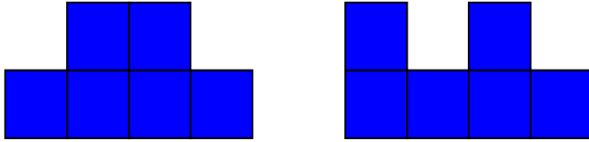


Neue Aufgaben, Januar 2009

1. Würfelgebäude

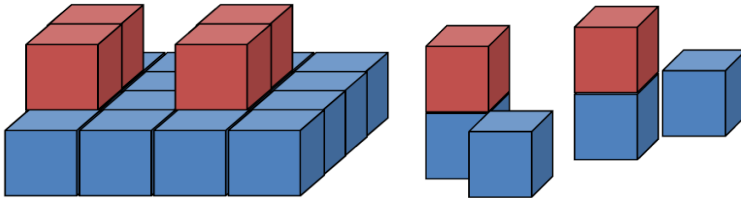
Aus einzelnen Würfeln wird ein Würfelgebäude aufgebaut. Ein Gebäude ist in der Abbildung von vorne und von der Seite abgebildet.



Wie viele Würfel sind für das Gebäude minimal und maximal verwendet worden?

Quelle: nach de Lange, J., Utrecht in: SINUS Bayern, Beiträge zur Weiterentwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (StMUK) und Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB), 2007

Lösung: Das Gebäude lässt sich mit maximal 20 und minimal 6 Würfeln (vgl. Abb.) aufbauen.



2. Welches der Bruchstücke ergänzt die Figur am besten?

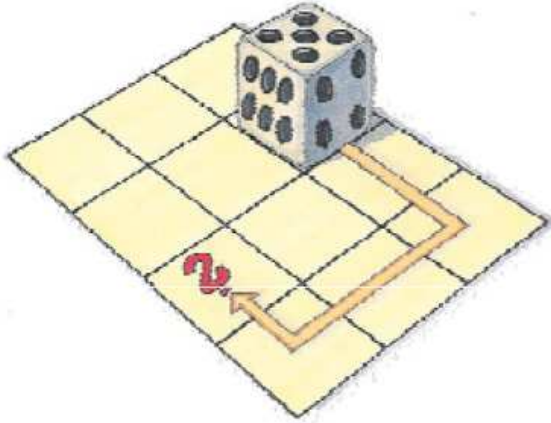


Quelle: Klaus-Jürgen Gebert, Berlin

Lösung: Bruchstück C

3. Würfel kippen

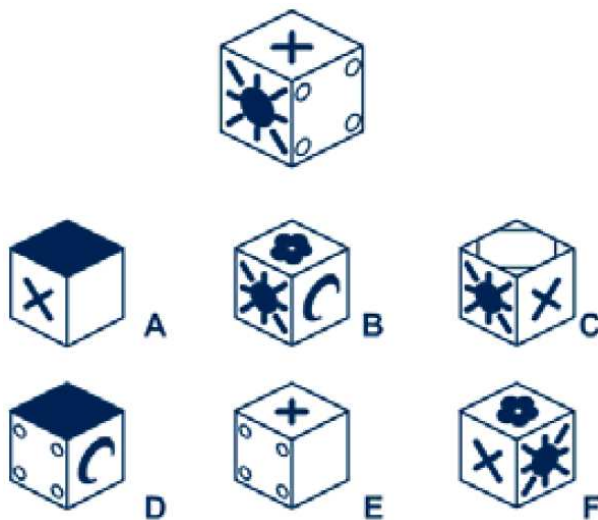
Bei jedem Spielwürfel haben die gegenüberliegenden Flächen die Augensumme 7. Welche Zahl liegt oben, wenn du den Spielwürfel auf diesem Plan nach dieser vorschritt kippst?



Quelle: Studeny, G., Brenninger A., Kartei zur Kopfgeometrie, Westermann

Lösung: Augenzahl 3

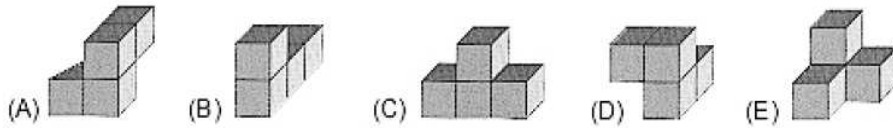
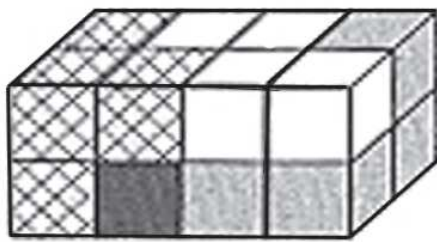
4. Welcher Würfel kann nicht der gleiche sein, wie der oben dargestellte?
(auf keinem Würfel tragen zwei Seiten identische Symbole)



Quelle: Klaus-Jürgen Gebert, Berlin

Lösung: Würfel F

5. Der Quader wurde aus vier Bausteinen, von denen jeder aus vier Würfeln besteht, gebaut. Welcher der abgebildeten Bausteine ist der schwarze?

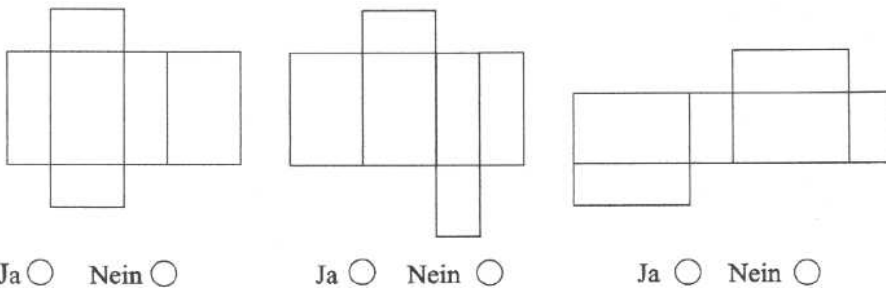


Quelle: Vortrag von Christoph Hammer (Didaktik der Mathematik, LMU München), 22.11.2007

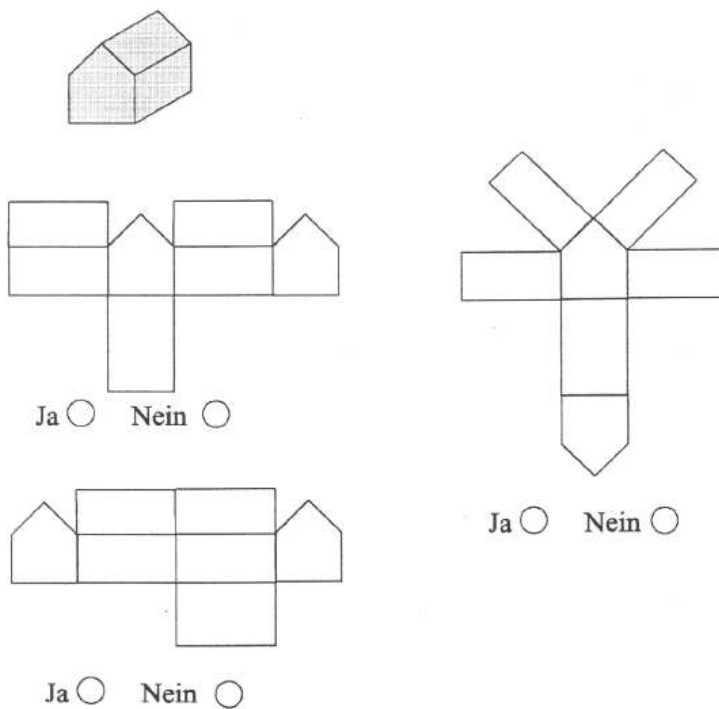
Lösung: Baustein C

6. Handelt es sich jeweils um einen richtigen Bastelbogen?

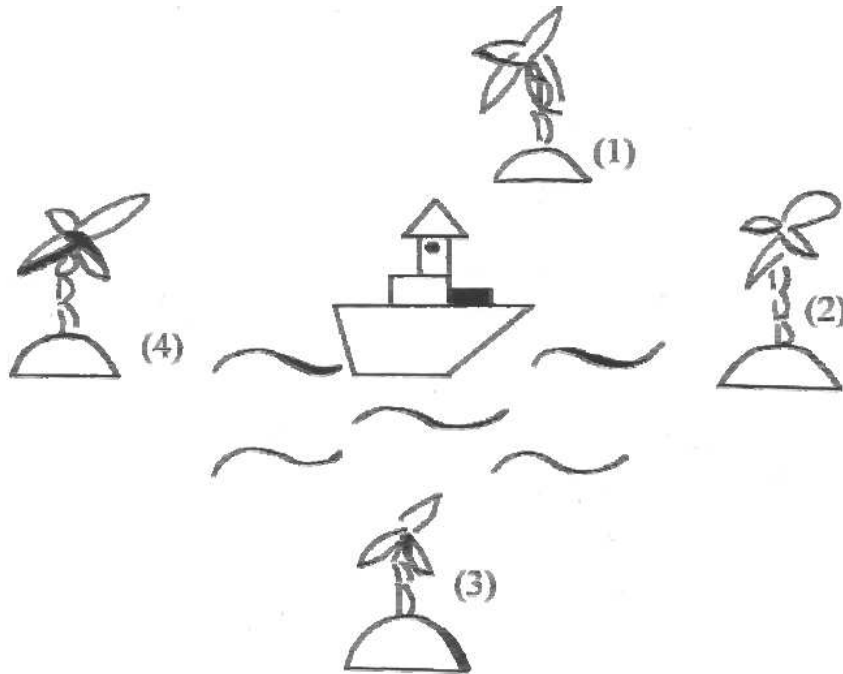
(a) .



(b) .



Lösung: (a) ja, nein, ja
(b) ja, ja, nein



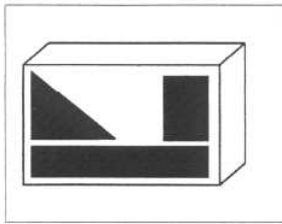
Von welcher Insel sieht man das Schiff gerade so?
Schreibe die richtige Zahl darunter!



7.

Lösung: 4, 1, 2

Ist oben dieselbe Schachtel wie unten abgebildet?



Ja Nein



Ja Nein

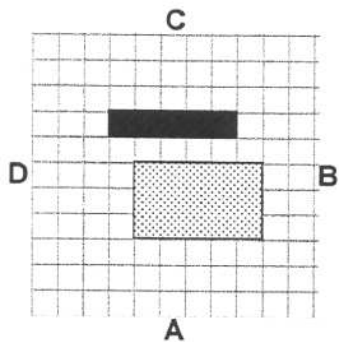


Ja Nein

8.

Lösung: ja, ja, nein

Hier siehst du gleich große Schachteln von oben!

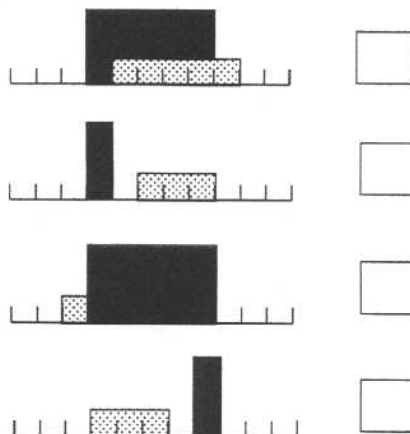


9.

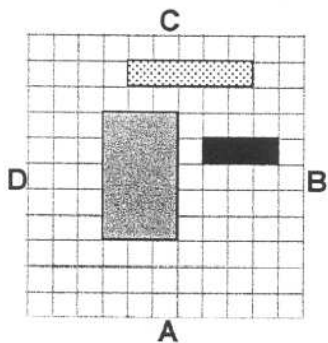
Lösung: A, D, C, B

Von welcher Seite (A,B,C oder D) siehst du die Schachteln gerade so?

Antwort:

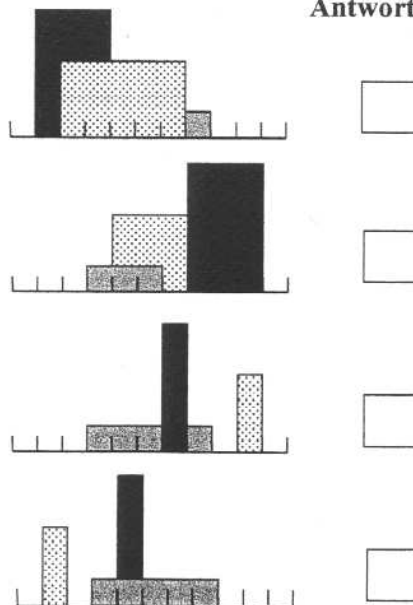


Hier siehst du gleich große Schachteln von oben!



Von welcher Seite (A,B,C oder D) siehst du die Schachteln gerade so?

Antwort:



10.

Lösung: C, A, B, D

11. Wusstest du, dass im Berufsverkehr im Durchschnitt nur 1,2 Personen in einem Auto sitzen?

- (a) Was bedeutet das?
- (b) Wie waren die Autos besetzt, wenn 10 Autos kontrolliert wurden?
- (c) Bei 40 kontrollierten Autos waren 39 mit je einer Person besetzt. Ist das möglich?
- (d) In 40 Autos saßen 60 Personen. Wie viele Personen saßen durchschnittlich in einem Auto?

Quelle: Robert Lesewa, Gymnasium Donauwörth

- Lösung:
- (a) Wenn man die Anzahl der Personen a in einer bestimmten Anzahl n von Autos betrachtet, ergibt die relative Häufigkeit der Personen pro Auto den Wert $\frac{a}{n} = 1,2$.
 - (b) Es gibt verschiedene Möglichkeiten, z. B. $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2$, $5 + 5 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$, ...
 - (c) In 40 Autos müssten insgesamt 48 Personen sein, d. h. in einem Auto müssten dann 8 Personen sein!
 - (d) In einem Auto saßen durchschnittlich 1,5 Personen.

12. Brüche kombinieren

- (a) Es sind die Zahlen 1, 2 und 3 gegeben. Bilde damit alle möglichen Brüche aus jeweils zwei dieser Zahlen und sortiere sie der Größe nach. (Mehrfachverwendung erlaubt!)
- (b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn du die Zahlen 1, 2, 3, 5, 7 verwendest? Wie viele dieser Brüche sind kleiner als 1?
- (c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn du die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n verwendest?

Quelle: Christoph Hammer (Didaktik der Mathematik, LMU München)

Lösung: (a) Jede Zahl kann im Zähler und im Nenner vorkommen, also

	1	2	3	
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} < \frac{3}{2} < \frac{2}{1} < \frac{3}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	

- (b) $5^2 = 25$ Möglichkeiten, davon $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ Brüche kleiner als 1. Diese stehen in der Tabelle unterhalb der fallenden Diagonale.

	1	2	3	5	7
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{7}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{7}{5}$
7	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{7}$

- (c) n^2 Möglichkeiten, davon $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{1}{2}n(n - 1)$ Brüche kleiner als 1
Ausgehend von diesen Betrachtungen kann man weitere Fragen diskutieren, z. B. wie viele verschiedene Brüche gibt es? Literatur:

http://www.sinus-bayern.de/userfiles/Broschuere_2007/K5/Differenzierender_Auftrag.pdf

13. Petra verteilt Haselnüsse. Ulrike erhält die Hälfte der Haselnüsse, Matthias die Hälfte des Rests und für Petra bleiben noch 8 Haselnüsse. Wie viele Haselnüsse hatte sie am Anfang?

Quelle: Jahrgangsstufentest 2005, 8. Klasse, Realschule Bayern

Lösung: 32 Haselnüsse

14. (a) Gegeben sind zwei verschiedene Punkte P und Q. Gesucht sind alle Geraden, von denen P und Q gleichen Abstand haben.
- (b) Gegeben sind drei verschiedene Punkte P, Q und R. Gesucht sind alle Geraden, von denen P, Q und R gleichen Abstand haben.
- (c) Gegeben sind zwei verschiedene Punkte P und Q. Gesucht sind alle Kreise, von denen P und Q gleichen Abstand haben.

- Lösung:*
- (a) Gerade PQ, Parallelen zu PQ, Mittelsenkrechte der Strecke [PQ] und Geraden durch den Mittelpunkt M der Strecke [PQ]
 - (b) 1. Fall: P, Q, R liegen auf einer Geraden \Rightarrow Gerade PQ und Parallelen zu PQ
2. Fall: P, Q und R nicht auf einer Geraden \Rightarrow Mittelparallelen des Dreiecks $\triangle PQR$
 - (c) Der Abstand eines Punktes von einem Kreis ist das Minimum aller Entfernungen zwischen diesem Punkt und einem Punkt des Kreises.
Kreise um Mittelpunkt der Strecke [PQ] mit beliebigem Radius und Kreise um beliebigem Punkt M mit Radius $r = \frac{1}{2}(\overline{PM} + \overline{QM})$

15. Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt.

Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist. (Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)



Quelle: PISA 2000, Beispielaufgaben aus dem Mathematiktest

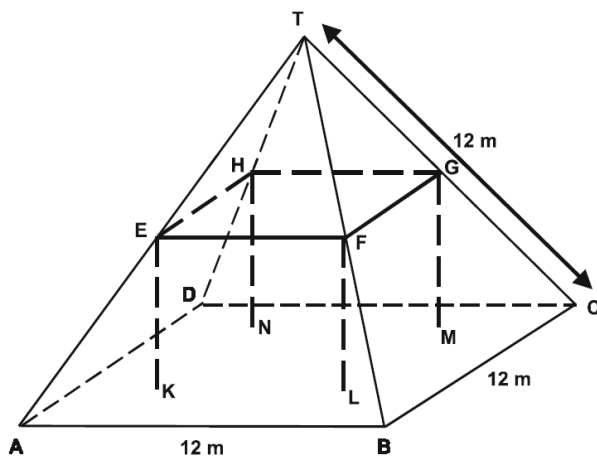
Lösung: Abschätzung durch ein Rechteck mit Seitenlängen $4,5 \cdot 10^3$ km und $3,1 \cdot 10^3$ km liefert $A = 14 \cdot 10^6$ km²

ODER: Abschätzung durch Kreis mit Radius $2,1 \cdot 10^3$ km liefert ebenso $A = 14$ km²

16. Hier siehst du ein Foto eines Bauernhauses mit pyramidenförmigem Dach.



Nachstehend siehst du das mathematische Modell mit den entsprechenden Maßen, das eine Schülerin vom Dach des Bauernhauses gezeichnet hat.



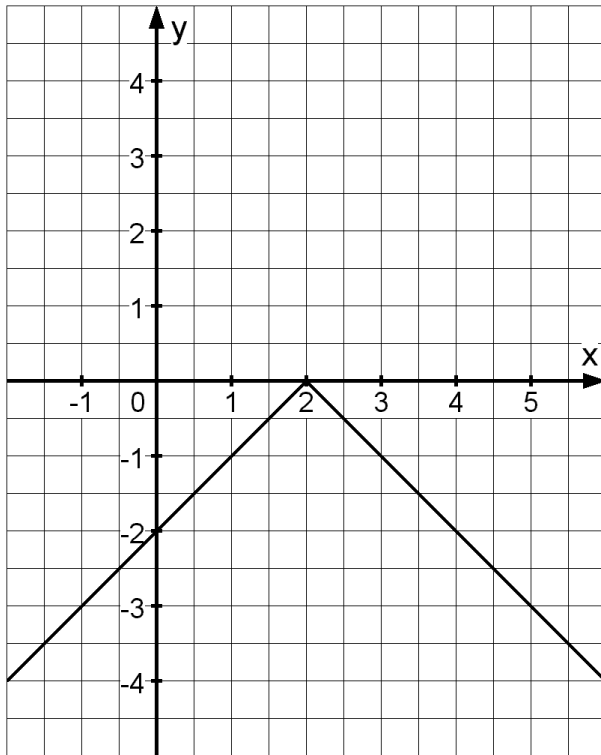
Der Boden des Dachgeschosses, in der Zeichnung $ABCD$, ist ein Quadrat. Die Balken, die das Dach stützen, sind die Kanten eines Quaders (rechtwinkliges Prisma) $EFGHKL MN$. E ist die Mitte von $[AT]$, F ist die Mitte von $[BT]$, G ist die Mitte von $[CT]$ und H ist die Mitte von $[DT]$. Jede Kante der Pyramide in der Zeichnung misst 12 m.

- Berechne die Fläche und das Volumen des Dachgeschosses.
- Berechne die Länge von $[EF]$, einer der horizontalen Kanten des Quaders.

nach: Pisa 2000, Aufgabenbeispiele

Lösung: (a) 144 m^2 , Höhe der Pyramide: $\frac{1}{\sqrt{2}}12 \text{ m}$, Volumen $V = \frac{1}{\sqrt{2}}12 \cdot 12^3 \text{ m}^3 = 1,2 \cdot 10^3 \text{ m}^3$
 (b) 6 m

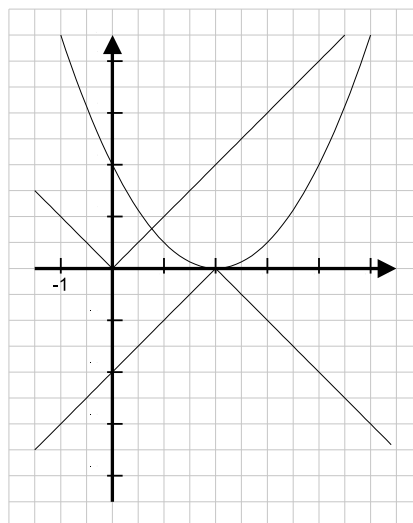
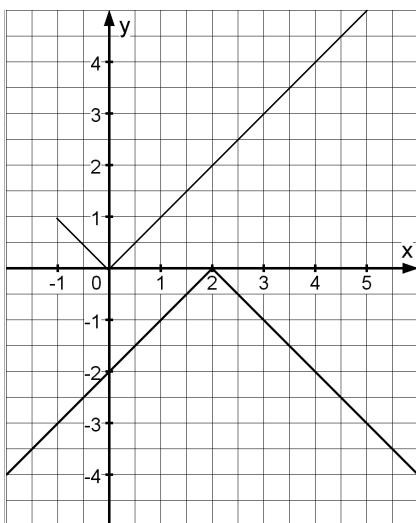
17. Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$, der kongruent zum Graphen der Betragsfunktion, $g : x \rightarrow |x|$, $D_g = \mathbb{R}$ ist.



- (a) Zeichnen Sie den Graphen der Betragsfunktion g ein und beschreiben Sie, wie G_f aus dem Graphen von g entsteht.
- (b) Zeichnen Sie den Graphen der Integralfunktion $F : x \rightarrow \int_2^x f(t)dt$ für $-1 \leq x \leq 5$ in das gegebene Diagramm ein. (Hinweis: Eine integralfreie Darstellung der Funktion F ist hierzu nicht notwendig.)

Quelle: Handreichung für den Mathematikunterricht am Gymnasium, Das Abitur im Fach Mathematik am achtjährigen Gymnasium, Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung Abteilung Gymnasium, August 2008, www.isb.bayern.de

Lösung: f entsteht aus g durch Verschiebung um 2 nach rechts und Spiegelung an der x-Achse.

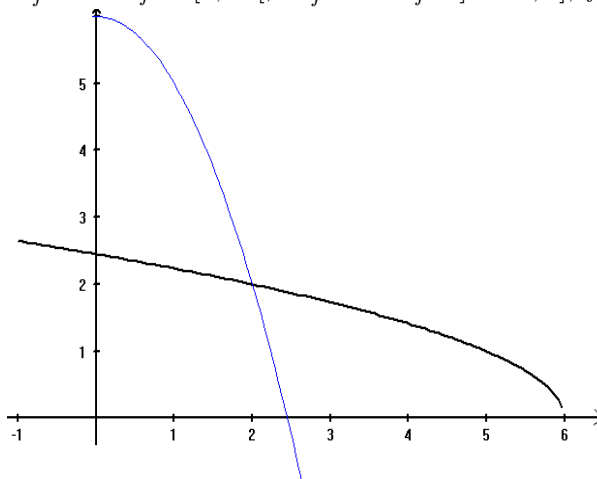


18. Gegeben ist die Funktion $f : x \rightarrow \sqrt{6-x}$ in ihrem maximalen Definitionsbereich D_f .

- Geben Sie D_f an und begründen Sie, dass f umkehrbar ist.
- Geben Sie den Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion an, und bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion. Zeichnen Sie die Graphen von f und f^{-1} in ein gemeinsames Koordinatensystem.
- Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem sich die beiden Graphen schneiden, sowie den Inhalt des „herzförmigen“ Flächenstücks, das von den Graphen von f und f^{-1} sowie den Koordinatenachsen im I. Quadranten eingeschlossen wird.

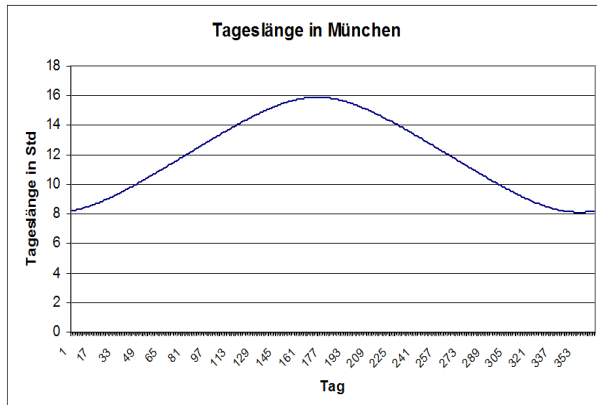
Quelle: Handreichung für den Mathematikunterricht am Gymnasium, Das Abitur im Fach Mathematik am achtjährigen Gymnasium, Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung Abteilung Gymnasium, August 2008, www.isb.bayern.de

Lösung: (a) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{6-x}} < 0$, also streng monoton fallend und damit umkehrbar
 (b) $D_{f^{-1}} = W_f = [0; \infty[$, $W_{f^{-1}} = D_f =]-\infty; 6]$, $f^{-1}(x) = 6 - x^2$



(c) $S(2|2)$, $A = 2 \int_0^2 (6 - x^2) dx - 4 = 14\frac{2}{3}$

19. Die Tageslänge (Zeitdauer zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang) an einem festen Ort verändert sich im Lauf eines Jahres. Die Graphik zeigt diese Veränderung für München. Die Tageslänge $T(x)$ in Stunden am x -ten Tag des Jahres in München kann in guter Näherung durch eine trigonometrische Funktion der Form $T(x) = a \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x-172}{365}) + c$ mit $a > 0$ und $c > 0$ modelliert werden.



- (a) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Funktion T die Periode 365 hat und dass unabhängig von a und c bei $x = 172$ ein Maximum vorliegt.
- (b) Entnehmen Sie dem Graphen Näherungswerte für die Parameter a und c .
- (c) Geben Sie einen Grund dafür an, dass eine entsprechende Modellierung der Tageslänge am Nordpol nicht mit einer Kosinusfunktion möglich ist.

Quelle: Handreichung für den Mathematikunterricht am Gymnasium, Das Abitur im Fach Mathematik am achtjährigen Gymnasium, Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung Abteilung Gymnasium, August 2008, www.isb.bayern.de

- Lösung:* (a) $T(x + k \cdot 365) = a \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x+k \cdot 365 - 172}{365}) + c = a \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x-172}{365} + 2k \cdot \pi) + c = T(x)$;
Maximum wenn $\cos(2\pi \cdot \frac{x-172}{365}) = 1$, dies gilt für $x = 172$
- (b) $a = 2$ und $c = 12$.
- (c) Polarnacht/Polarsommer

20. Aufgaben zur Anwendung

Zur teilweisen Finanzierung der Olympischen Spiele 1972 in München wurde eine Lotterie eingeführt: die Glücksspirale. Die 7-ziffrigen Glückszahlen wurden dabei wie folgt ermittelt: In einer Trommel befanden sich 70 Kugeln; auf 7 Kugeln stand die 0, auf 7 Kugeln die 1, ..., auf 7 Kugeln die 9. Aus dieser Trommel wurden 7 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in der Reihenfolge des Ziehens zur jeweiligen Glückszahl angeordnet.

- (a) Gib den Ergebnisraum an. Wie viele Glückszahlen sind in ihm enthalten?
- (b) Nach der ersten Ziehung gab es in der Presse Kritik, daß durch dieses Verfahren nicht alle 7-ziffrigen Glückszahlen die gleiche Gewinnchance gehabt hätten. Bestätige oder widerlege diese Kritik. Mache gegebenenfalls (falls die Kritik zutrifft) einen Vorschlag zur Verbesserung des Ziehungsverfahrens und begründe den Vorschlag in Form eines Briefes an die Geschäftsführung der Glücksspirale.

- Lösung:* (a) $\Omega = \{0000000, 0000001, 0000010, 0000011, 0000012, \dots, 9999998, 9999999\}$, $|\Omega| = 10^7$
- (b) Wenn eine Zahl bereits gezogen ist, nimmt für diese Zahl die Wahrscheinlichkeit bei den folgenden Ziehungen ab, d. h. die Kritik ist berechtigt. Gleichwahrscheinlich wären die 7-ziffrigen Glückszahlen, wenn man mit Zurücklegen ziehen würde.

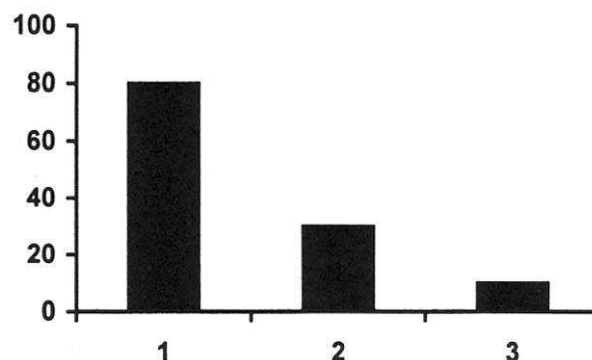
21. Aufgaben zur Anwendung

Zahlen unter 32 werden (wegen der Geburtstage der Tipper) beim Lottospiel 6 aus 49 häufiger angekreuzt als andere Zahlen. Im allgemeinen ist deshalb die Zahl der Gewinner um so größer, je mehr Zahlen unter 32 ausgelost werden. Sollte man also nur noch Zahlen über 32 tippen?

Lösung: Für jede der angekreuzten Zahlen ist die Wahrscheinlichkeit gezogen zu werden gleich hoch. Da die Zahlen unter 32 zu kleineren Gewinnsummen führen (diese werden häufiger angekreuzt), ist es günstiger diese nicht anzukreuzen.

22. Dopingproben

Nach einem Sportfest werden jeweils Teile von zwei Urinproben zusammengeschüttet und das Resultat getestet. Fällt der Test positiv aus, testet man die Einzelproben. In folgendem Diagramm ist dargestellt, wie viele Tests für die zwei Proben eines Paares notwendig sind.



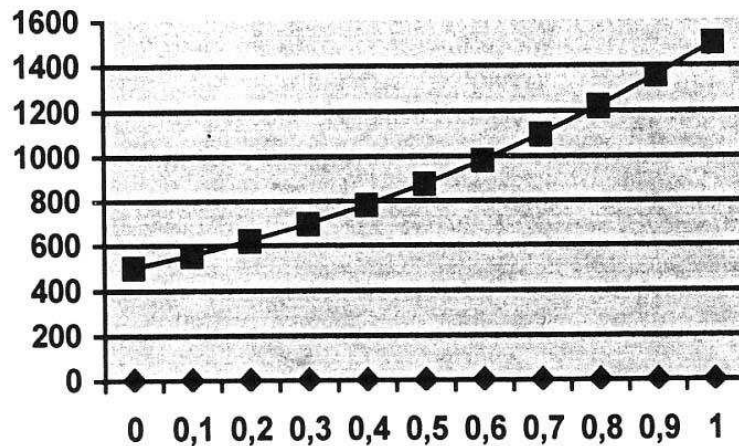
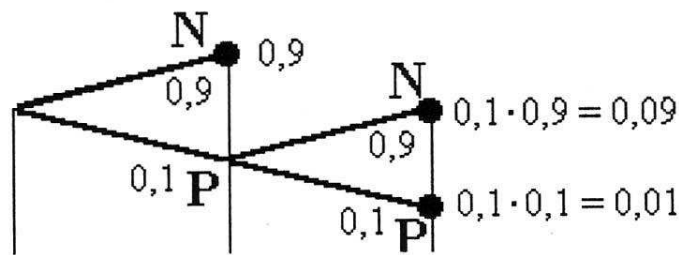
Was kann man alles aus diesem Diagramm entnehmen?

Lösung: Insgesamt $80 + 30 + 10 = 120$ Testpaare, also 240 Sportler
Statt 240 Einzeltests hier nur $80 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 150$ Tests
Abschätzung der Dopingfälle: min. $30 + 10 = 40$, max. $30 + 20 = 50$ Dopingfälle

23. Dopingproben

Nach einem Sportfest werden jeweils Teile von zwei Urinproben zusammengeschüttet und das Resultat getestet. Fällt der Test positiv aus, testet man die Einzelproben. Wie viele Proben sind bei 1000 Sportlern zu erwarten, wenn man aus langjähriger Erfahrung weiß, dass 10% (20%, 30%, ...) aller Sportler Doping betreiben?

Lösung: Zur Wahrscheinlichkeit von 10% Baumdiagramm aus Aufgabe 1!!! mit Pfadwahrscheinlichkeiten:



Man hat also für die 1000 Personen in 500 Testpaaren $(0,9 \cdot 1 + 0,09 \cdot 2 + 0,01 \cdot 3) \cdot 500 = 555$ Tests zu erwarten, im Vergleich zu Einzeltests also eine deutliche Ersparnis
Verallgemeinerung (für 20%, 30%, ...):

Berechnung liefert das neben stehende Ergebnis. Die Vermutung eines quadratischen Zusammenhangs lässt sich bestätigen:

Zu erwarten sind $[(1 - p) \cdot 1 + p \cdot (1 - p) \cdot 2 + p^2 \cdot 3] \cdot 500 = (p^2 + p + 1) \cdot 500$ Tests
(im Vergleich zu 1000 Einzeltests)

24. Aufgaben zur Anwendung

Im Hause der Familie Duck halten sich n Enten zu einer Familienfeier auf. Eine muss trotz des scheußlichen Regens hinaus und den Erbonkel Dagobert mit dem Schirm abholen. Donald Duck hält n Streichhölzer in der Hand, eins davon ist gekürzt. Wer dieses zieht, muss hinaus in den Regen.

- (a) Soll Trick als erster ziehen, als letzter oder mehr so in der Mitte? Berechnet die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und nehmt dann Stellung zu Daisys Aussage: „Die ersten und die letzten, die ziehen, haben die besten Chancen, nicht hinaus zu müssen, denn zu Beginn sind noch alle langen Hölzchen da, und bis zum Ende wird wohl kaum gezogen werden, da schon vorher jemand das kurze Streichholz gezogen haben wird. Die in der Mitte sind am schlechtesten dran, weil nur noch etwa die Hälfte der langen Hölzchen da sind und dadurch die Chancen zu verlieren viel größer sind.“

- (b) Wenn nur noch Trick und Track im Raum sind, weil alle anderen damit beschäftigt sind, den mit Wasser volllaufenden Keller zu entleeren, wird folgendes Verfahren vereinbart: Trick und Track ziehen abwechselnd eines der n Streichhölzer. Wer zuerst das kurze zieht, muss hinaus in den Regen. Soll Trick jetzt anfangen oder lieber Track den Vortritt lassen?

Lösung: (a) Für jede Ente beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$.
 (b) Bei einer geraden Anzahl von Streichhölzern ist es egal wer anfängt. Bei einer ungeraden Anzahl sollte Trick nicht anfangen. Derjenige, der den ersten Zug macht, muss einmal mehr ziehen, wobei er bei jedem Zug mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n}$ das kurze Streichholz bekommt.

25. Aufgaben zur Anwendung

Die Ritter Kunibald, Georgius und Ottokar sind bei einer Schlacht gefangen genommen und anschließend zum Tode verurteilt worden. Der Herrscher beschließt, einen der drei per Losverfahren zu begnadigen. Der Name des Glücklichen wird streng geheim gehalten. Kunibald sagt sich: „Die Wahrscheinlichkeit, dass ich es bin, beträgt $\frac{1}{3}$.“, Er sagt dem Wärter: „Einer der beiden anderen wird sicher hingerichtet werden. Du wirst mir also nichts verraten, wenn du mir einen Mann nennst, Georgius oder Ottokar, der hingerichtet wird.“ Darauf sagt der Wärter, „Ottokar wird hingerichtet.“ Die Antwort hat Kunibald ermutigt, denn damit wird er oder aber Georgius sicher nicht hingerichtet. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er selbst überlebt, $\frac{1}{2}$. Hat Kunibald Recht?



Lösung: Er hat nicht recht, da die Entscheidung durch Losverfahren ($p = \frac{1}{3}$) getroffen wird. Auf $p = \frac{1}{2}$ käme man, wenn unter der Bedingung „Ottokar wird hingerichtet“ das Los zwischen Kunibald und Georgius entscheiden würde.

26. Aufgaben zur Anwendung

Moderne Düsenverkehrsflugzeuge verfügen über Bodenannäherungswarnanlagen, die den Piloten akustisch und optisch warnen, wenn sich das Flugzeug ungeplant dem Boden nähert. Aus langjährigen Studien haben sich ergeben:

Wenn in einer Flugminute tatsächlich eine ungeplante Bodenannäherung vorliegt, dann schlägt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9% Alarm. Wenn dagegen in einer Flugminute tatsächlich geplante Bodenannäherung vorliegt, so gibt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,002% einen falschen Alarm. Eine ungeplante Bodenannäherung ist aufgrund der hohen navigatorischen und technischen Zuverlässigkeit der Verkehrsfluffahrt sehr selten. Durchschnittlich nur in einer von zwei Millionen Flugminuten ist eine solche Bodenannäherung zu erwarten.

Wenn das System Alarm gibt, wie wahrscheinlich ist es dann, dass sich das Flugzeug tatsächlich ungeplant dem Boden nähert? Was bedeutet das Ergebnis psychologisch für den Piloten, der jederzeit über die Möglichkeit verfügt das Warnsystem auszu-schalten?



Lösung: $p_{\text{Alarm}}(\text{ungeplante Bodernnäherung}) =$
 $= \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 0,999}{5 \cdot 10^{-7} \cdot 0,999 + (1 - 5 \cdot 10^{-7}) \cdot 0,00002} = 0,0244 = 2,44\%$

Bei Alarm ist die Wahrscheinlichkeit für eine ungeplante Bodernnäherung zwar nur 2,44%; der Alarm muss trotzdem sehr ernst genommen werden!

27. Aufgaben zur Anwendung

Beim Roulette ist in den vergangenen zehn Spielen jedesmal eine rote Zahl gezogen worden. Auf welche Farbe würdest du im elften Spiel setzen? Begründe!

Lösung: Die Ergebnisse sind unabhängig, d. h. es ist egal auf welche Farbe man setzt.

28. Aufgaben zur Anwendung

Walter zinkt Würfel so, dass äußerlich keine Veränderung zu erkennen ist, die Wahrscheinlichkeit für „6“ aber 0,25 beträgt. Seine Frau Trude testet die Würfel folgendermaßen: Sie würfelt zwölfmal mit jedem Würfel. Wirft Sie mit einem Würfel mehr als dreimal eine „6“, so legt sie ihn zu den gezinkten, sonst zu den idealen.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein idealer Würfel zu den gezinkten gelegt wird?

- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gezinkter Würfel zu den idealen gelegt wird?
- (c) Wie könnte Trude die Fehlerquote verringern?



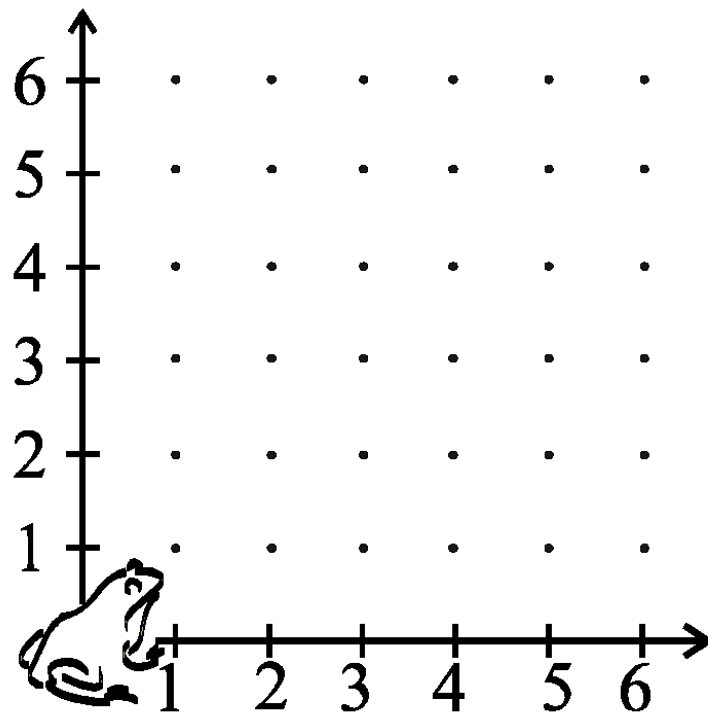
Lösung: (a) $n = 12$; $p_{\frac{1}{6}}(Z > 3) = 1 - \sum_{i=0}^3 B(12, \frac{1}{6}, i) = 0,87482191 \approx 87,5\%$
 (b) $n = 12$; $p_{0,25}(Z \leq 3) = \sum_{i=0}^3 B(12, 0,25, i) = 0,64877 \approx 64,9\%$

29. Aufgaben zur Anwendung

Ein Ko-Frosch sitzt auf einem Gitterpunkt eines Koordinatensystems und kann jeweils nur zum nächsten Gitterpunkt nach oben oder nach rechts springen und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$.

Beispiel: Befindet sich der Ko-Frosch auf dem Gitterpunkt $(4|3)$, dann kann er nur nach $(4|4)$ oder $(5|3)$ springen.

- (a) Der Ko-Frosch sitzt auf dem Gitterpunkt $(0|0)$.
- Auf welchen Gitterpunkten kann er sich nach 5 Sprüngen befinden?
 - Wie viele Sprünge benötigt er, um den Gitterpunkt $(18|17)$ zu erreichen?
 - Denk dir weitere zwei weitere Fragen aus und beantworte sie.
- (b) Der Ko-Frosch sitzt auf dem Gitterpunkt $(0|0)$ des Koordinatensystems und kann jeweils nur zum nächsten Gitterpunkt nach oben oder nach rechts springen und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er den Gitterpunkt $(4|0)$, den Gitterpunkt $(8|1)$, den Gitterpunkt $(2|2)$?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzt er nach 20 Sprüngen nicht auf einer Koordinatenachse?
 - Denk dir weitere zwei weitere Fragen aus und beantworte sie.



- Lösung:*
- (a) i. Bedingung $x + 5 = 5$, also $(0|5)$, $(1|4)$, $(2|3)$, $(3|2)$, $(4|1)$, $(5|0)$
 - ii. $18 + 17 = 35$
 - (b) i. $p((4|0)) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 6,25\%$, $p((8|1)) = 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 1,76\%$, $p((2|2)) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 18,8\%$
 - ii. $P_{\text{nichtaufKO-Achse}} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 99,9998\%$