  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  stoßen zusammen und bilden einen Verbundkörper mit der Masse  $m = m_1 + m_2$  und der Geschwindigkeit  $\vec{u}$ :



$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$$

**Zentraler elastischer Stoß**

Zwei Körper mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  und den Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  stoßen *zentral* (alle Geschwindigkeiten, vor- und nachher, sind parallel) und *elastisch* (die gesamte kinetische Energie vorher ist gleich der gesamten kinetischen nachher) zusammen:



Energiesatz :  $\frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2 = \frac{m_1}{2}u_1^2 + \frac{m_2}{2}u_2^2$

Impulssatz :  $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$

**Beispiele**

Rakete:

Eine Rakete der Masse  $M + m$  stößt Treibgase der Masse  $m$  aus. Die Geschwindigkeit der Gase relativ zur Rakete nach dem Ausstoß ist  $-u$ , die Geschwindigkeitsänderung der Rakete ist  $\Delta v$ :

$$(M + m)v = m(v + \Delta v - u) + M(v + \Delta v)$$

$$0 = m\Delta v - mu + M\Delta v$$

$$\Delta v = \frac{mu}{m + M}$$

Beispiel eines zentralen, unelastischen Stoßes:

Eine Kugel der Masse  $m = 30 \text{ g}$  schlägt mit der Geschwindigkeit  $v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  in einen ruhenden Sandsack der Masse  $M = 2,01 \text{ kg}$  und bleibt in ihm stecken.  $u$  ist die Geschwindigkeit Kugel-Sandsack nach dem Einschlag:

$$mv = (m + M)u \implies u = \frac{mv}{m + M} = \frac{0,03 \cdot 340 \text{ m/s}}{2,04} = 5,00 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vorsicht! Diese Aufgabe ist *nicht* mit dem Energiesatz lösbar, da die kinetische Energie nicht erhalten bleibt:

$$W_{\text{k, vorher}} = \frac{m}{2}v^2 = 1734 \text{ J}$$

$$W_{\text{k, nachher}} = \frac{m + M}{2}u^2 = 25,5 \text{ J}$$

Die Differenz  $\Delta W = W_{\text{k, vorher}} - W_{\text{k, nachher}}$  steckt in der inneren Energie (Wärme, Verformung).

Beispiel eines zentralen, elastischen Stoßes:

Eine Stahlkugel der Masse  $m_1 = m$  trifft mit der Geschwindigkeit  $v_1 = v$  elastisch auf eine ruhende Kugel der Masse  $m_2 = 2m$ :

Energiesatz :  $\frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}u_1^2 + \frac{2m}{2}u_2^2$

Impulssatz :  $mv = mu_1 + 2mu_2$

$u_1 = v - 2u_2$  in Energiesatz:

$$v^2 = (v - 2u_2)^2 + 2u_2^2$$

$$0 = -4vu_2 + 6u_2^2 = 2u_2(-2v + 3u_2)$$

$$\implies u_2 = 0 \quad \text{und} \quad u_1 = v$$

(das ist die Situation vorher!)

oder  $u_2 = \frac{2}{3}v$  und  $u_1 = -\frac{1}{3}v$

**Definitionen und Regeln**

**Gravitation**

**Das Gravitationsgesetz**

Aus einer Analyse von Umlaufbahnen (Mond, Satelliten) folgt:

Zwei punktförmige Massen  $m_1$  und  $m_2$  in der Entfernung  $r$  ziehen sich mit der Kraft

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

an (Gravitationskraft).

(Gravitationsgesetz, Newton 1680)

Gravitationskonstante:

$$G = 6,6742 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

**Das Gravitationsfeld**

Im Ursprung O eines Koordinatensystems sitzt die Masse  $M$ , am Ort  $\vec{r}$  befindet sich eine Testmasse  $m$ . Der Quotient  $\vec{g}(\vec{r})$  aus  $\vec{F}_G(\vec{r})$  und  $m$  ist eine von  $m$  unabhängige Größe und heißt **Gravitationsfeldstärke** der Masse  $M$  am Ort  $\vec{r}$ :

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G(\vec{r})}{m} = -\frac{GM}{r^3} \cdot \vec{r}$$

mit dem Betrag

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

Wegen **Newton 2** ist  $\vec{g}(\vec{r})$  nichts anderes als die Beschleunigung, die eine Masse  $m$  aufgrund der Schwerkraft am Ort  $\vec{r}$  erhält:

Gravitationsfeldstärke = Schwerebeschleunigung

**Der Gauß'sche Satz**

Für eine radialsymmetrische Massenverteilung um O (die Dichte  $\rho$  ist nur von  $r$  abhängig, d.h.  $\rho$  hat auf einer Kugeloberfläche um O überall den gleichen Wert) gilt:

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}$$

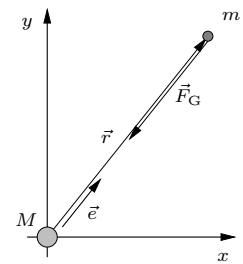
$m(r)$  ist die Masse innerhalb einer Kugel vom Radius  $r$  um O.

Das Gravitationsfeld einer radialsymmetrischen Massenverteilung der Gesamtmasse  $M$  ist außerhalb der Masse gleich dem Feld einer Punktmasse  $M$  im Zentrum der Verteilung.

**Beispiele**

Masse  $M$  im Ursprung, Masse  $m$  am Ort  $\vec{r}$ .  $\vec{e}$  ist ein Vektor, der in die Richtung von  $\vec{r}$  zeigt und den Betrag 1 hat:

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{mit} \quad r = |\vec{r}|$$



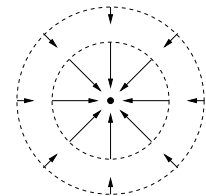
Die Gravitationskraft  $\vec{F}_G$  von  $M$  auf  $m$  zeigt in die Richtung von  $-\vec{e}$ :

$$\vec{F}_G = G \cdot \frac{Mm}{r^2} \cdot (-\vec{e}) = -\frac{GMm}{r^3} \cdot \vec{r}$$

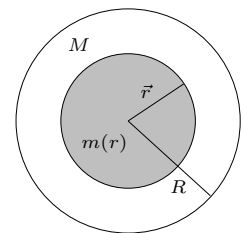
Erdmasse aus  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  und  $R = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ :

$$g = \frac{GM}{R^2} \implies M = \frac{gR^2}{G} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Gravitationsfeld einer Punktmasse



Gravitationsfeld eines Planeten mit konstanter Dichte  $\rho$ :



Für  $r \geq R$  ist  $M(r)$  gleich der Gesamtmasse  $M$  des Planeten.

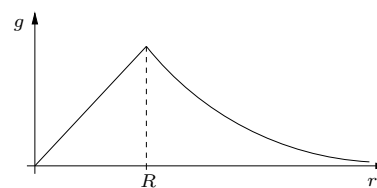
Mit

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

folgt daraus

$$m(r) = \rho \cdot V(r) = \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 = M \cdot \frac{r^3}{R^3}$$

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2} = \begin{cases} \frac{GM}{R^3} \cdot r & \text{für } r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{für } r \geq R \end{cases}$$



**Definitionen und Regeln**

**Wellen**

$u(x, t)$  ist eine physikalische Größe, die vom Ort  $x$  und der Zeit  $t$  abhängt.

$$u(x, 0) = f(x)$$

ist dann eine nur vom Ort abhängige Funktion.  $u(x, t)$  beschreibt eine Welle mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ , wenn  $u(x, t)$  nichts anderes ist als die sich mit  $c$  nach rechts bewegend Funktion  $f(x)$ . Zur Zeit  $t$  ist  $u(x, t)$  also die um  $ct$  nach rechts verschobene Funktion  $f(x)$ , d.h.

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

(Welle nach rechts)

Analog findet man

$$u(x, t) = f(x + ct)$$

(Welle nach links)

Bei einer sinusförmigen Welle ist

$$f(x) = A \sin kx$$

mit der *Amplitude*  $A$ , der *Wellenzahl*  $k$  und der *Wellenlänge*

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Für eine nach rechts laufende Sinuswelle gilt

$$u(x, t) = A \cdot \sin(k(x - ct)) = A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

mit

$$\omega = kc = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Für einen festen Ort  $x_0$  beschreibt

$$u(x, t) = A \cdot \sin(kx_0 - \omega t)$$

eine Schwingung mit der Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Aus

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$$

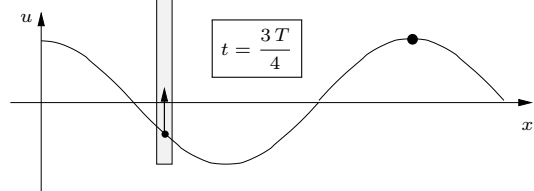
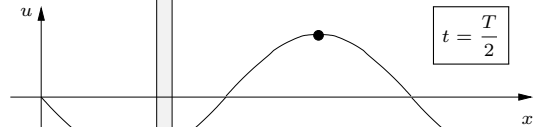
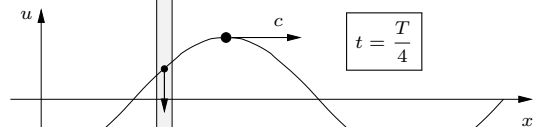
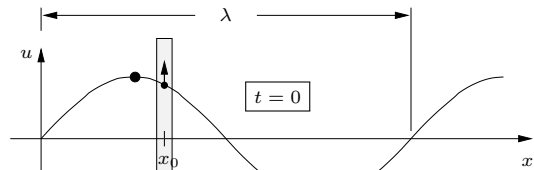
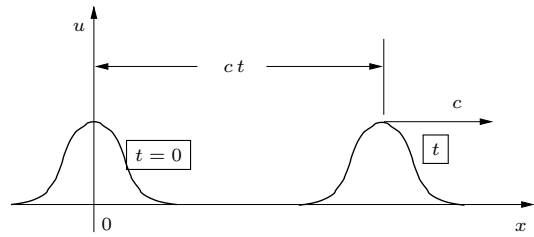
folgt mit der Frequenz (siehe S.27)

$$f = \frac{1}{T}$$

die wichtige Beziehung

$$f\lambda = c$$

**Beispiele**



Ein Handy des D-Netzes hat die Frequenz  $f = 900 \text{ MHz} = 9 \cdot 10^8 \frac{1}{\text{s}}$ . Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Funkwellen ist die Lichtgeschwindigkeit, woraus für die Wellenlänge folgt

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9 \cdot 10^8 \frac{1}{\text{s}}} = 0,33 \text{ m}$$

Eine Schallwelle der Frequenz  $f = 440 \text{ Hz}$  breitet sich mit der Schallgeschwindigkeit  $c_s = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  aus, woraus für die Wellenlänge folgt

$$\lambda = \frac{c_s}{f} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{440 \frac{1}{\text{s}}} = 0,77 \text{ m}$$

**Definitionen und Regeln**

**Interferenz**

Überlagerung von zwei Wellen gleicher Wellenlänge und gleicher Amplitude. Die Entfernung  $d$  zweier Wellenberge (Maxima) ist der *Gangunterschied* der beiden Wellen.

Ist  $d$  ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ( $d = n\lambda$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ), dann trifft Berg auf Berg und Tal auf Tal, die resultierende Welle hat die doppelte Amplitude der Einzelwellen (Verstärkung).

Ist  $d$  ein halbzahliges Vielfaches der Wellenlänge ( $d = (n + \frac{1}{2})\lambda$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ), dann trifft Berg auf Tal und die resultierende Welle hat die Amplitude null (Auslöschung).

Wir betrachten jetzt zwei im Gleichtakt schwingende (gleichphasige) Sender  $S_1$  und  $S_2$  im Abstand  $d = S_1S_2$ , die Gerade  $g$  ist ein Lot auf  $S_1S_2$ . In die Richtung, die den Winkel  $\varphi$  mit  $g$  einschließt, haben die von  $S_1$  und  $S_2$  ausgehenden Wellen den Gangunterschied

$$\delta = d \sin \varphi$$

Zur maximalen Verstärkung der Welle kommt es, wenn  $\delta$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\lambda$  ist, also für alle Winkel  $\varphi_n$  mit

$$\sin \varphi_n = \frac{n\lambda}{d}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

(Verstärkung)

Zur totalen Auslöschung der Welle kommt es, wenn  $\delta$  ein halbzahliges Vielfaches von  $\lambda$  ist, also für alle Winkel  $\varphi_m$  mit

$$\sin \varphi_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

(Auslöschung)

Trifft Licht senkrecht auf einen Doppelspalt, dann wirken die Spaltöffnungen wie zwei gleichphasige Sender.

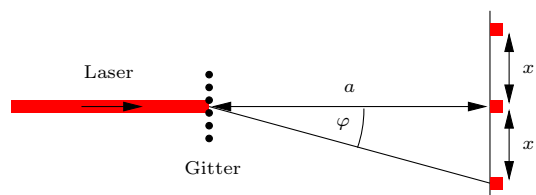
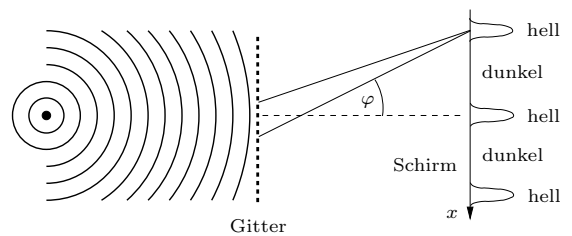
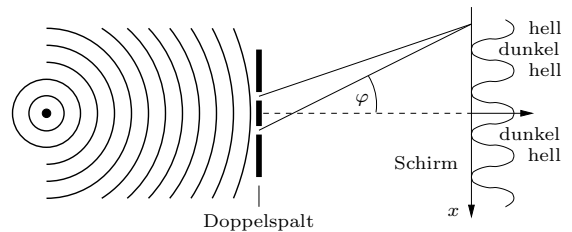
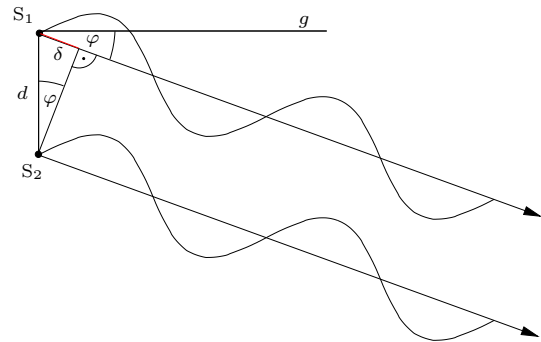
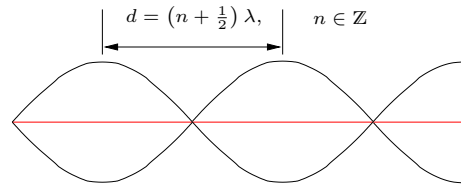
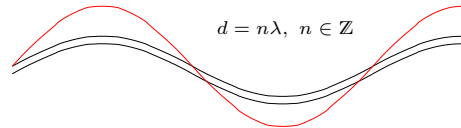
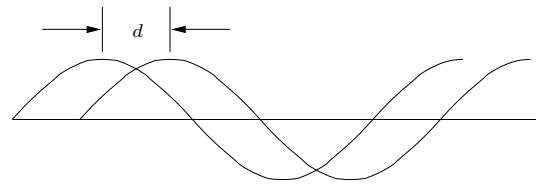
Mit einem *optischen Gitter* (viele Spalte in gleichem Abstand) anstatt eines Doppelspalts treten die Interferenzeffekte viel deutlicher hervor.

Beispiel: Ein Laserstrahl (enthält nur Licht einer Wellenlänge  $\lambda$ ) fällt auf ein Gitter mit dem Spaltabstand  $d = 5,00 \cdot 10^{-6}$  m. Auf einer Wand im Abstand  $a = 4,00$  m zum Gitter findet man das Maximum 1. Ordnung in der Entfernung  $x = 0,510$  m zum Maximum 0. Ordnung.

$$\tan \varphi_1 = \frac{x}{a} = 0,1275 \implies \varphi_1 = 7,27^\circ$$

$$n = 1 \implies \lambda = d \sin \varphi_1 = 632 \text{ nm}$$

**Beispiele**



# Relativistische Mechanik

## Definitionen und Regeln

### Das Brehmediagramm

Das Inertialsystem  $S'$  bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  relativ zum Inertialsystem  $S$ , zur Zeit null sind die Ursprünge  $O$  und  $O'$  am gleichen Ort. Ein Ereignis  $E$  hat in  $S$  die Koordinaten  $(x|t)$  und in  $S'$  die Koordinaten  $(x'|t')$  mit

$$x' = x - vt$$

(Galileitransformation, siehe S. 50). Man kann  $(x|t)$  und  $(x'|t')$  gleichzeitig in einem Zeit-Raum-Diagramm darstellen. Statt der Zeitachse wählt man eine  $ct$ -Achse ( $c$  ist die Lichtgeschwindigkeit), um auf allen Achsen die gleiche Einheit verwenden zu können. Nebenstehendes Diagramm repräsentiert die Galileitransformation, wenn

$$x' = x - (2c \sin \varphi) \cdot t = x - vt$$

d.h. wenn

$$\beta = \frac{v}{c} = 2 \sin \varphi$$

Die Weltlinie eines Lichtsignals, das sich in  $S$  mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  ausbreitet, ist im Brehmediagramm parallel zur Winkelhalbierenden zwischen  $x$ - und  $ct$ -Achse.

Die Weltlinie eines Lichtsignals, das sich in  $S'$  mit  $c$  ausbreitet, ist im Brehmediagramm parallel zur Winkelhalbierenden zwischen  $x$ - und  $ct'$ -Achse. Experimente zeigen, dass sich Licht in *jedem* Inertialsystem mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ausbreitet.

Widerspruch zur Galileitransformation!

Im Brehmediagramm müsste die Weltlinie eines Lichtsignals durch den Ursprung also gleichzeitig Winkelhalbierende zwischen der  $x$ - und der  $ct$ -Achse als auch zwischen der  $x$ - und der  $ct'$ -Achse sein. Das ist nur möglich, wenn zwei  $x$ -Achsen verwendet werden. Aus dem Einsteinschen Relativitätsprinzip („Die Gesetze der Physik haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form“) folgen die genauen Eigenschaften des Diagramms (siehe Relativitätsskript auf der Homepage des Werdenfels-Gymnasiums

<http://www.werdenfels-gymnasium.de/Leben/Faecher/Physik/Reindl/>)

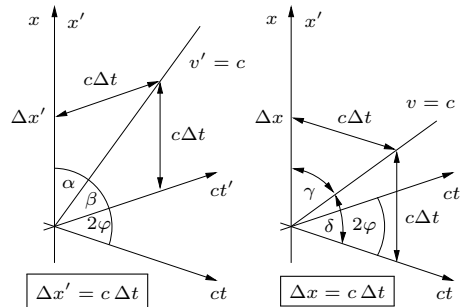
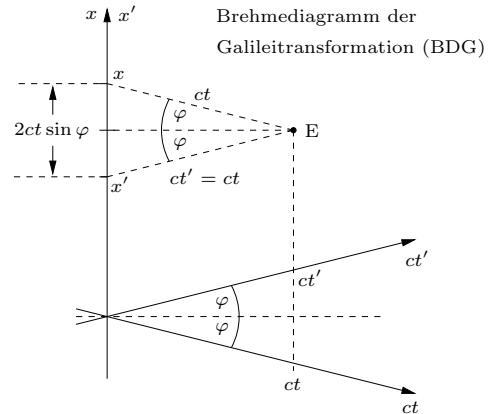
$x$ -Achse senkrecht auf der  $ct'$ -Achse

$x'$ -Achse senkrecht auf der  $ct$ -Achse

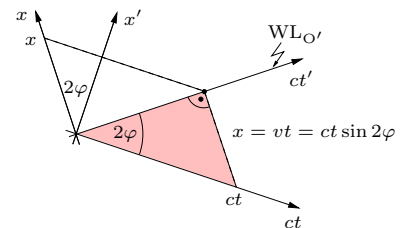
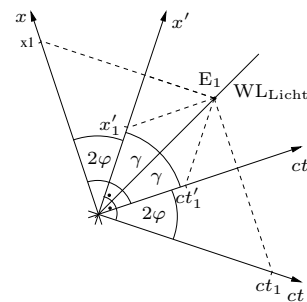
$$\beta = \frac{v}{c} = \sin 2\varphi$$

## Beispiele

Koordinatenfindung durch Projektion parallel zu den Achsen. Um zwei verschiedene  $x$ -Koordinaten eines Ereignisses darzustellen, braucht man also zwei Zeitachsen ( $ct$  und  $ct'$ ).



Das relativistische Brehmediagramm:



Die  $ct'$ -Achse ist Weltlinie des Ursprungs  $O'$  von  $S'$ . Zur Zeit  $t$  ist  $O'$  in  $S$  am Ort  $x = vt$ .



**Definitionen und Regeln**

**Die Lorentztransformation**

Nebenstehender Abbildung entnimmt man:

$$x = \overline{CF} + \overline{FE} = ct \sin 2\varphi + x' \cos 2\varphi$$

Mit

$$\sin 2\varphi = \beta = \frac{v}{c} \quad \text{und} \quad \cos 2\varphi = \sqrt{1 - \beta^2}$$

folgt

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1)$$

Aus

$$ct = \overline{UA} + \overline{AC} = ct' \cos 2\varphi + x \sin 2\varphi$$

folgt

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2)$$

(1) und (2) sind die berühmten Gleichungen der *Lorentztransformation*, die eine Verallgemeinerung der Galileitransformation darstellt.

Mit dem *Lorentzfaktor*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

stellt sich die Lorentztransformation übersichtlich dar:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{aligned}$$

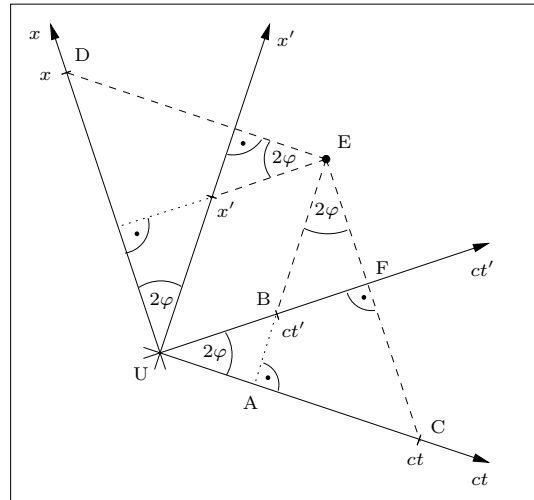
Entweder wie oben aus dem Diagramm ableiten oder einfach nach  $x$  und  $t$  auflösen und man erhält die Umkehrformeln:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ ct &= \gamma(ct' + \beta x') \end{aligned}$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt die Lorentztransformation auch für Koordinatendifferenzen  $\Delta x = x_2 - x_1$  und  $\Delta t = t_2 - t_1$ :

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) \\ c\Delta t' &= \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \end{aligned}$$

**Beispiele**



Beispiel:  $v = 0,6c$ ,  $x = 6 \text{ Ls}$ ,  $t = 5 \text{ s}$

Mit der Galileitransformation folgt

$$x' = x - vt = 6 \text{ Ls} - 3 \text{ Ls} = 3 \text{ Ls}, \quad t' = t = 5 \text{ s}$$

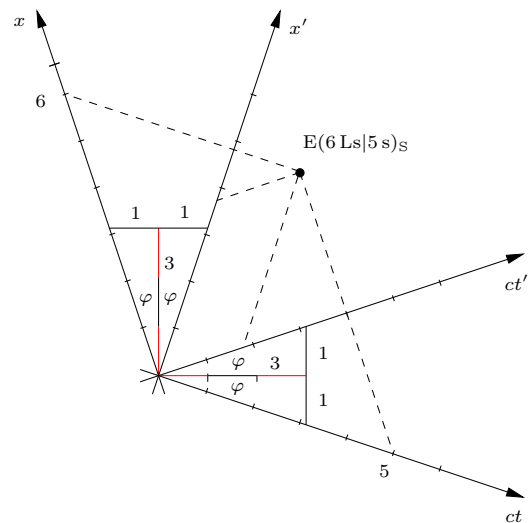
Mit  $\beta = \frac{v}{c} = 0,6$  folgt  $\gamma = \frac{1}{0,8} = 1,25$  und damit

$$x' = \gamma(x - vt) = 1,25 \cdot 3 \text{ Ls} = 3,75 \text{ Ls}$$

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left( t - \frac{v}{c^2}x \right) = \gamma \left( t - \beta \frac{x}{c} \right) = \\ &= 1,25 \cdot (5 \text{ s} - 0,6 \cdot 6 \text{ s}) = 1,75 \text{ s} \end{aligned}$$

Zum Zeichnen des Brehmediagramms berechnet man  $\tan \varphi$ :

$$\sin 2\varphi = 0,6 \quad \Rightarrow \quad \tan \varphi = \frac{1}{3}$$



**Definitionen und Regeln**

**Zeitdilatation**

Eine Uhr  $U'$  (ruhend in  $S'$ ) bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v$  an zwei in  $S$  ruhenden Uhren  $U_1$  und  $U_2$  vorbei. Nebenstehender Abbildung entnimmt man

$$c \cdot \Delta t' = c \cdot \Delta t \cdot \cos 2\varphi$$

Mit

$$\cos 2\varphi = \sqrt{1 - \beta^2}$$

folgt die Formel der *Zeitdilatation* (Zeitdehnung):

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

$\Delta t'$  nennt man auch die *Eigenzeit* der Uhr  $U'$ .

Zwei wichtige Näherungen:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \text{ für } |x| \ll 1$$

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \text{ für } |x| \ll 1$$

Für sehr kleine Geschwindigkeiten ( $v \ll c$ ) ist  $\beta \ll 1$  und es gilt

$$\sqrt{1 - \beta^2} \approx 1 - \frac{\beta^2}{2}$$

und

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx \frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{2}} \approx 1 + \frac{\beta^2}{2}$$

Für Geschwindigkeiten sehr nahe an der Lichtgeschwindigkeit gilt

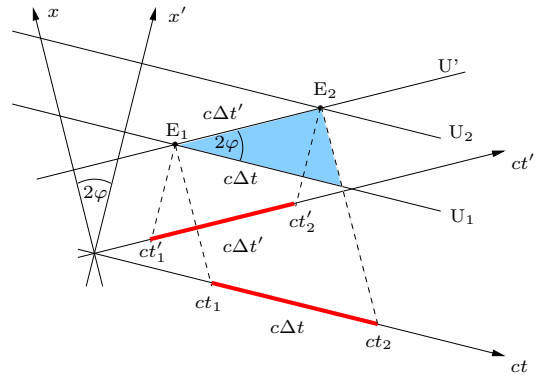
$$\beta = 1 - \alpha \text{ mit } \alpha \ll 1$$

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - (1 - \alpha)^2} = \sqrt{\alpha(2 - \alpha)}$$

Aus  $\alpha \ll 1$  folgt  $2 - \alpha \approx 2$  und damit

$$\sqrt{1 - \beta^2} \approx \sqrt{2\alpha}$$

**Beispiele**



Flug mit  $v = 0,99c$  zu einem 100 LJ entfernten Stern:

Zeit im System Erde :  $\Delta t = \frac{100c \text{ a}}{0,99c} = 101 \text{ a}$

Lorentzfaktor :  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,99^2}} = 7,09$

Zeit im Raumschiff :  $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = 14,2 \text{ a}$

Eine Stunde Autofahrt mit  $v = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ :

Zeit im System Erde :  $\Delta t = 3600 \text{ s}$

$$\beta = \frac{v}{c} = 1,00 \cdot 10^{-7}$$

Zeit Auto :  $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2}$

Die Autouhr geht um  $\delta t$  nach:

$$\begin{aligned} \delta t &= \Delta t - \Delta t' = \Delta t \left[ 1 - \sqrt{1 - \beta^2} \right] = \\ &\approx \Delta t \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\beta^2}{2} \right) \right] = \frac{\Delta t \beta^2}{2} = 1,8 \cdot 10^{-11} \text{ s} \end{aligned}$$

Ein Proton fliegt in der Eigenzeit  $\Delta t' = 1 \text{ h}$  von einer  $s = 100\,000 \text{ LJ}$  entfernten Supernova zur Erde. Die Geschwindigkeit des Protons ist sicher fast Lichtgeschwindigkeit, also  $v = (1 - \alpha)c$  mit  $\alpha \ll 1$  und  $\Delta t \approx \frac{s}{c} = 10^5 \text{ a} = 8,766 \cdot 10^8 \text{ h}$ . Aus

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} \approx \Delta t \sqrt{2\alpha}$$

folgt

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t'}{\Delta t} \right)^2 = 6,5 \cdot 10^{-19}$$

$$\beta = 1 - \alpha = 0,999\,999\,999\,999\,999\,999\,35$$

**Definitionen und Regeln**

**Geschwindigkeitsaddition**

Ein Körper K bewegt sich in S mit der Geschwindigkeit  $u$  und in  $S'$  mit der Geschwindigkeit  $u'$ , die Geschwindigkeit von  $S'$  relativ zu S ist  $v$ . Aus  $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  und  $u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$  folgt mit der Lorentztransformation für Koordinatendifferenzen

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\gamma (\Delta x' + v \Delta t')}{\gamma (\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x')} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x'}{\Delta t'}} = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Einsteinaddition:

$$v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

**Der Dopplereffekt**

Ein Sender S sendet im zeitlichen Abstand  $\Delta t_s$  (gemessen in seinem Ruhssystem) Lichtsignale zu einem Empfänger E, der sich mit der Geschwindigkeit  $v$  relativ zu S bewegt. Im Empfängersystem treffen die Lichtsignale im zeitlichen Abstand  $\Delta t_e$  bei E ein. Gleichung der Weltlinie von Signal ② in S:

$$\textcircled{2}: x = ct - c \cdot \Delta t_s$$

Die Gleichung des Empfängers lautet

$$E: x = vt$$

$E_2 = \textcircled{2}$  trifft  $E$ :

$$ct - c \cdot \Delta t_s = vt$$

oder nach Division durch  $c$

$$t - \Delta t_s = \beta t$$

Auflösen nach  $t$  ergibt die S-Koordinate von  $E_2$

$$t = t_{s2} = \frac{\Delta t_s}{1 - \beta}$$

Nebstehender Abb. entnimmt man für die E-Koordinate von  $E_2$

$$\begin{aligned} \Delta t_e = t_{e2} &= t_{s2} \cdot \cos 2\varphi = t_{s2} \sqrt{1 - \beta^2} = \\ &= \Delta t_s \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = \Delta t_s \cdot \sqrt{\frac{(1 - \beta)(1 + \beta)}{(1 - \beta)^2}} \end{aligned}$$

oder endgültig für den Fall, dass sich S und E voneinander entfernen:

$$\Delta t_e = \Delta t_s \cdot \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

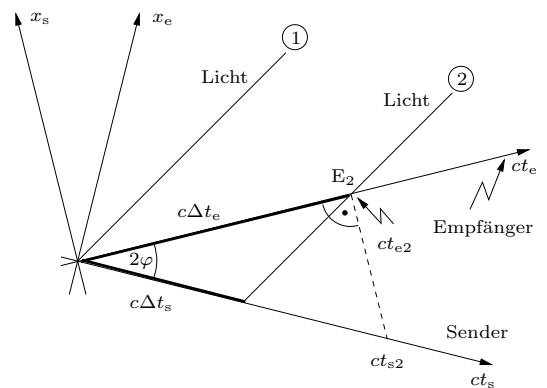
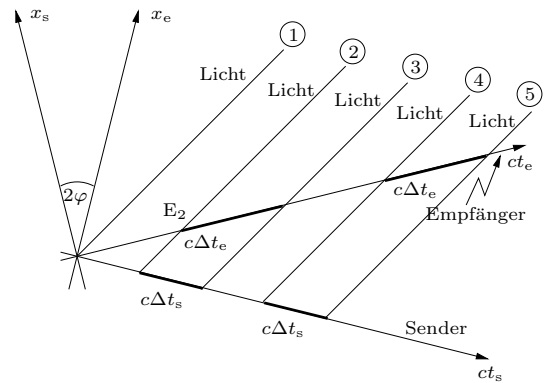
**Beispiele**

Beispiele:

$$v \oplus c = \frac{v + c}{1 + \frac{vc}{c^2}} = c$$

$$c \oplus c = \frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = c$$

$$0,8c \oplus 0,6c = \frac{1,4c}{1 + \frac{0,48c^2}{c^2}} = \frac{35}{37}c$$



Analog zeigt man für die Annäherung von Sender und Empfänger:

$$\Delta t_e = \Delta t_s \cdot \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

**Definitionen und Regeln**

Zusammenfassung (**Dopplerformel**):

$$\Delta t_e = \Delta t_s \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \text{ mit } \begin{cases} \beta > 0 & \text{(Entfernung)} \\ \beta < 0 & \text{(Annäherung)} \end{cases}$$

Für die Frequenzen und Wellenlängen einer elektromagnetischen Welle, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, folgt aus der Dopplerformel mit  $f = \frac{1}{\Delta t}$  und  $\lambda = \frac{c}{f}$ :

$$f_e = f_s \cdot \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

und

$$\lambda_e = \lambda_s \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = k \lambda_s$$

mit dem *Dopplerfaktor*

$$k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Entfernung:	$\implies f_e < f_s$ und $\lambda_e > \lambda_s$
	$\implies$ Rotverschiebung
Annäherung:	$\implies f_e > f_s$ und $\lambda_e < \lambda_s$
	$\implies$ Blauverschiebung

**Energie**

Ohne Herleitung, da mathematisch zu anspruchsvoll:

Die Gesamtenergie eines Körpers der Masse  $m$ , der sich mit der Geschwindigkeit  $v = \beta c$  bewegt, ist

$$W = \gamma mc^2$$

mit dem Lorentzfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Die Energie eines ruhenden Körpers, seine *Ruhenergie*, ist

$$W_0 = mc^2$$

Kinetische Energie:

$$W_{\text{kin}} = W - W_0 = mc^2(\gamma - 1)$$

Relativistische Formel für die Zentripetalkraft:

$$F_z = \frac{\gamma mv^2}{r}$$

**Beispiele**

Ohne die Dopplerformel wäre die moderne Astronomie nicht denkbar, da alle Geschwindigkeiten von entfernten Himmelskörpern mit dieser Methode gemessen werden. Sogar kleine Geschwindigkeitsschwankungen von Sternen können erfasst werden, was zur Entdeckung extrasolarer Planeten führte.

Beispiel: Die rote Linie des Wasserstoffs hat im Ruhesystem des Gases (im Vakuum) die Wellenlänge  $\lambda_s = 656,4696 \text{ nm}$ . Die gleiche Linie im Licht eines Sterns hat die Wellenlänge  $\lambda_e = 656,4762 \text{ nm}$ .

$$k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \frac{\lambda_e}{\lambda_s} = 1,000010$$

$$\beta = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} = 0,000010$$

Der Stern entfernt sich von der Erde mit

$$v = \beta c = 3,0 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Für  $|\beta| \ll 1$  folgt wegen  $\frac{1}{1-\beta} \approx 1 + \beta$

$$k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \approx \sqrt{(1+\beta)^2} = 1 + \beta$$

Ein Proton im LHC (Large Hadron Collider) hat die Energie

$$W = 10 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Die Ruhenergie des Protons ist

$$W_0 = m_p c^2 = 938 \text{ MeV} = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Der Lorentzfaktor des Protons ist

$$\gamma = \frac{W}{W_0} = 1,07 \cdot 10^4$$

Für die Geschwindigkeit  $v = \beta c$  des Protons folgt aus

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} = \\ &= 1 - 4,4 \cdot 10^{-9} = 0,999\,999\,9956 \end{aligned}$$