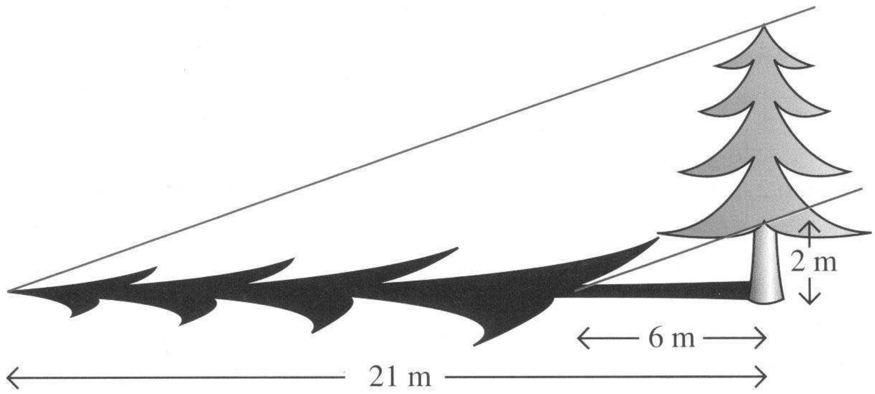
Symmetrie und Ähnlichkeit, Strahlensätze

1. **Ein Baum und sein Schatten**

   Greta Grübel hat an einem Baum und an seinem Schatten Längen gemessen.
   Wie kann Greta die Höhe des Baumes berechnen?
   Funktioniert die Methode auch, wenn der Baum an einem (geraden) Hang steht? Begründe!

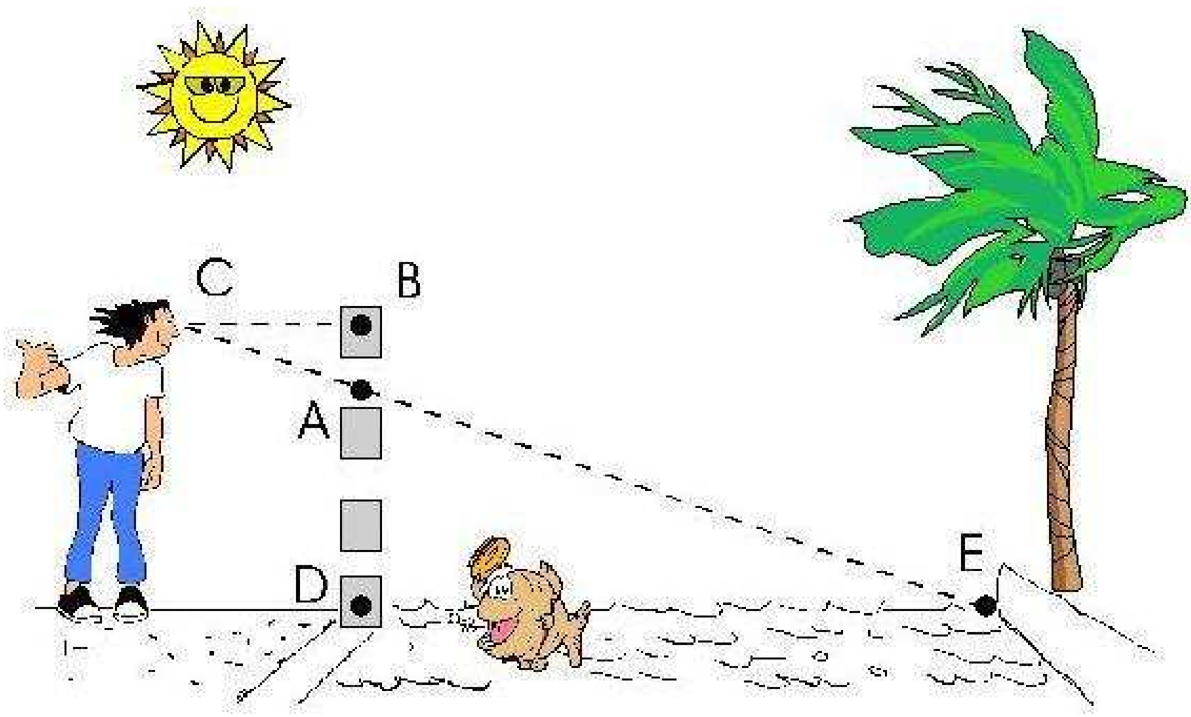
   

   Quelle: Abakus 9, S.99

Lösung: $\frac{h}{2} = \frac{21}{6}$
$h = 7\,\text{m}$

2. **Wie Leonardo da Vinci die Breite eines Flusses bestimmte**

   Der italienische Maler und Bildhauer Leonardo da Vinci ($1452 - 1519$) schlug vor, die Breite eines Flusses wie in der Abbildung dargestellt zu bestimmen.

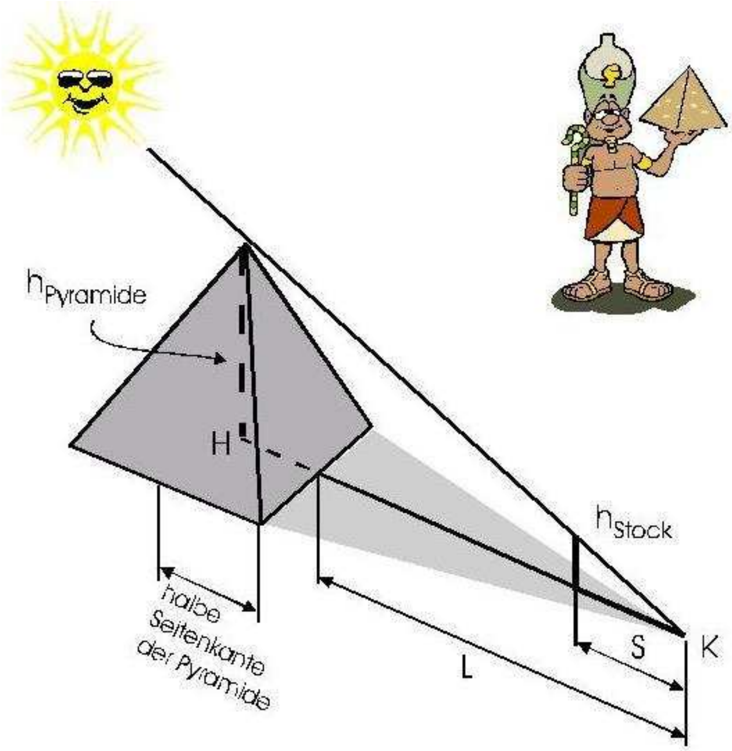


Quelle: Bigalke: Einführung in die Mathematik; Diesterweg

Lösung: Zahlenvorschlag: $|BC| = 1\,\mathrm{m}$; $|AB| = 20\,\mathrm{cm}$; $|AD| = 1{,}5\,\mathrm{m}$
$\frac{0{,}2}{1} = \frac{1{,}5}{x}$ wobei $x = 7{,}5$

3. **Wie Thales die Höhe von Pyramiden bestimmte**

   Thales von Milet (ca. 624 – 547 v. Chr.) war aristokratischer Herkunft und erwarb sich auf seinen Reisen nach Babylonien und Ägypten mathematische Kenntnisse und Methoden. Sein Interesse galt besonders geometrischen Problemen. So weiß man aus Berichten, dass er die Höhe ägyptischer Pyramiden durch einfache Messung bestimmen konnte. Er brauchte nur einen Stab und ein wenig Sonne, die es ja in Ägypten ziemlich reichlich gibt.
   Wie machte er das?



Quelle: Historische Verfahren - zeitgemäß aufbereitet; Aulis

Variationen:

(a) Zahlen statt Variablen angeben
(b) Schüler denken sich selbst Zahlen aus
(c) Beschriftung ganz weglassen
(d) Funktioniert die Methode zu jeder Tageszeit?
(e) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die Pyramide doppelt so hoch ist

Lösung: Thales hat gemessen, dass die Länge der Seitenkante der Pyramide $232,50\,\text{m}$ betrug.
Für $h_{Stock} = 1,20\,\text{m}$; $L = 175,30\,\text{m}$ und $S = 2,80\,\text{m}$ gilt:

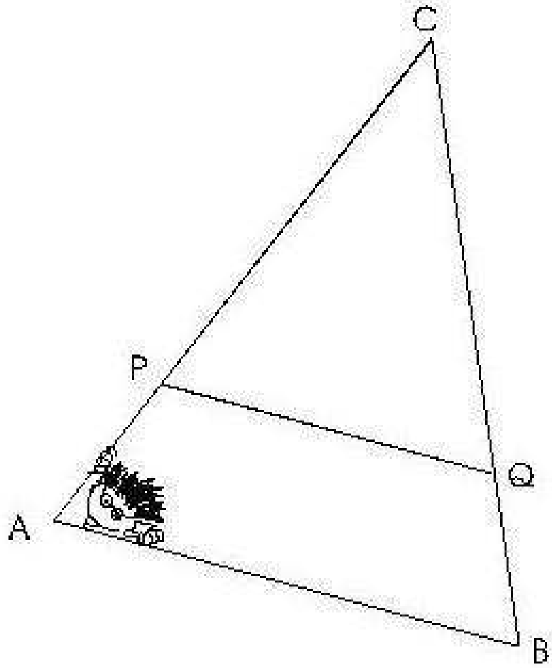
$\frac{h_{Pyramide}}{h_{Stock}} = \frac{L + halbe\,Seitenkante\,der\,Pyramide}{S}$

$\frac{h_{Pyramide}}{1{,}20m} = \frac{291{,}55\,\text{m}}{2{,}80\,\text{m}}$

$h_{Pyramide} = 124,95\,\text{m}$

4. **Gleichschenkliges Dreieck**

ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AB}$ als Basis. Die Strecke $\overline{PQ}$ ist parallel zur Basis.



(a) Halbiert $\overline{PQ}$ den Umfang, d.h. ist der Umfang des Dreiecks PQC halb so groß wie der des Dreiecks ABC?
(b) Halbiert $\overline{PQ}$ den Flächeninhalt des Dreiecks ABC?

Quelle: Eigenmann, Geometrische Denkaufgaben, Klett

Variationen:

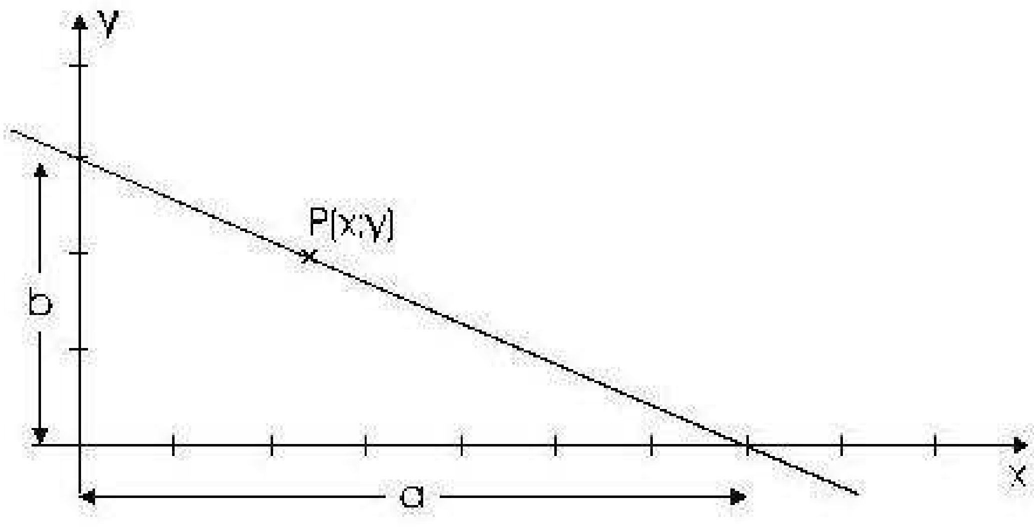
(a) Lage von PQ auf halber Höhe im Dreieck vorgeben
(b) Zahlenwerte vorgeben
(c) Wo muss PQ liegen, damit das Dreieck PQC halb so groß ist wie ABC ?

Lösung:

- Liegt $\overline{PQ}$ auf halber Höhe, dann wird der Umfang halbiert. Der Flächeninhalt wird nicht halbiert, sondern geviertelt.
- Zusatzfrage: Für die Höhe h' im Dreieck PQC gilt $h' = \frac{h}{\sqrt{2}}$, wobei h die Höhe im Dreieck ABC ist.

5. **Achsenabschnittsform der Geradengleichung**

Eine Gerade schneidet die x-Achse bei a und die y-Achse bei b.
Bestimme die Geradengleichung!



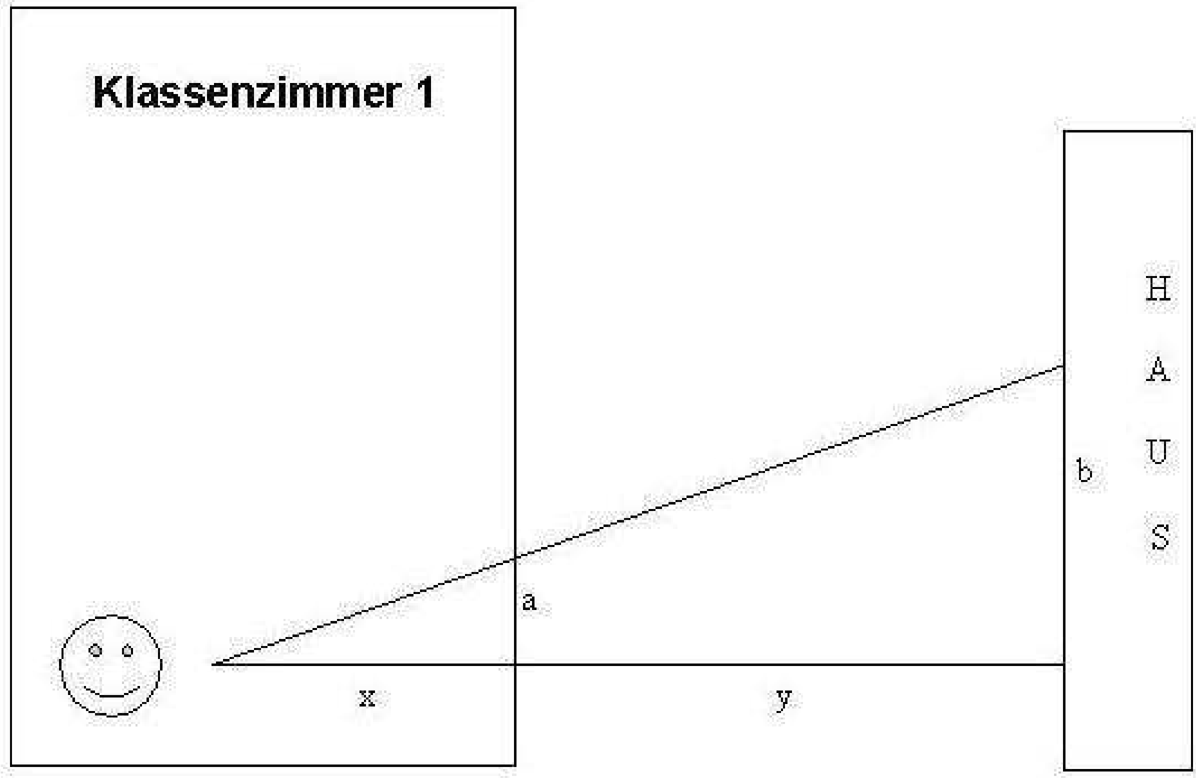
Variationen:

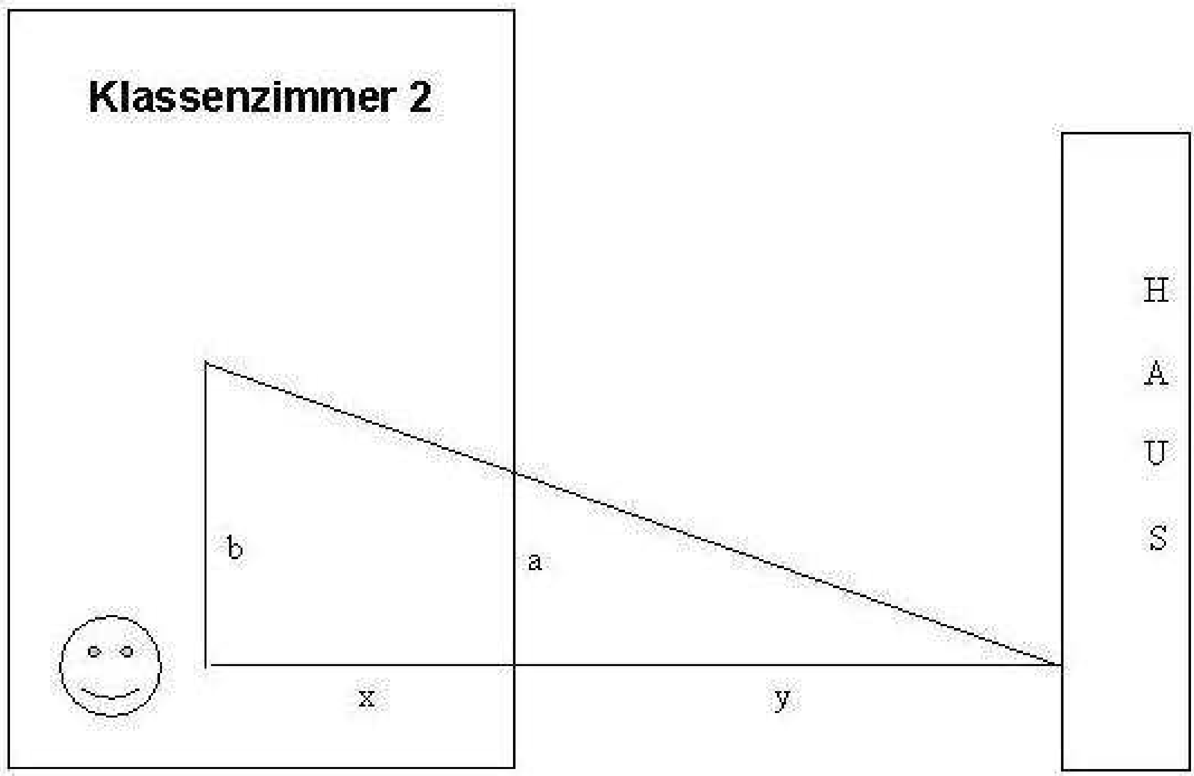
(a) Koordinaten von P als Linien einzeichnen
(b) P mit ganzzahligen Koordinaten vorgeben
(c) keinen Punkt vorgeben
(d) Zusatzfrage: Kann P auf der Geraden wandern?
(e) Geradengleichung auf verschiedene Arten bestimmen

Lösung: $\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a}$
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

6. **Messungen im Klassenzimmer**

Entwerft in eurer Gruppe einen Plan, um durch Messungen im Klassenraum den Abstand zum gegenüberliegenden Haus zu berechnen.
Maßband und Anpeilstäbe stehen euch zur Verfügung.



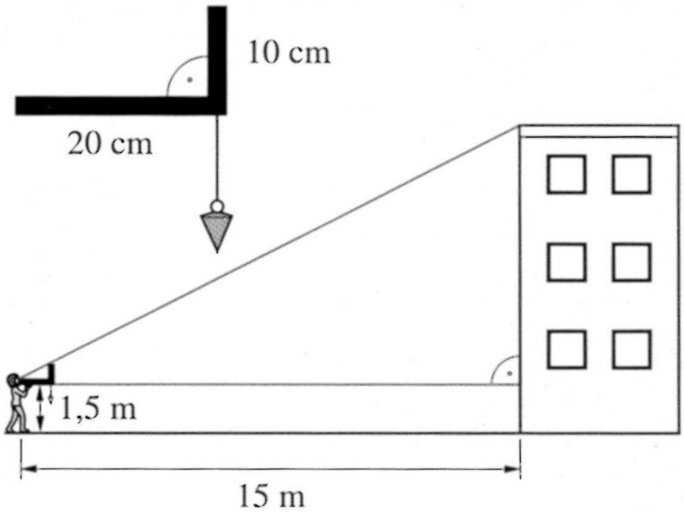


Anregung: Berechnungen können auch auf dem Schulhof durchgeführt werden.

Lösung: $\frac{x+y}{x} = \frac{b}{a}$

$\frac{x+y}{y} = \frac{b}{a}$

7. **Das Försterdreieck**



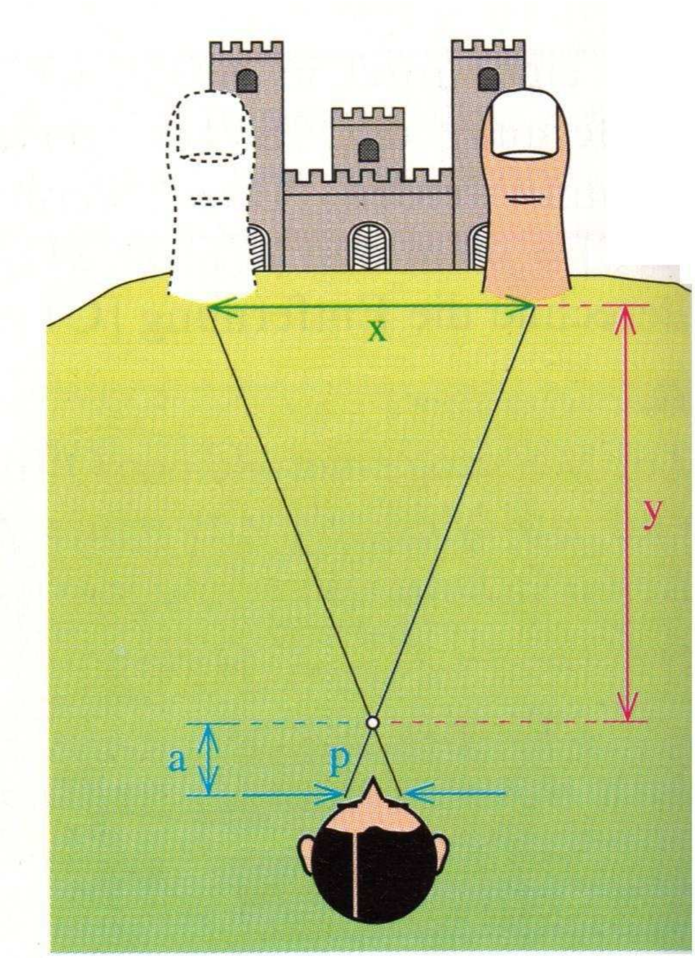
Martina findet in einem Bastelheft eine Anleitung zum Bau eines Peilgerätes, mit dem man Höhen messen kann. Die Anwendung des Peilgerätes wird dort durch die nebenstehende Zeichnung erklärt.
Martina erfährt von ihrem Vater, dass Förster mit einem ähnlichen Gerät die Höhe von Bäumen bestimmen. Ein solches „Försterdreieck“ ist ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck.

- Warum ist das Försterdreieck praktischer als das Peildreieck aus dem Bastelheft?
- Wie hoch ist ein 18 m entfernter Baum, den ein Förster aus 1,8 m Augenhöhe anpeilt?

Quelle: Mathematik 9, Cornelsen (1995)

Lösung:
- $\frac{1500}{20} = \frac{x}{10}$
- $\frac{1500}{20} = \frac{x}{20}$

8. **Der Daumensprung**



Strecke einen Arm aus und visiere den Daumen zunächst mit dem linken Auge, dann mit dem rechten Auge an.
Du bemerkst, dass der Daumen einen „Sprung" im Gelände macht. Diese Tatsache benutzt man, um Entfernungen in der Landschaft zu schätzen (Daumensprungmethode).
Wie ist es möglich, die Entfernung zu dem Schloss zu „schätzen"??

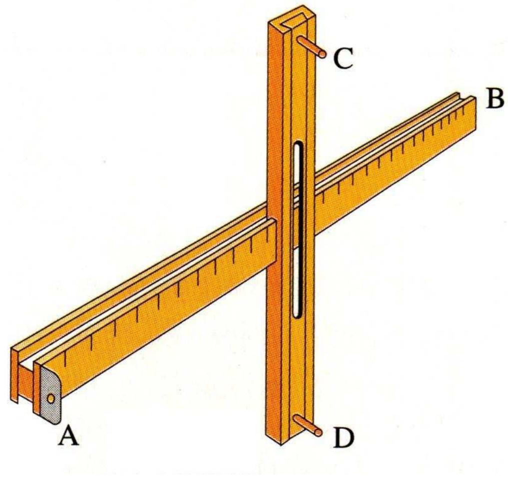
Quelle: Mathematik heute 9 (1996)

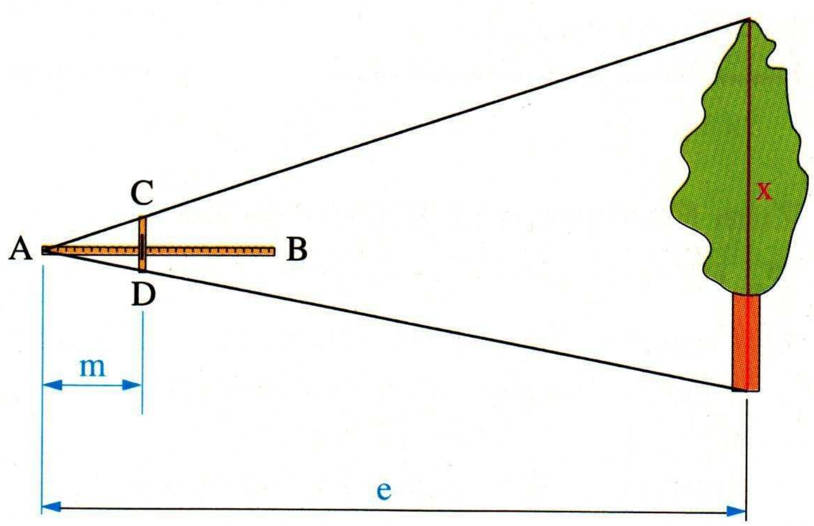
Lösung: $\frac{e}{l} = \frac{s}{a}$

9. **Der Jakobsstab**


AKG Berlin * AKG London * AKG Paris


ropicvs Capricorni



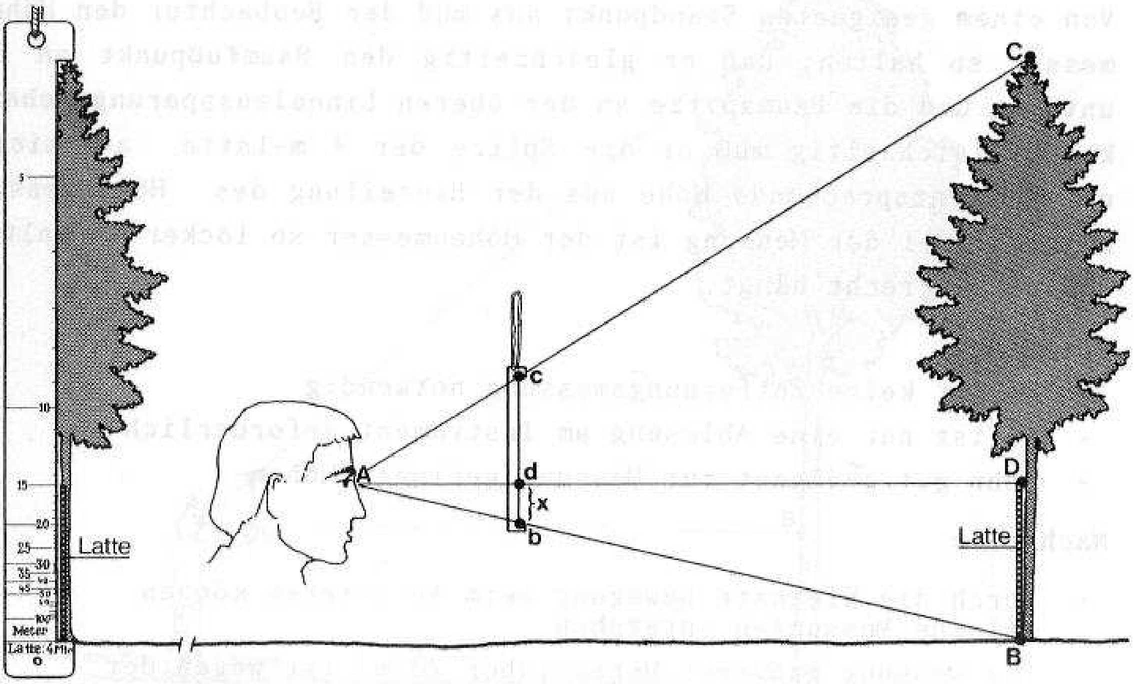


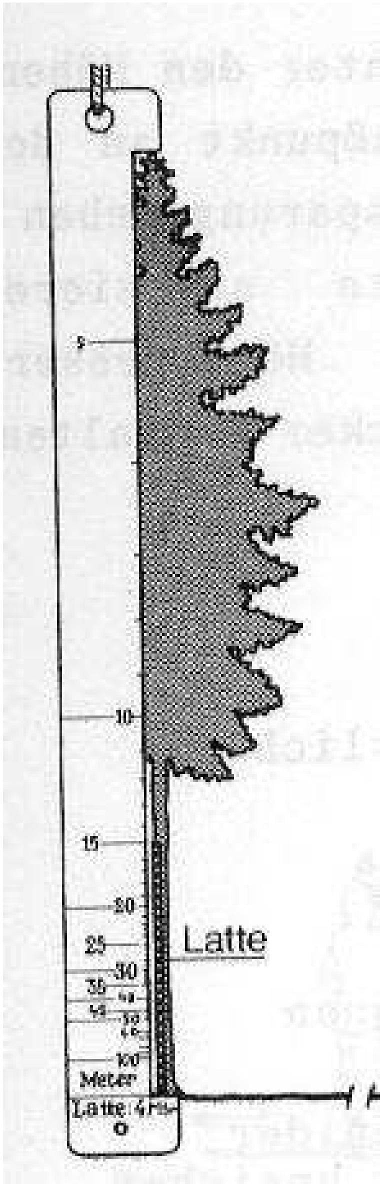
Die obigen Bilder zeigen in zeitgenössischen Darstellungen aus dem 16. Jahrhundert den Gebrauch des Jakobsstabs. Dieser ist ein kreuzförmiges Holz mit verschiebbarer Vertikalen. Beispielsweise wurde die Entfernung zwischen zwei Punkten (Stern und Mond) mit diesem Gerät angenähert ermittelt.
Wie kann dies geschehen? Welche Größen braucht man gegebenenfalls?

Quellen: Mathematik heute 9 (1996) Bigalke (1986), Diesterweg

Lösung: $\frac{x}{e} = \frac{|CD|}{m}$

10. **Der Baumhöhenmesser von Christen**


Latte
Meter
A
c
d
x
b
C
D
B
Latte

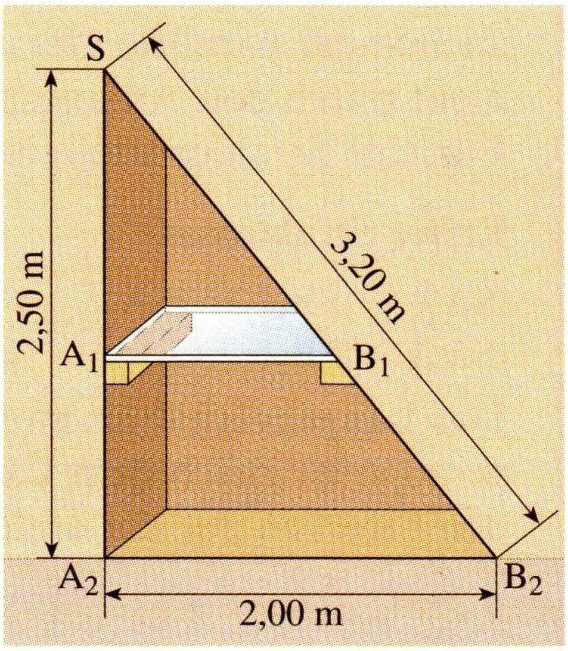


In einem Leitfaden für Förster wird der Höhenmesser von CHRISTEN beschrieben. Er besteht aus einem einfachen Metall-Lineal mit einer 30 cm (= $|bc|$) langen Aussparung. Von einem geeigneten Standpunkt aus muss der Beobachter den Höhenmesser so halten, dass er gleichzeitig den Baumfußpunkt an der unteren und die Baumspitze an der oberen Linealaussparung sehen kann. Gleichzeitig muss er die Spitze der 4 m-Latte anvisieren und die entsprechende Höhe aus der Einteilung des Höhenmessers ablesen. Bei der Messung ist der Höhenmesser so locker zu halten, dass er senkrecht hängt.
Als Vorteil wird gepriesen, dass keine Entfernungsmessung notwendig und nur eine Ablesung am Instrument erforderlich ist. (Als Nachteil gilt der Transport einer 4 m-Latte durch das Dickicht, wobei schon so manches Wildschwein aufgeschreckt worden sein soll!)
Überprüfe diese Behauptung und kläre das Messverfahren auf!

Lösung: $\frac{0{,}3}{h} = \frac{x}{4}$; $h = \frac{1{,}2}{x}$; $x = \frac{1{,}2}{h}$
Für verschiedene Baumhöhen lassen sich folgende x-Werte berechnen:

Höhe in m	4	5	6	8	10	12	15	20	30	35	40
X in cm	30	24	20	15	12	10	8	6	4	3,4	3

11. **Das Regal im Dachgiebel**



In der Nische einer Dachschräge soll in $1,00\,\mathrm{m}$ Höhe ein Boden aus Glas angebracht werden.

(a) An welcher Stelle des schrägen Brettes muss ein Träger für den Boden angebracht werden?

(b) Wie lang muss der Glasboden sein? Löse diese Aufgaben rechnerisch; begründe.

Quelle: Schroedel, Elemente 9

Lösung: (a) $\frac{1,5}{2,5} = \frac{x}{3,2}$, also $x = 1,92$

(b) $\frac{1,5}{2,5} = \frac{x}{2}$, also $x = 1,2$

12. **Flussbreiten bestimmen**

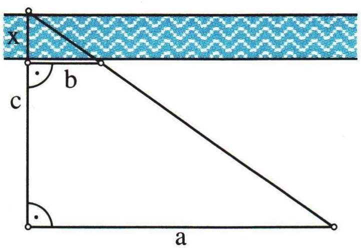


Fig. 1

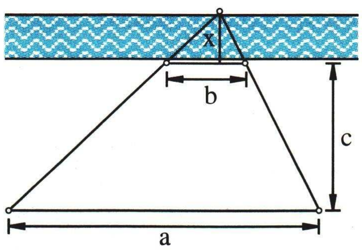


Fig. 2

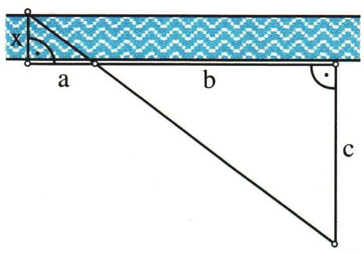


Fig. 3

Will man die Breite x eines Flusses von einer Uferseite aus bestimmen, so kann man vier Punkte wie in Fig. 1, Fig.2 oder Fig. 3 wählen. Aus den Abständen a, b und c lässt sich x berechnen. Bestimme jeweils x für

(a) Fig. 1 mit $a = 45\,\text{m},\ b = 18\,\text{m},\ c = 11\,\text{m}$

(b) Fig. 2 mit $a = 40\,\text{m},\ b = 33{,}5\,\text{m},\ c = 12\,\text{m}$

(c) Fig. 3 mit $a = 75\,\text{m},\ b = 50\,\text{m},\ c = 47\,\text{m}$

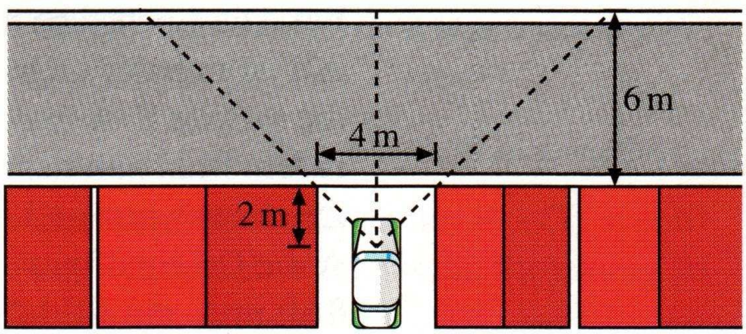
Quelle: Klett, Lambacher Schweizer 9

Lösung: (a) $\frac{x}{x+c} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{x}{x+11} = \frac{18}{45}$, also $x \approx 7{,}33\,\text{m}$

(b) $\frac{x}{x+c} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{x}{x+12} = \frac{33{,}5}{40}$, also $x \approx 61{,}85\,\text{m}$

(c) $\frac{x}{x+c} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{x}{47} = \frac{75}{50}$, also $x = 70{,}5\,\text{m}$

13. **Das Polizeiauto**



Ein Polizeiauto steht in einer Einfahrt.

(a) Wie viele Meter der gegenüberliegenden Straßenfront kann die Streife überblicken?

(b) Kann man mehr oder weniger sehen, wenn das Auto beim gleichen Abstand zur Straße weiter rechts in der Einfahrt steht?

Quelle: Klett, Lambacher Schweizer 9

Lösung: (a) $\frac{2}{2+6} = \frac{2}{\frac{x}{2}}$, also $x = 16\,\text{m}$ (wenn man nur das halbe Dreieck betrachtet)

(b) Man könnte zunächst annehmen, dass das Auto in der Mitte steht. $\frac{1}{1+6} = \frac{2}{\frac{x}{2}}$, also $x = 28\,\text{m}$

Ein weiterer Spezialfall wäre, das Auto steht ganz rechts: $\frac{1}{1+6} = \frac{4}{x}$, also wieder $x = 28\,\text{m}$

Pendelt der Betrachter auf einer Parallelen zur Straßenfront im Abstand von $1\,\text{m}$, so ändert sich die Strahlensatzfigur, das Ergebnis aber nicht.

14. **Geometrie aus Jules Vernes „Die geheimnisvolle Insel“**

Die Beobachtungsmomente der verflossenen Tage waren nunmehr durch die Berechnung der Plateauhöhe über dem Meeresspiegel zu vervollständigen…
Cyrus Smith hatte eine gerade, zwölf Fuß lange Stange mitgenommen, die er an seiner eigenen, ihm bekannten Körperlänge gemessen hatte. Harbert trug ein Lot oder Senkblei; es bestand aus einem einfachen Stein, der an eine geschmeidige Pflanzenfaser gebunden war. Etwa zwanzig Fuß vom Küstensaum und etwa fünfhundert Fuß von der senkrecht aufsteigenden Granitwand entfernt, grub Cyrus Smith die Stange zwei Fuß tief in den Sand und brachte sie durch sorgfältiges Absteifen mittels des Lotes in eine senkrechte Stellung zur Himmelsebene. Darauf ging er so weit zurück, bis er, im Sande liegend, die Spitze der Stange mit dem Grate der Granitwand zugleich sah. Diesen Punkt kennzeichnete er durch einen Pflock. „Du kennst doch die Grundlehren der Geometrie?“ fragte er Harbert.
„Einigermaßen, Herr Cyrus“, antwortete Harbert, der nie mehr sagte als er wusste. „Welche Eigenschaften ähnliche Dreiecke haben, weißt du doch noch?“ „O ja“, erwiderte Harbert, „die entsprechenden Seiten derselben sind einander proportional.“
„Richtig, mein Sohn“, sagte der Ingenieur. „Sieh, ich habe hier soeben zwei einander ähnliche rechtwinklige Dreiecke konstruiert, das erste, kleinere hat als Seiten oder Schenkel die senkrechte Stange, die Entfernung zwischen Pflock und Basis der Stange und als Hypotenuse meinen Gesichtswinkel; das zweite Dreieck hat als Seiten die senkrechte Wand, deren Höhe noch gemessen werden soll, die Entfernung zwischen Pflock und Basis der Wand und meinen Gesichtswinkel wieder als Hypotenuse, die als Verlängerung der des ersten Dreiecks zu betrachten ist.“ „Ach, Herr Cyrus, ich verstehe!„ rief Harbert. „Da die Entfernung zwischen Pflock und Stange der Entfernung zwischen Wandbasis und Pflock proportional ist, so ist auch die Höhe der Stange der Höhe dieser Wand proportional.„
„Sehr richtig, Harbert“, antwortete der Ingenieur, „und wenn wir die ersten beiden Entfernungen gemessen haben, so brauchen wir nur, da uns die Höhe der Stange bekannt ist, eine Verhältnisrechnung aufzustellen, um die Höhe der Felswand zu ermitteln. Wir sparen uns dadurch die Mühe, die Wand direkt zu messen.“
Die beiden Horizontalen wurden mit Hilfe der Stange ermittelt, deren Höhe über dem Sand genau zehn Fuß betrug.
Die erste Horizontale beziehungsweise die Entfernung zwischen dem Pflock und dem Standpunkt der Stange betrug fünfzehn Fuß, die Entfernung zwischen dem Pflock und der Mauerbasis nur fünfhundert Fuß. Als das Ergebnis der Messung festlag, kehrten Cyrus Smith und Harbert zu den Schloten zurück.
Dort suchte der Ingenieur einen flachen Stein hervor, den er auf einem seiner früheren Wege gefunden hatte, eine Art Schieferstein, auf den er mit einer scharfen Muschel leicht schreiben konnte, und er stellte folgende Proportion auf:
$15 : 500 = 10 : x$
$500 \cdot 100 = 15 \cdot x$
$5000 = 15 \cdot x$
$x = \frac{5000}{15}$
$x = 333,33$
Diese Berechnung ergab für die Granitwand eine Höhe von dreihundertdreiunddreißig Fuß ($1\,\mathrm{ft} = 12\,\mathrm{Zoll} = 0,3048\,\mathrm{m}$).

An der Stelle, von wo er die Stangenspitze sich mit dem Felsgrat decken sah, trieb er seinen Pflock in den Boden. Jetzt war die Messung einfach.

15. **Geometrie im Gelände**

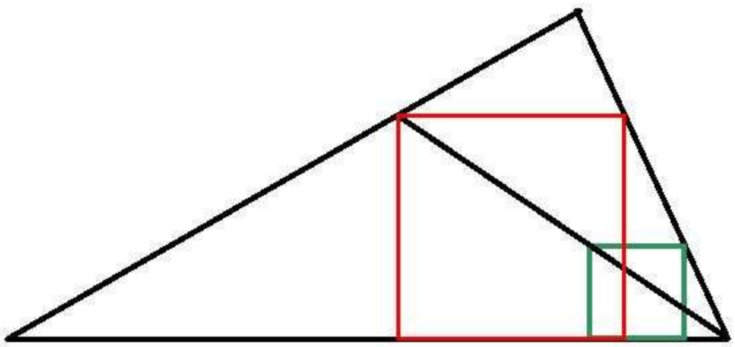
Kaum ein Themengebiet lädt so sehr zur praktischen Umsetzung ein, wie die Strahlensätze. Im Folgenden sollen die Vorteile aber auch die Risiken, die ein Verlassen des Klassenraums mit sich bringt, angesprochen werden.

16. **Die Werbetafel**

Mit großen Schritten geht die Fertigstellung des neuen Verwaltungsgebäudes der weltbekannten Schokoladenfirma „Ritter Sport“ voran. Es fehlt noch die gute alte quadratische Reklametafel an der Giebelfläche. Doch dieses Prunkstück aus alten Tagen ist viel zu klein für diese riesige Fläche. Welche Größe könnte eine neue quadratische Werbetafel maximal haben?
Die Giebelfläche kannst du im Verhältnis 1 : 250 leicht zeichnen: Sie sieht aus wie ein Dreieck mit den Seitenlängen $12\,\text{cm}, 10\,\text{cm}$ und $7,2\,\text{cm}$.

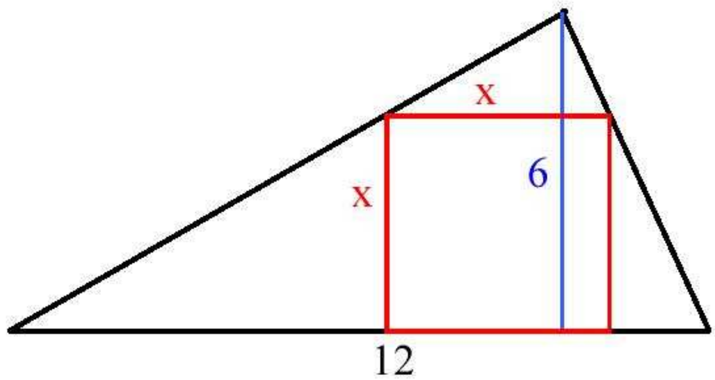
Quelle: Sinus-Modellversuchsband Rheinland-Pfalz

Lösung: (a) Zentrische Streckung anwenden
Das kleine Quadrat durch systematisches Probieren, so in das Dreieck legen, dass die Figur als Ergebnis einer zentrischen Streckung gedeutet werden kann. Das kleine Quadrat kann z. B. ausgeschnitten oder zeichnerisch verschoben werden.



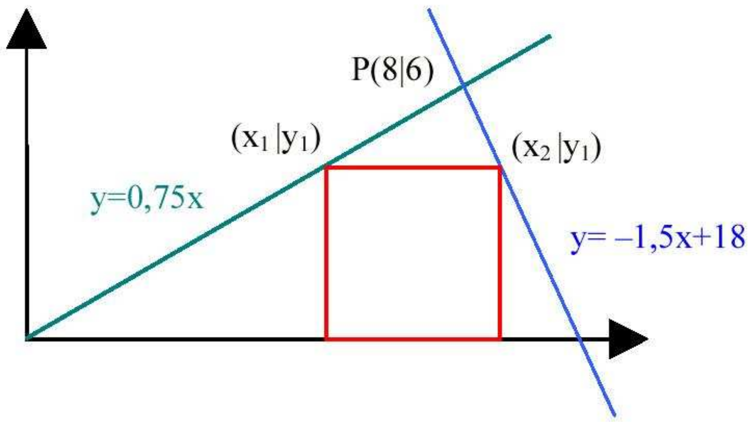
(b) Ähnlichkeitssätze anwenden
Einem kleinen Quadrat wird ein Dreieck umbeschrieben, dessen Seiten parallel zu den Seiten des großen gegebenen Dreiecks sind.

(c) Strahlensätze anwenden
Nach erfolgter konstruktiver Lösung (siehe (a) bzw. (b) Weg) oder an Hand einer möglichen Skizze lässt sich die Seitenlänge des Lösungsquadrats mit Hilfe der Strahlensätze berechnen.



(d) Systematisches Probieren
Mit einem geeigneten Computerprogramm das Dreieck auf den Bildschirm zeichnen und systematisch probieren, ein Quadrat einzubeschreiben

(e) Lineare Funktionen anwenden
Ein geeignetes Koordinatensystem auf das Dreieck legen und die Eckpunkte des gesuchten Quadrats rechnerisch bestimmen. Die Schülerinnen und Schüler können selbst erkennen, dass es sinnvoll ist, als Einheit auf den Achsen 1 cm zu wählen. Da die Seiten des Quadrats gleich lang sind, gilt: $y_1 = x_2 - x_1$.
Eingesetzt in die Geradengleichungen:
$x_2 - x_1 = 0,75x_1$
$x_2 - x_1 = -1,5x_1 + 18$



17. Mathe-Nachhilfe im Internet

Im Internet gibt es unter `http://www.zahlreich.de/` die Möglichkeit, Fragen zu Mathematikaufgaben zu veröffentlichen und sich von anderen helfen zu lassen. Hier ist eine Auswahl der Fragen, die Schüler dort gestellt haben.
Kannst du ihnen helfen?

(a) Wie ist der Rechenweg das Ergebnis dieser Aufgabe:
Indianer Häuptling „Galoppierende Schnecke“ kann bei ausgestrecktem Arm

(Armlänge 80 cm) mit seinem Daumen (Breite 3 cm) die 120 m lange Eisenbahnbrücke über den Rattlesnake River gerade verdecken. Wie weit ist er von der Brücke entfernt?
Gruß
E.

(b) Zeichne ein Dreieck ABC durch das eine Gerade läuft, die die Seite $|AC|$ im Punkt D und die Seite $|AB|$ im Punkt E schneidet (Leider kann ich die Schaufigur nicht mitschicken).
$|AD| = 4\,\text{cm}$; $|AC| = 6\,\text{cm}$; $|AB| = 7,5\,\text{cm}$; $|BC| = 3,6\,\text{cm}$; $|DE| = 2,4\,\text{cm}$
Frage: Ist $|BC|$ parallel zu $|DE|$?
cu Kolja.

(c) Frage:
Der Mond ist 382200 km von der Erde entfernt. Wenn man einen Bleistift von 7 mm Durchmesser in einer Entfernung von c.a.78 cm vor das Auge hält verdeckt dieser gerade den Mond. Welchen Durchmesser hat der Mond?
Danke, Anna!

(d) Hallo ihr alle!
Kann mir mal bitte jemand helfen? Ich brauche die Lösung aber heute noch!!
Viktor hält mit ausgestrecktem Arm (60 cm) ein Streichholz so in der Hand, dass es gerade einen Laternenmast (Höhe etwa 4 m) verdeckt. Wie viele Meter steht er vom Laternenmast entfernt?
Hoffentlich kann mir jemand helfen!!!!!!!!!

(e) Wer kann mir die Umkehrung der Strahlensätze erklären und wie man diese dann auf die Aufgaben anwendet?
Wie beweist man den 1. Strahlensatz?
Wir haben zwar was im Heft stehen aber ich versteh nicht wie ich das morgen in der Arbeit schreiben soll.
Zudem weiß ich nicht, wie man den 1. und 2. Strahlensatz auf Aufgaben. Theoretisch kann ich ihn aber nicht praktisch.
Wenn man a, b, a_1 gegeben hat, wie rechnet man das dann mit dem Strahlensatz.
Oder wenn c gesucht wird?
Das ist sicher gar nicht schwierig, aber ich raff das echt nicht.
Also helft mir bitte, wenn ihr wollt, das ich morgen nicht schon wieder eine 5 schreibe.
Bitte!!

(f) Hallo!
Ich brauche Informationen zu den Strahlensätzen → aber allgemeine!!! Geschichtlichen Hintergrund, wer hat sie „erfunden“? Soll ein Referat werden. Was das ist und wie das geht mit den SS weiß ich schon. Vielen DANK!
Martin

Lösung: (a) Galoppierende Schnecke: $\frac{12000}{3} = \frac{x}{80} \Rightarrow x = 320000\,\text{cm} = 3,2\,\text{km}$

(b) Dreieckskonstruktion: BC ist nicht unbedingt parallel zu DE. Das wäre die Umkehrung des 2. Strahlensatzes. Von Dreieck ADE sind 2 Seiten und der der kleineren

Seite gegenüberliegende Winkel bekannt. Wäre $|DE| \geq |BC|$, wäre die Konstruktion eindeutig.

(c) Monddurchmesser: $\frac{0{,}007}{0{,}78} = \frac{d}{382200000} \Rightarrow d = 3430000\,\mathrm{m} = 3430\,\mathrm{km}$

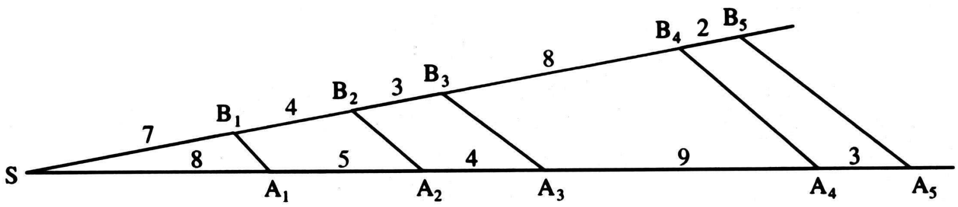
(d) Streichholz: $\frac{400}{4} = \frac{x}{60} \Rightarrow x = 6000\,\mathrm{cm} = 60\,\mathrm{m}$

18. **Anwendungen der Strahlensätze**

Quellen (bis Aufg. 35): Welt der Mathematik 9 (1990), Mathematik heute 9 (1996), Lambacher Schweizer 9 (1997), Schnittpunkt 9 (1995), MUED

Parallele Geraden

Welche Strecken in der Abbildung sind parallel zueinander?



Lösung: $B_2A_2 || B_4A_4$

19. **Kamera**

Eine Kleinbildkamera macht Negativbilder der Größe 24 mm × 36 mm.

(a) Geben die üblichen Vergrößerungsmaße das ganze Bild wieder? (7 cm×10 cm; 9 cm× 13 cm; 10 cm × 15 cm; 13 cm × 18 cm)

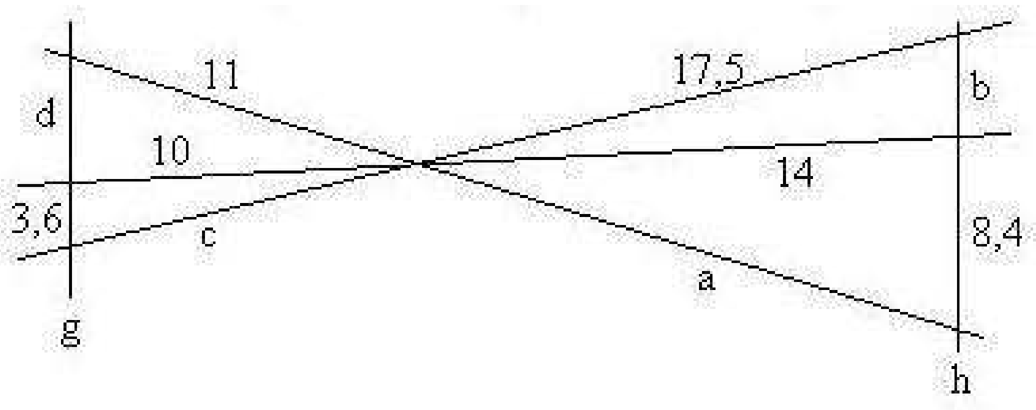
(b) Gib, falls möglich, den Vergrößerungsfaktor an.

Lösung: (a) gemeint: nur 10 × 15 tut's

(b) $2{,}4$

20. **Trockenübung**

Berechne a, b, c und d (Maße in cm). Die Geraden g und h sind parallel zueinander.



Lösung: $a = 15,4$; $b = 5,04$; $c = 12,5$; $d = 6$

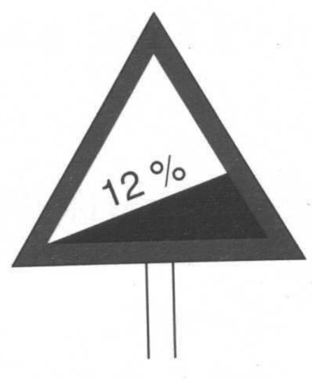
21. **Steigung und Gefälle**

Im Gebirge sieht man häufig Straßenschilder, die die Steigung bzw. das Gefälle einer Straße in Prozent angeben. 12% bedeutet z.B., dass die Straße auf 100 m horizontal gemessen um 12 m ansteigt.

(a) Welchen Höhenunterschied überwindet die Straße auf 2,3 km?

(b) Was bedeutet 100% Steigung?

(c) Was steht auf dem Schild, wenn eine Straße auf 3,8 km einen Höhenunterschied von 285 m überwindet.



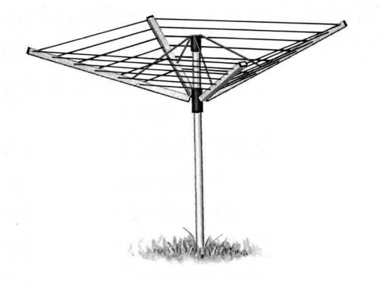
Lösung: $a = 276\,\mathrm{m}$; $c = 7,5\%$

22. **Wäschespinne**

Eine Wäschespinne hat sechs Leinen. Sie sind im Abstand von 12,5 cm gespannt. Die innerste Leine ist 30,5 cm vom Mittelpunkt entfernt und ist vier mal 40 cm lang.

(a) Wie lang ist die äußerste Leine?

(b) ie viel Meter Leine steht auf der Wäschespinne insgesamt zur Verfügung?



Lösung: ca. 1950 m

23. **Kopiergerät**

(a) Bei einem Fotokopiergerät wurden bei einer Kopie alle Seiten im Verhältnis 2 : 5 verkleinert. Auf wie viel Prozent hat sich die Fläche verkleinert?

(b) Bei einer anderen Fotokopie wurde die Fläche auf 225% vergrößert. Um wie viel Prozent wurden die Strecken vergrößert?

Lösung: (a) auf 16%

(b) um 50%

24. **Geometrische Figuren**

Welche der folgenden Figuren sind immer ähnlich zueinander?

(a) gleichseitige Dreiecke, spitzwinklige Dreiecke, kongruente Dreiecke, rechtwinklige Dreiecke, gleichschenklige Dreiecke.

(b) Kreise, Rechtecke, Quadrate, Drachen, Rauten.

Lösung: (a) gleichseitige und kongruente Dreiecke

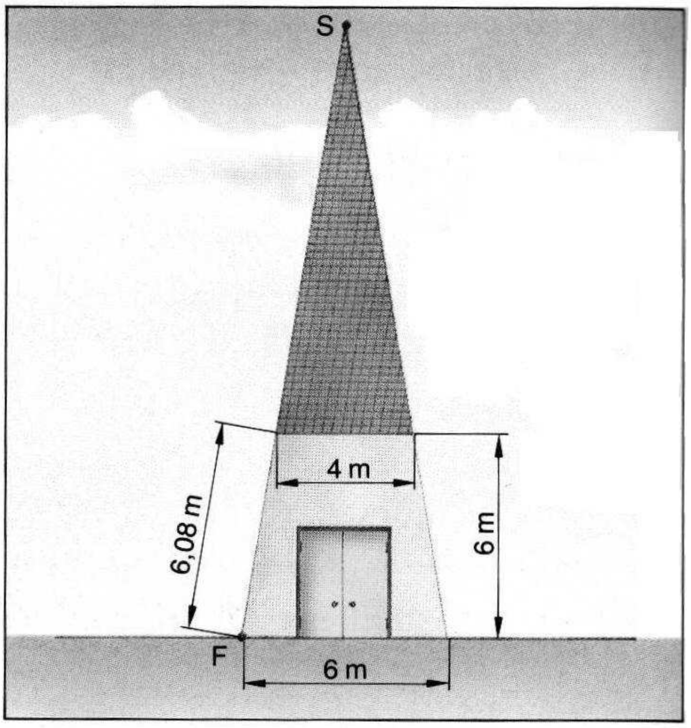
(b) Kreise und Quadrate

25. **Kirchturm**

Ein Kirchturm wird wie in der Zeichnung dargestellt vermessen.

(a) Wie hoch ist der Turm?

(b) Wie lang ist eine Kante?



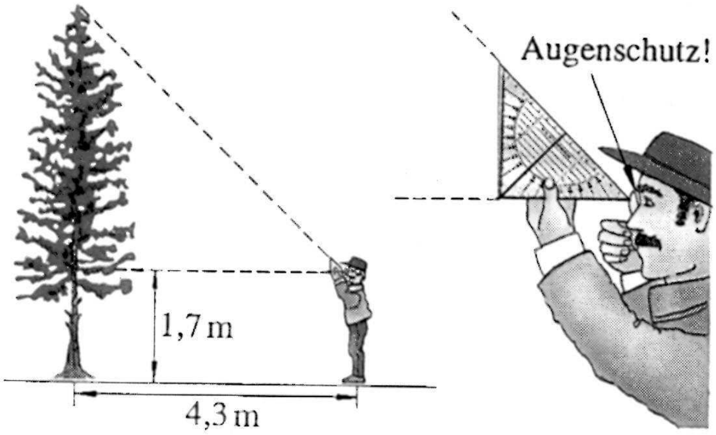
Lösung: (a) 18 m
(b) 20,4 m

26. **Försterdreieck**

    Ein Försterdreieck ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck. Du willst die Höhe eines Turmes mit Hilfe eines Försterdreiecks bestimmen. Beschreibe dein Vorgehen.
    Begründe, warum diese Methode funktioniert.
    Benutze in deiner Erklärung den Begriff „ähnlich“.

27. **Höhenmessung**

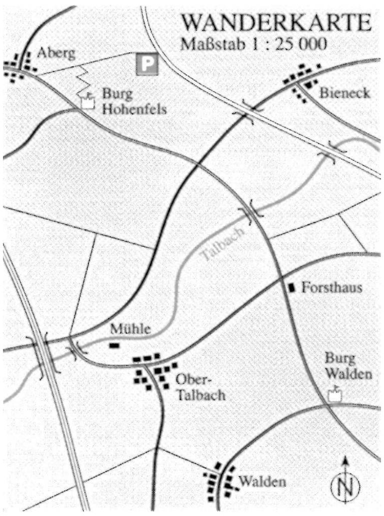
    Wie hoch ist der Baum?
    Wie hoch ist dein Schulgebäude?



Lösung: 6 m

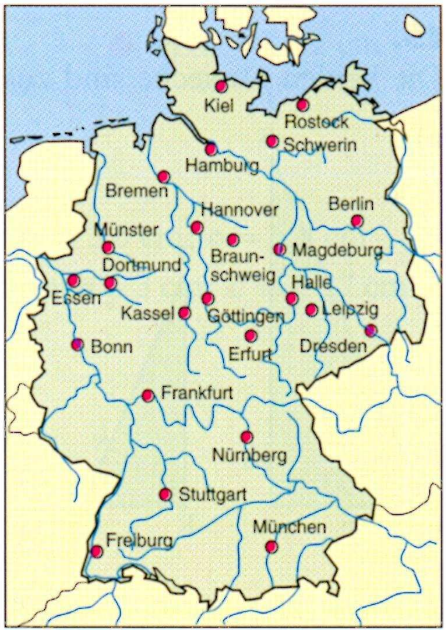
28. **Entfernungen**

Der Maßstab bei einer Zeichnung oder Landkarte zeigt das Verhältnis der Länge einer Strecke in der Zeichnung zu der Länge in der Wirklichkeit an.
Auf der neben stehenden Landkarte sind zwei interessante Ausflugsziele 43 mm voneinander entfernt.



29. **Luftlinie**

Gib die Luftlinienentfernungen von 4 Orten deiner Wahl an. Die Karte ist im Maßstab 1 : 15000000 abgebildet.



30. **Pyramiden**

Im alten Ägypten wurden die Höhen von Pyramiden nach der „Schattenmethode“ mit Hilfe eines Stabes bestimmt.

(a) Fertige eine geeignete Skizze der Schattenmethode an und erläutere, wie man den Stab halten muss.

(b) Berechne die Pyramidenhöhe für die Cheopspyramide.

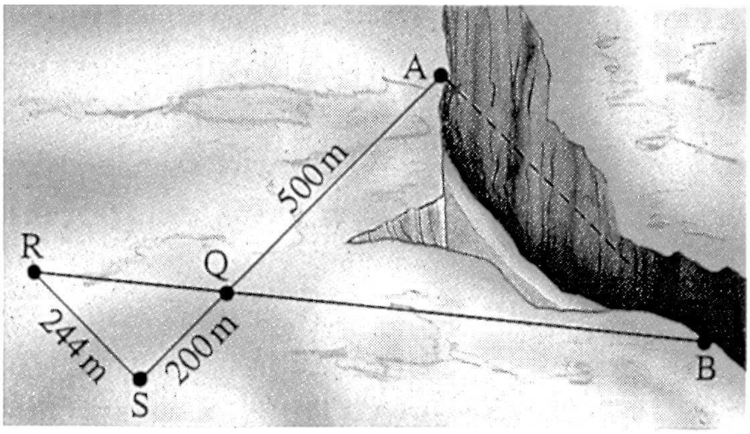
Länge des Schattens der Pyramide (am Boden gemessen; inklusive der halben Pyramidenbreite):	240 m
Höhe des Stabes:	3 m
Länge des Schattens des Stabes (am Boden gemessen):	5 m

Lösung: (a)

(b) 144 m

31. **Unwegsames Gelände**

Zwei Punkte A und B liegen am Rand einer Schlucht in ebenem Gelände. Ihr Abstand soll mit Hilfe der Punkte Q, R und S bestimmt werden. Sie sind so gewählt, dass RS zu AB parallel ist.
Berechne aus den Angaben den Abstand $|AB|$.



Lösung: 610 m

32. **Kunstwerk auf Sockel**

Eine Person (Augenhöhe $1,70\,\mathrm{m}$) steht in einer Entfernung von $10,0\,\mathrm{m}$ vor einer Skulptur, welche auf einem Sockel steht. Um die Höhe der Skulptur zu bestimmen, dreht sich die Person auf der Stelle mit dem Rücken zur Skulptur und hält sich einen 25 cm hohen, ebenen Spiegel vertikal so vor das Gesicht, dass sie darin die Skulptur gerade formatfüllend (ohne den Sockel!) sieht. Der Spiegel muss sich dabei genau 50 cm vor dem Gesicht befinden.

(a) Erstelle zunächst eine (nicht maßstabsgetreue) Überlegungsskizze! Beachte dabei, dass das Spiegelbild eines Gegenstandes in derselben Entfernung hinter dem Spiegel zu sein scheint, in welcher sich der Gegenstand vor dem Spiegel befindet.

(b) Berechne die Höhe der Skulptur!

(c) Berechne die Höhe des Sockels, wenn sich die Spiegelunterkante genau $1,67\,\mathrm{m}$ über dem Boden befindet!

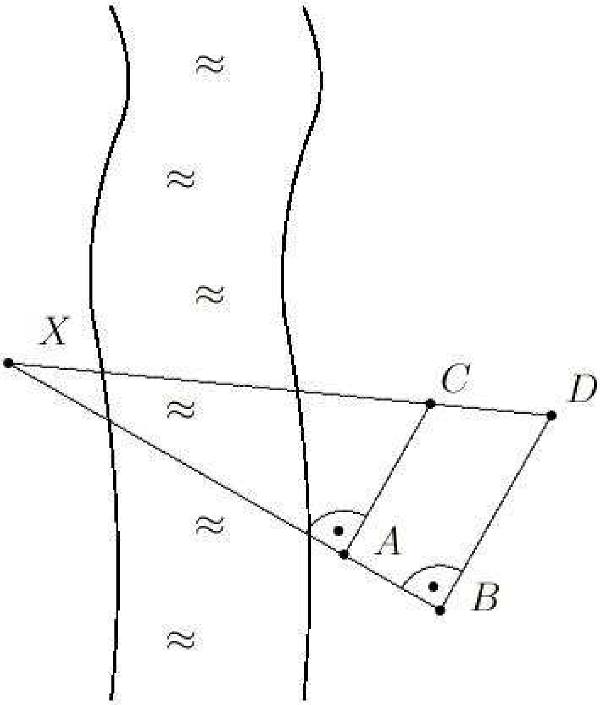
Lösung: (a)
(b) $5,5\,\mathrm{m}$
(c) $1,04\,\mathrm{m}$

33. **Messgenauigkeit**

Um die Entfernung eines unzugänglichen Punktes X zu bestimmen kann man folgendermaßen vorgehen:
Man legt zwei Punkte A und B fest, die mit X auf einer Geraden liegen („fluchten„).
Mit einfachen optischen Geräten werden Lotgeraden zu AB festgelegt und auf diesen zwei Punkte C und D, die wieder in einer Flucht mit X stehen.

(a) Berechne aus $AC = 60\,\mathrm{m}$, $BD = 67\,\mathrm{m}$ und $AB = 35\,\mathrm{m}$ den Abstand XA.

(b) Wie groß ist der prozentuale Fehler des Ergebnisses, wenn AC um 1% zu groß gemessen wurde?



Lösung: (a) 300 m
(b) Fehler = $26,4$ m, also 10%

34. **Mond und Sonne**

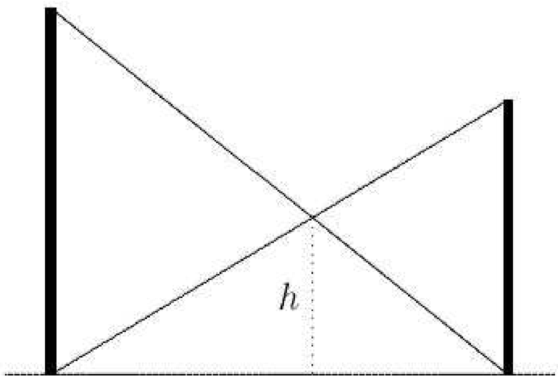
(a) Eine Kreisscheibe mit 8 cm Durchmesser bedeckt genau den Vollmond, wenn sie 8 m 84 cm 7 mm vom Auge entfernt ist. Zur gleichen Zeit wird die Entfernung Erde-Mond mit einem Radarstrahl zu 384400 km bestimmt. Berechne den Durchmesser des Mondes!

(b) Bei einer totalen Sonnenfinsternis bedeckt der Mond genau die Sonne, die zu dieser Zeit 149600000 km von der Erde entfernt ist. Welchen Durchmesser hat die Sonne, wenn die Entfernung Erde-Mond zum Zeitpunkt der Sonnenfinsternis 373600 km beträgt?

Lösung: (a) 3476 km
(b) 1392000 km

35. **Regal**

Die Seitenteile eines Regals sind $1,80\,\mathrm{m}$ bzw. $1,50\,\mathrm{m}$ lang. Zur Stabilisierung des Regals sollen zwei Diagonalstreben festgeschraubt werden.
In welcher Höhe h treffen sich die beiden Streben?
Was wäre, wenn das Regal breiter wäre?



Lösung: $h \approx 82\,\mathrm{cm}$. Unabhängig von Regalbreite!

36. **DIN-Formate**

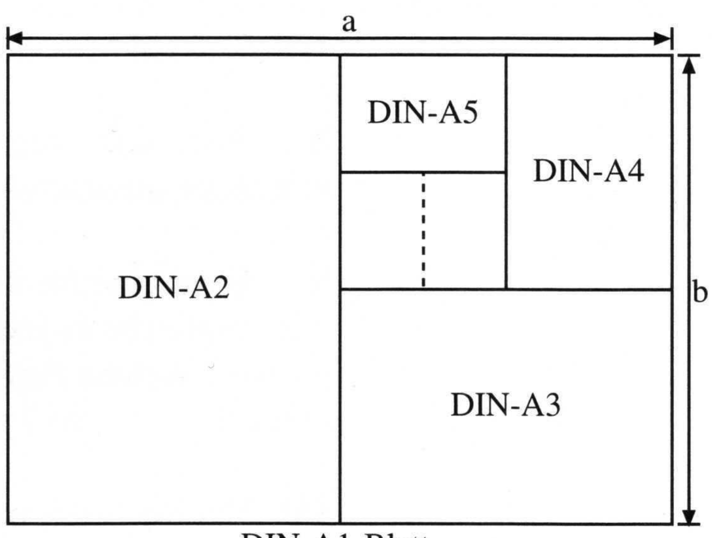
Für DIN-A Formate gelten folgende Bedingungen:

(a) Die Rechtecke sind einander ähnlich

(b) Durch Halbieren der längeren Seite erhält man das nächstkleinere DIN-A Format, z.B. aus DIN A4 entsteht DIN A5

(c) Ein Rechteck des Formats DIN A0 ist $1m^2$ groß

Was kannst du über die einzelnen Seitenlängen aussagen?

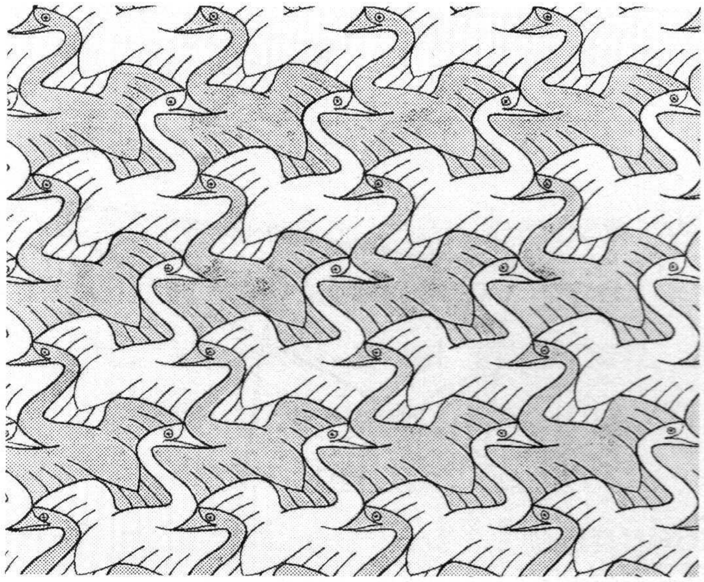


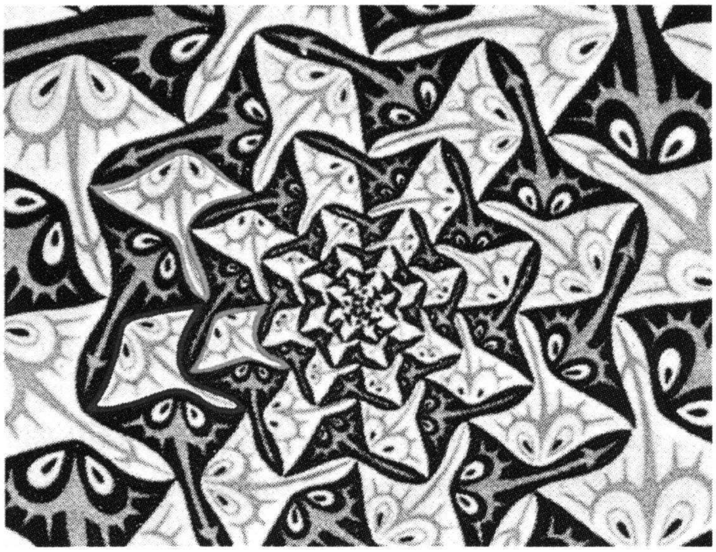
DIN-A1-Blatt

Quellen: Elemente 9 (1995), Lambacher Schweizer 9 (1997)

37. **Escherbilder**

Finde möglichst viele Gemeinsamkeiten und Unterschiede der folgenden Abbildungen

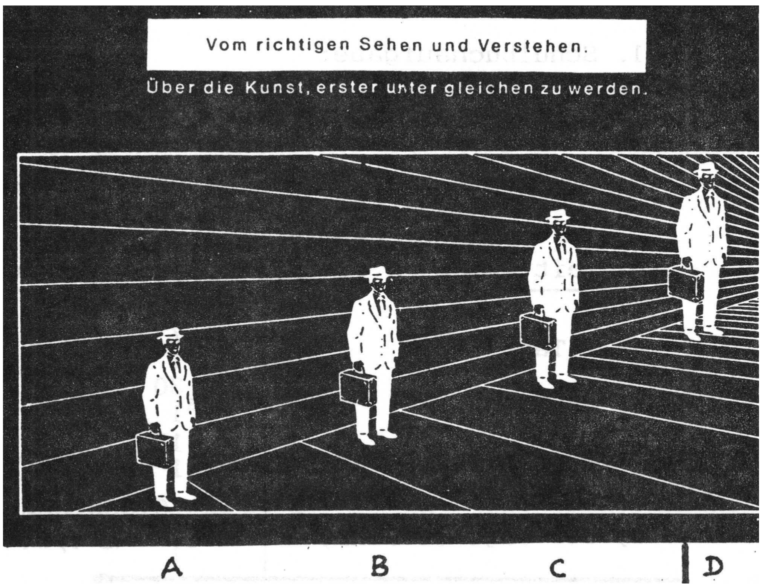


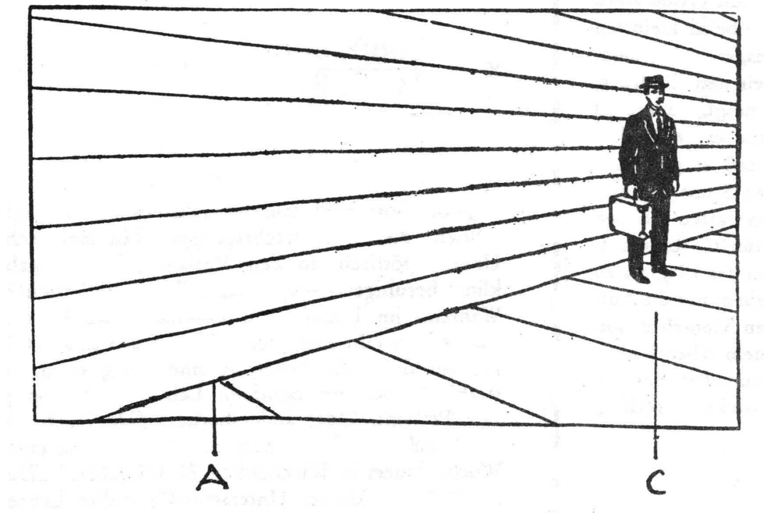


Lösung: Abb. 1: Kongruenz
Abb. 2: Kein mathematischer Begriff
Abb. 3: Ähnlichkeit (wird leider nicht ganz deutlich, da einige Rochen im Original farblich hervorgehoben)

38. **Optische Täuschung**

Wie müsste Herr A gezeichnet werden, damit er genau so groß aussieht wie Herr C?





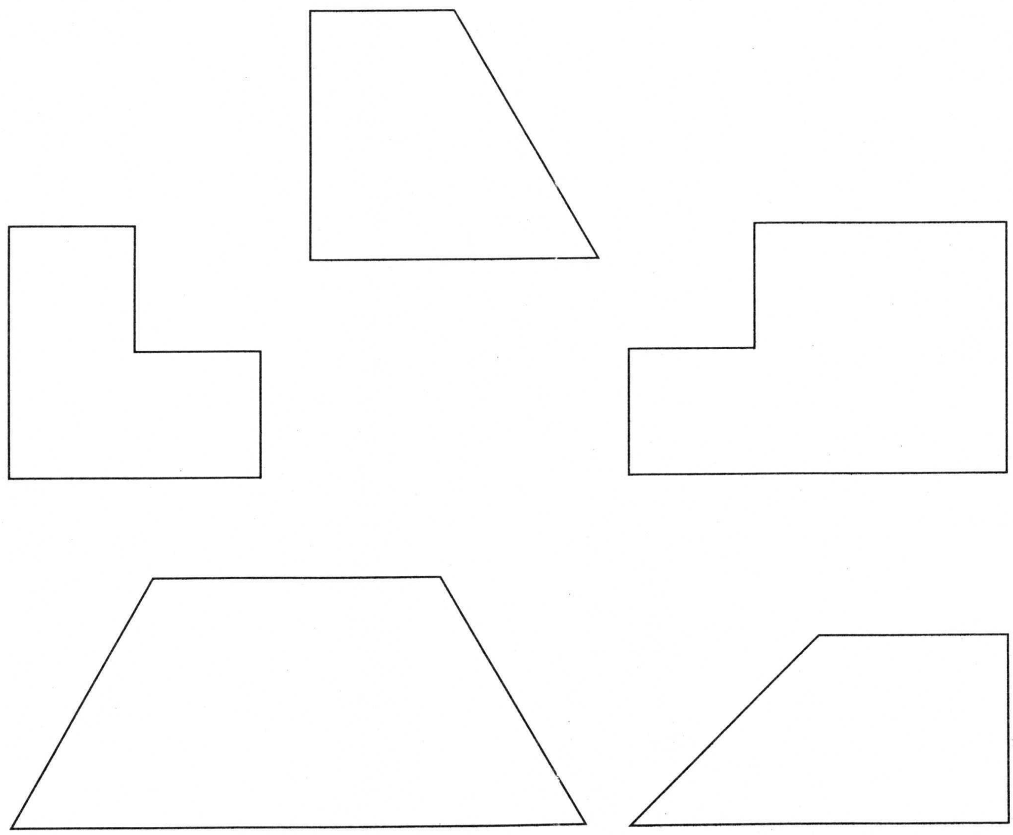
39. **Ähnlichkeitspuzzle**

KOPIERVORLAGE

Unten sind fünf verschiedene ebene Figuren abgebildet. Sie sind die Ausgangsfiguren für fünf kleine geometrische Puzzles.

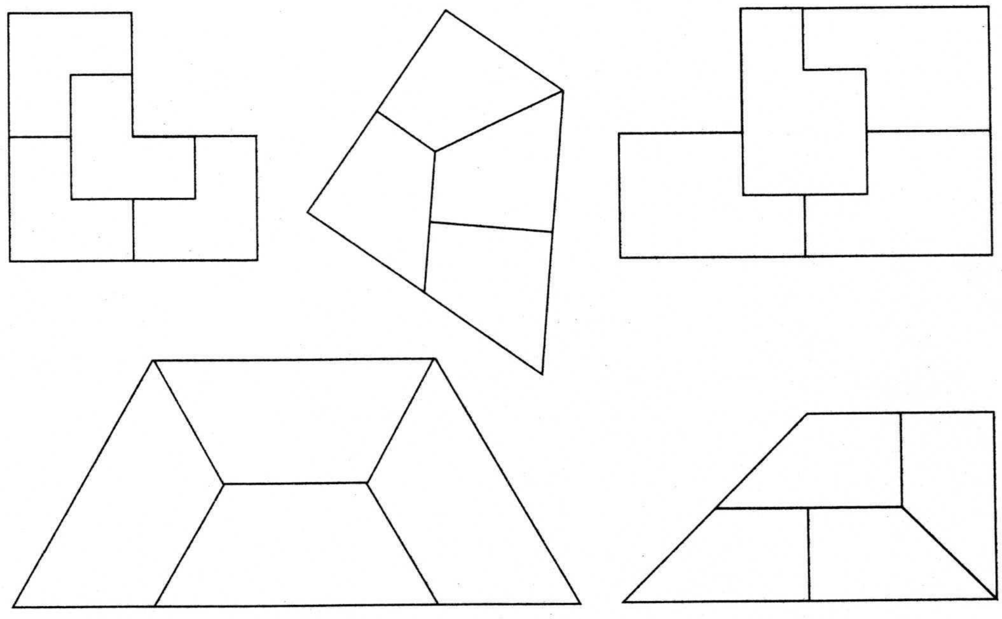
- ▶ *Fertige von jeder Figur vier Exemplare an (Vorlage auf Karton oder Papier legen, dann die Eckpunkte der Figuren mit dem Zirkel durchstechen, die Punkte entsprechend verbinden und die Figur ausschneiden).*
- ▶ *Setze diese vier (zueinander kongruenten) Einzelteile nun zu einer (größeren) Figur zusammen, die zu der Teilfigur ähnlich ist!*

Das Legemuster für die fünf verschiedenen Puzzles ist natürlich immer ein anderes.

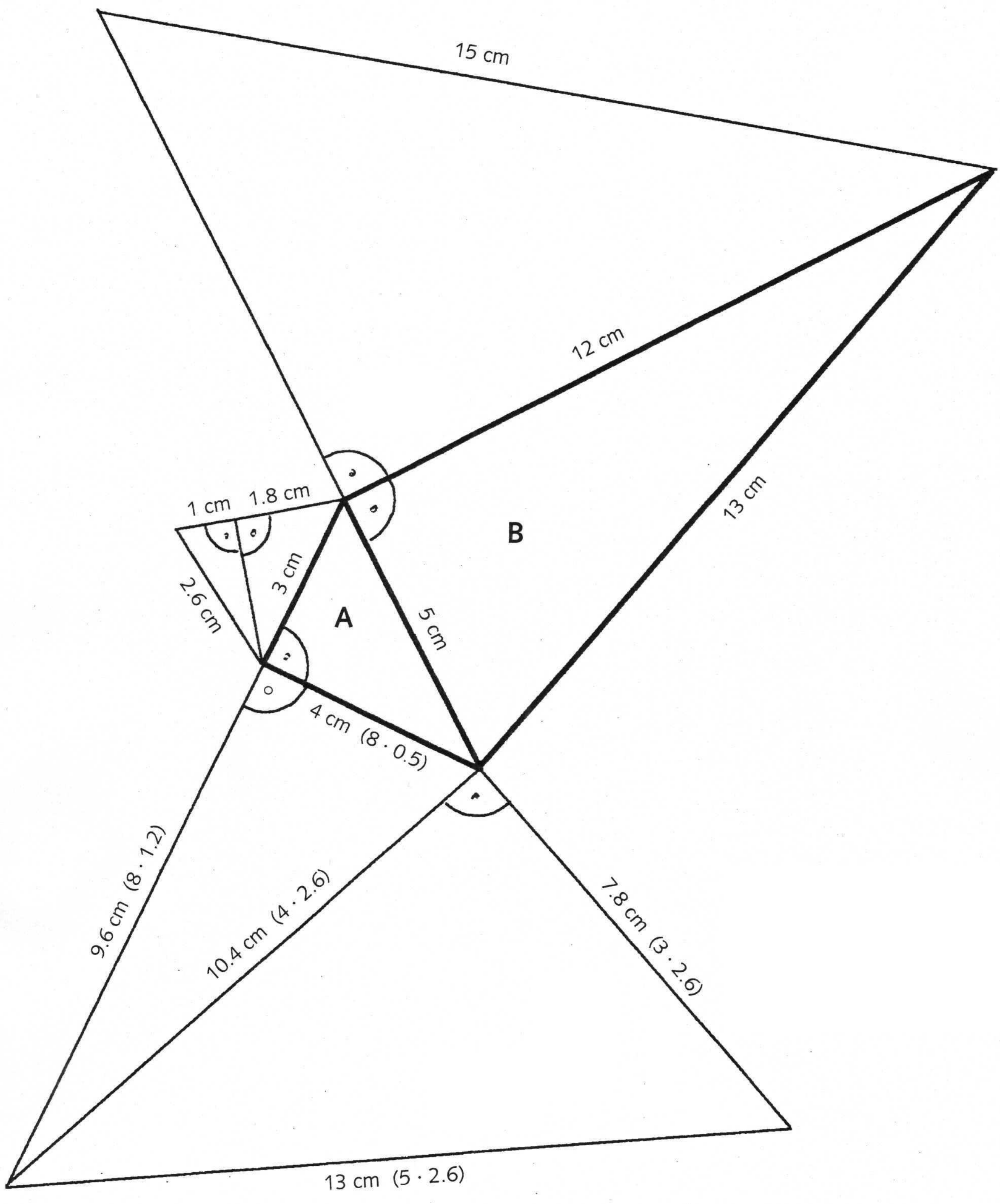


Quelle: Armbrust, A. in: mathematik lehren (1998)

Lösung:



40. **Pythagoreische Grüße**



Quelle: Wälti, B.: Mathespiele für die Sek.I. Verlag an der Ruhr, S. 63f.

Spielregeln:

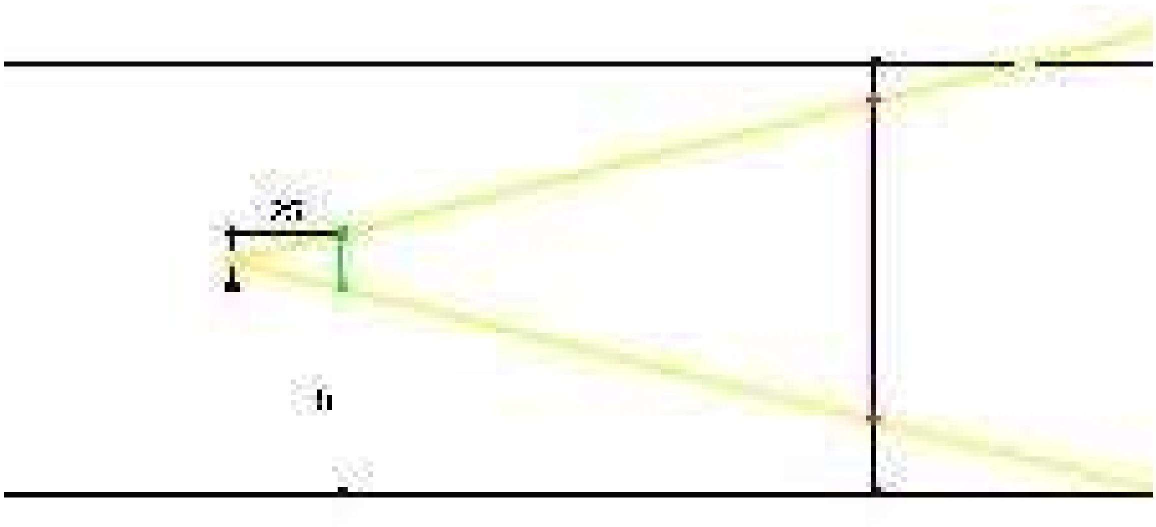
Die Spieler zeichnen als Ausgangsfigur gemeinsam zwei (rechtwinklige) Dreiecke A und B, die eine Seite gemeinsam haben (vgl. Abb.). Spieler 1 beginnt, indem er eine der 4 vorhandenen freien Dreieckseiten wählt und darüber ein zu A oder B ähnliches Dreieck errichtet. Bedingung ist, dass das neue Dreieck vollständig auf das Blatt passt (mm-Genauigkeit) und dass keine Seite kleiner als 1 cm ist. Dann kommt Spieler 2 an die Reihe. Wer das letzte Dreieck zeichnen kann, gewinnt.

41. **Diashow**

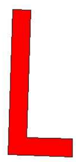
Für den Urlausbsdiaabend soll ein 5cm hohes Dia auf eine 2m hohe Leinwand vergrößert werden, die von der Decke herunter hängt. Das Zimmer ist ca. 2,4m hoch und das Dia wird in einem Abstand von 25cm von der Projektorlampe in den Apparat gesteckt. Wo muss der Projektor stehen, damit das Dia unverzerrt auf die Leinwand projiziert werden kann?

Die Schüler erhalten keine Skizze. Sie sollen aus dem Text ein mathematisches Modell entwickeln, das den oben beschriebenen Sachverhalt möglichst gut wiedergibt. Erst damit lässt sich die Aufgabe bewältigen.

Als Hilfe kann die unten abgebildete Skizze in beweglicher Form mit einem Beamer projiziert werden.



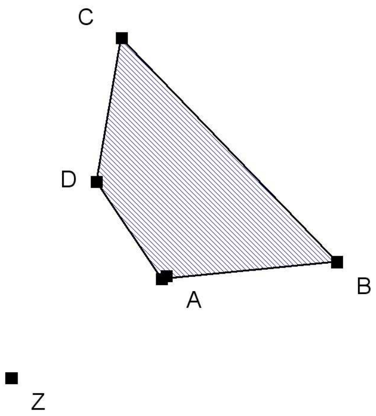
42. Vergrößern



Vergrößere den vorgegebenen Buchstaben mit dem Faktor 2,5.

Lösung: Zentrische Streckung.

43. Stretching



a) Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks ABCD, indem du erforderlichen Längen misst.

b) Bilde das Viereck ABCD durch zentrische Streckung mit k = 1,5 ab. Bestimme jeweils den Flächeninhalt von Original und Bild.

Lösung: