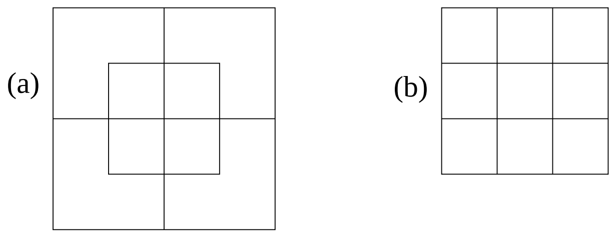
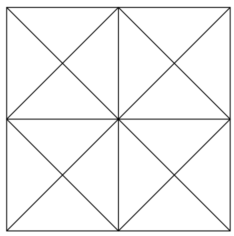
Geometrische Grundlagen

1. Wie viele Quadrate entdeckst du in jeder der beiden Figuren?



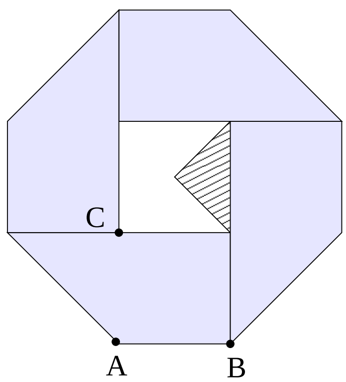
Lösung: (a) 10 (b) 14

2. Wie viele Dreiecke entdeckst du in der Figur?



Lösung: 44

3. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Zusätzlich ist hier ein schraffiertes Dreieck im Inneren des weißen Quadrates eingezeichnet.



   (a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = \overline{AC} = 2\,\text{cm}$. Du musst nicht am Punkt A oder B beginnen.

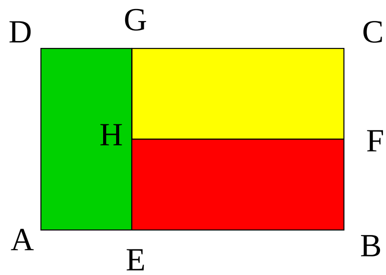
   (b) Berechne den Flächeninhalt des weißen Quadrates in deiner Zeichnung.

   (c) Berechne den Flächeninhalt der gesamten Figur.

(d) Wie oft kannst du das schraffierte Dreieck in der Figur unterbringen? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) –
(b) $4\,\text{cm}^2$
(c) $28\,\text{cm}^2$
(d) Das schraffierte Dreieck ist 28-mal in der Figur enthalten. Begründung: In das halbe innere Quadrat passen 2 schraffierte Dreiecke. In die Figur passen 14 halbe Quadrate: $2 \cdot 14 = 28$.

4.



Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.

(a) Berechne den Flächeninhalt jedes Rechtecks in mm^2.

(b) Welche Länge hätte der Saum dieser Flagge, wenn sie $5\,\text{m}$ lang und $3\,\text{m}$ hoch wäre?
Wie viele m^2 Stoff bräuchte man für das Rechteck $AEGD$ in dieser Flagge, wenn alle Rechtecke im Inneren den gleichen Flächeninhalt hätten?

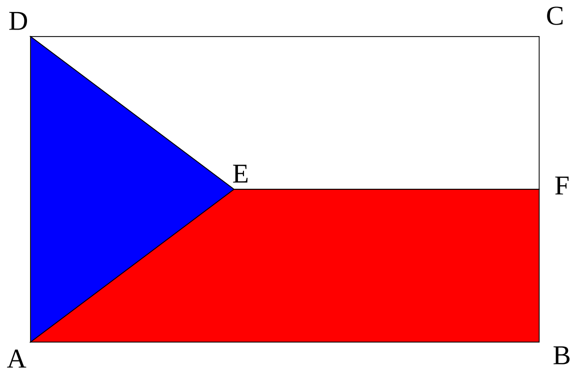
(c) Wie viele m^2 Stoff bräuchte man für eine Flagge in Originalgröße, wenn das obige Bild diese Flagge im Maßstab 1:200 darstellt?

(d) Die Fahne wird jetzt so gefaltet, dass der Punkt B auf A und der Punkt C auf D zu liegen kommt. Welche Abmessungen in m müsste die Fahne haben, damit sich auf diese Weise ein Quadrat ergibt?
Wie müsste die Fahne aussehen, damit sich erst nach zweimaligem Falten ein Quadrat ergibt?

Lösung:

(a) Das Ergebnis fällt je nach Größe der Zeichnung aus.
(b) Der Saum wäre $16\,\text{m}$ lang und die Fläche jedes Rechtecks wäre $5\,\text{m}^2$ groß.
(c) Je nach Größe der Zeichnung auf dem Blatt. Der Flächeninhalt der Originalfahne muss aber stets 400-mal so groß wie die Zeichnung sein.
(d) Es gibt beliebig viele Lösungen, aber jedes Rechteck muss dabei doppelt so breit wie hoch sein.
Im zweiten Fall müsste die Fahne selbst ein Quadrat oder viermal so breit wie hoch sein.

5. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



(a) In welche Figuren ist die rechteckige Fahne unterteilt?

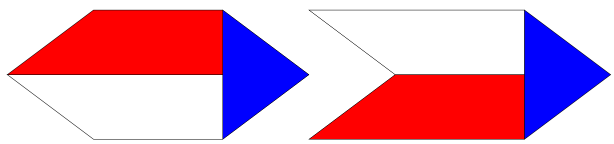
(b) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = \overline{EF} = 6\,\text{cm}$.
Zerschneide sie in ihre Teilflächen und setze sie dann auf verschiedene Weise zu einer anderen symmetrischen Figur wieder zusammen. Bei der Symmetrieeigenschaft soll auf Farben keine Rücksicht genommen werden.
Klebe die Figur, die dir besser gefällt, in dein Heft.

(c) Zeichne die Figur mit den gleichen Abmessungen wie in Aufgabe (b) in ein Gitternetz.
Gib die Koordinaten der Punkte A, B, C, D, E und F an.

Lösung:

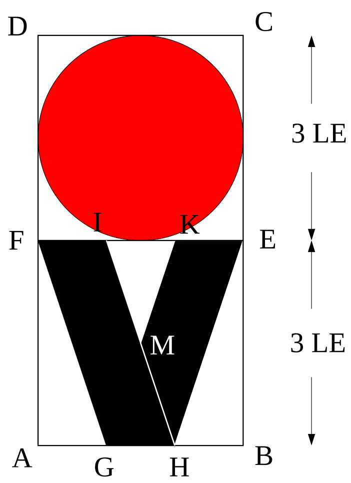
(a) Die Figur enthält ein symmetrisches Dreieck und zwei gleiche Vierecke (Trapeze).

(b) Z.B.:



(c) Z.B.: $A(1|1)$,$B(11|1)$,$C(11|7)$,$D(1|7)$,$E(5|4)$ und $F(11|4)$.

6. Das ist ein Bild des Logos der Firma MARABU, die Farben herstellt.



Es gilt: $\overline{AG} = \overline{GH} = \overline{HB} = 1\,\text{LE}$. Ebenso gilt: $\overline{FI} = \overline{IK} = \overline{KE} = 1\,\text{LE}$.

(a) Zeichne die Figur. 1LE entspricht dabei 2 cm.

(b) Wie viele Vierecke und wie viele Dreiecke endeckst du darin? Beschreibe ihre Eigenschaften möglichst genau mit den Begriffen „senkrecht“, „parallel“ und „symmetrisch“.

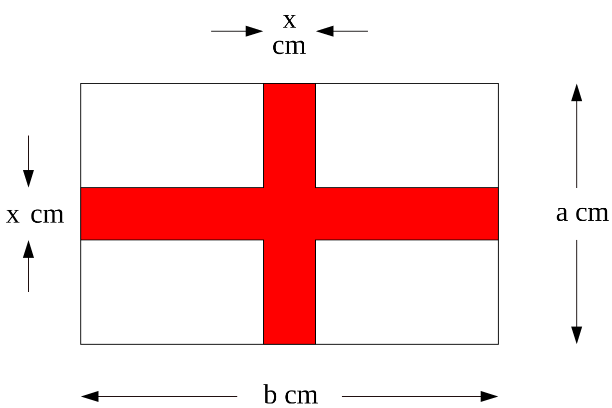
Lösung:

(a) –

(b) Die Figur enthält

- ein großes Rechteck und zwei gleiche Quadrate, also symmetrische Figuren; gegenüber liegende Seiten sind zueinander parallel, benachbarte Seiten stehen aufeinander senkrecht.
- Ein Parallelogramm (die gegenüber liegenden Seiten sind jeweils parallel) und ein Trapez (zwei gegenüber liegende Seiten sind zueinander parallel)
- ein kleines und ein größeres („gleichschenkliges“) Dreieck mit je einer Symmetrieachse
- zwei gleiche („kongruente“) rechtwinklige Dreiecke

7. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



(a) Zeichne die Figur für $b = 8$, $a = 5$ und $x = 1$.

(b) Wie viele Rechtecke sind in der Figur enthalten?

(c) Wie viele rechte Winkel entdeckst du?

(d) Berechne den Flächeninhalt des roten Kreuzes.

Lösung:

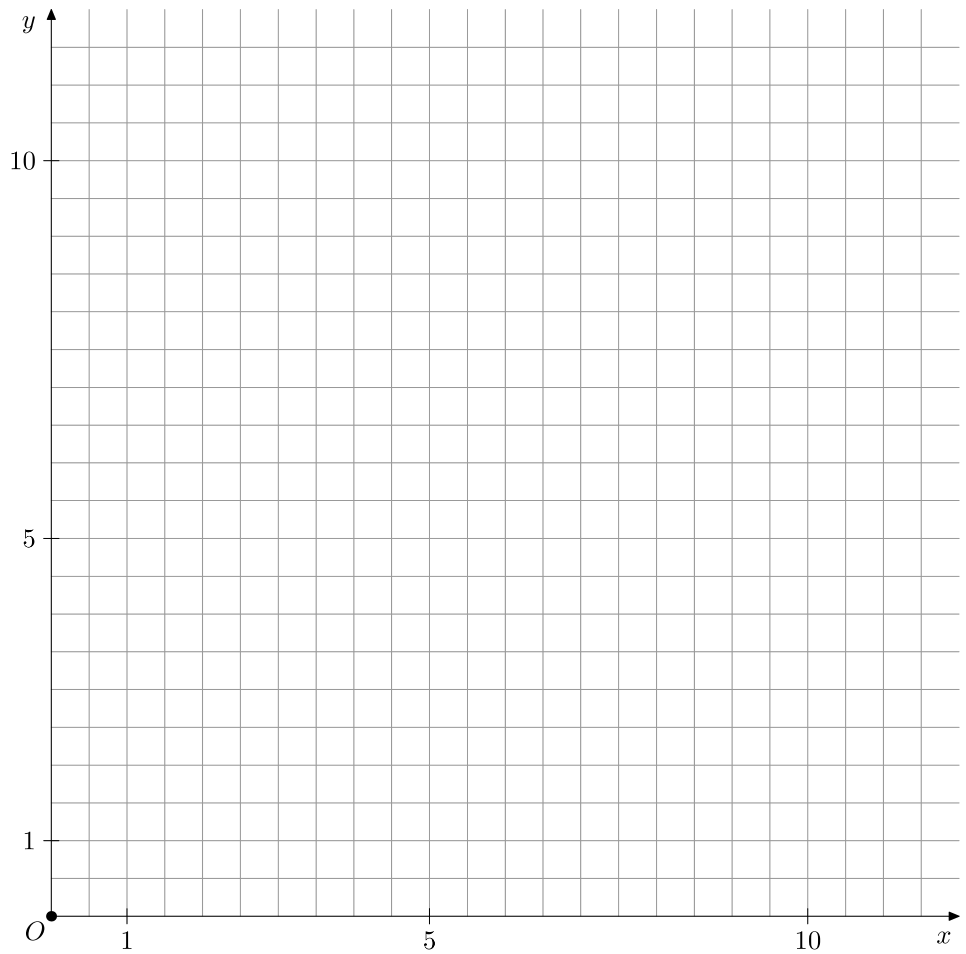
(a) –

(b) In der Figur sind 5 Rechtecke enthalten.

(c) In der Figur gibt es 16 rechte Winkel.

(d) Der Flächeninhalt beträgt $12\,\mathrm{cm}^2$.

8.



(a) Zeichne die Punkte $A_1(1 \mid 2)$, $A_2(2 \mid 4)$, $A_3(3 \mid 6)$ und $A_4(4 \mid 8)$ in das Gitternetz.

(b) Notiere die Koordinaten des dazu passenden Punktes A_5. Zeichne diesen Punkt ein.

(c) Notiere jeweils für alle möglichen Punkte A_n einen Zusammenhang zwischen dem x-Wert und dem betreffenden y-Wert.

(d) Begründe: Der Punkt $N(x \mid 24689)$ passt nicht dazu, egal, welchen Wert die Variable x annimmt.

(e) Setze an die Stelle des Fragezeichens in $P(? \mid 0)$ eine Zahl ein, so dass der Punkt P passt. Begründe.

(f) Zeichne die Punkte $B_1(2 \mid 1)$, $B_2(4 \mid 2)$, $B_3(6 \mid 3)$, $B_4(8 \mid 4)$ und $B_5(10 \mid 5)$ in das Gitternetz.

(g) Notiere einen Zusammenhang zwischen dem x-Wert und dem y-Wert, der für alle Punkte B_n gilt.

(h) Vergleiche die Koordinaten der Punkte B_n mit denjenigen der Punkte A_n. Notiere, was Dir auffällt.

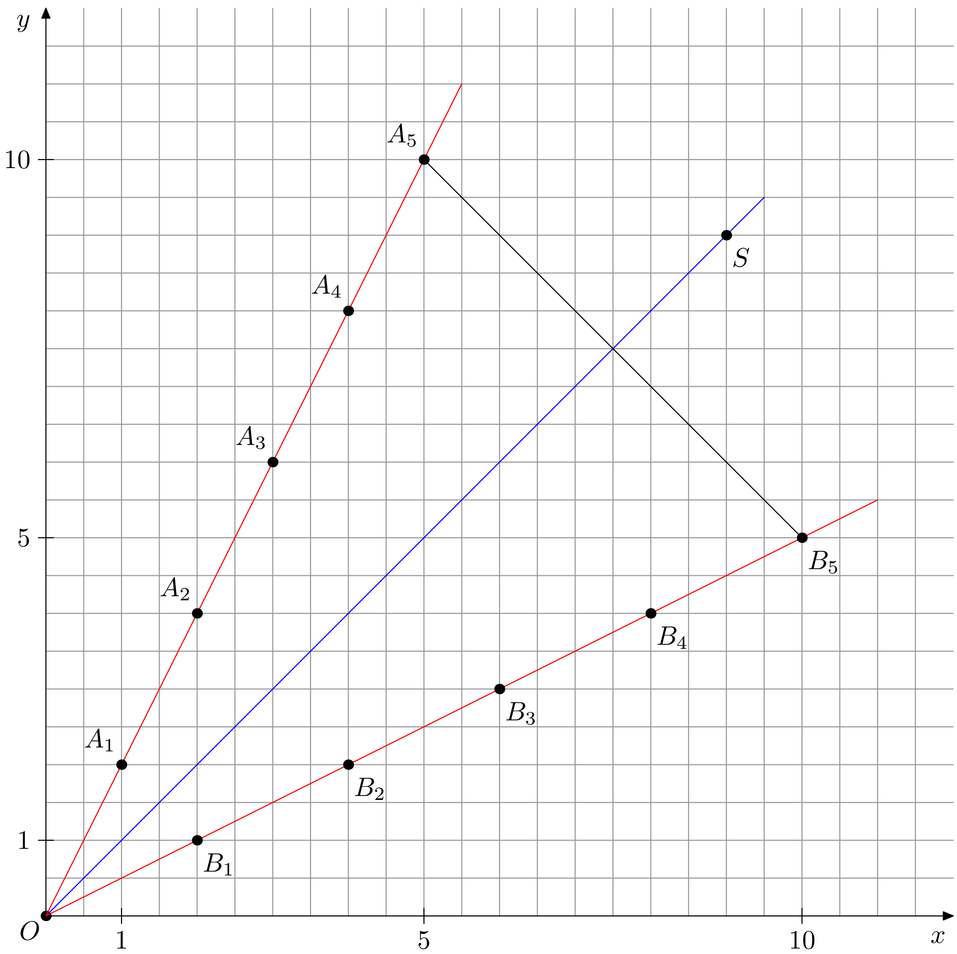
(i) Alle möglichen Punkte A_n und alle möglichen Punkte B_n liegen geordnet im Gitternetz. Setze jeweils den fehlenden Fachbegriff ein:

Alle möglichen Punkte A_n liegen auf einer ______________________________.

Alle möglichen Punkte B_n liegen auf einer ______________________________.
Ergänze deine Zeichnung entsprechend.

(j) Zeichne die Strecke $[A_5B_5]$ ein. Dadurch entsteht ein Dreieck.
Zeichne den Punkt $S(9 \mid 9)$ und die Halbgerade $[OS$ ein. Welche Rolle spielt die Halbgerade in diesem Dreieck?

Lösung: (a)



(b) $A_5(5 \mid 10)$. Siehe Zeichnung.

(c) „Der x-Wert der Punkte A_n ist stets halb so groß wie der y-Wert dieser Punkte.“
Oder:
„Der y-Wert der Punkte A_n ist stets doppelt so groß wie der x-Wert dieser Punkte.“

(d) Weil der y-Wert der Punkte A_n ist stets doppelt so groß wie der x-Wert dieser Punkte ist, muss der y-Wert stets gerade sein. Aber 24689 ist eine ungerade Zahl. Daher passt der Punkt N nicht.

(e) Der x-Wert der Punkte A_n ist stets halb so groß wie der y-Wert dieser Punkte. Wenn $y = 0$ gilt, dann muss $x = 0 : 2 = 0$ sein. Also gilt $? = 0$.
Oder: Alle Punkte A_n liegen auf einer Geraden, die durch den Ursprung verläuft. Also gilt $? = 0$.

(f) Siehe Zeichnung.

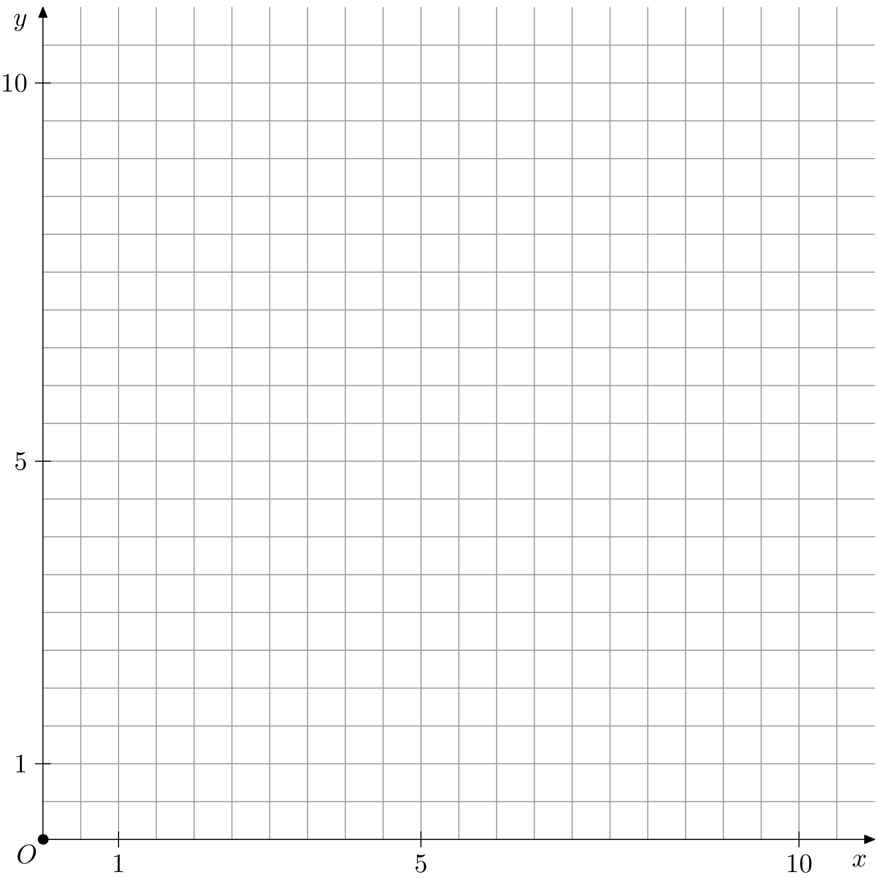
(g) „Der x-Wert der Punkte B_n ist stets doppelt so groß wie der y-Wert dieser Punkte.“
Oder:
„Der y-Wert der Punkte B_n ist stets halb so groß wie der x-Wert dieser Punkte.“

(h) Vertausche bei den Punkten A_n jeweils den x- mit dem y-Wert, dann erhältst du die Koordinaten der Punkte B_n.

(i) Alle Punkte A_n liegen auf einer Halbgeraden, weil die Reihe der Punkte A_n in der Zeichnung beliebig verlängert werden kann.
Alle Punkte B_n liegen ebenfalls auf einer Halbgeraden.
Siehe Zeichnung.

(j) Es entsteht das Dreieck OB_5A_5 (siehe Zeichnung). Die Halbgerade $[OS$ ist die Symmetrieachse dieses Dreiecks OB_5A_5.

9.



Gegeben sind die Punkte $A(2 \mid 1)$, $B(10 \mid 1)$, $C(10 \mid 9)$ und $D(2 \mid 9)$.

(a)
- Zeichne das Viereck $ABCD$ in das Gitternetz. Zeichne seine Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ein. Zeichne den Diagonalenschnittpunkt Z ein.
- Um welches besondere Viereck handelt es sich hier? Begründe.

(b) Die Mittelpunkte der Seiten $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ und $[DA]$ sind in dieser Reihenfolge die Punkte M_1, M_2, M_3 und M_4.
- Zeichne diese Seitenmittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 ein.
- Gib die Koordinaten von M_1 an.
  Welche besondere Lage besitzen die Punkte A, M_1 und B im Gitternetz?
  Welche Gemeinsamkeiten weisen die Koordinaten dieser drei Punkte auf?
  Notiere, wie du den x-Wert des Mittelpunktes M_1 aus den beiden x-Werten der Punkte A und B berechnen kannst.
- Gib die Koordinaten von M_2 an.
  Welche besondere Lage besitzen die Punkte B, M_2 und C im Gitternetz?
  Welche Gemeinsamkeiten weisen die Koordinaten dieser drei Punkte auf?
  Notiere, wie du den y-Wert des Mittelpunktes M_2 aus den beiden y-Werten der Punkte B und C berechnen kannst.

(c) - Zeichne das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ ein. Um welches besondere Viereck handelt es sich?
  Verbinde die Seitenmittelpunkte des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ zu einem neuen Viereck $EFGH$, wobei der Punkt E links unten liegen soll. Was für ein besonderes Viereck ist das?
  Notiere, wie du die Koordinaten des Mittelpunktes E aus den Koordinaten der Punkte M_1 und M_4 berechnen kannst.
- Durch seine Diagonalen wird das Viereck $EFGH$ in vier gleiche Dreiecke zerlegt. Vergleiche den Flächeninhalt dieses Vierecks mit dem der Vierecke $M_1M_2M_3M_4$ und $ABCD$.

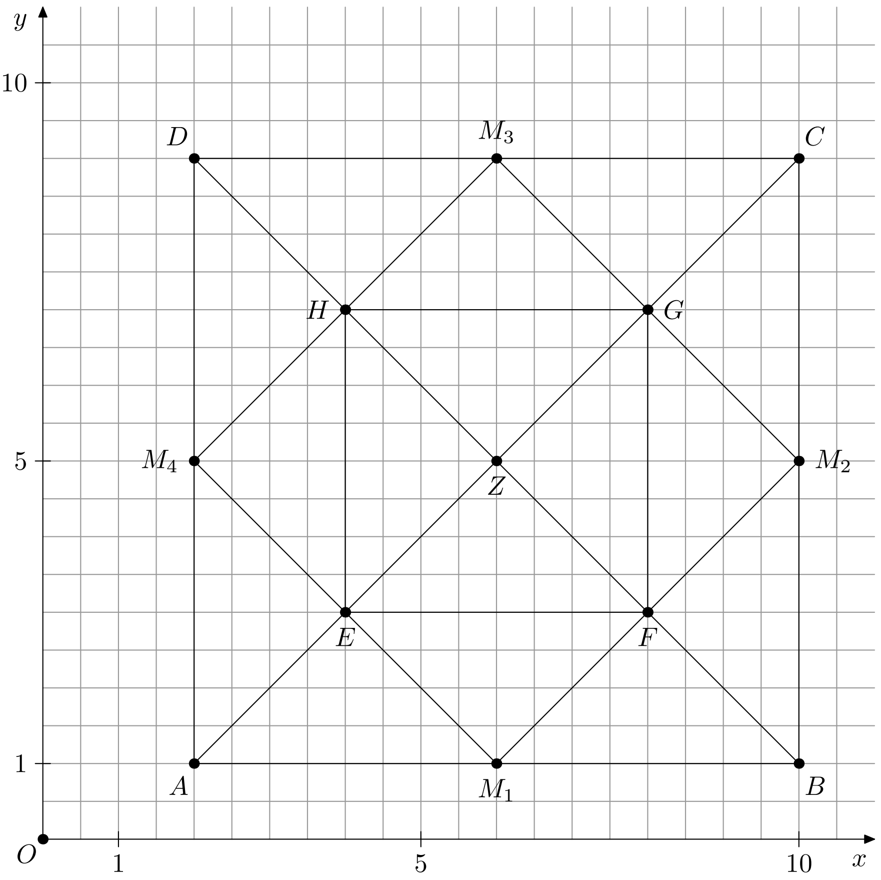
(d) - In das Viereck $EFGH$ kannst du wieder ein Seitenmittenviereck einzeichnen, und in dieses wieder ein Seitenmittenviereck usw.
  Zeichne auf diese Weise fünf weitere Seitenmittenvierecke ein. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Flächeninhalten zweier unmittelbar aufeinander folgender Seitenmittenvierecke?
- Wie viele Seitenmittenvierecke könntest du theoretisch noch einzeichnen? Wo endet das Ganze?

(e) - Nimm eine neue karierte Heftseite quer. Zeichne das Quadrat $ABCD$ mit den mittlerweile sieben Seitenmittenvierecken in seinem Inneren ohne Koordinatenachsen doppelt nebeneinander.
  Zeichne die Strecken $[M_1M_3]$ und $[M_2M_4]$ gestrichelt in beide Quadrate ein.
  Schneide das linke Quadrat $ABCD$ aus.
- Außerhalb des Seitenmittenvierecks $M_1M_2M_3M_4$ bleiben im Inneren des Quadrates $ABCD$ vier gleiche Dreiecke übrig. Male diese vier Dreiecke in der beiden Figuren grün aus.
  Schneide vom ausgeschnittenen Quadrat diese vier Dreiecke ab.
  Zeige am rechten Quadrat $ABCD$: Diese vier Dreiecke lassen sich zum Seitenmittenviereck $M_1M_2M_3M_4$ zusammenfügen.
- Außerhalb des Seitenmittenvierecks $EFGH$ bleiben im Inneren des Seitenmittenvierecks $M_1M_2M_3M_4$ vier gleiche Dreiecke übrig. Male diese vier Dreiecke in beiden Figuren orange aus.
  Schneide von der ausgeschnittenen Restfigur diese vier Dreiecke ab.
  Zeige am rechten Quadrat $ABCD$: Diese vier Dreiecke lassen sich zum Seitenmittenviereck $EFGH$ zusammenfügen.
- Außerhalb des nächsten Seitenmittenvierecks bleiben im Inneren des Seitenmittenvierecks $EFGH$ vier gleiche Dreiecke übrig. Male diese vier Dreiecke in beiden Figuren blau aus.
  Schneide von der ausgeschnittenen Restfigur diese vier Dreiecke ab.
  Zeige am rechten Quadrat $ABCD$: Diese vier Dreiecke lassen sich zu diesem nächsten Seitenmittenviereck zusammenfügen.
- Du kannst dir schon denken, wie es weitergeht: Färbe in der Reihenfolge grün- orange-blau immer wieder die folgenden vier gleichen Dreiecke ein, schneide sie aus und vergleiche ihren Flächeninhalt mit dem entsprechenden Seitenmittenviereck in der rechten Zeichnung.
  Nenne zwei Gründe, weshalb du mit deiner Schere diese Vorgehensweise

nicht beliebig weit fortsetzen kannst.
Bliebe etwas von der Restfigur übrig, wenn du dieses Verfahren „bis zum Ende hin“ fortsetzen könntest?
Würde im Quadrat $ABCD$ rechts eine weiße Fläche übrig bleiben, wenn du dieses Verfahren „bis zum Ende hin“ fortsetzen könntest?

- Begründe: Die Summe der Flächeninhalte aller möglichen Seitenmittenvierecke ergibt $64\,\text{cm}^2$.

Lösung: (a)



- Es handelt sich um ein Quadrat. Alle vier Seiten sind 8 cm lang und alle Innenwinkel haben das Maß 90°.

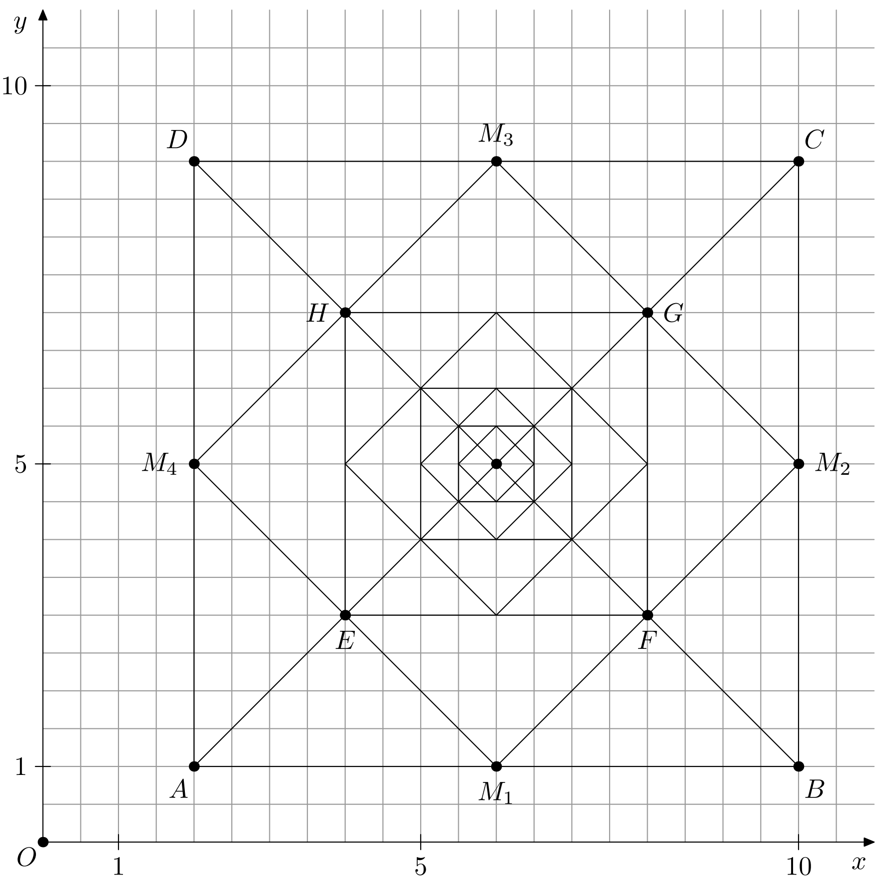
(b)

- Siehe Zeichnung.
- $M_1(6 \mid 1)$.
  Die Punkte A, M_1 und B liegen auf einer Parallelen zur x-Achse mit dem Abstand 1 cm.
  Alle drei Punkte haben den y-Wert 1.
  Addiere die x-Werte von A und B. Teile den Summenwert durch 2. $(2+10) : 2 = 12 : 2 = 6$.
- $M_2(10 \mid 5)$.
  Die Punkte B, M_2 und C liegen auf einer Parallelen zur y-Achse mit dem Abstand 10 cm.
  Alle drei Punkte haben den x-Wert 10.
  Addiere die y-Werte von B und C. Teile den Summenwert durch 2. $(1+9) : 2 = 10 : 2 = 5$.

(c) • Siehe Zeichnung. Die Vierecke $M_1M_2M_3M_4$ und $EFGH$ sind Quadrate.
Der x-Wert des Punktes E ist Hälfte der Summe aus den x-Werten der Punkte M_1 und M_4. Der y-Wert des Punktes E ist Hälfte der Summe aus den y-Werten der Punkte M_1 und M_4:
$E((6+2):2 \mid (1+5):2) = (4 \mid 3)$.

• In das Viereck $EFGH$ passen 4 gleiche Dreiecke. Das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ setzt sich aus 8 solchen Dreiecken zusammen. Also ist der Flächeninhalt des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ doppelt so groß wie der des Vierecks $EFGH$.
In das Viereck $ABCD$ passen 16 solche Dreiecke. Also ist der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ doppelt so groß wie der des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ und viermal so groß wie der Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$.

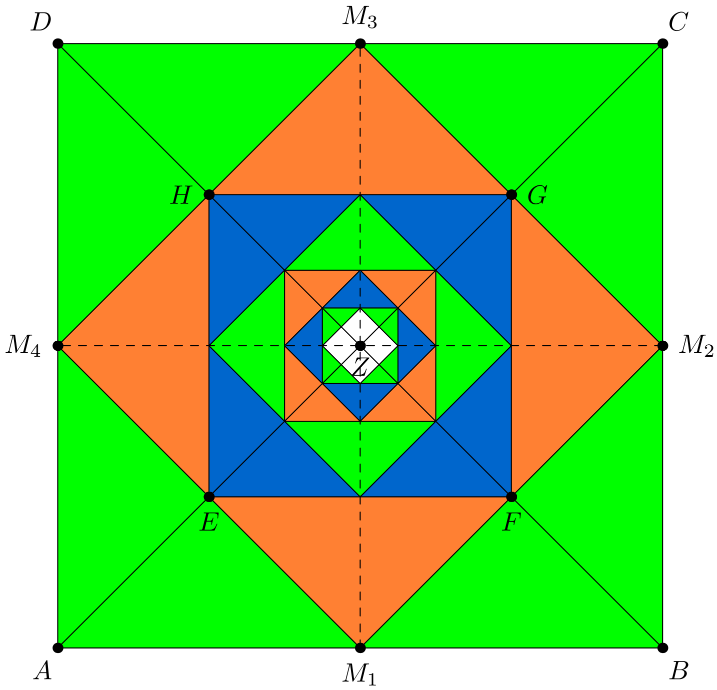
(d) •



Ein Seitenviereck ist stets halb so groß wie das vorhergehende.

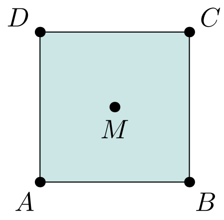
• Du könntest theoretisch noch unendlich viele Seitenmittenvierecke einzeichnen. Das Ganze endet im Punkt Z.

(e) • Dein Endprodukt müsste so aussehen:



- Siehe oben.
- Die vier grünen Dreiecke sind mit den vier Dreiecken, die im Inneren des Quadrates $M_1M_2M_3M_4$ durch die Strecken $[M_1M_3]$ und $[M_2M_4]$ entstehen, gleich.
- Wie vorher gilt: Die vier orangenen Dreiecke sind mit den vier Dreiecken, die im Inneren des Quadrates $EFGH$ durch die Strecken $[M_1M_3]$ und $[M_2M_4]$ entstehen, gleich.
- Wieder kannst du auf die gleiche Weise die Flächengleichheit zeigen.
- 1. Grund:
  Du kannst keine beliebig kleinen Dreiecke ausschneiden.
  2. Grund:
  Es wären unendlich viele Dreiecke auszuschneiden. Das kann kein Mensch bewältigen.
  Angenommen, es würde eine „weiße Fläche“ übrig bleiben. Dann muss diese Fläche aber ein winziges Quadrat sein, dessen Ecken du (wenigstens theoretisch) erneut abschneiden könntest, so dass ein noch winzigeres Quadrat als „weißen Fläche“ übrig bleibt. Dann könntest du von diesem noch winzigerem Quadrat wieder seine Ecken . . . . Du merkst, es bleibt am Ende (wann immer das auch sein mag) nichts Weißes übrig.
- Mit allen möglichen Dreiecken zusammen lässt sich das Quadrat $ABCD$ lückenlos bedecken. Nun stammen ja jeweils vier dieser Dreiecke von einem der Seitenmittenvierecke. Also ergibt der Flächeninhalt aller Seitenmittenvierecke den Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und der ist $8\,\text{cm} \cdot \text{cm} = 64\,\text{cm}^2$ groß.

10.



(a) Zeichne in die Mitte einer leeren karierten Heftseite ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $3\,\text{cm}$, so dass die Seite $[AB]$ waagrecht liegt. Zeichne die beiden Geraden ein, die jeweils durch zwei gegenüber liegende Eckpunkte des Quadrates und dem Quadratmittelpunkt M verlaufen. Nutze dabei den Platz auf deiner Heftseite voll aus.

(b) Zeichne durch die Eckpunkte des Quadrates jeweils eine Parallele zu einer Diagonalen.

(c) Die vier Parallelen schneiden sich in vier Punkten. Dadurch entsteht ein neues Viereck V_1. Um was für ein Viereck handelt es sich? Begründe.

(d)
- Zeichne durch die Eckpunkte dieses Vierecks V_1 erneut Parallelen zu dessen Diagonalen, so dass an deren Schnittpunkten ein neues Viereck V_2 entsteht. Wenn du richtig gezeichnet hast, müssen jetzt zwei Seiten dieses Vierecks V_2 wieder waagrecht liegen.
  Um was für ein Viereck handelt es sich?
- Wie oft ist das ursprüngliche Quadrat $ABCD$ im Viereck V_2 enthalten? Begründe.

(e)
- Zeichne auf die gleiche Weise wie vorhin mit Hilfe der Parallelen zu den Diagonalen des Vierecks V_2 das Viereck V_3. Um welche Art von Viereck handelt es sich wieder?
- Wie oft ist das ursprüngliche Quadrat $ABCD$ im Viereck V_3 enthalten? Begründe.

(f)
- Zeichne mit der gleichen Vorgehensweise das Viereck V_4 ein, wobei dann zwei Seiten wieder waagrecht liegen müssen.
- Vergleiche die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge des Vierecks V_4.
  Wie oft ist das ursprüngliche Quadrat im Viereck V_4 enthalten? Begründe.

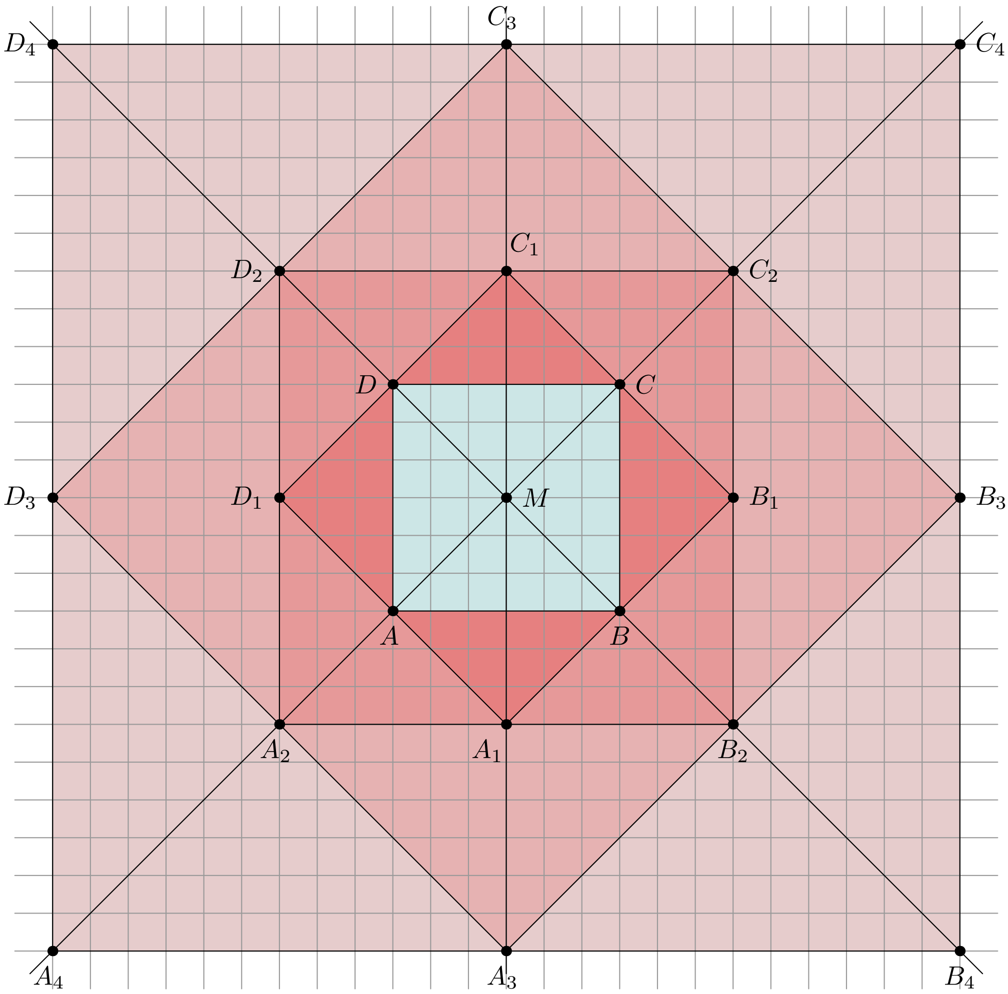
(g) Die nächsten auf diese Weise erzeugten Vierecke würden über deine Heftseite hinausragen.
- Notiere einen Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten zweier unmittelbar aufeinander folgender Quadate.
- Der Flächeninhalt A_0 des Vierecks $ABCD$ beträgt $3\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}^2$.
  Fülle die restlichen Zellen der folgenden Tabelle aus:

Viereck Nr.	Zusammenhang mit $A_0 = 9\,\text{cm}^2$
1	$A_{V_1} = 2 \cdot 9\,\text{cm}^2 = 2^1 \cdot A_0$
2	$A_{V_2} = 2 \cdot A_{V_1} = 2 \cdot 2 \cdot 9\,\text{cm}^2 = 2^{\,2} \cdot A_0$
3	$A_{V_3} = 2 \cdot A_{V_2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9\,\text{cm}^2 = 2^{\,3} \cdot A_0$
7	$A_{V_7} =$
?	$A_{V_?} = 2304\,\text{cm}^2$

- Kann eines der Vierecke einen Flächeninhalt von $624\,\text{cm}^2$ besitzen? Begründe deine Antwort auf verschiedene Weise.

(h) Male deine Zeichnung mit verschiedenen Farben aus.

Lösung: Wenn du alle Zeichenaufträge ausgeführt hast, ergibt sich das folgende Bild:



(a) Siehe Zeichnung.

(b) Siehe Zeichnung.

(c) Siehe Zeichnung.
Das Viereck $A_1B_1C_1D_1$ ist ein Quadrat. Alle vier Seiten sind gleich alng und alle Innenwinkel haben das Maß $90°$.

(d)
- Siehe Zeichnung.
  Das Viereck $A_2B_2C_2D_2$ ist wieder ein Quadrat.
- Das ursprüngliche Quadrat $ABCD$ wird durch seine Diagonalen in vier deckungsgleiche Dreiecke zerlegt. Das Quadrat $A_2B_2C_2D_2$ besteht aus 16 dieser Dreiecke. $16 : 4 = 4$; also ist dieses Quadrat vier mal so groß wie das Quadrat $ABCD$.

(e)
- Siehe Zeichnung.
  Das Viereck $A_3B_3C_3D_3$ ist wieder ein Quadrat.
- Wenn Du die vier Teildreiecke A_2MD_2, A_2B_2M, MB_2C_2 und D_2MC_2 des Quadrates $A_2B_2C_2D_2$ jeweils nach außen klappst, dann erhältst du das Quadrat $A_3B_3C_3D_3$. Also ist dieses Quadrat doppelt so groß wie das Quadrat $A_2B_2C_2D_2$ und damit $2 \cdot 4 = 8$ mal so groß wie das Quadrat $ABCD$.

(f)
- Siehe Zeichnung.
- Das Quadrat $A_4B_4C_4D_4$ entsteht ebenso wie vorhin durch Ausklappen der Teildreiecke des Quadrates $A_3B_3C_3D_3$. Also ist das Quadrat $A_4B_4C_4D_4$ doppelt so groß wie sein Vorgänger und damit 16 mal so groß wie das ursprüngliche Quadrat $ABCD$.

(g)
- Der Nachfolger ist doppelt so groß wie sein Vorgänger.
- Vorletzte Zeile:
  $A_{V_7} = 2 \cdot A_{V_6} = 2^{\,6} \cdot A_0 = 64 \cdot 9\,\mathrm{cm}^2 = 576\,\mathrm{cm}^2$
  Letzte Zeile:
  $2304\,\mathrm{cm}^2 : 9\,\mathrm{cm}^2 = 256 = 2^{\,8}$. Also gilt: $? = 8$.
- 1. Möglicheit:
  624 ist nicht durch 9 teilbar, daher gibt es kein solches Quandrat.
  2. Möglichkeit:
  Es tauchen nur die folgenden Flächeninhalte auf: $9\,\mathrm{cm}^2$, $18\,\mathrm{cm}^2$, $36\,\mathrm{cm}^2$, $72\,\mathrm{cm}^2$, $144\,\mathrm{cm}^2$, $288\,\mathrm{cm}^2$, $576\,\mathrm{cm}^2$, $1152\,\mathrm{cm}^2$ ...
  Der Wert $624\,\mathrm{cm}^2$ ist nicht mit dabei, daher gibt es kein solches Quandrat.

(h) Deinem Einfallsreichtum sind keine Grenzen gesetzt.

11. Gegeben sind die beiden Gleichungen

$$\text{(I):}\quad 2 \cdot \triangle + \square = 6 \qquad \text{und} \qquad \text{(II):}\quad 2 \cdot \square - \triangle = 2.$$

(a) Zeige, dass $\triangle = 5$ und $\square = 3$ in beiden Gleichungen falsche Ergebnisse liefern.

(b) Setze für die Platzhalter $\triangle$ und $\square$ passende Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ ein. (Tipp: Es ist auch erlaubt, $\triangle$ und $\square$ mit gleichen Zahlen zu belegen.)
Übertrage diese Zahlen in zwei Tabellen, etwa so:

(I):

$\triangle$	...	...	...
$\square$	...	...	...

und (II):

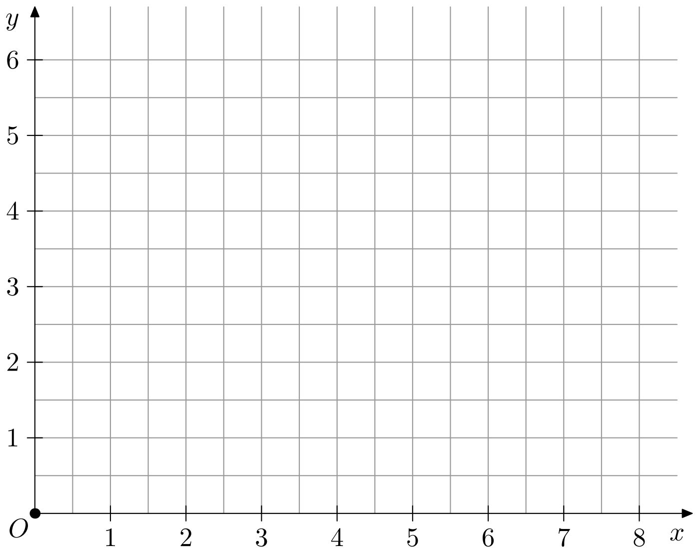
$\triangle$	...	...	...
$\square$	...	...	...

(c) Setze den angefangenen Satz fort:
„Wenn in der Tabelle (I) der $\triangle$-Wert um 1 zunimmt, dann nimmt der zugehörige $\square$-Wert ...“
Notiere einen entsprechenden Zusammenhang, der für die Tabelle (II) gilt.

(d)
- Gib das Platzhalterpaar an, das sowohl in Tabelle (I) als auch in Tabelle (II) auftaucht.
- Worin unterscheidet sich die Tabelle (I) von der Tabelle (II), wenn du alle Möglichkeiten betrachtest, die sich für $\triangle$ und $\square$ ergeben?

(e) Wenn du richtig gerechnet hast, dann sind z. B. in der Tabelle (I) $\triangle = 1$ und $\square = 4$ vorhanden. Diese Werte lassen sich als ein **Zahlenpaar** $(1 \mid 4)$ im Gitternetz darstellen.

- Trage dieses Zahlenpaar in das Gitternetz ein, wobei „$\triangle$“ den x-Wert (Rechtswert) und „$\square$“ den y-Wert (Hochwert) darstellen soll:



- Übertrage deine restlichen Werte aus beiden Tabellen auf die gleiche Weise in das Gitternetz. Benutze dabei für (I) und (II) verschiedene Farben.
- Betrachte die Lage der Punkte zueinander. Welche Zusammenhänge stellst du fest?

Lösung: (a) In (I) eingesetzt ergibt sich: $2 \cdot 5 + 3 = 6$ (f).
In (II) eingesetzt ergibt sich: $2 \cdot 3 - 5 = 6$ (f).

(b) (I):

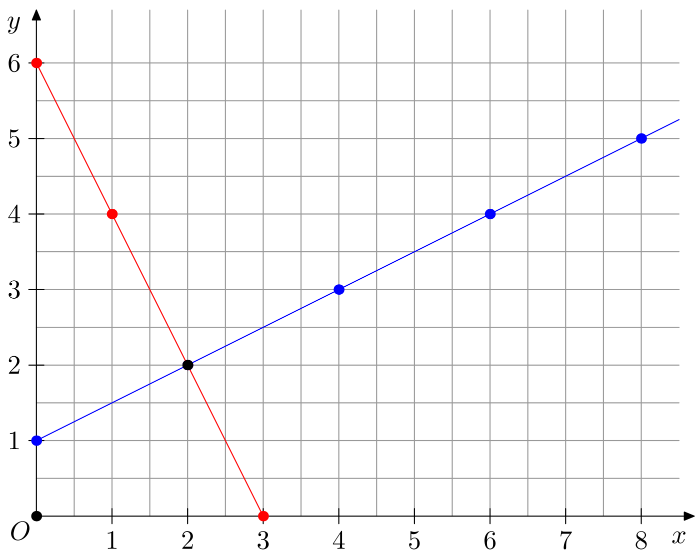
$\triangle$	0	1	2	3
$\square$	6	4	2	0

(II):

$\triangle$	0	2	4	6	8	...
$\square$	1	2	3	4	5	...

(c) „Wenn in der Tabelle (I) der $\triangle$-Wert um 1 zunimmt, dann nimmt der zugehörige $\square$-Wert jeweils um 2 ab.“
„Wenn in der Tabelle (II) der $\triangle$-Wert um 2 zunimmt, dann nimmt der zugehörige $\square$-Wert jeweils um 1 zu.“

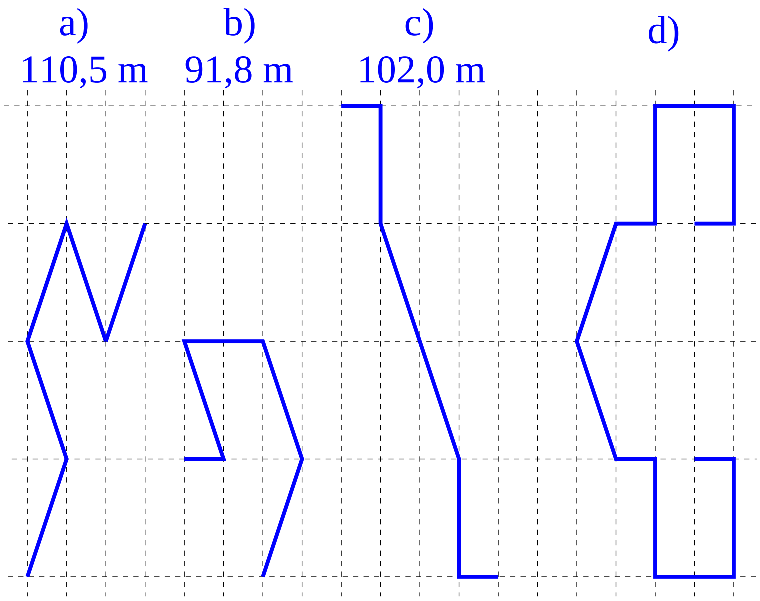
(d)
- Das gemeinsame Paar ist $\triangle = 2 = \square$.
- Die Tabellenwerte in (I) haben ein Ende, die von (II) nicht.

(e)
- 

- Siehe Zeichnung.
- – Die Tabelle (I) liefert Punkte, die auf einer Strecke liegen.

– Die Tabelle (II) liefert Punkte, die auf einer Halbgeraden liegen.
– Die Strecke und die Halbgerade stehen aufeinader senkrecht.

12.



Die Längen der drei Wege a), b) und c) sind angegeben. Wie lang ist der Weg d)?

Lösung:

Weg a)

Er besteht aus 5 gleich langen Strecken, denn jede Strecke stellt die Diagonale eines rechteckigen Gitterkästchens dar:
$110,5\,\text{m} : 5 = 22,1\,\text{m}$. So lang ist die Diagonale eines Gitterkästchens.

Weg b)

Er enthält 3 gleich lange Rechtecksdiagonalen eines Gitterkästchens. Der Rest dieses Weges ist dreimal so lang wie Breite eines Gitterkästchens. Für die Breite eines Gitterkästchens gilt dann:
$(91,8\,\text{m} - 3 \cdot 22,1\,\text{m}) : 3 = 8,5\,\text{m}$.

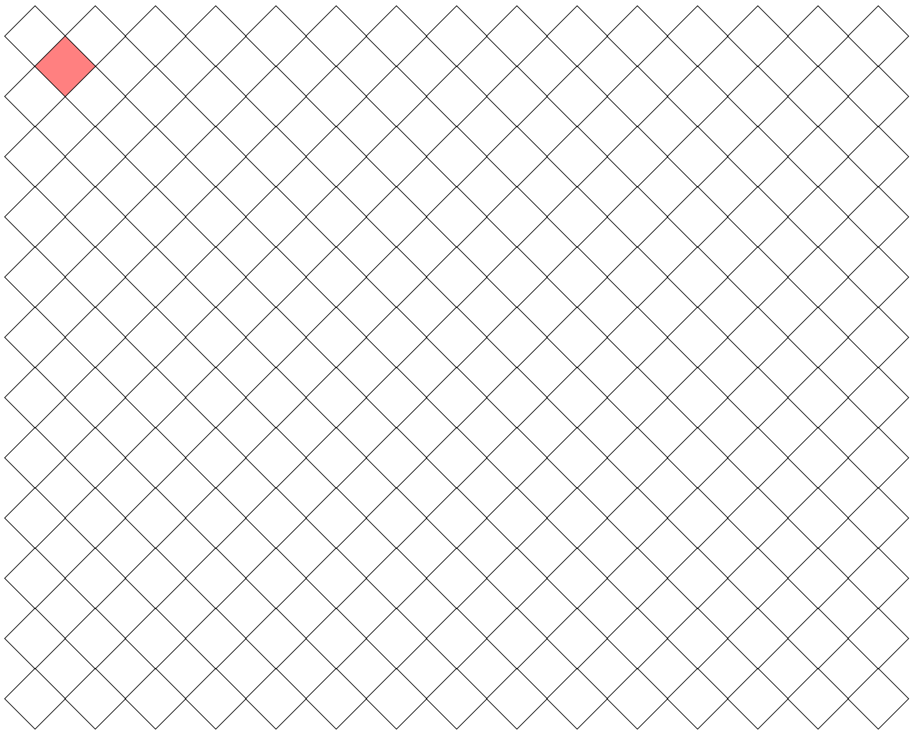
Weg c)

Dieser Weg verläuft punktsymmetrisch. Die $51,0\,\text{m}$ lange Hälfte besteht aus einer Kästchendiagonalen, einer Kästchenhöhe und einer Kästchenbreite. Weil die Länge der Diagonalen und die Breite eines Kästchens schon bekannt sind, kannst du damit die Kästchenhöhe ausrechnen:
$51,0\,\text{m} - 22,1\,\text{m} - 8,5\,\text{m} = 20,4\,\text{m}$.

Weg d)

Dieser Weg verläuft achsensymmetrisch. In ihm sind die Längen aller Teilstrecken bekannt. Für die Länge des Weges d) ergibt sich also:
$(4 \cdot 8,5\,\mathrm{m} + 2 \cdot 20,4\,\mathrm{m} + 22,1\,\mathrm{m}) \cdot 2 = 193,8\,\mathrm{m}$.

13.

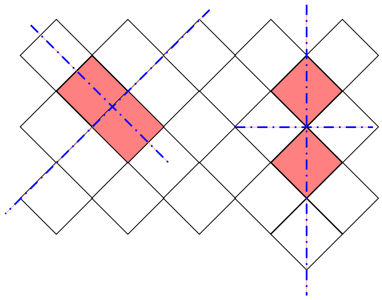


Das eingefärbte Quadrat im Gitternetz heißt „Einheitsquadrat“.
Male in das Gitternetz möglichst viele verschiedene achsensymmetrische Figuren, die sich aus Einheitsquadraten zusammensetzen. Vergleiche jeweils deine Figur mit der deines Banknachbarn.

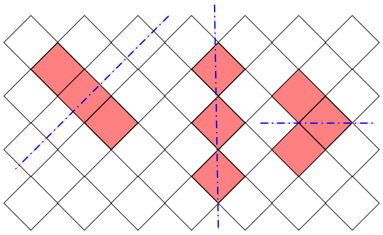
(a) Die Figur soll nur aus zwei Einheitsquadraten bestehen.
(b) Die Figur soll aus drei Einheitsquadraten bestehen.
(c) Die Figur soll aus vier Einheitsquadraten bestehen.
(d) Die Figur soll aus fünf Einheitsquadraten bestehen.

Lösung: Hier sind viele Beispiele, aber nicht alle Möglichkeiten dargestellt.

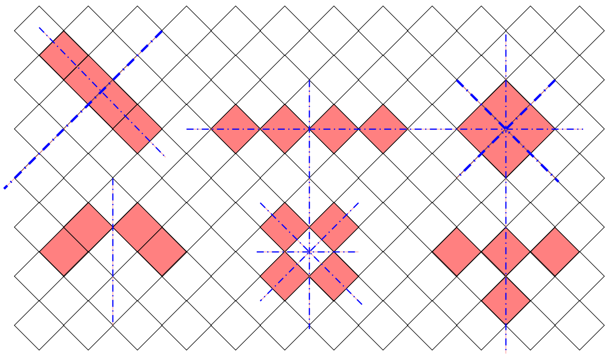
(a)



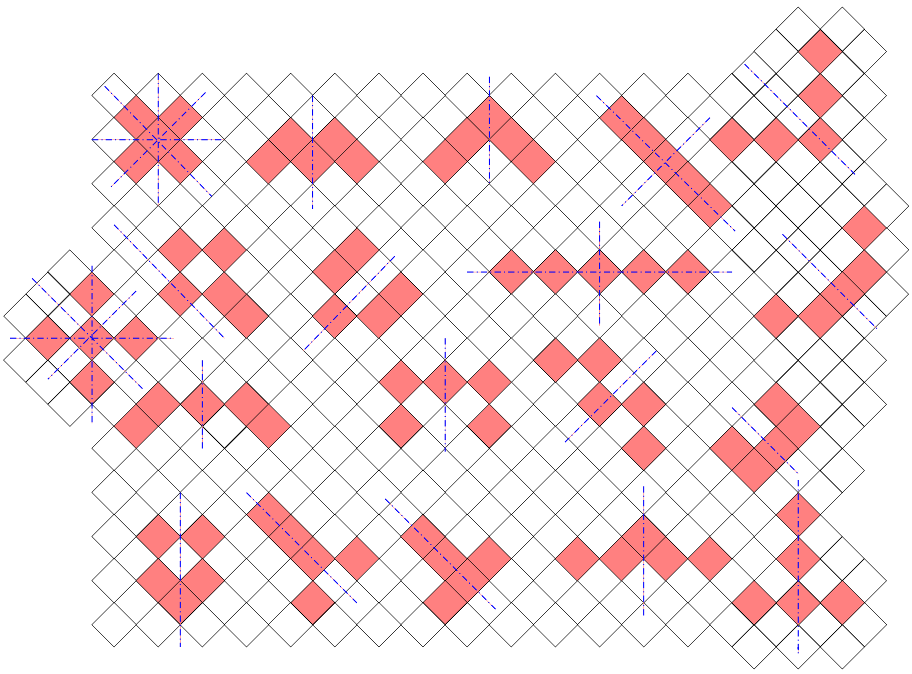
(b)



(c)

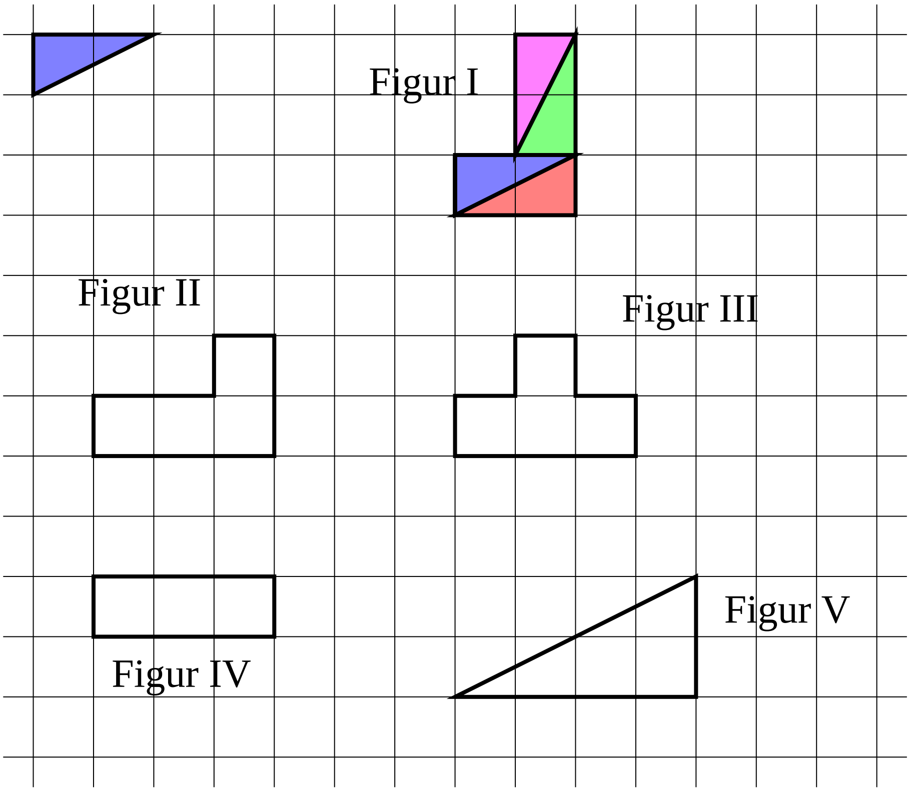


(d)



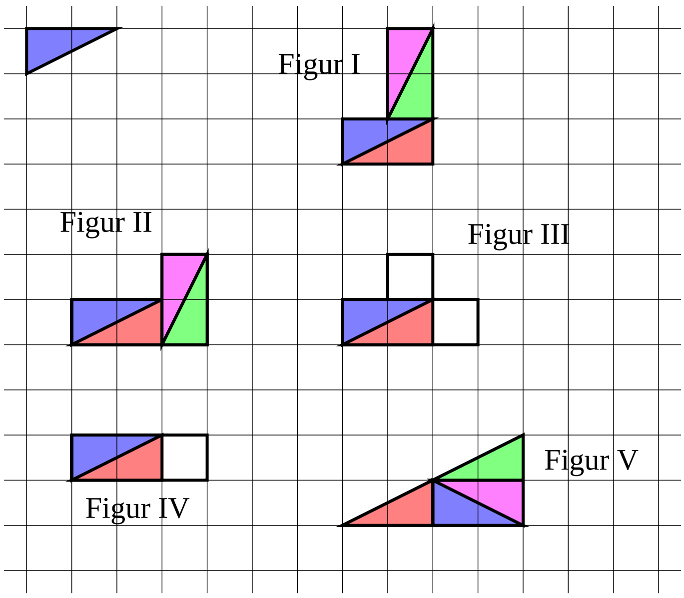
Anregung: Versuche die restlichen Möglichkeiten noch zu finden.

14.



Der Flächeninhalt der Figur I ist offenbar viermal so groß wie der des eingefärbten Dreiecks.
Wie oft passt der Flächeninhalt des eingefärbten Dreiecks in jede der Figuren II, III, IV und V? Arbeite wie im Beispiel mit Farben.

Lösung:



Zwei eingefärbte Dreiecke sind so groß wie zwei Kästchen. Also ist ein eingefärbtes Dreieck so groß wie ein Kästchen.

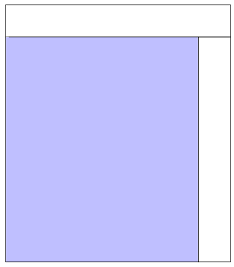
Figur II: Es passen vier Dreiecke hinein.

Figur III: Es passen ebenfalls vier Dreiecke hinein. Wenn du das obere Kästchen in der Figur II in die Mitte rückst, dann erhältst du die Figur III. Also passen genau so viele Dreiecke in die Figur III, nämlich vier.

Figur IV: Es passen drei Dreiecke hinein.

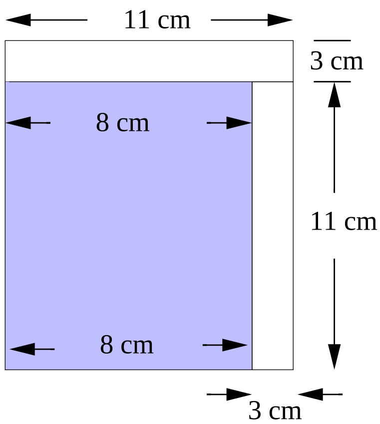
Figur V: Es passen vier Dreiecke hinein.

15.



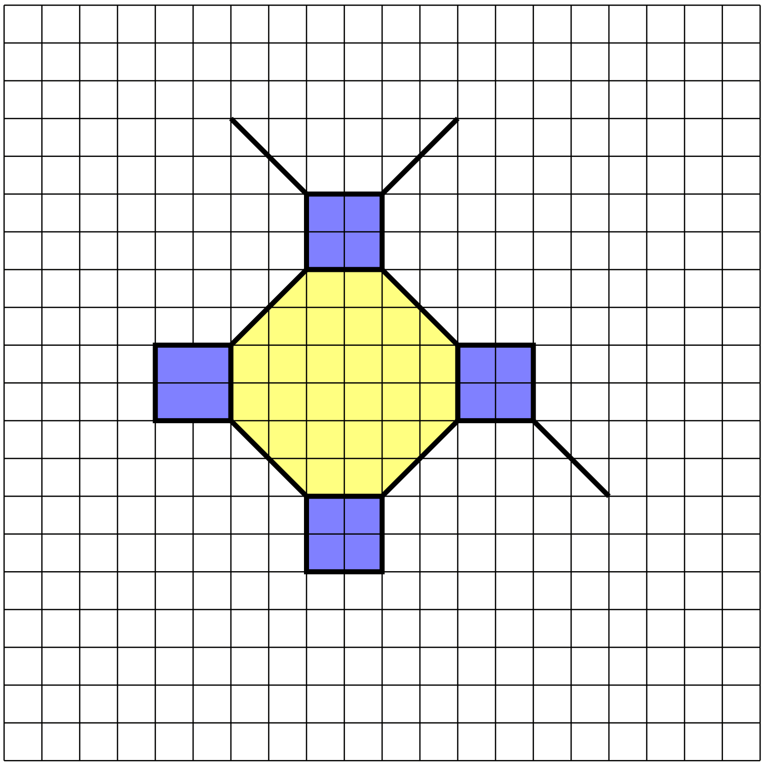
Zwei gleiche Papierstreifen, die jeweils 11 cm lang und 3 cm breit sind, werden so, wie es die Figur darstellt, aneinander gelegt.
Welchen Flächeninhalt hat das eingefärbte Rechteck?

Lösung:



Der Flächeninhalt des eingefärbten Rechtecks beträgt $8\,\mathrm{cm} \cdot 11\,\mathrm{cm} = 88\,\mathrm{cm}^2$

16.

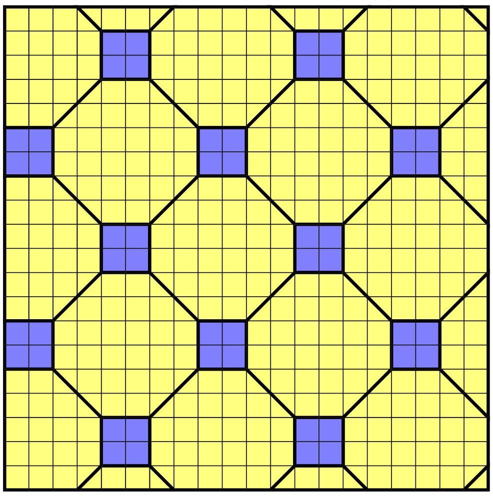


Familie Seifel möchte den Fußboden im Bad mit großen achteckigen und mit kleinen quadratischen Fliesen neu belegen lassen. Herr Seifel hat dazu schon einen Plan angefangen.

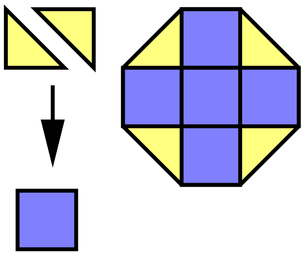
(a) Setze diesen Plan bis zum Rand lückenlos fort.

(b) Wie viel mal größer als eines der kleinen Quadrate ist das große Achteck?

Lösung: (a)

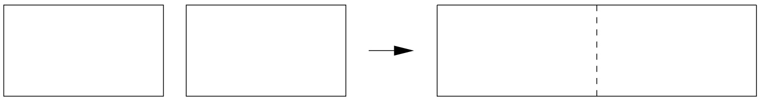


(b)



In das Achteck passen fünf kleine Quadrate. Dann bleiben noch 4 gleiche Dreiecke übrig. Je zwei davon lassen sich zu einem kleinen Quadrat zusammenfügen.
Also ist das große Achteck siebenmal so groß wie ein kleines Quadrat.

17.



Jedes der beiden Rechtecke soll $3,5\,\text{cm}$ lang und $2\,\text{cm}$ breit sein. Sie werden zu einem einzigen Rechteck lückenlos so zusammengefügt, wie es die Darstellung zeigt.

(a) Berechne den Umfang von einem der beiden kleinen Rechtecke.

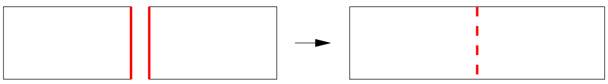
(b) Egon soll den Umfang des großen Rechtecks berechnen. Er meint: „Das ist doch ganz leicht. Das große Rechteck besteht aus zwei kleinen, die gleich sind. Also ist der Umfang des großen Rechtecks doppelt so groß wie der von einem kleinen." Sophia widerspricht ihm: „Erst, wenn du von deinem Ergebnis noch $4\,\text{cm}$ abziehst, kommt das richtige Ergebnis heraus." Was hat Sophia damit gemeint? Mache es an einer Skizze deutlich. Berechne den gesuchten Umfang.

(c) Jetzt werden drei dieser kleinen Rechtecke zu einem einzigen großen auf die gleiche Weise zusammengefügt. Wie oft musst du jetzt noch die $4\,\text{cm}$ abziehen, bis es stimmt? Berechne jetzt den Umfang des so entstandenen großen Rechtecks mit der Methode von Egon.

(d) Berechne nach der „Egon-Methode" den Umfang des Rechtecks, das aus 100 kleinen Rechtecken zusammengefügt worden ist.

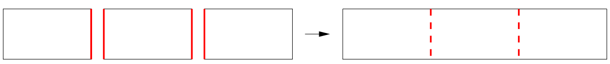
Lösung: (a) $u = 2 \cdot 3,5\,\text{cm} + 2 \cdot 2\,\text{cm} = 11\,\text{cm}$

(b)



Die zwei Breitseiten der beiden Rechtecke, die sich gegenüber liegen, verschwinden beim Zusammenfügen im Inneren des großen Rechtecks. Sie fallen also bei der Berechnung des Umfang des großen Rechtecks weg. Zusammen sind die beiden Seiten $4\,\text{cm}$ lang. Also: $u = 2 \cdot 11\,\text{cm} - 4\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$.

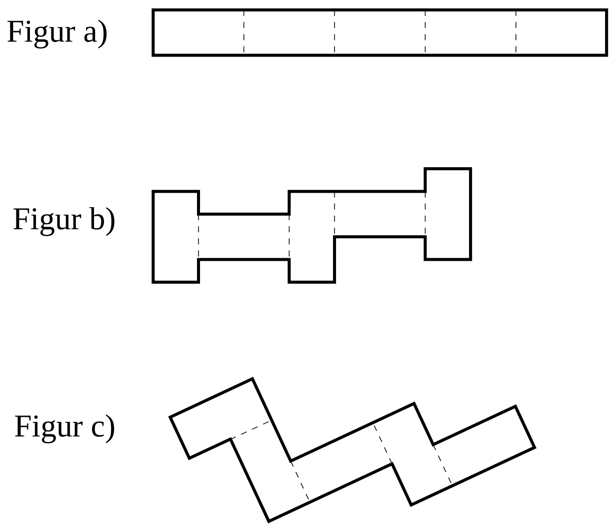
(c)



Du hast es bei drei kleinen Rechtecken mit zwei „Nahtstellen“ zu tun. Also musst du die 4 cm zwei Mal subtrahieren:
$u = 3 \cdot 11\,\text{cm} - 2 \cdot 4\,\text{cm} = 25\,\text{cm}$.

(d) Vom 100-fachen Umfang eines kleinen Rechtecks musst du jetzt noch 99 Nahtstellen subtrahieren:
$u = 100 \cdot 11\,\text{cm} - 99 \cdot 4\,\text{cm} = 704\,\text{cm}$. Das ist etwas mehr als 7 m.

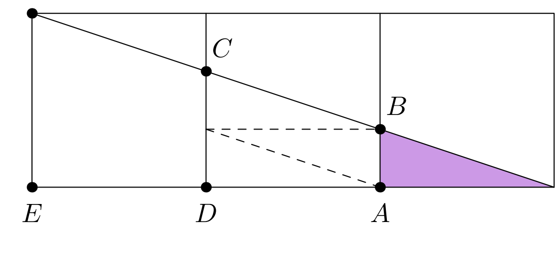
18.



Max und Elfi haben die drei Figuren aus 15 gleichen Bausteinen gelegt.
Jede der drei Figuren setzt sich aus fünf dieser Bausteine zusammen. Vergleiche die Umfänge der drei Figuren.

Lösung: Jede Figur weist an den gestrichelten Linien vier gleich lange Nahtstellen auf.
Jede Figur besteht aus zwei rechteckigen Endstücken. Bei jedem davon verschwindet eine Breitseite im Flächeninneren.
Jede Figur besteht aus drei rechteckigen Mittelstücken. Bei jedem davon verschwinden zwei Breitseiten im Flächeninneren. Also sind die drei Figuren umfangsgleich.

19.



Ruth soll im Kunstunterricht ein Muster für eine Ausstellung entwerfen. Sie hat schon drei Quadrate, mehrere gestrichelte Hilfslinien und ein getöntes Dreieck eingezeichnet. Das dunkel getönte Dreieck soll später in der Ausstellung $15\,\mathrm{dm}^2$ groß werden.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AD} = 2\,\mathrm{cm}$.

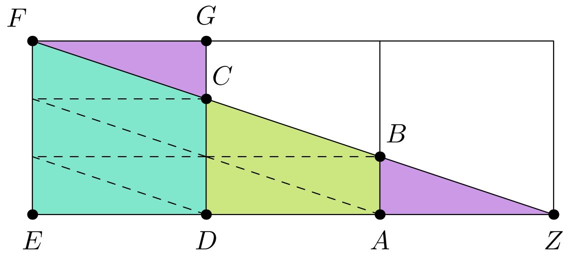
(b) Welchen Flächeninhalt bekommt dann das Viereck $ABCD$ in der Ausstellung? Begründe deine Antwort.

(c) Wie groß wird dann die Fläche des Vierecks $EDCF$ in der Ausstellung? Begründe deine Antwort. Zeichne dazu weitere Hilfslinien ein.

(d) Welche Fläche bedecken dann die drei Quadrate zusammen in der Ausstellung? Begründe deine Antwort.

(e) Entwirf selbst ein buntes Dreiecksmuster in Quadraten.

Lösung: (a)



(b) Das Viereck $ABCD$ nennt man auch „Trapez", obwohl es nicht symmetrisch ist. Damit sich ein Viereck „Trapez" nennen darf, genügt es, dass in ihm zwei Seiten parallel sind.
In diesem Trapez steckt das Dreieck AZB dreimal. Das Trapez wird also $3 \cdot 15\,\mathrm{dm}^2 = 45\,\mathrm{dm}^2$ groß.

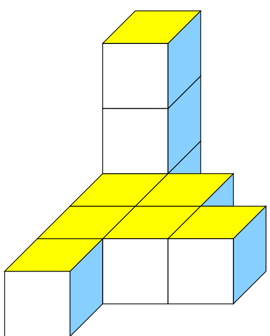
(c) Das Viereck $EDCF$ ist auch ein Trapez.
In diesem Trapez steckt das Dreieck AZB fünfmal. Das Trapez wird also $5 \cdot 15\,\mathrm{dm}^2 = 75\,\mathrm{dm}^2$ groß.

(d) Eines der Quadrate enthält sechs Dreiecke zu je $15\,\mathrm{dm}^2$. Also hätten die drei Quadrate in der Ausstellung zusammen einen Flächeninhalt von

$$3 \cdot 6 \cdot 15\,\mathrm{dm}^2 = 270\,\mathrm{dm}^2.$$

(e) Deiner Phantasie sind keine Grenzen gesetzt.

20.



Klaus hat eine Plastiktüte voll von 87 gleichen kleinen Würfeln. Davon hat Marion welche genommen und die Figur aufgebaut. Diese Figur will sie zu einem großen Würfel vervollständigen.

(a) Wie viele Würfel aus der Plastiktüte braucht sie noch mindestens, damit aus der angefangenen Figur ein Würfel wird?

(b) Berechne, wie viele kleine Würfel dann noch in der Plastiktüte sind.

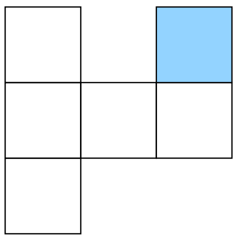
(c) Würden die 87 Würfel für einen großen Würfel reichen, der in jeder Schicht 25 Würfel enthält? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) Schräg nach hinten kannst du erkennen, dass in dieser Linie 4 Würfel enthalten sind. In allen anderen Reihen stehen weniger Würfel. Also braucht Marion insgesamt mindestens $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ Würfel.
Für die Figur hat sie schon 9 Würfel verwendet. Also braucht sie mindestens noch $64 - 9 = 55$ Würfel.

(b) In der Tüte sind dann noch $87 - 64 = 23$ Würfel.

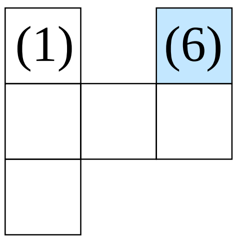
(c) Der große Würfel müsste 5 solcher Schichten enthalten.
Für den betreffenden Würfel bräuchte Marion $5 \cdot 25 = 125$ Würfel. Das sind mehr als in der Tüte waren.

21.



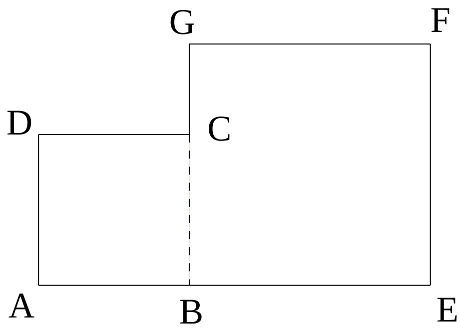
Lisa hat das dunkel getönte Quadrat noch hinzugefügt, damit ein Würfelnetz entsteht. Marcel meint dazu: „Da stimmt doch etwas nicht, denn …“
Wie würdest du Marcels angefangene Behauptung fortsetzen?

Lösung:



„… beim Zusammenfalten würden die beiden Quadrate (1) und (6) aufeinander liegen.“

22.

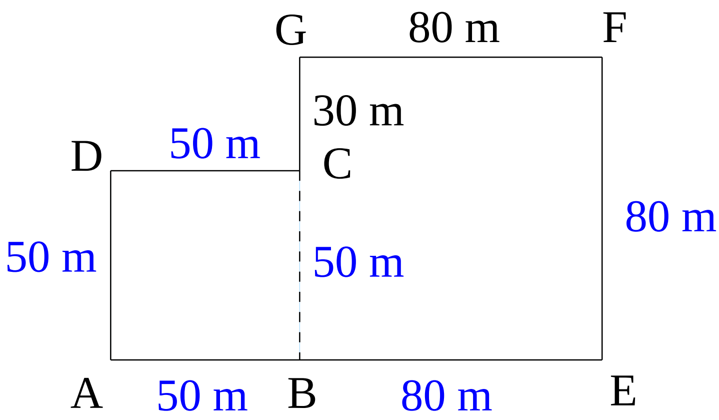


Das Grundstück $AEFGCD$ setzt sich aus den beiden Quadraten $ABCD$ und $BEFG$ zusammen. In der Planfigur gilt: $\overline{GC} = 30\,\text{m}$ und $\overline{GF} = 80\,\text{m}$.

(a) An der Grundstücksseite $[AE]$ wird der Zaun erneuert. Berechne die Länge dieses Zaunes.

(b) Berechne die Grundstücksfläche.

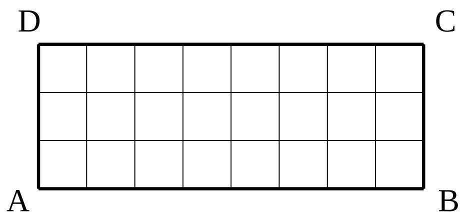
Lösung:



(a) Die Strecke $[GB]$ ist genau so lang wie die Strecke $[FE]$, nämlich $80\,\text{m}$, denn das Viereck $GBEF$ ist ein Quadrat.
Weil die Strecke $[GC]$ $30\,\text{m}$ lang ist, muss die Strecke $[CB]$ $50\,\text{m}$ lang sein.
Damit sind alle Seiten des Quadrates $ABCD$ $50\,\text{m}$ lang.
Der Zaun $[AE]$ ist also $80\,\text{m} + 50\,\text{m} = 130\,\text{m}$ lang.

(b) Die Grundstücksfläche beträgt $50\,\text{m} \cdot 50\,\text{m} + 80\,\text{m} \cdot 80\,\text{m} = 8900\,\text{m}^2$.

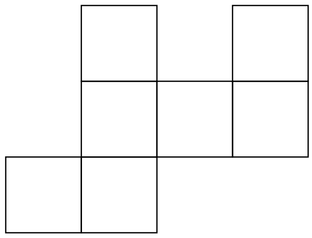
23.



Die rechteckige Fläche $ABCD$ in einem Bad wird gefliest. Jede Fliese hat eine Umfang von $20\,\text{cm}$. Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ in der Einheit dm^2.

Lösung: Wenn der Umfang einer quadratischen Fliese 20 cm beträgt, dann beträgt die Seitenlänge einer Fliese $20\,\mathrm{m} : 4 = 5\,\mathrm{cm}$.
Der Flächeninhalt einer Fliese beträgt damit $5\,\mathrm{cm} \cdot 5\,\mathrm{cm} = 25\,\mathrm{cm}^2$.
Im Rechteck $ABCD$ befinden sich $3 \cdot 8 = 24$ Fliesen.
Also beträgt der Flächeninhalt des Rechtecks $24 \cdot 25\,\mathrm{cm}^2 = 600\,\mathrm{cm}^2 = 6\,\mathrm{dm}^2$.

24.

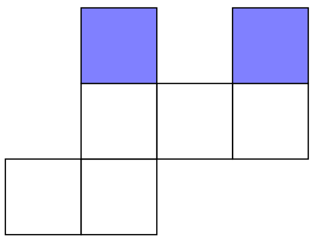


Erika soll die Figur ausschneiden, so dass ein Würfelnetz entsteht. Sie meint: „Die Figur ergibt kein Netz.“

(a) Woran hat sie das gemerkt?

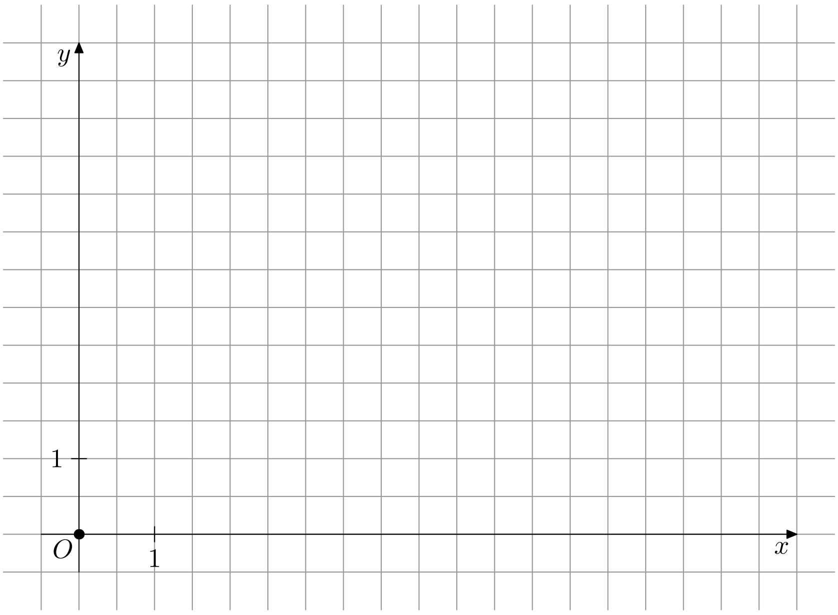
(b) Zeichne die Figur und schneide sie so aus, dass ein Würfelnetz entsteht.

Lösung: (a) Jedes Würfelnetz besteht aus sechs Quadraten. Hier sind aber sieben aufgezeichnet.
(b)



Eines der beiden dunkel getönten Quadrate muss weggeschnitten werden..

25.



Gegeben sind die Punkte $A(0 \mid 3)$, $B(2 \mid 0)$, $C(4 \mid 3)$ und $D(2 \mid 6)$.

(a)
- Zeichne das Viereck $ABCD$ in das Gitternetz.
- Um welches besondere Viereck handelt es sich? Begründe.

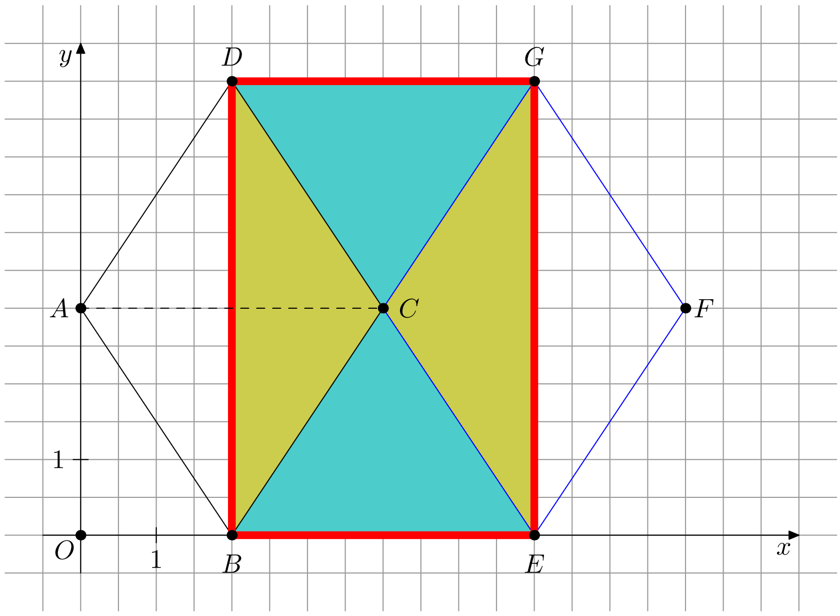
(b) Du erhältst ein neues Viereck $CEFG$, indem du die x-Werte aller Punkte A, B, C und D um jeweils 4 vergrößerst: A wandert dabei nach C, B nach E, C nach F und D nach G.
Zeichne das neue Viereck $CEFG$ in einer anderen Randfarbe ein. Male es nicht aus.

(c) Zeichne das Viereck $BEGD$ in einer neuen Randfarbe ein. Es muss ein Rechteck sein.

(d) Wie oft passt das Viereck $ABCD$ in das Viereck $BEGD$? Begründe deine Antwort sowohl mit Worten als auch durch Ausmalen entsprechender Teilflächen.

Lösung: Die Darstellung gehört zur zeichnerischen Lösung der Aufgaben (a), (b), (c) und (d).

(a)



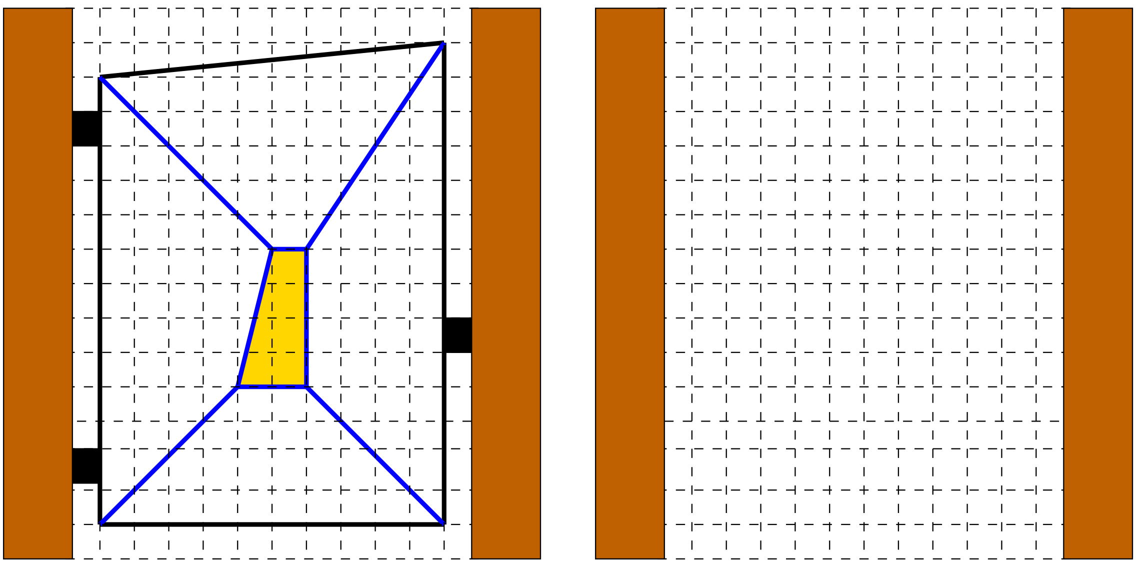
- Siehe oben.
- Das Viereck $ABCD$ ist nicht nur ein Parallelogramm, sondern sogar eine Raute, denn alle vier Seiten sind gleich lang.

(b) Siehe Zeichnung.

(c) Siehe Zeichnung.

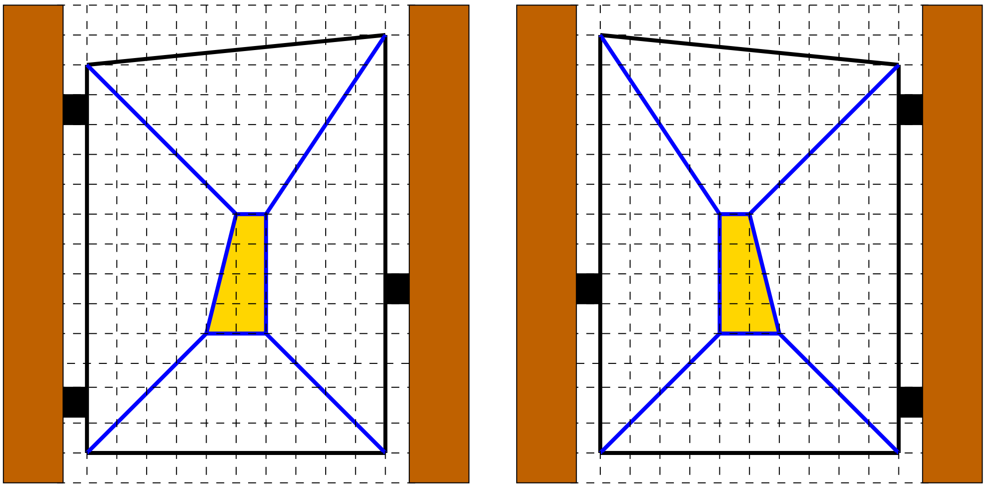
(d) In dem Rechteck $BEGD$ ergeben die beiden Teildreiecke BCD und CEG zusammen die Raute $ABCD$.
Die halbe Raute ACD ist genau so groß wie jedes der beiden Dreiecke BEC und CGD.
Also passt die Raute $ABCD$ zweimal in das Rechteck $BEGD$.

26.

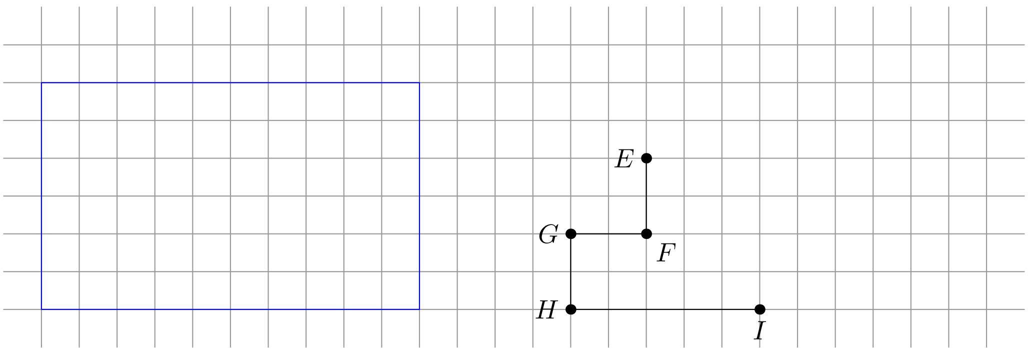


Das Tor zum Schloss Geostein ist in der linken Abbildung von vorne (Straßenseite) zu sehen. Zeichne in das rechte Gitternetz dieses Tor, wie man es von hinten (Schlossseite) sieht.
Quelle: Probeunterricht 2007 für bayerische Realschulen, 5. Jahrgangsstufe

Lösung:

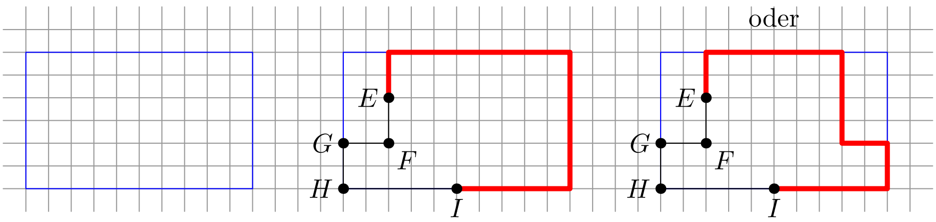


27.



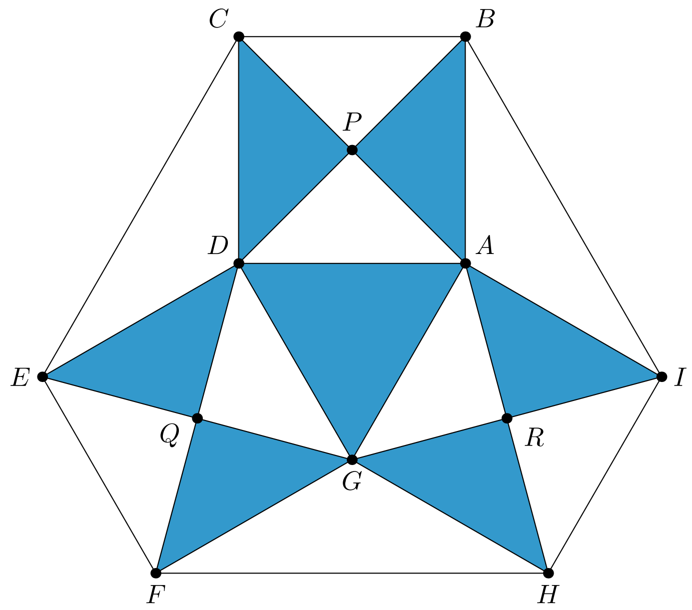
Setze den Streckenzug $E - F - G - H - I$ auf dem Gitter so fort, dass eine Fläche entsteht, deren Umfang genau so groß wie der des linken Rechtecks ist.

Lösung:



Hier sind zwei Möglichkeiten dargestellt. Es gibt noch viele weitere.

28.

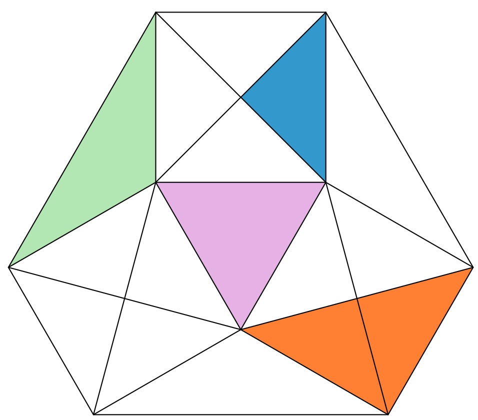


Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt.

(a) Welche Dreieckstypen entdeckst du in dem Wahrzeichen? Verwende zu deren Kennzeichnung jeweils drei Buchstaben.

(b) Welche Vierecksseckstypen entdeckst du in dem Emblem? Verwende zu deren Kennzeichnung jeweils vier Buchstaben.

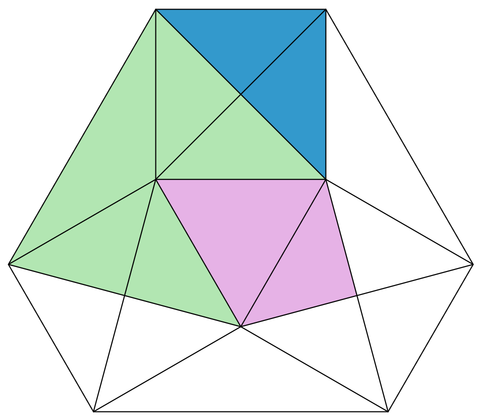
Lösung: (a)



Es gibt ein gleichseitiges Dreieck vom Typ GAD.
Typ PAB: 12 gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke.
Typ EDC: 3 gleichschenklige Dreiecke.
Typ GHI: 12 gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, die jeweils doppelt so groß sind wie die vom Typ PAB.

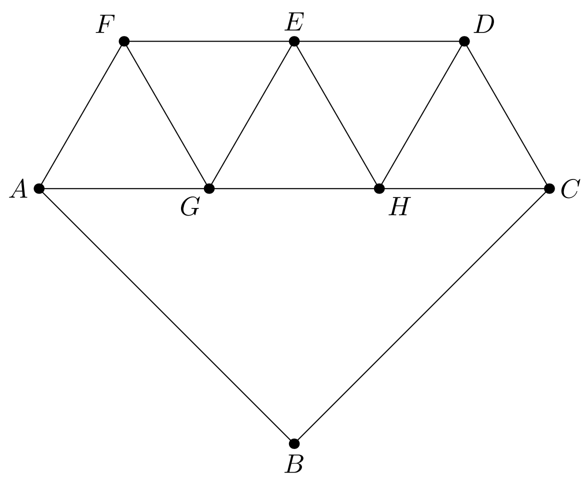
(b)

Lösung:



Es gibt drei Quadrate vom Typ $ABCD$.
Es gibt drei achsensymmetrische Trapeze vom Typ $EGAC$.
Es gibt drei achsensymmetrische Drachenvierecke vom Typ $DGRA$.

29.



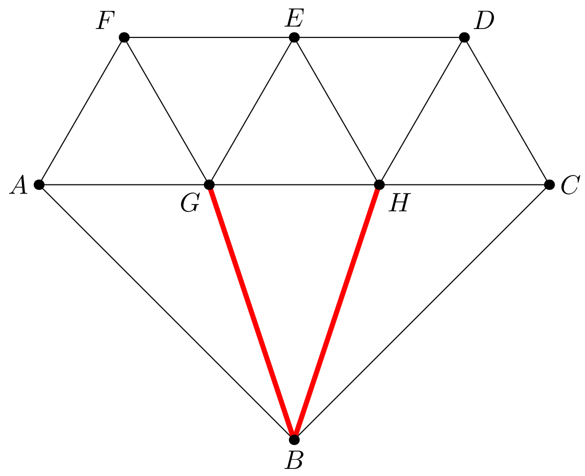
Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Trapez $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

(a) Wie viele Trapeze erkennst du außer dem Trapez $ACDF$ in der Figur? Verwende zum Aufzählen die Buchstaben.

(b) Zeichne farbig zwei Strecken so in die Figur, dass ein achsensymmetrisches Drachenviereck mit dem Eckpunkt E sichtbar wird.

(c) Woran erinnert dich die Figur jetzt?

Lösung:

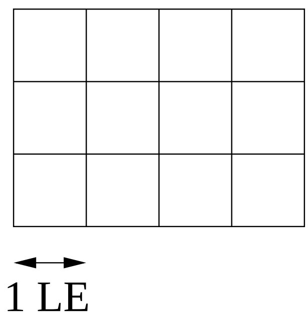


(a) Es sind **drei** Trapeze:
$AHEF$, $GCDF$ und $GHDF$.

(b) Siehe Zeichnung oben.

(c) Es könnte z.B. den Facettenschliff eines Brillinaten darstellen.

30.



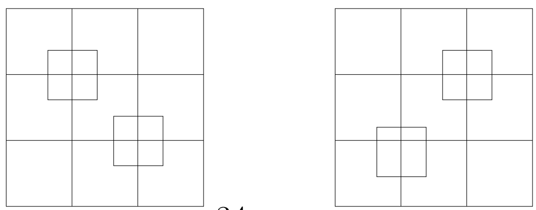
Wie viele Quadrate entdeckst du in der Figur?

Lösung:

Zahl der Quadrate mit der Seitenlänge 1 LE:	12
Zahl der Quadrate mit der Seitenlänge 2 LE:	6
Zahl der Quadrate mit der Seitenlänge 3 LE:	2
Gesamtzahl der Quadrate :	20

31.

Figur 1 Figur 2



Beate betrachtet die beiden Figuren 1 und 2. Sie ist sich nicht sicher, ob die Anzahl der Quadate in beiden Darstellungen die gleiche ist. Wie würdest du diese Frage beantworten?

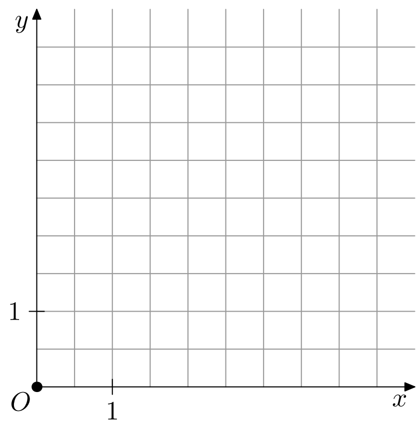
Lösung: In der Figur 1 werden die beiden „Extraquadrate“ durch die Gitterlinien in jeweils vier „Miniquadrate“ geteilt.
In der Figur 2 wird das „Extraquadrat“ links unten durch die Gitterlinien nur in vier Rechtecke, die keine Quadrate sind, geteilt.
Also enthält die Figur 1 mehr Quadrate als die Figur 2.

32. Zwei natürliche Zahlen x und y sollen zusammen 5 ergeben. In der Tabelle unten steht schon eine Möglichkeit: $x = 2$ und $y = 3$, so dass $x + y = 2 + 3 = 5$ gilt.

(a) Vervollständige die Tabelle entsprechend:

x		2			
y		3			
$(x \mid y)$		$(2 \mid 3)$			

(b) Die Zahlenpare in der dritten Zeile lassen sich als Punkte im Gitternetz deuten.



Trage alle Zahlenpaare der dritten Zeile in das Gitternetz ein.

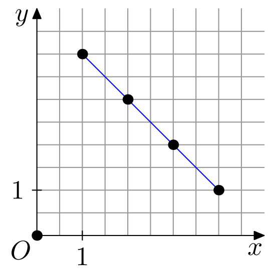
(c) • Die Punkte im Gitternetz liegen nicht wild in der Gegend herum. Beschreibe die Lage dieser Punkte:

• Mache deine Antwort auch im Gitternetz deutlich.

Lösung: (a) Vervollständige die Tabelle entsprechend:

x	1	2	3	4	
y	4	3	2	1	
$(x \mid y)$	$(1 \mid 4)$	$(2 \mid 3)$	$(3 \mid 2$	$(4 \mid 1)$	

(b)



(c)
- Alle Punkte liegen auf einer Strecke (oder Halbgeraden oder Geraden).
- Siehe Zeichnung.

33. In einer Plastiktüte befinden sich 100 gleiche Würfel, deren Kantenlänge jeweils 2 cm beträgt. Alfred will aus diesen Würfeln einen möglichst großen Würfel lückenlos zusammenfügen.

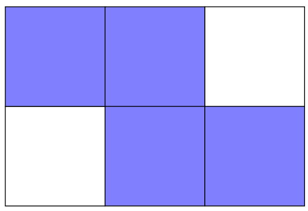
    (a) Wie viele kleine Würfel hat der dann übrig?

    (b) Wie hoch wäre der Turm aus kleinen Würfeln, die den großen Würfel ergeben?

Lösung: (a) Wenn in jeder Kante fünf kleine Würfel lägen, dann bräuchte Alfred $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ Würfel.
Also dürfen in jeder Kante nur 4 kleine Würfel liegen: $4^3 = 64$. Dann hat Alfred noch $100 - 64 = 36$ kleine Würfel übrig.

(b) Wenn Alfred die 64 kleinen Würfel zu einem Turm aufschichten könnte, dann wäre der Turm $64 \cdot 2\,\text{cm} = 128\,\text{cm}$ hoch.

34. Idee: Toni Chehlarova



Zähle die Rechtecke, deren eingefärbter Teil mehr als die Hälfte ihrer Fläche ausmacht.

Lösung: Unter den „kleinen Rechtecken“ können nur solche gezählt werden, die vollständig eingefärbt sind; das sind insgesamt 3 Rechtecke.
Das Rechteck jedoch, das alle Rechtecke umschließt, gehört auch dazu, denn vier von sechs seiner Teilflächen sind eingefärbt. Das ist mehr als die Hälfte.
Also sind es insgesamt 4 Rechtecke.

35. Idee: Fünfzehnte Fürther Mathematikolympiade, Klassenstufe 7 1. Runde Aufgabe 1
Fertige dir, z.B. aus Trinkhalmen, neun Stäbchen mit den Längen 1 cm, 2 cm bis 9 cm . Versuche dann, mit ihnen Quadrate zu legen, ohne ein Stäbchen zu zerstören.

(a) Begründe: Alle neun Stäbchen zusammen liefern kein Quadrat.

(b) Willy legt ein Quadrat, das an jeder Seite zwei Stäbchen enthält. Maria hat ihm zugeschaut. Sie meint: „Ich habe noch eine weitere Möglichkeit entdeckt.“ Gib alle Möglichkeiten an.

Lösung: (a) Die Summe der Längen der aneinandergereihten Stäbchen ergibt eine ungerade Zahl. Dieser Summenwert müsste die Maßzahl für den Umfang des gesuchten Quadrates sein.
Der Unfang eines Quadrates berechnet sich aus 4-mal die Länge einer Seite. Weil sich die Trinkhalm-Seitenlänge jedes Quadrates aus natürlichen Zahlen zusammensetzt, muss diese Seitenlänge in jedem Fall auch eine natürliche Zahl sein.
Wenn du jedoch die ungerade Umfangs-Maßzahl durch vier teilst, ergibt sich keine natürliche Zahl.

(b) Nachdem alle Stäbchen sich nicht zu einem Quadrat legen lassen, musst du mindestens eines weglassen. Dann sind noch acht Stäbchen übrig. Damit die Umfangsmaßahl gerade wird, muss das weggelassene Stäbchen eine ungerade Längenmaßzahl besitzen. Dann bleiben zum Aufbau von jeder Quadratseite jeweils zwei Stäbchen übrig.

	1. Sl. in cm	2. Sl. in cm	3. Sl. in cm	4. Sl. in cm
1. Mögl.	8+1=9	7+2=9	6+3=9	5+4=9
2. Mögl.	9+1 =10	8+2=10	7+3=10	6+4=10
3. Mögl.	9+2 =11	8+3=11	7+4=11	6+5=11

Das sind alle Möglichkeiten.