bedingte Wahrscheinlichkeit

1. Neun von zehn Ungeborenen bevorzugen im Mutterleib den rechten Daumen zum Lutschen. Forscher fanden heraus, dass alle Kinder, die rechts genuckelt hatten, im Alter von 10 bis 12 Jahren Rechtshänder waren. Zwei Drittel der Kinder, die im Mutterleib am linken Daumen lutschten, waren Linkshänder.

   (a) Wie viel Prozent der Kinder sind Linkshänder geworden, wie viel Prozent Rechtshänder?

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Rechtshänder vor der Geburt am linken Daumen genuckelt?

Lösung: (a) $p(l) = 0,1 \cdot \frac{2}{3} = 7\%$, $p(r) = 0,9 \cdot 1 + 0,1 \cdot \frac{1}{3} = 93\%$

(b) $p_r(l_v) = \frac{p(r \cap l_v)}{p(r)} = 4\%$

2. In einem Betrieb sind 60% Männer beschäftigt. Von den Betriebsangehörigen rauchen 10%. Unter den weiblichen Betriebsangehörigen rauchen 15%.

   (a) Berechnen Sie den Anteil der weiblichen Raucher.

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein beliebig herausgegriffener Betriebsangehöriger

      i. männlich, falls die Person raucht?

      ii. Raucher, falls die Person männlich ist?

Lösung: (a) $p(W \cap R) = p(W) \cdot p_W(R) = 0,4 \cdot 0,15 = 6,0\%$

(b) i. $p_R(M) = 1 - p_R(W) = 40\%$

ii. $p_M(R) = \frac{p(M \cap R)}{p(M)} = \frac{0{,}04}{0{,}6} = 6,7\%$

3. Bei SMV-TV treten Bildstörungen mit 10% Wahrscheinlichkeit auf. In diesem Fall kommt es dann mit 70% Wahrscheinlichkeit zu Tonstörungen. Ist das bild einwandfrei, so ist mit 95% Wahrscheinlichkeit auch der Ton in Ordnung.

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Bild, falls der Ton gestört ist.

   (b) Untersuchen Sie die Ereignisse ,,Es tritt keine Bildstörung auf" und ,,Es tritt eine Tonstörung auf" auf stochastische Unanhängigkeit.

Lösung: T: Tonstörung, B: Bildstörung

(a) $p_T(\overline{B}) = \frac{p(T \cap \overline{B})}{p(T)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}05}{0{,}9 \cdot 0{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}7} = 0,39$

(b) $p(T) = 0,9 \cdot 0,05 + 0,1 \cdot 0,7 = 0,115$,
$p(\overline{B}) = 0,9$; $p(T) \cdot p(\overline{B}) = 0,115 \cdot 0,9 = 0,1035 \neq 0,39$
$\Rightarrow$ stochastisch abhängig

4. **Vierfeldertafeln**

Gegeben ist folgender Zeitungsartikel:

> **Fahrstuhleffekt im Schulsystem**
>
> *Eltern wünschen höheren Bildungsabschluss für Kinder*
>
> 37% aller 10− bis 16jährigen Kinder besuchen derzeit die Schulform Gymnasium. Jedoch nur 35% dieser Jugendlichen haben Eltern, die selbst zum Gymnasium gingen. Umgekehrt findet man unter den Schülerinnen und Schülern, die eine Haupt- oder Realschule besuchen, nur 8%, deren Eltern ein Gymnasium absolvierten.

(a) Stellt die Informationen des Zeitungsartikels in einem zweistufigen Baum dar.

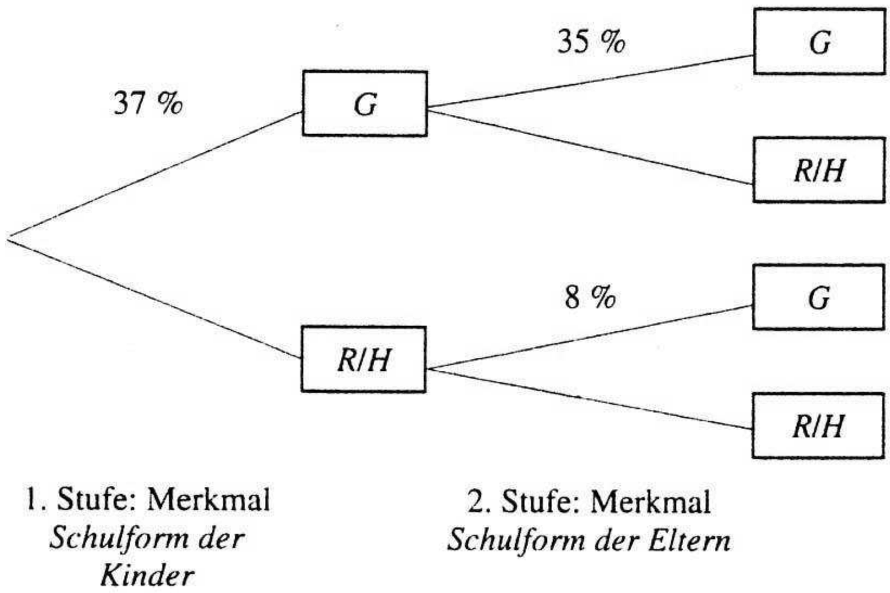
(b) Stellt eine Vierfeldertafel dazu auf.

(c) Entwickelt aus (b) das umgekehrte Baumdiagramm.

(d) Verfasst auf Grundlage der nun gewonnenen Daten einen Zeitungsartikel.

Quelle: PM 2/41 (1999)

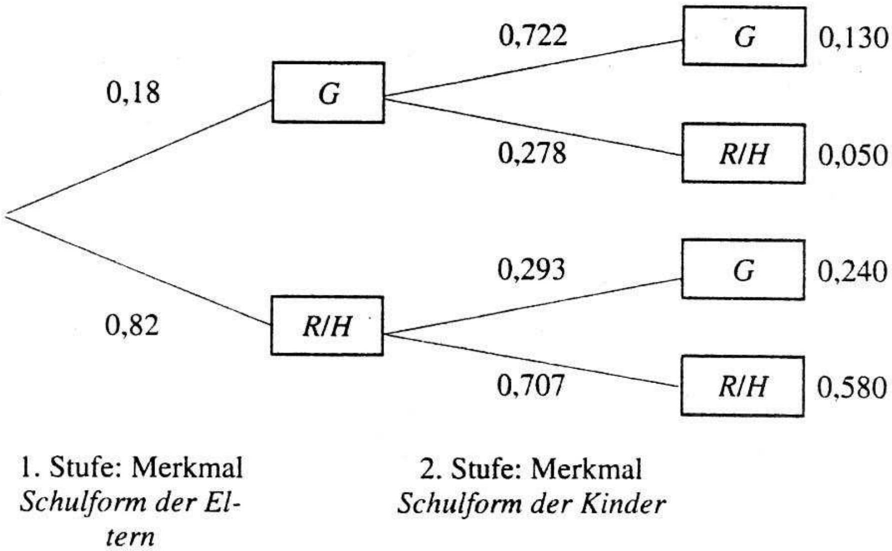
Lösung: (a) Aus dem Text entnehmen wir unmittelbar folgende Informationen über die Merkmale *Schulform, die die Kinder besuchen bzw. Schulform, die die Eltern besuchten:*



(b) Die zugehörige Vierfeldertafel sieht dann so aus:

Eltern Kinder	Gymnasium	Real- / Hauptschule	gesamt
Gymnasium	13,0%	24,0%	37,0%
Real- / Hauptschule	5,0%	58,0%	63,0%
gesamt	18,0%	82,0%	100%

(c)



(d) Die im Baumdiagramm enthaltenen Informationen können z.B. wie folgt als Zeitungsnotiz erscheinen:

> **Schulform Gymnasium immer beliebter**
> **Viele Eltern bevorzugen aber bekannte Schulform**
>
> 72% der Eltern, die selbst ein Gymnasium besuchten, schicken heute ihr Kind wieder auf ein Gymnasium; bei den Eltern, die eine Haupt- oder Realschule absolvierten, ist es ähnlich: 71 % lassen ihr Kind ebenfalls eine Schule dieser Schulform besuchen. Der Anteil der Gymnasiasten ist allerdings in einer Generation von 18 % auf 37 % angewachsen.

5. **Krebsfrüherkennung**

Im Folgenden sind die Ergebnisse eines schwedischen Modellversuchs zur Krebsfrüherkennung durch Mammographie dargestellt:

		Vorliegen einer Krebserkrankung		
		ja	nein	gesamt
Untersuchungs-Ergebnis	auffällig	$0,75\%$	$2,62\%$	$3,37\%$
	ohne Befund	$0,07\%$	$6,56\%$	$96,63\%$
gesamt		$0,82\%$	$99,18\%$	100%

(a) Welche Informationen kann man aus diesen Daten entnehmen?

(b) Versucht mithilfe dieser Resultate Außenstehende über die mathematischen Hintergründe einer solchen Vorsorgeuntersuchung zu informieren. Erstellt ein entsprechendes Wandplakat.

Quelle: PM 6/42 (2000)

Lösung: (a) $p(\text{krank}) = 0,82\%$, $p(\text{Befund auffällig}) = 3,37\%$, usw.
$p(\text{krank} \cap \text{Befund auffällig}) = 0,75\%$, $p(\text{nicht krank} \cup \text{Befund auffällig}) = 2,62\%$
$p_{\text{Befund auffällig}}(\text{krank}) = \frac{0,75\%}{3,37\%} = 22,2\%$,
d. h. bei einem auffälligem Befund ist nur etwa jeder fünfte Untersuchte krank.
$p_{\text{krank}}(\text{Befund auffällig}) = \frac{0,75\%}{0,82\%} = 91,5\%$

(b) Z. B.:
Da die Untersuchungen immer mit Fehlern behaftet sind, müssen Ergebnisse sachlich gedeutet werden. Bei der Entwicklung von Untersuchungsmethoden ist es primär wichtig von den kranken Personen einen sehr hohen Anteil zu erkennen, hier $p_{\text{krank}}(\text{Befund auffällig})$ 91,5%. Oft, insbesondere bei seltenen Erkrankungen, muss man damit in Kauf nehmen, dass viele gesunde ebenfalls das Ergebnis Befund auffällig erhalten. Dieses muss dann in weiteren Untersuchungen geklärt werden.

6. **Dunkelfeldforschung**

Ein Kriminologe möchte in einer Befragung (Stichprobe: 1000 Personen) herausfinden, wie viel Prozent der Bundesbürger bereits einmal einen Ladendiebstahl begangen haben. Da aber auf die direkte Frage („Haben Sie bereits einmal einen Ladendiebstahl begangen?“) vermutlich viele Befragte nicht ehrlich antworten würden, plant er folgendes Verfahren: Er legt jedem Befragten 10 gleich aussehender Kärtchen vor. Auf 4 dieser Kärtchen steht: „Ist es richtig, dass Sie bereits einmal einen Ladendiebstahl begangen haben?“ Auf den 6 anderen steht: „Ist es richtig, dass Sie noch nie einen Ladendiebstahl begangen haben?“ Der Befragte zieht nun eines dieser Kärtchen, ohne dass der Kriminologe dies sehen kann, und beantwortet die darauf stehende Frage wahrheitsgemäß (mit ja oder nein).

(a) Wie lässt sich anhand dieses Vorgehens der Anteil der Bürger schätzen, die schon einmal einen Ladendiebstahl begangen haben?

(b) Was ändert sich, wenn gleich viele von beiden Sorten Kärtchen vorhanden sind?

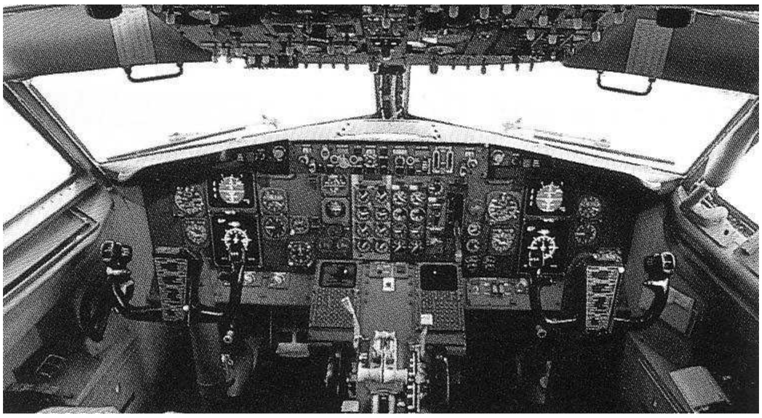
Quelle: MatheNetz 9 (2001)

Lösung: Sei A: Die gezogene Frage wird bejaht
B: Es wurde Frage 1 gezogen
C: Es wurde Frage 2 gezogen
p: Anteil der Bürger, die schon einmal einen Ladendiebstahl begangen haben
Also: $P(B) = 0,4;\ P(C) = 0,6$ sowie $P(A|B) = p;\ P(A|C) = 1 - p$
Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (oder elementar hergeleitet) folgt daher:
$P(A) = 0,4 \cdot p + 0,6 \cdot (1-p) = 0,6 - 0,2 \cdot p \Leftrightarrow p = 3 - 5 \cdot P(A)$
Setzt man nun für $P(A)$ die relative Häufigkeit $h(A)$ der Ja-Antworten aus der Umfrage ein, kann man also den entsprechenden Anteil p schätzen.

7. **Aufgaben zur Anwendung**

Moderne Düsenverkehrsflugzeuge verfügen über Bodenannäherungswarnanlagen, die den Piloten akustisch und optisch warnen, wenn sich das Flugzeug ungeplant dem Boden nähert. Aus langjährigen Studien haben sich ergeben:

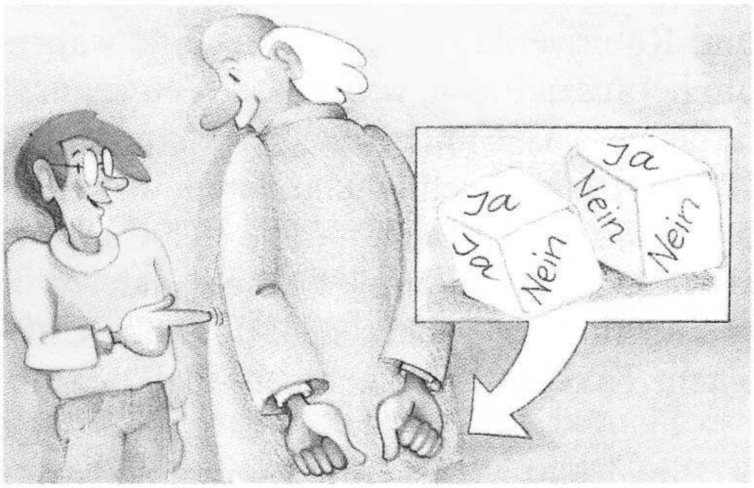
Wenn in einer Flugminute tatsächlich eine ungeplante Bodenannäherung vorliegt, dann schlägt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von $99,9\%$ Alarm. Wenn dagegen in einer Flugminute tatsächlich ungeplante Bodenannäherung vorliegt, so gibt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,002\%$ einen falschen Alarm. Eine ungeplante Bodenannäherung ist aufgrund der hohen navigatorischen und technischen Zuverlässigkeit der Verkehrsluftfahrt sehr selten. Durchschnittlich nur in einer von zwei Millionen Flugminuten ist eine solche Bodenannäherung zu erwarten.
Wenn das System Alarm gibt, wie wahrscheinlich ist es dann, dass sich das Flugzeug tatsächlich ungeplant dem Boden nähert? Was bedeutet das Ergebnis psychologisch für den Piloten, der jederzeit über die Möglichkeit verfügt das Warnsystem auszuschalten?



Lösung:

8. **Aufgaben zur Anwendung**

Der Lehrer bringt zwei faire Würfel mit. Auf dem ersten Würfel sind fünf Flächen mit „Ja“ überschrieben, auf dem anderen Würfel nur zwei Flächen. Auf den restlichen Flächen steht „Nein“. Nachdem der Lehrer diese Würfel gezeigt hat, nimmt er sie verdeckt jeweils in die eine oder die andere Hand. Peter muss nun blind nach Zufall einen Würfel auswählen, den er dann - für die Klasse verdeckt - vom Lehrer erhält.
Peter würfelt mit diesem Würfel dreimal - weiterhin für die Klasse verdeckt - und nennt als Ergebnisse: „Ja, Ja, Nein.“
Die übrige Klasse soll nun wetten, ob Peter den ersten Würfel oder den zweiten Würfel erhielt.



(a) Was tippst du? Bestimme für die beiden Würfel die Wahrscheinlichkeiten!
(b) Baut euch selber Würfel (auch mit anderen Beschriftungen) und überprüft eure vorher (!) erstellten Berechnungen!

Lösung:

9. **AIDS**

Material 1.1: Aids in der Bundesrepublik Deutschland

In den Quartalen I/98 und II/98 in das Fallregister aufgenommene Berichte über AIDS-Patienten

	Quartal	
	I/98	II/98
Berichte insgesamt:	463	502
Erstberichte	239	213
davon Berichte mit Todesmeldungen	36	20
Berichte mit zusätzlichen Informationen für bereits bekannte Fälle	224	289
davon Berichte mit Todesmeldungen	162	243

aus: Quartalsbericht III/98 des Robert-Koch-Instituts, Berlin (vgl. auch www.rki.de)

Material 1.2.: Zahl der gemeldeten AIDS-Fälle nach Geschlecht sowie der gemeldeten Todesfälle nach Bundesländern bzw. ausgewählten Großräumen und aufgeführten Zeiträumen der Registrierung

Bundesländer/ Großräume	Zeitraum der Registrierung							Verstorben gemeldet
	Quart. II/98	1. 7. 97–30. 06. 98			Gesamt			
	Ges.	Ges.	Männl.	Weibl.	Ges.	Männl.	Weibl.	
Baden-Württemberg	18	80	65	15	1431	1139	292	830
Bayern (ohne M)	16	73	56	17	989	835	154	611
München (M)	7	115	102	13	1602	1481	121	1070
Berlin (West)	27	126	113	13	3325	3028	297	2406
Berlin (Ost)	7	27	26	1	202	186	16	96
Brandenburg	2	5	2	3	36	26	10	16
Bremen	0	64	50	14	254	215	39	115
Hamburg	13	89	77	12	1632	1514	118	1056
Hessen (ohne F)	13	36	26	10	866	750	116	559
Frankfurt/Main (F)	12	37	30	7	1153	1039	114	819
Mecklenburg-Vorpommern	1	3	3	0	26	25	1	14
Niedersachsen	14	68	53	15	918	793	125	622
NRW (ohne K/D)	42	217	181	36	2431	2112	319	1389
Köln (K)	13	78	71	7	884	819	65	668
Düsseldorf (D)	2	10	9	1	547	503	44	346
Rheinland-Pfalz	4	20	15	5	522	432	90	328
Saarland	4	11	20	1	178	150	28	117
Sachsen	1	5	4	1	35	31	4	15
Sachsen-Anhalt	4	8	6	2	24	22	2	9
Schleswig-Holstein	12	36	33	3	420	383	37	266
Thüringen	1	2	2	0	15	12	3	8
Gesamt	213 100%	1110 100%	934 84,1%	176 15,9%	17490 100%	15495 88,6%	1995 11,4%	11360 65,0%

Material 1.3.: Verteilung der gemeldeten AIDS-Fälle nach Bundesländern, Großstädten über 100.000 Einwohner bzw. ausgewählten Großräumen sowie nach Infektionsrisiko

	Infektionsrisiko							Gesamt	Als verst. gemeldet
	Homo/ bi	IVDA	Hämo/ Trans	Hetero	Pattern II	PPI	k. A.		
Nordrhein-Westf.	2526	523	220	215	117	24	237	3862	2403
Köln	703	56	22	30	18	1	54	884	668
Düsseldorf	428	42	17	25	9	2	24	547	346
Ruhrgeb.-West	78	37	12	10	7	3	6	153	109
Ruhrgeb.-Mitte	199	67	22	17	9	4	22	340	175
Ruhrgeb.-Ost	192	83	20 8	14	7	0	20	336	168
Ruhrgeb.-SO	37	17	8	3	2	2	3	72	35
Wuppertal	63	10	8	7	2	3	9	102	64
Bielefeld	51	17	3	4	0	1	3	79	51
Bonn	77	15	13	10	11	1	10	137	62
Mönchen-gladbach	29	4	3	5	0	0	2	43	31

Material 1.4: Bei Infektionskrankheiten ist es wichtig, dass man schnell die Art der Krankheit erkennt, damit man sie bekämpfen kann. Hierzu führt man Schnelltests durch, die allerdings Mängel haben: Manchmal wird eine Krankheit angezeigt, obwohl sie nicht vorliegt, gelegentlich wird eine Krankheit nicht angezeigt, obowhl sie vorhanden ist.
Bei der HIV-Diagnostik sind die Empfindlichkeit *(Sensitivität)* des Tests, vor allem aber die Zuverlässigkeit positiver Testergebnisse *(Spezifität)* von besonderer Bedeutung.
Die vorliegenden Testverfahren zum Nachweis der Infektion haben mittlerweile eine hohe Sicherheit (Sensitivität): Bei 99,9 % der tatsächlich Infizierten erfolgt positive Testreaktion, nur bei 0,3 % der nicht-infizierten Testpersonen wird irrtümlich eine Infektion angezeigt (Spezifität 99,7 %).

aus Strick (1998)

Formuliert in eurer Gruppe mindestens vier sinnvolle (statistische) Fragen, die mit Hilfe des zur Verfügung stehenden Datenmaterials untersucht werden können. Versucht diese Fragen zu beantworten.
Bereitet euch auch auf die Präsentation der Lösungen vor. Quelle: mathematik lehren (2001), H. 104, S. 62-66

Lösung:

10. **BSE**

BSE

Blindflug ins Hirn

Im Rinderwahn gehen auch die letzten Sicherheiten zu Grunde: Der meistbenutzte Schnelltest hat eine BSE-Kuh nicht erkannt.

Kaum hat die neue Landwirtschaftsministerin Renate Künast vergangene Woche mehr Tests angekündigt, richtet sich der massivste Verdacht ausgerechnet gegen den Schnelltest "Platelia BSE", nach Herstellerangaben Deutschlands meistverwendetes Hilfsmittel für die Fahndung nach der Rinderseuche.
Schon mehrfach hat der Test der Firma Bio-Rad (...) gepatzt, als er bei gesunden Rindern BSE ortete. Jedes Mal musste das nationale BSE-Referenzzentrum, die Bundesforschungsanstalt für Viruskrankheiten in Tübingen, den Spuk auflösen. Forscher stöhnen dort mittlerweile schon über die Welle von Fehlmeldungen; die „falsch-positiven“ Fälle lähmten den Testapparat bei der Enttarnung des Erregers.
Auch für die betroffenen Bauern hatten die Scheintreffer Folgen: Ihre Bestände wurden bis zur Entwarnung gesperrt. Doch bisher konnte wenigstens der Verbraucher beruhigt sein – besser eine Meldung zu viel als eine zu wenig.

Jetzt aber steht der Bio-Rad-Test erstmals im Verdacht, eine BSE-Kuh nicht erkannt zu haben, ein Fall, der das Vertrauen in den gesamten Testapparat erschüttert. Erst recht, weil sich am gleichen Material später auch noch der Test des einzigen Bio-Rad-Konkurrenten in Deutschland, Prionics, vergeblich versuchte.

(aus: DER SPIEGEL, 04/2001)

(a) Recherchiert, was man unter BSE und nCJK versteht. Tragt Informationen zusammen, was zum Ausbruch und zur Verbreitung von BSE geführt hat. Forscht im Internet nach aktuellem Zahlenmaterial aus europäischen Staaten.

(b) Wie würdet ihr die Sicherheit des erwähnten Tests beschreiben? Wie wirkt sich der Fehler des Tests auf die betroffenen Bauern und Verbraucher aus?

(c) Tragt Informationen zusammen, was zum Ausbruch und zur Verbreitung von BSE geführt hat. Forscht im Internet nach aktuellem Zahlenmaterial aus europäischen Staaten.

(d) In der Bundesrepublik wurden in den Jahren um 2000 jährlich etwa 480000 Rinder geschlachtet. Die Verbraucherschutzministerin Renate Künast hat im Jahr 2001 angegeben, „dass in diesem Jahr 500 BSE-Fälle erwartet werden“. Alle geschlachteten Rinder werden mit einem Schnelltest untersucht. Dieser Schnelltest identifiziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% die erkrankten Rinder korrekt, er gibt aber auch in 3% der Fälle gesunde Rinder als BSE-erkrankt aus.
Bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rind, das positiv getestet wurde, auch wirklich krank ist.

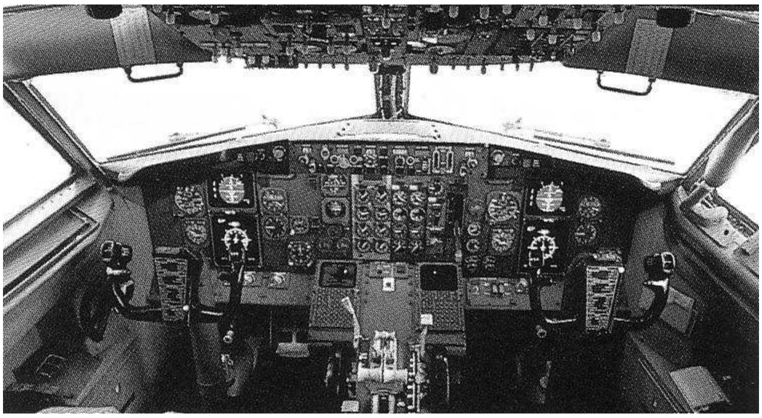
(e) Da Schnelltests nicht absolut sicher sind, treten immer Fehler auf. Wie wirken sich die Fehler aus, wenn der Anteil der BSE-Erkrankungen ansteigt?

Quelle: MatheNetz 9 (2001)

Lösung:

11. **Aufgaben zur Anwendung**

Moderne Düsenverkehrsflugzeuge verfügen über Bodenannäherungswarnanlagen, die den Piloten akustisch und optisch warnen, wenn sich das Flugzeug ungeplant dem Boden nähert. Aus langjährigen Studien haben sich ergeben:
Wenn in einer Flugminute tatsächlich eine ungeplante Bodenannäherung vorliegt, dann schlägt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von $99,9\%$ Alarm. Wenn dagegen in einer Flugminute tatsächlich geplante Bodenannäherung vorliegt, so gibt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,002\%$ einen falschen Alarm. Eine ungeplante Bodenannäherung ist aufgrund der hohen navigatorischen und technischen Zuverlässigkeit der Verkehrsluftfahrt sehr selten. Durchschnittlich nur in einer von zwei Millionen Flugminuten ist eine solche Bodenannäherung zu erwarten.
Wenn das System Alarm gibt, wie wahrscheinlich ist es dann, dass sich das Flugzeug tatsächlich ungeplant dem Boden nähert? Was bedeutet das Ergebnis psychologisch für den Piloten, der jederzeit über die Möglichkeit verfügt das Warnsystem auszuschalten?



Lösung: $p_{\text{Alarm}}(\text{ungeplante Bodernnäherung}) =$

$= \frac{5\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}999}{5\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}999+(1-5\cdot 10^{-7})\cdot 0{,}00002} = 0,0244 = 2,44\%$

Bei Alarm ist die Wahrscheinlichkeit für eine ungeplante Bodernnäherung zwar nur $2,44\%$; der Alarm muss trotzdem sehr ernst genommen werden!