Relativistische Energie

1. Der LHC (Large Hadron Collider) am CERN beschleunigt Protonen und schwere Ionen auf einer kreisförmigen Strecke der Länge $u = 26{,}659\,\mathrm{km}$.

   (a) Protonen erreichen die Endenergie $W_\mathrm{p} = 7{,}01\,\mathrm{TeV}$. Um welchen Bruchteil weicht die Endgeschwindigkeit v der Protonen von der Lichtgeschwindigkeit ab?

   (b) Berechne die Stärke B des Magnetfeldes, das die Protonen auf ihre Kreisbahn zwingt.

   (c) Auf welche Energie W_Z kann der LHC nackte Atomkerne der Masse M und der Ladung $q = Ze$ bei dem in Teilaufgabe (b) berechneten Magnetfeld beschleunigen? Wie groß ist W_Z für Bleikerne ($Z = 82$)?

   (d) Wie groß darf die Masse M_H des Higgsteilchens höchstens sein, wenn es durch den Stoß zweier gegenläufiger Bleikerne erzeugt werden soll (es wird immer ein Teilchen-Antiteilchen-Paar erzeugt)?

Lösung: (a) $\gamma = \dfrac{W_\mathrm{p}}{m_\mathrm{p}c^2} = \dfrac{7010\,\mathrm{GeV}}{0{,}938\,\mathrm{GeV}} = 7471 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \sqrt{1-\dfrac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \dfrac{1}{2\gamma^2}$

$\dfrac{c-v}{c} = 1 - \beta \approx \dfrac{1}{2\gamma^2} = 8{,}96 \cdot 10^{-9}$

(b) $\dfrac{\gamma m_\mathrm{p} v^2}{r} = evB \quad \Longrightarrow \quad B = \dfrac{\gamma m_\mathrm{p} v}{re} = \dfrac{\gamma\beta m_\mathrm{p} c}{re} = 5{,}51\,\mathrm{T}, \quad (r = 4243\,\mathrm{m})$

(c) $B = \gamma'\beta' \dfrac{Mc}{Zre} = \gamma\beta \dfrac{m_\mathrm{p} c}{re} \quad \Longrightarrow \quad \gamma'\beta' = \dfrac{\gamma\beta m_\mathrm{p} Z}{M} \approx \gamma'$

$W_\mathrm{Z} = \gamma' M c^2 \approx Z\gamma m_\mathrm{p} c^2 = ZW_\mathrm{p} = 82 W_\mathrm{p} = 575\,\mathrm{TeV}$

Exakte Rechnung:

$$\gamma'\beta' = \sqrt{\gamma'^2 - 1} \quad \Longrightarrow \quad \gamma'^2 = 1 + \left(\gamma'\beta'\right)^2 = 1 + \frac{\beta^2\gamma^2 m_\mathrm{p}^2 Z^2}{M^2}$$

$$W_\mathrm{Z} = Mc^2 \sqrt{1 + \frac{\beta^2\gamma^2 m_\mathrm{p}^2 Z^2}{M^2}} = \sqrt{M^2c^4 + Z^2\beta^2 W_\mathrm{p}^2} \approx ZW_\mathrm{p}$$

(d) $M \approx 207\,u \quad \Longrightarrow \quad M_\mathrm{H} = \dfrac{W_\mathrm{Z} - Mc^2}{c^2} = 1{,}02 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{kg}$

2. Welche Energie hat ein Proton, das bei einem Wettrennen mit einem Lichtstrahl über die Strecke $s = 100\,\mathrm{LJ}$ nur um $\Delta s = 100\,\mathrm{m}$ zurück liegt? In welcher Eigenzeit τ bestreitet das Proton das Rennen?

Lösung: In der Zeit $t = \dfrac{s}{c}$ legt das Licht die Strecke s und das Proton die Strecke $s - \Delta s$ zurück:

$$vt = \beta c \cdot \frac{s}{c} = \beta s = s - \Delta s \quad \Longrightarrow \quad \beta = 1 - \frac{\Delta s}{s}$$

$$\beta = 1 - \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\Delta s}{s} = \frac{100\,\mathrm{m}}{9{,}46 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m}} = 1{,}057 \cdot 10^{-16}$$

$$1-\beta^2 = (1-\beta)(1+\beta) = \alpha(2-\alpha) \approx 2\alpha$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} = 6{,}88\cdot 10^7$$
$$W = \gamma m_{\mathrm{p}} c^2 = 0{,}0103\,\mathrm{J}$$
$$\tau = \frac{t}{\gamma} = \frac{3{,}16\cdot 10^9\,\mathrm{s}}{6{,}88\cdot 10^7} = 45{,}9\,\mathrm{s}$$

3. (a) Ein Elektron, das zur Zeit $t=0$ ruht, wird von einem homogenen elektrischen Feld E beschleunigt. Berechne zuerst den Impuls $p(t)$ und dann die Geschwindigkeit $v(t)$ des Elektrons. Berechne $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$. Skizziere $v(t)$.

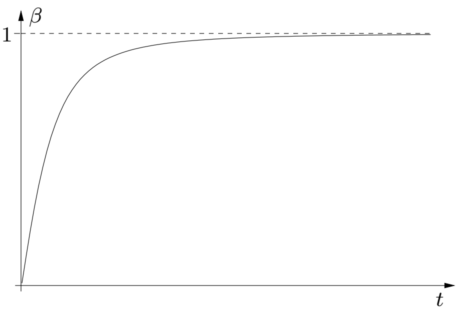
   (b) Drücke die zum Erreichen von v benötigte Zeit t durch $\beta = \frac{v}{c}$ aus. Wie lautet der entsprechende nichtrelativistische Ausdruck für t? Zeige, dass der relativistische Ausdruck für $\beta \ll 1$ in den nichtrelativistischen übergeht. Berechne t_{rel} und t_{nichtrel} speziell für $\beta = 0{,}99$, $\beta = 0{,}5$ und $\beta = 10^{-6}$.

Lösung: (a) $F = eE = \dot{p} \quad\Longrightarrow\quad p = eEt = \dfrac{mc\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$(1-\beta^2)e^2E^2t^2 = m^2\beta^2c^2$$

$$\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{mc}{eEt}\right)^2}}, \quad v(t) = c\beta(t)$$

$\lim\limits_{t\to\infty} \beta(t) = 1$, d.h. $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = c$



(b) $t = \dfrac{p}{eE} = \dfrac{mc}{eE}\cdot\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \dfrac{mc\beta}{eE} = \dfrac{mv}{eE} = \dfrac{p_{\mathrm{klassisch}}}{eE}$ für $\beta \ll 1$

β	$\frac{t_{\mathrm{rel}}}{\frac{mc}{eE}}$	$\frac{t_{\mathrm{klassisch}}}{\frac{mc}{eE}}$
0,99	7,0	0,99
0,5	0,58	0,50
10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}

4. (a) Zeige, dass der relativistische Ausdruck für die kinetische Energie für kleine Geschwindigkeiten näherungsweise in die klassische (nichtrelativistische) Formel übergeht.

   (b) Zeige, dass man die relativistische Formel für die kinetische Energie **nicht** erhält, wenn man einfach in der nichtrelativistischen Formel m durch γm ersetzt.

Lösung: (a) $W_{\mathrm{kin}} = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \approx mc^2\left(\dfrac{1}{1-\frac{\beta^2}{2}} - 1\right) \approx mc^2\left(1+\dfrac{\beta^2}{2} - 1\right) = \dfrac{m}{2}v^2$

(b) $W_{\mathrm{kin,falsch}} = \dfrac{\gamma m}{2}v^2 = \dfrac{m\beta^2c^2}{2\sqrt{1-\beta^2}}$

z.B. gilt für $\beta = 0{,}6$:
$W_{\mathrm{kin}} = 0{,}225\,mc^2$, $W_{\mathrm{kin,falsch}} = 0{,}25\,mc^2$, $W_{\mathrm{kin,klassisch}} = 0{,}18\,mc^2$

5. Was ist mehr wert, 1 g Gold oder 1 g elektrischer Energie? Den Goldpreis und den Strompreis findet man sicher im Internet.

Lösung: $W = 0{,}001\,\mathrm{kg} \cdot c^2 = 9 \cdot 10^{13}\,\mathrm{J} = 2{,}5 \cdot 10^7\,\mathrm{kWh} \mathrel{\widehat{=}} 2{,}5 \cdot 10^6$ € bei $10\,\dfrac{\mathrm{Ct}}{\mathrm{kWh}}$

Der Preis für ein Gramm Gold bewegt sich in der Größenordnung von 10 €bis 20 €.

6. Ein Eisenwürfel der Kantenlänge 10 cm wird von $\vartheta_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ auf $\vartheta_2 = 300\,^\circ\mathrm{C}$ erwärmt. Berechne die absolute und relative Massenzunahme.

Lösung: $\Delta W = mc_{\mathrm{Fe}}\Delta T = 7{,}86\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}452\,\dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} \cdot 280\,\mathrm{K} = 9{,}95 \cdot 10^5\,\mathrm{J}$

$$\Delta m = \frac{\Delta W}{c^2} = 1{,}1 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg}, \quad \frac{\Delta m}{m} = 1{,}4 \cdot 10^{-12}$$

7. Um wieviel Prozent ist Wasser der Temperatur $0\,^\circ\mathrm{C}$ schwerer als Eis der Temperatur $0\,^\circ\mathrm{C}$?

Lösung: $\Delta W = mC_{\mathrm{schmelz}} = m \cdot 334\,\dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\Delta m}{m} = \dfrac{\Delta W}{mc^2} = \dfrac{C_{\mathrm{schmelz}}}{c^2} = 3{,}7 \cdot 10^{-10}\,\%$

8. Mit welcher Geschwindigkeit muss sich ein Körper bewegen, damit seine kinetische Energie gleich seiner Ruhenergie ist?

Lösung: $W_{\mathrm{kin}} = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = mc^2, \quad 1 - \beta^2 = \dfrac{1}{4}, \quad \beta = \dfrac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}866$

9. Beweise: Ein Körper der Masse m und der kinetischen Energie W_{k} bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = \beta\, c$ mit

$$\beta = \frac{\sqrt{W_{\mathrm{k}}\,(W_{\mathrm{k}} + 2\,m\,c^2)}}{W_{\mathrm{k}} + m\,c^2}$$

Lösung: $\dfrac{W_{\mathrm{k}}}{mc^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \beta^2 = \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{W_{\mathrm{k}}}{mc^2}\right)^2} \quad \Longrightarrow$ die Beh.

10. Zwei Atomkerne mit den Massen m stoßen mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 0{,}6\,c$ und $v_2 = -0{,}6\,c$ total unelastisch zusammen und bilden einen neuen Kern. Berechne die Masse des neuen Kerns.

Lösung: $Mc^2 = 2\gamma mc^2, \quad M = 2\gamma m = 2\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}m = \dfrac{2m}{0{,}8} = 2{,}5\,m$

11. Zur Erinnerung: $\boxed{1\,\text{eV} = e \cdot 1\,\text{V}}$

   (a) Die Masse des Elektrons ist $m_\text{e} = 9{,}10938 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$. Berechne die Ruhenergie des Elektrons in MeV.

   (b) Die Ruhenergie des Protons ist $W_\text{p} = 938{,}27\,\text{MeV}$. Berechne die Masse des Protons.

Lösung: (a) $W_{\text{e}0} = mc^2 = 8{,}18711 \cdot 10^{-14}\,\text{J} = 0{,}511\,\text{MeV}$

(b) $m_\text{p} = \dfrac{W_{\text{p}0}}{c^2} = 1{,}67262 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$

12. Ein anfänglich ruhendes Teilchen der Ruhmasse m und der Ladung q wird von der Spannung U beschleunigt.

   (a) Berechne Formeln für die Endgeschwindigkeit des Teilchens einmal klassisch (nichtrelativistisch) und einmal relativistisch. Berechne im relativistischen Fall auch das Verhältnis $\frac{W}{W_0}$.

   (b) Berechne v_kl, v_rel und $\frac{W}{W_0}$ für ein Elektron und für ein Proton, einmal für $U = 2500\,\text{V}$ und einmal für $U = 5{,}000 \cdot 10^6\,\text{V}$. Wie groß ist jeweils der relative Fehler der nichtrelativistischen Rechnung?

Lösung: (a) $v_\text{kl} = \sqrt{\dfrac{2W_\text{kin}}{m}} = \sqrt{\dfrac{2qU}{m}}, \quad v_\text{rel} = c \cdot \dfrac{\sqrt{qU(qU + 2mc^2)}}{qU + mc^2}$

$$\frac{W}{W_0} = \frac{W_0 + W_\text{kin}}{W_0} = 1 + \frac{W_\text{kin}}{mc^2} = 1 + \frac{qU}{mc^2}$$

(b) Elektron:

U	v_kl	v_rel	$\dfrac{v_\text{kl} - v_\text{rel}}{v_\text{rel}}$	$\gamma = \dfrac{W}{W_0}$
$2500\,\text{V}$	$0{,}0989c$	$0{,}0986c$	$0{,}37\,\%$	$1{,}0049$
$5 \cdot 10^6\,\text{V}$	$4{,}42c > c$!!	$0{,}9957c$	$344\,\%$	$10{,}78$

Proton:

U	v_kl	v_rel	$\dfrac{v_\text{kl} - v_\text{rel}}{v_\text{rel}}$	$\gamma = \dfrac{W}{W_0}$
$2500\,\text{V}$	$0{,}00231c$	$0{,}00231c$	$2 \cdot 10^{-4}\,\%$	$1 + 2{,}6 \cdot 10^{-6}$
$5 \cdot 10^6\,\text{V}$	$0{,}1032c$	$0{,}1028c$	$0{,}40\,\%$	$1{,}0053$

13. In vielen Büchern findet man folgende Faustregel:

$$\boxed{\text{Bis zu } v = 0{,}1\,c \text{ darf klassisch gerechnet werden.}}$$

   (a) Berechne den relativen Fehler der kinetischen Energie, wenn für $v = 0{,}1\,c$ klassisch gerechnet wird.

   (b) Bis zu welcher Beschleunigungsspannung U darf nach unserer Faustregel für Elektronen bzw. Protonen klassisch gerechnet werden?

Lösung: (a) Mit $\beta = 0{,}1$ ist $\delta_\text{rel} = \dfrac{W_\text{kin} - W_\text{kin,klassisch}}{W_\text{kin}}$:

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)-\dfrac{m}{2}\beta^2c^2}{mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)} = 1-\frac{\beta^2}{2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)} = 0{,}0075 = 0{,}75\,\%$$

(b) $U = \dfrac{W_{\text{kin}}}{e} = \dfrac{mc^2}{e}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}1^2}}-1\right) = 0{,}00504\cdot\dfrac{mc^2}{e}$

e^- : $U = 0{,}00504\cdot 0{,}511\cdot 10^6\,\text{V} = 2{,}57\,\text{kV}$

p^+ : $U = 0{,}00504\cdot 938{,}27\cdot 10^6\,\text{V} = 4{,}73\,\text{MV}$

14. (a) Berechne den Lorentzfaktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ für ein Proton mit $W = 400\,\text{GeV}$ (Superprotonensynchrotron am CERN) und für ein Elektron mit $W = 21\,\text{GeV}$ (Linearbeschleuniger in Stanford, USA). Wie groß ist β in beiden Fällen?

(b) In welcher Eigenzeit legt ein Elektron mit der Energie 1 J die Strecke vom Quasar 3C 48 bis zur Erde ($4{,}8\cdot 10^9$LJ) zurück? Welche Energie müsste man aufbringen, um ein 100 t schweres Raumschiff in der gleichen Eigenzeit zu diesem Quasar zu schicken?

Lösung: (a) $\gamma = \dfrac{W}{W_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \sqrt{1-\dfrac{1}{\gamma^2}} \approx 1-\dfrac{1}{2\gamma^2}, \quad \text{da } \dfrac{1}{\gamma^2} \ll 1$

Proton : $\gamma = \dfrac{400\,\text{GeV}}{0{,}93827\,\text{GeV}} = 426 \qquad \beta = 1-2{,}75\cdot 10^{-6}$

Elektron : $\gamma = \dfrac{21\,000\,\text{MeV}}{0{,}511\,\text{MeV}} = 4{,}11\cdot 10^4 \qquad \beta = 1-2{,}96\cdot 10^{-10}$

(b) $\gamma = \dfrac{1\,\text{J}}{0{,}511\cdot 10^{-6}\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\,\text{J}} = 1{,}22\cdot 10^{13}$

$\beta = 1-\alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{2\gamma^2} = 3{,}35\cdot 10^{-27}$

$$\tau = \frac{s}{c}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{s}{c}\sqrt{\underbrace{(1-\beta)}_{\alpha}\underbrace{(1+\beta)}_{\approx 2}} \approx \frac{s}{c}\sqrt{2\alpha} = \frac{s}{c\gamma} = \frac{4{,}8\cdot 10^9\,\text{a}}{1{,}22\cdot 10^{13}} = 12\,400\,\text{s}$$

oder $\tau = 3\,\text{h}\,27\,\text{min}$

Im Raumschiff steckt die kinetische Energie $W_k = (\gamma-1)mc^2 \approx \gamma mc^2 = 1{,}1\cdot 10^{35}$ J. Die tatsächlich aufzuwendende Energie ist viel größer, da auch in der von der Rakete ausgestoßenen Masse (heiße Gase, Photonen) Energie steckt (siehe Raketenaufgabe zum Kapitel *Energie-Impuls-Beziehungen*). Für die Photonenrakete ist die aufzuwendende Energie $\approx 2\gamma mc^2$.

15. Die Erdoberfläche trägt die Ladung $Q = 5{,}77\cdot 10^5$ C. Von der Oberfläche bis zur Ionosphäre in ungefähr 60 km Höhe herrscht ein fast homogenes elektrisches Feld. Berechne die Masse dieses Feldes.

Lösung: In erster Näherung verwenden wir einen Plattenkondensator mit der Plattenfläche $A = 4\pi R^2$, $R = 6{,}38\cdot 10^6$ m und $d = h = 6\cdot 10^4$ m:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}, \quad W = \frac{1}{2}CU^2, \quad U = \frac{Q}{C}, \quad W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} = 2{,}21\cdot 10^{12}\,\text{J}$$

$m = \dfrac{W}{c^2} = 24{,}5\,\mathrm{mg}$

Genauer ist die Kapazitätsformel für den Kugelkondensator mit $r = R + h$:

$C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{r}} \quad \Longrightarrow \quad m = \dfrac{W}{c^2} = 24{,}3\,\mathrm{mg}$

16. Ein überzeugter „Antirelativist“ bringt folgendes Argument: „Ein geladenes Teilchen bewegt sich in einem äußeren elektrischen Feld $\vec{E}$. Das zunächst ruhende Teilchen verliert die potentielle Energie ΔW_{pot} und gewinnt die kinetische Energie ΔW_{kin}. Dabei gilt der Energiesatz $\Delta W_{\mathrm{kin}} + \Delta W_{\mathrm{pot}} = 0$. Die Gesamtenergie des Teilchens ist dann

$$W_{\mathrm{ges}} = m\,c^2 + \Delta W_{\mathrm{kin}} + \Delta W_{\mathrm{pot}} = m\,c^2 \neq \gamma m\,c^2 = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

was einen Widerspruch ergibt.“ Wo steckt der Fehler in dieser Argumentation?

Lösung: Der Fehler liegt einmal in einer falschen Interpretation von $\mathrm{W}_{\mathrm{ges}}$. Wenn $\mathrm{W}_{\mathrm{ges}}$ die Gesamtenergie des Teilchens sein soll, dann gilt $W_{\mathrm{ges}} = m\,c^2 + \Delta W_{\mathrm{kin}} = \gamma m\,c^2 = \dfrac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Zum Anderen wird auch ΔW_{pot} falsch gedeutet, da die potentielle Energie nicht zum Teilchen, sondern zum System Teilchen-Feld gehört. Da das Feld auch von mindestens einem Teilchen erzeugt werden muss, lautet der vollständige Energiesatz (wir nehmen ein felderzeugendes Teilchen mit der Masse M an):

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{ges}} = mc^2 + Mc^2 + W_{\mathrm{pot}} &= \gamma_1 mc^2 + \gamma_2 Mc^2 + W'_{\mathrm{pot}} \\ &= mc^2 + \Delta W_{\mathrm{kin1}} + Mc^2 + \Delta W_{\mathrm{kin2}} + W'_{\mathrm{pot}} \end{aligned}$$