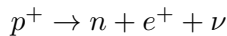
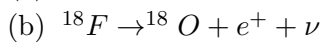


Zerfallsgesetz und Aktivität

1. Stoffwechselvorgänge im menschlichen Körper lassen sich unter anderem dadurch beobachten, dass man eine der beteiligten Substanzen mit einem radioaktiven Präparat, z. B. dem Fluorisotop ^{18}F als β^+ -Strahler, markiert. In einer radiologischen Praxis wird einem Patienten eine ^{18}F -haltige Zuckerlösung verabreicht. Die Halbwertszeit von ^{18}F beträgt $109,7\text{min}$.
 - (a) Bestimmen Sie die für die Untersuchung verbleibende Zeit, wenn die β^+ -Aktivität des ^{18}F dabei um höchstens 10% abnehmen darf.
 - (b) Geben Sie die Gleichung für den β^+ -Zerfall von ^{18}F an.
Geben Sie den Umwandlungsprozess an, bei dem das Positron entsteht.
Zeigen Sie, wie sich aus den Atommassen der beteiligten Atome seine maximale kinetische Energie errechnet, und begründen Sie, dass die meisten Positronen eine geringere kinetische Energie erhalten.
 - (c) Ein im Körpergewebe freigesetztes Positron ist nach wenigen Millimetern Wegstrecke abgebremst und reagiert dann mit einem ruhenden Elektron durch Paarvernichtung. Im Folgenden kann angenommen werden, dass dabei genau zwei Gammaquanten entstehen.
Begründen Sie, dass sich die zwei Gammaquanten in entgegengesetzte Richtung ausbreiten und die gleiche Energie von 511keV besitzen.

nach: EPA Physik, Beschluss der KMK vom 5.2.04

Lösung: (a) $t = 16,7\text{min}$



maximale kinetische Energie $E = [m_A(^{18}\text{F}) - m_A(^{18}\text{O}) - 2m(e)] \cdot c^2$

Die meisten Positronen haben eine geringere Energie, da das Neutrino einen Teil der beim Prozess frei werdenden Energie erhält.

- (c) Die beiden Gammaquanten müssen sich aufgrund des Impulserhaltungssatzes (Anfangsimpuls von Elektronen und Positron ist nahezu Null) in entgegengesetzte Richtungen und mit gleicher Energie ausbreiten.

Berechnung der Energie: Jedem Gammaquant steht die Ruheenergie $E = Mc^2$ des zerstrahlten Elektrons bzw. Positrons zur Verfügung. Daraus folgt $E = 511\text{keV}$.

2. Im folgenden werden wir den radioaktiven Zerfall mit einem Tabellenkalkulationsprogramm (in unserem Beispiel OpenOffice.org Calc) simulieren.

- Bedeutung der Zellenhalte

0 das Radionuklid ist zerfallen und existiert nicht mehr

1 das Radionuklid ist noch nicht zerfallen

- Bedeutung der Spalten

Die Spalte A steht für den Nullpunkt unserer Zeitmessung. Spalte B beschreibt die Situation nach einer Halbwertszeit, Spalte C nach zwei Halbwertszeiten, ..., Spalte I die Situation nach acht Halbwertszeiten.

- Bedeutung der Zeilen

Zeile 1 steht für das erste Radionuklid, Zeile 2 für das zweite, ..., Zeile 512 steht für das 512. Radionuklid.

Zum Zeitpunkt 0 sollen alle Radionuklide existieren, also tragen wir in die Zellen A1 bis A512 jeweils den Wert 1 ein.

In Zelle B1 wird `=WENN(A1=0;0;WENN(ZUFALLSZAHLC()<0,5;0;1))` eingetragen (welche Bedeutung hat diese Anweisung?).

Nun wird der Inhalt der Zelle B1 in alle anderen noch freien Zellen bis zur Spalte I und zur Zeile 512 kopiert.

Um die zu einem bestimmten Zeitpunkt die Anzahl der noch vorhandenen Radionuklide festzustellen summieren wir die die Inhalte der jeweiligen Spalten von A bis I und tragen diese Werte in die Zeile 513 ein.

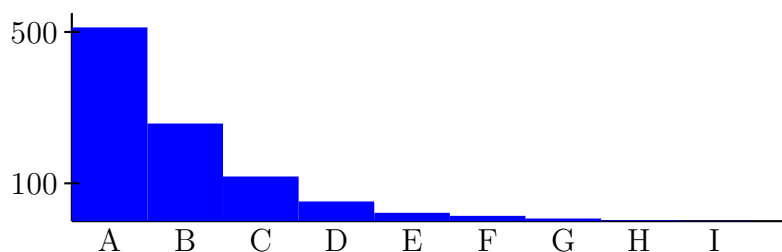
Zum Abschluss erstellen wir noch eine Grafik mit den Daten aus den Zellen A513 bis I513.

Mit Extras→Zellinhalte→Neu berechnen bzw. mit **F9** können wir alle Zellinhalte neu berechnen und somit ein neues „Zerfallsexperiment“ starten.

Dein Tabellenblatt sollte dann etwa so

B1	Formel:	<code>=WENN(A1=0;0;WENN(ZUFALLSZAHLC()<0,5;0;1))</code>							
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0	0	0
...									
510	1	1	1	0	0	0	0	0	0
511	1	1	0	0	0	0	0	0	0
512	1	1	1	0	0	0	0	0	0
513	512	258	118	52	22	14	7	2	1

und deine zugehörige Grafik so aussehen:



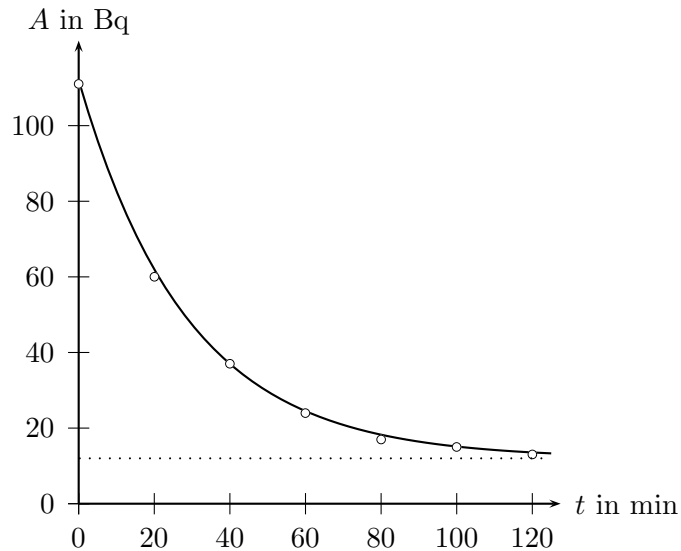
Lösung:

3. In einem physikalischen Labor hat man die Aktivität von Bi-214 während einer Zeitdauer von zwei Stunden gemessen. Man erhielt die folgenden Ergebnisse:

t in min	0	20	40	60	80	100	120
$A(t)$ in Bq	111	60	37	24	17	15	13

- (a) Zeichne das zugehörige t - A -Diagramm.
- (b) Entnimm aus diesem Diagramm die Nullrate und ermittle dann die Halbwertszeit von Bi-214, wenn bekannt ist, dass sich die Aktivität nach dem Ablauf von zwei Stunden kaum mehr ändert.

Lösung: (a) t - A -Diagramm

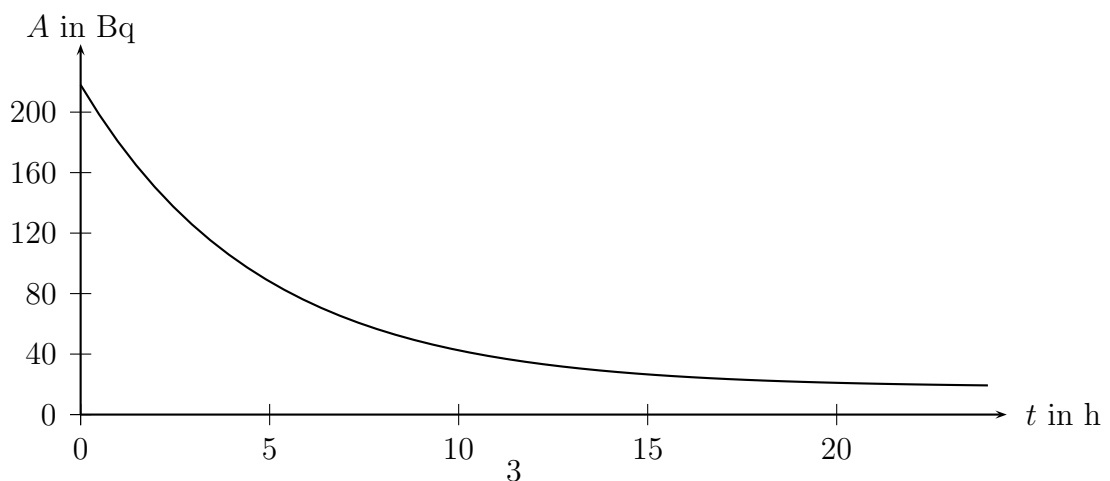


- (b) Zunächst kann man dem Diagramm entnehmen, dass die Nullrate nicht größer als 13 Bq ist. Man kann vermuten, dass die Nullrate bei 12 Bq liegen dürfte. Die um die Nullrate korrigierten Messwerte lauten

t in min	0	20	40	60	80	100	120
$A(t)$ in Bq	99	48	25	12	5	3	1

so, dass man auf eine Halbwertszeit von etwa 20 min kommt.

4. Für den Zerfall von Pb-209 hat man das folgende t - A -Diagramm erhalten:



Ermittle die Nullrate und die Halbwertszeit von Pb-209.

Lösung: 18 Bq; 3,3 h

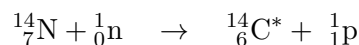
5. Die Radiokarbonmethode

- (a) Erläutere kurz die C-14-Methode zur Altersbestimmung von organischem Material.
- (b) C-14 zerfällt über einen β^- -Zerfall. Gib die vollständige Reaktionsgleichung an.

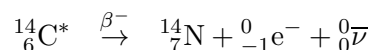
Um ägyptische Dynastien in ihrer zeitlichen Abfolge festzulegen, wurden von dem Holz der Sarkophage von Pharaonen Proben genommen.

- (c) Die Holzprobe vom Sarkophag des Tut-Ench-Amun zeigt eine Aktivität von $9,10 \text{ min}^{-1}$. Wie viele C-14-Atome sind in der Holzprobe, wenn die Halbwertszeit von C-14 5730 a beträgt?
- (d) Die Masse der genommenen Holzprobe beträgt 1,00 g. Wie viele C-12-Atome befinden sich in dieser Holzprobe. Aufgrund des geringen Anteils von C-14 in organischem Material darf der C-14-Anteil für diese Rechnung näherungsweise vernachlässigt werden. Welchen Wert hat das Verhältnis von der Anzahl der C-14-Atome zur Anzahl der C-12-Atome in dieser Probe?
- (e) Das Verhältnis der Anzahl von C-14-Atomen zur Anzahl der C-12-Atomen beträgt in lebendem Holz etwa $k_0 = 1,18 \cdot 10^{-12}$. Berechne aus dieser Angabe und dem Ergebnis der vorigen Aufgabe das Alter der Probe.
- (f) Welche qualitative Aussage kann man über das in der vorigen Aufgabe berechnete Alter machen, wenn der Wert von k_0 beim Schlagen des Holzes für den Sarkophag größer als der gegebene Wert war?
- (g) Aus welchem Grund wird die C-14-Methode nur für Gegenstände, deren vermutetes Alter kleiner als 50 000 Jahre ist, angewendet?

Lösung: (a) Durch kosmische Höhenstrahlung werden in der Atmosphäre freie Neutronen produziert, die sich mit Stickstoff zu ^{14}C verbinden:



Der Zerfall



hat die Halbwertszeit $T_H = 5730 \text{ a}$.

Ist die Intensität der Höhenstrahlung konstant, dann stellt sich mit der Zeit ein konstantes Verhältnis von ^{14}C zu ^{12}C -Isotopen ein (radioaktives Gleichgewicht!). Im Jahre 1950 betrug dieses Verhältnis in lebendem Gewebe

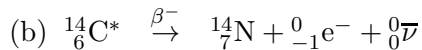
$$k_0 = \frac{N_{\text{C14}}}{N_{\text{C12}}} = 1,18 \cdot 10^{-12}$$

Im toten Gewebe findet kein Austausch mit dem CO_2 der Luft statt und das ^{14}C wird immer weniger. Das Verhältnis $k = \frac{N_{\text{C14}}}{N_{\text{C12}}}$ einer toten Probe wird im Allgemeinen durch Massenspektroskopie bestimmt.

Der chemisch extrahierte Kohlenstoff wird mit Cäsiumionen beschossen. Dabei treten einfach negativ geladene Kohlenstoffionen aus, die beschleunigt und dann in ein Magnetfeld geschossen werden. Richtig platzierte Zähler bestimmen dann das gesuchte Verhältnis k . Aus dem Zerfallsgesetz für die Zahl der ^{14}C -Kerne folgt nach Division durch N_{C12} :

$$k(t) = k_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

und daraus die Zeit t vom Absterben der Probe bis zur Messung.



(c) $A = \lambda N \Rightarrow N = \frac{A}{\lambda} = \frac{A T_{\text{H}}}{\ln 2} = 3,95 \cdot 10^{10}$

(d) $\frac{1,00 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{12 \text{ u}} = 5,02 \cdot 10^{22}$
 $k = \frac{3,95 \cdot 10^{10}}{5,02 \cdot 10^{22}} = 7,87 \cdot 10^{-13}$

(e) $k(t) = k_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{k_0}{k(t)}}{\ln 2} \cdot 5730 \text{ a} = 3350 \text{ a} = 3,35 \cdot 10^3 \text{ a}$

(Ergebnis mit gerundeten Werten, mit exakten Werten $3339 \text{ a} = 3,34 \cdot 10^3 \text{ a}$).

(f) Wie man an der Gleichung aus der vorigen Aufgabe ablesen kann ist die Probe in Wirklichkeit älter.

(g) Nach etwa 9 Halbwertszeiten ist die spezifische Aktivität sehr klein und die Masse der genommenen Probe im Bereich von wenigen Gramm liegt.

6. Das Phosphorisotop $^{30}_{15}\text{P}$ ist ein β^+ -Strahler mit der Halbwertszeit $T = 150 \text{ s}$. Zur Zeit $t = 0$ ist ein winziges Präparat von $^{30}_{15}\text{P}$ mit $N_0 = 2,00 \cdot 10^{18}$ Atomen vorhanden.

(a) Schreibe die ausführliche Zerfallsgleichung von $^{30}_{15}\text{P}$ hin.

(b) Welche Masse m hat das Phosphorpräparat?

(c) $N(t)$ bezeichnet die Zahl der Phosphoratome zur Zeit t . Fülle folgende Wertetabelle aus und zeichne den Grafen von N mit folgenden Einheiten: $T \hat{=} 3 \text{ cm}$, $N = 10^{18} \hat{=} 5 \text{ cm}$.

$\frac{t}{\text{s}}$	75	150	300	450	600
$\frac{N(t)}{10^{17}}$					

(d) Zu welcher Zeit t_1 sind noch $N_1 = 7,00 \cdot 10^{17}$ Atome des Phosphors vorhanden? Entnimm den ungefähren Wert von t_1 in nachvollziehbarer Weise dem Diagramm und verbessere den Wert durch Probieren auf drei geltende Ziffern.

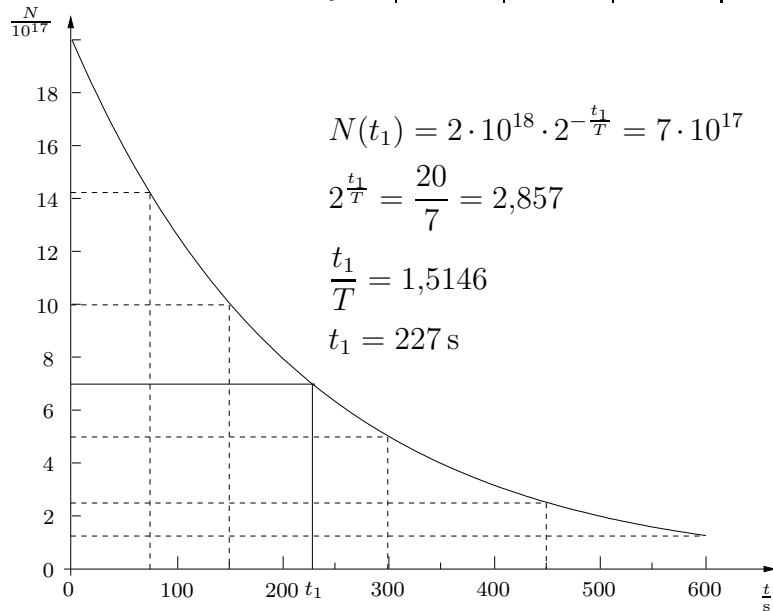
(e) Berechne die Zahl ΔN der Atome, die im Zeitintervall $[t_2; t_3]$ mit $t_2 = 298 \text{ s}$ und $t_3 = 302 \text{ s}$ zerfallen. Wie groß ist demnach die Aktivität $A(300 \text{ s})$?

Lösung: (a) ${}^{30}_{15}\text{P} \longrightarrow {}^{30}_{14}\text{Si} + \text{e}^+ + \nu_{\text{e}}$

(b) $m = N_0 M \approx N_0 \cdot 30u = 9,96 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \approx 0,10 \text{ mg}$

(c) $N(75 \text{ s}) = N_0 \cdot 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{N_0}{\sqrt{2}}$

$\frac{t}{\text{s}}$	75	150	300	450	600
$\frac{N(t)}{10^{17}}$	14,1	10,0	5,00	2,50	1,25



(d) $N(t_2) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t_2}{T}} = 2 \cdot 10^{18} \cdot 2^{-\frac{298}{150}} = 5,046 \cdot 10^{17}$

$N(t_3) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t_3}{T}} = 2 \cdot 10^{18} \cdot 2^{-\frac{302}{150}} = 4,954 \cdot 10^{17}$

$\Delta N = N(t_2) - N(t_3) = 9,2 \cdot 10^{15} \implies A(300 \text{ s}) = \frac{\Delta N}{4 \text{ s}} = 2,3 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{s}}$

7. In einer Raumsonde, die mit der Geschwindigkeit $v = 10,0 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ auf eine interstellare Reise geschickt wird, befinden sich beim Start ($t_0 = 0$) genau $m_0 = 100,0 \text{ g}$ des Isotops ${}^{146}_{62}\text{Sm}$ mit der Halbwertszeit $T = 1,03 \cdot 10^8 \text{ a}$ (α -Strahler). In ferner Zukunft (t_1) sammelt ein außerirdisches Raumschiff die Sonde ein und findet noch $m_1 = 92,5 \text{ g}$ Samarium an Bord.

(a) Berechne die Zahl N_0 der Samariumkerne zur Zeit $t_0 = 0$ und $N(t_1)$ zur Zeit des Einsammelns.

(b) Berechne die Zeit t_1 des Einsammelns. Wie viele Lichtjahre ist die Sonde dann von der Erde entfernt?

Lösung: (a) $N_0 = \frac{m}{M_{\text{Sm}146}} = \frac{0,1 \text{ kg}}{146 \text{ u}} = 4,125 \cdot 10^{23}$, $N_1 = \frac{m_1}{M_{\text{Sm}146}} = \frac{0,0925 \text{ kg}}{146 \text{ u}} = 3,815 \cdot 10^{23}$

(b) $N_1 = N_0 \cdot 2^{-\frac{t_1}{T}} \implies 2^{-\frac{t_1}{T}} = \frac{N_1}{N_0} = \frac{m_1}{m_0} = 0,925 \implies \frac{t_1}{T} = 0,1125$

$t_1 = 0,1125 \cdot T = 1,16 \cdot 10^7 \text{ a}$

$x = t_1 \cdot v = 1,16 \cdot 10^7 \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} \cdot 10000 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,66 \cdot 10^{18} \text{ m}$

$$1 \text{ LJ} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 9,47 \cdot 10^{15} \text{ m} \implies x = 386 \text{ LJ}$$

$$\text{oder eleganter: } x = vt_1 = \frac{v}{c} \cdot ct_1 = 3,336 \cdot 10^{-5} \cdot 1,16 \cdot 10^7 \text{ LJ} = 386 \text{ LJ}$$

8. In die Grundmauern einer neuen Universität wird im Jahr 2008 ein absolut dichter Edelstahlbehälter eingelassen, der $m = 0,983 \text{ mg}$ des Alphastrahlers $^{148}_{64}\text{Gd}$ (Gadolinium) enthält. Die Halbwertszeit des Nuklids ist $T = 74,6 \text{ a}$.

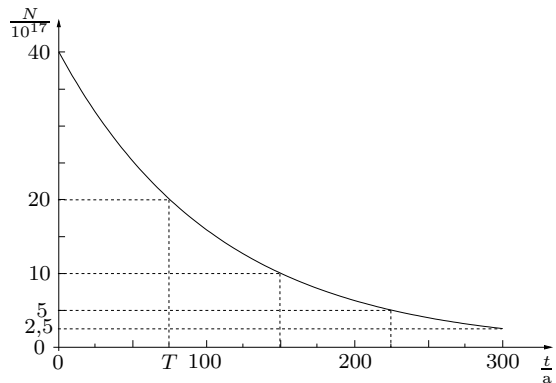
Nuklid	$^{148}_{64}\text{Gd}$	$^{144}_{62}\text{Sm}$	$^{148}_{65}\text{Tb}$	^4_2He
Masse in u	147,9181146	143,9119994	147,9242722	4,002603254

- (a) Schreibe die Reaktionsgleichung des Alphazerfalls von $^{148}_{64}\text{Gd}$ hin und berechne die Energie ΔW (in MeV), die beim Zerfall eines Atoms frei wird.
- (b) $N(t)$ ist die Zahl der Gd-Atome im Behälter, wobei $t_0 = 0$ der Zeit des Einlagerns entspricht. Berechne $N_0 = N(0)$ und zeichne den Graphen von $N(t)$ im Intervall $[0; 300 \text{ a}]$ ($t = 100 \text{ a} \hat{=} 4 \text{ cm}$, $N_0 \hat{=} 8 \text{ cm}$).
- (c) In ferner Zukunft finden Archäologen den Behälter und stellen fest, dass er noch $N_1 = 1,26 \cdot 10^{16}$ Gadoliniumatome enthält. In welchem Jahr wird er gefunden?

Lösung: (a) $^{148}_{64}\text{Gd} \rightarrow ^{144}_{62}\text{Sm} + ^4_2\text{He}$

$$\begin{aligned} \Delta W &= (M_{\text{Gd}148} - M_{\text{Sm}144} - M_{\text{He}4})c^2 = \\ &= (147,9181146 - 143,9119994 - 4,002603254)uc^2 = \\ &= 0,003511868 uc^2 = 5,24 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 3,27 \text{ MeV} \end{aligned}$$

(b) $N_0 = \frac{m}{M_{\text{Gd}148}} = 4,00 \cdot 10^{18}$
In der Zeichnung: $T \hat{=} 3,0 \text{ cm}$



(c) $N(t_1) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t_1}{T}} = 3,15 \cdot 10^{-3} N_0 \implies 2^{-\frac{t_1}{T}} = 3,15 \cdot 10^{-3} \implies 2^{\frac{t_1}{T}} = 317,46$
 $\frac{t_1}{T} = 8,31 \implies t_1 = 620 \text{ a}$

9. In Raumsonden werden sogenannte *Nuklearbatterien* als Energiequelle verwendet. Eine dieser Batterien enthält zur Zeit $t_0 = 0$ genau $m = 316,3 \text{ g}$ des Alphastrahlers $^{238}_{94}\text{Pu}$ mit der Halbwertszeit $T = 87,7 \text{ a}$.

Nuklid	$^{238}_{94}\text{Pu}$	$^{236}_{92}\text{U}$	$^{234}_{92}\text{U}$	^4_2He
Masse in u	238,0495598	236,0455680	234,0409521	4,002603254

- (a) Schreibe die Reaktionsgleichung des Alphazerfalls von $^{238}_{94}\text{Pu}$ hin und berechne die Energie ΔW , die beim Zerfall eines Atoms frei wird.
- (b) $N(t)$ ist die Zahl der Pu-Atome in der Batterie. Berechne $N_0 = N(0)$ und zeichne den Graphen von $N(t)$ im Intervall $[0; 400 \text{ a}]$ ($t = 200 \text{ a} \hat{=} 5 \text{ cm}$, $N_0 \hat{=} 8 \text{ cm}$). Berechne die Zeit t_1 , zu der noch 10 % der anfänglich vorhandenen Pu-Atome in der Batterie sind.
- (c) Wie viele Pu-Atome zerfallen zwischen t_0 und $t_0 + 1 \text{ h}$? Wie groß ist die Aktivität A_0 zur Zeit t_0 ? Wie groß ist die elektrische Leistung der Batterie, wenn 8 % der Zerfallsenergie in elektrische Energie verwandelt werden?

Lösung: (a) $^{238}_{94}\text{Pu} \rightarrow ^{234}_{92}\text{U} + ^4_2\text{He}$

$$\begin{aligned}\Delta W &= (M_{\text{Pu}238} - M_{\text{U}234} - M_{\text{He}4})c^2 = \\ &= (238,0495598 - 234,0409521 - 4,002603254)uc^2 = \\ &= 0,00600453 uc^2 = 8,961 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 5,593 \text{ MeV}\end{aligned}$$

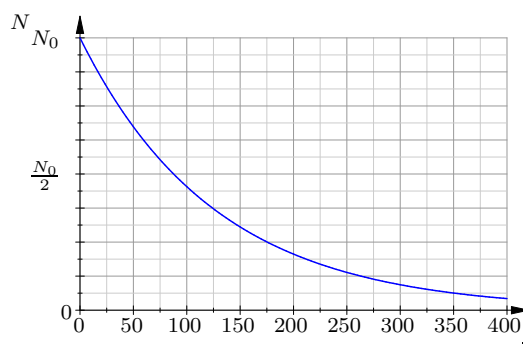
(b) $N_0 = \frac{m}{M_{\text{Pu}238}} = 8,00 \cdot 10^{23}$

$$N(t_1) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t_1}{T}} = 0,1 N_0$$

$$2^{-\frac{t_1}{T}} = 0,1 \implies 2^{\frac{t_1}{T}} = 10$$

$$\frac{t_1}{T} = 3,322 \implies t_1 = 291 \text{ a}$$

In der Zeichnung: $T \hat{=} 2,2 \text{ cm}$



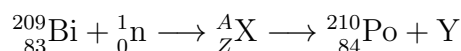
(c) $\Delta N = N_0 - N_0 \cdot 2^{-\frac{1 \text{ h}}{T}} = N_0(1 - 2^{-\frac{1}{768778}}) = N_0 \cdot 9,016 \cdot 10^{-7} = 7,21 \cdot 10^{17}$

$$A(0) = A_0 = \frac{\Delta N}{3600 \text{ s}} = 2,00 \cdot 10^{14} \frac{1}{\text{s}}, \quad A(t) = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

$$P_0 = P(0) = \frac{\Delta N \cdot \Delta W}{\Delta t} \cdot 80\% = A_0 \cdot \Delta W \cdot 0,08 = 180 \text{ W} \cdot 0,08 = 14,4 \text{ W}$$

$$P(t) = P_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

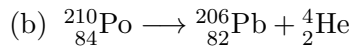
10. Das hochtoxische und radioaktive Element Po 210 mit der Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}} = 138,38 \text{ d}$ wird in Kernreaktoren durch Beschuss von Bi 209 mit Neutronen hergestellt:



- (a) Vervollständige die Reaktionsgleichung der Poloniumherstellung.
- (b) Der Alphastrahler Po 210 geht in ein stabiles Tochterelement über; in welches?

- (c) Am Tatort eines Verbrechens wird am 23.11.2006 ein gut verschlossener Behälter gefunden, in dem sich Po 210 und $m = 19,62\mu\text{g}$ des Tochterelements befinden. Der Inhalt des Behälters hat die Aktivität $A = 1,56 \cdot 10^8 \text{ Bq}$. Zur Aufklärung des Verbrechens ist das Datum der Poloniumherstellung von Interesse. Berechne dieses Datum unter der Annahme, dass das frisch erzeugte Polonium sofort in dem gefundenen Behälter deponiert wurde.

Lösung: (a) ${}_{83}^{209}\text{Bi} + {}_0^1\text{n} \longrightarrow {}_{83}^{210}\text{Bi} \longrightarrow {}_{84}^{210}\text{Po} + {}_{-1}^0\text{e}$



- (c) Am 23.11.2006: N_1 : Zahl der Po 210-Kerne, N_2 : Zahl der Pb 206-Kerne

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}} = 5,797 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{s}} = 5,009 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{d}}$$

$$N_1 = \frac{A}{\lambda} = 2,69 \cdot 10^{15}, \quad N_2 = \frac{m}{206 u} = 5,74 \cdot 10^{16}$$

Die Zahl der Po 210-Kerne zum Zeitpunkt der Herstellung ist

$$N_0 = N_1 + N_2 = 6,00 \cdot 10^{16}$$

$$N_1 = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \implies t = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left(\frac{N_1}{N_0} \right) = 5,38 \cdot 10^8 \text{ s} = 620 \text{ d}$$

$$620 = 365 + 255 = 365 + 23 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 18 \implies$$

Datum der Herstellung: 13.03.2005