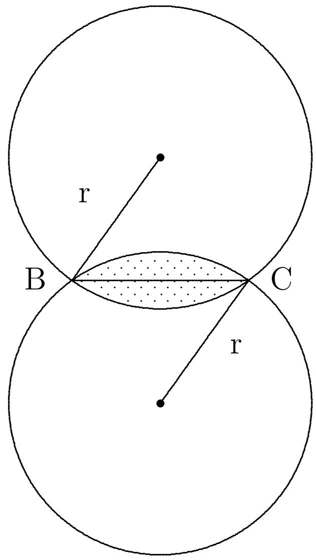
Kreisteile - auch Segmente

1. Die schattierte Fläche wird von zwei Kreisen mit gleichem Radius r eingeschlossen. Dabei gilt für die gemeinsame Sehne: $\overline{BC} = r$.
   Berechnen Sie für $r = 1{,}00\,\text{cm}$ den Inhalt A der schattierten Fläche!



Lösung: $A \approx 0{,}181\,cm^2$

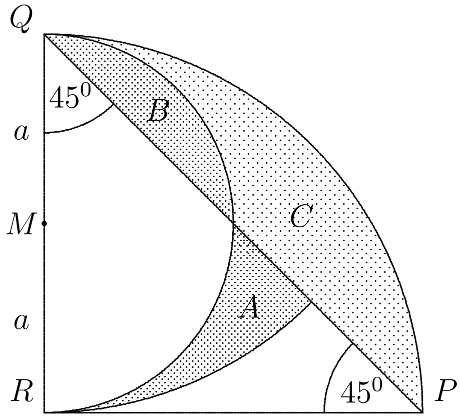
2. An den Orten B und C mit $\overline{BC} = 100\,\text{km}$ ist je ein Radiosender aufgestellt. Beide Sender haben eine Reichweite von $a = 100\,\text{km}$. G ist die Menge aller Punkte, an denen beide Sender gleichzeitig empfangen werden können. Fertigen Sie eine genaue Zeichnung des Sachverhaltes im Maßstab $1 : 2\,000\,000$ an und berechnen Sie den Flächeninhalt A von G. Drücken Sie A zuerst allgemein durch a aus und setzen Sie dann Zahlen ein (drei geltende Ziffern)!

Lösung: $\varphi = 120^\circ$; $A = 2 \cdot (A_{Sektor} - A_{Dreieck}) = 2\,a^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 12300\,km^2$

3. Die Flächen A, B und C werden von den Seiten des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks PQR sowie von den Kreisbögen um die Ecken Q und R und den Seitenmittelpunkt M begrenzt.

   (a) Berechnen Sie die Flächeninhalte von B und C in Abhängigkeit von $a = \frac{1}{2}\overline{QR}$.

   (b) Zeigen Sie, dass die Fächeninhalte von A und B gleich sind.

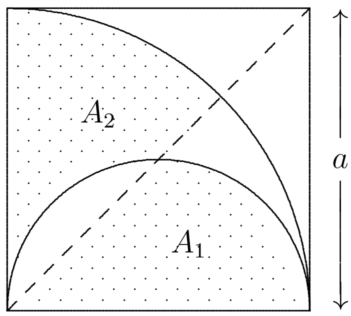


Lösung: Es ist $B = \frac{1}{2}a^2(\frac{1}{2}\pi - 1)$. C hat die vierfache Fläche vermindert um die von B, ist also dreimal so groß. A und B sind gleich groß, weil der Halbkreis um M und der Viertelkreis um Q denselben Flächeinhalt haben.

4. In nebenstehender Figur ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a gegeben.

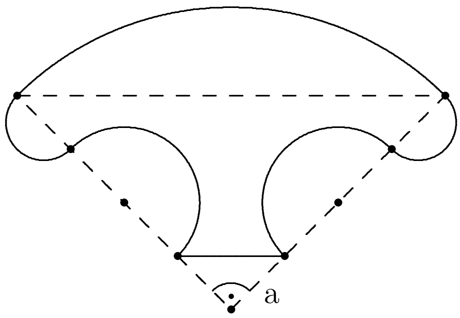
   (a) Zeigen Sie, dass die schattierten Flächen A_1 und A_2 gleichen Inhalt haben!

   (b) Berechnen Sie jeweils den Umfang der schattierten Flächen A_1 und A_2 in Abhängigkeit von a!



Lösung: (a): $A_{A_1} = A_{A_2} = \frac{a^2}{16} \cdot (\pi + 2)$
(b): $U_{A_1} = \frac{a}{4} \cdot (4 + \pi + 2\sqrt{2})$
$U_{A_2} = \frac{a}{2} \cdot (4 + \pi - \sqrt{2})$

5. Berechnen Sie Fläche und Umfang der Figur in Abhängigkeit von a. (Beide Dreiecke sind gleichschenklig-rechtwinklig, die Katheten werden durch die markierten Punkte gleichmäßig im Abstand a geteilt, die Kreismittelpunkte liegen auf den Katheten.)

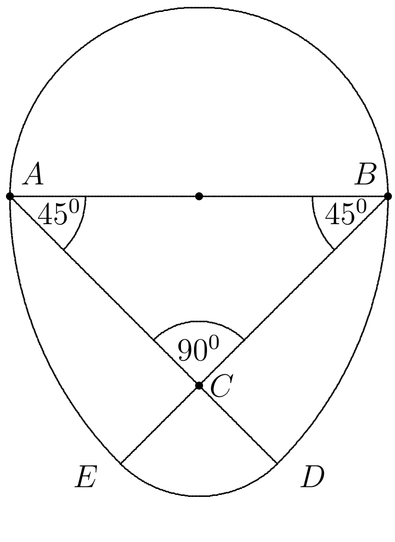


Lösung: $U = 5\pi a + \sqrt{2}a$, $A = 3{,}25a^2\pi - 0{,}5a^2$

6. Das abgebildete „Osterei“ besteht aus Kreisbögen, deren Mittelpunkte A, B, C und M und deren Radien durch das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck ABC festgelegt sind.

   (a) Berechnen Sie die Radien $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$ der Kreisbögen um B bzw. C in Abhängigkeit von $\overline{AM} = r$.

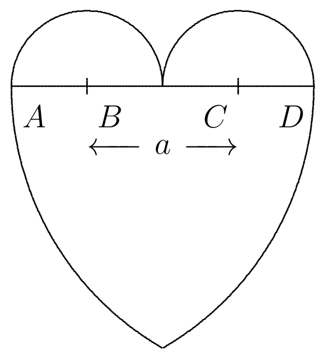
   (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des „Ostereies“.



Lösung: (a) $\overline{BD} = 2r$ und $\overline{CD} = (2-\sqrt{2})r$
(b)

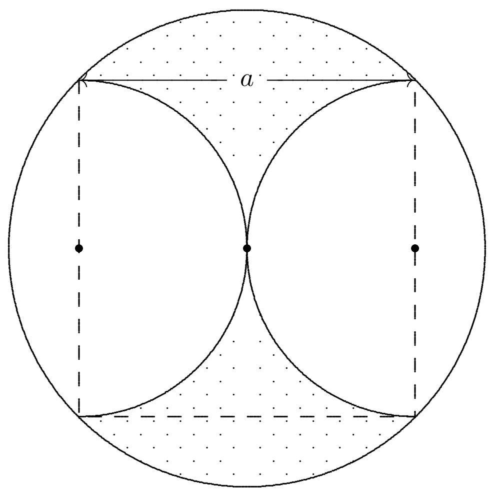
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\pi r^2 + \left(2 \cdot \frac{1}{8}\pi (2r)^2 - r^2\right) \\ + \quad & \frac{1}{4}\pi \left[(2-\sqrt{2})r\right]^2 \\ = \quad & [(3-\sqrt{2})\pi - 1]r^2 \approx 3{,}98r^2 \end{aligned}$$

7. Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figur in Abhängigkeit von a. (Die Mittelpunkte der Kreisbögen sind die Punkte A, B, C und D.)



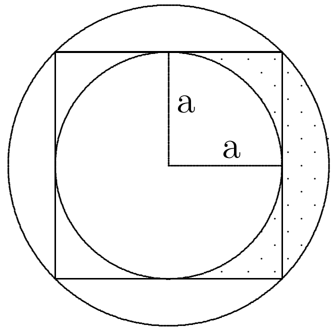
Lösung: $U = \frac{7}{3}\pi a$, $A = (\frac{19}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})a^2$

8. Gegeben ist die rechts gezeichnete Kreisbogenfigur.
   (a) Übertragen Sie die Figur auf das Arbeitsblatt und bezeichnen Sie alle benötigten Stücke.
   (b) Berechnen Sie den punktierten Flächeninhalt in Abhängigkeit von a.



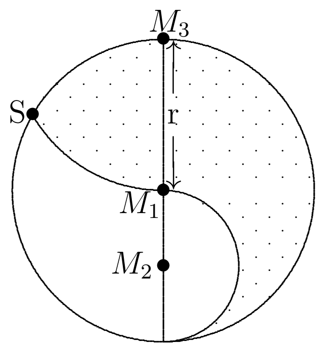
Lösung: $A = \frac{1}{2}a^2$

9. Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang der punktierten Fläche in Abhängigkeit von a und π!



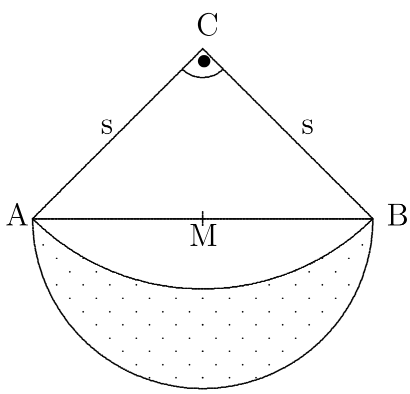
Lösung: $A = a^2; U = a(\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi + 2 + \pi)$

10. Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang der punktierten Fläche in Abhängigkeit von r und π!
Hinweis: Das Dreieck SM_1M_3 ist ein besonderes Dreieck!



Lösung: $A = \frac{17}{24}r^2\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}r^2; U = \frac{13}{6}r\pi$

11. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und rechtwinklig. Mit s ist die Kathetenlänge bezeichnet. M halbiert die Hypotenuse $[AB]$.
Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang der punktierten Sichel in Abhängigkeit von s!

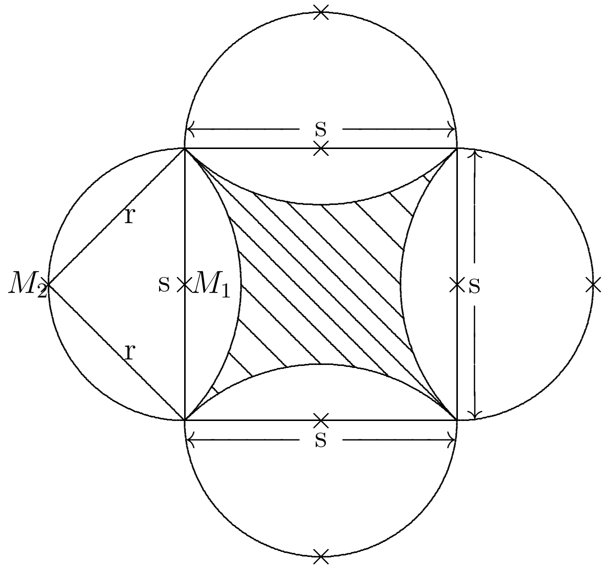


Lösung: $A = \frac{1}{2}s^2; U = \frac{1}{2}s\pi(1 + \sqrt{2})$

12. (a) Berechnen Sie r in Abhängigkeit von s.

    (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von s!

    (c) Berechnen Sie den Umfang der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von s!

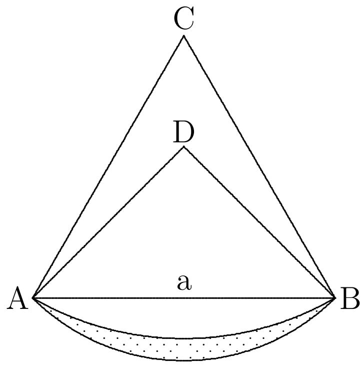


Lösung: $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}s$; $A = s^2(2 - \frac{1}{2}\pi)$; $U = \sqrt{2}s\pi$

13. Das Dreieck ABC ist gleichseitig mit der Seitenlänge a. Das Dreieck ABD ist gleichschenklig und rechtwinklig. C und D sind die Mittelpunkte der gezeichneten Kreisbogenstücke.

    (a) Für welches a hat die punktierte Sichel den Umfang $\pi \cdot (3\sqrt{2} + 4)$?

    (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Sichel in Abhängigkeit von a!

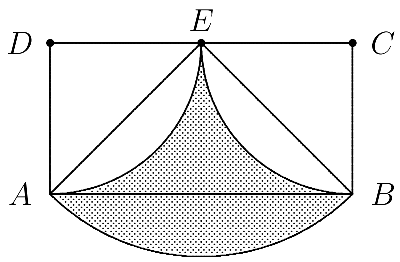


Lösung: $a = 12$; $A = a^2(-\frac{1}{24}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4})$

14. Die Ecken C und D eines Rechtecks $ABCD$ sind Mittelpunkte von zwei Kreisen vom Radius a, die sich im Mittelpunkt E einer Seite berühren und jeweils durch die beiden anderen Ecken gehen.

(a) Zeigen Sie, dass die schraffierte Fläche und das Dreieck ABE inhaltsgleich sind.

(b) Für welchen Wert von a ist der Umfang der schraffierten Fläche um 5cm länger als der Umfang des Dreiecks ABE? Geben Sie das Ergebnis in cm mit zwei gültigen Ziffern an.



Lösung: $a = 9{,}4$cm

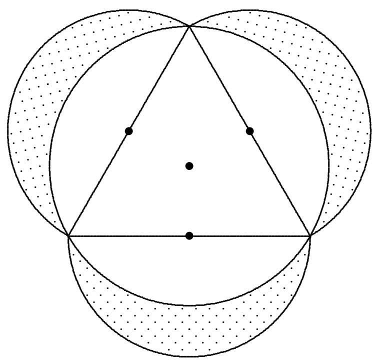
15. Zwei konzentrische Kreise K_1 und K_2 mit den Radien r und $4r$ bilden einen Kreisring. Im Abstand $2r$ vom gemeinsamen Mittelpunkt beider Kreise wird auf einem Radius des größeren Kreises K_2 eine Lotgerade errichtet, welche den Kreisring in zwei Teile teilt. Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte zunächst exakt und dann prozentual gerundet!

Lösung: $\frac{16\pi-12\sqrt{3}}{29\pi+12\sqrt{3}} = 0{,}26$; Gleichseitiges Dreieck beachten!

16. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. (Die Mittelpunkte der Kreisbögen sind durch Punkte markiert.)

(a) Berechnen Sie Fläche und Umfang des Umkreises.

(b) Berechnen Sie die Gesamtfläche der 3 schraffierten Möndchen über den Dreiecksseiten.



Lösung: (a) $U = 2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}a$, $A = \frac{\pi}{3}a^2$

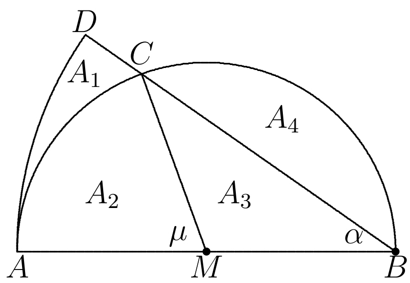
(b) $A_{Monde} = \frac{3}{8}\pi a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\pi}{3}a^2$

17. (a) Begründen Sie mit einem bekannten Satz oder durch Rechnung: $2\alpha = \mu$

(b) Zeigen Sie: Der Flächeninhalt des Sektors ABD ist doppelt so groß, wie der des Sektors AMC (Verwenden Sie dazu das obige Ergebnis.) und begründen Sie: $A_1 + A_3 = A_2$.

(c) C gleitet auf dem Kreisumfang von A nach B. Zeichnen Sie die Figur für $\alpha = 45^0$ und im Sonderfall $\alpha = 90^0$. Erklären Sie das Ergebnis aus b) für diesen Fall.

(d) Drücken Sie den Flächeninhalt des Segments A_4 mit Hilfe von A_2, A_3 und r aus (vgl. Abb.) und zeigen Sie, dass $A_1 = A_4$ genau dann gilt, wenn $\alpha = 45^0$ ist.



Lösung: (a) Umfangswinkelsatz oder direkte Rechnung.

(b) $A_{ABD} = 0.5 \cdot (2r)^2 \cdot \alpha$, $A_{AMC} = 0.5 \cdot r^2 \cdot 2\alpha$. Daraus ergibt sich $A_1 + A_2 + A_3 = 2A_2$.

(c) Im Fall $\alpha = 90^0$ bedeutet dies: Der Viertelkreis um B hat die doppelte Fläche des Halbkreises um M.

(d) Es ist $A_4 = \frac{\pi}{2}r^2 - A_2 - A_3$. Aus $A_1 = A_4$ ergibt sich $\pi r^2 = 2A_2$.

18. In einem Kreis mit dem Radius r überspannen zwei parallele Sehnen s_1 bzw. s_2 je einen Bogen zu den Zentriwinkeln 60° bzw. 90° so, dass der Kreismittelpunkt zwischen den beiden Sehnen liegt.
Erstellen Sie eine übersichtliche Skizze und berechnen Sie dann die Größe des zwischen den beiden Sehnen liegenden Teils der Kreisfläche!

Lösung: $\frac{1}{12}r^2 \cdot (7\pi + 6 + 3\sqrt{3})$