

Kepler'sche Gesetze

1. 3. Keplersche Gesetz

- (a) Wie kann man das 3. Keplersche Gesetz aus physikalischen Gesetzen ableiten? Welche vereinfachenden Annahmen werden dazu gemacht?
- (b) Welche Verfeinerung ergibt sich bei genauerer physikalischer Betrachtung des 3. Keplerschen Gesetzes. Wann ist diese Verfeinerte Version notwendig?

Lösung: (a) Annahmen: Kreisbewegung, gemeinsamer Schwerpunkt im Mittelpunkt des Zentralkörpers
Kräftegleichgewicht: $F_Z = G$, d. h. $\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$; mit $v = \frac{2r\pi}{T}$ folgt 3. Keplersches Gesetz
(b) $\frac{a^3}{T^2} = \frac{F(M+m)}{4\pi^2}$

2. Der Mond Ganymed umkreist den Planeten Jupiter mit der großen Halbachse $1094 \cdot 10^3 km$ und der Umlaufdauer von 7,155 Tagen.

- (a) Berechnen Sie daraus die Masse des Systems Ganymed-Jupiter
- (b) Schätzen Sie die Masse des Mondes Ganymed unter der Annahme ab, dass er die gleiche Dichte wie die Erde hat.

Daten:

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

Durchmesser Ganymed $5216 km$

Radius Erde $6368 km$

Dichte Erde $5,52 kg/m^3$

Lösung: (a) $2,0 \cdot 10^{27} kg$
(b) $4,1 \cdot 10^{20} kg$

3. Der Zwergplanet Pluto bewegt sich auf einer elliptischen Bahn mit der großen Halbachse von $39,7 AE$ und der Exzentrizität $\varepsilon = 0,25$ um die Sonne.

- (a) Berechnen Sie den Abstand von Pluto im Perihel und die Umlaufdauer von Pluto.
- (b) Der Mond Charon umrundet den Zwergplaneten Pluto in 6,38d nahezu auf einer Kreisbahn mit dem Radius $19600 km$. Berechnen Sie daraus die Gesamtmasse des Systems Pluto-Charon.
- (c) Pluto bzw. Charon haben einen Durchmesser von $2200 km$ bzw. $1160 km$. Berechnen Sie unter der Annahme, dass Pluto und Charon die gleiche Dichte haben, das Verhältnis der Massen von Pluto und Charon. Bestimmen Sie die Masse des Zwergplaneten Pluto.

Lösung: (a) $r_{Perihel} = 30 AE, T = 250 a$

- (b) $m_{ges} = 1,5 \cdot 10^{22} \text{kg}$
 (c) $\frac{m_P}{m_C} = 6,8$; $m_P = 1,3 \cdot 10^{22} \text{kg}$

4. Der mittlere Radius der Umlaufbahn des Mars um die Sonne ist 1,52-mal so groß wie der der Erde. Wie lange braucht der Mars um die Sonne zu umrunden?

Lösung: $T_{\text{Mars}} = \sqrt{1,52^3} \text{ a} \approx 1,87 \text{ a}$

5. Zeige, dass die Umlaufdauer eines Himmelskörpers um einen Zentralkörper mit zunehmenden Radius seiner Umlaufbahn wächst.

Lösung: T_0 bezeichnet die Umlaufdauer eines Himmelskörpers um den Zentralkörper. r_0 ist der zu dieser Umlaufbahn gehörige Radius, der beliebig klein sein kann. Aus dem dritten Kepler'schen Gesetz folgt für die Umlaufdauer T mit dem Radius r

$$T(r) = \underbrace{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1,5}}_{\geq 1, \text{ falls } r \geq r_0} T_0.$$

6. Am 14. November 2003 wurde der Planetoid Sedna entdeckt. Noch nie zuvor wurde ein natürliches Objekt aus unserem Sonnensystem in einer so großen Entfernung von der Erde entdeckt.

Im folgenden schätzen wir einige physikalische Eigenschaften dieses Planetoiden ab.

- (a) Sedna wurde in einer Entfernung von 90 AU von der Sonne entdeckt. Dreißig Tage nach seiner Entdeckung hat der Radius des Planetoiden einen Winkel von $2,8'$ überstrichen.
 Berechne unter der Annahme, dass die Geschwindigkeit in den ersten dreißig Tagen nach der Entdeckung von Sedna konstant ist, den Betrag derselben.
- (b) Berechne die große Halbachse a der Bahn und die Umlaufdauer von Sedna.
- (c) Die Exzentrizität der Bahn von Sedna ist $e = 0,8506$. Berechne den Abstand Sednas im Perihel und Aphel von der Sonne.

Lösung: (a) $v = \frac{2,8'}{360 \cdot 60'} \cdot \frac{2 r \pi}{30 \cdot 86400 \text{ S}} = 4,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

(b) $v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \Rightarrow a = \frac{GM r}{2GM - r v^2} = 5,5 \cdot 10^2 \text{ AE}$

- (c) Perihel $(1 - e) a = 82 \text{ AE}$
 Aphel $(1 + e) a = 1,0 \cdot 10^3 \text{ AE}$

7. Das schwarze Loch im Zentrum unserer Milchstraße

Astronomen haben inzwischen 28 Sterne entdeckt, die ihren Weg um das Zentrum Sgr A* unserer Galaxie auf elliptischen Bahnen, sogenannten Keplerbahnen, zurücklegen. Dabei ziehen sie ihre Bahn um eine sehr große, auf einem relativ kleinen Raum konzentrierte Ansammlung an Masse. Es wird mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit vermutet, dass es sich dabei um ein schwarzes Loch (MBH, d.h. massive black hole) handelt. In jedem Fall kann ausgeschlossen werden, dass es sich bei dieser Masse um eine Ansammlung von sehr vielen Sternen handelt.

Seit dem Beginn der Beobachtungen im Jahr 1992 hat einer dieser Sterne, der S2 genannt wird, Sgr A* in 15,8 Jahren genau einmal vollständig umrundet. Die Länge der großen Halbachse der Ellipse wird von den Forschern mit 125 mas angegeben. Dabei bedeutet 1 mas eine Millibogensekunde.

Wenn du nun die Masse des MBH abschätzen willst, so musst du noch wissen, dass ein Parsec (1 pc) die Entfernung ist, aus der der Radius der Erdbahn um die Sonne, das sind $1,496 \cdot 10^8$ km (1 AU), unter einem Winkel von einer Bogensekunde $1''$ erscheint und, dass die Entfernung von Sgr A* zur Erde 8,33 kpc beträgt.

Lösung: Große Halbachse der Ellipse von S2: $a = 0,125 \cdot 8,33 \cdot 10^3$ AU = 1041,25 AU.

Aus dem dritten Keplergesetz folgt: $M = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma T^2} = 4,6 \cdot 10^6 M_\odot$. Dabei wurde davon ausgegangen, dass die Bahn von S2 näherungsweise kreisförmig ist, obwohl die numerische Exzentrizität der Ellipse 0,88 beträgt. Das erhaltene Ergebnis stimmt auch recht gut mit dem Literaturwert von $4,31 \cdot 10^6 M_\odot$ überein.

8. Das dritte Keplersche Gesetz

Zwischen der Umlaufzeit T eines Planeten um ein Zentralgestirn, dessen elliptische Bahn eine große Halbachse hat, deren Länge mit a bezeichnet wird, wird ein Zusammenhang der Gestalt

$$T^m = C a^n$$

vermutet. Dabei sind m und n natürliche Zahlen und C ist eine beliebige Zahl. Dieser Zusammenhang stellt das dritte Keplersche Gesetz dar. Um die Werte der Konstanten m , n und C zu ermitteln logarithmieren wir diese Gleichung:

$$\log T^m = \log (C a^n).$$

Mit den Rechengesetzen für Logarithmen wird daraus

$$m \log T = n \log a + \log C.$$

Name	T in d	a in 10^5 km
Mimas	0,940	1,86
Enceladus	1,37	2,38
Tethys	1,89	2,95
Dione	2,74	3,77
Rhea	4,52	5,27
Titan	16,0	12,2
Iapetus	79,3	35,6

Die sieben größten Saturntrabanten

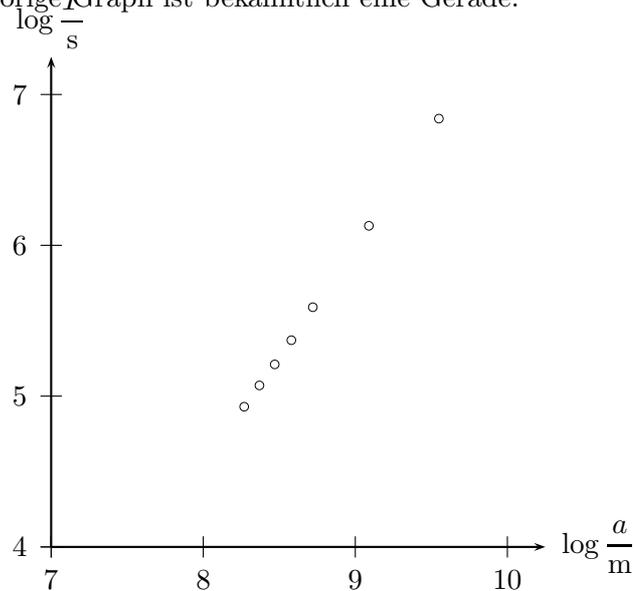
Nun teilen wir die Gleichung durch m und erhalten

$$\log T = \frac{n}{m} \log a + \frac{\log C}{m}.$$

Wir schreiben noch y für $\log T$, x für $\log a$, s für $\frac{n}{m}$ und t für $\frac{\log C}{m}$.

- Mit diesen Abkürzungen erhält man einen bekannten funktionalen Zusammenhang in der Mathematik. Wie wird dieser genannt und welche Gestalt hat der zugehörige Graph in einem x - y -Koordinatensystem.
- Erstelle aus der Tabelle für die sieben größten Trabanten des Saturn ein $\log T$ - $\log a$ -Diagramm. Ermittle die Steigung und den y -Achsenabschnitt der sich ergebenden Kurve. Welche Werte ergeben sich für m und n ?
- Im dritten Keplerschen Gesetz ist die Konstante C durch $\frac{4\pi^2}{\gamma M}$ gegeben. Dabei bezeichnet $\gamma = 6,62 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ die Gravitationskonstante und M die Masse des Zentralkörpers, in unserm Fall also die des Saturn. Ermittle unter Verwendung des Ergebnisses aus der vorigen Teilaufgabe die Masse des Saturn.

Lösung: (a) Mit den Abkürzungen gilt $y = sx + t$, d.h. es liegt ein affiner Zusammenhang zwischen x und y vor. Der zugehörige Graph ist bekanntlich eine Gerade.



(b)

Wählen wir den ersten und letzten Punkt im Koordinatensystem um ein Steigungsdreieck zu zeichnen, so erhält für die Steigung

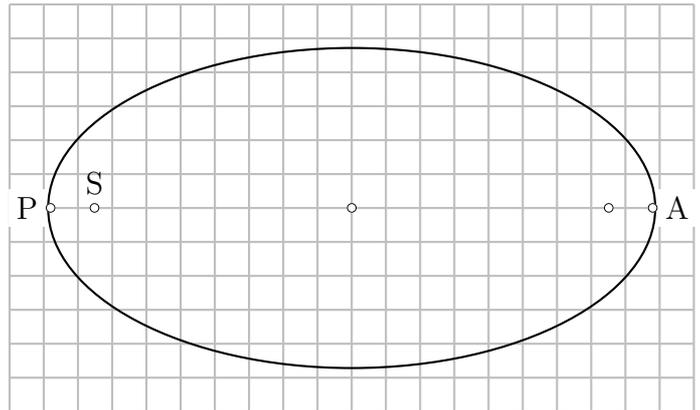
$$\frac{6,84 - 4,93}{6,55 - 5,27} = 1,49$$

Man kann also vermuten, dass $\frac{n}{m} = 1,5 = \frac{3}{2}$ und somit $n = 3$ und $m = 2$ ist. Unter Verwendung der linearen Regression erhält man unter der Berücksichtigung, dass man 3 geltende Ziffern hat wirklich 1,50.

9. Die Masse des Zentralgestirns Gliese beträgt 0,33 Sonnenmassen und die Umlaufzeit von Gliese g um Gliese etwa 36,6 Tage. Berechne die Länge der großen Halbachse der Ellipsenbahn von Gliese um Gliese g.

Lösung: $a \approx \sqrt[3]{\left(\frac{T}{4\pi}\right)^2 \gamma M_{\odot}} = 2,0 \cdot 10^{10} \text{ m} = 0,14 \text{ AU}$

10. Nebenstehend ist die Bahn des Kometen Encke um die Sonne S abgebildet. Im Perihel P hat der Komet von der Sonne einen Abstand von 0,339 AE und im Aphel einen von 4,097 AE.



- (a) Der letzte Periheldurchgang war am 7.8.2010 zu beobachten. In wie viel Tagen erfolgt der nächste Periheldurchgang?
- (b) Im Perihel hat der Komet eine Geschwindigkeit von $69,53 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Schätze ab, wie groß die Geschwindigkeit von Encke beim Apheldurchgang ist. Dabei kannst du verwenden, dass die Geschwindigkeiten des Kometen in der Nähe von Perihel und Aphel konstant sind.

Lösung: (a) Daten von Encke:

Größe	Wert
Perihel	0,339 AE
Aphel	4,097 AE
Numerische Exzentrizität	$\varepsilon = 0,847$
Umlaufdauer	$T = 3 \text{ a } 110 \text{ d}$
Geschwindigkeit im Perihel	$69,53 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Große Halbachse	$a = 2,218 \text{ AE}$
Kleine Halbachse	$b = a \sqrt{1 - \varepsilon^2} = 1,179 \text{ AE}$
Lineare Exzentrizität	$e = 1,879 \text{ AE}$
Letzter Periheldurchgang	7.8.2010

Große Halbachse $a = \frac{0,339 \text{ AU} + 4,097 \text{ AU}}{2} = 2,218 \text{ AU} = 3,0318 128 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

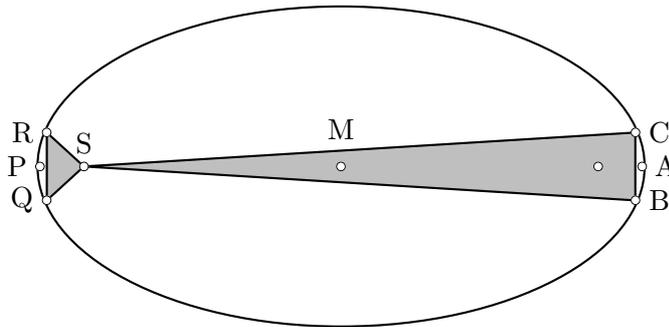
$$T^2 \approx \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}} a^3 \Rightarrow T \approx 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_{\odot}}} \Rightarrow T \approx 1206 \text{ d}$$

Alternative: $\frac{T_{\text{Erde}}^2}{a_{\text{Erde}}^3} = \frac{T_{\text{Enke}}^2}{a_{\text{Enke}}^3} \Rightarrow T_{\text{Enke}} = \left(\frac{a_{\text{Enke}}}{a_{\text{Erde}}}\right)^{1,5} T_{\text{Erde}}$

(b) Exakte Lösung:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{G m M_\odot}{r_A} = \frac{1}{2} m v_P^2 - \frac{G m M_\odot}{r_P} \Rightarrow v_A = \sqrt{v_P^2 - 2 M_\odot G \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A} \right)} = 5,75 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Abschätzung:



Es gilt der Keplersche Flächensatz: In gleichen Zeiten überstreicht der Radius gleiche Flächen. Offensichtlich haben die Ellipsensektoren SRQ und SBC unterschiedliche Flächeninhalte. Also ist die Zeit t_P , die der Komet benötigt um von Q nach R zu kommen deutlich kleiner als die Zeit t_A für seinen Weg von C nach B. Unter den Annahmen, dass sich die Geschwindigkeit in der Nähe der Punkte P und A nur sehr wenig ändert und dass die Flächeninhalte der Ellipsensektoren gleich den Flächeninhalten der zugehörigen Dreiecke sind erhalten wir:

$$\frac{A_{\Delta SRQ}}{t_P} = \frac{A_{\Delta SBC}}{t_A} \Rightarrow \frac{\overline{RQ} \cdot 0,339 \text{ AE}}{t_P} = \frac{\overline{CB} \cdot 4,097 \text{ AE}}{t_A}$$

Mit

$$v_P \approx \frac{\overline{RQ}}{t_P} \quad \text{und} \quad v_A \approx \frac{\overline{CB}}{t_P}$$

ergibt sich

$$v_A \approx \frac{0,339 \text{ AU}}{4,097 \overline{CB}} \cdot v_P = 5,75 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Dieser Wert stimmt sogar bis auf drei geltenden Ziffern mit dem exakt berechneten überein.