Exponential- und Logarithmusfunktionen

1. **Das Bevölkerungsgesetz von Thomas R. Malthus** (1766 – 1834)

   Im Jahre 1798 veröffentlichte der englische Philosoph Thomas R. Malthus sein „Essay on the Principles of Population“. Er vermutete, dass die Nahrungsmittelerzeugung dem rasanten Bevölkerungswachstum im Zuge der industriellen Revolution nicht würde folgen können, und prognostizierte permanente Hungersnöte, die wir heute in Entwicklungsländern z.T. beobachten können. Zur Begründung seiner Thesen entwickelte er einfache Modelle für das Wachstum von Populationen: die Bevölkerung wachse exponentiell, die zur Verfügung stehenden Nahrungsmittel jedoch nur linear.

   Mit seiner „Wachstumsfunktion“ $N = N_0 \cdot 1,0302^t$ gelang es Malthus, das Bevölkerungswachstum in den USA für die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts gut zu beschreiben:

THOMAS ROBERT MALTHUS (1766–1834)

Jahr	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860
N (in Mio.)	$N_0 = 3,9$	$5,3$	$7,2$	$9,6$	$12,9$	$17,1$	$23,2$	$31,4$

   (a) Vergleiche die Angaben aus Volkszählungen mit den „theoretischen“ Werten der Wachstumsfunktion.

   (b) Aus späteren Volkszählungen sind folgende Anzahlen bekannt:

Jahr	1880	1900	1930	1970
N (in Mio.)	$50,2$	$76,0$	$123,2$	$203,2$

   Überprüfe, ob die Wachstumsfunktion noch sinnvoll ist. Begründe!

(c) Betrachtet wird eine Bevölkerung, die zu Beginn eines bestimmten Jahres aus 1 Million Personen besteht und jährlich um 3% wächst. Zum gleichen Zeitpunkt wären Nahrungsmittel für 2 Millionen Personen verfügbar, wobei die Produktion der Nahrungsmittel für jährlich 100000 Personen gesteigert werden könnte. Untersuche diese Entwicklung (mithilfe einer Tabellenkalkulation). In welchem Jahr übersteigt die Anzahl der Personen die zur Verfügung stehenden Mittel?

Quelle: Abakus 10 (1995), Schöningh

Lösung: (a)

3,9	5,3	7,1	9,5	12,8	17,3	23,2	31,3

(b)

56,8	102,9	251,2	825,9

Gründe für die schlechte Passung: Weltkriege und Rezessionen führen zu einem veränderten Fortpflanzungsverhalten

(c) $f(t) = 1.000.000 \cdot 1,03^t$ und $g(t) = 100.000t + 2.000.000$

t	0	1	2	3	4	5	...	75	76	77	78
$f(t)$ in Mio	1	1,03	1,06	1,09	1,13	1,16		9,2	9,5	9,7	10,0
$g(t)$ in Mio	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5		9,5	9,6	9,7	9,8

Tabellarische Darstellung ist auch im Sinne einer systematischen Einschachtelung möglich. Ansatzweise Termumformung: $1.000.000 \cdot 1,03^t = 2.000.000 + 100.000t \Leftrightarrow 1,03^t - 0,1t = 2$. Hier ist der Tippaufwand geringer als oben und die Lösung schneller erreichbar: $76 < t < 77$.

2. **Exponentielle Prozesse**

Quellen für Aufg. 2-14: Elemente 11, Abakus 10, Mathematik 11 Hessen, Mathematik 12.1 GK Hessen

Meerschweinchen

Am Eröffnungstag eines Streichelzoos befanden sich 93 Meerschweinchen in einem Gehege. Ein Jahr später waren es bereits 115 Meerschweinchen.

(a) Wie viele Meerschweinchen werden es am Tag des 10-jährigen Jubiläums sein, wenn man annimmt, dass der Bestand linear wächst?

(b) Wie viele Meerschweinchen werden es an diesem Tag sein, wenn man ein exponentielles Wachstum annimmt?

(c) Lässt sich die Vermehrung der Meerschweinchen eher mit dem linearen oder dem exponentiellen Modell erklären?

Lösung: (a) 313

(b) 777

3. **Untersuchung der Bauchspeicheldrüse**

Um die Funktion der Bauchspeicheldrüse zu testen, wird ein bestimmter Farbstoff in sie eingespritzt und dessen Ausscheiden gemessen. Eine gesunde Bauchspeicheldrüse

scheidet pro Minute 4% des jeweils noch vorhandenen Farbstoffs aus.
Bei einer Untersuchung wird einem Patienten $0,2$ Gramm des Farbstoffes injiziert. Nach 30 Minuten sind noch $0,09$ Gramm des Farbstoffes in seiner Bauchspeicheldrüse vorhanden.
Funktioniert seine Bauchspeicheldrüse normal?

Lösung: Nein, da nur noch $0,06\,\mathrm{g}$ vorhanden sein dürfen.

4. **Wie hoch springt der Ball?**

   Ein Ball fällt aus $2\,\mathrm{m}$ Höhe auf eine feste Unterlage und springt nach jedem Aufprall jeweils auf 80% der Höhe zurück, aus welcher er gefallen ist.
   Stelle den Funktionsterm auf, der angibt, welche Höhe der Ball nach dem n-ten Aufprall erreicht. Wie hoch springt der Ball nach dem 5. Aufprall?

Lösung: $0,66\,\mathrm{m}$

5. **Bakterien vernichten**

   Ein Bakterienstamm kann durch Erhitzung vernichtet werden. Die Abnahme der Individuen folgt näherungsweise dem Gesetz $N(t) = N(0) \cdot 0,8^t$.
   Wie viele Bakterien lagen zu Beginn der Beobachtung vor, wenn es nach 2 Stunden noch 960 sind?
   Wann ist der Bakterienstamm abgestorben (d.h. weniger als ein Bakterium vorhanden)?

Lösung: 1500; $33\,\mathrm{h}$

6. **Bevölkerungswachstum**

   Wann wird bei Annahme gleich bleibender Wachstumsrate

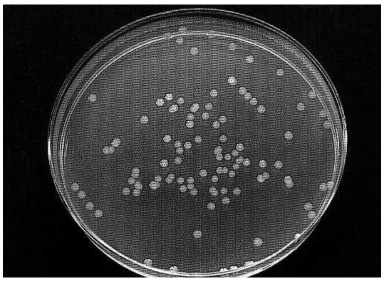
	Bevölkerung 1991	Jährliche Wachstumsrate
Afrika	631.000.000	$2,9\%$
Asien und Ozeanien	3.073.000.000	$1,9\%$
Lateinamerika	497.000.000	$2,7\%$

- die Bevölkerung von Afrika die von Asien und Ozeanien übertroffen haben?
- die Bevölkerung von Lateinamerika die von Asien und Ozeanien übertroffen haben?
- Stelle das Bevölkerungswachstum graphisch dar.

Lösung: ≈ 162 Jahre; ≈ 232 Jahre (etwas länger zum „Übertreffen“)

7. **Forschung mit Bakterien**

In einem Forschungslabor wird ein neues Medikament gegen eine Infektionskrankheit entwickelt. Dazu wird unter anderem das Wachstum einer bestimmten Bakterienart experimentell untersucht. Das dargestellte Messprotokoll gibt die Anzahl N der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit t an.



t in min	30	40	50	60	70	80	90
N in 100	17	24	34	48	68	96	136

(a) Wie viele Bakterien kann man nach 2 h, 3 h, 4 h und 5 h erwarten, wenn man die gleiche Verdopplungszeit annimmt? Stelle den Sachverhalt in einem Koordinatensystem dar.

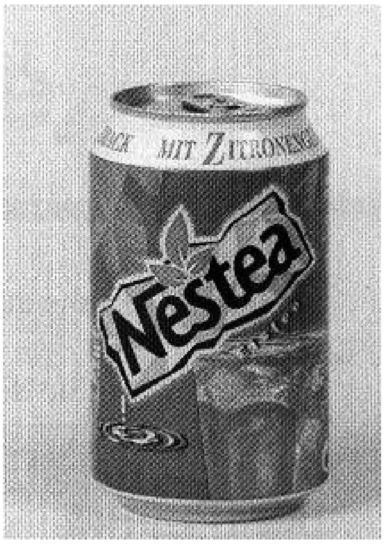
(b) Auch vor Beginn der Beobachtung verdoppelte sich die Anzahl der Bakterien jeweils in der gleichen Zeit. Wie viele Bakterien befanden sich zu Versuchsbeginn ($t = 0$) in der Glasschale? Ermittle die Anzahl der Bakterien 10 min, 30 min und 1 h vor Versuchsbeginn.

Lösung: (a) 384 / 3072 / 24576 / 196608

(b) 6 / $4,25$ / $2,125$ / $0,75$

8. **Koffein**

Abbau von Koffein im Blut
Eistee kann einen Koffeingehalt von 50 Milligramm pro $0,33$ l Dose haben. Bei einem Jugendlichen setzt die Wirkung des Koffeins nach ca. 1 Stunde ein. Der Koffeingehalt im Blut nimmt dann exponentiell mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden ab. Eine Büchse Eistee enthält 50 mg Koffein.
Wann sind nur noch $0,01$ mg Koffein im Blut vorhanden, wenn der Abbau ca. 1 Stunde nach dem Verzehr beginnt?



Lösung: Zwischen 36 und 37 h nach Zerfallsbeginn (37 bzw. 38 h nach Einnahme $\approx 37,86$)

9. **Abbau eines medizinischen Wirkstoffs**

   Aus Unachtsamkeit wird einem Patienten die $2,5$-fache Menge eines Medikamentes gespritzt. Er soll daher so lange unter medizinischer Kontrolle bleiben, bis sich im Körper nur noch die ursprünglich vorgesehene Dosis von 2 ml befindet. Es wird davon ausgegangen, dass pro Stunde etwa 4% des im Körper befindlichen Medikaments abgebaut und ausgeschieden werden.

   - Nach wie vielen Stunden ist im Körper des Patienten nur noch die Normaldosis - 2 ml - enthalten?
   - Veranschauliche den Abnahmeprozess in einem Graphen.
   - Bestimme die „biologische Halbwertzeit“ des Medikamentes sowohl am Graphen als auch rechnerisch.

Lösung: 23 h; 17 h

10. **Schlafmittel**

    Es gibt verschiedene Schlafmittel auf dem Markt, die zu einer besseren nächtlichen Schlafeinleitung führen sollen. Ihre Wirkung sollte jedoch spätestens am nächsten Morgen weitgehend abgebaut sein. Die Messung ergab, dass von 2 mg des Wirkstoffes Triazolam nach 3 Stunden $1,18$ mg noch nicht abgebaut sind.
    Was ist von diesem Schlafmittel zu halten?

Lösung: Nach ca. 13 h ist die Konzentration auf ca. 10% abgesunken. $N(t) = N(0) \cdot 0,84^t$; $a^3 = \frac{1,18}{2} \Leftrightarrow a = 0,84$
Wenn „weitgehend abgebaut“ als Restmenge 10% angesehen wird, sind ca. 13, 09 h richtig. Konsequenz: Vom Mittel ist abzuraten, da es zu lange wirkt. Was aber, wenn jemand mit größeren Prozentzahlen operiert? Ein schönes Beispiel für offeneres Herangehen, da die Voraussetzungen zum Lösen individuell variieren können und damit auch die Einschätzungen.

11. **Stadtflucht**

1990 betrug die Einwohnerzahl einer Großstadt ca. 200000; ein Jahr später waren es 2000 weniger.

(a) Gib unterschiedliche Funktionsgleichungen an, mit deren Hilfe sich der Abnahmeprozess beschreiben lässt.

(b) Wie lautet die Prognose für die Entwicklung der Einwohnerzahl in den Jahren 2000 und 2010 in den unterschiedlichen Vorhersagemodellen?

(c) In welchem Zeitraum hätte sich die Bevölkerungszahl bei den unterschiedlichen Vorhersagemodellen halbiert?

12. **Krebszellen**

Eine einzelne Krebszelle wird einer Maus injiziert. Am Tag darauf sind durch Zellteilung bereits 5 Zellen vorhanden, wiederum einen Tag später bereits 25 Zellen.

(a) Bestimme den Funktionsterm der zugehörigen Exponentialfunktion, die die Menge vorhandener Krebszellen in Abhängigkeit von der jeweiligen Zeitspanne (gemessen in Tagen) beschreibt.

(b) Ein hochwirksames Gegenmittel steht zur Verfügung. Wann muss es spätestens eingesetzt werden, um die Maus am Leben zu erhalten?
Hinweis: Man nimmt an, dass 1 Mio. Krebszellen tödlich sind. Berechne den Zeitpunkt für den Einsatz des Gegenmittels auf 2 Dezimalen genau.

(c) Das eben erwähnte Gegenmittel tötet 91% aller Krebszellen. Angenommen, das Mittel wurde gespritzt, als die Anzahl der Krebszellen 900000 betrug. Wann muss erneut gespritzt werden? Beachte den Hinweis zu Teil (b). Berechne den Zeitpunkt auf 1 Dezimale genau.

13. **Bierschaum**

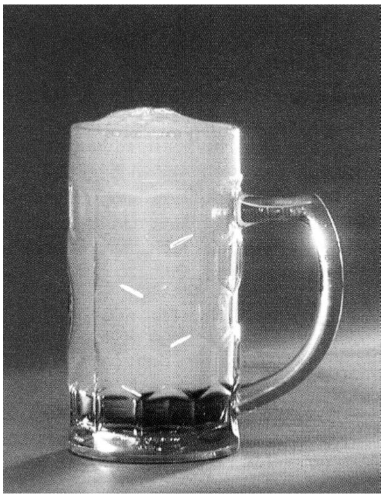
In einem zylindrischen Gefäß wird der Zerfall von Bierschaum untersucht. Die Höhe der Schaumsäule verringert sich alle 15 Sekunden um 9%.

(a) Um wie viel Prozent verringert sich die Hohe der Schaumsäule in 1 Minute?

(b) Zu Beobachtungsbeginn beträgt die Schaumhöhe 10 cm. Bestimme den Funktionsterm der zugehörigen Exponentialfunktion, die die Schaumhöhe (gemessen in *cm*) in Abhängigkeit von der jeweiligen Zeitspanne (gemessen in Minuten!) beschreibt. Runde dabei auf 4 Dezimalen.

(c) Zeichne den Graphen aus Teil (b) im Bereich $[0; 8]$.

(d) Man spricht von „sehr guter Bierschaumhaltbarkeit“, wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls mehr als 2 Minuten beträgt. Beschreibe, wie man am Graphen (!) überprüfen kann, ob im vorliegenden Fall sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vorliegt. Liegt sie vor?



14. **Wertverlust eines Pkw**

Jedermann weiß, dass der Wertverlust eines Neuwagens im ersten Jahr am größten ist und in den Folgejahren zunehmend geringer wird.

(a) Der Autohandel geht (bei einem bestimmten Kfz-Typ und einer durchschnittlichen Fahrleistung) davon aus, dass der jährliche Wertverlust 15% des letztjährigen Werts beträgt. Bestimme die Funktionsgleichung, die den jeweils noch vorhandenen Restwert (gemessen in €) eines 34000 € teuren Neuwagens in Abhängigkeit von der jeweiligen Zeitspanne (gemessen in Jahren) beschreibt.

(b) Wie viel €ist das in Teil (a) beschriebene Auto nach 10 Jahren noch wert? Runde das Ergebnis auf volle €.

(c) Nach wie vielen Jahren ist das in Teil (a) beschriebene Auto noch die Hälfte seines Neupreises wert? Runde das Ergebnis auf 1 Dezimale.

(d) Ein Händler kalkuliert nach der Faustregel, dass sich der Wert eines Autos in 3 Jahren halbiert. Von welcher prozentualen jährlichen Wertminderung geht er aus?

(e) Nach wie vielen Jahren hätte ein 40000 € teures Auto nach der Faustregel aus Teil (d) nur noch Schrottwert (= 700 €)? Runde auf eine Dezimale.

15. **Das Superballexperiment**

Man lässt einen Superball (Flummi) aus 2 m Höhe senkrecht nach unten fallen. Er prallt auf den Boden und steigt ein erstes Mal nach oben, wobei er eine Sprunghöhe erreicht, die knapp unter 2 m liegt. Er beginnt erneut zu fallen, prallt ein zweites Mal auf und steigt ein zweites Mal nach oben usw. Die Sprunghöhe wird von Mal zu Mal kleiner. Mit einem senkrecht gehaltenen Zollstock lässt sie sich relativ gut messen.

Überprüfe in einem Versuch, ob ein exponentieller Prozess vorliegt.

Quelle: Mathematik 11 Hessen

16. **Bevölkerungswachstum in unterschiedlichen Ländern**

Die Tabelle enthält die Bevölkerungszahlen (in Tausend) von 1990 und 1999 für verschiedene Länder und eine Prognose für das Jahr 2020.
Nimm an, dass zwischen 1990 und 1999 exponentielles Wachstum zugrunde liegt.

Jahr	1990	1999	2020
Brasilien	149042	161191	197950
Deutschland	79479	81378	73523
Indien	846191	931044	1328565
Mexiko	84486	91290	137717
USA	249975	260479	329337

(a) Welches Land hat den größten (den kleinsten) prozentualen Zuwachs pro Jahr?

(b) Überprüfe, ob bei der Prognose für das Jahr 2020 in den Ländern das exponentielle Wachstum beibehalten wurde.

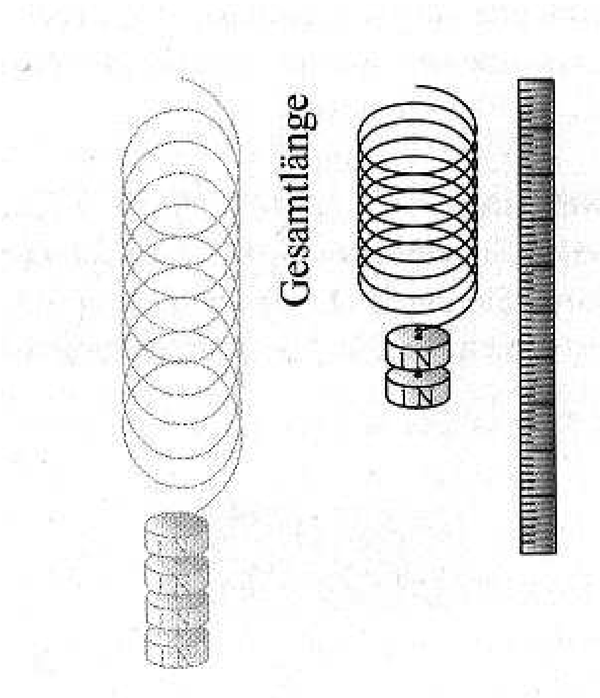
Quelle: Elemente 11

Lösung: (a) Brasilien $0,87\%$; Deutschland $0,26\%$; Indien $1,07\%$; Mexiko $0,86\%$; USA $0,46\%$

(b) Deutschland nein, sogar Abnahme; Brasilien 193530 (ja); Indien 1163610 (?); Mexiko 109373 (?); USA 286737 (?). Tabellenwerte liegen über dem errechneten Wert; das Wachstum wird sich also beschleunigen, aber ob exponentiell, das lässt sich eigentlich nicht beantworten. Prozentualer Zuwachs pro Jahr ab 1999: Indien $1,71\%$; Mexiko $1,71\%$; USA $1,98\%$.

17. **Ein Federexperiment**

Eine (feste) Schraubfeder wird durch Anhängen von Gewichtstücken von je 1 N ausgedehnt. Nach dem Anhängen jedes Gewichtstücks wird die Gesamtlänge der Feder gemessen. Führe das Experiment für 10 Gewichtstücke durch.



- Stelle die gesammelten Daten in einem Koordinatensystem graphisch dar.
- Liegt eine exponentielle Zunahme vor?

Quelle: Mathematik 11 Hessen

18. **Erdbevölkerung**

Es gibt optimistische Schätzungen, die davon ausgehen, dass die Erde mehr als 100 Milliarden Menschen ernähren kann. Die meisten Schätzungen gehen aber davon aus, dass die Obergrenze zwischen 8 und 12 Milliarden liegt.
1999 betrug die Erdbevölkerung 6,0 Mrd. Bewohner. Die beiden Tabellen geben einige Wachstumsraten aus dem Jahre 1998 an.

Länder mit der höchsten jährlichen Bevölkerungszunahme in Prozent		
1.	Gaza	4,6
2.	Komoren	3,6
3.	Libyen	3,6
4.	Jemen	3,5
5.	Togo	3,5
6.	Benin	3,4
7.	Niger	3,4
8.	Oman	3,4
9.	Zaire	3,4
10.	Madagaskar	3,3

Länder mit der niedrigsten jährlichen Bevölkerungszunahme in Prozent		
10.	Deutschland	−0,1
9.	Rumänien	−0,2
8.	Tschechien	−0,2
7.	Weißrussland	−0,4
6.	Ungarn	−0,4
5.	Russland	−0,5
4.	Estland	−0,5
3.	Bulgarien	−0,5
2.	Ukraine	−0,6
1.	Lettland	−0,7

- Berechne die Verdopplungszeit der Bevölkerung von Gaza.
- Wann hat sich die Bevölkerung Lettlands halbiert? Wann ist die Bevölkerungszahl Lettlands auf 10% gegenüber dem heutigen Stand geschrumpft?
- Berechne die Bevölkerungszahl von Deutschland für die Jahre 2010, 2030 und 2050.

Quelle: Analysis Grundkurs Gesamtband (2000), Klett

Lösung: Gaza: $\approx 15,41$ Jahre; Lettland: $\approx 98,67$ Jahre bzw. $\approx 327,79$ Jahre; BRD: $N_0 \cdot 0,999^t$

19. **Alkoholkontrolle**

Bei einer Verkehrskontrolle wird bei einem Verkehrsteilnehmer ein Alkoholgehalt im Blut von $0,8\,‰$ festgestellt. Nach einer Stunde ergibt die Blutanalyse einen Alkoholgehalt von $0,6\,‰$. Es ist eine Funktion gesucht, die den Abbau des Alkohols im Blut beschreibt.

(a) Berechne den Blutalkoholgehalt unter der Annahme, dass der Körper in jeder Stunde gleich viel Alkohol abbaut.

(b) Gehe davon aus, dass die stündliche Abbaumenge proportional zum vorhandenen Bestand ist.

(c) Vergleiche die beiden Ansätze und stelle die Entwicklung graphisch dar.

(d) Welche Schlüsse kann man auf den Alkoholgehalt im Blut des Verkehrsteilnehmers eine Stunde (zwei Stunden) vor der Kontrolle ziehen?

Lösung: Wir setzen $t = 0$ als den Zeitpunkt der Kontrolle und gehen davon aus, dass in der Abbauphase kein Alkohol konsumiert wurde.

(a) $g(t) = -0,2t + 0,8$

(b) Nach Voraussetzung gilt: $f(t)-f(t+1) = c\cdot f(t)$. Also gilt auch: $f(t+1) = (1-c)\cdot f(t)$ und allgemeiner $f(t) = (1-c)^t \cdot f(0)$. Demnach hier: $f(t) = (\frac{3}{4})^t \cdot 0,8$.

(c) Nach allem was wir über den Abbau von Blutalkohol wissen, ist ein lineares Modell angemessener. Entscheidungskriterium hier in erster Linie Fachkenntnisse.

(d) Vor einer Stunde: Pegel ca. 1 Promille in beiden Modellen.
Vor zwei Stunden: Lineares Modell: Pegel $1,2$.
Exponentielles Modell: Pegel ca. $1,4$.

20. **Wann verdoppelt sich das Geld?**

> **Geldanlage:**
> **Wann verdoppelt sich das Geld?**
> Das ist leicht auszurechnen, wie die Gesellschaft für Bankpublizität mitteilt. Dafür müssen Sie lediglich die Zahl 70 durch die Rendite der Kapitalanlage teilen. Das bedeutet beispielsweise, bei einem Zinssatz von sieben Prozent sind aus angelegten 20.000 Euro in 10 Jahren bereits 40.000 Euro geworden (70 : 7 = 10).
> Beträgt die Rendite fünf Prozent, dauert es entsprechend länger, nämlich 14 Jahre, bis sich das Kapital verdoppelt.
> Voraussetzung, damit die Rechnung aufgeht, ist allerdings, dass Sie die fälligen Zinsen zu gleichen Bedingungen regelmäßig wieder anlegen und so den Zinseszins-Effekt nutzen.

Was meinst du dazu?

Quelle: Herget/Scholz: Die etwas andere Aufgabe aus der Zeitung

Lösung: Diese „Faustformel“ liefert in dem „üblichen“ Zinsbereich sehr brauchbare Werte: Die Verdopplungszeit berechnet man mit: $2K_0 = K_0(1 + \frac{p}{100})^d$ umgeformt ergibt sich: $\lg 2 = d \cdot \lg(1 + \frac{p}{100})$, d.h. $d \approx \frac{0{,}3}{\lg(1+\frac{p}{100})}$.
Hintergrund-Info für Lehrer: Es gilt: $\ln 2 = d \cdot \ln(1 + \frac{p}{100})$, wegen $\ln(1 + x) \approx x$ (für kleine $|x|$) folgt: $d \cdot \frac{p}{100} \approx \ln 2 \approx 0{,}6931 \approx 0{,}7$, d.h. $d \cdot p \approx 70$.
Für sehr kleine p wäre also eigentlich 69 noch besser als 70 - aber 70 lässt sich natürlich leichter merken, und für die „üblichen“ Zinssätze liefert die 70 tatsächlich bessere Werte.

$p\%$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15
t exakt	17,7	14,2	11,9	10,2	9,0	8,0	7,3	6,6	6,1	5,7	5,0
t Artikel	17,5	14	11,7	10	8,75	7,8	7	6,4	5,8	5,4	4,7

21. **Schuldentilgung**

Herr Huber möchte sich von seiner Bank 10000 Euro leihen.
Vorschlag A: Das Geld wird mit 8% verzinst, er muss nach 10 Jahren die Schulden mit Zinseszinsen zurückzahlen.
Vorschlag B: Das Geld wird mit 7% verzinst. Er muss aber jedes Jahr einen Abtrag von 1000 Euro vornehmen.
Für welchen Rückzahlungsmodus würdest du dich entscheiden?

Lösung: **Plan A:** $K_{10} = 10000 \cdot (1 + \frac{8}{100})^{10} = 21589{,}25$
Plan B: Man erkennt, dass zunächst fast nur Zinsen und kaum Tilgung geleistet werden. Es müssen nur $10000\,€ + 5855{,}07\,€ = 15855{,}07\,€$ gezahlt werden.

Jahre	Abtrag	Restschuld
1	1000	$9700,00$
2	1000	$9379,00$
3	1000	$9035,53$
4	1000	$8668,02$
5	1000	$8274,78$
6	1000	$7854,01$
7	1000	$7403,79$
8	1000	$6922,06$
9	1000	$6406,60$
10	1000	$5855,07$

Jahre	Einzahlung	Kapital 4%	Kapital 5%
1	0	$0,00$	0
2	1000	$1040,00$	$1050,00$
3	1000	$2121,60$	$2152,50$
4	1000	$3246,46$	$3310,13$
5	1000	$4416,32$	$4525,63$
6	1000	$5632,98$	$5801,91$
7	1000	$6898,29$	$7142,01$
8	1000	$8214,23$	$8549,11$
9	1000	$9582,80$	$10026,56$
10	1000	$11006,11$	$11577,89$

Zusatz: Was passiert, wenn man die 1000 Euro jährlich spart, die man bei **Plan A** zunächst nicht zu zahlen hat?
In den 10 Jahren könnte Herr Huber nur ca. 1500 Euro an Zinsen erwirtschaften. **Plan A** bleibt trotzdem teurer.

22. **Hypothekenzinsen**
In der HNA vom 5.9.01 ist die nachstehende Übersicht (nächste Seite) über die aktuellen Hypothekenzinsen erschienen. Diese Zinsen muss man beim Bau oder Kauf einer Immobilie an die Bank zahlen, wenn man sich das nötige Bargeld leihen muss. Man zahlt dann jedes Jahr einen konstanten Betrag zurück, der sich aus dem Tilgungsteil (in der Regel 1% der Hypothek) und dem Zinsanteil des ersten Jahres (siehe Übersicht) zusammensetzt.
Es werden 100000 Euro benötigt.
Wie könnte ein Tilgungsplan aussehen?
Ist die Abnahme der Schuld exponentiell?

Lösung: Es handelt sich nicht um eine exponentielle Abnahme, sondern um eine Überlagerung eines exponentiellen Prozesses mit einem linearen Anteil.