Keplergesetzte

1. Am 14.November 2003 wurde der Planetoid Sedna entdeckt. Noch nie zuvor wurde ein natürliches Objekt aus unserem Sonnensystem in einer so großen Entfernung von der Erde entdeckt.

   Im folgenden schätzen wir einige physikalische Eigenschaften dieses Planetoiden ab.

   (a) Sedna wurde in einer Entfernung von 90 AU von der Sonne entdeckt. Dreißig Tage nach seiner Entdeckung hat der Radius des Planetoiden einen Winkel von $2{,}8'$ überstrichen.

   Berechne unter der Annahme, dass die Geschwindigkeit in den ersten dreißig Tagen nach der Entdeckung von Sedna konstant ist, den Betrag derselben.

   (b) Berechne die große Halbachse a der Bahn und die Umlaufdauer von Sedna.

   (c) Die Exzentrizität der Bahn von Sedna ist $e = 0{,}8506$. Berechne den Abstand Sednas im Perihel und Aphel von der Sonne.

Lösung: (a) $v = \dfrac{2{,}8'}{360 \cdot 60'} \cdot \dfrac{2\,r\,\pi}{30 \cdot 86\,400\,\mathrm{S}} = 4{,}2\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$

(b) $v = \sqrt{G\,M\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a}\right)} \;\Rightarrow\; a = \dfrac{G\,M\,r}{2\,G\,M - r\,v^2} = 5{,}5 \cdot 10^2\,\mathrm{AE}$

(c) Perihel $(1-e)\,a = 82\,\mathrm{AE}$
Aphel $(1+e)\,a = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{AE}$

2. **Das schwarze Loch im Zentrum unserer Milchstraße**

   Astronomen haben inzwischen 28 Sterne entdeckt, die ihren Weg um das Zentrum Sgr A* unserer Galaxie auf elliptischen Bahnen, sogenannten Keplerbahnen, zurücklegen. Dabei ziehen sie ihre Bahn um eine sehr große, auf einem relativ kleinen Raum konzentrierte Ansammlung an Masse. Es wird mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit vermutet, dass es sich dabei um ein schwarzes Loch (MBH, d.h. massive black hole) handelt. In jedem Fall kann ausgeschlossen werden, dass es sich bei dieser Masse um eine Ansammlung von sehr vielen Sternen handelt.

   Seit dem Beginn der Beoachtungen im Jahr 1992 hat einer dieser Sterne, der S2 gennant wird, Sgr A* in 15,8 Jahren genau einmal vollständig umrundet. Die Länge der großen Halbachse der Ellipse wird von den Forschern mit 125 mas angegeben. Dabei bedeutet 1 mas eine Millibogensekunde.

   Wenn du nun die Masse des MBH abschätzen willst, so musst du noch wissen, dass ein Parsec (1 pc) die Entfernung ist, aus der der Radius der Erdbahn um die Sonne, das sind $1{,}496 \cdot 10^8$ km (1 AU), unter einem Winkel von einer Bogensekunde $1''$ erscheint und, dass die Entfernung von Sgr A* zur Erde 8,33 kpc beträgt.

Lösung: Große Halbachse der Ellipse von S2: $a = 0{,}125 \cdot 8{,}33 \cdot 10^3\,\mathrm{AU} = 1041{,}25\,\mathrm{AU}$.

Aus dem dritten Keplergesetz folgt: $M = \dfrac{4\,\pi^2\,a^3}{\gamma\,T^2} = 4{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{M}_\odot$. Dabei wurde davon ausgegangen, dass die Bahn von S2 näherungsweise kreisförmig ist, obwohl die numerische Exzentrizität der Ellipse 0,88 beträgt. Das erhaltene Ergebnis stimmt auch recht gut mit dem Literaturwert von $4{,}31 \cdot 10^6\,\mathrm{M}_\odot$ überein.

3. **Das dritte Keplersche Gesetz**

Zwischen der Umlaufzeit T eines Planeten um ein Zentralgestirn, dessen elliptische Bahn eine große Halbachse hat, deren Länge mit a bezeichnet wird, wird ein Zusammenhang der Gestalt

$$T^m = C\,a^n$$

vermutet. Dabei sind m und n natürliche Zahlen und C ist eine beliebige Zahl. Dieser Zusammenhang stellt das dritte Keplersche Gesetz dar. Um die Werte der Konstanten m, n und C zu ermitteln logarithmieren wir diese Gleichung:

$$\log T^m = \log\left(C\,a^n\right).$$

Name	T in d	a in 10^5 km
Mimas	0,940	1,86
Enceladus	1,37	2,38
Tethys	1,89	2,95
Dione	2,74	3,77
Rhea	4,52	5,27
Titan	16,0	12,2
Iapetus	79,3	35,6

Die sieben größten Saturntrabanten

Mit den Rechengesetzen für Logarithmen wird daraus

$$m\,\log T = n\,\log a + \log C.$$

Nun teilen wir die Gleichung durch m und erhalten

$$\log T = \frac{n}{m}\,\log a + \frac{\log C}{m}.$$

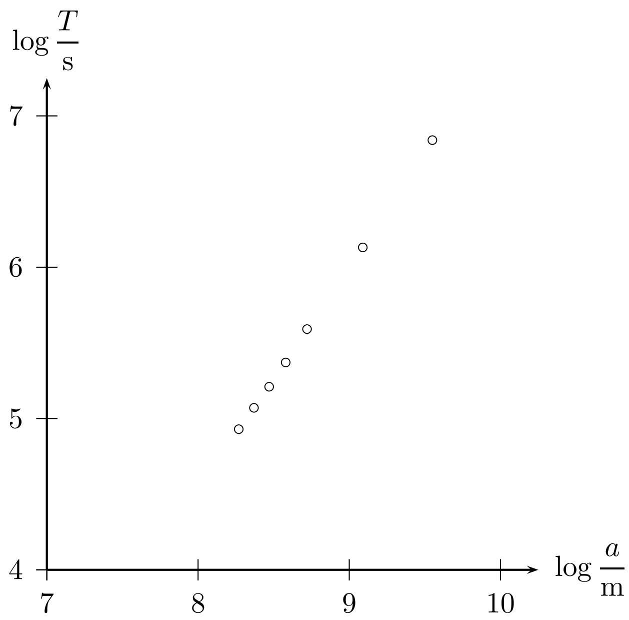
Wir schreiben noch y für $\log T$, x für $\log a$, s für $\frac{n}{m}$ und t für $\frac{\log C}{m}$.

(a) Mit diesen Abkürzungen erhält man einen bekannten funktionalen Zusammenhang in der Mathematik. Wie wird dieser genannt und welche Gestalt hat der zugehörige Graph in einem x–y–Koordinatensystem.

(b) Erstelle aus der Tabelle für die sieben größten Trabanten des Saturn ein $\log T$–$\log a$–Diagramm. Ermittle die Steigung und den y–Achsenabschnitt der sich ergebenden Kurve. Welche Werte ergeben sich für m und n?

(c) Im dritten Kepelerschen Gesetz ist die Konstante C durch $\frac{4\pi^2}{\gamma M}$ gegeben. Dabei bezeichnet $\gamma = 6{,}62\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$ die Gravitationskonstante und M die Masse des Zentralkörpers, in unserm Fall also die des Saturn. Ermittle unter Verwendung des Ergebnisses aus der vorigen Teilaufgabe die Masse des Saturn.

Lösung: (a) Mit den Abkürzungen gilt $y = s\,x + t$, d.h. es liegt ein affiner Zusammenhang zwischen x und y vor. Der zugehörige Graph ist bekanntlich eine Gerade.



(b)

Wählen wir den ersten und letzten Punkt im Koordinatensystem um ein Steigungsdreieck zu zeichnen, so erhalt für die Steigung

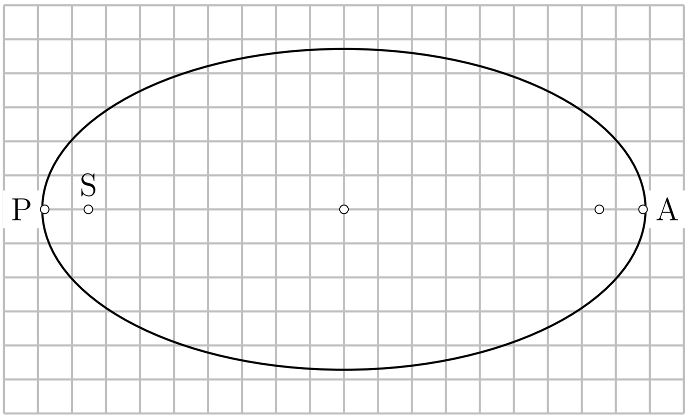
$$\frac{6{,}84 - 4{,}93}{6{,}55 - 5{,}27} = 1{,}49$$

Man kann also vermuten, dass $\frac{n}{m} = 1{,}5 = \frac{3}{2}$ und somit $n = 3$ und $m = 2$ ist. Unter Verwendung der linearen Regression erhält man unter der Berücksichtigung, dass man 3 geltende Ziffern hat wirklich 1,50.

4. Die Masse des Zentralgestirns Gliese beträgt 0,33 Sonnenmassen und die Umlaufzeit von Gliese g um Gliese etwa 36,6 Tage. Berechne die Länge der großen Halbachse der Ellipsenbahn von Gliese um Gliese g.

Lösung: $a \approx \sqrt[3]{\left(\frac{T}{4\pi}\right)^2 \gamma M_\odot} = 2{,}0 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} = 0{,}14\,\mathrm{AU}$

5. Nebenstehend ist die Bahn des Kometen Encke um die Sonne S abgebildet. Im Perihel P hat der Komet von der Sonne einen Abstand von 0,339 AE und im Aphel einen von 4,097 AE.



   (a) Der letzte Periheldurchgang war am 7.8.2010 zu beoachten. In wie viel Tagen erfolgt der nächste Periheldurchgang?

   (b) Im Perihel hat der Komet eine Geschwindigkeit von $69{,}53\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Schätze ab, wie groß die Geschwindigkeit von Encke beim Apheldurchgang ist. Dabei kannst du verwenden, dass die Geschwindigkeiten des Kometen in der Nähe von Perihel und Aphel konstant sind.

Lösung: (a) Daten von Encke:

Größe	Wert
Perihel	0,339 AE
Aphel	4,097 AE
Numerische Exzentrizität	$\varepsilon = 0{,}847$
Umlaufdauer	$T = 3\,\text{a}\,110\,\text{d}$
Geschwindigkeit im Perihel	$69{,}53\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
Große Halbachse	$a = 2{,}218$ AE
Kleine Halbachse	$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = 1{,}179$ AE
Lineare Exzentrizität	$e = 1{,}879$ AE
Letzter Periheldurchgang	7.8.2010

Große Halbachse $a = \dfrac{0{,}339\,\text{AU} + 4{,}097\,\text{AU}}{2} = 2{,}218\,\text{AU} = 3{,}0318\,128 \cdot 10^{11}\,\text{m}.$

$$T^2 \approx \frac{4\,\pi^2}{G\,M_\odot}\,a^3 \quad\Rightarrow\quad T \approx 2\,\pi\sqrt{\frac{a^3}{G\,M_\odot}} \quad\Rightarrow\quad T \approx 1206\,\text{d}$$

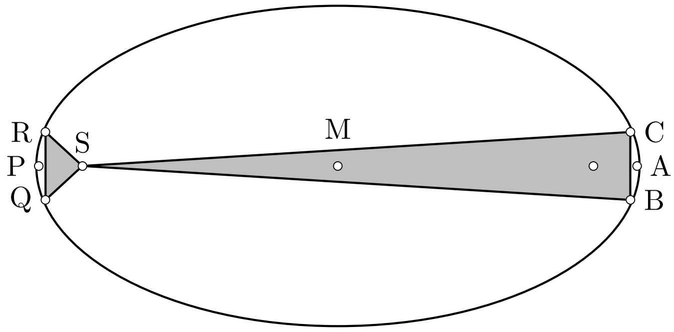
.

Alternative: $\dfrac{T_{\text{Erde}}^2}{a_{\text{Erde}}^3} = \dfrac{T_{\text{Enke}}^2}{a_{\text{Enke}}^3} \quad\Rightarrow\quad T_{\text{Enke}} = \left(\dfrac{a_{\text{Enke}}}{a_{\text{Erde}}}\right)^{1{,}5} T_{\text{Erde}}$

(b) Exakte Lösung:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_{\text{A}}^2 - \frac{G\,m\,M_\odot}{r_{\text{A}}} = \frac{1}{2}\,m\,v_{\text{P}}^2 - \frac{G\,m\,M_\odot}{r_{\text{P}}} \quad\Rightarrow\quad v_{\text{A}} = \sqrt{v_{\text{P}}^2 - 2\,M_\odot\,G\left(\frac{1}{r_{\text{P}}} - \frac{1}{r_{\text{A}}}\right)} = 5{,}75\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Abschätzung:



Es gilt der Keplersche Flächensatz: In gleichen Zeiten überstreicht der Radius gleiche Flächen. Offensichtlich haben die Ellipsensektoren SRQ und SBC unterschiedliche Flächeninhalte. Also ist die Zeit t_P, die der Komet benötigt um von Q nach R zu kommen deutlich kleiner als die Zeit t_A für seinen Weg von C nach B. Unter den Annahmen, dass sich die Geschwindigkeit in der Nähe der der Punkte P und A nur sehr wenig ändert und dass die Flächeninhalte der Ellipsensektoren gleich den Flächeninhalten der zugehörigen Dreiecke sind erhalten wir:

$$\frac{A_{\Delta\mathrm{SRQ}}}{t_\mathrm{P}} = \frac{A_{\Delta\mathrm{SBC}}}{t_\mathrm{A}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{\mathrm{RQ}}\cdot 0{,}339\,\mathrm{AE}}{t_\mathrm{P}} = \frac{\overline{\mathrm{CB}}\cdot 4{,}097\mathrm{AE}}{t_\mathrm{A}}$$

Mit

$$v_\mathrm{P} \approx \frac{\overline{\mathrm{RQ}}}{t_\mathrm{P}} \qquad \text{und} \qquad v_\mathrm{A} \approx \frac{\overline{\mathrm{CB}}}{t_\mathrm{P}}$$

ergibt sich

$$v_\mathrm{A} \approx \frac{0{,}339\,\mathrm{AU}}{4{,}097\mathrm{CB}}\cdot v_\mathrm{P} = 5{,}75\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Dieser Wert stimmt sogar bis auf drei geltenden Ziffern mit dem exakt berechneten überein.

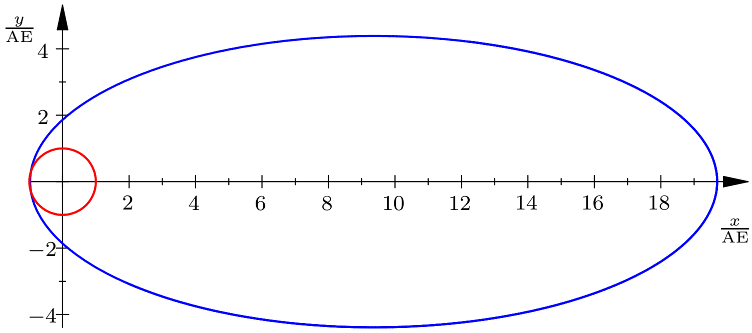
6. (a) Der Komet *Tempel-Tuttle* umrundet die Sonne in $T = 33{,}227\,\mathrm{a}$ und hat die kleinste Sonnenentfernung $r_1 = 0{,}976\,\mathrm{AE}$. Berechne die Halbachsen der Kometenbahn und seine größte Entfernung r_2 von der Sonne. Skizziere die Bahn des Kometen und zeichne auch die Erdbahn ein.

   (b) Der Komet Hale-Bopp hat den Perihelabstand $r_\mathrm{min} = 0{,}914\,\mathrm{AE}$ und die Exzentrizität seiner Bahn ist $e = 0{,}99511$. Berechne seine Umlaufdauer und die Halbachsen seiner Bahn.

Lösung: (a) $\dfrac{T^2}{a^3} = C_\odot = 1\,\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{AE}^3} \quad \Longrightarrow \quad a = \sqrt[3]{\dfrac{T^2}{C_\odot}} = 10{,}335\,\mathrm{AE}$

$d = a - r_1 = 9{,}359\,\mathrm{AE} \quad \Longrightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - d^2} = 4{,}386\,\mathrm{AE}$

$r_2 = a + d = 19{,}694\,\mathrm{AE}$



(b) $d = ea \quad \Longrightarrow \quad r_{\min} = a - d = a(1-e) \quad \Longrightarrow \quad a = \dfrac{r_{\min}}{1-e} = 187\,\mathrm{AE}$

$b = a\sqrt{1-e^2} = 18{,}5\,\mathrm{AE}$

$\dfrac{T^2}{a^3} = C_\odot = 1\,\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{AE}^3} \quad \Longrightarrow \quad T = \sqrt{a^3 C_\odot} = 2{,}56 \cdot 10^3\,\mathrm{a}$

7. Der Jupitermond Io umrundet den Planeten in der Zeit $T_{\mathrm{Io}} = 1{,}77\,\mathrm{d}$ auf einer Bahn mit der großen Halbachse $a_{\mathrm{Io}} = 4{,}22 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$.

   (a) Der Jupitermond Europa hat die Umlaufdauer $T_{\mathrm{Eu}} = 3{,}55\,\mathrm{d}$. Wie lang ist die große Halbachse a_{Eu} der Umlaufbahn von Europa?

   (b) Eine Jupitersonde soll den Planeten so umrunden, dass ihre kleinste Entfernung (Punkt A) vom Planetenmittelpunkt $r_1 = 2{,}00 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$ und ihre größte Entfernung (Punkt B) $r_2 = 8{,}00 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$ ist. Berechne die Länge a der großen Halbachse, die Umlaufdauer T, die Exzentrizität e und die Länge b der kleinen Halbachse der Sondenbahn.

   (c) Zeichne von der Sondenbahn die Punkte A, B und die beiden Brennpunkte S_1 (Jupiter) und S_2 ($10^5\,\mathrm{km} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$). Zeichne auch die Punkte C und D ein, die aus der Kenntnis der kleinen Halbachse resultieren.

   Konstruiere (mit kurzer Erläuterung) die Bahnpunkte E und F, die von Jupiter die Entfernung $r_3 = 3{,}2 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$ haben. Welche Entfernung r_4 haben diese Punkte von S_2? Beweise, dass $\mathrm{EF} \perp \mathrm{AB}$ gilt. Skizziere jetzt die Bahn unter Ausnutzung von Symmetrien.

Lösung: (a) $\dfrac{T_{\mathrm{Eu}}^2}{a_{\mathrm{Eu}}^3} = \dfrac{T_{\mathrm{Io}}^2}{a_{\mathrm{Io}}^3} = C_{\mathrm{Jup}} = 4{,}17 \cdot 10^{-17}\,\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{km}^3} \quad \Longrightarrow$

$a_{\mathrm{Eu}} = \sqrt[3]{\dfrac{T_{\mathrm{Eu}}^2 a_{\mathrm{Io}}^3}{T_{\mathrm{Io}}^2}} = a_{\mathrm{Io}}\sqrt[3]{\dfrac{T_{\mathrm{Eu}}^2}{T_{\mathrm{Io}}^2}} = 1{,}59\,a_{\mathrm{Io}} = 6{,}71 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$

(b) $a = \dfrac{r_1 + r_2}{2} = 5 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$

$$\frac{T^2}{a^3} = C_{\text{Jup}} \quad \Longrightarrow \quad T = \sqrt{a^3 C_{\text{Jup}}} = 2{,}28\,\text{d}$$

$$d = a - r_1 = 3 \cdot 10^5\,\text{km} = ea \quad \Longrightarrow \quad e = \frac{d}{a} = 0{,}6$$

$$b = \sqrt{a^2 - d^2} = a\sqrt{1 - e^2} = 0{,}8\,a = 4 \cdot 10^5\,\text{km}$$

(c) $r_4 = \overline{\text{ES}_2} = 2a - r_3 = 6{,}8 \cdot 10^5\,\text{km}$

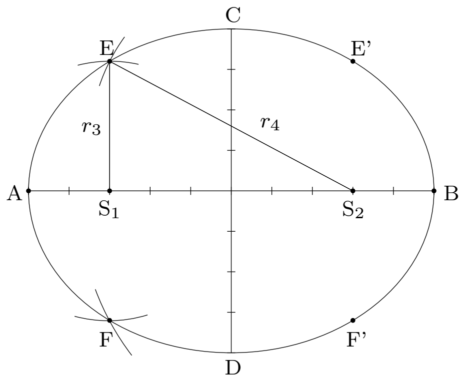
$\text{k}(\text{S}_1, r_3) \cap \text{k}(\text{S}_2, r_4) = \{\text{E,F}\}$

$\overline{\text{S}_1\text{S}_2} = 2d = 6 \cdot 10^5\,\text{km}$

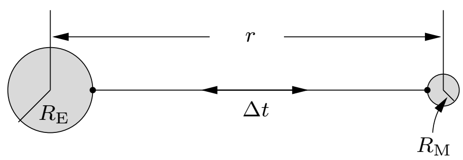
$r_3^2 + \overline{\text{S}_1\text{S}_2}^2 = 46{,}24 \cdot 10^{10}\,\text{km}^2$

$r_4^2 = 6{,}8^2 \cdot 10^{10}\,\text{km}^2 = r_3^2 + \overline{\text{S}_1\text{S}_2}^2 \quad \Longrightarrow$

$\sphericalangle\,\text{S}_2\text{S}_1\text{E} = 90°$



8. Ein kurzer Laserpuls wird von einem Teleskop T am Äquator zu einem Spiegel S auf dem Mond geschickt, dort reflektiert und bei T wieder empfangen, die Zeit Δt, die der Strahl unterwegs war, wird von einer Atomuhr gemessen. Im Verlauf eines Monats misst man die kleinste Zeitdifferenz $\Delta t_{\text{min}} = 2{,}369506841\,\text{s}$ und den größten Wert $\Delta t_{\text{max}} = 2{,}651082437\,\text{s}$. Der Erdradius ist $R_{\text{E}} = 6378\,\text{km}$, der Radius des Mondes $R_{\text{M}} = 1738\,\text{km}$.



(a) Berechne die kleinste (r_{min}) und die größte (r_{max}) Entfernung der Mittelpunkte von Erde und Mond. Ermittle daraus die große Halbachse a_{M} und die kleine Halbachse b_{M} der Mondbahn.

(b) Die *siderische* (in einem zu den Sternen ruhenden Koordinatensystem betrachtete) Umlaufdauer des Mondes ist $T_{\text{M}} = 27{,}32166\,\text{d}$. Welchen Radius hat die kreisförmige Bahn eines geostationären Satelliten, der die Erde in genau einem siderischen Tag (*Sterntag*), d.h. in $d_{\text{sid}} = 23\,\text{h}\,56\,\text{min}\,4\,\text{s}$ umrundet?

(c) Erkläre das Zustandekommen des Zahlenwertes eines siderischen Tages.

Lösung: (a) $r_{\text{min}} = \dfrac{c\Delta t_{\text{min}}}{2} + R_{\text{E}} + R_{\text{M}} = 363296\,\text{km}$

$$r_{\text{max}} = \frac{c\Delta t_{\text{max}}}{2} + R_{\text{E}} + R_{\text{M}} = 405504\,\text{km}$$

$$a_{\text{M}} = \frac{r_{\text{min}} + r_{\text{max}}}{2} = 384400\,\text{km}$$

$$d_{\text{M}} = a_{\text{M}} - r_{\text{min}} = 21104\,\text{km}, \qquad e_{\text{M}} = \frac{d_{\text{M}}}{a_{\text{M}}} = 0{,}0549$$

$$b_{\text{M}} = \sqrt{a_{\text{M}}^2 - d_{\text{M}}^2} = 383820\,\text{km}$$

(b) $T = d_{\text{sid}} = 86164\,\text{s}, \qquad \frac{T^2}{a^3} = \frac{T_{\text{M}}^2}{a_{\text{M}}^3} \quad \Longrightarrow \quad a = a_{\text{M}} \left(\frac{T}{T_{\text{M}}} \right)^{\frac{2}{3}} = 42298\,\text{km}$

über Erdoberfläche: $x = a - R_{\text{E}} = 35920\,\text{km}$

(c) Ein Jahr hat 365,25 24 h-Tage und 366,25 Sterntage:

$$365{,}25 \cdot 24\,\text{h} = 366{,}25 \cdot d_{\text{sid}}$$

$$d_{\text{sid}} = \frac{365{,}25}{366{,}25} \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s} = 86164\,\text{s}$$

$$d_{\text{sid}} = 23\,\text{h}\,56\,\text{min}\,4\,\text{s}$$