Extremwertaufgaben

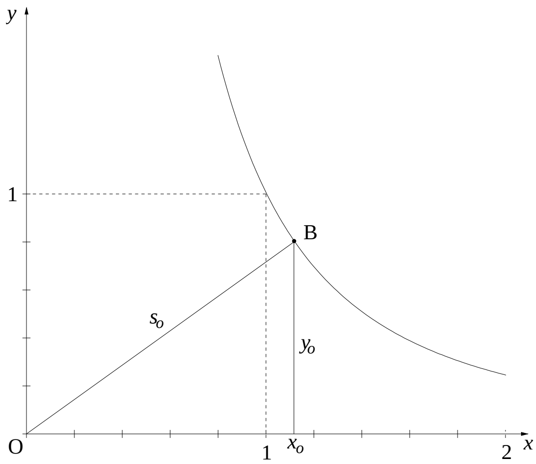
1. Der letzte Weg des Bären Bruno wird durch die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ und $D_f = \mathbb{R}^+$ beschrieben.

   (a) Zeichnen Sie den Grafen von f mit der Einheit 5 cm im x-Intervall $[0{,}8; 2]$.

   (b) Der Bär wandert gemächlich von links nach rechts auf dem Grafen von f. Im Ursprung O des Koordinatensystems sitzt ein feiger Jaga, der Bruno genau dann erlegt, wenn er von ihm die kleinste Entfernung hat. Drücken Sie die Entfernung s zwischen dem Bären und dem Schützen durch die x-Koordinate des Bären aus und berechnen Sie die Koordinaten von Brunos Schicksalsort $\mathrm{B}\,(x_0|y_0)$. Nachweis nicht vergessen, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt!

   (c) Wie lang ist die tatsächliche Schussweite $s_0 = \overline{\mathrm{OB}}$, wenn der in (a) gezeichnete Weg einer Karte im Maßstab 1:2000 entspricht?

Lösung: (a)



(b) $s(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2} = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^4}}$

$$s'(x) = \frac{2x - \frac{4}{x^5}}{2\sqrt{x^2 + f(x)^2}}$$

$$s'(x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 2^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}122$$

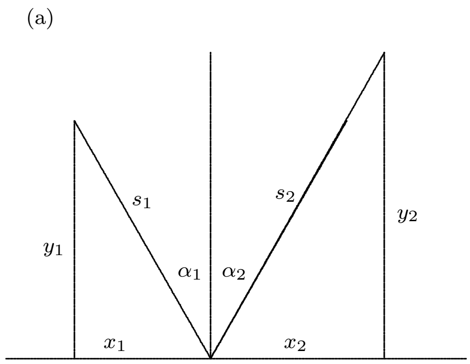
$$y_0 = f(x_0) = 2^{-\frac{1}{3}} \approx 0{,}7937$$

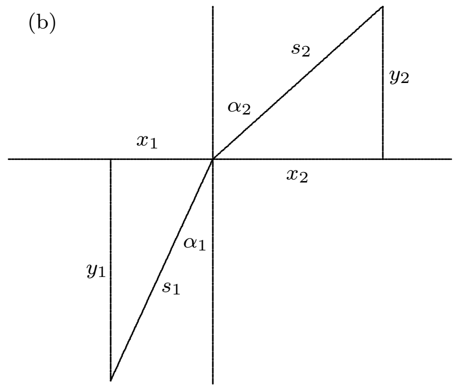
$\lim\limits_{x\to 0^+} s(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to +\infty} s(x) = +\infty$ und nur eine Nullstelle von s' $\Longrightarrow$ relatives Minimum bei $\mathrm{B}\,(x_0|y_0)$

(c) $s_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2} \approx 1{,}375$

In der Zeichnung hat s_0 die Länge $5 \cdot 1{,}375\,\mathrm{cm} = 6{,}875\,\mathrm{cm}$, in der Wirklichkeit also $2000 \cdot 6{,}875\,\mathrm{cm} = 137{,}5\,\mathrm{m}$.

2. Die Lichtgeschwindigkeit für verschiedene Medien beträgt $\frac{c}{n}$, wobei $c = 3{,}0 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und n die Brechungszahl des Mediums ist. Zeigen Sie, dass die Aussage „das Licht nimmt den Weg mit der minimalen Laufzeit“ äquivalent zu folgenden Gesetzen der geometrischen Optik ist:





(a) Bei der Reflexion von Licht ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel.

(b) Bei der Brechung von Licht an Grenzflächen gilt $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \dfrac{n_2}{n_1}$.

Lösung: (a) $t = \dfrac{s_1+s_2}{c} = \dfrac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{(l-x_1)^2+y_2^2}}{c}$

$0 = \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x_1} = \dfrac{x_1}{cs_1} - \dfrac{x_2}{cs_2} = \dfrac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}{c} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

(b) $t = \dfrac{s_1 n_1}{c} + \dfrac{s_2 n_2}{c} = \dfrac{n_1\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{c} + \dfrac{n_2\sqrt{(l-x_1)^2+y_2^2}}{c}$

$0 = \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x_1} = \dfrac{n_1 x_1}{cs_1} - \dfrac{n_2 x_2}{cs_2} = \dfrac{n_1\sin\alpha_1 - n_2\sin\alpha_2}{c} \Longrightarrow \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$

3. **Die optimale Dose**

(a) Aus Metall soll eine zylindrische Dose mit einem vorgegebenem Volumen V hergestellt werden. Für welchen Radius ist der Materialverbrauch minimal? Für die Rechnung soll der Materialverbrauch für Falze unberücksichtigt bleiben.

(b) Aus Metall soll eine zylindrische Dose mit einer vorgegebenen Oberfläche A hergestellt. Für welchen Radius ist das Volumen maximal?

Lösung: (a) $V = r^2\pi h \Rightarrow h(r) = \frac{V}{r^2\pi} \Rightarrow A(r) = 2r^2\pi + \frac{2V}{r}$

$A'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Da $A(0) = \infty$ und $\lim\limits_{r\to\infty} A(r) = \infty$ handelt es sich hierbei um ein Minimum.

(b) $A = 2r\pi(r+h) \Rightarrow h(r) = \frac{A}{2r\pi} - r \Rightarrow V(r) = \frac{1}{2}Ar - r^3\pi$

$V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$.

Aus einer Grenzwertbetrachtung von $V(r)$ schließt man auf ein Maximum.

4. Zerlegen Sie 15 so in eine Summe, dass das Produkt maximal ist.

Lösung: $p(x) = x(15 - x) \Rightarrow p'(x) = 15 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 7{,}5$
Maximum, da der Graph von $p(x)$ eine nach unten geöffnete Parabel ist.

5. Aus einem Draht der Länge 120 cm wird das Kantenmodell eines Quaders hergestell. Die Seite b ist doppelt so lang wie die Seite c. Wie groß muss die Länge der Seite c gewählt werden, damit das Volumen des Quaders maximal wird.

Lösung: $b = 2c, a = 30 - 3c \Rightarrow V(c) = (30 - 3c) \cdot 2c \cdot c$
$V'(c) = 120c - 18c^2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0, c_2 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$
Maximum, da $V'(6) > 0$ und $V'(7) < 0$.

6. Aus einem quadratischem Stück Karton der Seitenlänge 1 m soll eine quaderförmige Schachtel (ohne Deckfläche) mit der Höhe x hergestellt werden.

   (a) Drücken Sie das Volumen der Schachtel durch x aus. Bei der Rechnung soll die für Klebelaschen benötigte Fläche unberücksichtigt bleiben.

   (b) Für welche Höhe x ist das Volumen der Schachtel maximal?

   (c) Geben Sie das maximale Volumen der Schachtel an.

Lösung: (a) $V(x) = x(1\text{m} - 2x)^2 = 1\text{m}^2 x - 4\text{m}x^2 + 4x^3$
(b) $V'(x) = 1\text{m}^2 - 8\text{m}x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\text{m}$ oder $x_2 = \frac{1}{6}\text{m}$
$V(0) = V(\frac{1}{2}\text{m}) = 0.$
$V''(x) = -8\text{m} + 24x \Rightarrow V''(\frac{1}{6}\text{m}) = -4\text{m} < 0 \Rightarrow$
Maximum bei $x_2 = \frac{1}{6}\text{m}$.
(c) $V(\frac{1}{6}\text{m}) = \frac{2}{27}\text{m}^3$

7. Aus einem quadratischem Stück Karton der Seitenlänge a soll eine quaderförmige Schachtel (ohne Deckfläche) mit der Höhe x hergestellt werden.

   (a) Drücken Sie das Volumen der Schachtel durch x aus. Bei der Rechnung soll die für Klebelaschen benötigte Fläche unberücksichtigt bleiben.

   (b) Für welche Höhe x ist das Volumen der Schachtel maximal?

   (c) Geben Sie das maximale Volumen der Schachtel an.

Lösung: (a) $V(x) = x(a - 2x)^2 = a^2 x - 4ax^2 + 4x^3$
(b) $V'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}a$ oder $x_2 = \frac{1}{6}a$
$V(0) = V(\frac{1}{2}a) = 0.$
$V''(x) = -8a + 24x \Rightarrow V''(\frac{1}{6}a) = -4a < 0 \Rightarrow$
Maximum bei $x_2 = \frac{1}{6}a$.
(c) $V(\frac{1}{6}a) = \frac{2}{27}a^3$

8. Aus einem rechteckigem Stück Karton der Seitenlängen a und b soll eine quaderförmige Schachtel mit der Höhe x hergestellt werden.

   (a) Drücken Sie das Volumen der Schachtel durch x aus. Bei der Rechnung soll die für Klebelaschen benötigte Fläche unberücksichtigt bleiben.

   (b) Für welche Höhe x ist das Volumen der Schachtel maximal?

Lösung: (a) $V(x) = x(a-2x)(b-2x) = abx - 2(a+b)x^2 + 4x^3$

(b) $V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0 \Leftrightarrow$
$x_1 = \frac{1}{6}(a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab})$ oder $x_2 = \frac{1}{6}(a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab})$
$V''(x) = -4(a+b) + 24x \Rightarrow$
$V''(x_1) = 4\sqrt{a^2+b^2-ab} > 0 \Rightarrow$ Minimum bei x_1
$V''(x_2) = -4\sqrt{a^2+b^2-ab} < 0 \Rightarrow$ Maximum bei x_2.

9. Die Punkte $(x|f(x))$ auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ erzeugen mit den Punkten X$(x|0)$, Y$(0|f(x))$ und dem Koordinatenursprung O$(0|0)$ ein Rechteck der Fläche $A(x)$.

   (a) Berechnen Sie die Punkte des Graphen der Funktion $f(x)$ mit waagrechter Tangente.

   (b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ und zeichnen Sie für einen Punkt das zugehörige Rechteck ein.

   (c) Geben Sie die Koordinaten des Punktes P an, bei dem die Fläche des Rechtecks maximal ist.

Lösung: (a) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm 1$

(b)

(c) $A'(x) = (x \cdot f(x))' = 5x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$
$x_{1/2} = \frac{1}{10}(6 \pm \sqrt{36-20}) = \frac{1}{10}(6 \pm 4) \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5}.$
$A''(x) = 20x^3 - 12x,$
$A''(1) > 0$, also Minimum.
$A''(\frac{1}{5}) = -\frac{8}{5}\sqrt{5} < 0$, also Maximum. Also: P$\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\,|\,0{,}64\right)$

10. In einen Kreis mit Radius 2 um den Koordinatenursprung $(0|0)$ soll ein Trapez mit möglichst großer Fläche einbeschrieben werden. Zwei Punkte des Trapezes liegen auf der x-Achse.

   (a) Drücken Sie die Koordinaten der vier Ecken des Trapezes in Polarkoordinaten aus.

   (b) Geben Sie einen Term zur Berechnung der Fläche des Trapezes an.

   (c) Berechnen Sie die Fläche für $\varphi = 30°, 45°, 60°$ und $90°$ (φ ist der Winkel zwischen der x-Achse und der rechten oberen Trapezecke).

   (d) Für welchen Winkel φ ist die Fläche des Trapezes maximal?

Lösung: (a) $P(2|0)$, $Q(r\cos\varphi|r\sin\varphi)$, $R(-r\cos\varphi|r\sin\varphi)$, $S(-2|0)$

(b) $A(\varphi) = 4(1+\cos\varphi)\sin\varphi$, $\varphi \in [0; 90°]$

(c) $A(30°) = 3{,}732$, $A(45°) = 4{,}828$, $A(60°) = 5{,}196$, $A(90°) = 4$

(d)
$$\begin{aligned} A'(\varphi) &= 4(\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 4(\cos\varphi + \cos(2\varphi)) \\ &= 8\cdot\cos(\tfrac{3}{2}\varphi)\cdot\cos(\tfrac{1}{2}\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 60° \end{aligned}$$

11. Betrachten Sie ein Dreieck mit den Ecken $\mathrm{A}(-a|b)$, $\mathrm{B}(a|b)$ und $\mathrm{C}(0|1)$, dessen Ecken auf dem Einheitskreis mit Mittelpunkt $\mathrm{M}(0|0)$ und Radius 1 liegen ($a \geq 0$).

    (a) Zeichnen Sie die Dreiecke für $a = 0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}7$ ($1 \mathrel{\widehat{=}} 5\text{cm}$).

    (b) Berechnen Sie allgemein die Fläche $A(\varphi)$ des Dreiecks. Verwenden Sie zur Beschreibung den Winkel φ zwischen MB und der x-Achse ($\varphi < 0$, wenn B oberhalb der x-Achse).

    (c) Für welchen Winkel ist die Fläche des Dreiecks maximal?
    TIP: Verwenden Sie $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$ und den Satz von Vieta!

Lösung: (a)

(b) $A(\varphi) = \cos\varphi\cdot(1+\sin\varphi)$, $\varphi \in [-90°; 90°]$

(c)
$$\begin{aligned} A'(\varphi) &= -\sin\varphi\cdot(1+\sin\varphi) + \cos^2\varphi \qquad \Leftrightarrow \\ &= -\sin\varphi - \sin^2\varphi + 1 - \sin^2\varphi \\ &= 1 - \sin\varphi - 2\sin^2\varphi = (1-2\sin\varphi)(1+\sin\varphi) = 0 \end{aligned}$$

1. Fall: $\sin\varphi = -1$. Für $\sin\varphi = -1$ folgt $A(\varphi) = 0$, also kein Maximum!
2. Fall: $\sin\varphi = \frac{1}{2}$ ($\Leftrightarrow \varphi = 30°$!).
Bei $\varphi = 30°$ liegt ein Maximum vor, da $A(0°) = 1$, $A(90°) = 0$ und $A(30°) = \frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 1{,}299$.

12. Aus einem Baumstamm mit kreisförmiger Querschnittsfläche (Durchmesser d, Länge l) soll ein Balken (Breite b, Höhe h, Länge l)

    (a) mit maximalem Volumen herausgeschnitten werden. Welcher Prozentsatz des Balkens wird genutzt?

    (b) mit maximaler Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Die Tragfähigkeit eines Balkens ist proportional zu bh^2. Welcher Prozentsatz des Balkens wird genutzt?

Lösung: (a) $b^2 + h^2 = d^2 \Rightarrow V(b) = b\cdot\sqrt{d^2 - b^2}\cdot l$. Da das Volumen immer positiv ist, ist $V(b)$ genau dann maximal, wenn $V^2(b) = b^2\cdot(d^2-b^2)\cdot l^2$ maximal ist $\Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}d$. $\Rightarrow$ 64% des Baumes werden genutzt.

(b) $bh^2 = b\cdot(d^2 - b^2)$ ist maximal, wenn $b = \frac{1}{\sqrt{3}}d \Rightarrow$ 60% des Baumes werden genutzt.

13. Mit dem Tröpfchenmodell zur Beschreibung eines Atomkerns läßt sich die Bindungsenergie des Kerns in Abhängigkeit von der Neutronenzahl N und der Protonenzahl Z berechnen. Für die Bindungsenergie erhält man:

$$W(Z,N) = (m_p Z + m_n N)\ c^2 - 6\varepsilon A + 6\varepsilon A^{2/3} + \beta\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \eta\frac{(A-2Z)^2}{A}$$

(a) Geben Sie die Bindungsenergie für feste Nukleonenzahl $A = Z + N$ an.

(b) Für welche Protonenzahl ist bei fester Nukleonenzahl A die Bindungsenergie mininal? Verwenden Sie dazu $\alpha = (m_n - m_p)\ c^2 = 0{,}78\,\text{MeV}$, $\beta = 0{,}639\,\text{MeV}$ und $\eta = 21{,}7\,\text{MeV}$.

(c) Vergleichen Sie das in (b) erhaltene Ergebnis mit der einfachen Annahme, dass sich in einem Atomkern etwa gleich viele Protonen und Neutronen befinden.

Lösung: (a) $W(Z) = (m_p - m_n)c^2 Z + m_n A c^2 - 6\varepsilon A + 6\varepsilon A^{\frac{2}{3}} + \beta \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \eta \frac{(A-2Z)^2}{A}$

(b) $W'(Z) = -\alpha + Z\left(\frac{2\beta}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{8\eta}{A}\right) - 4\eta \Rightarrow$
minimale Bindungsenergie für

$$Z = \frac{A}{2} \cdot \frac{1 + \frac{\alpha}{4\eta}}{1 + \frac{\beta}{4\eta} A^{\frac{2}{3}}} = \frac{A}{2} \cdot \frac{1 + 9 \cdot 10^{-3}}{1 + 7{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot A^{\frac{2}{3}}}$$

(c) Für kleine A erhält man etwa gleich viele Neutronen und Protonen. Je größer A ist, umso mehr weicht die Protonenzahl von $\frac{A}{2}$ ab (kleiner).
TIP: $Z(A)$ und $\frac{A}{2}$ mit Funktionsplotprogramm zeichnen!

14. Schwerpunkt einer Limonadendose

(a) Wo liegt der Schwerpunkt einer vollen und einer leeren Dose?

(b) Bis zu welcher Höhe muss man die Dose austrinken, damit der Schwerpunkt möglichst niedrig liegt und daher die Dose am besten stehen bleibt.

(c) Welcher Wert ergibt sich für die Schwerpunktshöhe, wenn die Dose eine Höhe von 16 cm und eine Masse von 100 g hat. Die ganze Limonade soll eine Masse von 500 g haben.

Lösung: (a) Schwerpunkt jeweils bei $\frac{H}{2}$ (H: Dosenhöhe)

(b)

$$S(h) = \frac{m_D \frac{H}{2} + m_L \frac{h}{H} \frac{h}{2}}{m_D + m_L \frac{h}{H}} = \frac{m_D H^2 + m_L h^2}{2 m_D H + 2 m_L h}$$

$S'(h) = 0 \Leftrightarrow m_L h^2 + 2 m_D H h - m_D H^2 = 0 \Leftrightarrow$
$h = \frac{1}{m_L}\left(-m_D H \pm H\sqrt{m_D(m_D + m_L)}\right)$
Da der Term unter der Wurzel größer als m_D ist und für h nur positive Werte sinnvoll sind, folgt

$$h = \frac{1}{m_L}\left(-m_D H + H\sqrt{m_D(m_D + m_L)}\right)$$

(c) $h = 0{,}28989 H = 4{,}6\,\text{cm}$

15. Bauen Kinder aus Sand zylindrische Türme, sinken diese ab einer gewissen Höhe in sich zusammen. Dabei rutscht der obere Teil fast immer längs einer schrägen Fläche, die um 45° gegen die Horizontale geneigt ist nach unten. Wie läßt sich dies erklären? Nehmen Sie dazu an, dass für das Abrutschen eine gewisse Schubspannung

$$\sigma = \frac{\text{Kraft parallel zur Fläche } F_{||}}{\text{Abrutschfläche } A}$$

erreicht werden muss.

Lösung: Bei einem zylindrischen Turm ist eine Querschnittsfläche, die um den Winkel ϕ gegen die Horizontale geneigt ist eine Ellipse mit der Fläche $\frac{r^2\pi}{\cos\phi}$. Die Kraft parallel zur Fläche beträgt $F_0 \sin\phi$ (F_0 ist die Gewichtskraft des abrutschenden Teils).
$\Rightarrow \sigma = \frac{F_0}{r^2\pi}\sin\phi\cos\phi$
σ ist bei festem F_0 und $r^2\pi$ für den Winkel $\phi = 45°$ maximal.

16. (a) Wann wird das Produkt zweier Zahlen mit konstanter Summe maximal?
    (b) Wann wird die Summe zweier Zahlen mit konstantem Produkt minimal?

Lösung: (a) $a + b = c = \text{konst} \Longrightarrow a \cdot b = ac - a^2 = f(a)$
1. Lösungsweg: $f'(a) = c - 2a = 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}c$, $f''(a) = -2 < 0$
Also: Produkt maximal für $a = \frac{1}{2}c$
2. Lösungsweg: $f(a)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel $\Longrightarrow$ $f(a)$ maximal am Scheitel $(\frac{1}{2}c|\frac{1}{4}c^2)$

(b) $a \cdot b = c = \text{konst} \Longrightarrow a + b = a + \dfrac{c}{a} = f(a)$
$f'(a) = 1 - \frac{c}{a^2} = 0 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{c}$, $f''(a) = 2\dfrac{c}{a^3}$
1. Fall: $c > 0$, d. h. a und b haben gleiches Vorzeichen.
Für $a, b > 0$ ist $f''(a) > 0$ und damit erhält man für $a = b = \sqrt{c}$ ein Minimum. Für $a, b < 0$ ist $f''(a) < 0$ und damit erhält man für $a = b = -\sqrt{c}$ ein Maximum.
2. Fall: $c < 0 \Longrightarrow f'(a) > 1$, also kein Extremum.

17. Legen Sie die Punkte M und N auf den Schenkeln eines Winkels α mit Scheitel S so fest, dass bei konstanter Fläche des Dreiecks $\triangle$ SMN die Länge $\overline{\text{MN}}$ minimal ist.

Lösung: Mit $m = \overline{\text{SM}} > 0$ und $n = \overline{\text{SN}} > 0$ folgt $A = \dfrac{1}{2}mn\sin\alpha \Longrightarrow$
$mn = \dfrac{2A}{\sin\alpha}$ und $m = \dfrac{2A}{n\sin\alpha}$.

$$\overline{\text{MN}}^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha = \frac{4A^2}{n^2\sin^2\alpha} + n^2 - \frac{4A}{\tan\alpha} = f(n)$$

$$f'(n) = 0 \Longleftrightarrow n^4 = \frac{4A^2}{\sin^2\alpha} \Longrightarrow n = \sqrt{\frac{2A}{\sin\alpha}},\ m = \sqrt{\frac{2A}{\sin\alpha}}$$

18. Wie muss man einen Stab der Länge l in zwei Stücke zerbrechen, damit das aus den Teilstücken gebildete Dreieck maximale Fläche hat?

Lösung: $l = a + b$. Die Dreiecksfläche $A = ab \sin\alpha$ ist bei festem a und b maximal, wenn die Teilstücke einen Winkel von 90° einschließen. $\Rightarrow A(a) = ab = al - a^2$
1. Lösungsweg: $A'(a) = l - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}l$, $A''(a) = -2 < 0$, also Maximum für $a = b = \frac{1}{2}l$
2. Lösungsweg: $A(a)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel. Damit wird das Maximum am Scheitel $(\frac{1}{2}l|\frac{1}{4}l^2)$ angenommen.
3. Lösungsweg: Das Produkt zweier Zahlen mit konstanter Summe ist maximal, wenn die zwei Zahlen gleich groß sind.

19. Aus einem rechteckigen Stück Karton mit Seitenlängen 8 cm und 5 cm werden an den Ecken kongruente Quadrate herausgeschnitten. Biegt man die Randstücke hoch, erhält man eine quaderförmige, oben offene Schachtel. Wie lang muss man die Quadratseite wählen, damit der Inhalt der Dose möglichst groß wird.

Lösung: $V(x) = x \cdot (8 - 2x) \cdot (5 - 2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x \Rightarrow$
$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40 = 0$ für $x_1 = 3\frac{1}{3}, x_2 = 1$
$V''(3\frac{1}{3}) > 0$, also Minimum bei $x_1 = 3\frac{1}{3}$
$V''(1) < 0$, also Maximum bei $x_2 = 1$

20. In welchem Rechteck mit gegebenem Flächeninhalt A hat die Diagonale minimale Länge?

Lösung: Seitenlängen des Rechtecks: a, $b \Longrightarrow A = ab \Longrightarrow d^2(a) = a^2 + \dfrac{A^2}{a^2}$
Minimum von d^2 bei $(\sqrt{A}, 2A) \Longrightarrow$ Minimum für $a = b = \sqrt{A}$, d.h. Quadrat

21. Welcher Punkt des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2}$ hat vom Punkt P(0|3) minimalen Abstand?

Lösung:

$$d(x) = \sqrt{\left(3 - \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2}\right)^2 + (0 - x)^2}$$

gibt den Abstand eines Punktes A$(x|f(x))$ von P an. $d(x)^2$ und damit auch $d(x)$ (da $d(x) \geq 0$) hat nur ein Minimum bei P(0|1).

22. Beweisen Sie, dass von allen Rechtecken mit gegebener Fläche A das Quadrat den kleinsten Umfang hat.

Lösung: $U(x) = 2\,x + \dfrac{2\,A}{x}$, $\quad U'(x) = 2 - \dfrac{2\,A}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y = \sqrt{A}$

23. Wie muss ein kegelförmiges Sektglas gestaltet werden, damit bei gegebenem Volumen V möglichst wenig Material benötigt wird?

Lösung: Mantelfläche: $A(r) = r\,s\,\pi = \sqrt{r^4\,\pi^2 + \dfrac{9\,V^2}{r^2}}$

$A(r)$ minimal $\Longleftrightarrow g(r) = r^4\,\pi^2 + \dfrac{9\,V^2}{r^2}$ minimal

$$g'(r) = 4\,\pi^2\,r^3 - \frac{18\,V^2}{r^3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = r_0 = \sqrt[3]{\frac{3\,V}{\pi\sqrt{2}}}$$

$$g''(r) = 12\,\pi^2\,r^2 + \frac{54\,V^2}{r^4} > 0 \quad \Longrightarrow \quad A \text{ hat bei } r_0 \text{ ein Minimum.}$$

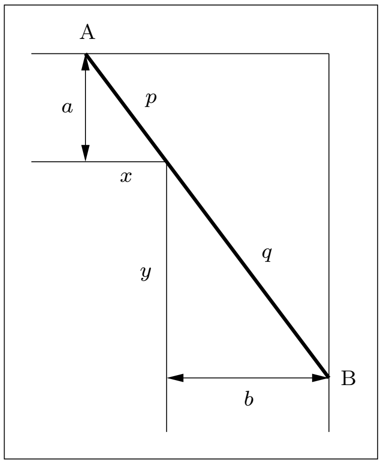
$$h_0 = \frac{3\,V}{r_0^2\,\pi} = r_0\sqrt{2}$$

24. Zwei Kanäle mit den Breiten a und b stoßen rechtwinklig zusammen. Wir suchen die maximale Länge L, die ein Baumstamm haben kann, damit er gerade noch *um die Ecke* gebracht werden kann. Wir rechnen mit einem idealisierten Stamm der Dicke null.

    (a) Drücken Sie $r = \overline{\mathrm{AB}} = p + q$ durch x aus und berechnen Sie L.

    (b) Berechnen Sie L speziell für die Fälle $a = b$, $a \ll b$ und $b = 2a$.

    (c) Zeichnen Sie $r(x)$ für $a = 1$ und $b = 2$. Beweisen Sie für diesen Fall, dass $g(x) = x + 2$ eine Asymptote von $r(x)$ ist.



Lösung: (a) $r(x) = \left(1 + \dfrac{b}{x}\right)\sqrt{a^2 + x^2}$, $r'(x) = \dfrac{x^3 - b\,a^2}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}$

$r'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = x_0 = a^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{1}{3}}$

$r'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $r'(x) > 0$ für $x > x_0 \quad \Longrightarrow \quad$ rel. Min. von r bei x_0.

$$L = r(x_0) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

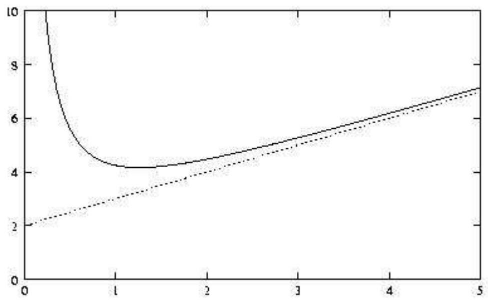
(b)

$$\begin{aligned} a = b \quad &\Longrightarrow \quad L = 2\,a\sqrt{2} \\ a \ll b \quad &\Longrightarrow \quad L \approx b \\ b = 2\,a \quad &\Longrightarrow \quad L \approx 4{,}16\,a \end{aligned}$$

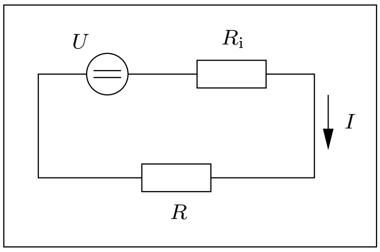
(c) $r(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)\sqrt{1+x^2} = (x+2)\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to\infty}[r(x) - (x+2)] = \lim_{x\to\infty}\left[(x+2)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x+2}} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0$$



25. An eine Stromquelle mit dem Innenwiderstand R_i wird ein Verbraucher mit dem Widerstand R angeschlossen. P sei die im Verbraucher umgesetzte Leistung.



   (a) Für welche Wahl des Widerstandes R ist P maximal? Wie groß ist das maximale P?
   (b) Zeichnen Sie $P(R)$ für $U = 1\,\mathrm{V}$ und $R_\mathrm{i} = 1\,\Omega$.

Lösung: (a) $P(R) = R\,I^2 = U^2 \cdot \dfrac{R}{(R+R_\mathrm{i})^2}$

$$P'(R) = U^2 \cdot \frac{R_\mathrm{i} - R}{(R+R_\mathrm{i})^3} = 0 \quad\Longrightarrow\quad R = R_\mathrm{i}$$

$$P''(R) = U^2 \cdot \frac{2\,R - 4\,R_\mathrm{i}}{(R+R_\mathrm{i})^4} \quad\Longrightarrow\quad P''(R_\mathrm{i}) < 0 \quad\Longrightarrow\quad \text{Maximum}$$

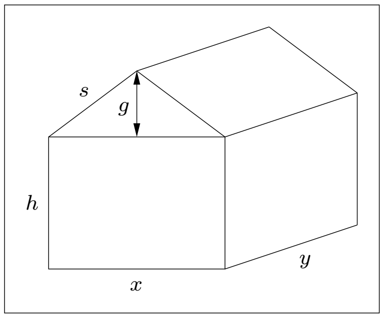
$$P_\mathrm{max} = P(R_\mathrm{i}) = \frac{U^2}{4\,R_\mathrm{i}}$$

26. In einer Gemeinde gilt aus gestalterischen und wärmetechnischen Gründen für die Maße eines Hauses folgende **Verordnung** (siehe Abbildung):

V sei das Volumen des Hauses (umbauter Raum ohne Keller) und A die gesamte Oberfläche einschließlich Dach aber *ohne* die Grundfläche. Die Breite x, die Wandhöhe h, die Giebelhöhe g und die Länge y müssen so gewählt werden, dass

$$g = \frac{3}{8} \cdot x \quad ; \quad h = \frac{5}{8} \cdot x$$

und A bei gegebenem V minimal ist.



(a) Drücken Sie V durch x und y aus und lösen Sie das Ergebnis nach V auf. Drücken Sie s durch x aus und beweisen Sie dann mit einer detaillierten Rechnung folgende Beziehung:

$$A(x) = \frac{13}{8} \cdot x^2 + \frac{40\,V}{13\,x}$$

(b) Für welches x, ausgedrückt durch V, ist die Bauordnung erfüllt? Nachweis der Art des Extremums nicht vergessen! Berechnen Sie auch das Verhältnis $k = \frac{y}{x}$ für ein Haus, das den Forderungen der Bauordnung genügt.

(c) Berechnen Sie x, y, h und g für ein der Bauordnung genügendes Haus mit dem Volumen $V = 540{,}8\,\mathrm{m}^3$ und zeichnen Sie die Vorderfront des Hauses im Maßstab 1 : 200.

Lösung: (a) $V = \frac{13}{16}\,x^2 y, \quad y = \frac{16\,V}{13\,x^2}, \quad s = \frac{5}{8}\,x$

(b) $A'(x) = \frac{13}{4}\,x - \frac{40\,V}{13\,x^2}$

$$A'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{160\,V}{169}}, \quad k = \frac{y}{x} = \frac{13}{10}$$

(c) $x = 8\,\mathrm{m}$, $y = 10{,}4\,\mathrm{m}$, $h = 5\,\mathrm{m}$ und $g = 3\,\mathrm{m}$

27. Wir betrachten alle möglichen Quader mit den Kantenlängen x, y und z und dem konstanten Volumen V. Gesucht ist der Quader mit der kleinsten Oberfläche.

(a) Drücken Sie die Oberfläche A eines Quaders durch x, y und V aus.

(b) A kann als Funktion von x mit dem Parameter y aufgefasst werden, d.h. $A = A_y(x)$. Für welches $x = x_y$ ist $A_y(x)$ minimal?

(c) Die Funktion $F(y)$ ist definiert durch $F(y) = A_y(x_y)$. $F(y)$ ist also die Oberfläche des Quaders mit der Kante y, dessen Oberfläche minimal ist. Den Quader mit der insgesamt kleinsten Oberfläche bei gegebenem Volumen V findet man durch Minimieren von F. Um welchen Quader handelt es sich dabei?

Lösung: (a) $A_y(x) = 2\left[x\,y + \dfrac{V}{y} + \dfrac{V}{x}\right]$

(b) $A'_y(x) = 2\left[y - \dfrac{V}{x^2}\right] = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_y = \sqrt{\dfrac{V}{y}}$

(c) $F(y) = A_y(x_y) = 2\left[2\sqrt{V}\sqrt{y} + \dfrac{V}{y}\right]$

$F'(y) = 2\left[\dfrac{\sqrt{V}}{\sqrt{y}} - \dfrac{V}{y^2}\right] = 0 \quad\Longrightarrow\quad y = \sqrt[3]{V}$

Damit gilt auch $x = x_y = \sqrt[3]{V}$ und $z = \dfrac{V}{xy} = \sqrt[3]{V}$, Würfel!!

28. Zerlegen Sie die positive Zahl a so in eine Summe, dass das Produkt der beiden Summanden maximal wird.

Lösung: $p(x) = x(a-x), \quad p'(x) = a - 2x = 0 \implies x = \frac{a}{2}$
$p''(x) = -2 < 0 \implies$ Maximum

29. **Warum Lastwagenfahrer so rasen**

Die Kosten für eine Lastwagenfahrt setzen sich aus den Treibstoffkosten und dem Fahrerlohn zusammen. Der Dieselverbrauch pro km ist die Summe aus einem konstanten Term a (Rollreibung) und einem zum Geschwindigkeitsquadrat proportionalen Term bv^2 (Luftwiderstand). Der Fahrerlohn F ist natürlich zur Fahrzeit t proportional, d.h. $F = ct$.

(a) Drücken Sie die Gesamtkosten G für eine Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit v über die Strecke s durch a, b, c, s, v und den Dieselpreis B pro Liter aus.

(b) Für welche Geschwindigkeit v_0 sind die Gesamtkosten minimal?

(c) Als konkretes Beispiel betrachten wir eine Fahrt über $s = 100\,\text{km}$ mit den Daten

$$a = 0{,}04\,\frac{\text{Liter}}{\text{km}}, \quad b = 1{,}2\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{Liter}\,\text{h}^2}{\text{km}^3}, \quad c = 80\,\frac{€}{\text{h}} \quad \text{und} \quad B = 2\,\frac{€}{\text{Liter}}.$$

Berechnen Sie v_0 und den minimalen Gesamtpreis G_0. Zeichnen Sie $G(v)$ im Intervall zwischen 0 und 300 $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

Lösung:

(a) $G(v) = a\,s\,B + b\,s\,B\,v^2 + \dfrac{c\,s}{v}$

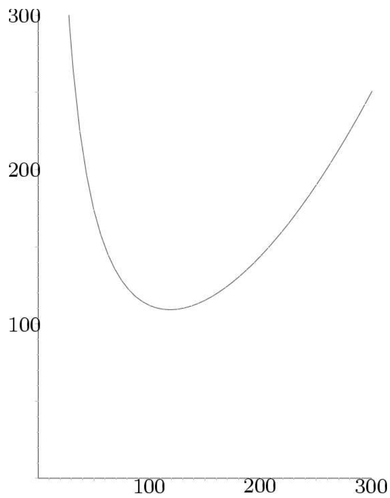
(b) $G'(v) = 2\,b\,s\,B\,v - \dfrac{c\,s}{v^2}$

$G'(v) = 0 \quad \Longrightarrow$

$v = v_0 = \sqrt[3]{\dfrac{c}{2\,b\,B}}$

(c) $v_0 = 118{,}6\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

$G_0 = G(v_0) = 109{,}21\,€$



30. Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf der Funktion $f(x) = a - |x|^n$ mit $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Eine Parallele zur x-Achse im Abstand d mit $0 \leqq d \leqq a$ schneidet G_f in A und B (A links von B). Für welches $d = d_0$ ist die Fläche F des Dreiecks AOB maximal, wobei O den Ursprung des Koordinatensystems bezeichnet?

    Hinweis: Drücken Sie F durch die x-Koordinate von B aus!

Lösung: f symmetrisch zur y-Achse. Für $x \geqq 0$ gilt $d = f(x) = a - x^n$. A $(-x|d)$, B $(x|d)$

$F(x) = \dfrac{1}{2} \cdot 2x \cdot f(x) = a\,x - x^{n+1}$

$F(x)$ maximal für $x_0 = \sqrt[n]{\dfrac{a}{n+1}}$, $d_0 = f(x_0) = \dfrac{n\,a}{n+1}$

31. Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = x^2 - 2ax$ mit $a > 0$. Die Gerade $g:\ g(x) = c$ mit $c \geqq -a^2$ schneidet G_f in A und B (A links von B). Für welche c ist die Fläche F des Dreiecks AOB (O = Ursprung des Koordinatensystems) extremal?

    Hinweis: Drücken Sie F durch c aus und skizzieren Sie den ungefähren Verlauf von $F(c)$!

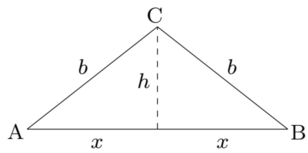
Lösung: A $\left(a - \sqrt{c+a^2}\,\middle|\,c\right)$, B $\left(a + \sqrt{c+a^2}\,\middle|\,c\right)$, $\quad \overline{\text{AB}} = 2\sqrt{c+a^2}$

$F(c) = \dfrac{1}{2} \cdot |c| \cdot \overline{\text{AB}} = |c| \cdot \sqrt{c+a^2}$

$F'(c) = \pm \dfrac{3c + 2a^2}{2\sqrt{c+a^2}}$

$F(c)$ hat relatives Maximum bei $c = -\dfrac{2\,a^2}{3}$ und ein relatives und absolutes Minimum bei $c = 0$ (Spitze von $F(c)$).

32. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basislänge $2x$ und den Schenkellängen b wird aus einem Draht der Länge L gebogen, d.h. $2x + 2b = L$.



(a) Beweise für die Dreiecksfläche A die Beziehung

$$A(x) = \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{Lx^2 - 4x^3}$$

(b) Berechne $x = x_0$ so, dass $A(x_0)$ die maximale Dreiecksfläche ist. Untersuche, um welches besondere Dreieck es sich im Fall $x = x_0$ handelt.

(c) Drücke die maximale Fläche $A(x_0)$ durch L aus und vereinfache so weit wie möglich.

Lösung: (a) $b = \frac{L}{2} - x \quad \Longrightarrow \quad h = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - x^2} = \sqrt{\frac{L^2}{4} - Lx}$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h = x\sqrt{\frac{L}{4}(L - 4x)} = \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{x^2 (L - 4x)} = \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{Lx^2 - 4x^3}$$

(b) $A(x)$ ist maximal, wenn der Radikand $f(x) = Lx^2 - 4x^3$ maximal ist.

$$f'(x) = 2Lx - 12x^2 = 2x(L - 6x)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = \frac{L}{6}$$

$$f''(x) = 2L - 24x \quad \Longrightarrow$$

$$f''(x_1) = 2L > 0 \text{ (Minimum)}, \qquad f''(x_2) = 2L - \frac{24L}{6} = -2L < 0 \text{ (Maximum)}$$

Also: $x_0 = \frac{L}{6}$.

Aus $x = x_0$ folgt $b = \frac{L}{2} - \frac{L}{6} = \frac{L}{3}$ und $2x = \frac{L}{3}$, d.h. das Dreieck ist gleichseitig.

(c)

$$A(x_0) = \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{Lx_0^2 - 4x_0^3} = \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{x_0^2(L - 4x_0)} =$$

$$= \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{\frac{L^2}{6^2}\left(L - \frac{4L}{6}\right)} = \frac{\sqrt{L}}{2} \cdot \frac{L}{6}\sqrt{\frac{L}{3}} = \frac{L^2}{12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{36}L^2$$

33. Für den Bauherrn einer kleinen Fabrikhalle stellt sich die Frage nach der Wirtschaftlichkeit einer Wärmedämmung. Die gesamte zu isolierende Außenfläche ist $A = 500\,\text{m}^2$, der Quadratmeterpreis einer Dämmplatte der Dicke 1 cm wird mit

$$\alpha = 0{,}8\,\frac{€}{\text{m}^2 \cdot \text{cm}}$$

angegeben, das Verlegen von einem Quadratmeter kostet 50 €. Weil der Gesamtpreis für die Dämmung über einen Kredit finanziert wird, muss dieser Preis noch mit

1,5 Multipliziert werden um die gesamten anfallenden Kosten für die Dämmung zu erhalten. Wenn die ganze Fläche A mit einer Dämmung der Dicke $d = x\,\mathrm{cm}$ versehen ist, beträgt der Energieverlust pro m^2 Außenfläche und pro Jahr

$$\frac{\Delta W}{A \cdot \Delta t} = \frac{\beta}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}} \quad \text{mit} \quad \beta = 100\,\frac{\mathrm{kWh}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{a}}$$

Die Halle soll $\Delta t = 20\,\mathrm{a}$ lang genutzt und mit Öl beheizt werden. Ein Liter Heizöl liefert die Energie 10 kWh und soll 1,20 € kosten (Mittelwert für die nächsten 20 Jahre). Mit $k(x)$ bezeichnen wir den Term für die gesamten Energiekosten in den zwanzig Jahren (Wärmedämmung plus Heizkosten).

(a) Beweise mit begründeten Ansätzen:

$$k(x) = p + qx + \frac{r}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}} \quad \text{mit} \quad p = 37\,500\,€, \quad q = 600\,€, \quad r = 120\,000\,€$$

(b) Berechne die Dicke x_0 der Dämmung, für die $k(x)$ minimal wird. Rechne bis zum Ergebnis mit den allgemeinen Größen p, q und r.

(c) Die Dämmplatten gibt es nur in geradzahligen Werten von x. Ermittle die günstigste existierende Dämmstärke x_1. Um wieviel Prozent ist $k(x_1)$ kleiner als die Gesamtkosten $k(0)$ ohne Dämmung?

Lösung: (a) Preis für die Dämmung: $k_1(x) = 50\,\frac{€}{\mathrm{m}^2} \cdot A \cdot 1{,}5 + \alpha \cdot x \cdot A \cdot 1{,}5 = 37\,500\,€ + 600\,€ \cdot x$

Ölmenge in Litern: $m = \dfrac{\Delta W}{10\,\mathrm{kWh}} = \dfrac{\beta A \Delta t}{10\,\mathrm{kWh}} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}} = \dfrac{10^5\,\mathrm{l}}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}}$

Ölpreis: $k_2(x) = m \cdot 1{,}2\dfrac{€}{\mathrm{l}} = \dfrac{120\,000\,€}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}} \quad \Longrightarrow$

$$k(x) = k_1(x) + k_2(x) = 37\,500\,€ + 600\,€ \cdot x + \frac{120\,000\,€}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}}$$

(b) Umformen von k: $k(x) = p + qx + \dfrac{6r}{2 + 3x} \quad \Longrightarrow$

$$k'(x) = q - \frac{6r \cdot 3}{(2 + 3x)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = x_0 = -\frac{2}{3} \overset{+}{(-)} \frac{1}{3}\sqrt{\frac{18r}{q}} = -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{2r}{q}}$$

$$x_0 = -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{2 \cdot 120\,000\,€}{600\,€}} = -\frac{2}{3} + 20 = 19\frac{1}{3}$$

(c) $k(18) = 61\,157{,}14\,€$, $k(20) = 61\,112{,}90\,€$, $k(0) = 397\,500{,}00\,€$

$$\frac{k(20)}{k(0)} = 0{,}154 = 15{,}4\% \quad \Longrightarrow \quad \text{um } 84{,}6\% \text{ kleiner}$$