Berechnungen am Kreis

1. Der Minutenzeiger einer Kirchturmuhr ist $0,95\,\text{m}$ und der Stundenzeiger $0,45\,\text{m}$ lang.

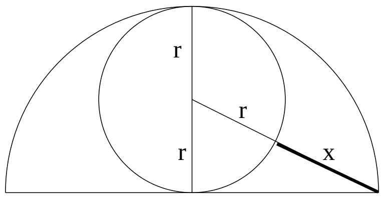
   (a) Berechne den Weg, den die Spitze des Minutenzeigers in 3 Stunden zurücklegt.

   (b) Berechne den Weg, den die Spitze des Stundenzeigers in der selben Zeit zurücklegt.

Lösung: (a) ca. $17,91\,\text{m}$

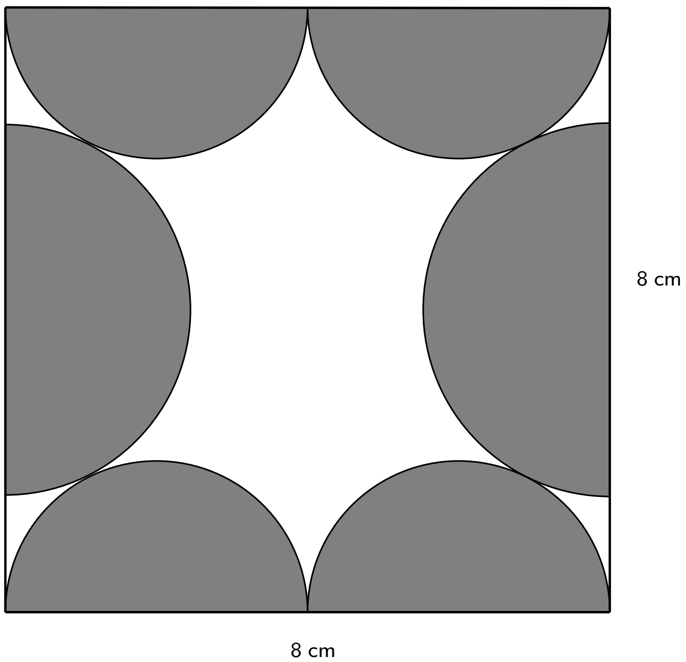
(b) ca. $0,71\,\text{m}$

2. Berechne auf Grund der Skizze die Länge der Strecke x in Abhängigkeit vom Radius r.



Lösung: $x = 1,24\,r$

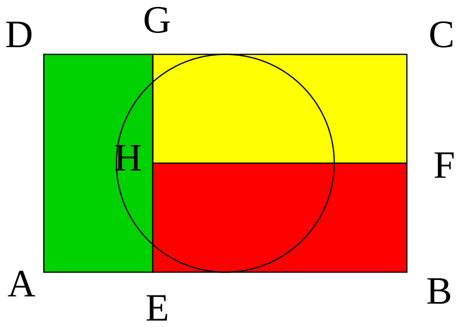
3.



Gegeben ist das Quadrat mit 8 cm Seitenlänge und die sechs Halbkreise. Berechne den Flächeninhalt der hellen Fläche.

Lösung: Der Flächeninhalt beträgt $44,33\,\text{cm}^2$.

4.



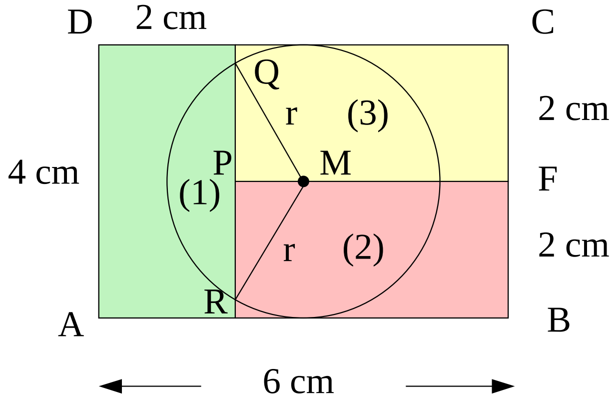
Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet. Alle drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Außerdem gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.
Zusätzlich ist noch ein Kreis eingezeichnet, dessen Mittelpunkt M der Mittelpunkt des Rechtecks $ABCD$ ist.

(a) Begründe: Es muss $\overline{AD} = 4\,\text{cm}$ gelten. Zeichne dann die obige Figur.

(b) Berechne jeweils den Anteil der drei Rechtecke im Inneren an der Kreisfläche in Prozent. Runde auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung:

(a) Weil alle Rechtecke im Inneren kongruent sind, muss $\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{AE} = 2\,\text{cm} =$ Kreisradius r gelten. $\Rightarrow$ $\overline{BC} = \overline{AD} = 4\,\text{cm}$.



(b) Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt $A(1)$ des Kreissegmentes (1): (Der Flächeninhalt des Kreises wird später mit $A_\odot$ abgekürzt.)
Wegen $\overline{PM} = 1\,\text{cm}$ und $\overline{MQ} = 2\,\text{cm}$ ist das Dreieck PMQ ein halbes gleichseitiges Dreieck. $\Rightarrow$ $\sphericalangle QMR = 120°$
Das Dreieck RMQ ist dann genauso groß wie ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von $2\,\text{cm}$.

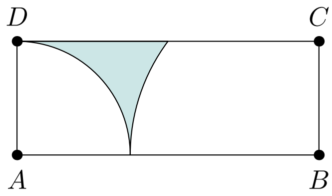
$$A(1) = \left(\frac{120°}{360°} \cdot \underset{2}{2^2\pi} - \frac{2^2}{4}\sqrt{3}\right)\,\text{cm}^2 \approx 2,46\,\text{cm}^2$$

$A_\odot = 2^2\pi\,\text{cm}^2 \approx 12,57\,\text{cm}^2$

$$\frac{A(1)}{A_\odot} \approx \frac{2,46\,\text{cm}^2}{12,57\,\text{cm}^2} \approx 19,57\%$$

Und weiter gilt: $\frac{A(2)}{A_\odot} = \frac{A(3)}{A_\odot} \approx (100\% - 19,57\%) : 2 \approx 40,22\%$

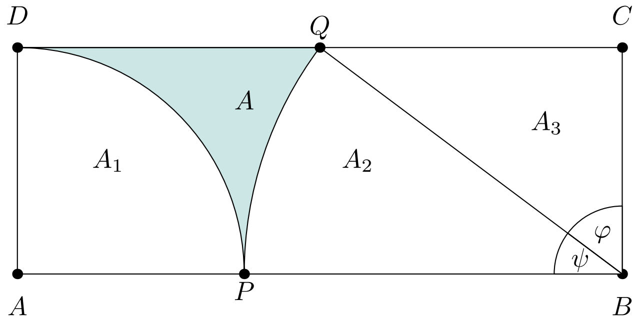
5. Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 3\,\text{cm}$. Die Punkte A und B sind Kreismittelpunkte.



   (a) Zeichne die skizzierte Figur gemäß den obigen Angaben.

   (b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

Lösung: (a) Zeichne zuerst den Kreisbogen um den Punkt A mit dem Radius 3 cm. Dadurch erhältst du den Punkt P.
Zeichne dann den zweiten Kreisbogen um den Punkt B mit dem Radius $\overline{BP}$. So erhältst du den Punkt Q.

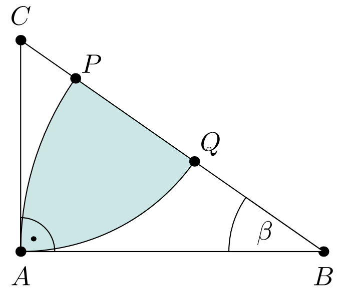


(b) Neben dem Kreissektor APD mit dem Flächeninhalt A_1 erzeugt die Hilfslinie $[BQ]$ den Kreissektor BQP mit dem Flächeninhalt A_2 und dazu das Dreieck QBC mit dem Flächeninhalt A_3.
Es muss gelten: $\overline{AP} = 3\,\text{cm}$ und damit $\overline{BP} = \overline{BQ} = 5\,\text{cm}$.
$A_1 = \dfrac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 7,07\,\text{cm}^2$

$\Delta BCQ : \cos\varphi = \dfrac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 53,13^\circ \quad \Rightarrow \quad \psi \approx 36,87^\circ$
$A_2 = \dfrac{36,87^\circ}{360^\circ} \cdot 5^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 8,04\,\text{cm}^2$

Z.B. PYTHAGORAS im ΔQBC: $\overline{QC}^{\,2} + 3^2\,\text{cm}^2 = 5^2\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \overline{QC} = 4\,\text{cm}$.
$A_3 = \dfrac{1}{2} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 6\,\text{cm}^2$
Das Rechteck $ABCD$ hat einen Flächeninhalt von $24\,\text{cm}^2$.
Für den gesuchten Flächeninhalt A gilt dann: $A = A_{ABCD} - A_1 - A_2 - A_3$
$A \approx (24 - 7,07 - 8,04 - 6)\,\text{cm}^2 \quad A \approx 2,89\,\text{cm}^2$.

6.



Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 35°$. Die Punkte B und C sind Kreismittelpunkte.

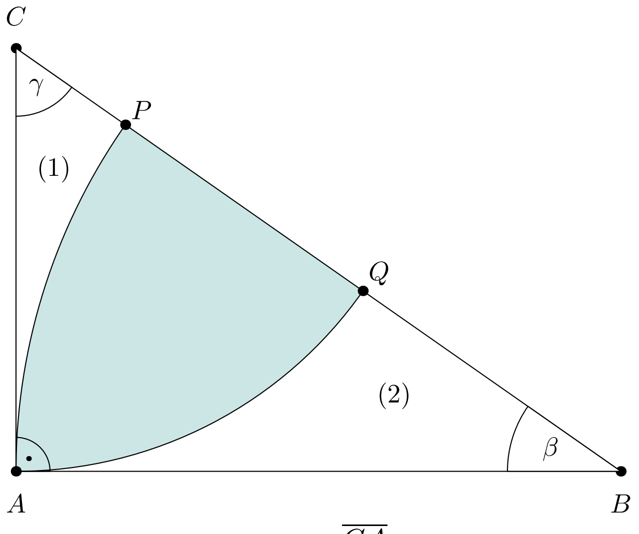
(a) Zeichne die Figur gemäß den obigen Angaben.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

Lösung: (a)

- Zeichne die Strecke $[AB]$.
- Trage den rechten Winkel in A, und den Winkel mit dem Maß $35°$ in B an.
- Der Schnittpunkt der freien Schenkel der beiden Winkel ist C.

(b)



Es gilt: $\gamma = 90° - 35° = 55°$ und $\tan 35° = \dfrac{\overline{CA}}{8\,\text{cm}}$.

$\Rightarrow \quad \overline{CA} \approx 5{,}60\,\text{cm}$.

Für den Inhalt A der grauen Fläche AQP ergibt sich:

$A_{AQP} = A_{\Delta ABC} - A_{(1)} - A_{(2)}$. (*)

Weiter gilt: $A_{(1)} = A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(35°)}$ und $A_{(2)} = A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(55°)}$

Mit (*) ergibt sich:

$A_{\Delta ABC} - \left(A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(35°)}\right) - \left(A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(55°)}\right)$

$A_{AQP} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta ABC} + A_{Sektor(35°)} - A_{\Delta ABC} + A_{Sektor(55°)}$

$A_{AQP} = A_{Sektor(35°)} + A_{Sektor(55°)} - A_{\Delta ABC}$ (**)

Hinweise:

- Natürlich kann man auch die Inhalte der Teilflächen $A_{(1)}$ und $A_{(2)}$ gleich ausrechnen und diese dann vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC subtrahieren.
- Wie könntest du die obige Gleichung (**) geometrisch deuten?

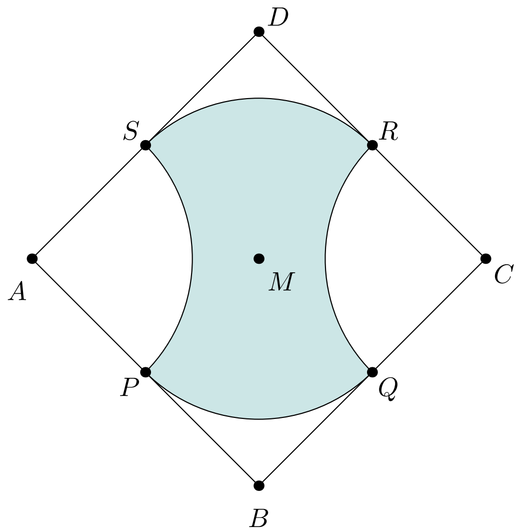
$$A_{Sektor(35^\circ)} = \frac{35^\circ}{360^\circ} \cdot 8^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 19,55\,\text{cm}^2$$

$$A_{Sektor(55^\circ)} \approx \frac{55^\circ}{360^\circ} \cdot 5,60^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 15,05\,\text{cm}^2$$

$$A_{ABC} \approx \frac{1}{2} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 5,60\,\text{cm} = 22,40\,\text{cm}^2$$

Schließlich ergibt sich: $A_{AQP} \approx (19,55 + 15,05 - 22,40)\,\text{cm}^2$
$\Rightarrow \quad A_{AQP} \approx 12,20\,\text{cm}^2$

7.



Der Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$ ist der Punkt M. Die Punkte P, Q, R und S sind die Mittelpunkte der jeweiligen Quadratseiten.
Die Mittelpunkte der vier Kreisbögen, welche die grau getönte Figur im Inneren des Quadrates $ABCD$ begrenzen, sind die Punkte A, C und M.

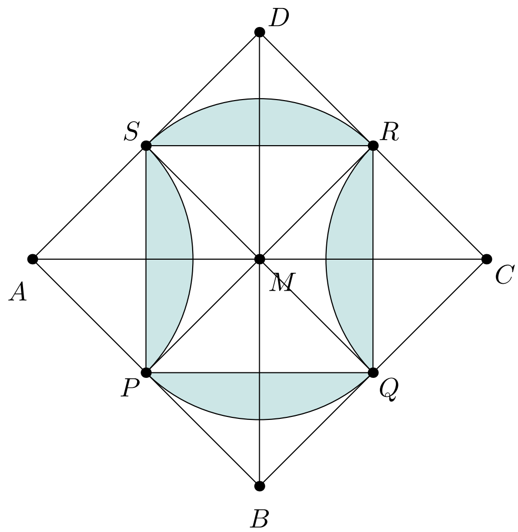
(a) Zeichne die Figur für die Diagonalenlänge $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Fritz behauptet: „Der Inhalt der grauen Fläche ist halb so groß wie der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$.“
Maria meint: „Der Inhalt der grauen Fläche kleiner als die Hälfte des Quadrates. Das sieht man doch!“
Wer hat Recht? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a)

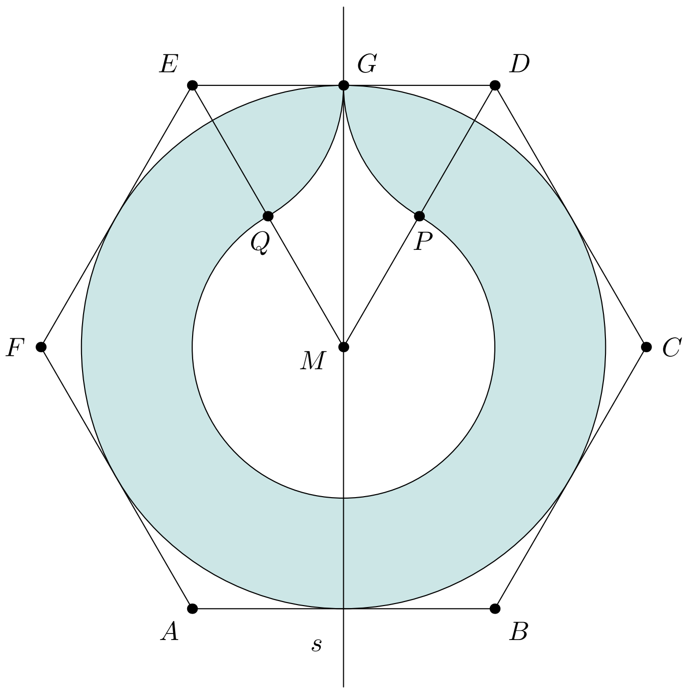
- In jedem Quadrat stehen die beiden Diagonalen aufeinander senkrecht und sie halbieren sich.
  Damit kann man das Quadrat $ABCD$ zeichnen.
- Der Punkt M erzeugt die beiden Kreisbögen oben und unten; die Punkte A und C erzeugen die beiden Kreisbögen links und rechts.

(b)



Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat. Mit Hilfe seiner Diagonalen erkennst du, dass das Quadrat $PQRS$ halb so groß wie das Quadrat $ABCD$ ist. Die vier grauen Kreissegmente sind alle kongruent, da sie von kongruenten Kreissektoren mit gleichem Radius und gleichem Öffnungswinkel (90°) stammen.
Zwei dieser Segmente wurden links und rechts aus dem Quadrat $PQRS$ herausgeschnitten, zwei wurden oben und unten an dieses Quadrat angefügt. Somit hat die grau eingefärbte Figur in der Aufgabe den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat $PQRS$; die Figur ist also halb so groß wie das Quadrat $ABCD$. Fritz hat Recht.

8. Das regelmäßige Sechseck $ABCDEF$ besitzt den Mittelpunkt M und die Symmetrieachse s.
Der Mittelpunkt des Inkreises dieses regelmäßigen Sechsecks ist M . D und E sind die Mittelpunkte der Kreisbögen, die sich in G berühren.



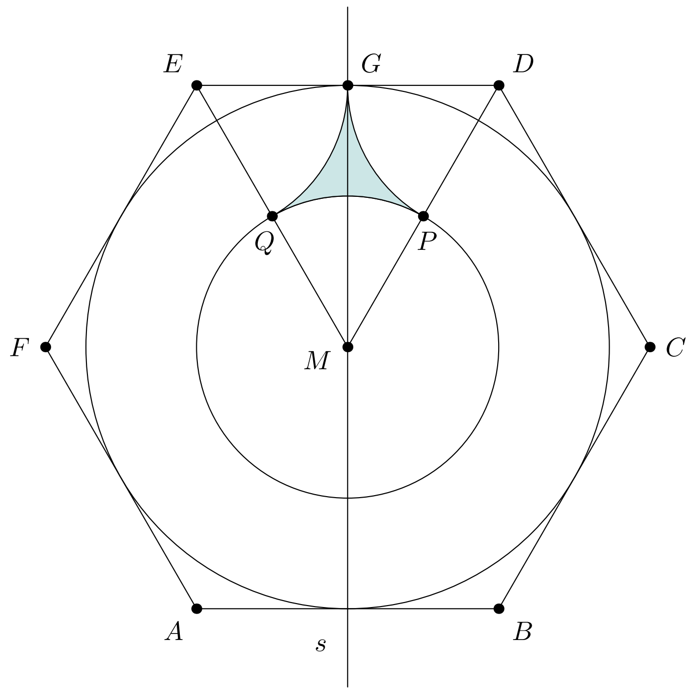
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Berechne für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ den Flächeninhalt des grau eingefärbten Ringes.

Lösung: (a) Am einfachsten erhältst du ein regelmäßiges Sechseck mit einer Seitenlänge von 4 cm, indem du auf einer Kreislinie k den Radius von 4 cm sechsmal abträgst. Damit dieses Sechseck aber mit zwei gegenüber liegenden Seiten (hier: $[ED]$ und $[AB]$) waagrecht liegt, zeichnest du erst die Symmetrieachse s ein und dann wieder durch den Punkt M eine zweite Symmetrieachse, die auf s senkrecht steht. Diese schneidet die Kreislinie k in den Punkten F und C.

Zwei weitere Kreise Radius von 4 cm um F und C schneiden die Kreislinie k in den Punkten E und A bzw. B und D.

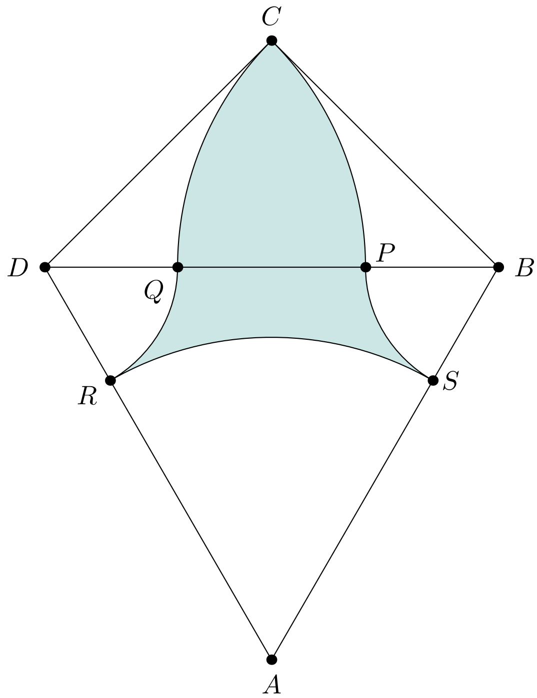
(b)



Der direkteste Weg der Flächenberechnung führt über den Kreisbogen PQ, so dass ein geschlossener Kreisring entsteht, dem lediglich noch das (grau eingefärbte) Kreisbogendreieck QPG entnommen werden muss.
Jedes regelmäßige Sechseck lässt sich in 6 kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegen.
Der große Radius R des Ringes ist so lang wie eine Höhe $[MG]$ des gleichseitigen Dreiecks MDE: $R = \frac{4}{2}\sqrt{3}\,\text{cm} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.
Der kleine Radius r des Ringes ist halb so lang wie die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks MDE: $r = 2\,\text{cm}$.
Damit ergibt sich für den Flächeninhalt A_{Ring} des geschlossenen Kreisrings:
$A_{Ring} = \left[(2\sqrt{3})^2 - 2^2 \cdot \pi\right]\ \text{cm}^2$
Der Flächeninhalt $A_{Kreisdreieck}$ des Kreisbogendreiecks QPG bleibt übrig, wenn man aus dem gleichseitigen Dreieck MDE die drei kongruenten Sektoren EQG, MPQ und DGP mit einem Mittelpunktswinkel von jeweils $60°$ entfernt:
$$A_{Kreisdreieck} = \left(\frac{4^2}{4} \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot \pi\right)\ \text{cm}^2 = \left(4\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{cm}^2$$
Damit ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt:
$$A = \left(8\pi - 4\sqrt{3} + \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{cm}^2 = \frac{17\pi - 8\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 \approx 19{,}78\,\text{cm}^2$$

Hinweis:
Eine weitere Möglichkeit besteht darin, den Flächeninhalt des offenen Kreisrings außerhalb des Dreiecks MDE zu berechnen und dann die beiden „Enden“, die im gleichseitigen Dreieck MDE liegen, anzufügen. Doch dies ist offensichtlich wesentlich mühsamer auszurechnen.

9.



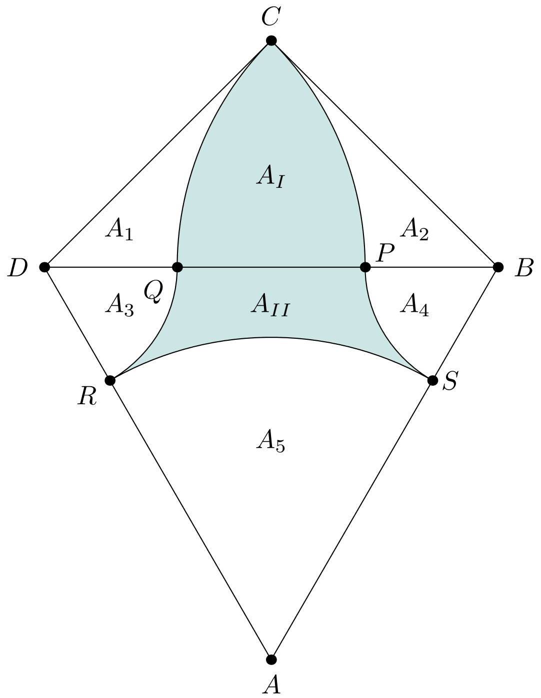
Das Viereck $ABCD$ ist aus einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck und einem gleichseitigen Dreieck zusammengefügt. Die Mittelpunkte der Kreisbögen sind die Punkte B, D und A.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{BD} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

Lösung: (a)
- Zeichne die Dreiecke DBC und ABD.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ schneidet die Seite $[BD]$ im Punkt Q und der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt D und dem Radius $\overline{DC}$ schneidet die Seite $[BD]$ im Punkt P.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt D und dem Radius $\overline{DQ}$ schneidet die Seite $[AD]$ im Punkt R und der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BP}$ schneidet die Seite $[AB]$ im Punkt S.

(b)



$A_1 = A_{\Delta DBC} - A_{Sektor BCQ} = A_2$
$A_I = A_{\Delta DBC} - (A_1 + A_2) = A_{\Delta DBC} - 2 \cdot (A_{\Delta DBC} - A_{Sektor BCQ})$
$A_I = 2 \cdot A_{Sektor BCQ} - A_{\Delta DBC}$
Wie kannst du dieses Ergebnis geometrisch deuten?
Es wird zunächst nur mit Maßzahlen gerechnet: $\overline{BC} = 3\sqrt{2}$
$A_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$; $\quad A_{Sektor BCQ} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot (3\sqrt{2})^2 \pi = 2.25\pi$

Also: $A_I = 4.5\pi - 9 \quad \Rightarrow \quad A_I = \left(\frac{9\pi}{2} - 9\right)\,\text{cm}^2 \quad (\approx 5,14\,\text{cm}^2)$
Was spielt sich nun unterhalb der Strecke $[DB]$ ab?
$\overline{DQ} = \overline{BP} = 6 - 3\sqrt{2}$
$A_3 = A_4 = \frac{60^\circ}{360^\circ}(6 - 3\sqrt{2})^2 \cdot \pi = \frac{1}{6}(36 - 36\sqrt{2} + 18) \cdot \pi$
$A_3 = A_4 = (9 - 6\sqrt{2}) \cdot \pi \quad (\approx 1,62\,\text{cm}^2)$
$\overline{AR} = \overline{AS} = 6 - (6 - 3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$
$A_5 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot \pi = \frac{18}{6} \cdot \pi = 3\pi \quad (\approx 9,42\,\text{cm}^2)$

$A_{II} = \frac{6^2}{4}\sqrt{3} - [2 \cdot (9 - 6\sqrt{2})\pi + 3\pi]$
$A_{II} = 9\sqrt{3} - (18\pi - 12\sqrt{2}\pi + 3\pi)$
$A_{II} = 9\sqrt{3} - (21 - 12\sqrt{2})\pi \quad (\approx 2,93\,\text{cm}^2)$

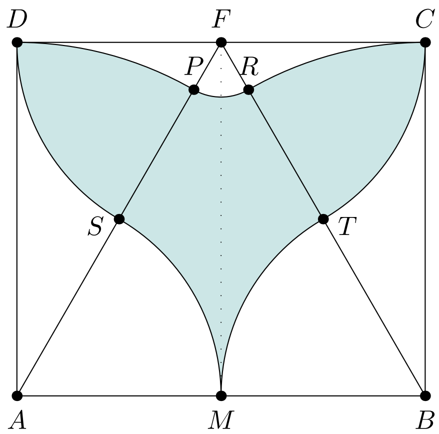
Für die Gesamtfläche A des „Fisches“ ergibt sich:

$$A = A_I + A_{II} = \left[\left(\frac{9\pi}{2} - 9\right) + 9\sqrt{3} - (21 - 12\sqrt{2})\pi\right]\,\text{cm}^2$$

$$A = \left[9(\sqrt{3} - 1) - \pi \cdot \left(21 - 12\sqrt{2} - \frac{9}{2}\right)\right]\,\text{cm}^2$$

$$A = \left[9(\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2}\pi(8\sqrt{2} - 11)\right]\,\text{cm}^2 \quad (\approx 8,07\,\text{cm}^2)$$

10.



In das Rechteckeck $ABCD$ ist ein gleichseitiges Dreieck ABF einbeschrieben.
Die Mittelpunkte der sieben Kreisbögen sind die Punkte A, B und F.

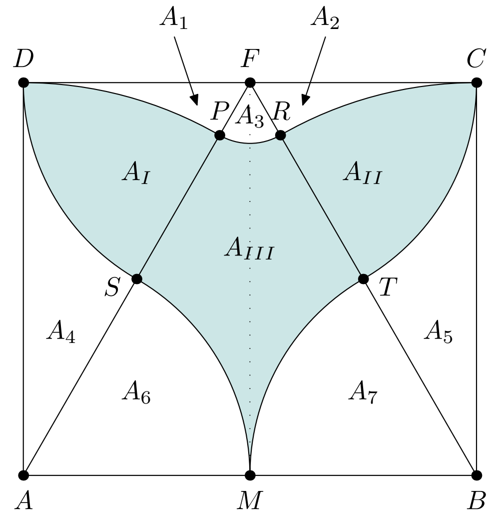
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

Lösung: (a)

- Zeichne das gleichseitige Dreieck ABF. Die Höhe $[FM]$ dieses Dreiecks ist genau so lang wie die Rechtecksseiten $[AD]$ und$[BC]$.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{AD}$ schneidet die Seite $[AF]$ im Punkt P und der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ schneidet die Seite $[BF]$ im Punkt R.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt F und dem Radius $\overline{FP}$ schneidet die Seite $[BF]$ im Punkt R.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt F und dem Radius $\overline{FD} = 3\,\text{cm}$ schneidet die Seite $[AF]$ im Punkt S, wobei ebenfalls $\overline{FS} = 3\,\text{cm}$ gilt.
- Nun musst du noch den Kreisbogen um den Punkt A mit dem Radius $\overline{AS}$ zeichnen. Dieser Kreisbogen trifft auf den Punkt M.
  Weil die Mittelpunkte F und A der beiden Kreisbögen, die sich im Punkt S treffen, zusammen mit dem Punkt S auf einer Geraden liegen, gehen sie ohne Knick ineinander über.
- Die entsprechenden Schritte führen rechts der Symmetrieachse MF vom Punkt C über den Punkt T zum Punkt M.

(b)



Wir rechnen meist nur mit Maßzahlen:

$A_{ABCD} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \quad (\approx 31{,}18\,\mathrm{cm}^2)$

$A_{\Delta AFD} = \dfrac{1}{4} \cdot A_{ABCD} = \dfrac{9}{2} \cdot \sqrt{3} \quad (\approx 7{,}79\,\mathrm{cm}^2)$

$A_{Sektor APD} = A_{Sektor BCR} = \dfrac{30°}{360°} \cdot (3\sqrt{3})^2\pi = \dfrac{9}{4}\,\pi \quad (\approx 7{,}07\,\mathrm{cm}^2)$

$A_1 = A_2 = A_{\Delta AFD} - A_{Sektor APD} = \dfrac{9}{2}\sqrt{3} - \dfrac{9}{4}\pi \quad (\approx 0{,}73\,\mathrm{cm}^2)$

Weiter gilt: $\overline{FP} = 6 - 3\sqrt{3}$.

$A_3 = \dfrac{60°}{360°} \cdot (6 - 3\sqrt{3})^2 \cdot \pi = \dfrac{36 - 36\sqrt{3} + 27}{6}\pi = \dfrac{21 - 12\sqrt{3}}{2}\pi$

$A_3 = \dfrac{21}{2}\,\pi - 6\sqrt{3}\pi \quad (\approx 0{,}34\,\mathrm{cm}^2)$

$A_4 = A_5 = \dfrac{9}{2}\sqrt{3} - \dfrac{60°}{360°} \cdot 3^2 \cdot \pi = \dfrac{9}{2}\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}\,\pi \quad (\approx 3{,}08\,\mathrm{cm}^2)$

$A_6 = A_7 = \dfrac{60°}{360°} \cdot 3^2 \cdot \pi = \dfrac{3}{2}\pi \quad (\approx 4{,}71\,\mathrm{cm}^2)$

$A_I = A_{II} = A_{\Delta AFD} - A_1 - A_4$

$A_I = \dfrac{9}{2}\,\sqrt{3} - \left(\dfrac{9}{2}\sqrt{3} - \dfrac{9}{4}\pi\right) - \left(\dfrac{9}{2}\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}\,\pi\right)$

$A_I = A_{II} = \dfrac{15}{4}\,\pi - \dfrac{9}{2}\sqrt{3} \quad (\approx 3{,}99\,\mathrm{cm}^2)$

$A_{III} = A_{\Delta ABF} - A_3 - (A_6 + A_7)$, wobei $A_6 = A_7$ gilt.

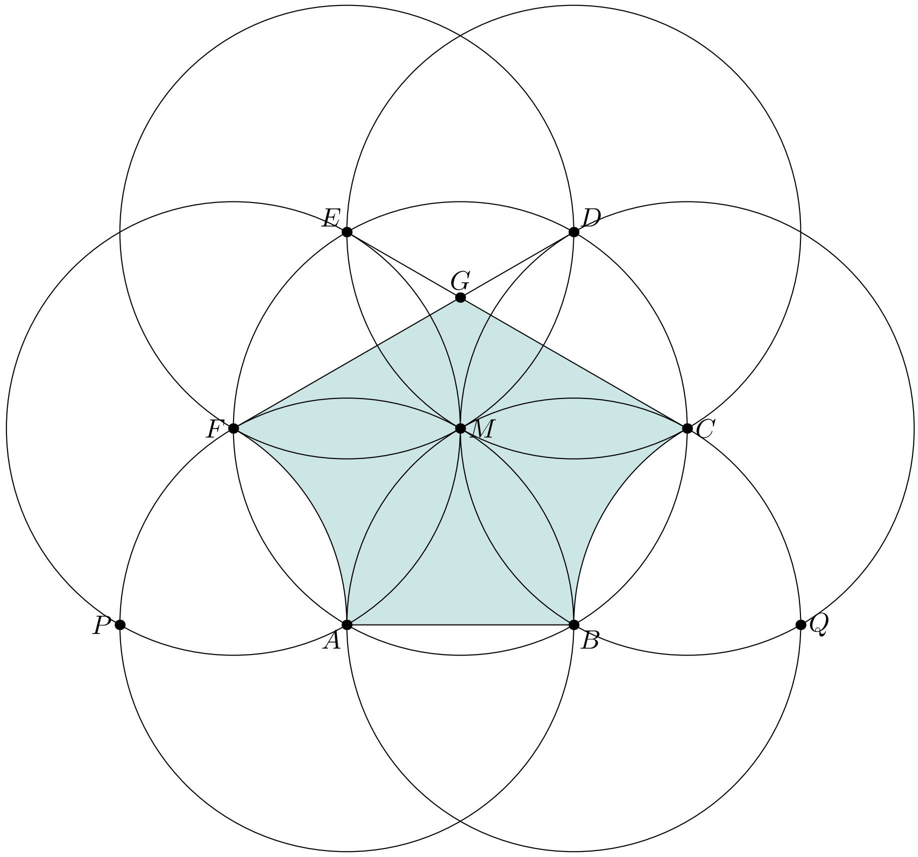
$A_{III} = 9\sqrt{3} - \left(\dfrac{21}{2}\,\pi - 6\sqrt{3}\,\pi\right) - 2 \cdot \dfrac{3}{2}\,\pi = 9\sqrt{3} - \dfrac{27}{2}\,\pi + 6\sqrt{3}\,\pi \quad (\approx 5{,}83\,\mathrm{cm}^2)$

Damit ergibt sich als Flächeninhalt A der grau getönten Figur:

$A = 2 \cdot A_I + A_{III} = 2 \cdot \left(\dfrac{15}{4} \cdot \pi - \dfrac{9}{2}\sqrt{3}\right) + \left(9\sqrt{3} - \dfrac{27}{2}\,\pi + 6\sqrt{3}\,\pi\right)$

$A = 6\pi(\sqrt{3} - 1)\,\mathrm{cm}^2 \approx 13{,}80\,\mathrm{cm}^2$

11. In der Abbildung gilt: $\overline{AB} = 3\,\mathrm{cm}$.
 Der Punkt M und die Punkte A, B, C, D, E, und F sind Kreismittelpunkte.
 Die Punkte P und Q sind die Mittelpunkte der Kreisbögen AF und CB, die sich in das Innere des Kreises mit dem Mittelpunkt M wölben.

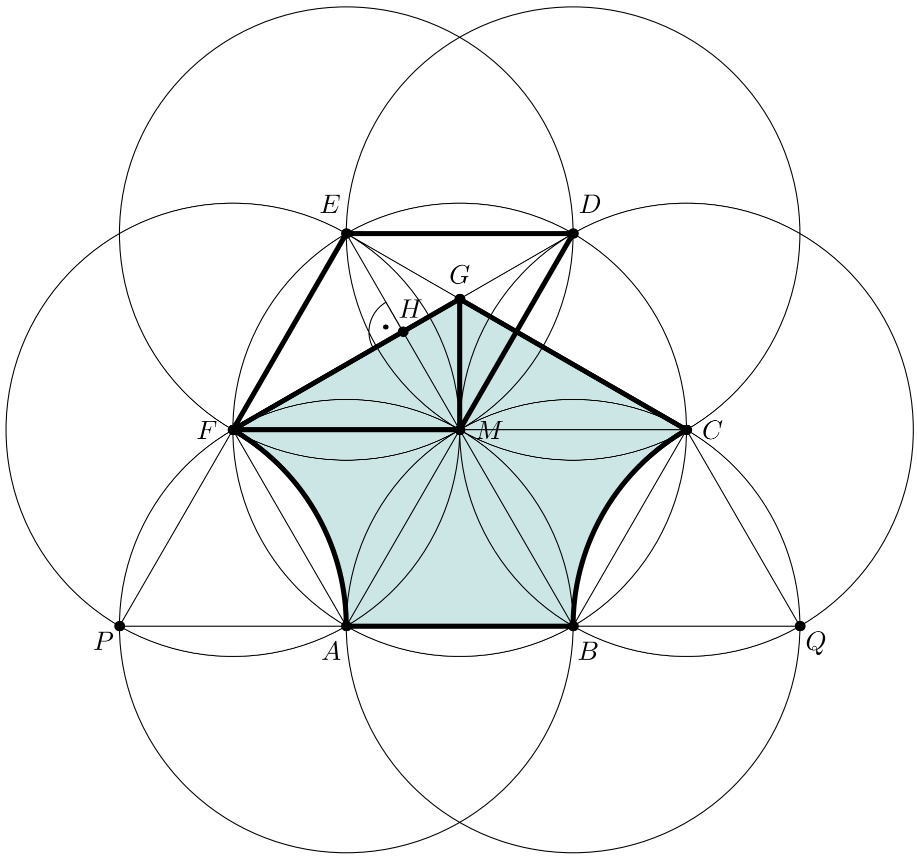


(a) Begründe: Das Sechseck $ABCDEF$ ist regelmäßig.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.
 Hinweis: Zeichne ausgehend von Punkt M geeignete Hilfslinien ein.

Lösung: (a) Die Strecken $[AB]$, $[BC]$, … , $[FA]$ sind jeweils 3 cm lang. Also sind die Dreiecke ABM, BCM, … , FAM gleichseitig und kongruent. Daher haben die Winkel BAF, CBA,… , EFA alle das Maß 120°. Also ist das Sechseck $ABCDEF$ regelmäßig.

(b)



Das Viereck $FMDE$ ist aus den beiden kongruenten gleichseitigen Dreiecken FME und MDE zusammengefügt. Also ist das Viereck $FMDE$ eine Raute, deren Diagonalen $[FD]$ und $[EM]$ im Punkt H aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck MDE liegt die Strecke $[MG]$ auf einer Winkelhalbierenden. Der Punkt G ist gleichzeitig der Schwerpunkt in diesem Dreieck, der alle Seitenhalbierenden (hier: $[EC]$ und $[DF]$) und damit alle Höhen im Verhältnis 2:1 teilt.

Also gilt : $\overline{MG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\text{cm} = \sqrt{3}\,\text{cm} \quad (\approx 1,73\,\text{cm})$.

Wegen $\overline{FC} = 6\,\text{cm}$ gilt: $A_{\Delta FCG} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 3\sqrt{3}\,\text{cm}^2 (\approx 5,20\,\text{cm}^2)$

Die Dreiecke FAM, ABM und BCM sind gleichseitig und kongruent:
$A_{\Delta ABM} = \frac{3^2}{4}\sqrt{3}\,\text{cm}^2 = \frac{9}{4}\sqrt{3}\text{cm}^2 (\approx 3,90\,\text{cm}^2)$.

Von den beiden Dreiecken FAM und BCM musst du jeweils noch das nach innen gewölbte Kreissegment unter der Sehne $[AF]$ bzw. $[BC]$ subtrahieren.
Diese beiden Segmente sind aus Symmetriegründen zu ihrem jeweils darüber liegenden Kreissegment kongruent.
Somit ergibt sich z.B: $A_{Segment[AF]} = A_{Sektor\,MFA} - A_{\Delta MFA}$.

Alle folgenden Berechnungen erfolgen in der Einheit cm^2.
$A_{Segment(AF)} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2\pi - \frac{3^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\pi - \frac{9}{4}\sqrt{3} \quad (\approx 0,82\,\text{cm}^2)$

Für das Flächenstück A^*, das durch die Strecken $[MF]$ und $[MA]$ sowie durch den nach innen gewölbten Kreisbogen AF begrenzt wird, ergibt sich:

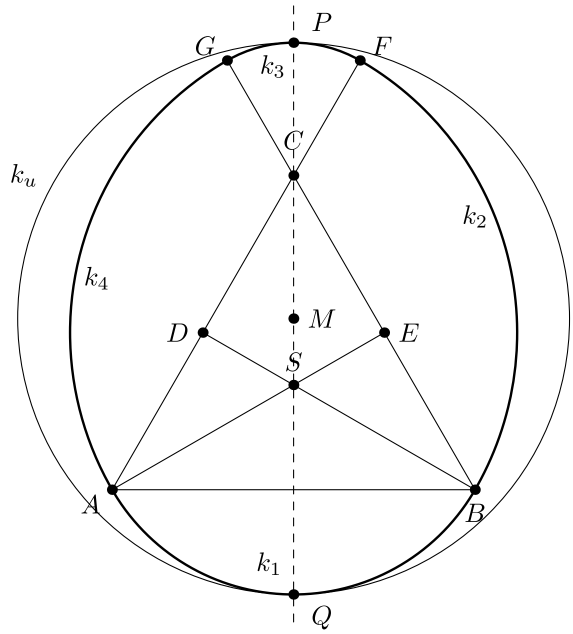
$$A^* = \frac{3^2}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi + \frac{9}{4}\sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi \quad (\approx 3{,}08\,\mathrm{cm}^2)$$

Für den Inhalt A des grauen Flächenstückes ergibt sich damit:

$$A = 3\sqrt{3} + \frac{9}{4}\sqrt{3} + 2 \cdot \left(\frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi\right) = \left(3 + \frac{9}{4} + 9\right)\sqrt{3} - 3\pi.$$

$$A = \left(\frac{57}{4}\sqrt{3} - 3\pi\right)\,\mathrm{cm}^2 \quad (\approx 15{,}26\,\mathrm{cm}^2)$$

12.



Die Punkte D und E sind zwei Seitenmittelpunkte des gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge a.
Die Punkte S, D, C und E sind die Mittelpunkte der Kreisbögen k_1, k_2, k_3 und k_4, welche die eiförmige Figur bilden. Der Punkt M ist der Mittelpunkt des Umkreises k_u dieser Eilinie.

(a) • Beschreibe, wie du diese Figur zeichnest.
  • Zeichne die Figur für $a = 6\,\mathrm{cm}$.

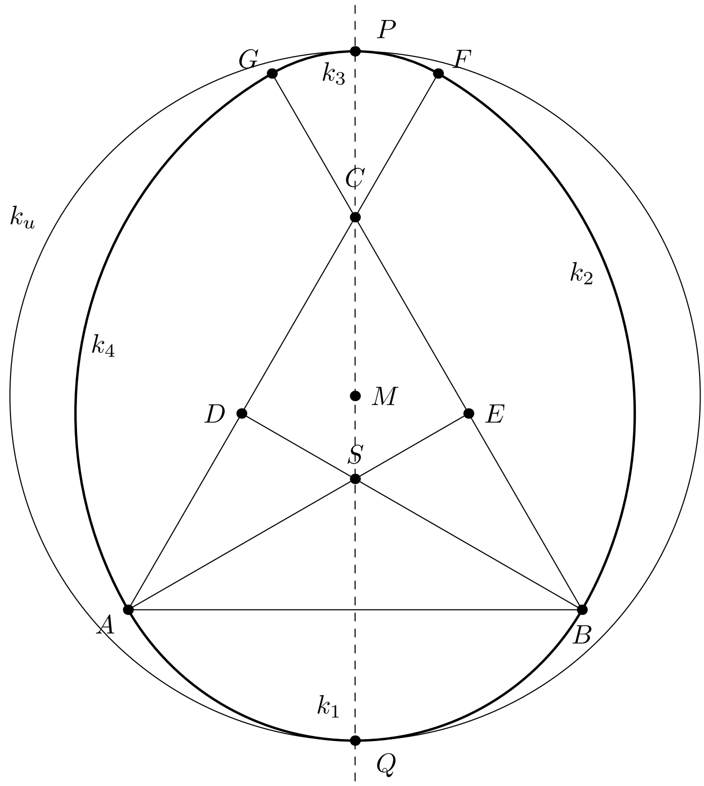
(b) Begründe: Neben der Symmetrieachse PQ besitzt die Eilinie keine weitere.

(c) Wie viel Prozent der Fläches des Umkreises k_u bedeckt die eiförmige Fläche?

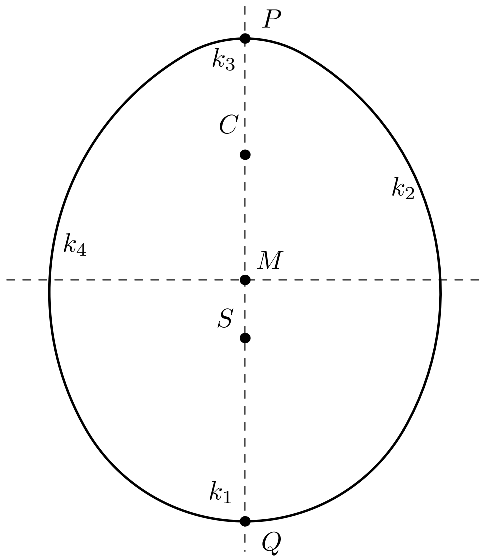
Lösung: (a) • Zeichne das gleichseitige Dreieck ABC. Verlängere dabei die Strecken $[AC]$ und $[BC]$ jeweils über C hinaus.
$[AE] \cap [BD] = \{S\}$
Zeichne den Kreisbogen $k_1(S\,; r_1 = \overline{SA})$.
$k_2(D\,; r_2 = \overline{DB}) \cap [AC = \{F\}$ und $k_3(E\,; r_3 = \overline{EA}) \cap [BC = \{G\}$.

Zeichne den Kreisbogen $k_4(C\,; r_4 = \overline{CF})$.
Die Gerade PQ ist die Symmetrieachse der Figur.
Der Mittelpunkt der Strecke $[PQ]$ ist M.

•



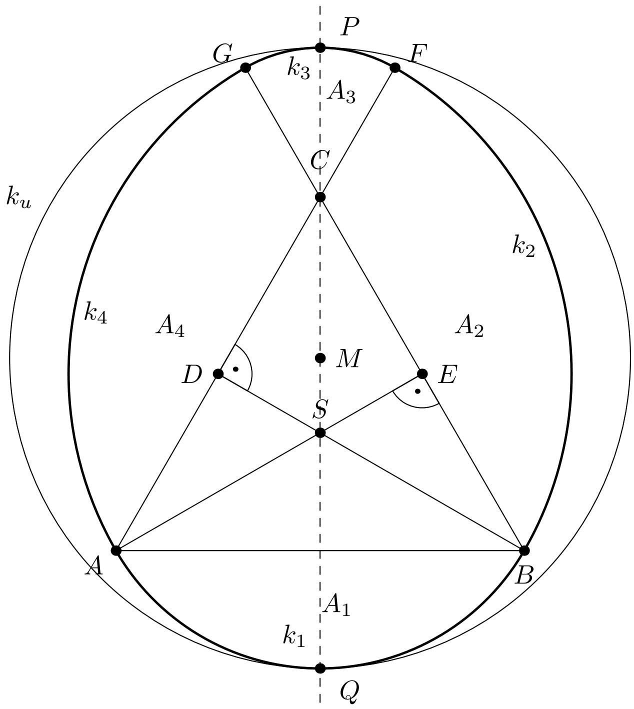
(b)



Zwar sind die beiden Kreisbögen k_2 und k_4 kongruent, aber die beiden Kreisbögen k_1 (Radius $\overline{SQ}$) und k_3 (Radius $\overline{CP}$) sind es nicht. Also ist die Senkrechte zur Geraden PQ durch den Punkt M keine Symmetrieachse der Figur. Andere Geraden, die ebenfalls durch M verlaufen, kommen aus dem gleichen Grund nicht als Symmetrieachsen in Betracht.

(c) Der Schnittpunkt S ist auch der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, der die Schwerlinien

im Verhältnis 2 : 1 teilt.
Es seien $r_1 = \overline{SA}$, $r_2 = \overline{DB}$ und $r_3 = \overline{CF}$.
Die drei Kreisbögen k_1, k_2 und k_3 schließen die Kreisteile A_1, A_2, A_3 und A_4 außerhalb des gleichseitigen Dreiecks ABC ein, dessen Flächeninhalt kurz A_Δ heißen soll.



$$r_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3}\sqrt{3} \quad ; \qquad r_2 = \frac{a}{2}\sqrt{3} = r_4$$

$$A_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{3}A_\Delta = \frac{1}{9}a^2\pi - \frac{1}{3}A_\Delta$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2}A_\Delta = \frac{3}{16}a^2\pi - \frac{1}{2}A_\Delta = A_4$$

$$r_3 = \frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

$$A_3 = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{a}{2}\left(\sqrt{3} \; - 1\right)\right]^2 \cdot \pi = \ldots = \frac{1}{6}a^2\pi - \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}\pi$$

$$\begin{aligned}
A_{Ei} &= \frac{1}{9}a^2\pi - \frac{1}{3}A_\Delta + \frac{3}{8}a^2\pi - A_\Delta + \frac{1}{6}a^2\pi - \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}\pi + A_\Delta \\
&= a^2\pi\left(\frac{1}{9} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\pi \\
&= a^2\pi\frac{8 + 27 + 12}{72} - a^2\sqrt{3} \cdot \frac{1 + \pi}{12} \\
&= \frac{47}{12}a^2\pi - \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 \cdot (1 + \pi)
\end{aligned}$$

$$A_{Ei} = \frac{a^2}{72} \cdot (47\pi - 6\sqrt{3} - 6\pi\sqrt{3}) \quad \approx 52,31\,\mathrm{cm}^2 \qquad \text{für } a = 6\,\mathrm{cm}$$

Für den Durchmesser d_u des Umkreises k_u gilt: $d_u = 2 \cdot r_1 + r_3$.

$$\Rightarrow \quad r_u = \frac{1}{2}\cdot(2r_1 + r_3) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}a\sqrt{3} + \frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{1}{2}a)$$

$$\begin{aligned} r_u &= \frac{1}{3}a\sqrt{3} + \frac{1}{4}a\sqrt{3} - \frac{1}{4}a \\ &= a\left(\frac{7}{12}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right) \\ r_u &= \frac{1}{12}a(7\sqrt{3} - 3) \quad \approx 4{,}56\,\text{cm} \qquad \text{für } a = 6\,\text{cm} \\ r_u^2 &= \frac{a^2}{144}(156 - 42\sqrt{3}) \end{aligned}$$

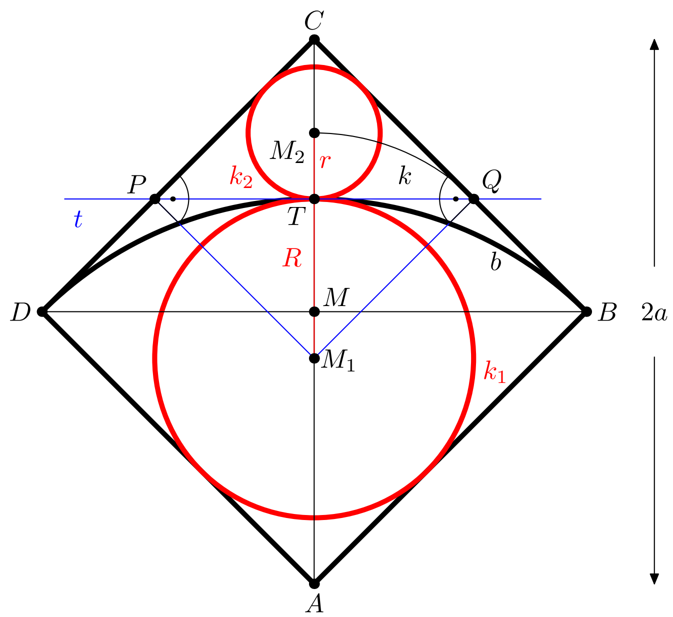
Für den Flächeninhalt A_u des Unkreises ergibt sich dann:

$$A_u = \frac{a^2}{144}(156 - 42\sqrt{3})\cdot\pi$$

$$\frac{A_{Ei}}{A_u} = \frac{\frac{a^2}{72}\cdot(47\pi - 6\sqrt{3} - 6\pi\sqrt{3})}{\frac{a^2}{144}(156 - 42\sqrt{3})\cdot\pi} = 0{,}7999561666\ldots \approx 0{,}8 = 80\%$$

Der Verdacht liegt nahe, dass es genau 80% sind. Aber Zähler und Nenner stehen leider im irrationalen Verhältnis (man sagt, „Zähler und Nenner sind inkommensurabel.“). Das liegt z.B. daran, dass sich die Zahl π nicht herauskürzt.

13.



Der Kreisbogen b von B nach D im Quadrat $ABCD$ mit der Diagonalenlänge $2a$ besitzt den Mittelpunkt A.

In der Figur ist eine Möglichkeit dargestellt, wie die Mittelpunkte M_1 und M_2 der beiden einbeschriebenen Kreise k_1 und k_2 mit den Radien R bzw. r konstruiert werden können.

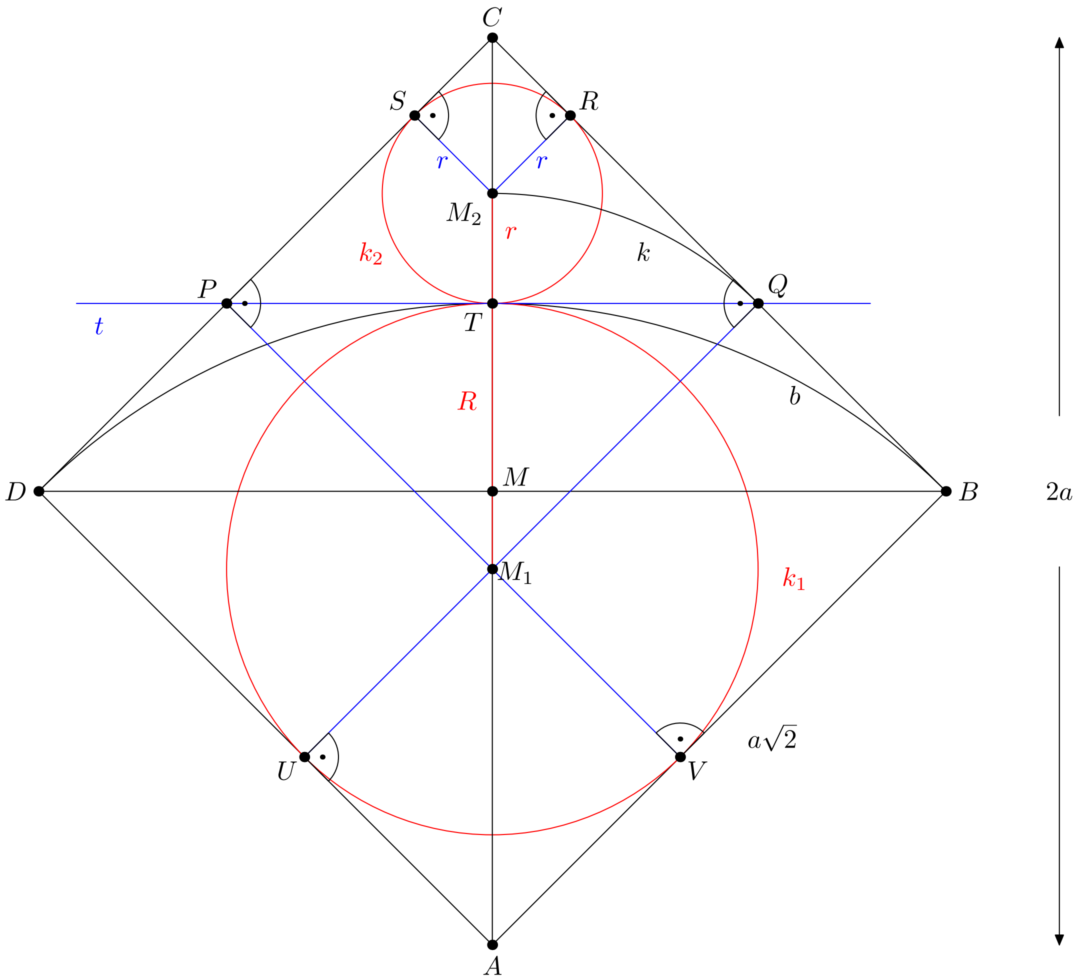
(a)
- Beschreibe die einzelnen Konstruktionsschritte in der richtigen Reihenfolge.
- Konstruiere die Figur mit den einbeschriebenen Kreisen k_1 und k_2 für $a = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne die Kreisradien R und r in Abhängigkeit von a. Bestätige damit, dass diese Konstruktion der einbeschriebenen Kreise korrekt ist.
Tipp: Zeichne die Berührradien der Kreisline k_2 an die Seiten $[BC]$ und $[DC]$ ein.

Lösung:

(a)
-
  - Zeichne Das Quadrat $ABCD$ mit seinen Diagonalen und dem Kreisbogen b
  - $b \cap [AC] = \{T\}$
  - Zeichne die Tangente t an diesen Kreisbogen im Punkt T
  - $t \cap [DC] = \{P\}$ und $t \cap [BC] = \{Q\}$
  - Die Senkrechten auf die Seiten $[AC]$ und $[BC]$ im Punkt P bzw. Q schneiden sich im Mittelpunkt M_1
  - Der Kreis um den Punkt M_1 mit dem Radius $\overline{M_1Q}$ schneidet die Diagonale $[AC]$ im Kreismittelpunkt M_2
  - $R = \overline{M_1T}$ und $r = \overline{M_2T}$
- Konstruktion: Die Diagonalen sind $2a = 12\,\text{cm}$ lang, sie stehen aufeinander senkrecht und sie halbieren sich. Die restlichen Konstruktionsschritte sind oben angeführt.

(b)



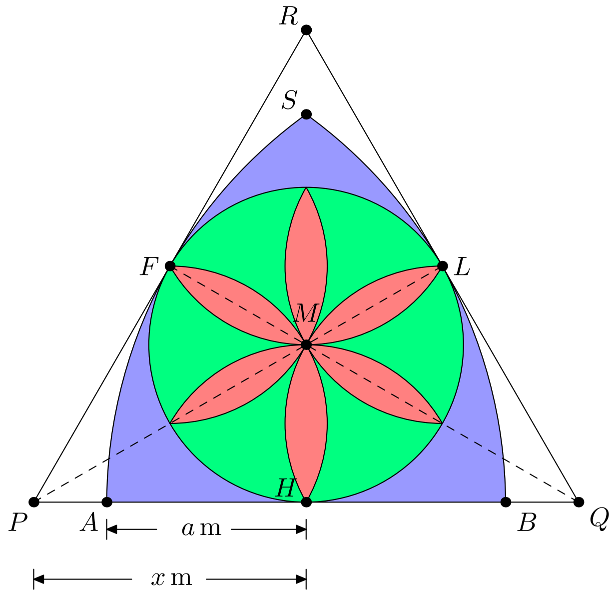
Das Dreieck PQC ist gleichschenklig-rechtwinklig.
Dort gilt: $\overline{TC} = \overline{AC} - \overline{AT} = 2a - a\sqrt{2}$.
Das Viereck M_1QCP ist ein Quadrat. Also gilt dort:
$\overline{M_1T} = \overline{TC} = 2a - a\sqrt{2} = R$.

$\overline{M_1Q} = \overline{M_1M_2} = \overline{PC} = \overline{TC} \cdot \sqrt{2} = (2a - a\sqrt{2})\sqrt{2} = 2a\sqrt{2} - 2a$.
$r = \overline{M_2T} = \overline{M_1M_2} - \overline{M_1T} = \overline{M_1M_2} - \overline{TC} = 2a\sqrt{2} - 2a - (2a - a\sqrt{2})$
$r = 3a\sqrt{2} - 4a$

Die beiden Berührradien r erzeugen das Quadrat M_2RCS. Dann müsste aber gelten:
$\overline{M_2C} = r\sqrt{2}$.
Nun ist $\overline{M_2C} = \overline{M_1C} - \overline{M_1M_2} = 2 \cdot \overline{TC} - \overline{M_1M_2}$
$\Rightarrow \quad \overline{M_2C} = 2 \cdot (2a - a\sqrt{2}) - (2a\sqrt{2} - 2a) = 4a - 2a\sqrt{2} - 2a\sqrt{2} + 2a \Rightarrow \quad \overline{M_2C} = 6a - 4a\sqrt{2} = (3a\sqrt{2} - 4a) \cdot \sqrt{2} = r \cdot \sqrt{2}$, was zu zeigen war.

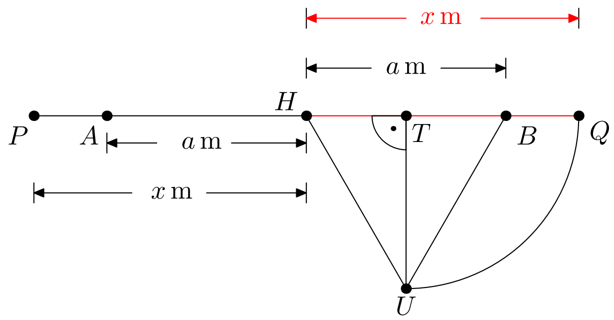
Analog müsste nun gelten: $\overline{M_1A} = R\sqrt{2}$:
$\overline{M_1A} = \overline{AC} - \overline{CM_1} = 2a - 2 \cdot \overline{TC} = 2a - 2 \cdot (2a - a\sqrt{2}) = 2a\sqrt{2} - 2a$
$\overline{M_1A} = (2a - a\sqrt{2})\sqrt{2} = R\sqrt{2}$, was zu zeigen war.

14.



Das ist die Planfigur für den oberen Teil eines Kirchenfensters.
Das gleichseitige Hilfsdreieck PQR berührt die Kreisbögen von B nach S und von S nach A in den Punkten L bzw. F. Die Punkte P und Q sind die beiden Mittelpunkte dieser Kreisbögen.
Die Punkte F und L sind gleichzeitig die Berührpunkte des einbeschriebenen Kreises mit den beiden Kreisbögen.

(a)
- Zeige: $\overline{PQ} = (a + a\sqrt{3})\,\mathrm{m}$; d.h. $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
-



Der Mittelpunkt der Strecke $[PQ]$ bzw. der Strecke $[AB]$ ist H. Das Dreieck HUB ist gleichseitig.
Begründe: Diese Konstruktion ergibt $\overline{HQ} = \overline{PH} = x\,\mathrm{m}$.

(b) Die Breite $\overline{AB}$ des Kirchenfensters soll 2 m betragen. Konstruiere die vollständige Figur im Maßstab 1:25.

(c) Wie viele Quadratdezimeter rotes Glas werden für die Rosette ungefähr gebraucht?

(d) Wie hoch wird dieser Teil des Kirchenfensters?

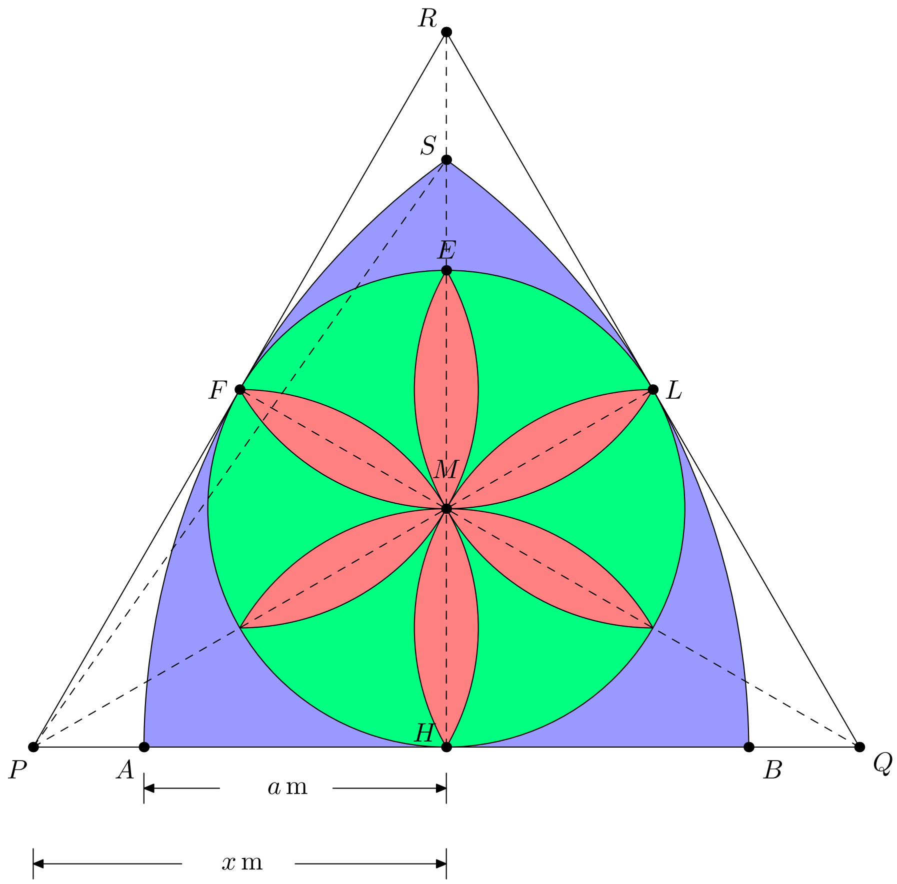
Lösung: (a)
- Die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks beträgt $2x$ m. Die Strecke $[PL]$ stellt eine der Höhen in diesem Dreieck dar.

Dann gilt $\overline{PL} = \overline{PB} = \left(\frac{2x}{2}\sqrt{3}\right)\,\mathrm{m} = (x+a)\mathrm{m} \Leftrightarrow x\sqrt{3}\,\mathrm{m} = (x+a)\,\mathrm{m}$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{a}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{3}+1) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

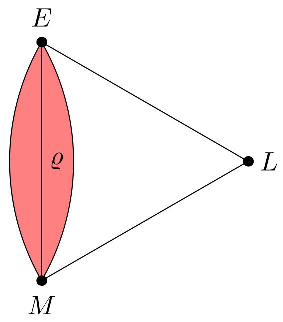
- Der Punkt T ist der Mittelpunkt der Seite $[HB]$, die $a\,\mathrm{m}$ lang ist. Die Strecke $[TU]$ ist eine Höhe in dem gleichseitgen Dreieck HUB mit der Seitenlänge $a\,\mathrm{m}$. $\overline{TU} = \frac{a}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{m} = \overline{TQ} \quad \Rightarrow \quad \overline{HQ} = \overline{HT} + \overline{TQ} = (\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{3})\,\mathrm{m} = x\,\mathrm{m}.$

(b) Die Breite des Fensters beträgt $2\,\mathrm{m} = 200\,\mathrm{cm}$. Im Maßtab 1:25 bedeutet das für deine Zeichnung $\overline{AB} = 200\,\mathrm{cm} : 25 = 8\,\mathrm{cm}$.



- Konstruiere x für $a = 4\,\mathrm{cm}$ gemäß der Darstellung in der Aufgabe (a)
- Konstruiere das Dreieck PQR
- Der Punkt M ist sowohl der Mittelpunkt des Inkreises dieses Dreiecks als auch der Rosettenmittelpunkt
- Die Spitzen der Rosette sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks

(c) In diesem Ausschnitt erkennst du im Zusammenhang mit der vorangegangenen Konstruktion:
Die Punkte E und M teilen die Dreieckshöhe $[RH]$ in drei gleich große Teile. Das Dreieck MLE ist gleichseitig.



Für den Inkreisradius $\varrho = \overline{ME}$ gilt:

$$\varrho = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{2} \cdot \sqrt{3}\ \mathrm{m} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)\ \mathrm{m} = \frac{a}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ \mathrm{m}$$

Die beiden Kreissegmente an der Sehne $[ME]$ sind kongruent. Für den Flächeninhalt A_R eines Blattes der Rosette gilt dann:

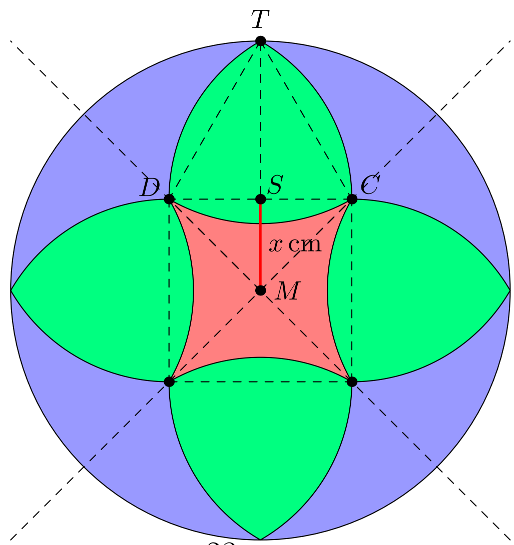
$$A_R = 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\varrho^2\pi - \frac{\varrho^2}{4}\sqrt{3}\right) = \varrho^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2}{4}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Für $a = 1$ ist dann $A_R \approx 0{,}112\,\mathrm{cm}^2 = 11{,}2\,\mathrm{dm}^2$
und $A_{ges} = 6 \cdot A_R \approx 67{,}2\,\mathrm{dm}^2$.
Es werden etwa $70\,\mathrm{dm}^2$ rotes Glas für die Rosette benötigt.

(d) Es gilt: $\overline{PS} = \overline{PL} = x\sqrt{3}\,\mathrm{m}$.
ΔPHS: $\overline{HS}^{\,2} = \overline{PS}^{\,2} - x^2\,\mathrm{m}^2 = (3x^2 - x^2)\,\mathrm{m}^2 = 2x^2\,\mathrm{m}^2$.
$\Rightarrow \quad \overline{HS} = x\sqrt{2}\,\mathrm{m}$.
Die Fensterhöhe $\overline{HS}$ ist genauso lang wie die Seite des Quadrates mit der Seitenlänge $x\,\mathrm{m}$ (was eine andere Konstruktionsmöglichkeit der Figur eröffnen würde).
Mit $x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$ ergibt sich: $\overline{HS} = x\sqrt{2}\,\mathrm{m} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\ \mathrm{m}$.

Für $a = 1$ ergibt sich: $\overline{HS} \approx 1{,}93\,\mathrm{m}$.

15.

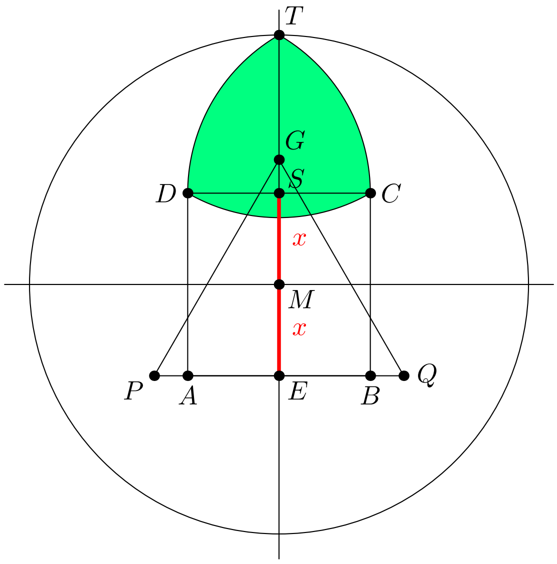


Das ist das Bild eines Fensters, das sich in der Zisterzienserabtei Hauterive in Fribourg (Schweiz) befindet.
Der Radius des Umkreises dieser Figur sei R cm. Der Radius der kleinen Kreisbögen sei jeweils r cm.
Die gestrichelten Linien erzeugen im Inneren ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck.

(a) Konstruiere die Figur für $R = 5\,\text{cm}$.

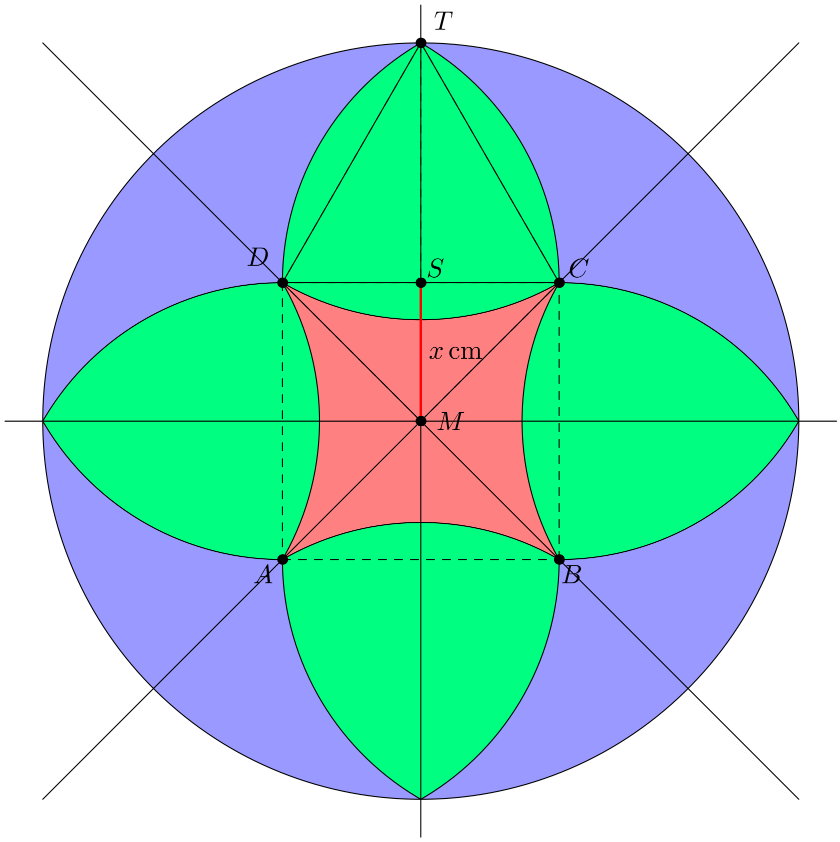
(b)
- Zeige: $\overline{MS} = x = \dfrac{R}{(\sqrt{3}+1)\,\text{cm}}$
- Zeige: $x\,\text{cm} = \dfrac{R}{2}\sqrt{3} - \dfrac{R}{2}$

(c) Hier ist eine recht umständlichere Möglichkeit dargestellt, die Figur zu konstruieren:



Der Mittelpunkt der Strecke $[MT]$ ist der Punkt G. Das Dreieck PQG ist gleichseitig und es besitzt die Seitenlänge R cm.
Begründe: Diese Konstruktion ergibt $\overline{ME} = \overline{MS} = x\,\text{cm} = \dfrac{R}{2}\sqrt{3} - \dfrac{R}{2}$.

Lösung: (a)

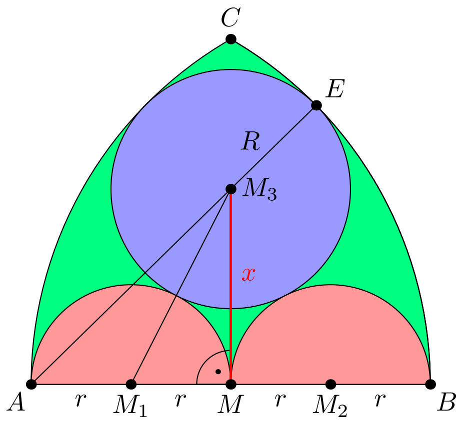


- Zeichne einen Kreis um M mit dem Radius $R = 5\,\text{cm}$
- Zeichne die vier Symmetrieachsen der Figur ein; $\Rightarrow$ Punkt T
- Trage am Punkt T links und rechts einen $30°$-Winkel mit dem Schenkel $[TM$ an
- Die freien Schenkel dieser Winkel schneiden die im $45°$-Winkel stehenden Symmetrieachsen im Punkt D bzw. C. Das Dreieck DCT ist dann gleichseitig.
- Die Punkte D, C und T sind jeweils die Mittelpunkte der drei Kreisbögen
- Der Rest kommt durch Punkt- oder Achsenspiegelung zustande

(b)
- Das Dreieck MCD ist gleichschenklig-rechtwinklig.
  $\Rightarrow \quad \overline{SM} = \overline{SD} = \overline{SC} = x\,\text{cm}$ und $\overline{CD} = \overline{SC} = 2x\,\text{cm}$.
  Das Dreieck DCT ist gleichseitig.
  Also gilt für dessen Höhe $\overline{ST} = 2 \cdot \dfrac{x}{2}\sqrt{3}\,\text{cm} = x\sqrt{3}\,\text{cm}$.
  $\Rightarrow \quad (x + x\sqrt{3})\,\text{cm} = x(1+\sqrt{3})\,\text{cm} = R$
  $\Rightarrow \quad x = \dfrac{R}{(\sqrt{3}+1)\,\text{cm}}$
- $x\,\text{cm} = \dfrac{R}{\sqrt{3}+1} \cdot \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{R\sqrt{3}-R}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} - \dfrac{R}{2}$

(c) Es gilt $\overline{ME} = \overline{EG} - \overline{MG} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} - \dfrac{R}{2}$.

16.



Die Punkte A und B sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen, welche die beiden Halbkreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 (Radius r) sowie den Kreis um M_3 mit dem Radius R berühren.
Der Kreis um M_3 mit dem Radius R berührt den Kreisbogen von B nach C im Punkt E.

(a) Zeige: $R = 1,2r$.

(b) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt A_R des Kreises um M_3 größer als der Flächeninhalt A_r der beiden Halbkreise zusammen?

Lösung: (a) $\overline{AM_3} = \overline{AE} - \overline{M_3E} = 4r - R$

Wende in den beiden Dreiecken AMM_3 und M_1MM_3 den Satz des PYTHAGORAS an:

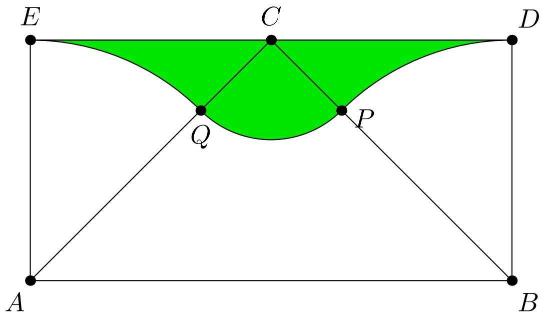
$$\begin{array}{llll}
\Delta AMM_3: & x^2 & = & (4r-R)^2-(2r)^2 \\
 & x^2 & = & 16r^2-8rR+R^2-4r^2 \\
 & x^2 & = & 12r^2-8rR+R^2 \qquad (1) \\
\Delta M_1MM_3: & x^2 & = & (r+R)^2-r^2 \\
 & x^2 & = & r^2+2rR+R^2-r^2 \\
 & x^2 & = & R^2+2rR \qquad (2) \\
(1)=(2): & 12r^2-8rR+R^2 & = & R^2+2rR \\
\Leftrightarrow & 12r^2-10Rr & = & 0 \\
\Leftrightarrow & 2r(6r-5R) & = & 0 \qquad \Rightarrow R=1,2r
\end{array}$$

(b) Flächenunterschied:

$\Delta A = A_R - A_r = R^2\pi - r^2\pi = (1,2r)^2\pi - r^2\pi = r^2\pi(1,44-1) = 0,44r^2\pi$

$$\frac{\Delta A}{A_r} = \frac{0,44r^2\pi}{r^2\pi} = 0,44 = 44\%$$

17.



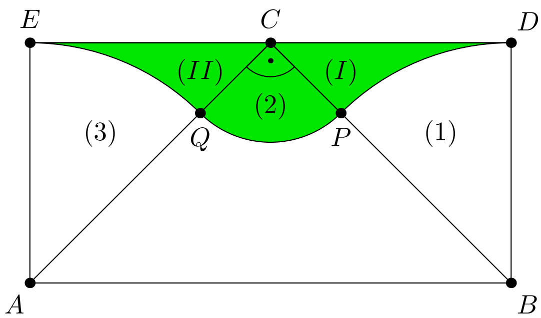
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig mit $\overline{AC} = \overline{BC} = 5\,\text{cm}$. Das Viereck $ABDE$ ist ein Rechteck. Die Punkte A, C und B sind die Mittelpunkte der drei Kreisbögen, die sich zu der geschwungenen Linie von E über Q und P nach D zusammenfügen.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Zeige: $\overline{BP} = 2,5 \cdot \sqrt{5}\,\text{cm}$.

(c) Berechne den Inhalt der Fläche, die von der geschwungenen Linie und der oberen Rechtecksseite $[ED]$ umrandet wird.

Lösung: (a)



(b) Das Dreieck BDC ist ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$. Dann ist die Seitenlänge $\overline{BD} = \frac{5}{\sqrt{2}}\,\text{cm} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}\,\text{cm} = \frac{5}{2}\sqrt{2}\,\text{cm}$, also $2,5 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \approx 3,54\,\text{cm}$ lang.

(c) $A_{\Delta CBD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{cm}^2 = 6,25\,\text{cm}^2$

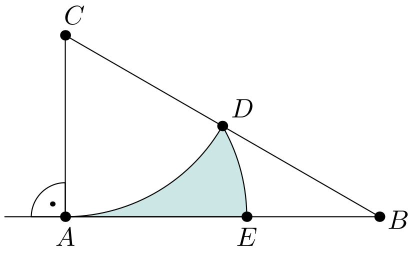
$A_{(1)} \approx \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot 3,54^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 4,92\,\text{cm}^2 = A_{(3)}$

$A_{(I)} = A_{(III)} \approx 6,25\,\text{cm}^2 - 4,92\,\text{cm}^2 = 1,33\,\text{cm}^2$

$A_{(2)} \approx \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot (5 - 3,54)^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 1,67\,\text{cm}^2$

$A_{gesamt} = 2 \cdot A_{(I)} + A_{(2)} \approx 2 \cdot 1,33\,\text{cm}^2 + 1,67\,\text{cm}^2 = 4,33\,\text{cm}^2$

18.

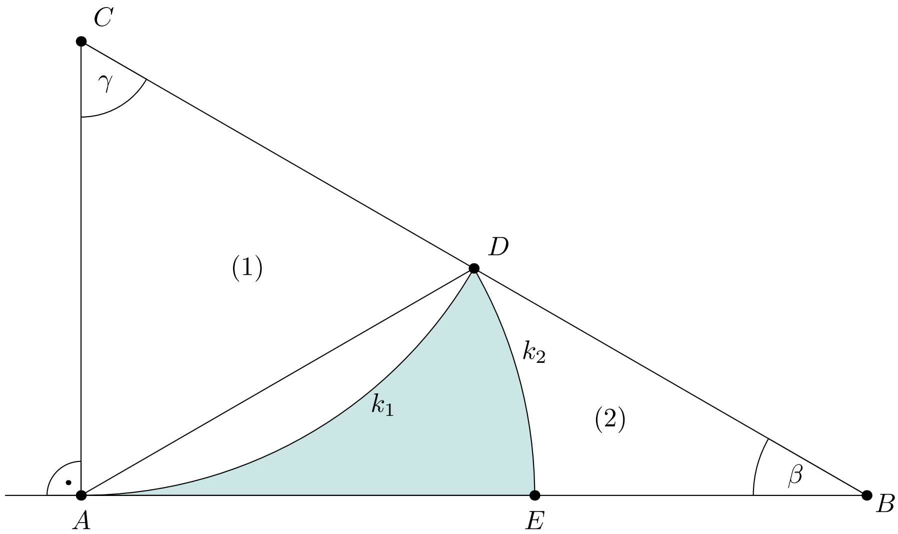


Die Eckpunkte A und C des rechtwinkligen Dreiecks ABC sind die Mittelpunkte der Kreisbögen von E nach D bzw. von A nach D. Die Radien der Kreisbögen sind gleich lang.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt der getönten Fläche.

Lösung: (a)



- Zeichne die Strecke $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$. Trage am Punkt A einen rechten Winkel an.
- Zeichne um den Punkt C einen Kreisbogen k_1 mit Radius 6 cm. Zeichne um den Punkt A einen Kreisbogen k_2 mit Radius 6 cm.
- $k_1 \cap k_2 = \{D\}$. Das Dreieck ADC ist somit gleichseitig mit der Seitenlänge 6 cm. $k_2 \cap \{\text{freier Schenkel des rechten Winkels mit dem Scheitel } A\} = \{E\}$.
- $[CD \cap [AE = \{B\}$.

(b) Weil das Dreieck ADC gleichseitig ist, folgt $\gamma = 60°$. Weil das Dreieck ABC rechtwinklig ist, folgt $\beta = 30°$.

Der Flächeninhalt A des Dreiecks ABC beträgt somit
$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 18\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \quad (\approx 31{,}18\,\text{cm}^2)$.

Berechne dann den Flächeninhalt des Kreissektors (1) mit dem Mittelpunkt C und dem Kreisbogen von A nach D:
$A_{(1)} = \frac{60°}{360°} \cdot 6^2\pi\,\text{cm}^2 = 6\pi\,\text{cm}^2 \quad (\approx 18{,}85\,\text{cm}^2)$

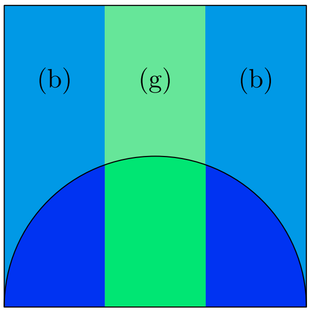
Den Inhalt $A_{(2)}$ der Fläche (2), die durch die Strecken $[EB]$ und $[BD]$ sowie durch den Keisbogen von E nach D begrenzt wird, berechnest du, indem du den Inhalt des

Kreissektors mit dem Mittelpunkt A und dem Radius 6 cm vom Flächeninhalt des Dreiecks ABD subtrahierst.
Das Dreieck ABC ist ein halbes gleichseitiges Dreieck. Weil $\overline{CD} = 6\,\text{cm}$ gilt, ist der Punkt D damit der Mittelpunkt der Hypotenuse $[BC]$, die ja 12 cm lang sein muss. Deshalb ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABD halb so groß wie der des Dreiecks ABC:
$A_{\Delta ABD} = 0,5 \cdot 18\sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \quad (\approx 15,59\,\text{cm}^2)$.

$$\Rightarrow \quad A_{(2)} = \left(9\sqrt{3} - \frac{30°}{360°} \cdot 6^2\pi\right)\text{cm}^2 = (9\sqrt{3} - 3\pi)\,\text{cm}^2 \quad (\approx 6,16\,\text{cm}^2).$$

Den Inhalt A der getönten Fläche erhältst du, indem du die beiden Flächeninhalte $A_{(1)}$ und $A_{(2)}$ vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC subtrahierst:
$A = 18\sqrt{3} - [6\pi + (9\sqrt{3} - 3\pi)]\,\text{cm}^2 = (9\sqrt{3} - 3\pi)\,\text{cm}^2 = A_{(2)}$ **!**
Das bedeutet z.B. auch, dass der Kreisbogen von E nach D die Fläche halbiert, die von den Strecken $[AB]$ und$[BD]$ sowie vom Kreisbogen von A nach D begrenzt wird.

19.



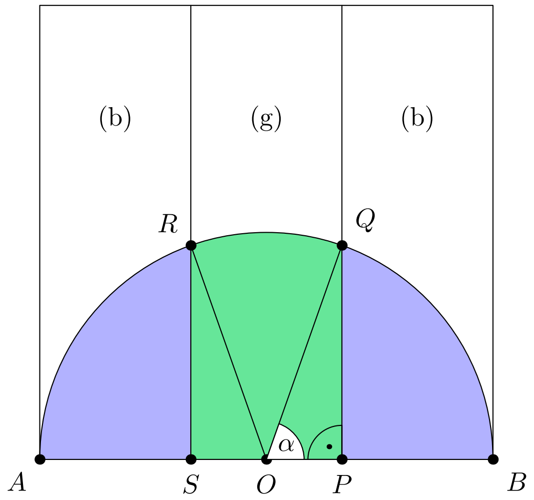
Das ist der Entwurf eines Logos für die Firma „Sun & Brown“. Es besteht aus einem Quadrat, das aus drei kongruenten Streifen blau (b) und grün (g) zusammengesetzt ist. Außerdem ist dem Quadrat ein Halbkreis einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur, so dass die Quadratseite 6 cm lang ist.

(b) Berechne den Inhalt der blauen Fläche im Halbkreis.

(c) Wie viel Prozent der Halbkreisfläche sind grün eingefärbt?

Lösung: (a)



(b) Um den Inhalt der blauen Teilfläche $PBQP$ zu berechnen, musst du von der Fläche des Sektors OBQ die des Dreiecks OPQ subtrahieren:

Im rechtwinkligen Dreieck OPQ gilt: $\overline{OP} = 1\,\text{cm}$ und $\overline{OQ} = 3\,\text{cm}$.

Also: $\cos\alpha = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70{,}53°$.

$A_{Sektor} \approx \dfrac{70{,}53°}{360°} \cdot 3^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 5{,}54\,\text{cm}^2$

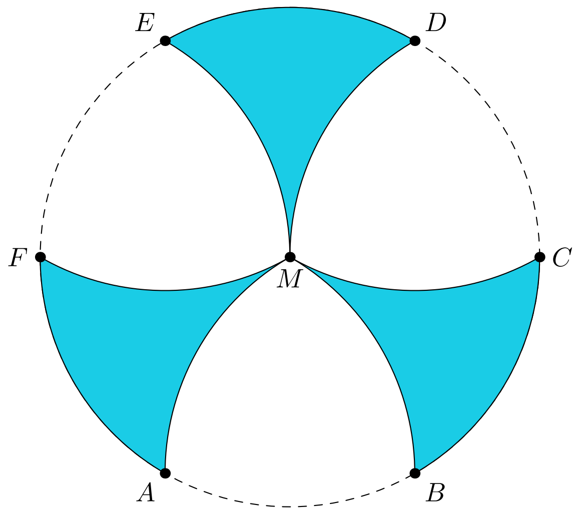
$A_{\Delta OPQ} \approx 0{,}5 \cdot 1 \cdot 3\,\text{cm}^2 \approx 1{,}41\,\text{cm}^2$
$A_{PBQP} \approx 5{,}54\,\text{cm}^2 - 1{,}41\,\text{cm}^2 = 4{,}13\,\text{cm}^2$
Geamte blaue Fläche: $A \approx 2 \cdot 4{,}13\,\text{cm}^2 = 8{,}26\,\text{cm}^2$.

(c) Halbkreis: $A_{HK} = \dfrac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \pi \approx 14{,}14\,\text{cm}^2$

$\dfrac{A_{grün}}{A_{HK}} \approx \dfrac{14{,}14\,\text{cm}^2 - 8{,}26\,\text{cm}^2}{14{,}14\,\text{cm}^2} \approx 0{,}4158 = 41{,}58\%$

Knapp 42% der Halbkreisfläche sind grün eingefärbt.

20.



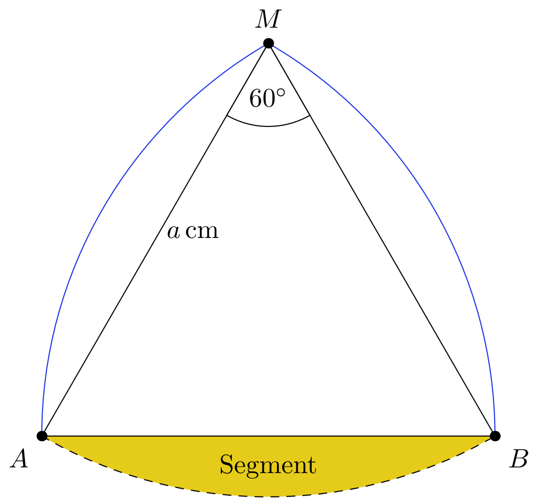
Die Punkte A, B, C, D, E und F sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge a cm. Diese Punkte sind auch die Mittelpunkte der Kreisbögen im Inneren.

(a) Zeichne die Figur für $a = 6$.

(b) Berechne den Flächeninhalt der getönten Figur in deiner Zeichnung.

Lösung: (a) Zeichne zunächst den Umkreis der Figur mit dem Radiua $a = 6$ cm. Trage dann den Radius 6-mal auf der Kreislinie ab. Beginne dabei mit einem der „waagrechten" Punkte C oder F. Zeichne dann die 6 Kreisbögen ein.

(b)



Die Ausgangsfigur (AF) enthält drei Kreisbogendreiecke (KBD). Eines davon ist jetzt herausgezeichnet.
Es setzt sich aus einem gleichseitigen Dreieck (D) und drei kongruenten Segmenten (Sg) zusammen.
Den Flächeninhalt der Ausgangsfigur (AF) kannst du berechnen, indem du vom Flächeninhalt des Umkreises (k) der Ausgangsfigur den der drei Kreisbogendreiecke (KBD) subtrahiertst:
$A_{AF} = A_k - 3 \cdot A_{KBD}$.
Weiter gilt also: $A_{KBD} = A_D + 3 \cdot A_{Sg}$ und $A_{Sg} = A_{SektorMAB} - A_D$.

$$\Rightarrow \quad A_{KBD} = A_D + 3 \cdot (A_{Sektor MAB} - A_D).$$

$$\Rightarrow \quad A_{KBD} = 3 \cdot A_{Sektor MAB} - 2 \cdot A_D = \left[3 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot a^2\pi - 2 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right] \text{cm}^2$$

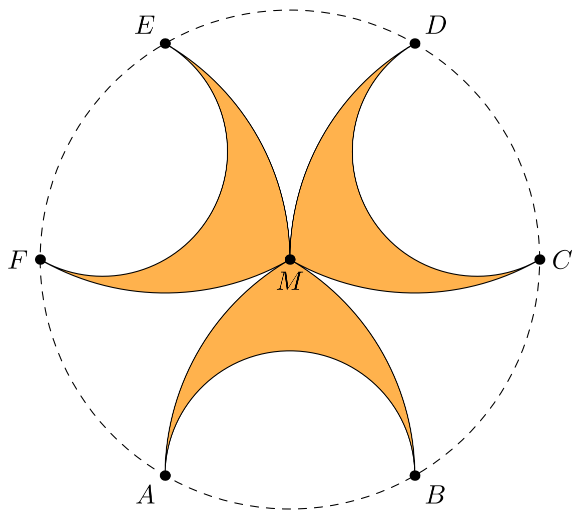
$$\Rightarrow \quad A_{KBD} = \left[\frac{1}{2}a^2\pi - \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}\right] \text{cm}^2$$

$$A_{AF} = a^2\pi \,\text{cm}^2 - 3 \cdot \left[\frac{1}{2}a^2\pi - \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}\right] \text{cm}^2$$

$$A_{AF} = \left[a^2\pi - \frac{3}{2}a^2\pi + \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\right] \text{cm}^2 = \frac{a^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)\,\text{cm}^2$$

Für $a = 6$ ergibt sich: $A_{AF} \approx 36,98\,\text{cm}^2$.

21.



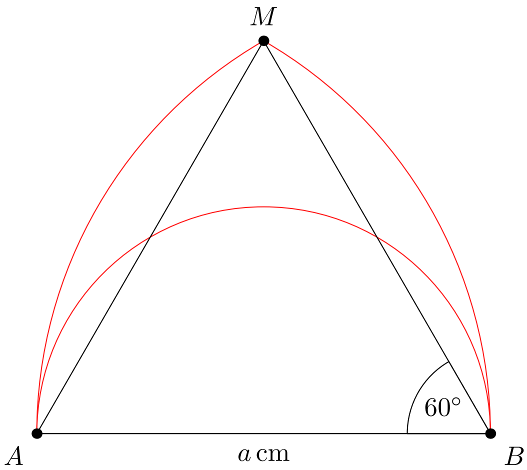
Die Punkte A, B, C, D, E und F sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge a cm. Diese Punkte sind auch die Mittelpunkte der Kreisbögen im Inneren. Die Strecken $[AB]$, $[CD]$ und $[EF]$ sind jeweils die Durchmesser der drei Halbkreise im Inneren.

(a) Zeichne die Figur für $a = 6$.

(b) Berechne den Flächeninhalt der getönten Figur in deiner Zeichnung.

Lösung: (a) Zeichne zunächst den Umkreis der Figur mit dem Radiua $a = 6\,\text{cm}$. Trage dann den Radius 6-mal auf der Kreislinie ab. Beginne dabei mit einem der „waagrechten“ Punkte C oder F. Zeichne dann die 6 Kreisbögen und die 3 Halbkreise ein.

(b)



Die Figur stellt eines der drei kongruenten Elemente der Ausgangsfigur (AF) dar: An den Schenkeln $[MA]$ und $[MB]$ des gleichseitigen Dreiecks ABC liegen zwei kongruente Segmente (Seg), die zum Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks addiert werden. Davon wird dann der Flächeninhalt des Halbkreises (Hk) subtrahiert. Das Ergebnis wird schließlich noch mit 3 multipliziert.
$A_{AF} = 3 \cdot (A_{ABC} + 2 \cdot A_{Seg} - A_{Hk}) = 3 \cdot [A_{ABC} + 2 \cdot (A_{Sektor} - A_{ABC}) - A_{Hk}]$
$A_{AF} = 6 \cdot A_{Sektor} - 3 \cdot A_{ABC} - 3 \cdot A_{Hk})$

$$A_{AF} = \left[6 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot a^2\pi - 3 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi\right] \text{ cm}^2$$
$$A_{AF} = \left[a^2\pi - \frac{3}{4}a^2\sqrt{3} - \frac{3}{8}\, a^2\pi\right] \text{ cm}^2$$
$$A_{AF} = \left[\frac{5}{8}\, a^2\pi - \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}\right] \text{ cm}^2 = \left[\frac{a^2}{8} \cdot \left(5\pi - 6\sqrt{3}\right)\right] \text{ cm}^2$$

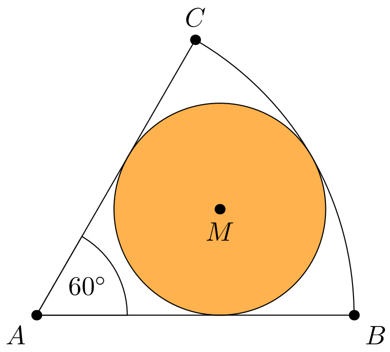
Für $a = 6$ ergibt sich: $A_{AF} \approx 23{,}92\,\text{cm}^2$

Anmerkung:

Es gilt $A_{AF} = \left[\frac{5}{8}\, a^2\pi - \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}\right] \text{ cm}^2 = \left[\frac{225°}{360°} \cdot a^2\pi - 3 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right] \text{ cm}^2$.

Das bedeutet: Die Ausgangsfigur hat den gleichen Flächeninhalt wie ein Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel 225° und dem Radius a cm, dem man 3 gleichseitige Dreiecke mit einer Seitenlänge von jeweils a cm entnommen hat.

22.

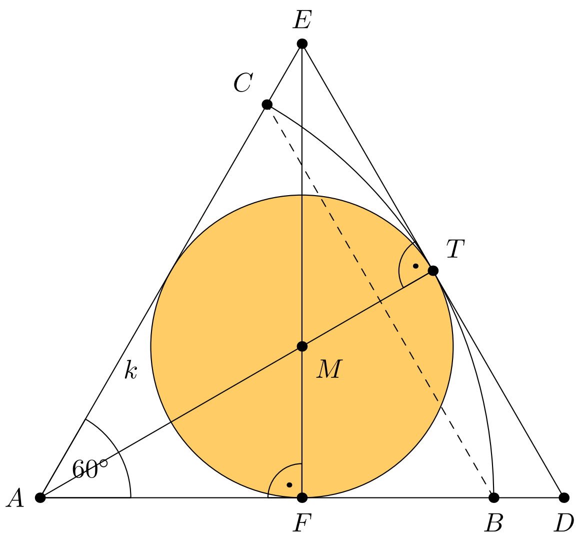


Der gefärbte Kreis mit dem Mittelpunkt M ist dem Kreissektor ABC mit dem Mittelpunkt A und einem Öffnungswinkel von 60° einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur für den Sektorradius $\overline{AB} = a = 6\,\text{cm}$.
Tipp: Die beiden Kreislinien berühren sich in einem Punkt T. Durch diesen Punkt verläuft die gemeinsame Tangente an die beiden Kreislinien. Zeichne diesen Punkt T und die Tangente ein.

(b) Welchen Bruchteil der Sektorfläche nimmt der Kreis ein?

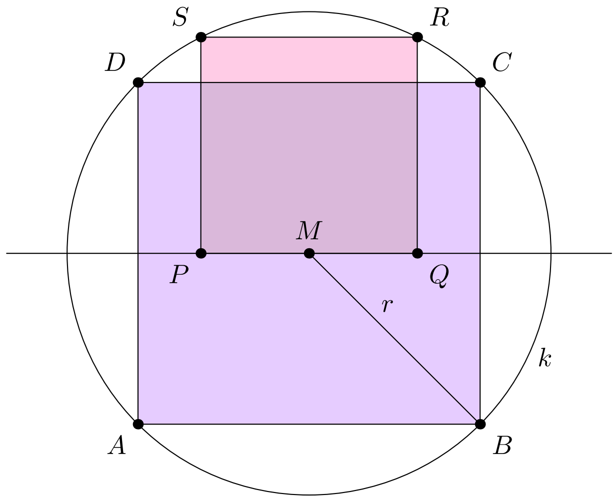
Lösung: (a)



(b) Die Gerade $[AT]$ ist eine Symmetrieachse des gleichseitigen Dreiecks ABC und des Dreiecks ADE. Also ist dieses Dreieck ADE ebenfalls gleichseitig. Die Strecke $[MT]$ stellt den Radius des Kreises k dar.
Die $a = 6\,\text{cm}$ lange Strecke $[AT]$ ist eine Höhe im gleichseitigen Dreieck ADE. Der Kreis k ist der Inkreis des Dreiecks ADE. $\Rightarrow \quad [AT] \cap [EF] = M$. Somit stellt die Strecke $[MT]$ den Radius des Kreises k dar.
Weil im gleichseitigen Dreieck die Winkelhalbierenden gleichzeitig die Schwerlinien sind, teilt der Mittelpunkt M die Strecke $[MT]$ im Verhältnis $2:1$.

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1}{3}a \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{Kreis}}{A_{Sektor}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\cdot a\right)^2 \pi}{\frac{60^\circ}{360^\circ}\cdot a^2\,\pi} = \frac{1}{9} : \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

23.

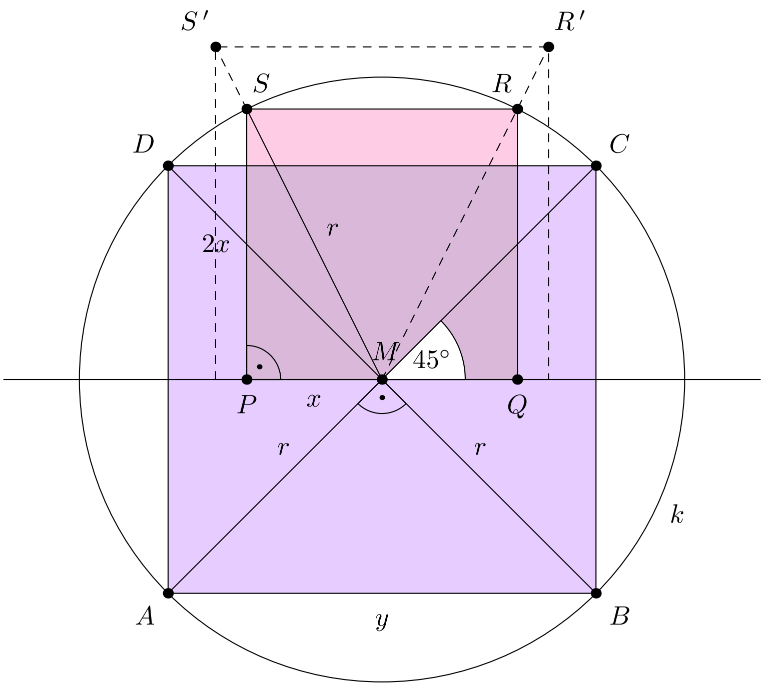


In den Kreis k mit dem Radius r ist das Quadrat $ABCD$ und in seinen Halbkreis ist das Quadrat $PQRS$ einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur für $r = 4\,\text{cm}$.

(b) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Quadrate.

Lösung: (a)



Zeichne zunächst den Kreis mit dem Mittelpunkt M und seinem waagrecht liegenden Durchmesser. Zeichne dann zwei Geraden ein, die jeweils einen 45°-Winkel mit dieser Waagrechten bilden und sich im Punkt M schneiden. Die Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit der Kreislinie k sind die Eckpunkte des Quadrates $ABCD$.
Um das Quadrat $PQRS$ zu erhalten, zeichnest du am besten erst ein (hier gestrichelt eingezeichnetes) Probequadrat mit den Eckpunkten R' und S' ein. Dann folgt: $[MR'] \cap k = \{R\}$ und $[MS'] \cap k = \{S\}$.

Die Lote der Eckpunkte R und S auf die Waagrechte liefern die restlichen Quadrat-Eckpunkte Q und P.

(b) Für die Berechnung kannst du den Radius r verwenden. Es geht jedoch auch, wenn du für r 4 cm einsetzt.
Es gilt: $\overline{AB} = y$ und $\overline{MP} = x$, dann ist $\overline{PS} = 2x$ (siehe Zeichnung).
Das Dreieck ABM ist gleichschenklig-rechtwinklig und damit ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $y = r\sqrt{2}$. $\quad\Rightarrow\quad A_{ABCD} = y^2 = 2r^2$.

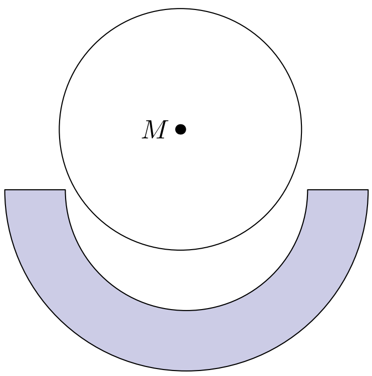
PYTHAGORAS im Dreieck PMS: $x^2 + (2x)^2 = r^2$

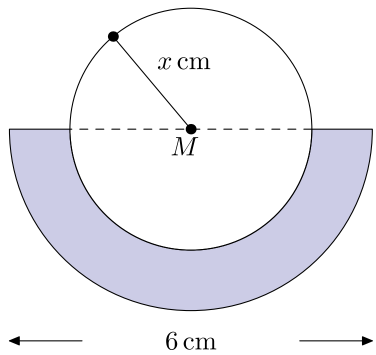
$$\Leftrightarrow \quad 5x^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{2r}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad A_{PQRS} = (2x)^2 = \frac{4}{5}r^2$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{4}{5}r^2}{2r^2} = 2:5 = \frac{4}{10} = 40\%$$

Das Quadrat $ABCD$ ist um 60% größer als das Quadrat $PQRS$.

24.





In dem Bild eines Firmenlogos wird der Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius x cm ($x < 3$) in einen dunkel gefärbten Halbkreisring eingebettet, dessen äußerer Durchmesser 6 cm beträgt (siehe Abbildung oben rechts).

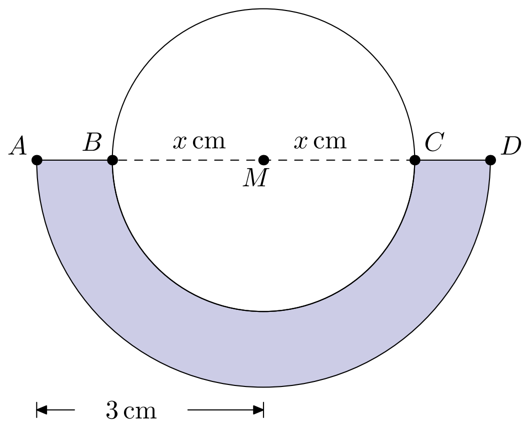
(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

(b) Berechne für $x = 2$ den Flächeninhalt des Halbkreisringes.

(c) Berechne x so, dass der Inhalt der Kreisfläche genauso groß wie der des Halkreisringes ist.

(d) Berechne x so, dass der Halbkreisring den doppelten Umfang wie der Vollkreis besitzt.

Lösung: (a)



Beginne am besten mit dem Vollkreis.

(b) $A_{HR} = \left(\frac{1}{2} \cdot 3^{\,2}\pi - \frac{1}{2} \cdot 2^{\,2}\pi\right)\ \text{cm}^2 = 2,5\pi\,\text{cm}^{\,2} \approx 7,85\,\text{cm}^2$

(c) Die Maßzahlengleichung für $x \in \mathbb{Q}^+$ heißt:

$$x^2\pi = \frac{1}{2} \cdot 3^{\,2}\pi - \frac{1}{2} \cdot x^{\,2}\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}x^{\,2} = \frac{9}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{3} \approx 1,73$$

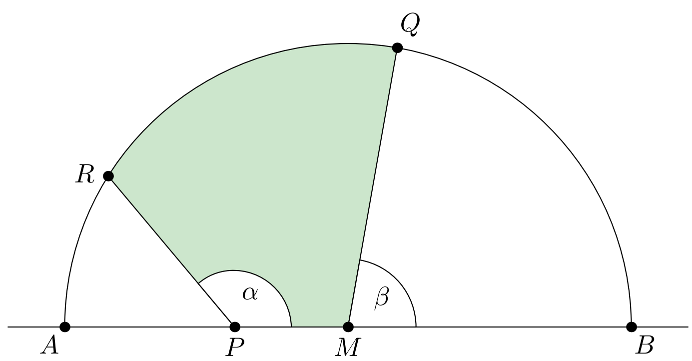
(d) Es gilt $\overline{AB} = \overline{CD} = (3 - x)\,\text{cm}$.

$$2 \cdot u_{Vollkreis} = 2 \cdot 2x\pi\,\text{cm} \quad u_{HK} = \left[\frac{1}{2} \cdot 6\pi + 2 \cdot (3 - x) + \frac{1}{2} \cdot 2x\pi\right]\ \text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad 4x\pi = 3\pi + 6 - 2x + x\pi \quad \Leftrightarrow \quad x(2 + 3\pi) = 6 + 3\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{6 + 3\pi}{2 + 3\pi} \approx 1,35$$

25.



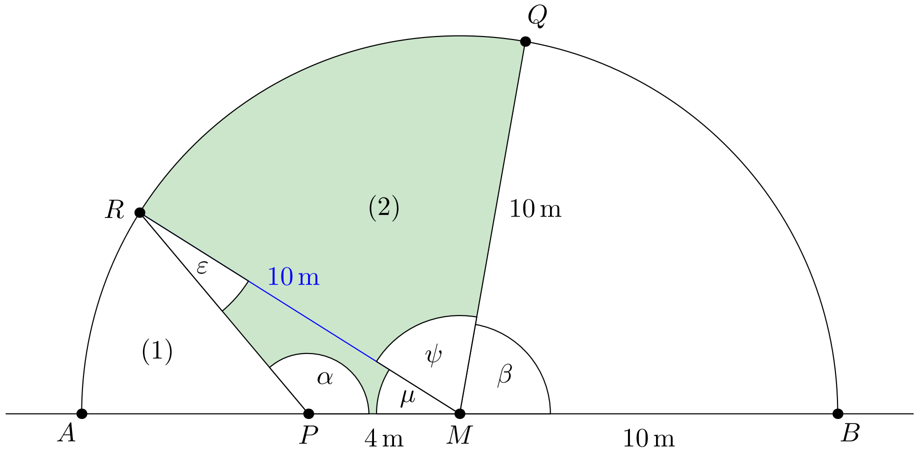
Die Figur stellt den Entwurf einer halbkreisförmigen Bühnenfläche dar. Der Durchmesser $[AB]$ soll 20 m und die Länge der Strecke $[PM]$ soll 4 m betragen.
Die von den Strecken $[RP]$, $[PM]$, $[MQ]$ und dem Kreisbogen von Q nach R begrenzte Teilfläche soll farbig von der restlichen Fläche abgesetzt werden.

(a) Zeichne die Bühne im Maßstab 1 : 200 für $\alpha = 130°$ und $\beta = 80°$.

(b) Berechne den Inhalt der farbig abgesetzten Teilfläche.
[Ergebnis: $A_{Farbe} \approx 69,85\,\text{m}^2$]

(c) Berechne den prozentualen Anteil der farbigen Fläche an der Gesamtfläche der Bühne.

Lösung: (a)



Für deine Zeichnung gilt:
$20\,\text{m} = 2000\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 2000\,\text{cm} : 200 = 10\,\text{cm}$
$4\,\text{m} = 400\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{PM} = 400\,\text{cm} : 200 = 2\,\text{cm}$

(b) Strategie: Addiere den Flächeninhalt des Dreiecks PMR zum Kreissektor (2) mit dem Mittelpunktswinkel ψ. Halbkreisfläche. Die „weiße“ Teilfläche (1) ist **kein Kreissektor**.
Die Hilfslinie $[MR]$ ist die Schlüsselstelle auf dem Lösungsweg.

$$A_{Halbkreis} = \frac{1}{2} \cdot 10^2\pi\,\text{m}^2 = 50\pi\,\text{m}^2 \approx 157,08\,\text{m}^2$$

$$A_1 = A_{Sektor\,MRA} - A_{\Delta PMR}$$

Sinussatz im Dreieck PMR: $\dfrac{\sin\varepsilon}{4} = \dfrac{\sin 130^\circ}{10}$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon \approx 17,84^\circ \quad \Rightarrow \quad \mu \approx 180^\circ - 130^\circ - 17,84^\circ = 32,16^\circ$$

$$A_{\Delta PMR} \approx \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \cdot \sin 32,16^\circ \approx 10,65\,\text{m}^2$$

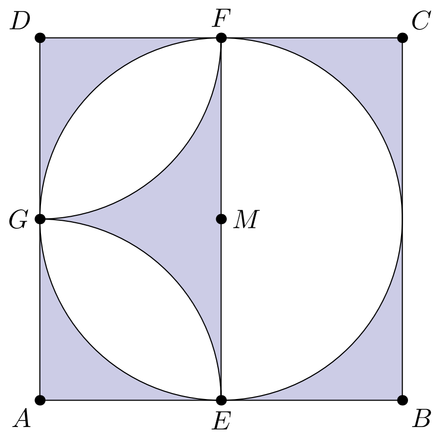
$$\psi \approx 180^\circ - 80^\circ - 32,16^\circ = 67,84^\circ$$

$$A_{(2)} = \left(\frac{67,84^\circ}{360^\circ} \cdot 10^2 \cdot \pi\right)\,\text{m}^2 \approx 59,20\,\text{m}^2$$

$$A_{Farbe} \approx (10,65 + 59,20)\,\text{m}^2 = 69,85\,\text{m}^2$$

(c) $\dfrac{A_{Farbe}}{A_{Halbkreis}} \approx \dfrac{69,85\,\text{m}^2}{157,08\,\text{m}^2} \approx 0,44 = \%$

26.

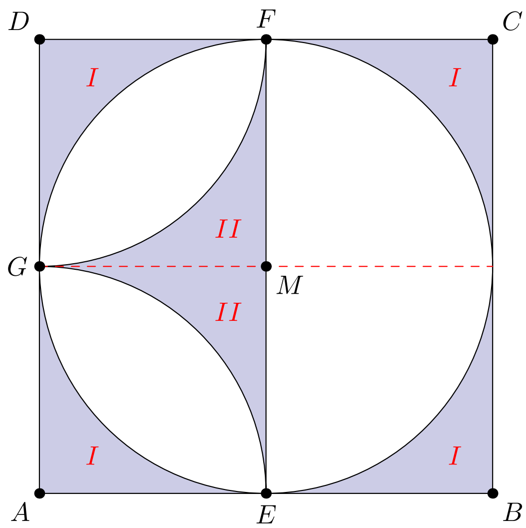


Das ist das Logo einer Firma, die Elektrogeräte herstellt.
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit dem Mittelpunkt M. Die Punkte A und D sind die Mittelpunkte der Kreisbögen von E nach G bzw. von G nach F.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne die Summe der Flächeninhalte der getönten Teilflächen in der Figur.

Lösung: (a)



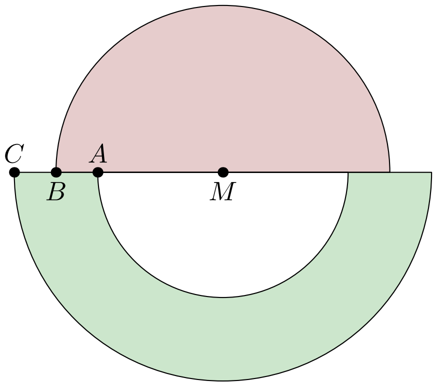
(b) Aus Symmetriegründen gilt: $A_I = A_{II}$.

$$A_I = (3^2 - \frac{1}{4} \cdot 3^2 \cdot \pi)\,\text{cm}^2 \approx 1{,}93\,\text{cm}^2.$$

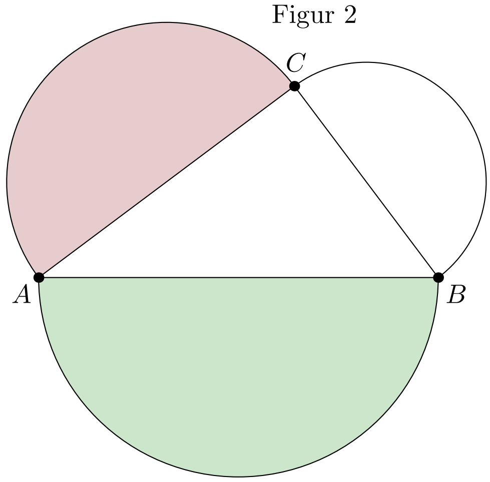
$$A_{gesamt} = 4 \cdot A_I + 2 \cdot A_{II} = 6 \cdot A_I \approx 11{,}58\,\text{cm}^2.$$

27.

Figur 1



Figur 2



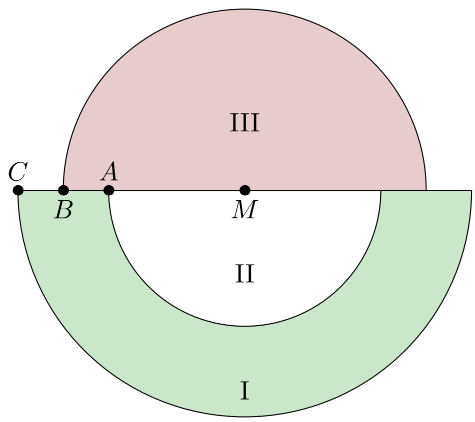
(a) Zeichne die Figur 1 für $\overline{MA} = 3,6\,\text{cm}$, $\overline{MB} = 4,8\,\text{cm}$ und $\overline{MC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Zeige ohne zu runden, dass der untere Kreisring und der obere Halbkreis den gleichen Flächeninhalt besitzen.

(c)
- Zeichne die Figur 2 für $c = \overline{AB} = 12\,\text{cm}$, $a = \overline{BC} = 7,2\,\text{cm}$ und $b = \overline{AC} = 9,6\,\text{cm}$.
- Begründe: Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.
- Notiere den Zusammenhang zwischen den drei Halbkreisflächen in der Figur 2 in Form einer Gleichung.
- Was hat die Figur 2 mit der Figur 1 zu tun? Beschreibe deine Idee.

Lösung: (a) Die Figur 1 ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

Figur 1



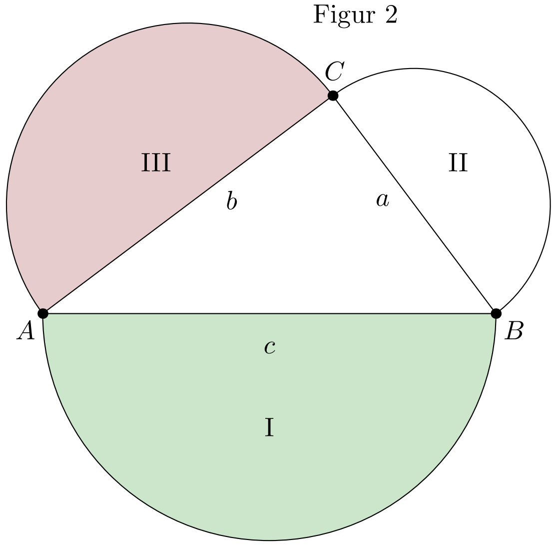
(b) Du hast die drei Halbkreise I, II und III vor dir.
Es müsste gelten: $A_{III} = A_I - A_{II}$. Es wird in der Einheit cm^2 gerechnet.

Also: $\frac{1}{2} \cdot 4,8^2\pi = \frac{1}{2} \cdot 6^2\pi - \frac{1}{2} \cdot 3,6^2\pi \;\Big|\; : \frac{1}{2}\pi$

$4,8^2 = 6^2 - 3,6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 23,04 = 36 - 12,96$. Das stimmt, also ist die Behauptung bewiesen.

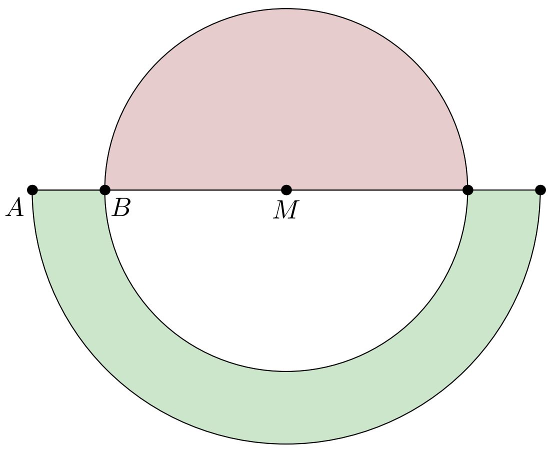
(c)
- Die Figur 2 ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

Figur 2



- Für die Maßzahlen müsste gelten:
  $12^2 = 7,2^2 + 9,6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 144 = 51,84 + 92,16$. Das stimmt, also ist das Dreieck ABC rechtwinklig.
- Es gilt: $c^2 = a^2 + b^2 \;\big|\; \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi$
  $\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \pi$.
  Das bedeutet: Der Halbreis I hat den gleichen Flächeninhalt wie die beiden Halbkreise II und III zusammen.
- In der Figur 1 siehst du einen gleich gelagerten Fall: Wenn du den Halbkreis II aus dem Halbkreis I entfernst, ergibt sich: Der Halbkreis I muss genauso groß sein wie die beiden Halbkreise II und III zusammen.
  In der Figur 1 und der Figur 2 haben gleich nummerierte Halbkreise den gleichen Durchmesser; d.h. sie sind kongruent.

28.



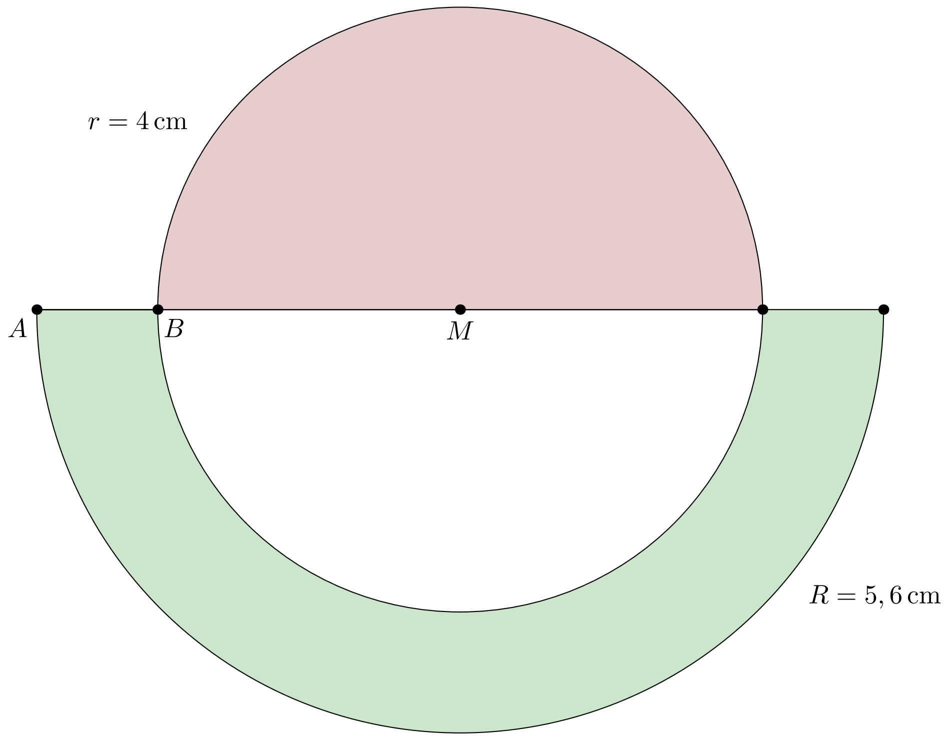
(a) Zeichne die Figur für $R = \overline{MA} = 5,6\,\text{cm}$ und $r = \overline{MB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Zeige, dass der untere Kreisring und der obere Halbkreis nicht denselben Flächeninhalt besitzen.

(c) Jetzt sei $r = \sqrt{18}\,\text{cm}$.
Berechne R so, dass der Inhalt der beiden getönten Flächen gleich ist.

(d) Welcher Zusammenhang muss zwischen R und r bestehen, damit die getönten Flächen gleichen Inhalt besitzen?

Lösung: (a)



(b) **Anmerkung: Zu allen Flächenmaßzahlen gehört die Einheit „cm^2“.** Es gilt: $A_{\text{Halbkreis(klein)}} = \frac{1}{2} \cdot 4^2\pi$ und $A_{\text{Kreisring}} = \frac{1}{2} \cdot 5,6^2\pi - A_{\text{Halbkreis(klein)}}$.

Es muss also gelten: $A_{\text{Halbkreis(groß)}} = 2 \cdot A_{\text{Halbkreis(klein)}}$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 5,6^2\pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2\pi \quad \Big| : \pi \quad \Leftrightarrow \quad 15,68 \neq 16\,.$$

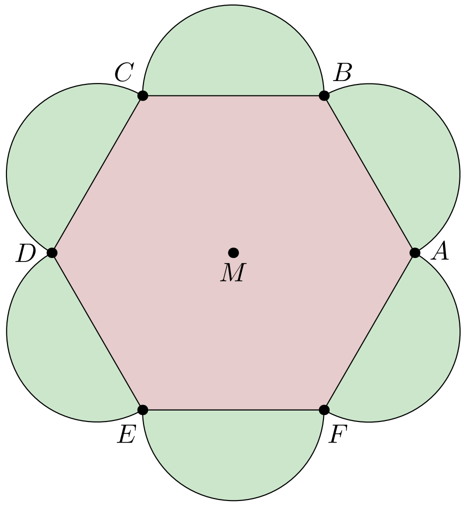
(c) $\frac{1}{2} \cdot R^2\,\pi = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{18}^{\,2}\pi\,\text{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 = 36\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad R = 6\,\text{cm}\,.$

(d) Es muss gelten: $\frac{1}{2} \cdot R^2\,\pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^{\,2}\pi \quad \Rightarrow \quad R = r\sqrt{2}\,.$

Du könntest das auch mit Hilfe der Eigenschaften der zentrischen Streckung begründen:

- Alle Kreise sind zueinander ähnlich.
- Wenn du eine Kreisfläche verdoppelst, dann gilt für den Streckungsfaktor k: $k^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{2}\,.$

29.

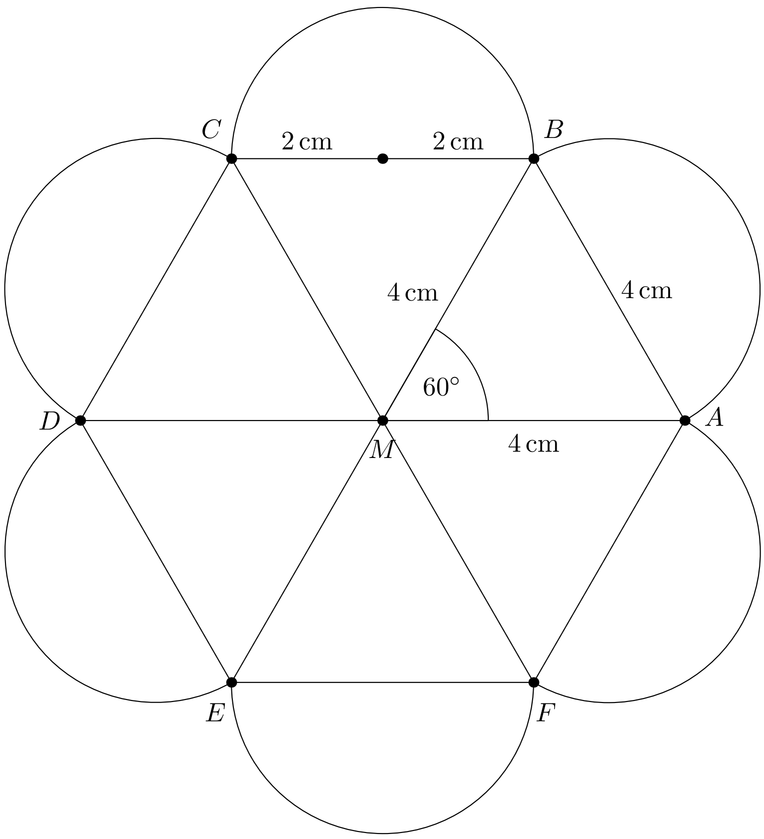


Das Sechseck $ABCDEF$ mit dem Mittelpunkt M ist regelmäßig.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AD} = 8\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A der Figur. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



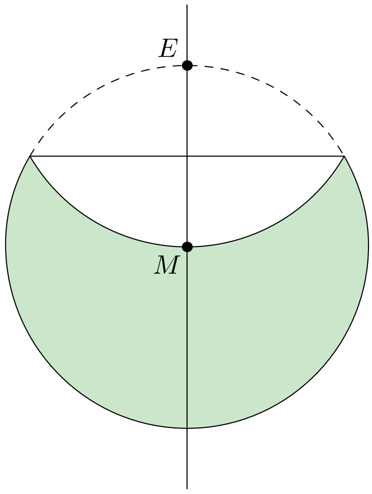
(b) Die drei Diagonalen zerlegen jedes regelmäßige Sechseck in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke. In unserem Fall hat jedes dieser gleichseitigen Dreiecke eine Seitenlänge von $4\,\text{cm}$.

Die sechs kongruenten Halbkreise lassen sich paarweise zu drei Vollkreisen mit dem

Radius $r = 2\,\text{cm}$ zusammenfügen .

Also: $A = \left(6 \cdot \frac{4^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2^2 \cdot \pi\right)\,\text{cm}^2 \approx 79,27\,\text{cm}^2$.

30.

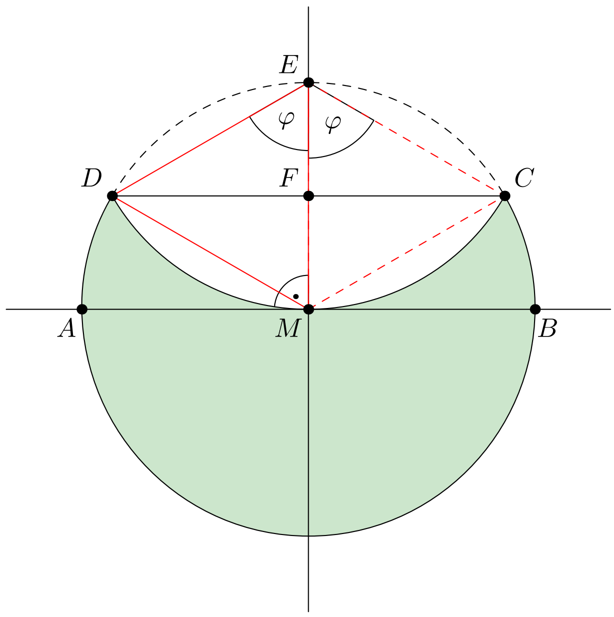


Erwin hat einen Kreis aus Papier ausgeschnitten. Er faltet nun die Kreisscheibe so, dass der Punkt E auf den Kreismittelpunkt M zu liegen kommt.

(a) Zeichne die Figur mit einem Kreisdurchmesser von $6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Anteil der eingefärbten Fläche an der gesamten Kreisfläche in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Von der Kreisscheibe hat Erwin das Kreissegment $CDMC$ heruntergeklappt.
Den Flächeninhalt dieses Kreissegmentes erhältst du, indem du vom Flächeninhalt des Kreissektors $EDMCE$ den Flächeninhalt des Dreiecks DCE subtrahierst.
Im Dreieck DME gilt: $\overline{ME} = \overline{MD} = \overline{DE} = 3\,\text{cm}$.
Also ist das Dreieck DME gleichseitig, und es gilt: $\varphi = 60°$.
Das Dreieck DCE hat den gkeichen Flächeninhalt wie dieses Dreieck DME.

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{120°}{360°} \cdot 3^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 9,42\,\text{cm}^2\,.$$

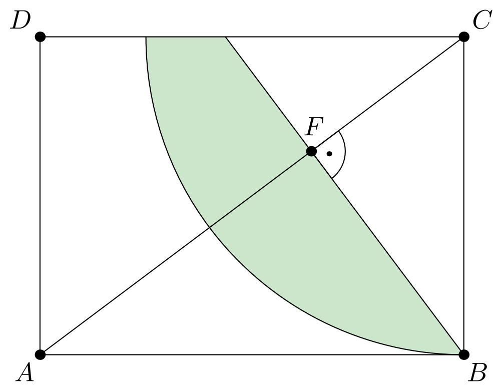
$$A_{\Delta\,DCE} = \frac{3^2}{4}\,\text{cm}^2 \cdot \sqrt{3} \approx 3,90\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{\text{Segment}} \approx 9,42\,\text{cm}^2 - 3,90\,\text{cm}^2 = 5,52\,\text{cm}^2\,.$$

Diese Segmentfläche musst du zwei Mal von der Fläche der Kreisscheibe subtrahieren:
$A_{\text{gefärbt}} \approx 3^2\pi\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 5,52\,\text{cm}^2 \approx 17,23\,\text{cm}^2$.

$$\frac{A_{\text{gefärbt}}}{A_{\bigcirc}} = \frac{17,23\,\text{cm}^2}{28,27\,\text{cm}^2} \approx 0,6945 = 69,54\%\,.$$

31.

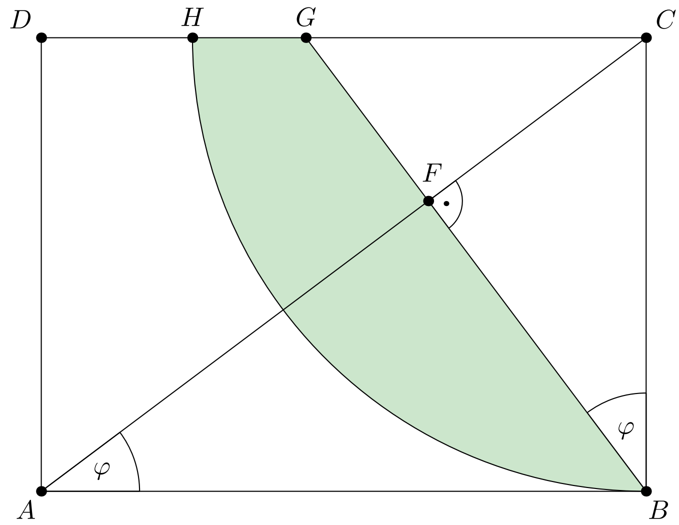


Der Punkt C des Rechtecks $ABCD$ ist der Mittelpunkt des Kreisbogens.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt A der eingefärbten Fläche. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Strategie: Subtrahiere den Flächeninhalt des Dreiecks BCG vom Flächeninhalt des Viertelkreises mit dem Mittelpunkt C und dem Radius $r = 6\,\text{cm}$.

$A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{4} \cdot 6^2\pi\,\text{cm}^2 = 9\pi\,\text{cm}^2$.

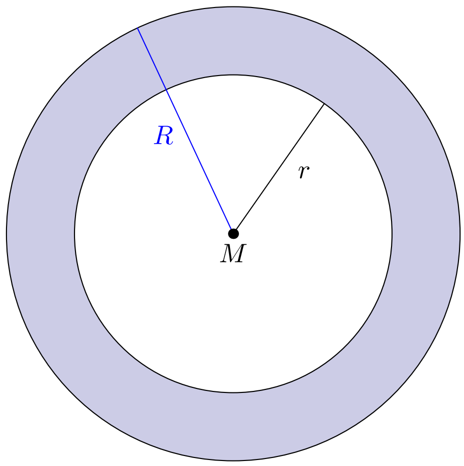
Weil sie z.B. im Winkelmaß φ übereinstimmen, sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABC und BCG zueinander ähnlich:

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{CG} = \frac{36\,\text{cm}^2}{8\,\text{cm}} = 4,5\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\,BCG} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 4,5\,\text{cm} = 13,5\,\text{cm}^2\,.$$

$$\Rightarrow \quad A = (9\pi - 13,5)\,\text{cm}^2 \approx 14,77\,\text{cm}^2\,.$$

32.



(a) Zeichne die Figur für $R = 5\,\text{cm}$ und $r = 3,5\,\text{cm}$.

(b) Berechne für $R = 5\,\text{cm}$ den Kreisradius r so, dass der Kreisring 19% der großen Kreisfläche einnimmt.

(c) Berechne für $r = 3,5\,\text{cm}$ den Kreisradius R so, dass der Flächeninhalt des Kreisringes genauso groß wird wie der des kleinen Kreises.

Lösung: (a) Klar.

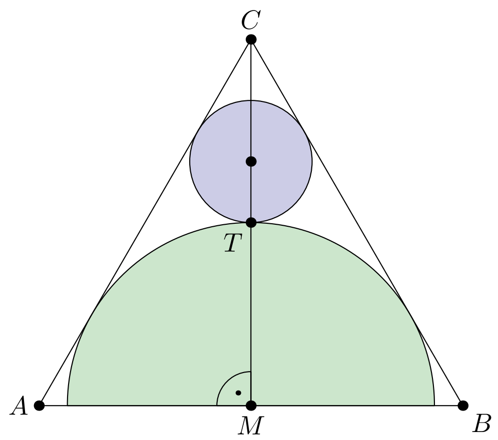
(b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned} 5^2\pi - r^2\pi &= 0,19 \cdot 5^2\pi \\ r^2\pi &= 0,81 \cdot 5^2\pi \\ r &= 0,9 \cdot 5\,\text{cm} = 4,5\,\text{cm} \end{aligned}$$

(c) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned} 3,5^2\pi &= (R^2 - 3,5^2)\pi \\ R^2\pi &= 2 \cdot 3,5^2\pi \\ R &= 3,5 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \approx 4,95\,\text{cm} \end{aligned}$$

33.

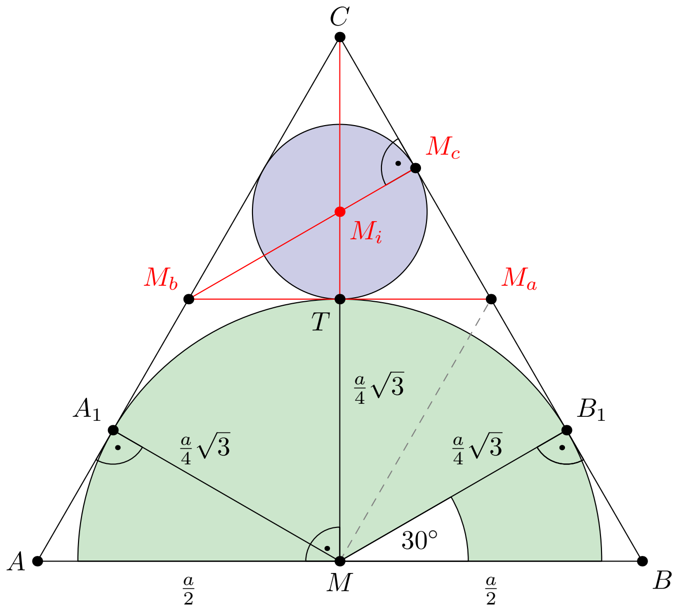


Im gleichseitigen Dreieck ABC ist M der Basismittelpunkt.
Diesem gleichseitigen Dreieck sind ein Halbkreis und ein kleinerer Kreis einbeschrieben worden. Die beiden Kreislinien berühren sich im Punkt T.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$.

(b) Berechne das Verhältnis des Flächeninhaltes des kleinen Kreises zu dem des Halbkreises.

Lösung: (a)



Wir bezeichenen die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ABC mit a.

(b) Die Dreiecke AMA_1 und MBB_1 sind halbe gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}$. Aus Symmetriegründen sind diese beiden Dreiecke zudem kongruent.
Das Dreieck MBB_1 ist (ebenso wie das Dreieck AMA_1) ein halbes gleichseitiges Dreieck mit der Dreieckshöhe $\overline{MB_1}(=\overline{MA_1}) = \frac{a}{4}\sqrt{3}$.
Weil der Punkt T auf der Halbkreislinie liegt, gilt ebenso $\overline{MT} = \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MC}$.
M_a und M_b sind also zwei Seitenmittelpunkte des gleichseitigen Dreiecks ABC.
Dann gilt $[M_aM_b] \,||\, [AB]$.
Demnach beträgt der Inkreisradius ρ_i des Dreiecks M_bM_aC ein Viertel von dem des Dreiecks ABC.
Für den Inkreisradius ρ_g des gleichseitigen Dreiecks gilt: $\rho_g = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
$\Rightarrow \quad \rho_i = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{24}\sqrt{3}$.
Für den Flächeninhalt A_k des kleinen Kreises gilt dann:

$$A_k = \left(\frac{a}{24}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi = \frac{a^2}{96} \cdot \pi\,.$$

Für den Flächeninhalt A_{HK} des Halbkreises gilt dann:

$$A_{HK} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{4}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi = \frac{3a^2}{32} \cdot \pi\,.$$

Für das fragliche Flächenverhältnis ergibt sich dann:

$$\frac{A_k}{A_{HK}} = \left[\frac{a^2}{96} \cdot \pi\right] : \left[\frac{a^2}{32} \cdot \pi\right] = \frac{32}{96} = \frac{1}{3}\,.$$