# Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen

## 1. Parabeln kommen vor

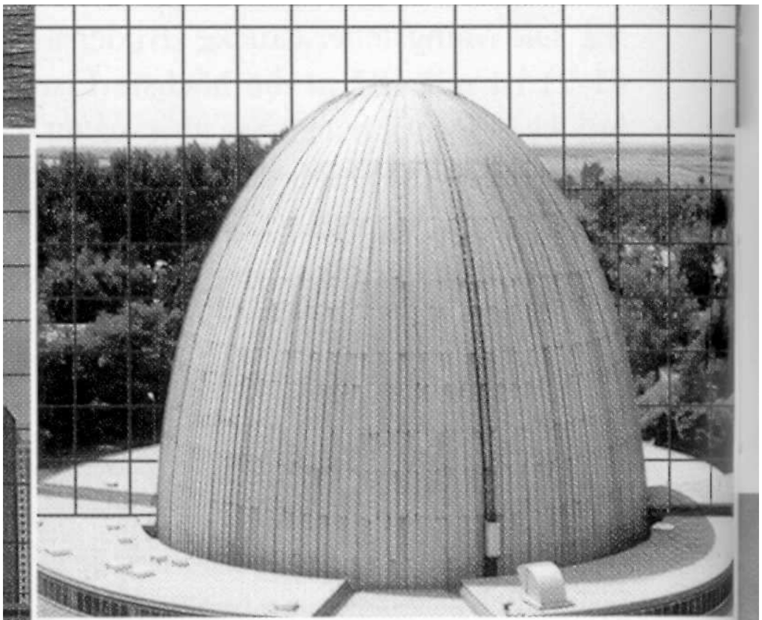
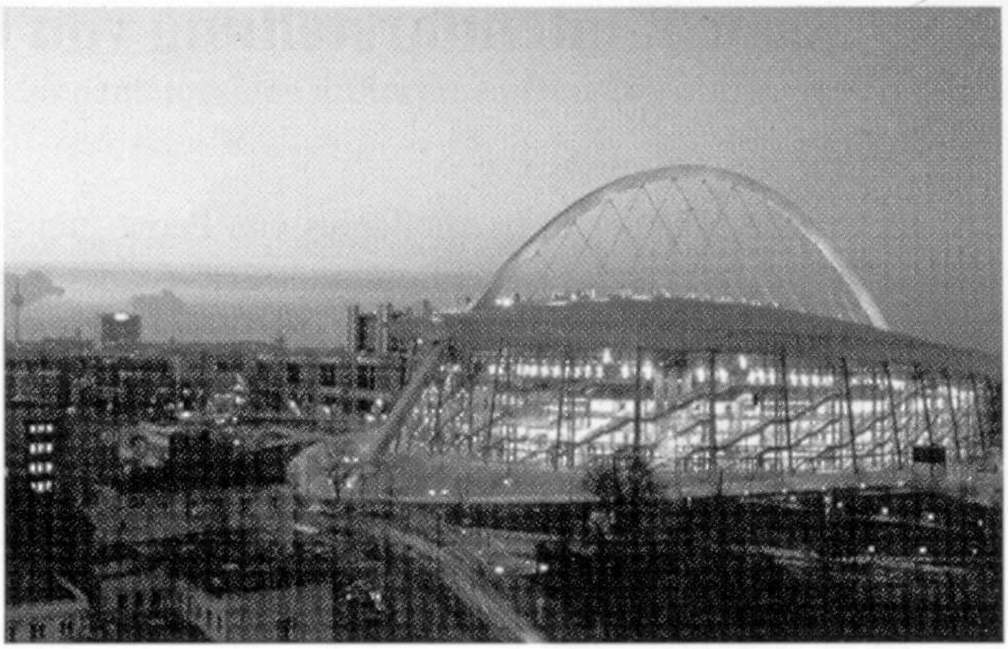
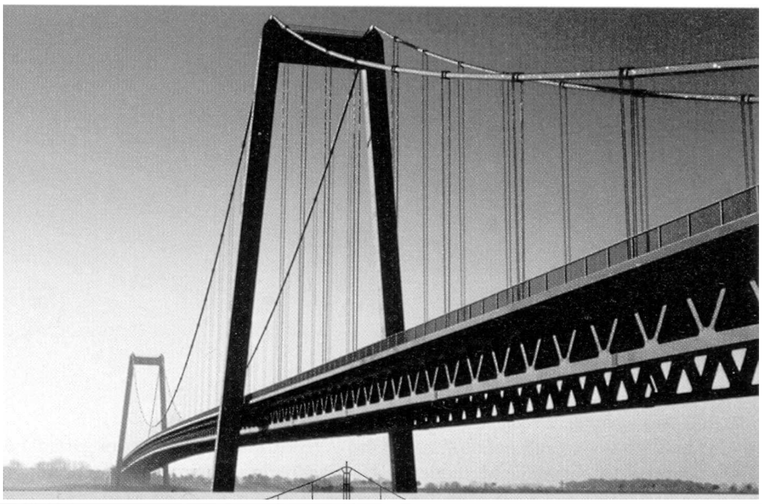


*Bild 82/3: „Atom-Ei" – Gebäude des ersten deutschen Forschungsreaktors in Garching.*





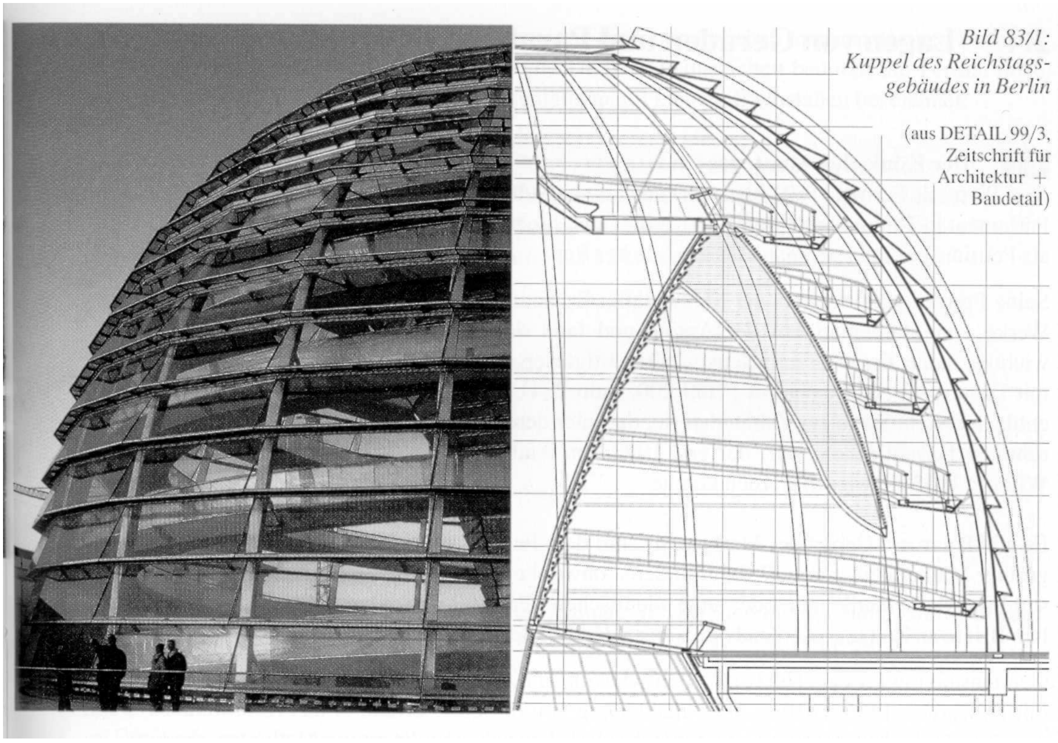
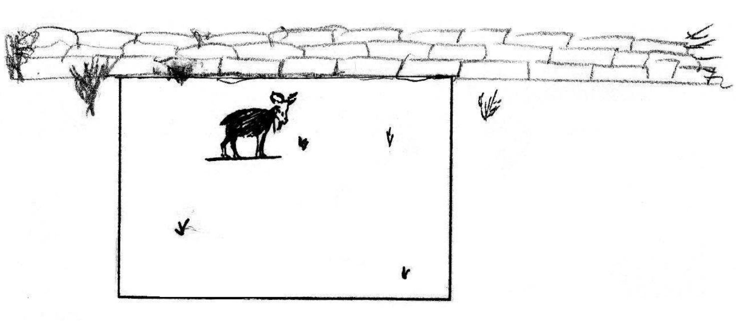


*Bild 83/1: Kuppel des Reichstagsgebäudes in Berlin*

(aus DETAIL 99/3, Zeitschrift für Architektur + Baudetail)

2. **Die Ziegenweide**

   Mit 120 m Zaun soll eine rechteckige Weidefläche für die Ziege Alma abgezäunt werden. In welchem Abstand von der Mauer könnten die Pfosten eingeschlagen werden? Welche Weidefläche steht Alma dann zur Verfügung? Finde mehrere Möglichkeiten, wobei die 120 m Zaun jeweils verbraucht werden sollen.



*Lösung:* 120 m lang: SP $(30|1800)$
Länge $a$: SP $(\frac{a}{4}|\frac{a^2}{8})$

3. **Kinokrieg**

   Kassel besitzt inzwischen zwei große Kinocenter mit zahlreiche Kinosälen.
   Da bangen die kleinen Kinos um ihre Einnahmen.

Eines dieser kleinen Kinos hat bei einem Eintrittspreis von 8 € durchschnittlich 95 Besucher pro Vorstellung.

Eine Marktstudie ergibt folgendes:
Würde der Besitzer den Eintrittspreis um 0,50 €; 1 €; 2 € usw. erhöhen, so ginge die Besucherzahl um 10 Personen; 20 Personen; 40 Personen usw. zurück.

Welche Preiserhöhung bringt die höchsten Einnahmen?

*Lösung:* $E(x) = (95 + y)(8 + x) = -20(x + 1,625)^2 + 812,81$
Theoretisch maximale Einnahme bei Preisreduzierung auf 6,375. Dies ist aber wohl kein guter Preis...

4. **Verschiebungsregeln mit der Betragsfunktion**

   (a) Vergleiche die Graphen der folgenden Betragsfunktionen mit dem Graphen von $f(x) = |x|$.

      i. $f_1(x) = |x - 5|$
      ii. $f_2(x) = |x + 1|$
      iii. $f_3(x) = |x| + 1,5$
      iv. $f_4(x) = |x| - 2,5$
      v. $f_5(x) = |x - 2| - 4$
      vi. $f_6(x) = \frac{1}{3}|x|$
      vii. $f_7(x) = 3 \cdot |x|$
      viii. Stelle selbst einen Funktionsterm auf und zeichne den Graphen.

   (b) Formuliere aufgrund deiner Beobachtungen bei Aufgabe(a). Verschiebungsregeln für folgende Funktionen:
   $g_1(x) = |x + a|, \quad a \in P$
   $g_2(x) = |x| + b, \quad b \in P$
   $g_3(x) = |x + a| + b, \quad a, b \in P$

   (c) Verändere den Faktor $c$ in der Gleichung $h(x) = c \cdot |x|$. Wie geht der Graph von $h$ aus dem von $f$ hervor? Unterscheide $c > 0; c < 0; c = 0; c < 1; c > 1$ usw.

5. **Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph (1)**

   Aufträge für die Gruppen:

   **Gruppe A:**
   Gegeben sind Funktionsgleichungen der Form $f(x) = x^2 + e$. Zeichne die Parabeln für verschiedene Parameter $e$ und beschreibe den Zusammenhang zwischen Graph und Funktionsgleichung.
   Stelle ausgewählte Beispiele und den gefundenen Zusammenhang auf der beiliegenden Folie für die anderen Gruppen dar.

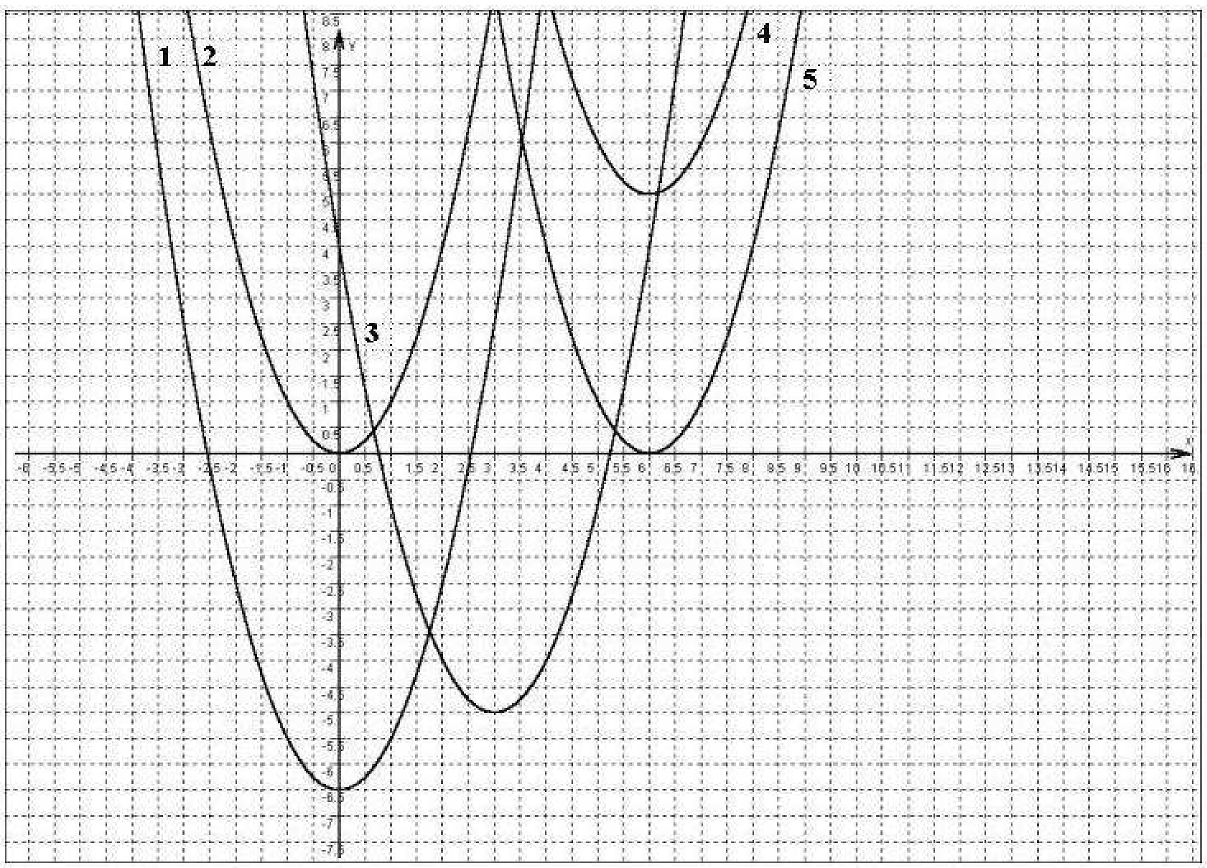
**Gruppe B:**
Gegeben sind Funktionsgleichungen der Form $f(x) = (x+d)^2$. Zeichne die Parabeln für verschiedene Parameter $d$ und beschreibe den Zusammenhang zwischen Graph und Funktionsgleichung.
Stelle ausgewählte Beispiele und den gefundenen Zusammenhang auf der beiliegenden Folie für die anderen Gruppen dar.

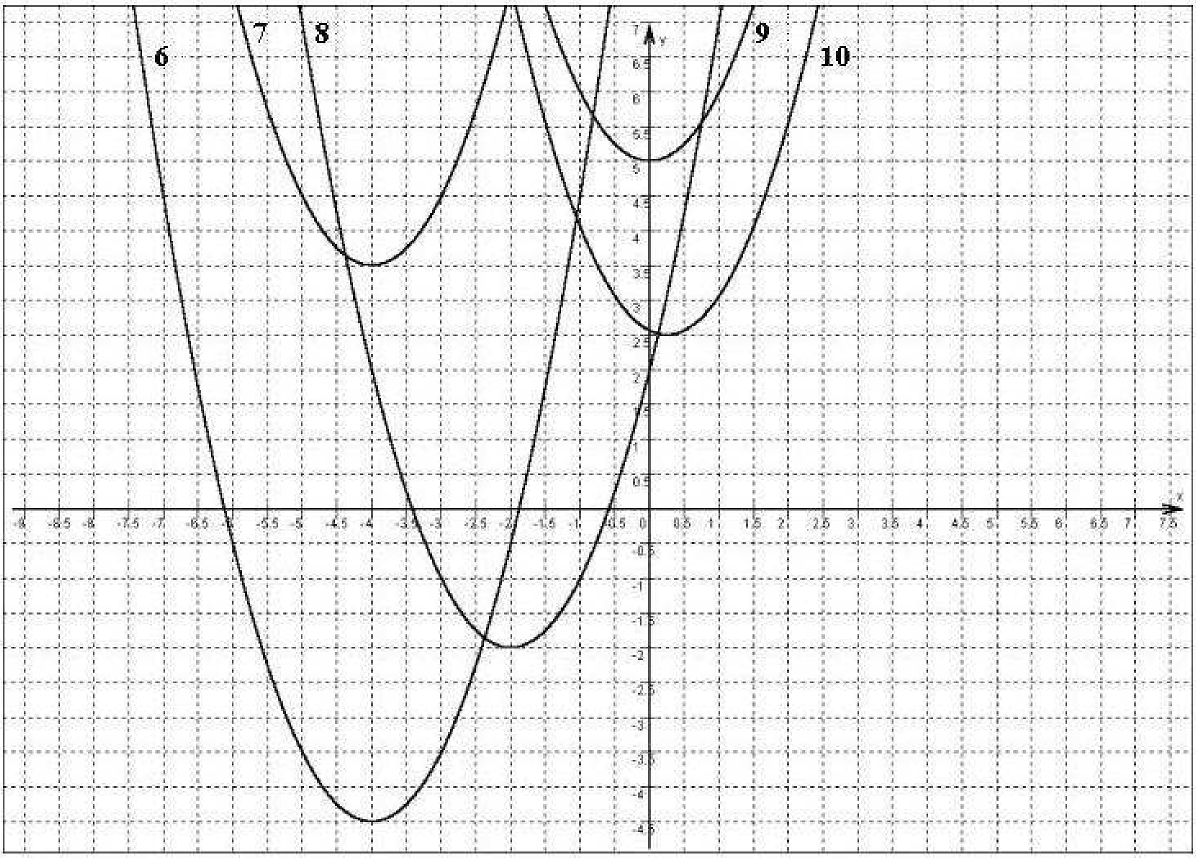
**Gruppe C:**
Gegeben sind Funktionsgleichungen der Form $f(x) = (x+d)^2 + e$. Zeichne die Parabeln für verschiedene Parameter $d$ und $e$ und beschreibe den Zusammenhang zwischen Graph und Funktionsgleichung.
Stelle ausgewählte Beispiele und den gefundenen Zusammenhang auf der beiliegenden Folie für die anderen Gruppen dar.

**Gruppe D:**
Verändere den Faktor $a$ in der Gleichung $f(x) = a \cdot x^2$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Funktionsterm und der zugehörigen Parabel?
Stelle ausgewählte Beispiele und den gefundenen Zusammenhang auf der beiliegenden Folie für die anderen Gruppen dar.

6. **Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph (2)**

   Finde die Funktionsgleichungen $f_1(x); f_2(x); \ldots; f_{10}(x)$ zu den gezeichneten Parabeln $1-10$.



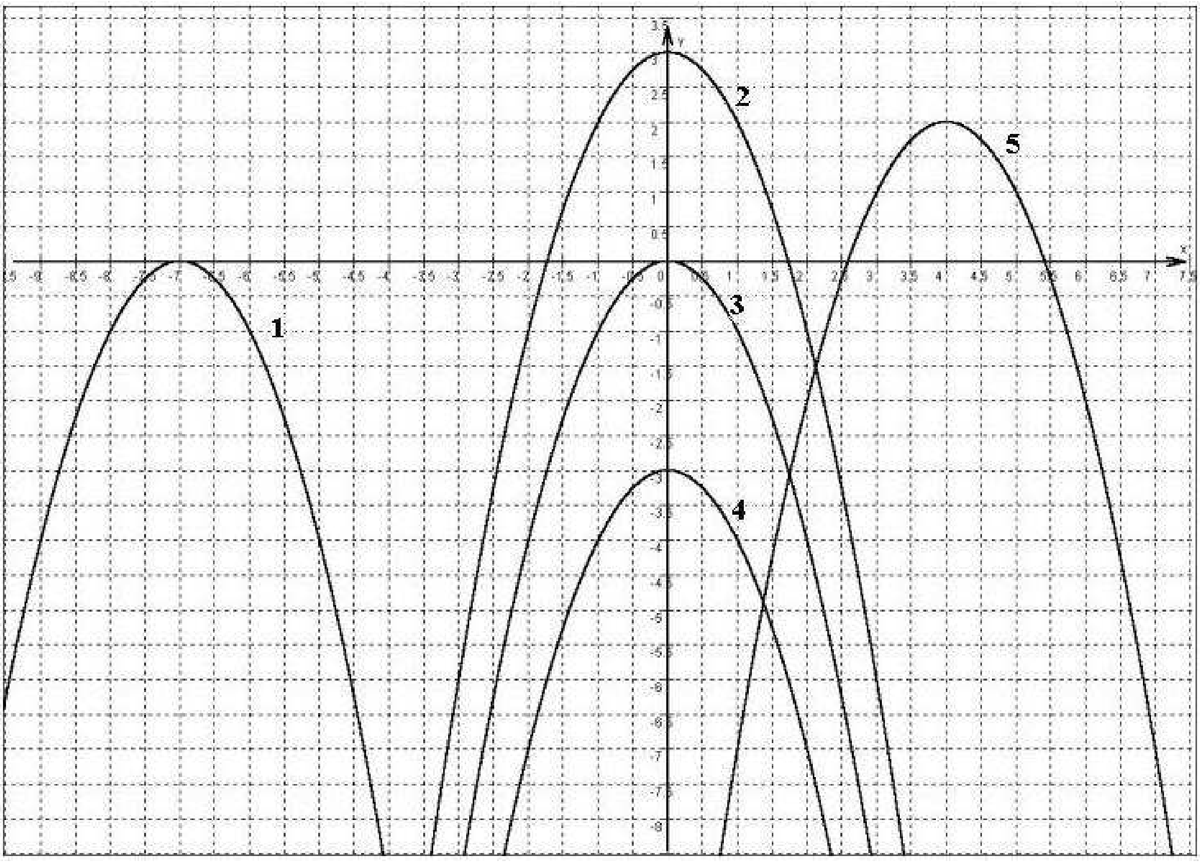


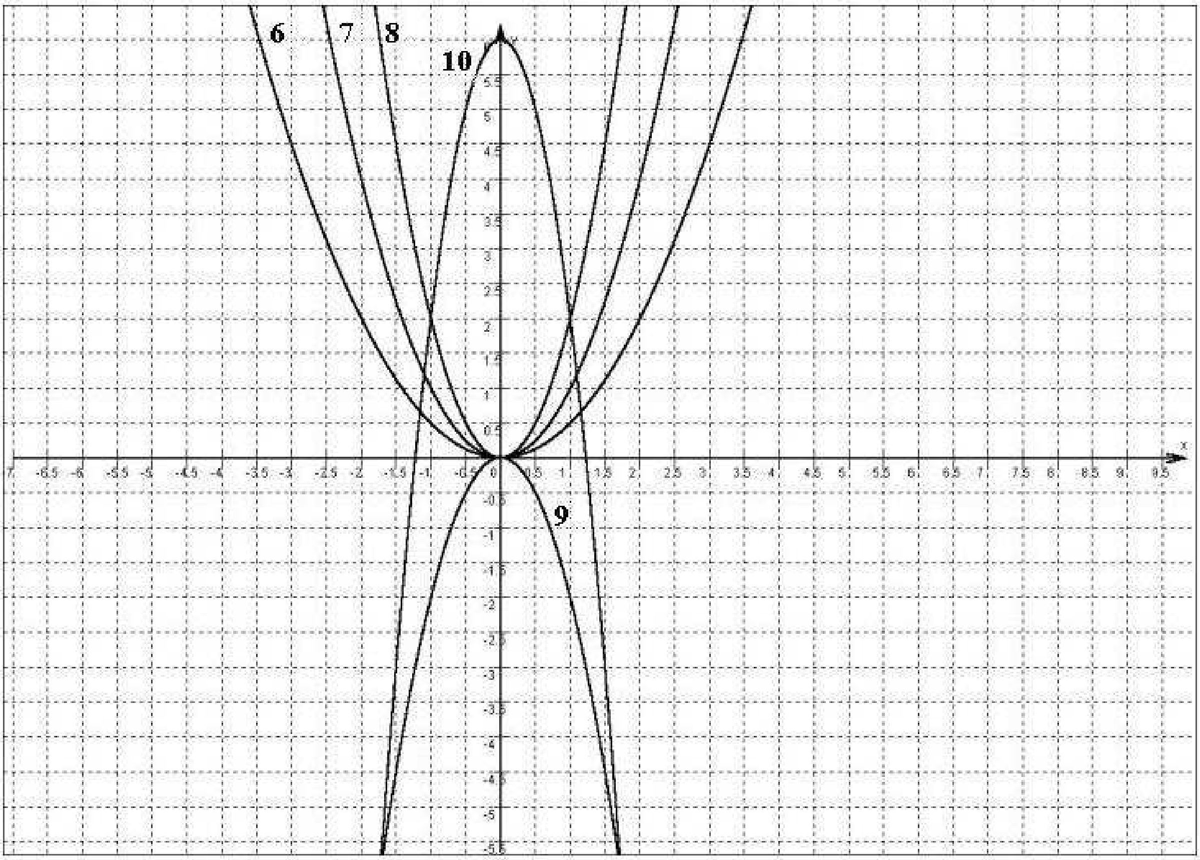

*Lösung:*

1. $f(x) = x^2 - 6,5$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = (x-3)^2 - 5$
4. $f(x) = (x-6)^2 + 5$
5. $f(x) = (x-6)^2$
6. $f(x) = (x+4)^2 - 4,5$
7. $f(x) = (x+4)^2 + 3,5$
8. $f(x) = (x+2)^2 - 2$
9. $f(x) = x^2 + 5$
10. $f(x) = (x - \frac{1}{4})^2 + 2,5$

7. **Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph (3)**

   Finde die Funktionsgleichungen $f_1(x); f_2(x); \ldots; f_{10}(x)$ zu den gezeichneten Parabeln $1 - 10$.



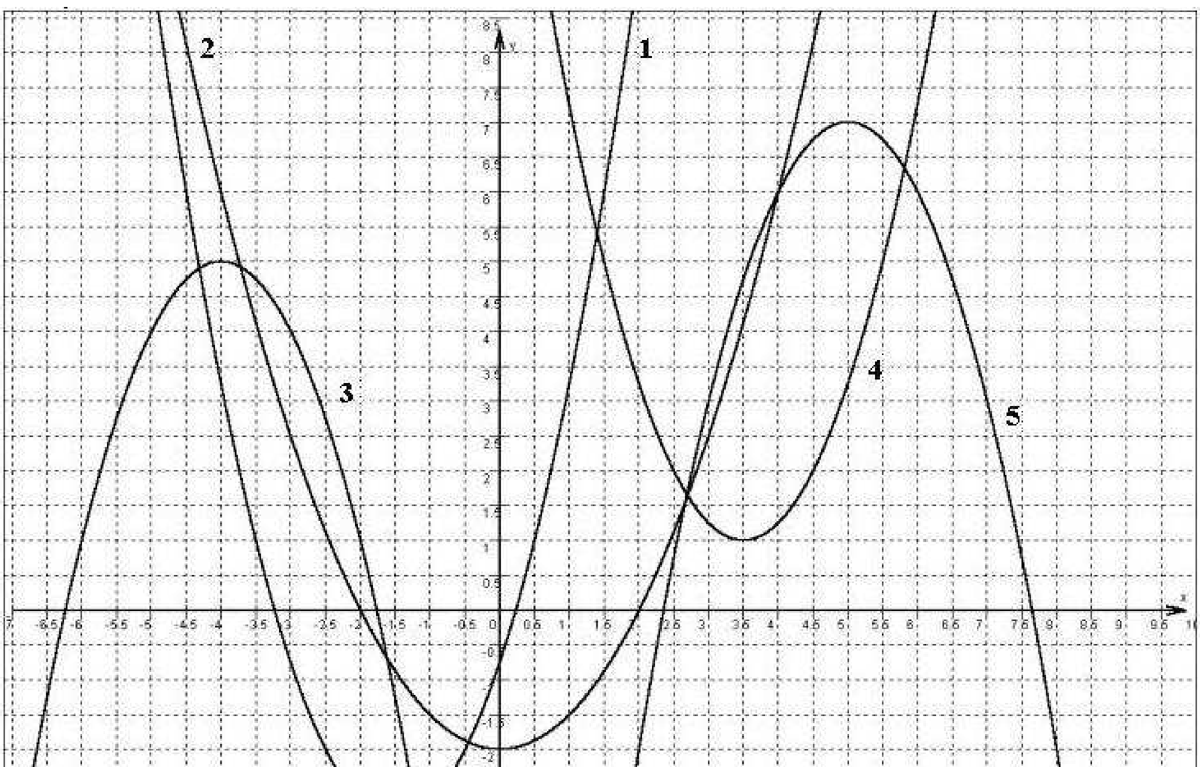



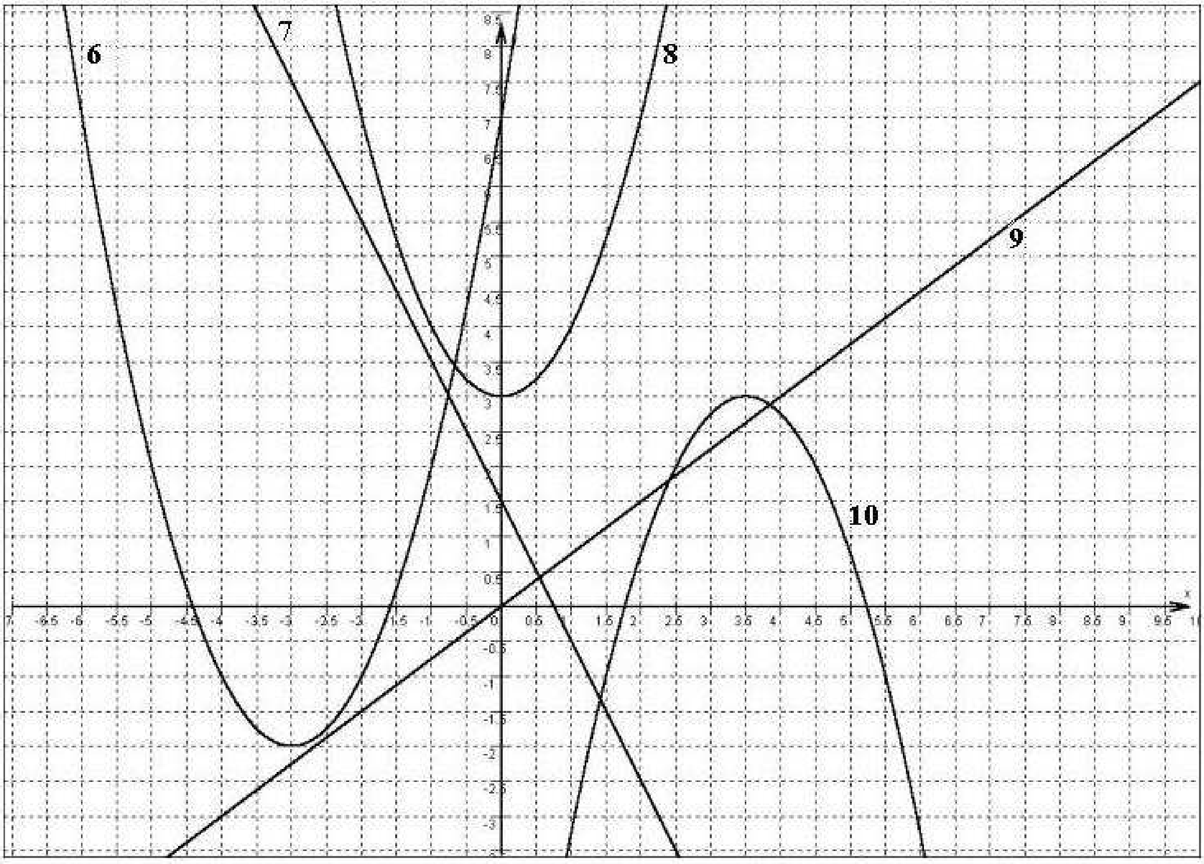

*Lösung:* 1. $f(x) = -(x+7)^2$

2. $f(x) = -x^2 + 3$
3. $f(x) = -x^2$
4. $f(x) = -x^2 - 3$
5. $f(x) = -(x-4)^2 + 2$
6. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
7. $f(x) = x^2$
8. $f(x) = 2x^2$
9. $f(x) = -2x^2$
10. $f(x) = -4x^2 + 6$

8. **Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph (4)**

   Finde die Funktionsgleichungen $f_1(x); f_2(x); \ldots; f_{10}(x)$ zu den gezeichneten Parabeln $1 - 10$.

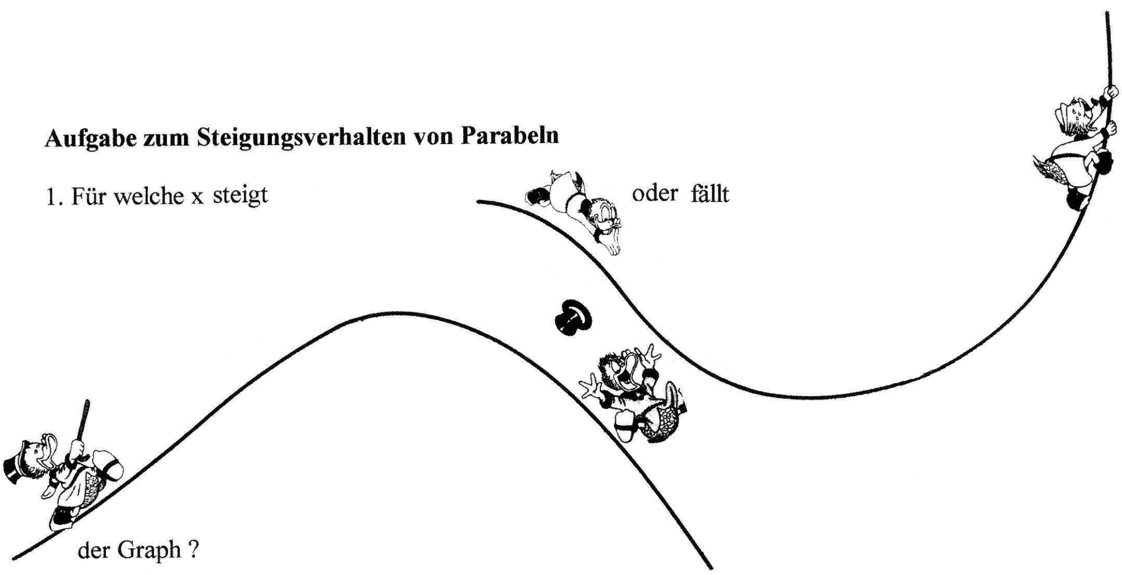





*Lösung:*

1. $f(x) = (x+1,5)^2 - 3$
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$
3. $f(x) = -(x+4)^2 + 5$
4. $f(x) = (x-3,5)^2 + 1$
5. $f(x) = -(x-5)^2 + 7$
6. $f(x) = (x+3)^2 - 2$
7. $f(x) = -2x + 1,5$
8. $f(x) = x^2 + 3$
9. $f(x) = \frac{3}{4}x$
10. $f(x) = -(x-3,5)^2 + 3$

## 9. Steigungsverhalten quadratischer Funktionen




(a) siehe Tabelle

| **Beschreibung der Funktion** | **fällt** | **steigt** |
|---|---|---|
| (a) $f(x) = x^2$ | | |
| (a) $f(x) = x^2$ | | |
| (b) $f(x) = x^2 + 2$ | | |
| (c) $f(x) = (x - 3)^2$ | | |
| (d) $f(x) = (x - 3)^2 + 1$ | | |
| (e) $f(x) = x^2 + 2x - 8$ | | |
| (f) Hochpunkt der Parabel: $H(7\|4,5)$ | | |
| (g) Tiefpunkt der Parabel: $T(-2,5\|3)$ | | |
| (h) Schnittpunkte mit der 1.Achse: $S_1(-2\|0)$ und $S_2(10\|0)$ | | |
| (i) | | |
| (j) | | |

(b) Gib mehrere Funktionsgleichungen an, für die folgende Aussagen zutreffen:

| **Steigungsverhalten** | **Funktionsgleichungen** |
|---|---|
| (a) Der Graph fällt für $x < -4$ und steigt für $x > -4$ | |
| (b) Der Graph steigt für $x < 2$ und fällt für $x > 2$ | |
| (c) | |

*Lösung:* (a) jeweils nur Bereich in dem der Graph fällt:

(a) $x \leq 0$
(b) $x \leq 0$
(c) $x \leq 3$
(d) $x \leq 3$
(e) $x \leq -1$
(f) $x \geq 7$

(g) $x \leq -2,5$

(h) $x \leq 4$ oder $x \geq 4$

(b) (a) z.B. $f(x) = (x+4)^2 + c$

(b) z.B. $f(x) = -(x-2)^2 + c$

## 10. Quadratische Funktionen und deren Graphen (Parabeln)

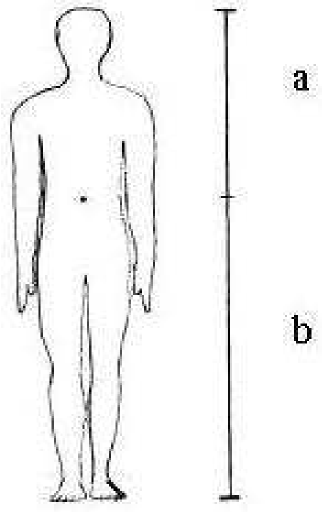
| Funktionsgleichung | Lage des Scheitelpunktes | Steigungsverhalten: Die Parabel… | | Verschiebung der Normalparabel |
|---|---|---|---|---|
| | | …fällt | …steigt | |
| $f(x) = x^2$ | $T(0\|0)$ | für $x < 0$ | für $x > 0$ | keine |
| $f(x) = x^2 + 1$ | | | | |
| $f(x) = x^2 - 2$ | | | | |
| $f(x) = (x+2)^2$ | | | | |
| $f(x) = (x-3)^2$ | | | | |
| $f(x) = (x-2)^2 + 1$ | | | | |
| $f(x) = (x-3)^2 - 2$ | | | | |
| $f(x) = (x+4)^2 + 3$ | | | | |
| | $T(1\|3)$ | | | |
| | $T(-2\|-5)$ | | | |
| | | $x < 2$ | $x > 2$ | |
| | | | | um 2 nach links und um 3 nach unten |
| $f(x) = x^2 + 6x + 9$ | | | | |
| $f(x) = x^2 - 3x + 2,25$ | | | | |
| $f(x) = x^2 - 4x - 5$ | | | | |
| $f(x) = x^2 + 6x + 5$ | | | | |
| | $H(0\|0)$ | | | |
| | | $x > 1$ | $x < 1$ | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

## 11. Quadratische Funktionen und deren Graphen (Parabeln)

| Funktionsgleichung | Lage des Scheitelpunktes | Steigungsverhalten: Die Parabel… | | Verschiebung der Normalparabel |
|---|---|---|---|---|
| | | …fällt | …steigt | |
| $f(x) = -x^2$ | $H(0\|0)$ | für $x > 0$ | für $x < 0$ | Spiegelung an der 1.Achse |
| $f(x) = -(x^2 + 1)$ | | | | |
| $f(x) = -x^2 + 1$ | | | | |
| $f(x) = -(x - 2)^2$ | | | | |
| $f(x) = -(x + 3)^2$ | | | | |
| $f(x) = -(x - 2)^2 + 1$ | | | | |
| $f(x) = -((x - 3)^2 - 2)$ | | | | |
| | $H(1\| - 2)$ | | | |
| | $T(1\| - 2)$ | | | |
| | $T(-2\| - 5)$ | | | |
| | | $x > 2$ | $x < 2$ | |
| | | | | an der 1.Achse gespiegelt, um 4 nach rechts verschoben |
| | | | | um 2 nach links verschoben, an der 1.Achse gespiegelt |
| | | | | an der 1. Achse gespiegelt, um 3 nach unten verschoben |
| | | | | um $2,5$ nach unten verschoben, an der 1. Achse gespiegelt |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

12. **Der Goldene Schnitt - ein Gesetz der Ästhetik**

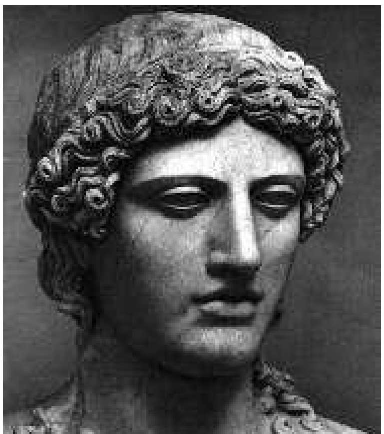
    Beim Menschen stehen die Länge des Oberkörpers und die Länge des Unterkörpers angenähert stets in einem bestimmten Verhältnis. Dieses Verhältnis bezeichnet man als Goldenen Schnitt:




$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$ (Goldener Schnitt),
oder in Worten:
$\frac{kürzerer Abschnitt}{längerer Abschnitt} = \frac{längerer Abschnitt}{Gesamtläng}$.

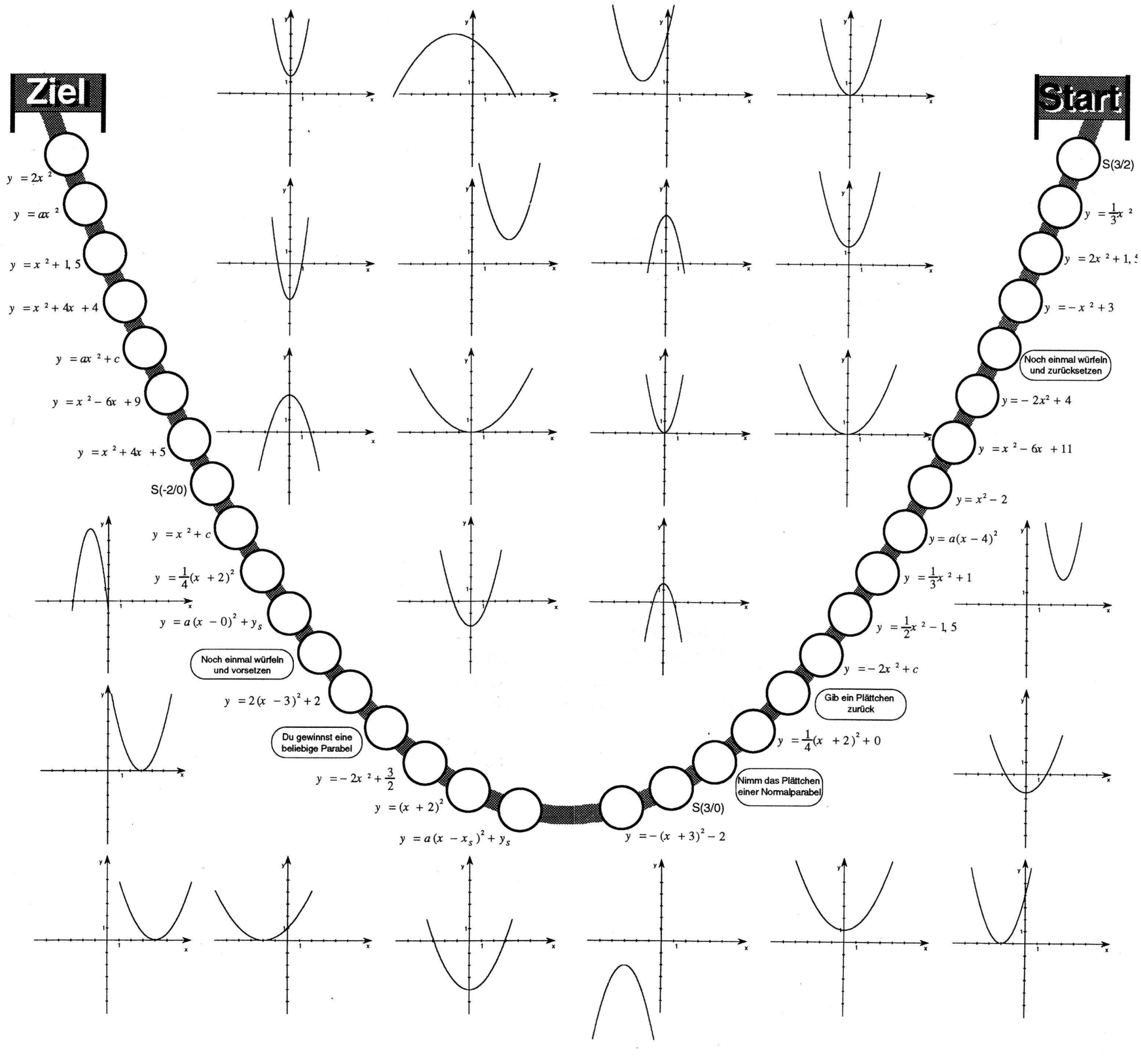
Der Goldene Schnitt wird oft als besonders wohlgefällig empfundenes Längenverhältnis angesehen. Er ist nicht nur an Menschen und Statuen, sondern auch in vielen Gemälden und Gebäuden wiederzufinden. Gerade in der Antike und Renaissance wurde der Goldene Schnitt immer wieder als Stilmittel eingesetzt.

**Das Apollo-Projekt**



Der Kasseler Apollo, der im Museum des Schlosses Wilhelmshöhe zu bewundern ist, soll als 10 m hohe Statue auf dem Universitätsgelände Kassel errichtet werden. Zur Errichtung des Apollos genügt den Bildhauern die Gesamtgröße allein natürlich nicht. Hilf den Bildhauern und berechne die Länge von Apollos Unter- und Oberkörper. Nimm dabei an, dass Apollo nach dem Gesetz des Goldenen Schnitts konstruiert werden soll. Zusatz: Gib die Unter- bzw. Oberkörperlänge prozentual zur Gesamtgröße an.

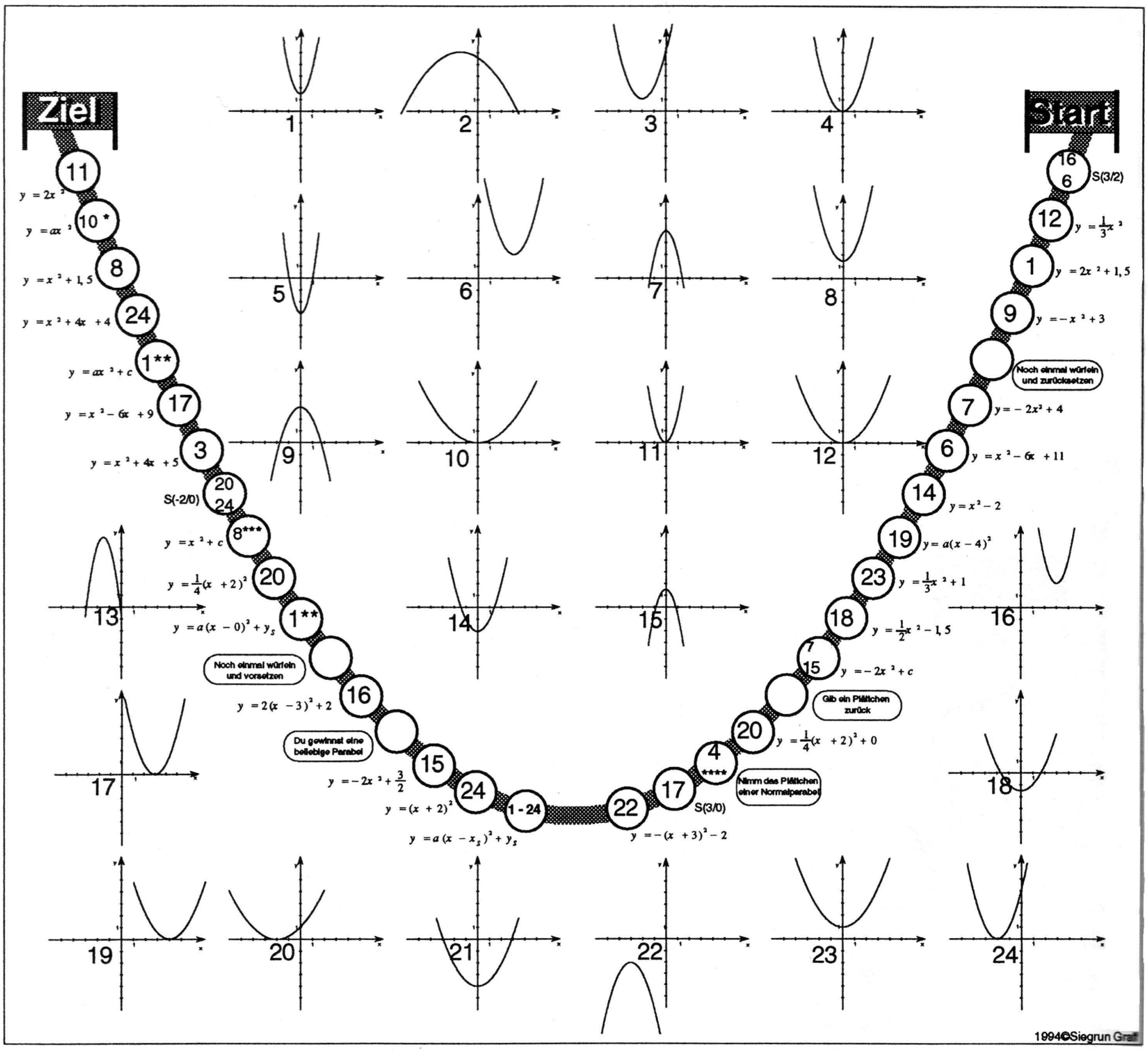
13. **Spielerische Übungsformen**




24 Plättchen (oder Streichhölzer) auf die Graphen verteilen. Die Spieler würfeln nacheinander mit einem Spielwürfel (gut: weniger als sechs Flächen oder umdefinieren) und setzen ihren Spielstein entsprechend. Können sie diesem Feld eine richtige Parabel zuordnen, geht das Plättchen in seinen Besitz über.

Quelle: mathematik lehren 66 (1994), S. 57-59

*Lösung:*




**10*** (11; 12; Sonderfall a= 1: 4)  **1**** ( 5; 7;13; 15; 18; 21; 23; Sonderfall: /a/ = 1: 4; 8; 9; 14; Sonderfall c=0 : 4; 10; 11; 12)
**8***** (14; Sonderfall c= 0 : 4)  **4****** (3; 6; 8; 9; 14; 17; 22; 24)

14. **Silbenrätsel für Mathe Profis**

In dem folgenden Text über lineare und quadratische Funktionen sind einige wichtige Begriffe verlorengegangen. Glücklicherweise sind die Silben der fehlenden Wörter bekannt. Viel Spaß beim Ausfüllen!
a - bel - bel - ben - de - dra - ga - ge - ge - gen - gung - le - ler - li - mal - ne - ne - nor - null - o - pa - pa - po - punkt - qua - ra - ra - ra - re - recht - sche - schei - si - stei - stei - stel - tan - te - tel - ten - ti - tiv - tiv - un - waa

**Bei den folgenden Sätzen geht es stets um eine Funktion $f$ mit $f(x) = mx + b$.**

(a) Eine solche Funktion heißt eine .................. Funktion.

(b) Der Graph einer solchen Funktion ersten Grades ist eine ..................

(c) Den $x$-Wert des Schnittpunktes eines Graphen mit der $x$-Achse nennt man ..................

(d) Die Konstante m in der Funktionsgleichung $f(x) = mx+b$ gibt die .................. des Graphen an.

(e) Wenn der Funktionsgraph von links nach rechts fallend verläuft, dann ist $m$ ..................

(f) Je größer der Betrag von $m$ ist, desto .................. verläuft der Funktionsgraph.

(g) Wenn $m = 0$ ist, dann verläuft der Funktionsgraph ..................

**Bei den folgenden Sätzen geht es stets um eine Funktion $g$ mit $g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.**

(h) Eine solche Funktion heißt eine .................. Funktion.

(i) Der Graph einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades ist eine ..................
Der höchste bzw. tiefste Punkt eines solchen Funktionsgraphen heißt ..................

(j) Wenn $a_2 < 0$ ist, ist der Funktionsgraph nach .................. geöffnet.

(k) Wenn $a_2 > 0$ ist, ist der Funktionsgraph nach .................. geöffnet.

(l) Wenn $a_2 = 1$ und $a_1 = a_0 = 0$ sind, nennt man den Graphen dieser Funktion eine ..................

(m) Eine quadratische Funktion besitzt keine Nullstelle, wenn der Scheitelpunkt oberhalb der $x$-Achse liegt und $a_2$ .................. ist.

(n) Erhält man bei der Berechnung der Schnittpunkte einer linearen Funktion und einer Parabel nur einen einzigen Schnittpunkt, so ist die Gerade in diesem Punkt eine .................. der Parabel.

15. **Vergleich von Funktionseigenschaften**

*Proportionale Funktion*

| $x$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x$ | | | | | | | | | |

*Lineare Funktion*

| $x$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x+2$ | | | | | | | | | |

*Quadratische Funktion*

| $x$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2$ | | | | | | | | | |

Fülle die Wertetabellen aus. Finde Eigenschaften der Funktionen in der Wertetabelle.

*Lösung:* **Grundeigenschaften:**
**proportionale Funktionen:** zum Doppelten (der Argumente) das Doppelte (der Funktionswerte), zum $k$-fachen das $k$-fache, zur Summe die Summe;
**lineare Funktionen:** zu gleichen Schritten die gleiche Änderung
**Quadratfunktionen:** zum Doppelten das Vierfache, zum $k$-fachen das $k^2$-fache

16. **Milchschokolade**

**Die neue Milkia ist da!!!**
Noch sahniger, noch nussiger und jetzt noch günstiger. Wir haben unser Format geändert:
Milkia ist jetzt 10% Länger und 10% breiter.
Das ist 100% besser!!!

Die Schokolade hat vorher $1,49$ gekostet und jetzt $1,79$ €. Beurteile die Anzeige der Firma.

*Lösung:* Der Flächeninhalt wird um den Faktor $1,21$ erhöht, der Preis um ca. $1,20$. Nimmt man an, dass der Preis um den gleichen Faktor steigen darf wie der Flächeninhalt, fällt die Preissenkung mit $1,29$ Pfennigen doch recht gering aus. Man könnte jedoch auch argumentieren, dass der Preis erhöht wurde, da man gezwungen ist mehr Schokolade zu kaufen (die man vielleicht gar nicht isst)

17. **Diskussion der Busfahrpreise im Verkehrsausschuss**

Im Verkehrsausschuss diskutieren die Ratsvertreterinnen und Ratsvertreter über die Verkehrspolitik einer Gemeinde. Sie machen Vorschläge für den Bau oder die Sperrung von Straßen. Sie legen fest, welche öffentlichen Verkehrsmittel in der Gemeinde bevorzugt werden sollen. Sie bestimmen mit über die Fahrpreise der Busse und Bahnen, die von der Gemeinde im öffentlichen Personenverkehr eingesetzt werden. Aus der Stadt Aachen benutzen täglich 200 Mitarbeiter der Forschungsanlage Jülich die direkte Busverbindung zwischen S tadt und Arbeitsstelle. Sie zahlen dafür bisher umgerechnet 5 € am Tag. Mit der Tageseinnahme von 1000 € können die Kosten dieser Busverbindung gerade gedeckt werden. Zwei der politischen Parteien, die im Verkehrsausschuss vertreten sind, haben dem Ausschuss Anträge zur Änderung des Fahrpreises vorgelegt. Diese Anträge sind unten abgedruckt.

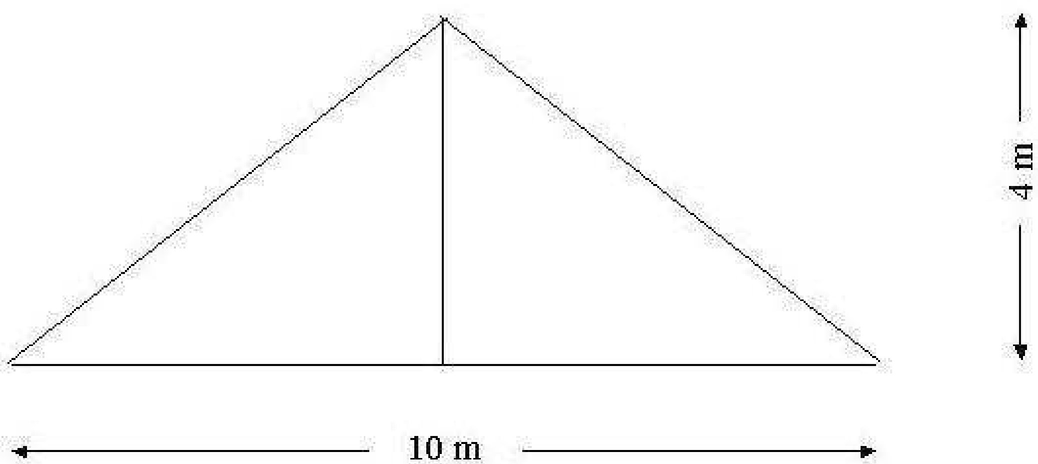
**Antrag der Fraktion A**
Die Einnahmen aus der Direktverbindung zwischen Stadt und Forschungsanlage decken die Kosten dieser Busverbindung. Da jedoch die Verkehrsbetriebe der Stadt insgesamt mit hohen Verlusten arbeiten, beantragen wir eine Fahrpreiserhöhung auch für die genannte Strecke.
Durch die Anhebung der Tarife werden einige Benutzer auf das private Auto ausweichen. Die Gesamteinnahmen aus der Strecke werden voraussichtlich steigen, und das Defizit der Städtischen Verkehrsbetriebe verringern helfen. Unsere Fraktion rechnet damit, dass bei einer Preissteigerung um jeweils $0,50$€ pro Tag nur jeweils 10 Personen auf das eigene Fahrzeug ausweichen.
Gemäß unserem Antrag möge der Ausschuss so beschließen, dass die Linie möglichst hohe Einnahmen für unsere Städtischen Verkehrsbetriebe erzielt.

**Antrag der Fraktion B**
Ziel der Verkehrspolitik unserer Partei ist es, den öffentlichen Personen-Nahverkehr besonders zu fördern. Wir wollen daher, dass möglichst viele Menschen vom privaten Auto auf die Benutzung von Bussen und Bahnen umsteigen.
Nur durch eine Senkung des Fahrpreises auf der Strecke Aachen-Jülich kann es gelingen, die eingesetzten Busse besser auszulasten.
Unsere Fraktion rechnet damit, dass bei einer Preissenkung um jeweils $0,50$ € pro Tag jeweils 40 Personen auf die Benutzung des eigenen Pkws verzichten und den Bus für den Weg zur Arbeit nutzen werden.
Unserem Antrag folgend möge der Ausschuss beschließen, dass möglichst viele Personen zur Nutzung des Busses angereizt werden. Die Einnahmen der Linie Aachen-Jülich sollen kostendeckend bleiben.

Welchem Antrag würdest du zustimmen?

18. **Das flächeninhaltsgrößte Fenster**

Im Dachgeschoss eines Hauses soll ein Malstudio eingerichtet werden. Das Studio soll möglichst viel Tageslicht durch eine rechteckige Glaswand im Hausgiebel erhalten. Welche Länge und Breite muss der Architekt dieser Glaswand geben, wenn das Haus 10 m breit und der Giebel 4 m hoch ist?

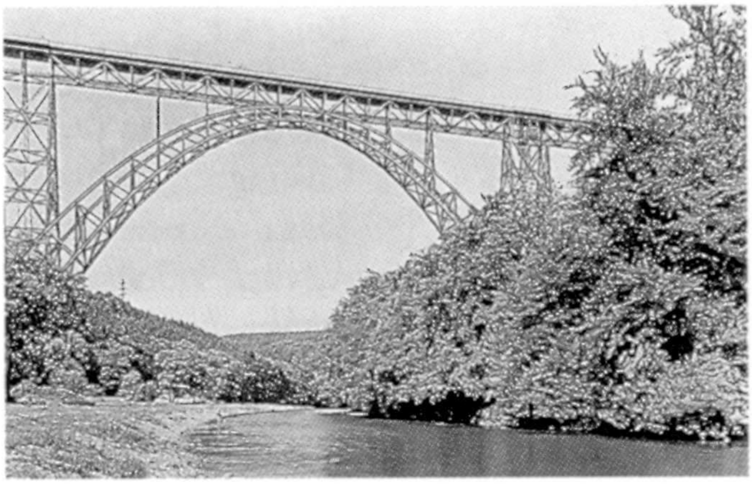


19. **Anwendungen der quadratischen Funktionen und Gleichungen**

Quellen der nachfolgenden Aufgaben: Welt der Mathematik 9 (1990), Mathematik heute 9 (1996), Lambacher Schweizer 9 (1997), Schnittpunkt 10 (1995), MUED

**Brücken**

Viele moderne Brücken haben die Form von Parabeln. Die Abbildung rechts zeigt die Müngstener Brücke bei Solingen aus den fünfziger Jahren. Legt man ein Koordinatensystem in den Scheitel des Bogens, so hat die Parabel die Gleichung $y = -\frac{1}{9}x^2$. Die Bogenhöhe beträgt 69 m. Berechne die Spannweite.



*Lösung:* ca. 158 m

20. **Fuldabrücke**

Der Brückenbogen der Fuldabrücke bei Guntershausen (Fig. 2) hat ebenfalls die Form einer Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$.

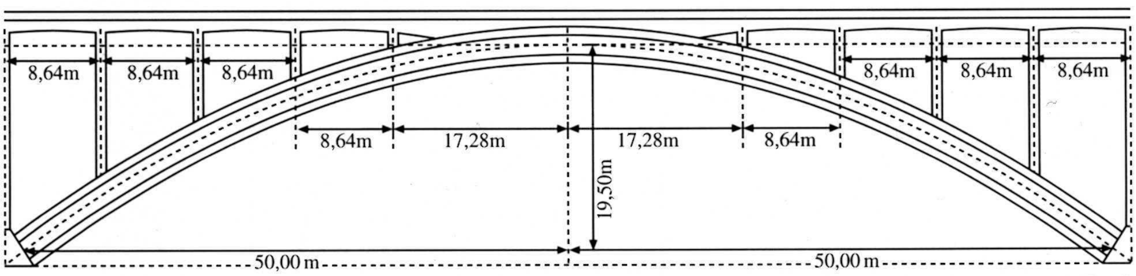



Fig. 2

Bestimme a und berechne die fehlenden Pfeilerhöhen.

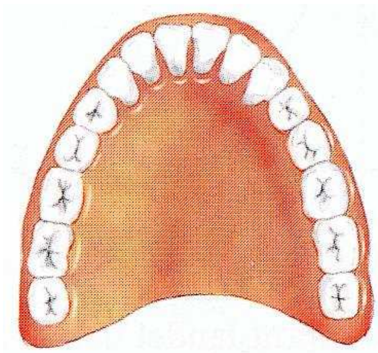
21. **Parabeln verschieben**

Eine Normalparabel wird um 1 nach links, um 4 nach oben verschoben, dann an der 1. Achse gespiegelt und schließlich parallel zur 2. Achse mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt. Zeichne schrittweise den Graphen, gib Lage und Art des Scheitels an.

*Lösung:* $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + 4$

22. **Gebissform**

Ein regelmäßiges Gebiss hat näherungsweise die Form einer Parabel. Versuche für das rechts abgebildete eine Funktion zu finden, die die ungefähre Lage der Zähne beschreibt.



*Lösung:* $y = -1,04x^2$

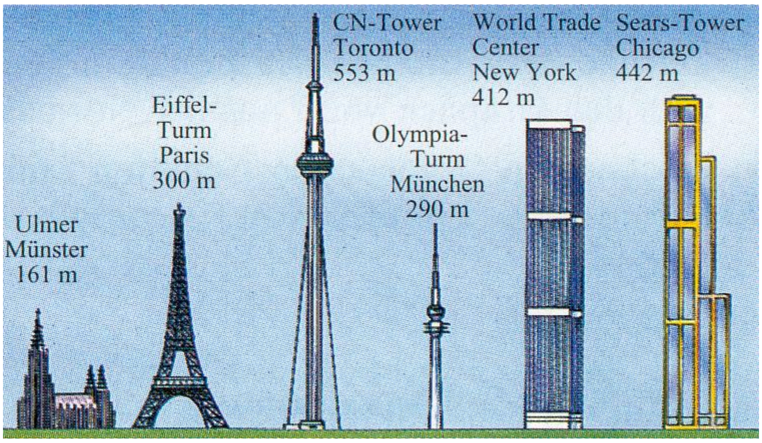
23. **Weitsprung**

Bob Beamon sprang bei seinem Weltrekord bei den Olympischen Spielen 1968 in Mexiko-City $8,90$ m weit. Sein Körperschwerpunkt legte dabei in etwa die Bahn einer Parabel zurück, die angenähert durch die Gleichung $y = -0,0571x^2 + 0,3838x + 1,14$ beschrieben wird ($y$ gibt die jeweilige Höhe des Körperschwerpunktes über der Sprunggrube (in $m$) und $x$ die horizontale Entfernung von der Ausgangslage beim Absprung (in $m$) an.
Hätte Bob Beamon bei seinem Weltrekord einen VW-Golf übersprungen?

*Lösung:* Scheitelpunkt bei $(3,36|1,78)$, Nullstelle bei ca. $8,95$.

24. **Fallversuche**

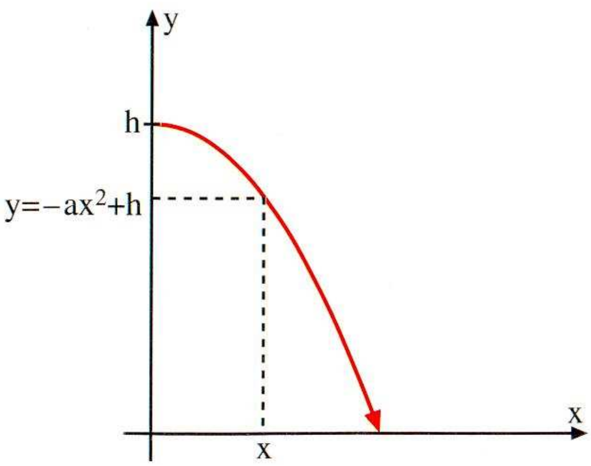
Beim senkrechten Fall einer Kugel von einem hohen Gebäude gilt für die Funktion Fallzeit (in $s$) $\rightarrow$ Fallweg (in $m$) angenähert $t \rightarrow 5t^2$.
Wie lange würde ein Stein fallen, wenn man ihn jeweils von der Spitze der Gebäude nach unten fallen lassen würde?




*Lösung:* $5,7s$; $7,7s$; $10,5s$; $7,6s$; $9,1s$; $9,4s$

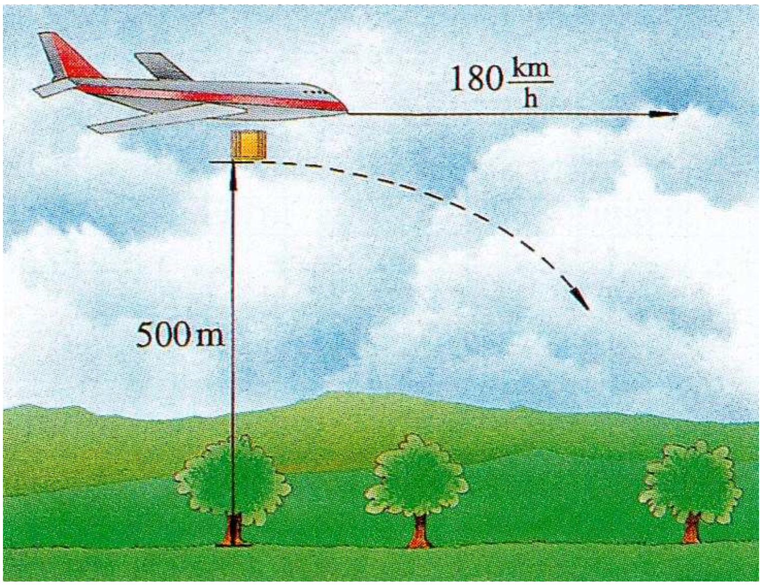
25. **Flugversuche**

Wirft man einen Gegenstand parallel zur Erde, so hat seine Flugbahn die Form einer halben Parabel. Die Gleichung dieser Parabel

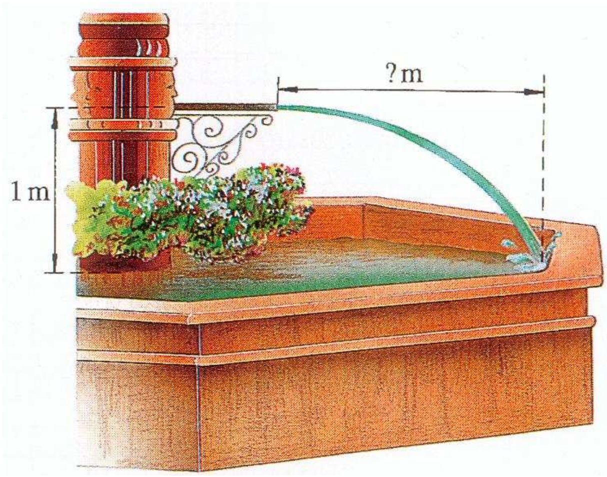



hat die Form $y = -ax^2 + h$.
Für den Wert von $a$ gilt: $a \approx \frac{5}{v^2}$.
Dabei ist $v$ die Abwurfgeschwindigkeit (in $\frac{m}{s}$), $x$ die Entfernung vom Abwurfpunkt in vertikaler Richtung (in $m$) und $y$ die Höhe (in $m$), $h$ ist die Abwurfhöhe (in $m$).

(a) Ein Flugzeug, das mit der Geschwindigkeit von 180 $\frac{km}{h}$ (relativ zur Erde) fliegt, wirft ein Versorgungspaket ab. Wie weit von dem linken Baum entfernt landet das Paket?




(b) Bei dem Springbrunnen tritt das Wasser aus dem Rohr mit der Geschwindigkeit 3,5 $\frac{m}{s}$ aus.
Wie weit muss der Rand des Wasserbeckens mindestens von der Rohröffnung entfernt sein?




*Lösung:* (a) 500 m

(b) 1,57 m

26. **Schussversuche**

Beim Schießen einer Kugel senkrecht nach oben wird die Zuordnung Zeit $t$ nach Abschuss (in $s$) $\rightarrow$ Höhe h über der Abschussstelle (in $m$) durch die Gleichung $h = 51,2t - 5t^2$ beschrieben.

(a) In welcher Höhe befindet sich die Kugel nach 4 Sekunden? Wann erreicht sie die gleiche Höhe beim Zurückfallen?

(b) Nach welcher Zeit erreicht die Kugel ihren höchsten Punkt? In welcher Höhe befindet sie sich dann?

(c) Zu welchen Zeiten beträgt die Höhe 50 m?

*Lösung:* (a) 124 m

(b) $5,12\,\mathrm{s}$; $131,4\,\mathrm{m}$

(c) $1,1\,\mathrm{s}$ und $9,4\,\mathrm{s}$

27. **Beschleunigung**

Beschleunigt ein Motorrad aus dem Stand (bzw. bei $30\frac{km}{h}$), so legt es in den ersten $x$ Sekunden etwa $2x^2$ (bzw. $2x^2 - 8x + 64$) Meter zurück. Zeichne für beide Fälle den Graphen der Funktion: Fahrzeit $\rightarrow$ zurückgelegte Strecke in dasselbe Koordinatensystem und vergleiche sie.

28. **Säule**

Für eine quadratische Säule mit der Höhe 5 cm gilt:

(a) Die Grundfläche ist um $14\,\mathrm{cm}^2$ [um $24\,\mathrm{cm}^2$] größer als die Seitenfläche.

(b) Die gesamte Oberfläche beträgt $48\,\mathrm{cm}^2$ [$288\,\mathrm{cm}^2$; $112\,\mathrm{cm}^2$].

Berechne die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche.

*Lösung:* (a) 7 cm [8 cm]

(b) 2 cm [8 cm/4 cm]

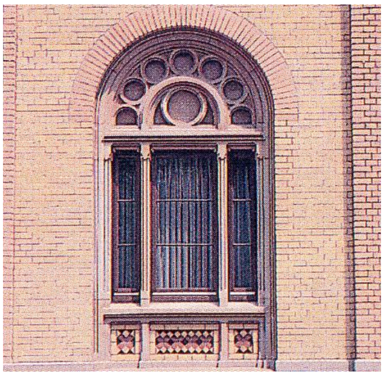
29. **Giebelfenster**

Bei der Herstellung von Giebelfenstern für ein Dachgeschoss ist eine Glasplatte in Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 80 cm und 120 cm übrig geblieben. Bestimme das Rechteck mit dem maximalen Flächeninhalt, das sich aus dem Dreieck ausschneiden lässt.

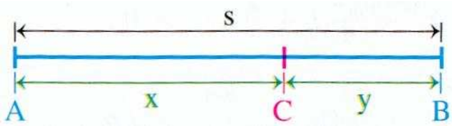
*Lösung:* 60 cm mal 120 cm

30. **Noch einmal: Goldener Schnitt**

Der Goldene Schnitt kam bei Kunstwerken vor allem in der antiken Architektur und in der italienischen Renaissance vor. Prüfe dies an dem Bild:



Goldener Schnitt: $s : x = x : y$




31. **Bild von Robbie**

    Ute will aus einem Poster ihres Lieblingssängers Robbie Williams ein quadratisches Bild ausschneiden und auf einen Karton aufkleben, der auf allen Seiten $0,5\,\mathrm{dm}$ überstehen soll.

    (a) Wie viel $dm^2$ Karton braucht sie bei der Bildbreite von $2,5\,\mathrm{dm}$?
    (b) Gib die Funktion Seitenlänge des Bildes in $dm$? Flächeninhalt des Karton in $dm^2$ an und zeichne den Graphen dieser Funktion.
    (c) Wie groß kann Ute das Bild höchstens machen, wenn sie $9\,\mathrm{dm}^2$ Karton hat?

*Lösung:* (a) $12,25\,\mathrm{dm}^2$
(b) $f(x) = (s+1)^2$
(c) $2\,\mathrm{dm}$

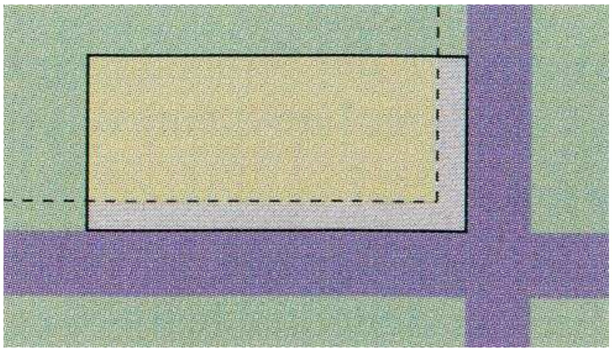
32. **Geradengewirr**

    Auf einem Blatt sind $n$ Geraden gezeichnet. Dabei schneidet jede Gerade jede andere. Es gibt 78 Schnittpunkte; durch keinen von ihnen gehen mehr als zwei der gezeichneten Geraden. Bestimme die Anzahl n der Geraden.

*Lösung:* 13 Geraden

33. **Grundstücksverkleinerung**

Von einem rechteckigen Grundstück an einer Straßenecke soll für einen Radweg ein 2 m breiter Streifen längs der gesamten Straßenfront abgetreten werden. Dadurch gehen $130\,\text{m}^2$ des ursprünglich $990\,\text{m}^2$ großen Grundstücks verloren. Bestimme Länge und Breite des rechteckigen Grundstücks.



*Lösung:* 22 m mal 45 m

34. **Quadraträtsel**

Welche Seitenlänge hat ein Quadrat, dessen Flächeninhalt sich verdreifacht, wenn man die Seitenlänge um 1 m vergrößert?

*Lösung:* ca. $1{,}37\,\text{m}$

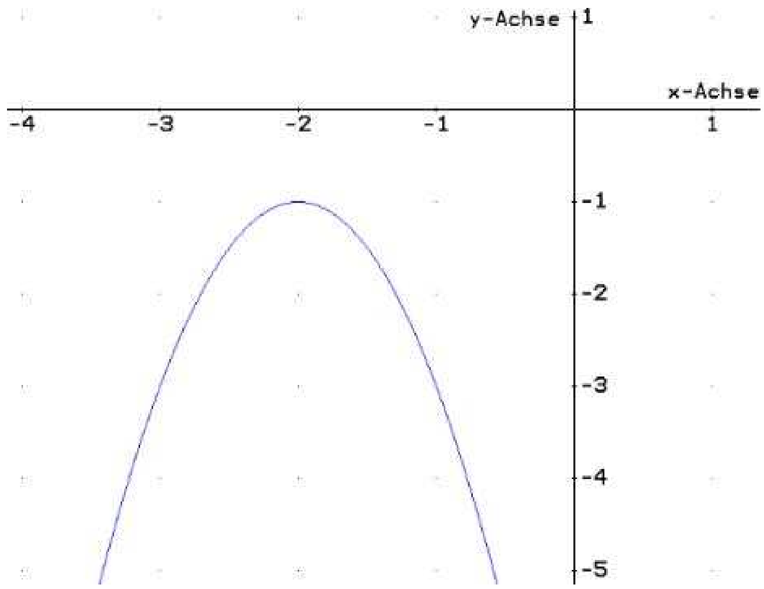
35. **Flächenverwandlung**

Ein Rechteck hat die Seitenlängen 18 cm und 16 cm. An seinen vier Ecken sollen kongruente gleichschenklige Dreiecke so abgeschnitten werden, dass sich der Flächeninhalt des Rechtecks um ein Viertel verkleinert. Wie lang sind die Katheten der abgeschnittenen Dreiecke?

*Lösung:* 6 cm

36. **Parabelverwandlung**

Die rechts abgebildete Parabel ist durch Verschiebung und Streckung aus der Normalparabel entstanden.
Beschreibe zunächst die verschiedenen Veränderungen gegenüber der Normalparabel und versuche dann die Funktionsgleichung zu finden.




37. **Im Krankenhaus**

In einer Klinik wird einem Kranken gleichmäßig aus einer Infusionsflasche eine Kochsalzlösung zugeführt. Nach einer halben Stunde sind noch $0,8\,\mathrm{l}$ in der Flasche, nach 2 Stunden sind es nur noch $0,2\,\mathrm{l}$.

(a) Wie viel $l$ waren bei Infusionsbeginn in der Flasche?

(b) Wann war die Infusionsflasche leer?

*Lösung:* linearer Prozess!!!

(a) 1 Liter

(b) 150 min nach Infusionsbeginn

38. **Zahlenrätsel**

(a) Löse das Zahlenrätsel und kommentiere deinen Lösungsweg ausführlich:
Für welche Zahl ist das Produkt aus der um 6 verkleinerten Zahl und dem dreifachen der ursprünglichen Zahl am kleinsten?

(b) Gib ein selbst ausgedachtes Zahlenrätsel dieser Art an und löse es.

*Lösung:* Für die Zahl 3

39. **Bakterienvermehrung**

Auf einem Nährboden vermehrt sich eine Anzahl von Bakterien in einem Tag um einen bestimmten Prozentsatz. Durch Erhöhung der Temperatur vergrößert sich dieser Prozentsatz am folgenden Tag um 5%. Insgesamt hat sich die Anzahl in beiden Tagen um die Hälfte erhöht. Wie groß war das ursprüngliche Wachstum?

40. **Gehgeschwindigkeit**

Ein Rollband, wie man es z.B. auf dem Weg vom Bahnhof zur EXPO sehen konnte, sei 100 m lang und bewege sich mit einem Meter pro Sekunde.
Jemand geht innerhalb von 2 Minuten gleichmäßig einmal hin und einmal zurück. Bestimme die reine Gehgeschwindigkeit.
Wie groß wäre die Gehgeschwindigkeit, wenn man zwei Stunden (oder zwei Tage) bräuchte?

*Lösung:*

- Gesucht: Gehgeschwindigkeit $v$ in $\frac{m}{s}$.
- Wir wissen: $t = \frac{s}{v}$, wenn $s$ die Strecke und $t$ die Zeit ist.
- Die Gesamtzeit $t$ setzt sich zusammen aus der Zeit $t_1$ für den Hinweg und der Zeit $t_2$ für den Rückweg, dies ergibt den Ansatz $t = t_1 + t_2 = \frac{100\,\mathrm{m}}{v+1\frac{m}{s}} + \frac{100\,\mathrm{m}}{v-1\frac{m}{s}} = 120\,\mathrm{s}$
- Die Lösungen sind gerundet $v_1 = 2{,}1\frac{m}{s}$ und $v_2 = -0{,}5\frac{m}{s}$; die positive Lösung entspricht $7{,}7\frac{km}{h}$ was für einen Fußgänger schon recht flott ist.
- Interessant und direkt einleuchtend ist, dass die Gehgeschwindigkeit nicht unter $1\frac{m}{s}$ (der Geschwindigkeit des Bandes) fallen darf, damit man beim Rückweg nicht „hinten runter fällt", dies spiegelt sich in den Lösungen für verschiedene Zeiten wieder, die für wachsende Zeit gegen $1\frac{m}{s}$ konvergieren.
- Wer findet sinnvolle Interpretationen für die negative Lösung?

41. **Bremsweg**

Welchen Weg braucht ein Auto, um zu bremsen? Das hängt einmal von der Geschwindigkeit ab, dann von der Straßenbeschaffenheit, Reifen und einigem mehr. Außerdem muss der Fahrer erst einmal reagieren und auf die Bremse treten, bis der Bremsweg beginnen kann. Zum Schätzen des Bremsweges gibt es eine „Daumenregel", ein Rezept, das man manchmal in der Fahrschule hört: Man teilt die Tachoanzeige durch 10 und multipliziert das Ergebnis mit sich selbst. Das Ergebnis ist der Bremsweg in Metern.

(a) Welche Funktion beschreibt die „Daumenregel“? Zeichne den Graphen.

(b) Mannis Vater sagt: „Wenn ich jetzt 10km pro Stunde schneller fahre, erhöht sich der Bremsweg gerade auch um 10 Meter.“ Beurteile diese Aussage.

(c) Kannst du eine allgemeinere Aussage machen, die trotzdem wahr ist?

42. **Gleichungen bestimmen**

Von drei verschiedenen quadratischen Gleichungen der Form $x^2 + px + q$ ist jeweils eine besondere Eigenschaft bekannt:

(a) Gleichung 1: Die Lösungen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.

(b) Gleichung 2: Eine Lösung ist der Kehrwert der anderen.

(c) Gleichung 3: Genau eine der beiden Lösungen ist 0.

Mache jeweils begründete Aussagen über die Koeffizienten $p$ und $q$.

*Lösung:* Hier benutzt: Satz von Vieta
Sind $x_1$ und $x_2$ die Lösungen einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + px + q$, dann gilt: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

(a) Die Lösungen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen: $x_2 = -x_1$
Also: $x_1 - x_1 = 0 = -p$ und $x_1 \cdot (-x_1) = x_1^2 = q$
Also: $p = 0$ und $q < 0$. Für $q$ gilt weiterhin oben stehende Beziehung.

(b) Eine Lösung ist der Kehrwert der anderen: $x_2 = \frac{1}{x_1}$
Also: $x_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1^2+1}{x_1} = -p \Leftrightarrow (x_1 + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - 1$ und $x_1 \cdot \frac{1}{x_1} = 1 = q$
Also: $q = 1$ und $|p| > 2$. Für $p$ gilt weiterhin oben stehende Beziehung.

(c) Genau eine der beiden Lösungen ist 0: Sei o.B.d.A. $x_1 = 0$
Also: $0 + x_2 = -p$ und $0 \cdot x_2 = q$
Also: $q = 0$ und $p \neq 0$, denn sonst gibt es keine zweite Lösung. Für $p$ gilt weiterhin oben stehende Beziehung.

43. **Multiple-Choice-Test zu quadratischen Gleichungen und Funktionen**

Kreuze alle richtigen Aussagen an. Je Teilaufgabe können keine bis alle Aussagen richtig sein.

(a) Eine Gleichung der Form $x^2 = e$ hat

i. keine Lösung für $e < 0$
ii. keine Lösung für $e = 0$
iii. zwei Lösungen für $e > 0$
iv. eine einzige Lösung für $e \neq 0$
v. mindestens eine Lösung
vi. nie die Lösung 0

(b) Der Graph der Funktion $f$ mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 4x - 1$

i. ist nach oben geöffnet
ii. geht durch den Ursprung
iii. schneidet die erste Achse zwei Mal
iv. ist symmetrisch zur 2. Achse
v. hat seinen Scheitel bei $(11|-6)$
vi. hat ein Maximum

(c) Der Graph der Funktion $f$ mit $f(x) = (x-2)^2 - 3$
i. ist eine verschobene Normalparabel
ii. hat seinen Scheitel bei $(2|-3)$
iii. geht durch den Punkt $(-10|-15)$
iv. geht nicht durch den Ursprung
v. ist identisch mit $g(x) = x^2 + 4x - 1$
vi. hat kein Maximum

(d) Die Nullstellen jeder quadratischen Funktion mit zwei Nullstellen
i. sind symmetrisch zur ersten Achse
ii. sind symmetrisch zur zweiten Achse
iii. liegen vom Scheitelpunkt gleich weit entfernt
iv. lassen sich durch zwei Bruchzahlen angeben
v. lassen sich durch zwei reelle Zahlen angeben

(e) Die verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(-2|1)$
i. hat den Funktionsterm $(x-2)^2 - 1$
ii. hat den Funktionsterm $(x+2)^2 - 1$
iii. hat den Funktionsterm $(x+2)^2 + 1$
iv. hat den Funktionsterm $x^2 + 4x + 5$
v. hat den Funktionsterm $-x^2 + x + 5 + 3x + 2x^2$
vi. hat den Funktionsterm $2x^2 + 8x + 10$

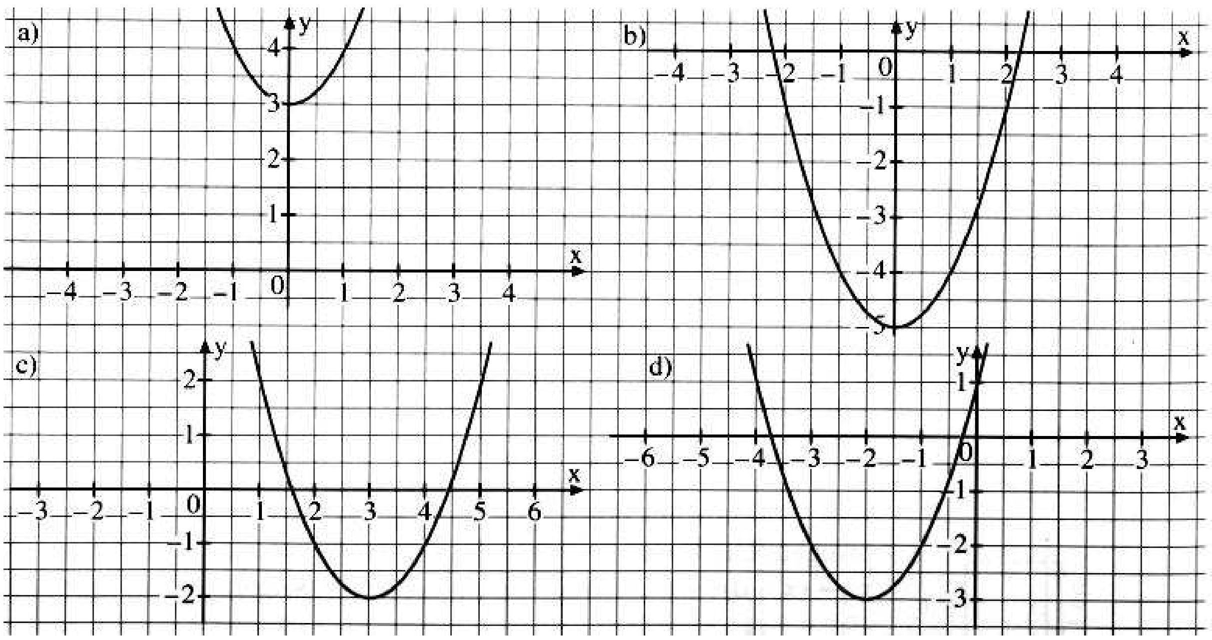
(f) Der Scheitel einer verschobenen Normalparabel liegt auf der Parallelen zur $y$-Achse, die durch den Punkt $P(3|0)$ geht. Der Punkt $Q(7|18)$ liegt auch auf dieser Parabel. Welche der unten angegebenen Punkte liegen noch auf dieser Parabel?
i. $A(2|3)$
ii. $B(3|2)$
iii. $C(4|3)$
iv. $D(7|7)$
v. $F(-1|18)$
vi. $G(0|0)$

(g) Für jede quadratische Funktion $f$ mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ und $a \neq 0$ gilt
i. ihr Graph ist nach unten geöffnet für alle $a < 1$
ii. ihr Graph ist nach oben geöffnet für alle $a > 1$

iii. ihr Graph ist eine Parabel
iv. sie hat genau einen Schnittpunkt mit der 2. Achse
v. ihre Symmetrieachse ist eine Parallele zur 1. Achse
vi. sie schneidet die 2. Achse bei $c$

(h) Welcher Funktionsterm gehört *nicht* zu einem der untenstehenden Graphen

i. $x^2 - 5$
ii. $(x+2)^2 - 3$
iii. $x^2 + 3$
iv. $x^2 - 6x + 7$
v. $x^2 - 5$
vi. $(x-3)^2 - 2$
vii. $x^2 + 4x + 1$




44. **Quadratische Ergänzung**

Löse nacheinander die folgenden Gleichungen:

(a) $x^2 = 20,25$
(b) $x^2 - 729 = 0$
(c) $52 - 13x^2 = 0$
(d) $5(x+3)^2 + (x-15)^2 = 996$
(e) $12(x-7)^2 = 600 - 168x$
(f) $36 = (x-8)^2$
(g) $16x = x^2 + 28$

(h) $14x + x^2 = 15$

Kannst du daraus eine Strategie ableiten, wie man allgemein solche Gleichungen lösen kann?

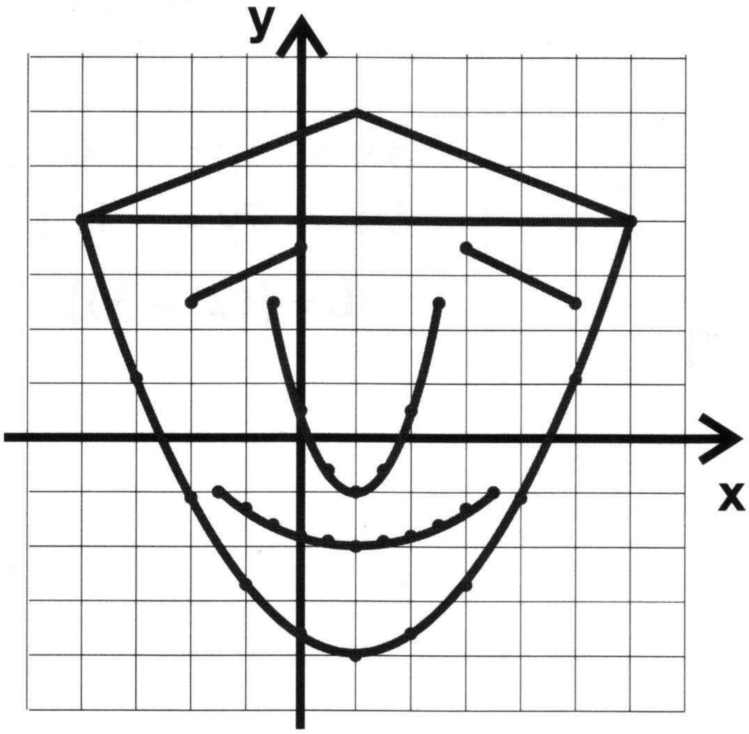
Quelle: Herget/Jahnke/Kroll: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sek. I, Cornelsen (2001)

45. **Mit Graphen zeichnen**

Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen im angegebenen Definitionsbereich:

| | |
|---|---|
| $f_1(x) = 4$ | $-4 \leq x \leq 6$ |
| $f_2(x) = 6 - \frac{2}{5}\lvert x-1\rvert$ | $-4 \leq x \leq 6$ |
| $f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 5$ | $3 \leq x \leq 5$ |
| $f_4(x) = \frac{1}{2}x + 3,5$ | $-3 \leq x \leq -1$ |
| $f_5(x) = \frac{1}{25}(4x^2 - 8x - 6)$ | $-1,5 \leq x \leq 3,5$ |
| $f_6(x) = \frac{1}{25}(8x^2 - 6x - 92)$ | $-4 \leq x \leq 6$ |
| $f_7(x) = \frac{1}{9}(14x^2 - 28x + 5)$ | $-0,5 \leq x \leq 2,5$ |

*Lösung:*




46. Spritverbrauch

Seit kurzem fährt Andrea täglich mit ihrem Motorrad „Blitz" zur Schule. Von einem Freund hat sie erfahren, dass der Treibstoffverbrauch abhängig ist von der gefahrenen Geschwindigkeit und dass sich der Treibstoffverbrauch für ihr Motorrad im Bereich von 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ bis 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nach der Formel $y = 0{,}0002\,x^2 + 0{,}009\,x + 3{,}4$ errechnen lässt.

a) Zeichne einen Graphen zum Ablesen des Treibstoffverbrauchs zwischen diesen Geschwindigkeiten.

b) Ihr Schulweg beträgt 15,2 km. Der Tank des Motorrades fasst ca. 7 $\ell$. Wie viele Tage kommt sie mit einer Tankfüllung aus, wenn sie mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt und das Motorrad nur für Hin- und Rückfahrten zur Schule und nach Hause nutzt?

*Lösung:* zu b): knapp 5 Tage

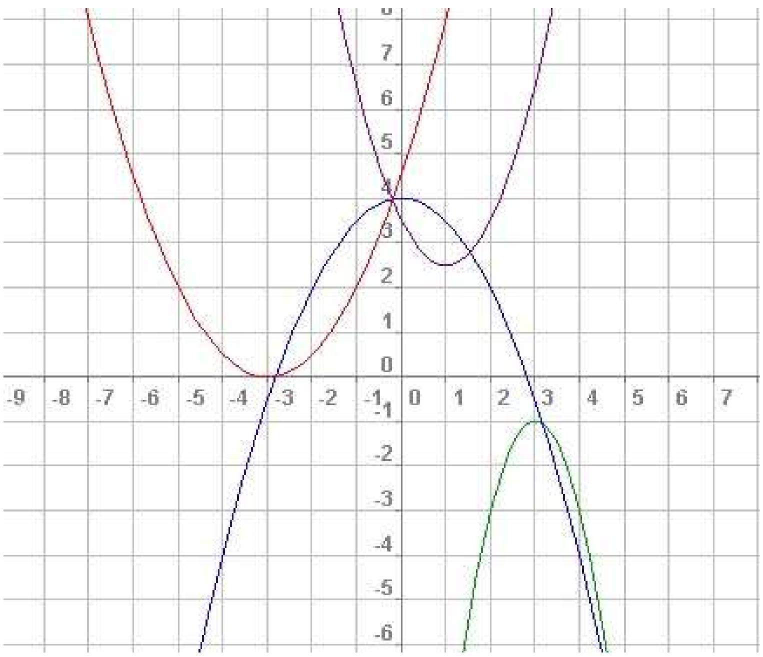
47. Quadratische Gleichungen
Bestimme die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

a) $(x+7)\,(2\,x-4)-20=(x-3)^2$

b) $18+8\,(x-3)-2\,x\,(x-1)=2\,x$

*Lösung:* a) $L=\{3,-19\}$
b) $L=\{3,1\}$

48. Quadratische Funktionen




Es sind Funktionsgleichungen und Graphen quadratischer Funktionen gegeben. Welcher Graph gehört zu welcher Funktionsgleichung?

a) $y=(x-1)^2+2{,}5$

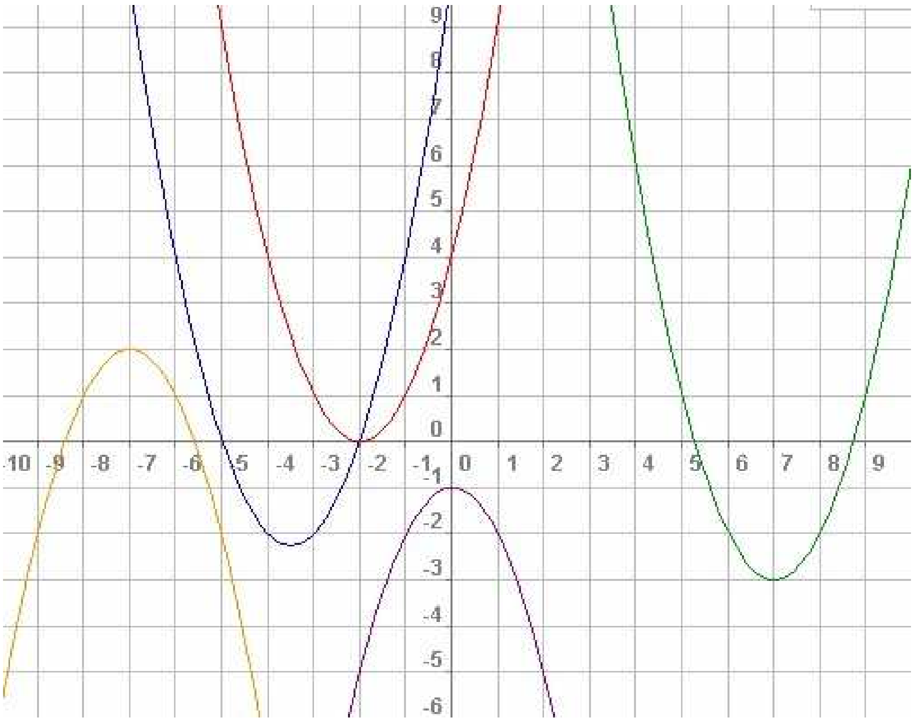
b) $y=-0{,}5\,x^2+4$

c) $y=-2\,(x+3)^2+1$

d) $y = 0{,}5\,(x+3)^2$

*Lösung:* a) lila
b) blau
c) grün
d) rot

49. Quadratische Funktionen




a) Bestimme aus der Zeichnung die Koordinaten der Scheitelpunkte.

b) Gib die Funktionsgleichungen der verschobenen Normalparabeln an.

*Lösung:*

| | | |
|---|---|---|
| blau: | $\mathrm{S}\,(-3{,}5\vert-2{,}25)$ | $y = (x+3{,}5)^2 - 2{,}25$ |
| rot: | $\mathrm{S}\,(-2\vert 0)$ | $y = (x+2)^2$ |
| grün: | $\mathrm{S}\,(7\vert-3)$ | $y = (x-7)^2 - 3$ |
| orange: | $\mathrm{S}\,(-7\vert 2)$ | $y = -(x+7)^2 + 2$ |
| lila : | $\mathrm{S}\,(0\vert-1)$ | $y = -x^2 - 1$ |