

---

**SMART**

**Sammlung mathematischer Aufgaben  
als Hypertext mit T<sub>E</sub>X**

**Stochastik (SINUS-Transfer)**

---

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des  
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts  
der Universität Bayreuth\*

18. Mai 2006

\*Die Aufgaben stehen für private und unterrichtliche Zwecke zur Verfügung. Eine kommerzielle Nutzung bedarf der vorherigen Genehmigung.

# Inhaltsverzeichnis

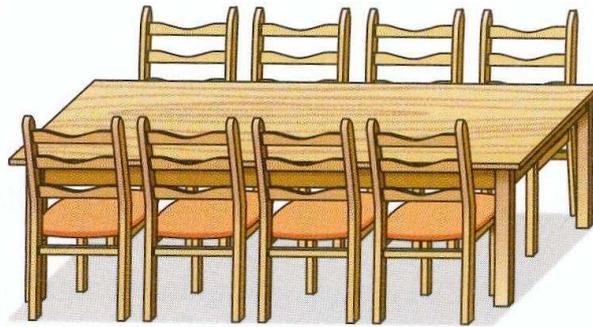
<b>1</b>	<b>Kombinatorik</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Diagramme, Statistiken</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Testverfahren</b>	<b>34</b>
<b>4</b>	<b>Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit</b>	<b>39</b>

# 1 Kombinatorik

## 1. Sitzordnung

An einem Tisch soll die Sitzverteilung für 4 Paare festgelegt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es

- (a) wenn die Paare sich gegenüber sitzen sollen?
- (b) wenn die Paare nebeneinander sitzen sollen?
- (c) bei einer beliebigen Anordnung?



## 2. CD-Player

Auf einer Audio-CD sind 13 Titel. Der Zufallsgenerator eines CD-Players wird eingestellt. Berechne, wie viele verschiedene Reihenfolgen der Songs möglich sind.



**3. In der Metzgerei**

Heute bietet die Metzgerei Schnarr 10 Sorten Wurst an. Hans soll 3 verschiedene Sorten Wurst einkaufen. Wie viel Möglichkeiten hat Hans?

**4. Leber- und Griebenwurst**

Wenn Hans Leberwurst kauft, dann erwirbt er auch Griebenwurst, denn dann kocht die Mutter Sauerkraut. Wie viele Warenkörbe gibt es für Hans?

**5. Bierschinken**

Heute hat die Metzgerei Schnarr sogar 57 Sorten Wurst im Angebot.

- (a) Wie viele Warenkörbe gibt es für Hans, wenn entweder gekochter Bierschinken oder aber gebackener Bierschinken dabei sein muss?
- (b) Hans bringt immer gekochten oder gebackenen Bierschinken mit nach Hause. Wie viele Warenkörbe gibt es für Hans?

**6. Wurst und Käse**

Heute bietet die Metzgerei Meyer an der Wursttheke 38 Sorten Wurst und an der Käsetheke 8 Sorten Käse an. Die Kunden kaufen erfahrungsgemäß zuerst Wurst und dann Käse.

- (a) Kathrin soll 3 Sorten Wurst und 2 Sorten Käse mitbringen. Wie viele Warenkörbe dieser Art gibt es?
- (b) Kathrin weiß es besser: „Käse ist für meinen Papa gesünder“, denkt sie und kauft 2 Sorten Wurst und 3 Sorten Käse. Wie viele Warenkörbe kann sie zusammenstellen?
- (c) Im Laden sieht Kathrin, dass die Theken zusammengestellt sind. Sie kauft fünf Sorten Lebensmittel in beliebiger Reihenfolge. Wie viele Warenkörbe sind möglich?
- (d) Kathrin kauft 2 Sorten Wurst und 3 Sorten Käse in beliebiger Reihenfolge. Wie viele Warenkörbe sind möglich?

**7. Frau Seidel**

In der Metzgerei Wagner gibt es 46 Sorten Wurst und 7 Sorten Käse. Frau Seidel ist der Meinung, sie könne  $\left(\frac{45 \cdot 44}{1 \cdot 2} \cdot 7 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right)$  Warenkörbe zusammenstellen. Welche Bedingungen stellt Frau Seidel an ihre Einkäufe? Erzähle eine Geschichte.

**8. Fußball-WM**

An der Fußball-WM nehmen 32 Nationen teil, die in acht Spielgruppen aufgeteilt werden. Wie viele mögliche Aufteilungen gibt es, wenn

## 1 Kombinatorik

- (a) die Gruppeneinteilung zufällig erfolgt,
- (b) vier bestimmte Mannschaften gesetzt werden (je Gruppe eine) und die restlichen Mannschaften zufällig auf die Gruppen verteilt werden,
- (c) die 16 Nationen in vier Kategorien zu je vier Mannschaften aufgeteilt werden (z.B. vier nord-, vier west-, vier ost- und vier südeuropäische Mannschaften) und in jede Gruppe aus jeder Kategorie je ein Vertreter gelost wird?



### 9. Geheimbotschaften

Lars und Tim Hendrik haben zusammen eine Geheimschrift ausgeknobelt. Sie ersetzen in einer Nachricht jeden Buchstaben durch einen anderen, der im Alphabet erst nach fünf weiteren Buchstaben folgt.

Damit die Mitteilungen schneller verschlüsselt und entschlüsselt werden können, haben beide ein Hilfsmittel zur Darstellung dieser Geheimschrift.

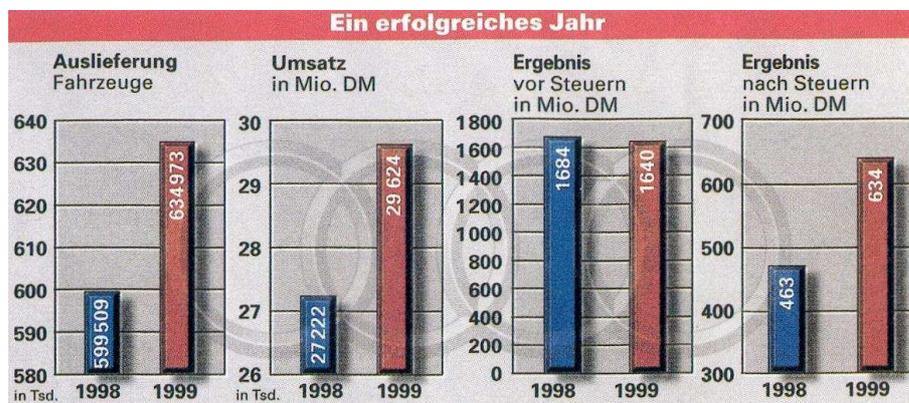
- a) Entwickle eine Darstellung, die dir als Schlüssel dienen kann.
- b) Entschlüssele folgenden Satz:  
JKX SGZKSGZOQATZKXXOINZ HXOTMZ YVGYY.
- c) Verschlüssele folgenden Satz:  
WAS HAST DU AM WOCHENENDE GEMACHT.
- d) Schreibe eine Antwort in Geheimschrift an deinen Nachbarn.
- \*e) Entwickle eine eigene Geheimschrift und schreibe eine Botschaft.
- \*f) Kannst du hier den Schlüssel bestimmen? Wenn ja, dann schreibe ihn auf.  
BYQ FYQR BS ESR ECKYAFR.

(\* Zusatzaufgabe)

## 2 Diagramme, Statistiken

### 1. Audi-Bilanz

Am Ende eines jeden Jahres erstellen Firmen eine Bilanz der Unternehmensergebnisse, um zu schauen, ob sie sich im Vergleich zum Vorjahr verbessert bzw. verschlechtert haben. Für die Öffentlichkeit und besonders für potentielle Aktienkäufer werden die Bilanzen besonders dargestellt. Die vier unten abgebildeten Balkendiagramme stellen die Jahresbilanz des Audikonzerns der Jahre 1998 und 1999 gegenüber.



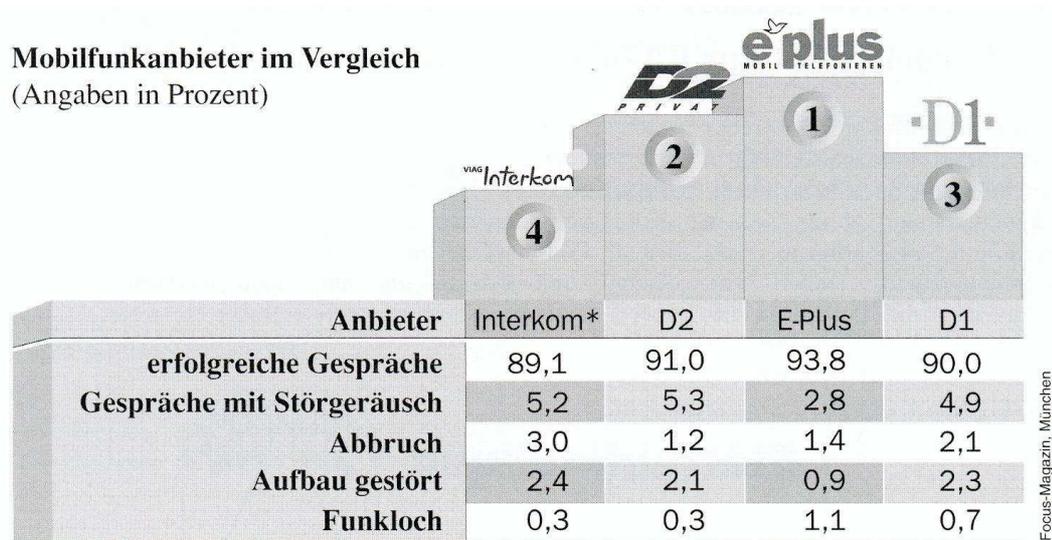
- Beschreibe, welchen Eindruck die Grafiken dem Betrachter beim ersten Anblick vermitteln und wodurch dies erreicht wird.
- Versuche, für die Daten eine andere Darstellungsart zu finden. Welchen Eindruck erhält man nun von der Jahresbilanz 1999 des Audikonzerns?
- Können die Ergebnisse des Audikonzerns auch besonders schlecht dargestellt werden?
- Was ist die richtige Darstellungsart der Jahresbilanz?

Quelle: mathematik lehren (2000) Heft 103, S. 67

Variation: Schüler suchen ähnliche Fälle in Printmedien

### 2. Telefonanbieter

Die Zeitschrift FOCUS (in der Ausgabe 45/99) fasst die Ergebnisse eines Testes von Mobilfunkanbietern in einer Grafik zusammen.



- Welcher Eindruck wird durch die Grafik erzielt?
- Sind die Prozentangaben angemessen veranschaulicht?
- Gestalte mit diesen Angaben jeweils eine Werbe-Anzeige für die vier Mobilfunkanbieter.

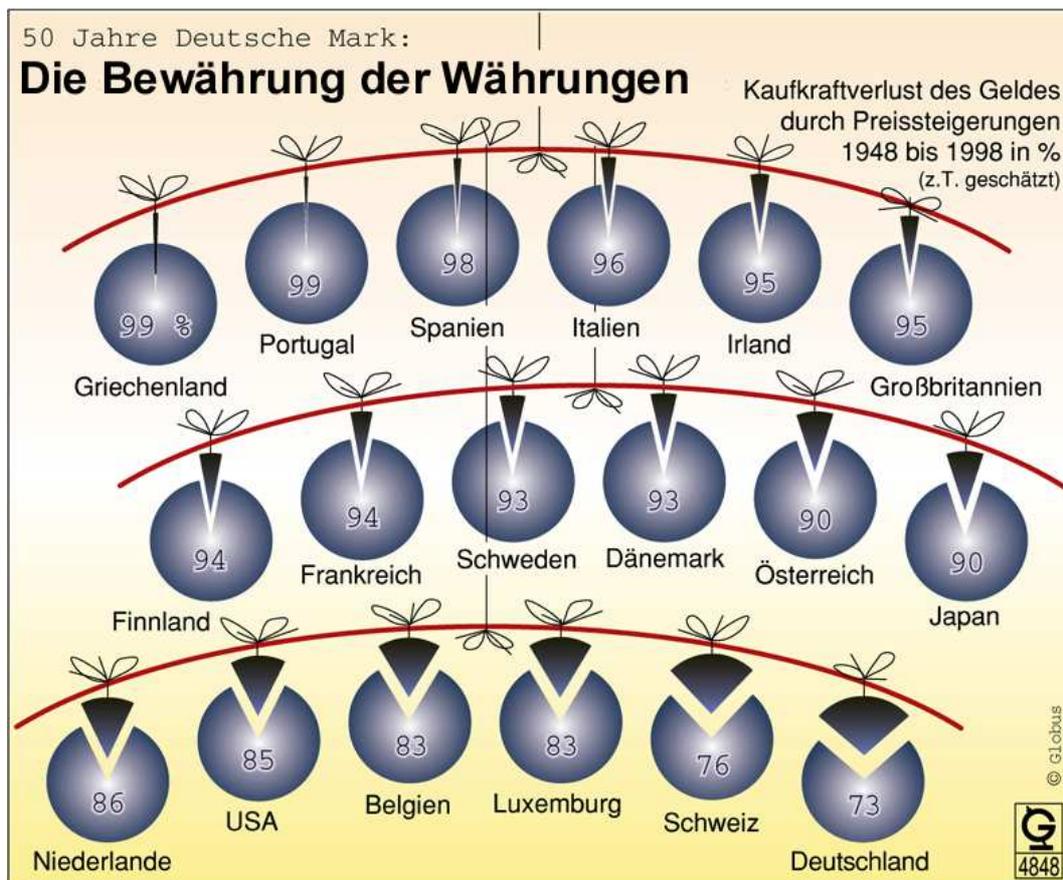
Quelle: Herget/Jahnke/Kroll: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, Berlin 2001, S. 84

Variation:

Vergleich von anderen arfen, graphische Darstellung

### 3. Der harte €

- Erläutere die Grafik!



- Berechne den durchschnittlichen jährlichen Kaufkraftverlust des Geldes für die einzelnen Länder!
- Nach wie vielen Jahren waren dementsprechend die einzelnen Währungen jeweils nur noch halb so viel wert?
- Finde einen Zusammenhang zwischen dem jährlichen Kaufkraftverlust und der Halbwertszeit des Geldes!

Quelle: Herget/Jahnke/Kroll: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, Berlin 2001, S. 88

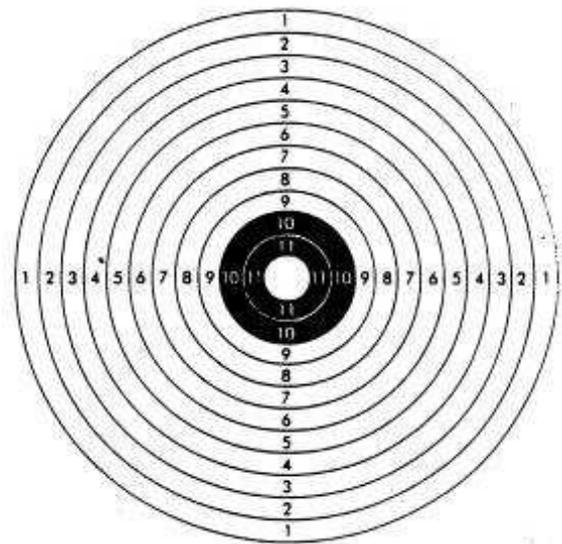
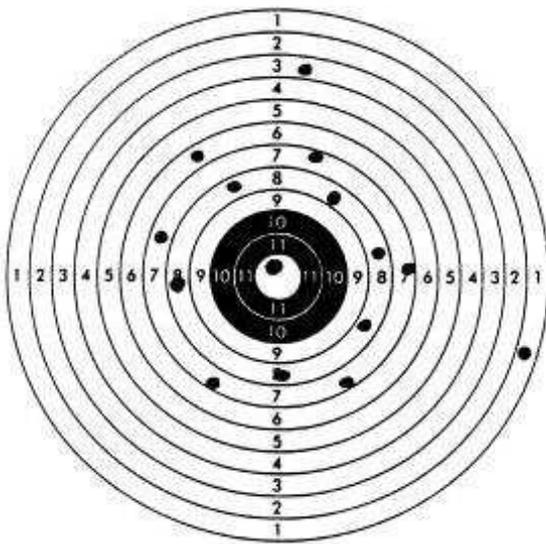
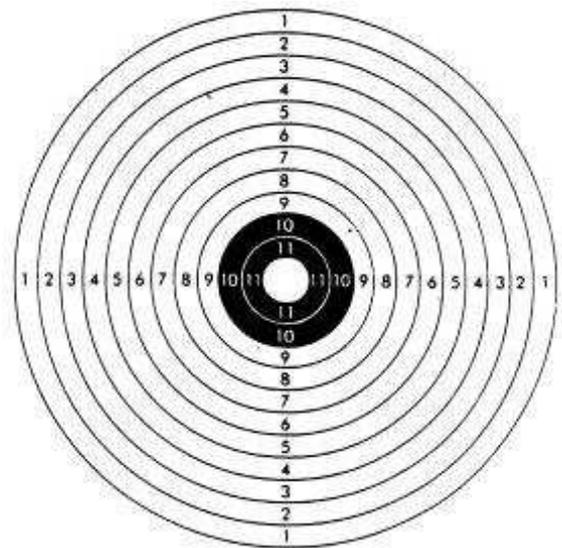
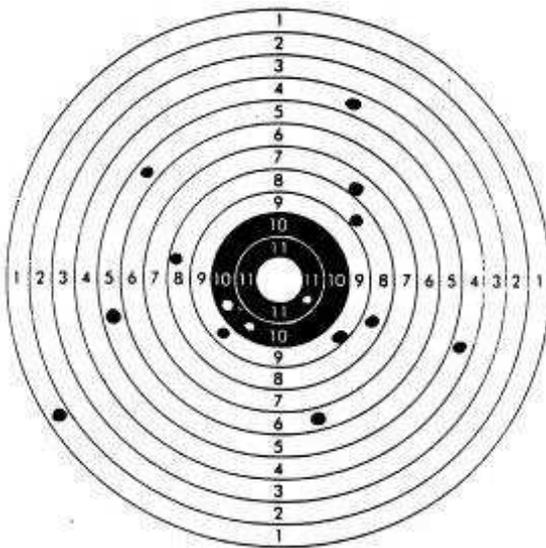
#### 4. Schützenverein

Zwei Schützen messen sich im Schießen mit dem Luftgewehr. Beide geben 15 Schuss auf eine Zielscheibe ab (siehe unten links).

- Welcher von beiden ist nach deiner Meinung der bessere Schütze? Begründe deine Antwort. Wie könnte man den Qualitätsunterschied messen?

## 2 Diagramme, Statistiken

- (b) Markiere auf den beiden Zielscheiben unten rechts die Einschüsse von zwei Schützen wie folgt: Bei beiden soll die Zahl der Schüsse 10 und die „Summe der Ringe“ 90 betragen, in einem Fall sollen aber die Schüsse möglichst weit über die Scheibe verteilt sein, im anderen sehr konzentriert.



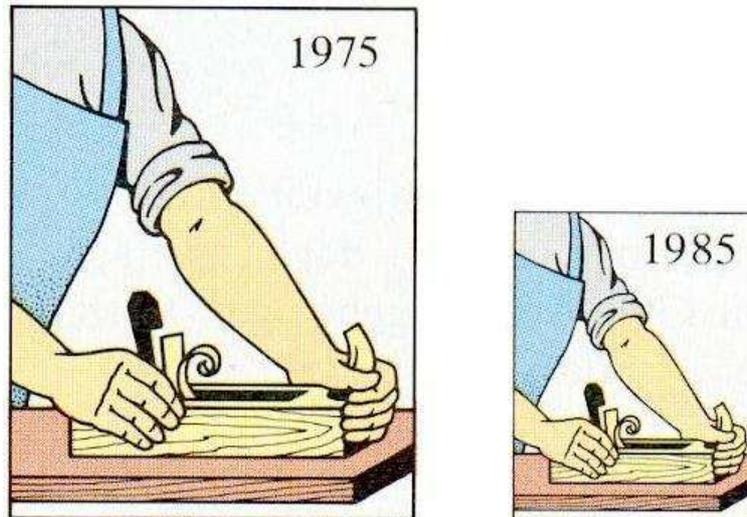
Quelle: Herget/Jahnke/Kroll: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, Berlin 2001, S. 85

Variation: Noten - arithm. Mittel vs. Median

5. Bildbetrug

In den Tageszeitungen findet man oft bildliche Darstellungen, in denen die Häufigkeiten flächenhaft oder körperhaft dargestellt werden. Diese Darstellungen können aber oft die Betrachter gewollt oder ungewollt irreführen.

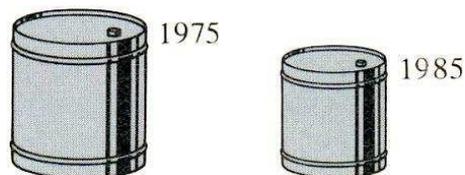
- (a) In einem Bezirk ist die Anzahl der Schreiner-/Tischler-Betriebe von 1975 bis 1985 auf 60% abgesunken.



In der nebenstehenden Abbildung ist die Länge der Seiten im rechten Bild 60% der Länge der Seiten im linken Bild. Gibt die Abbildung die Abnahme der Anzahl der Betriebe „richtig“ an?

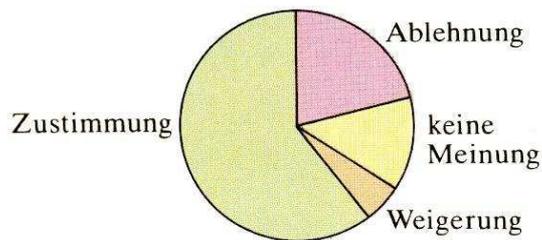
Welchen Eindruck hast du aufgrund der Abbildung?

- (b) Die Öleinfuhren der Bundesrepublik Deutschland betragen 1985 nur noch 80% der Einfuhren von 1975.



Rechts sind die Öleinfuhren durch jeweils zwei Fässer veranschaulicht worden. Die Fasshöhe und der Fassdurchmesser des kleinen Fasses sind in der oberen Abbildung jeweils 80% des größeren Fasses. In der unteren Abbildung ist der Fassinhalt auf 80% verringert. Nimm Stellung dazu!

- (c) Das Ergebnis einer Umfrage ist in einem Kreisdiagramm festgehalten worden (→).



Es kann auch durch sogenannte Piktogramme veranschaulicht werden (↓).



Welche Darstellungsart ist dem Problem angemessen? Welche Eindrücke werden durch die verschiedenen Darstellungsarten erweckt?

Quelle: Mathematik heute. Differenzierte Ausgabe (1988), S. 180

## 6. Neues aus Frankreich

Klar, die Zeiten vom Bundesberti sind lange vorbei. Aber damals in Frankreich hat er doch so etwas wie Kultstatus erreicht ...

Berti Vogts kann sich nicht entscheiden, welchen Spieler er Elfmeter für seine Nationalmannschaft schießen lässt. Eine Vorauswahl hat er schon getroffen. Für ihn kommen nur Jürgen Klinsmann, Olaf Thon, Lothar Matthäus, Andy Möller oder Thomas Häßler in Frage.

Um sicher zu gehen, den richtigen Spieler auszuwählen, lässt er seine Favoriten im

## 2 Diagramme, Statistiken

Training Elfmeter üben. Jedoch können nicht alle Spieler gleich oft schießen. Von seinem Torhüter bekommt er folgende Information:

Name	Tore	Verschoss. Elfmeter	Anzahl Versuche	Rel. Trefferhäufigkeit
Klinsmann	24	16		
Häßler	21	9		
Matthäus	10	5		
Möller	25	15		
Thon	18	7		

- (a) Fülle die Tabelle weiter aus !  
(b) Welchen Spieler wird Berti Vogts im Spiel Elfmeter schießen lassen? Warum?

Dieter Hamann ist enttäuscht, dass er für Berti Vogts nicht in Frage kam. Er legt sich den Ball auf den Elfmeterpunkt und schießt. Er trifft!

- (c) Sollte Berti Vogts Dieter Hamann schießen lassen?  
Begründe Deine Antwort!

Thomas Häßler ist nach dem Training verärgert, weil er sehr gerne die Elfmeter für Deutschland schießen würde. Er sagte in einem Interview: „... Hätte ich die beiden letzten Elfmeter nicht geschossen, hätte sich Herr Vogts wohl für mich entschieden ...“

- (d) Was sagst Du zu dieser Aussage?

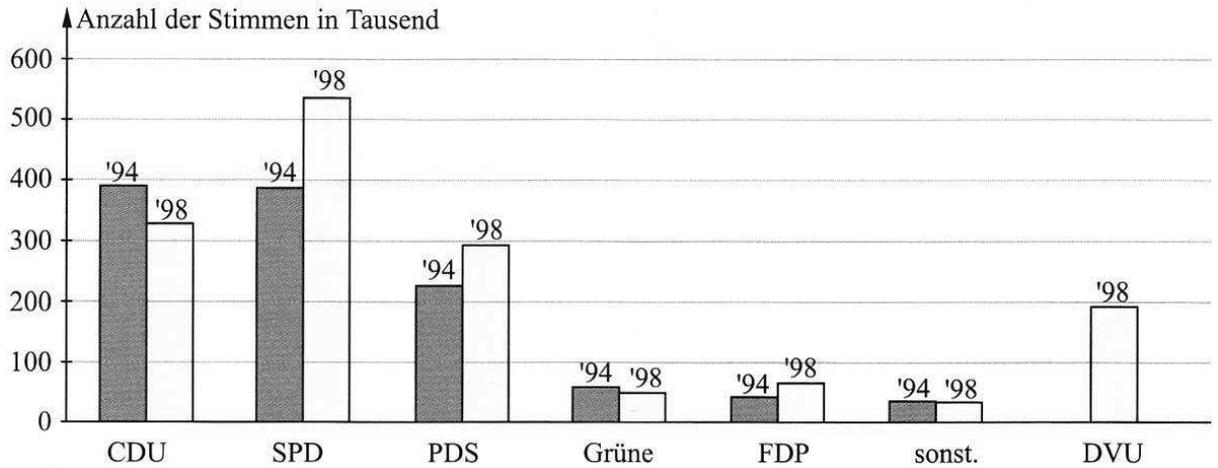
## 7. Wahlen

### Tabelle

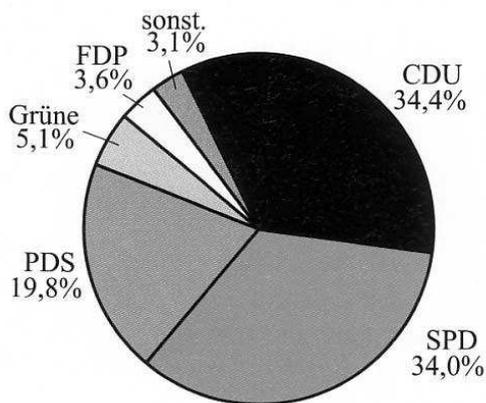
	Anzahl der Stimmen Wahl 1994	Anzahl der Stimmen Wahl 1998
CDU	391000	327000
SPD	387000	536000
PDS	225000	293000
Grüne	58000	48000
FDP	41000	64000
sonst.	35000	34000
DVU	0	192000

*Säulendiagramm*

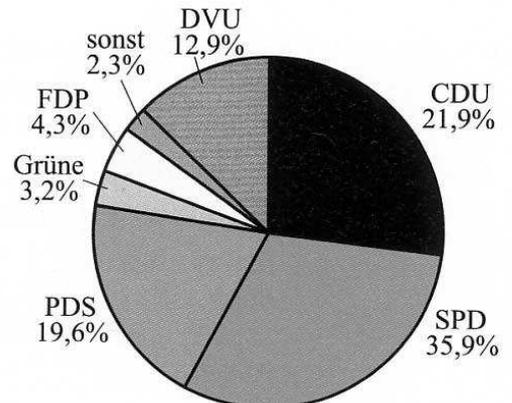
## 2 Diagramme, Statistiken



### Kreisdiagramm

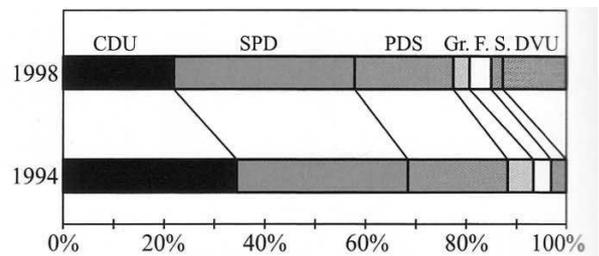
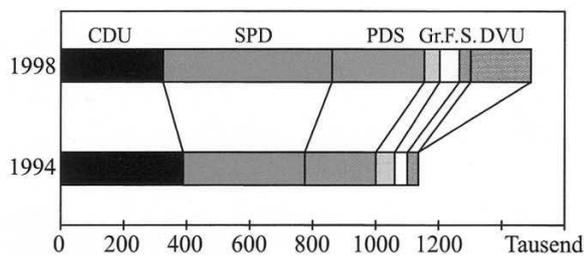


Stimmverteilung 1994



Stimmverteilung 1998

### Blockdiagramm



Hier sind die Ergebnisse der Landtagswahl in Sachsen-Anhalt im April 1998 auf verschiedene Weisen dargestellt.

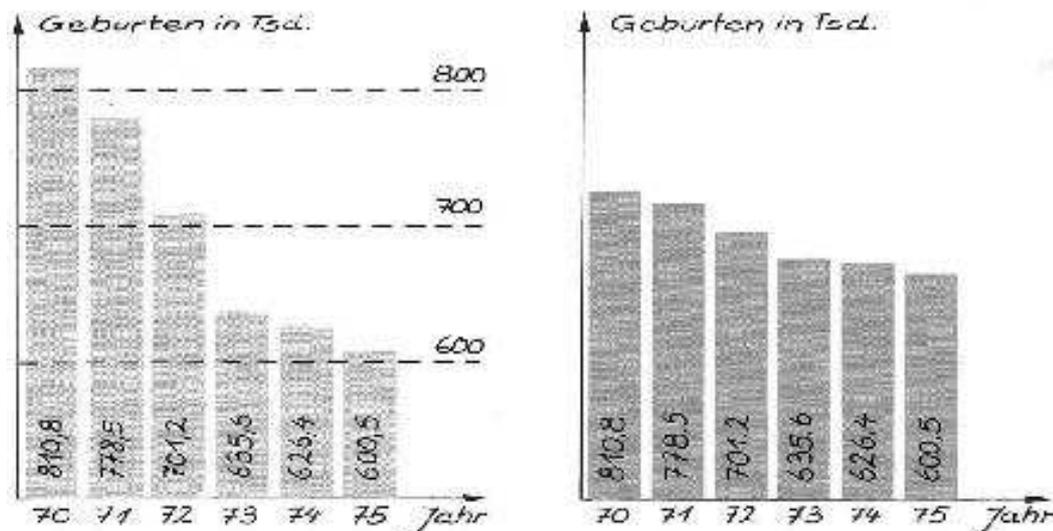
- (a) Beschreibt kurz, welche Informationen man jeweils aus den Abbildungen entnehmen kann.
- (b) Die Tabelle sei vorgegeben. Wie kann man daraus die anderen Darstellungsformen ableiten?
- (c) Vergleicht die verschiedenen Darstellungsformen miteinander.
- (d) Benennt jeweils auch Vor- und Nachteile.

Quelle: Elemente der Mathematik 11 (1999)

8. **Vorsicht Statistik! (1)**

Die beiden neben stehenden Säulendiagramme zeigen die Geburtenrate in Deutschland für die Zeit von 1970 bis 1975. Beide Tabellen stellen trotz ihres unterschiedlichen Aussehens den selben Sachverhalt dar.

- (a) Welchen unterschiedlichen Eindruck vermitteln die beiden Diagramme?
- (b) Welchen Vor- bzw. Nachteil haben sie?



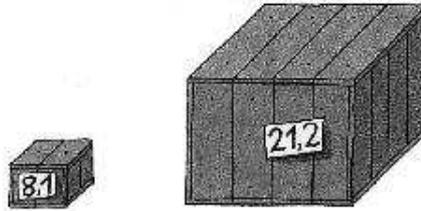
Quellen: Schnittpunkt 10; Elemente 11; mathematik lehren (2002), H. 102, S. 59

9. **Vorsicht Statistik! (2)**

Die Umweltschutzausgaben der Industrie für die Einrichtung und Unterhaltung von Anlagen stiegen innerhalb von 10 Jahren von 8,1 Mrd. € auf 21,2 Mrd. €.

## 2 Diagramme, Statistiken

- (a) Was ist an der Darstellung falsch? Welchen Eindruck soll die Manipulation bewirken?
- (b) Zeichne eine geeigneter Darstellung des Sachverhalts. Nenne Vor- bzw. Nachteile der verschiedenen Darstellungen.



### 10. Vorsicht Statistik! (3)

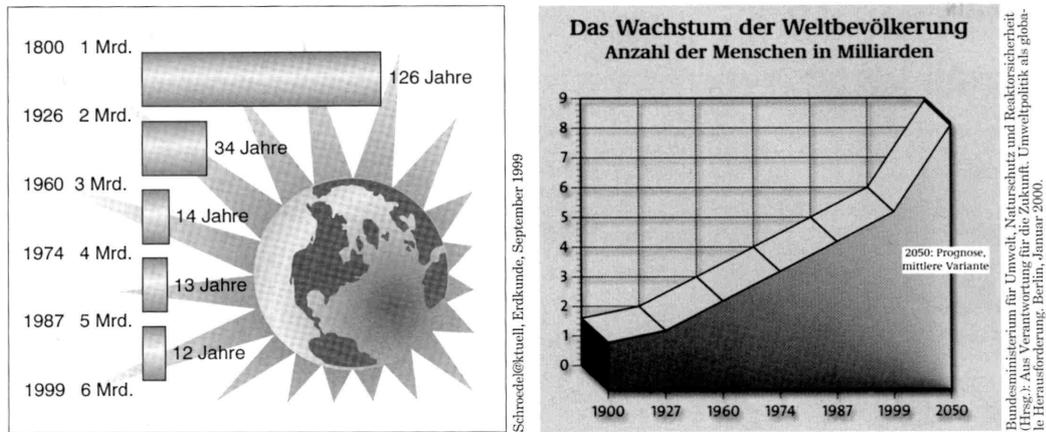
Die Grafik zeigt die Ergebnisse der Bundestagswahlen von 1949 bis 1998.

- (a) Welche Partei bekam 1970 die meisten Stimmen?
- (b) Nenne mögliche Gründe für diese Manipulation?



11. Vorsicht Statistik! (4)

Das Wachstum der Weltbevölkerung, sinnvoll und weniger sinnvoll dargestellt:

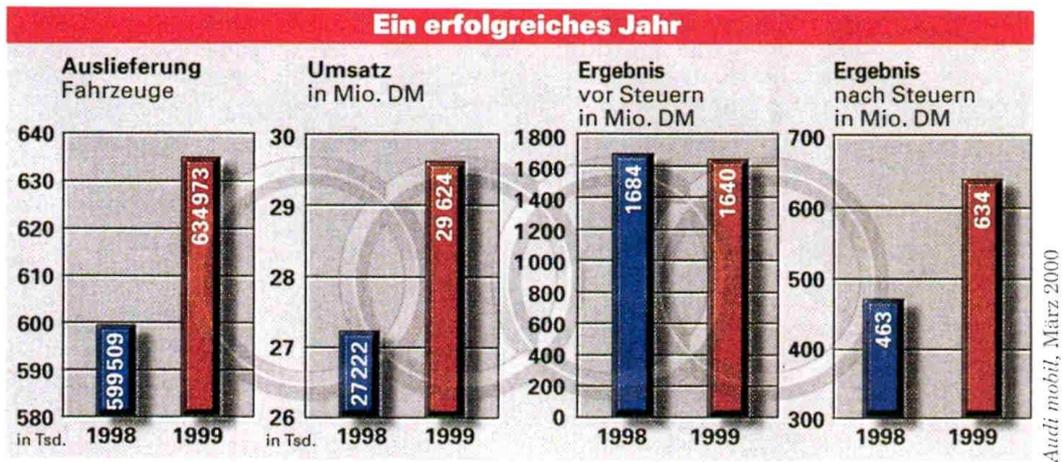


- (a) Untersuche die beiden Darstellungsformen. Nenne Vor- und Nachteile.
- (b) Zeichne eine geeignetere Darstellung des Sachverhalts.

12. Vorsicht Statistik! (5)

Fasse die unterschiedlichen Fehler bei der Aufbereitung und Darstellung statistischer Daten zusammen.

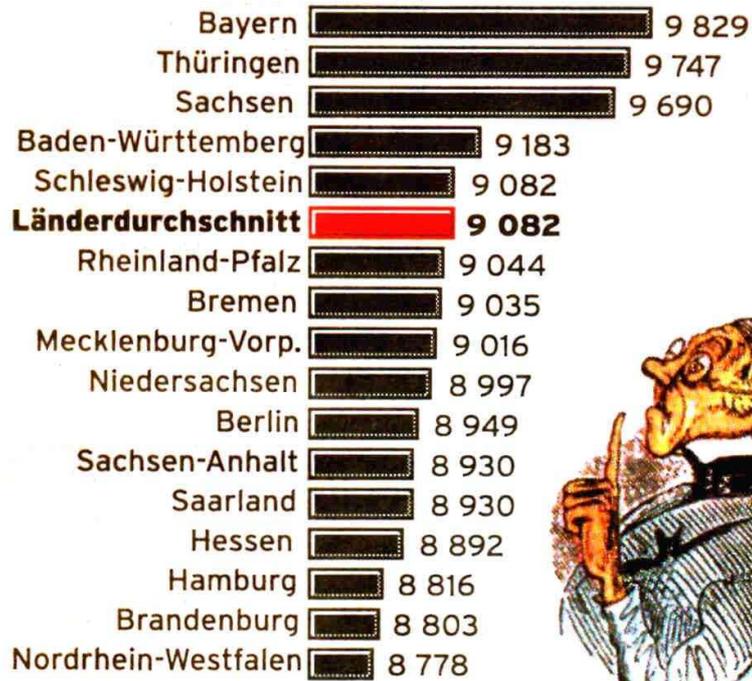
13. Mathematik aus der Zeitung



(a)

**BAYERISCHE SCHÜLER BÜFFELN AM MEISTEN**

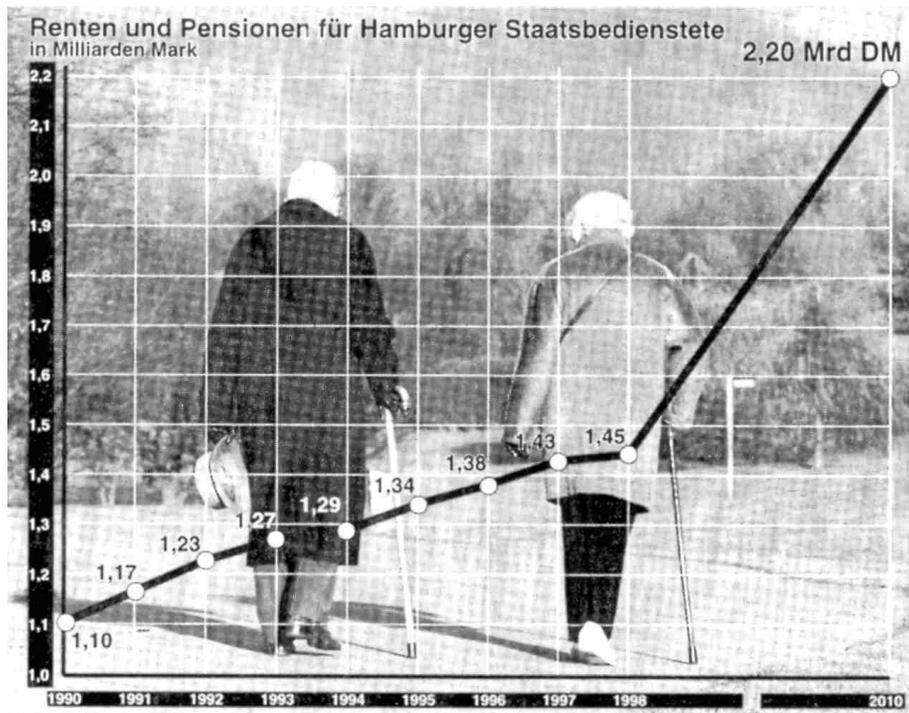
Zahl der Unterrichtsstunden insgesamt von Klasse 1 bis 9  
Durchschnitt, alle Schulformen



QUELLE: DPA 6387 / FRENCK/KLEMM 07.06.02

HNA

(b)

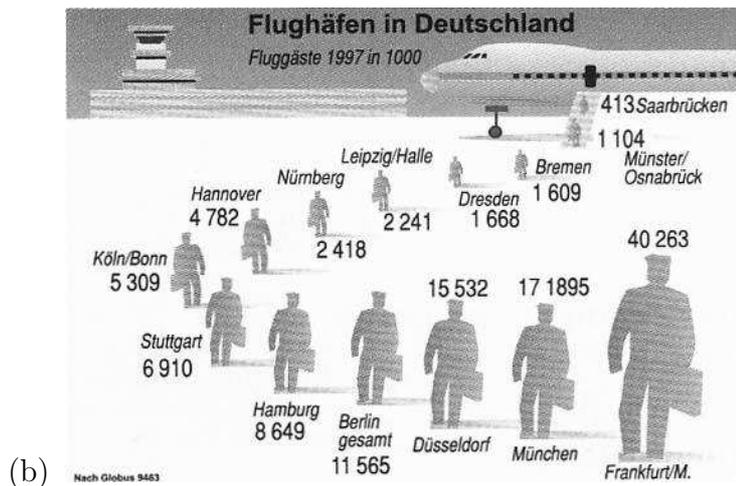
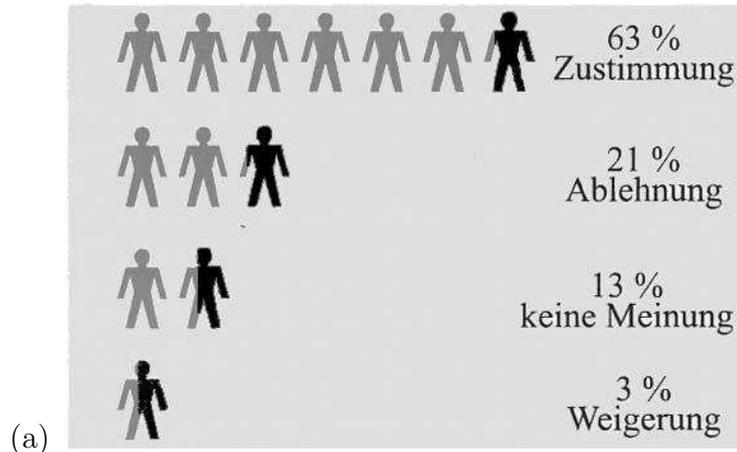


(c)

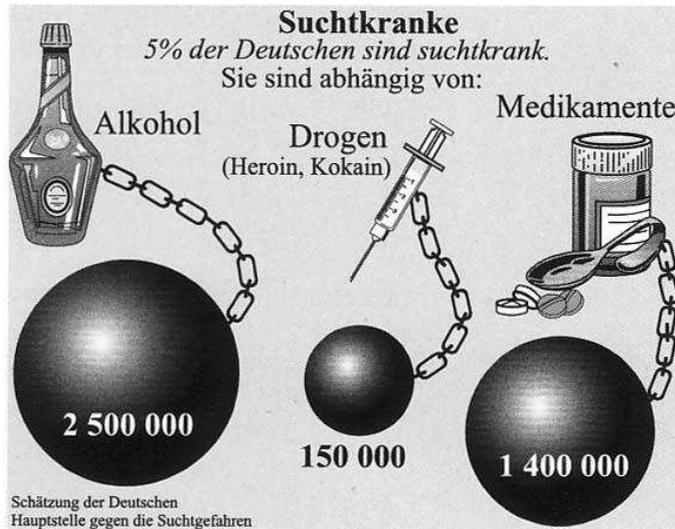
Erläutere, was durch die oben abgebildeten Grafiken ausgedrückt werden soll. Ist die Darstellungsform jeweils angemessen?

14. Piktogramme

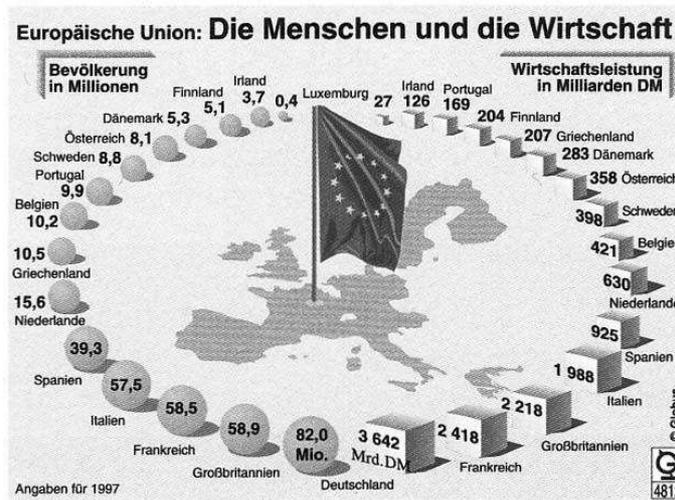
Zur Darstellung von Häufigkeiten werden oft so genannte Piktogramme verwendet, die mithilfe von Symbolen die betrachteten Größen veranschaulichen sollen.



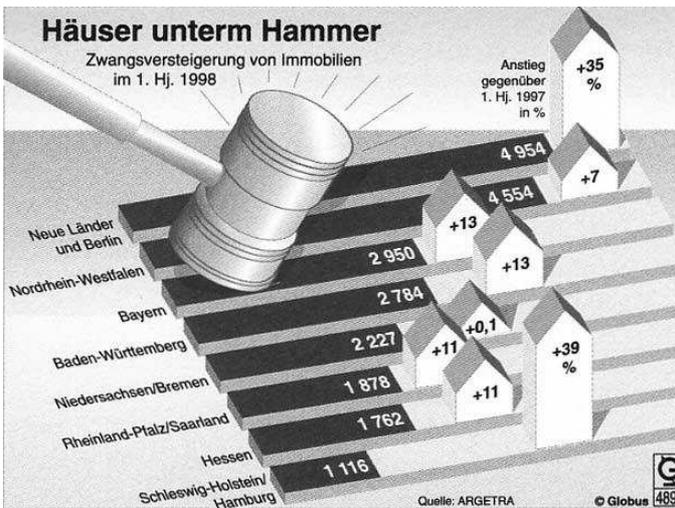
2 Diagramme, Statistiken



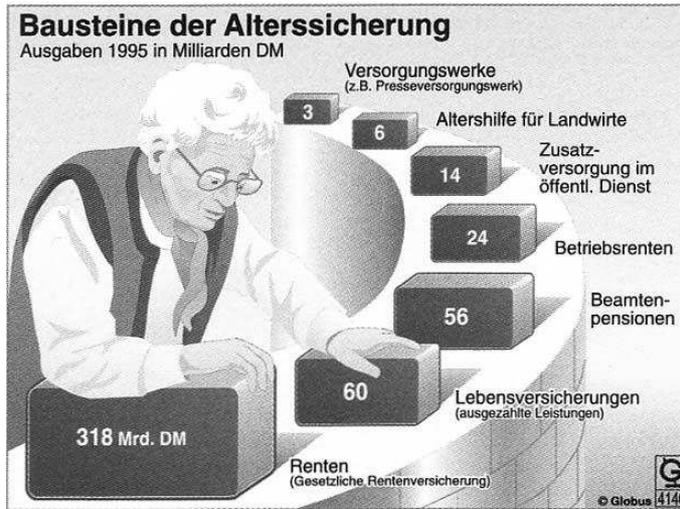
(c)



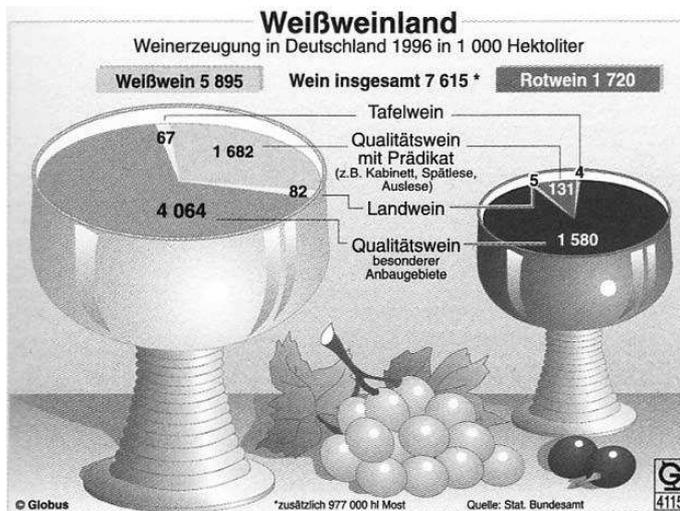
(d)



(e)



(f)



(g)



(h)

Erläutere, was durch die oben abgebildeten Piktogramme ausgedrückt werden soll. Ist die Darstellungsform jeweils angemessen?

Quelle: Elemente 11 (1999)

15. Gleichberechtigung der Frauen?

Frauenrechtlerinnen betonen:

„Obwohl Frauen und Männer nach dem Gesetz gleichberechtigt sind, werden Frauen immer noch in vielen Bereichen benachteiligt.“

Lässt sich diese Aussage mithilfe der folgenden Daten bestätigen oder widerlegen?

<b>Aus einer Bevölkerungsstatistik</b>		
	<b>Gesamt</b>	<b>davon weiblich</b>
<b>Gesamtbevölkerung</b>	80 438 000	41 485 000
<b>Schulabgänger</b>	928 200	438 830
– ohne Abschluß	63 600	23 340
– mit Hauptschulabschluß	209 600	91 800
– mit Realschulabschluß	356 200	184 150
– mit Hochschulreife	298 800	139 540
<b>Studierende</b>	1 858 455	745 924
<b>Erwerbstätige</b>	34 660 000	13 583 000
<b>Arbeitslose</b>	2 142 000	1 153 000

Quelle: Mathematik heute 9 (1996)

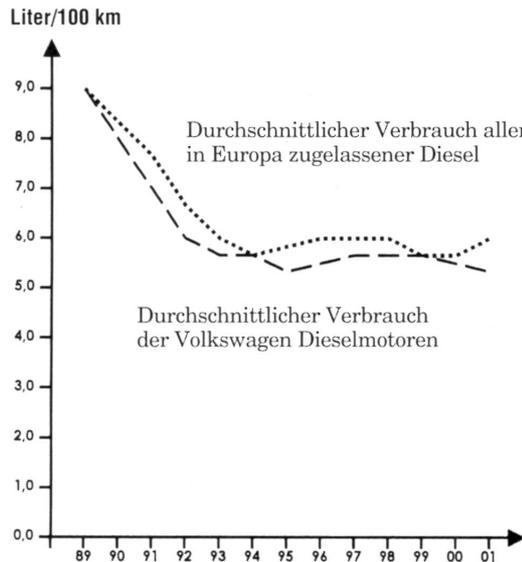
16. Die Zeitungsredaktion

## 2 Diagramme, Statistiken

Ihr seid Mitglieder einer Zeitungsredaktion und erhaltet die folgende Grafik.

Erstellt eine möglichst „griffige“ Schlagzeile und formuliert eine Kurzmeldung (nicht mehr als vier Sätze).

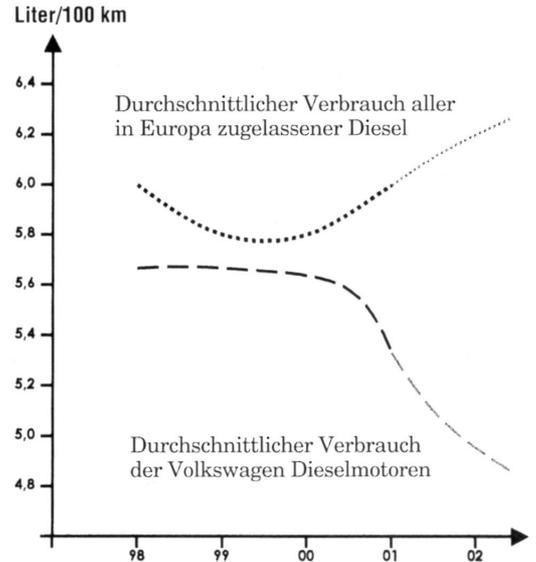
Zwei aus eurer Gruppe präsentieren eure Ergebnisse anschließend auf einer Redaktions-sitzung, bei der euer Vorschlag diskutiert wird.



Ihr seid Mitglieder einer Zeitungsredaktion und erhaltet die folgende Grafik.

Erstellt eine möglichst „griffige“ Schlagzeile und formuliert eine Kurzmeldung (nicht mehr als vier Sätze).

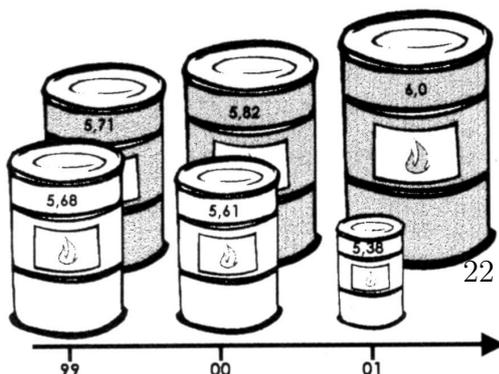
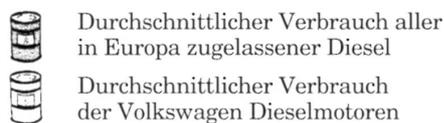
Zwei aus eurer Gruppe präsentieren eure Ergebnisse anschließend auf einer Redaktions-sitzung, bei der euer Vorschlag diskutiert wird.



Ihr seid Mitglieder einer Zeitungsredaktion und erhaltet die folgende Grafik.

Erstellt eine möglichst „griffige“ Schlagzeile und formuliert eine Kurzmeldung (nicht mehr als vier Sätze).

Zwei aus eurer Gruppe präsentieren eure Ergebnisse anschließend auf einer Redaktions-sitzung, bei der euer Vorschlag diskutiert wird.



Ihr seid Mitglieder einer Zeitungsredaktion und erhaltet die folgende Grafik.

Erstellt eine möglichst „griffige“ Schlagzeile und formuliert eine Kurzmeldung (nicht mehr als vier Sätze).

Zwei aus eurer Gruppe präsentieren eure Ergebnisse anschließend auf einer Redaktions-sitzung, bei der euer Vorschlag diskutiert wird.

	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01
Durchschnittlicher Verbrauch aller in Europa zugelassener Diesel	9.0	8.4	7.6	6.5	6.0	5.7	5.8	6.0	6.0	6.0	5.7	5.8	6.0
Durchschnittlicher Verbrauch der Volkswagen Dieselmotoren	9.0	7.9	7.0	6.0	5.8	5.7	5.3	5.5	5.6	5.6	5.6	5.6	5.3

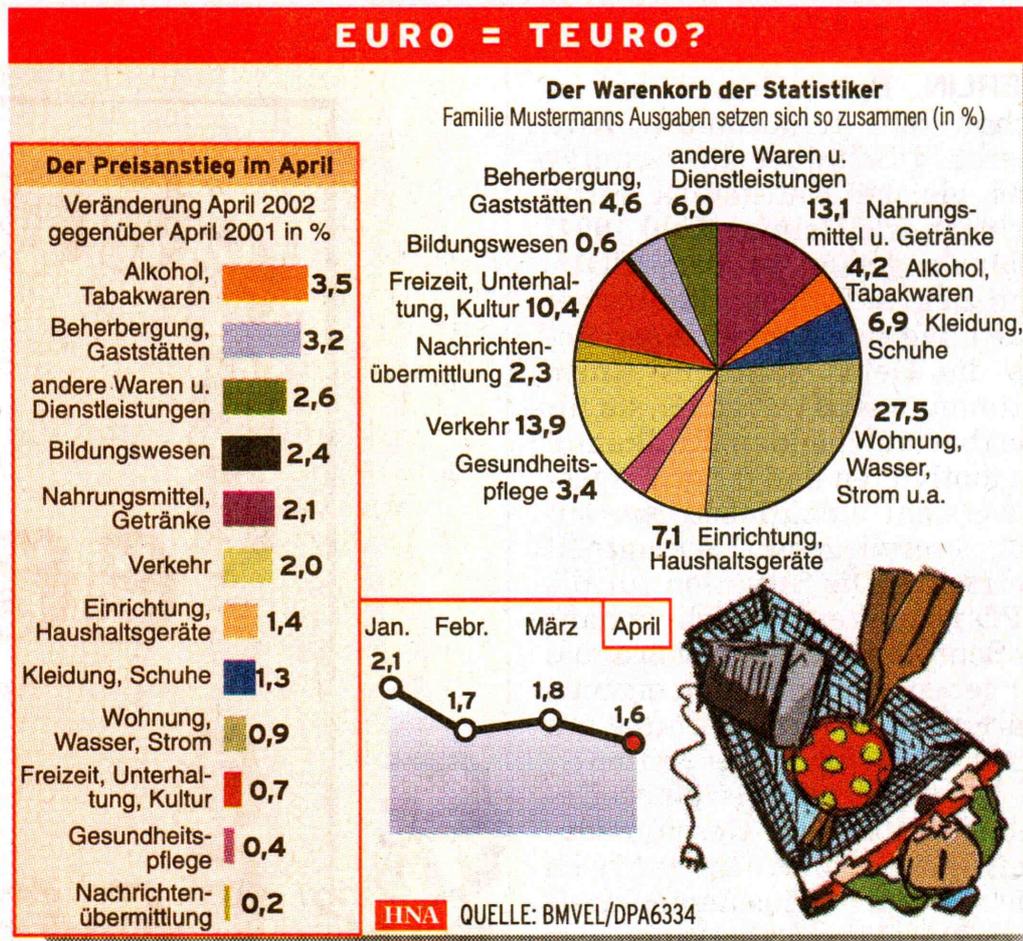
Quelle: mathematik lehren (2001), H. 109, S. 46-48

17. **Euro = Teuro?**

**INTERNET-FORUM ALS ERGEBNIS**

**Berlin.** Wie von vielen erwartet, ist der „Anti-Teuro-Gipfel“ der Bundesregierung ohne konkrete Maßnahmen zu Ende gegangen. Verbraucherministerin Renate Künast (Grüne), die die Veranstaltung ins Leben gerufen hatte, zeigte sich aber ebenso wie der Einzelhandel zufrieden. [...] Künast hatte den Gipfel nach wachsendem Unmut in der Bevölkerung über massive Preiserhöhungen im Zuge der Euro-Einführung ins Leben gerufen. [...] Eine klare Mehrheit der Bundesbürger ist der Meinung, dass die Regierung das Problem unterschätzt habe. In einer Umfrage für den Nachrichtensender *N24* erklärten 66 Prozent der Beteiligten, der Ratschlag, bei seriösen Händlern einzukaufen, sei zu wenig.

Eine weitere Studie ergab, dass vor allem Dienstleister die Euro-Umstellung zu drastischen Preiserhöhungen genutzt haben. Rund 80 Prozent aller geprüften Angebote seien teurer geworden, im Schnitt um knapp zehn Prozent, berichten die ARD-„Tagesthemen“. Bei Lebensmitteln sei eine durchschnittliche Preiserhöhung von 0,7 Prozent festgestellt worden. [...]



Wie kann es sein, dass so viele Menschen das Gefühl haben, dass alles durch den Euro wesentlich teurer geworden ist und sich dies trotzdem nicht in den Statistiken zeigt?

Quelle: HNA vom 1.6.02

### 18. Das Simpson-Paradoxon

	Potentio-Forte	Placebo		Potentio-Forte	Placebo
Patienten in Kassel	250	1050	Patienten in Bonn	1050	250
Wirksam bei ...	180 (72 %)	630 (60 %)	Wirksam bei ...	420 (40 %)	70 (28 %)

	Potentio-Forte	Placebo
Patienten in Kassel und Bonn	1300	1300
Wirksam bei ...	600 (46 %)	700 (54 %)

### Potentio-Forte wirkt kleine Wunder!

Neue Hoffnung für die Männerwelt: Potentio-Forte ist da. Die Wirksamkeit des neuen Wundermedikaments wurde in mehreren deutschen Städten eindrucksvoll bewiesen. In allen Teststädten half Potentio-Forte den Männern eindeutig besser als ein zu Vergleichszwecken eingesetztes Placebo.

Nimm Stellung zu den Angaben in dem Presstext!

Einer Universität wird ein geschlechterdiskriminierendes Annahmeverfahren vorgeworfen. Der Universitätspräsident ist auf das Höchste beunruhigt und fordert umgehend die Bewerbungszahlen der sechs größten Fachbereiche an.

Fachbereich	Bewerber	davon angenommen		Bewerberinnen	davon angenommen	
A	800	496		100	82	
B	600	378		25	17	
C	300	111		600	204	
D	400	132		400	140	
E	200	56		400	96	
F	400	24		300	21	
<b>Summe</b>						

- (a) Nimm unter Zuhilfenahme mathematischer Methoden zu der Frage Stellung, inwieweit der Universität ein geschlechterdiskriminierendes Annahmeverfahren vorgeworfen werden kann.

- (b) Schreibe auf der Basis der vorliegenden bzw. von ihnen errechneten Daten einen wahren (!) Zeitungsartikel. In diesem Artikel kannst du dich entweder um eine ausgewogene Darstellung des Sachverhalts bemühen, oder der Universität Geschlechterdiskriminierung vorwerfen und nur geeignete Daten anführen.

Quelle: mathematik lehren (2002), H. 110, S. 21

### 19. Vierfeldertafeln

Gegeben ist folgender Zeitungsartikel:

**Fahrstuhleffekt im Schulsystem**

*Eltern wünschen höheren Bildungsabschluss für Kinder*

37% aller 10– bis 16jährigen Kinder besuchen derzeit die Schulform Gymnasium. Jedoch nur 35% dieser Jugendlichen haben Eltern, die selbst zum Gymnasium gingen. Umgekehrt findet man unter den Schülerinnen und Schülern, die eine Haupt- oder Realschule besuchen, nur 8%, deren Eltern ein Gymnasium absolvierten.

- (a) Stellt die Informationen des Zeitungsartikels in einem zweistufigen Baum dar.  
 (b) Stellt eine Vierfeldertafel dazu auf.  
 (c) Entwickelt aus (b) das umgekehrte Baumdiagramm.  
 (d) Verfasst auf Grundlage der nun gewonnenen Daten einen Zeitungsartikel.

Quelle: PM 2/41 (1999)

### 20. Krebsfrüherkennung

Im Folgenden sind die Ergebnisse eines schwedischen Modellversuchs zur Krebsfrüherkennung durch Mammographie dargestellt:

	Vorliegen einer Krebserkrankung		gesamt	
	ja	nein		
Untersuchungs-Ergebnis	auffällig	0,75%	2,62%	3,37%
	ohne Befund	0,07%	6,56%	96,63%
gesamt		0,82%	99,18%	100%

- (a) Welche Informationen kann man aus diesen Daten entnehmen?

- (b) Stellt dazu auch die entsprechenden Bäume erster und zweiter Art auf.
- (c) Versucht mithilfe dieser Resultate Außenstehende über die mathematischen Hintergründe einer solchen Vorsorgeuntersuchung zu informieren. Erstellt ein entsprechendes Wandplakat.

Quelle: PM 6/42 (2000)

21. AIDS

**Material 1.1: Aids in der Bundesrepublik Deutschland**  
 In den Quartalen I/98 und II/98 in das Fallregister aufgenommene Berichte über AIDS-Patienten

	Quartal	
	I/98	II/98
<b>Berichte insgesamt:</b>	<b>463</b>	<b>502</b>
Erstberichte	239	213
davon Berichte mit Todesmeldungen	36	20
Berichte mit zusätzlichen Informationen für bereits bekannte Fälle	224	289
davon Berichte mit Todesmeldungen	162	243

aus: Quartalsbericht III/98 des Robert-Koch-Instituts, Berlin (vgl. auch [www.rki.de](http://www.rki.de))

**Material 1.2.:** Zahl der gemeldeten AIDS-Fälle nach Geschlecht sowie der gemeldeten Todesfälle nach Bundesländern bzw. ausgewählten Großräumen und aufgeführten Zeiträumen der Registrierung

Bundesländer/ Großräume	Zeitraum der Registrierung							Verstorben gemeldet
	Quart. II/98	1. 7. 97–30. 06. 98			Gesamt			
	Ges.	Ges.	Männl.	Weibl.	Ges.	Männl.	Weibl.	
Baden-Württemberg	18	80	65	15	1431	1139	292	830
Bayern (ohne M)	16	73	56	17	989	835	154	611
München (M)	7	115	102	13	1602	1481	121	1070
Berlin (West)	27	126	113	13	3325	3028	297	2406
Berlin (Ost)	7	27	26	1	202	186	16	96
Brandenburg	2	5	2	3	36	26	10	16
Bremen	0	64	50	14	254	215	39	115
Hamburg	13	89	77	12	1632	1514	118	1056
Hessen (ohne F)	13	36	26	10	866	750	116	559
Frankfurt/Main (F)	12	37	30	7	1153	1039	114	819
Mecklenburg- Vorpommern	1	3	3	0	26	25	1	14
Niedersachsen	14	68	53	15	918	793	125	622
NRW (ohne K/D)	42	217	181	36	2431	2112	319	1389
Köln (K)	13	78	71	7	884	819	65	668
Düsseldorf (D)	2	10	9	1	547	503	44	346
Rheinland-Pfalz	4	20	15	5	522	432	90	328
Saarland	4	11	20	1	178	150	28	117
Sachsen	1	5	4	1	35	31	4	15
Sachsen-Anhalt	4	8	6	2	24	22	2	9
Schleswig-Holstein	12	36	33	3	420	383	37	266
Thüringen	1	2	2	0	15	12	3	8
Gesamt	213 100%	1110 100%	934 84,1%	176 15,9%	17490 100%	15495 88,6%	1995 11,4%	11360 65,0%

**Material 1.3.:** Verteilung der gemeldeten AIDS-Fälle nach Bundesländern, Großstädten über 100.000 Einwohner bzw. ausgewählten Großräumen sowie nach Infektionsrisiko

	Infektionsrisiko							Ge- samt	Als verst. gemel- det
	Homo/ bi	IVDA	Hämo/ Trans	Hete- ro	Pat- tern II	PPI	k. A.		
Nordrhein-Westf.	2526	523	220	215	117	24	237	3862	2403
Köln	703	56	22	30	18	1	54	884	668
Düsseldorf	428	42	17	25	9	2	24	547	346
Ruhrgeb.-West	78	37	12	10	7	3	6	153	109
Ruhrgeb.-Mitte	199	67	22	17	9	4	22	340	175
Ruhrgeb.-Ost	192	83	20 28	14	7	0	20	336	168
Ruhrgeb.-SO	37	17	8	3	2	2	3	72	35
Wuppertal	63	10	8	7	2	3	9	102	64
Bielefeld	51	17	3	4	0	1	3	79	51
Bonn	77	15	13	10	11	1	10	137	62
Mönchen- gladbach	29	4	3	5	0	0	2	43	31

**Material 1.4:** Bei Infektionskrankheiten ist es wichtig, dass man schnell die Art der Krankheit erkennt, damit man sie bekämpfen kann. Hierzu führt man Schnelltests durch, die allerdings Mängel haben: Manchmal wird eine Krankheit angezeigt, obwohl sie nicht vorliegt, gelegentlich wird eine Krankheit nicht angezeigt, obwohl sie vorhanden ist.

Bei der HIV-Diagnostik sind die Empfindlichkeit (*Sensitivität*) des Tests, vor allem aber die Zuverlässigkeit positiver Testergebnisse (*Spezifität*) von besonderer Bedeutung.

Die vorliegenden Testverfahren zum Nachweis der Infektion haben mittlerweile eine hohe Sicherheit (Sensitivität): Bei 99,9 % der tatsächlich Infizierten erfolgt positive Testreaktion, nur bei 0,3 % der nicht-infizierten Testpersonen wird irrtümlich eine Infektion angezeigt (Spezifität 99,7 %).

aus Strick (1998)

Formuliert in eurer Gruppe mindestens vier sinnvolle (statistische) Fragen, die mit Hilfe des zur Verfügung stehenden Datenmaterials untersucht werden können. Versucht diese Fragen zu beantworten.

Bereitet euch auch auf die Präsentation der Lösungen vor. Quelle: mathematik lehren (2001), H. 104, S. 62-66

## 22. BSE

BSE

### Blindflug ins Hirn

Im Rinderwahn gehen auch die letzten Sicherheiten zu Grunde:  
Der meistbenutzte Schnelltest hat eine BSE-Kuh nicht erkannt.

Kaum hat die neue Landwirtschaftsministerin Renate Künast vergangene Woche mehr Tests angekündigt, richtet sich der massivste Verdacht ausgerechnet gegen den Schnelltest "Platelia BSE", nach Herstellerangaben Deutschlands meistverwendetes Hilfsmittel für die Fahndung nach der Rinderseuche.

Schon mehrfach hat der Test der Firma Bio-Rad (...) gepatzt, als er bei gesunden Rindern BSE ortete. Jedes Mal musste das nationale BSE-Referenzzentrum, die Bundesforschungsanstalt für Viruskrankheiten in Tübingen, den Spuk auflösen. Forscher stöhnen dort mittlerweile schon über die Welle von Fehlmeldungen; die „falsch-positiven“ Fälle lähmten den Testapparat bei der Enttarnung des Erregers.

Auch für die betroffenen Bauern hatten die Scheintreffer Folgen: Ihre Bestände wurden bis zur Entwarnung gesperrt. Doch bisher konnte wenigstens der Verbraucher beruhigt sein – besser eine Meldung zu viel als eine zu wenig.



Jetzt aber steht der Bio-Rad-Test erstmals im Verdacht, eine BSE-Kuh nicht erkannt zu haben, ein Fall, der das Vertrauen in den gesamten Testapparat erschüttert. Erst recht, weil sich am gleichen Material später auch noch der Test des einzigen Bio-Rad-Konkurrenten in Deutschland, Prionics, vergeblich versuchte.

(aus: DER SPIEGEL, 04/2001)

- (a) Recherchiert, was man unter BSE und nCJK versteht. Tragt Informationen zusammen, was zum Ausbruch und zur Verbreitung von BSE geführt hat. Forscht im Internet nach aktuellem Zahlenmaterial aus europäischen Staaten.
- (b) Wie würdet ihr die Sicherheit des erwähnten Tests beschreiben? Wie wirkt sich der Fehler des Tests auf die betroffenen Bauern und Verbraucher aus?
- (c) Tragt Informationen zusammen, was zum Ausbruch und zur Verbreitung von BSE geführt hat. Forscht im Internet nach aktuellem Zahlenmaterial aus europäischen Staaten.
- (d) In der Bundesrepublik wurden in den Jahren um 2000 jährlich etwa 480000 Rinder geschlachtet. Die Verbraucherschutzministerin Renate Künast hat im Jahr 2001 angegeben, „dass in diesem Jahr 500 BSE-Fälle erwartet werden“. Alle geschlachteten Rinder werden mit einem Schnelltest untersucht. Dieser Schnelltest identifiziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% die erkrankten Rinder korrekt, er gibt aber auch in 3% der Fälle gesunde Rinder als BSE-erkrankt aus.  
Bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rind, das positiv getestet wurde, auch wirklich krank ist.
- (e) Da Schnelltests nicht absolut sicher sind, treten immer Fehler auf. Wie wirken sich die Fehler aus, wenn der Anteil der BSE-Erkrankungen ansteigt?

Quelle: MatheNetz 9 (2001)

### 23. Arbeitszeit

In vielen Berufsfeldern gelten Vereinbarungen zwischen Arbeitgeberverbänden und Gewerkschaften hinsichtlich der Arbeitszeit der Arbeitnehmer. Berechne die mittlere Wochenarbeitszeit aus den Daten der nebenstehenden Tabelle.

Tarifliche Arbeitszeit in Stunden	Anteil der Arbeitnehmerschaft
35	22%
36	1%
37	25%
38	33%
39	16%
40	3%

24. **Zentralwerte**

Der Zentralwert teilt eine Rangliste in zwei Hälften, die untere und obere Hälfte. Das untere Quantil bzw. das obere Quantil ist im Allgemeinen jedoch nicht der Zentralwert der unteren bzw. oberen Hälfte. Zeige dies an einem Beispiel.

Der Zentralwert ist auch der Zentralwert der zentralen Hälfte. Zeige dies mithilfe von Beispielen. Du musst vier Fälle unterscheiden.

25. **Normalverteilung**

Viele statistischer Erhebungen, vor allem im biologischen Bereich, haben die Eigenschaft, dass die meisten Ausfallswerte relativ nah beim Mittelwert liegen. So gibt es z.B. nur wenige sehr große oder sehr kleine Menschen. Genauere Untersuchungen zeigen, dass in solchen Fällen etwa  $\frac{1}{3}$  aller Ausfälle zwischen  $(m - s)$  und  $(m + s)$  liegen [ $m$  - Mittelwert,  $s$  - Standardabweichung]. Im Bereich  $(m - 2 \cdot s)$  und  $(m + 2 \cdot s)$  liegen sogar 95,4%. Liegt eine solche Häufigkeitsverteilung annähernd vor, so spricht man in der Statistik von einer **Normalverteilung**.

Prüfe, ob es sich bei den nebenstehenden statistischen Erhebungen um Normalverteilungen handelt. Falls keine Normalverteilung vorliegt, begründe dies auch inhaltlich.



Gewicht von Mäusen

in g	Häufigk.
10	1
11	0
12	1
13	0
14	2
15	1
16	1
17	3
18	5
19	7
20	8
21	6
22	3
23	4
24	3
25	2
26	1
27	0
28	1
29	1

Zahl der Druckfehler pro Seite

Anzahl	Häufigk.
0	49
1	20
2	5
3	4
4	1
5	0
6	1

Wurf mit drei Würfeln

Augenzahl	Häufigk.
3	4
4	17
5	28
6	52
7	79
8	109
9	131
10	132
11	135
12	122
13	107
14	74
15	49
16	32
17	13
18	6

Zufallszahlen

Zahl	Häufigk.
0	11
1	10
2	8
3	10
4	12
5	9
6	10
7	13
8	9
9	8

26. Wahr oder falsch?

Überprüfe ob die beiden folgenden Aussagen gelten:

- (a) Wird zu allen Ausfallwerten einer statistischen Erhebung eine feste Zahl  $z$  addiert, so ändern sich die Spannweite und die mittlere Abweichung nicht, der Mittelwert hingegen wird um  $z$  größer.
- (b) Werden alle Ausfallwerte einer statistischen Erhebung mit  $z > 0$  multipliziert, so werden Spannweite, Mittelwert und mittlere Abweichung  $z$ -mal so groß.

27. **Kennwerte**

Bilde zwei unterschiedliche Ranglisten, bei denen alle Kennwerte (Spannweite, Mittelwert, Zentralwert, unteres und oberes Quantil) gleich groß sind. Was kannst du aus dem Beispiel folgern?

# 3 Testverfahren

## 1. Pepsi vs. Coca-Cola

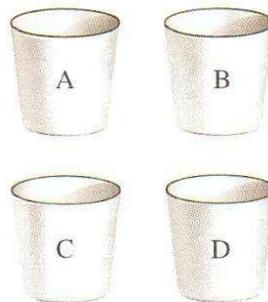
Über Geschmack lässt sich bekanntermaßen streiten. Häufig stellt sich nämlich die Frage, ob der Unterschied zwischen zwei Produkten überhaupt feststellbar ist. Einer der wohl bekanntesten Tests diesbezüglich ist der sogenannte Pepsitest. Bei diesem versucht man herauszufinden, ob sich in einem Becher Pepsi oder eine andere Cola befindet. Dieser Test soll im Folgenden unter Berücksichtigung mathematischer Aspekte durchgeführt werden.



**Schritt 1:** Bestimmt einen Versuchsleiter (Schüler oder Lehrer).

**Schritt 2:** Der Versuchsleiter füllt - von der Klasse unbeobachtet - der Reihe nach vier beschriftete Becher  $A, B, C, D$  je nach Ausfall eines Münzwurfs mit Pepsi oder Coca-Cola.

Vorschrift: Zahl  $\sim$  Pepsi / Wappen  $\sim$  Coca-Cola



**Schritt 3:** Die Becher machen die Runde durch die Klasse. Jeder kostet die vier Getränke mit einem Trinkhalm und entscheidet, welche Colasorte sich in den einzelnen Bechern befinden. Die Ergebnisse werden an der Tafel gesammelt.

**Schritt 4:** Der Versuchsleiter gibt die tatsächliche Füllung bekannt. Jeder ermittelt

### 3 Testverfahren

seine Trefferzahl.

**Schritt 5:** Die erreichten Trefferzahlen der Klasse werden in einer Tabelle zusammengefasst, in der sowohl die absolute als auch die relative Häufigkeit für die einzelnen Trefferzahlen bestimmt werden.

Trefferzahl	0	1	2	3	4
abs. Häufigk.					
rel. Häufigk.					

**Schritt 6:** Wenn man annimmt, dass der Unterschied zwischen den Colasorten überhaupt nicht zu schmecken ist, dann erhält man bei jedem der Becher *A* bis *D* einen Treffer nur mit 50% Wahrscheinlichkeit. Man kann sich dann vorstellen, dass die Anzahl der Treffer völlig ohne Kostproben für jeden Versuchsteilnehmer durch viermaliges Werfen einer Münze ermittelt werden kann. Rechnet nach, dass dann die neben stehenden Wahrscheinlichkeiten stimmen.

Trefferzahl	0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
	6,25 %	25 %	37,5 %	25 %	6,25 %

**Schritt 7:** Vergleicht die Ergebnisse aus **Schritt 5** mit denen aus **Schritt 6**. Was lässt sich damit über die Möglichkeit, den unterschiedlichen Geschmack zu schmecken, aussagen? Quelle: Lambacher Schweizer 8, S. 172 (leicht verändert)

Variationen:

Variation der Produkte, der Kostprobenzahl, der Produktanzahl

## 2. Tests, Tests, Tests, ...

In der folgenden Abbildung sind Testergebnisse für Stereoanlagen wiedergegeben.

### 3 Testverfahren

Stereoanlagen im Test										
	Mittlerer Preis in € ca.	Preisspanne in €	Lautsprecher	Verstärker	Radio	CD-Player	Aufnahme/Wiedergabe	Handhabung	Umwelteigenschaften	Qualitätsurteil
Gewichtung			20%	10%	15%	15%	15%	15%	10%	
Kanon 201	549,-		○	+	+	+	○	○	○	zufriedenstellend
Tuba 3000	680,-	600,- bis 700,-	○	+	+	++	+	○	○	gut
Woodo MP	740,-	650,- bis 750,-	○	+	+	+	○	-	○	zufriedenstellend
Hippo 73L	745,-	690,- bis 750,-	+	+	+	+	○	+	○	gut
Astro 400	745,-	700,- bis 750,-	○	+	○	+	○	-	○	zufriedenstellend
KZL 500	825,-	700,- bis 850,-	+	+	+	+	++	○	○	gut
Reihenfolge der Bewertung    ++ = sehr gut,    + = gut,    ○ = zufriedenstellend - = mangelhaft,    -- = sehr mangelhaft										

Wie könnte der dort angegebene mittlere Preis bzw. das wiedergegebene Qualitätsurteil ermittelt worden sein? Quelle: Elemente 11 (1999)

### 3. Dunkelfeldforschung

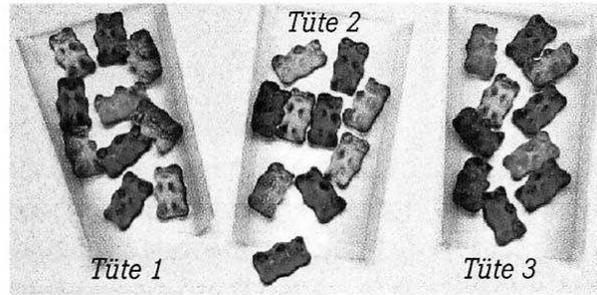
Ein Kriminologe möchte in einer Befragung (Stichprobe: 1000 Personen) herausfinden, wie viel Prozent der Bundesbürger bereits einmal einen Ladendiebstahl begangen haben. Da aber auf die direkte Frage („Haben Sie bereits einmal einen Ladendiebstahl begangen?“) vermutlich viele Befragte nicht ehrlich antworten würden, plant er folgendes Verfahren: Er legt jedem Befragten 10 gleich aussehender Kärtchen vor. Auf 4 dieser Kärtchen steht: „Ist es richtig, dass Sie bereits einmal einen Ladendiebstahl begangen haben?“ Auf den 6 anderen steht: „Ist es richtig, dass Sie noch nie einen Ladendiebstahl begangen haben?“ Der Befragte zieht nun eines dieser Kärtchen, ohne dass der Kriminologe dies sehen kann, und beantwortet die darauf stehende Frage wahrheitsgemäß (mit ja oder nein).

- Wie lässt sich anhand dieses Vorgehens der Anteil der Bürger schätzen, die schon einmal einen Ladendiebstahl begangen haben?
- Was ändert sich, wenn gleich viele von beiden Sorten Kärtchen vorhanden sind?

Quelle: MatheNetz 9 (2001)

### 4. Gummibärchen-Test

### 3 Testverfahren



Auf einem Tisch liegen drei Tüten, in denen je zehn Gummibärchen sind. Die Zusammensetzung der Tüten wird an der Tafel notiert. Danach werden die Tüten verdeckt. Eine Schülerin wählt eine der Tüten aus, zieht ein Gummibärchen, zeigt es und legt es wieder zurück. Die anderen Schüler sollen nun erraten, welche Tüte sie ausgewählt hat. Aufgrund der angegebenen Farbe sollt ihr eine Prognose erstellen, welche der Tüten ausgewählt wurde. Um die Chancen der Mitschüler zu verbessern, wird das Experiment mehrfach durchgeführt, wobei die Gummibärchen natürlich immer aus derselben Tüte gezogen werden.

- (a) Miriam durfte die Gummibärchen ziehen, hier sind die ersten vier Züge. Pedro sagt, dass man ja vor dem Ziehen der Gummibärchen auch schon die Wahrscheinlichkeit schätzen kann. Nach dem ersten und dem zweiten Zug notiert er die Zahlen in der Tabelle.

Führt eine eigene Schätzung durch und notiert die Werte. Begründet eure Schätzungen. Wie ändern sich die Werte, wenn Miriam im fünften Versuch ein gelbes Gummibärchen zieht?

Nr.	Farbe	Tüte 1	Tüte 2	Tüte 3
-	-	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	rot	0,25	0,3	0,45
2	rot	0,2	0,25	0,55
3	gelb			
4	gelb			

- (b) Führt einen eigenen Versuch durch und notiert die Ergebnisse tabellarisch.
- (c) Beschreibt genau, nach welchen Kriterien ihr eure Entscheidung fällt. Welche Bedeutung haben die Zahlenwerte, die zu den Tüten gehören, für die ihr euch nicht entschieden habt? Pedro sagt, dass sie die Chance beschreiben, dass er sich geirrt hat. Was meint ihr dazu?

Quelle: MatheNetz 9 (2001)

### 5. Dopingproben (1)

Nach einem großen Sportfest sollen alle Sportler Urinproben abgeben, mit Hilfe derer Dopingproben durchgeführt werden sollen.

Es werden zwei Möglichkeiten vorgeschlagen:

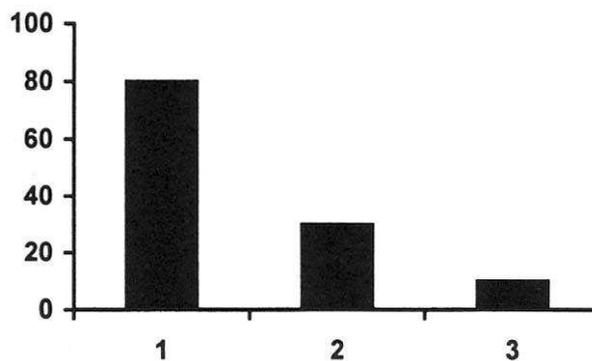
- (a) Jede Probe wird einzeln überprüft.
- (b) Jeweils Teile von zwei Proben werden zusammengesüttet und das Resultat getestet. Fällt es positiv aus, testet man die Einzelproben.

Vergleicht die beiden Vorschläge.

Quelle: ISTRON 6, S. 124/125

### 6. Dopingproben (2)

Im folgenden Diagramm ist dargestellt, wie oft beim Dopingtest nach dem Sportfest die zwei Proben eines Paares jeweils nur einmal, zweimal oder sogar dreimal getestet werden mussten.



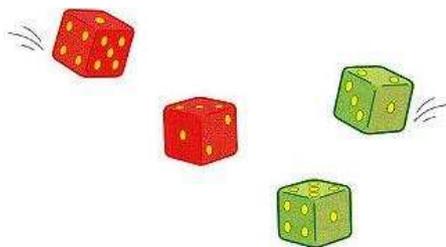
Was kann man alles aus diesem Diagramm entnehmen?

### 7. Dopingproben (3)

Wie viele Proben sind bei 1000 Sportlern zu erwarten, wenn man aus langjähriger Erfahrung weiß, dass 10% (20%, 30%, ...) aller Sportler Doping betreiben?

# 4 Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit

## 1. Würfeltest



Mit welchem Würfel würfelt man am häufigsten eine 6? Findet heraus, wer von euch den „besten“ 6er Würfel hat. Dabei sollt ihr wie folgt vorgehen.

- Jeder würfelt mit seinem Würfel, der sich in einem Würfelbecher befinden sollte.
- Das Ergebnis eines jeden Wurfes wird in die unten abgebildete Protokolltabelle bei der entsprechenden Wurfnummer eingetragen.
- Wer zuerst bei 60 Würfeln angelangt ist, ruft laut STOP; alle anderen hören dann sofort mit Würfeln auf.
- In die Tabellen unter der Protokolltabelle sind die (sogenannten absoluten) Häufigkeiten für die einzelnen Augenzahlen zu notieren.
- Wenn ihr mit allem fertig seid, vergleicht zunächst eure Ergebnisse mit denen eurer Nachbarn. Gib es zwischen den einzelnen Würfeln unterschiede? Begründe warum oder warum nicht!
- Was könnte mit dem Begriff „relative Häufigkeit“ gemeint sein?

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.
21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.
41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.	51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.

Anzahl der Versuche:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit						
relative Häufigkeit						

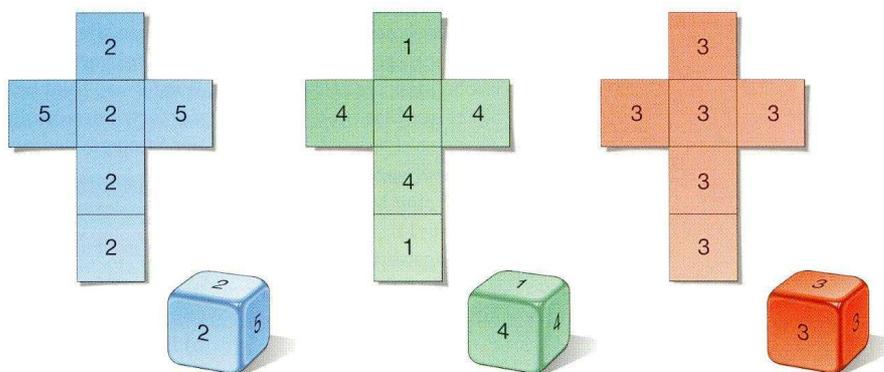
Variationen:

Würfel des Herrn Efron oder getarnte Würfel

## 2. Würfel des Herrn Efron

Die sechs Seiten eines Würfels müssen nicht unbedingt mit den Zahlen von eins bis sechs beschriftet sei, sie können ganz unterschiedliche Beschriftung haben.

Für ein einfaches, aber im Ergebnis recht verblüffendes Würfelspiel kann man die unten abgebildeten „Würfel des Herrn Efron“ verwenden. Es handelt sich dabei um drei verschiedenfarbige und unterschiedlich beschriftete Würfel. Ihr könnt sie leicht herstellen, indem ihr auf herkömmliche Würfel kleine Papierstreifen (Würfelnetze) klebt und diese entsprechend beschriftet.

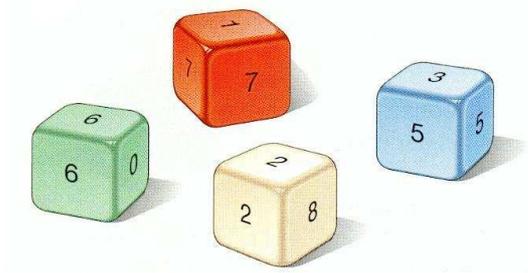


Spielregel (für zwei Spieler):

- Jeder Spieler erhält sechs Münzen.
  - Der erste Spieler wählt einen der drei Würfel.
  - Der zweite Spieler wählt einen anderen Würfel.
  - Beide Spieler würfeln. Wer die höhere Augenzahl erreicht, gewinnt und erhält vom Verlierer eine Münze.
  - Die Schritte 1 – 4 werden wiederholt bis ein Spieler keine Münzen mehr hat.
- (a) Welchen Würfel sollte der zweite Spieler wählen, wenn der erste Spieler den blauen Würfel (5, 5, 2, 2, 2, 2) gewählt hat?
- (b) Gibt es einen besonders günstigen Würfel?
- (c) Die Spielregeln sollen geändert werden: die Höhe der Ergebnisse soll berücksichtigt werden. Wer die größere Zahl würfelt, erhält so viele Münzen wie die Differenz der Augenzahlen ausmacht.  
Ist das Spiel nun fair und wenn ja warum?

## 4 Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit

- (d) Überlegt euch ein eigenes möglichst faires Glücksspiel mit von euch beschrifteten Würfeln (auch Zahlen über 6 sind möglich!).



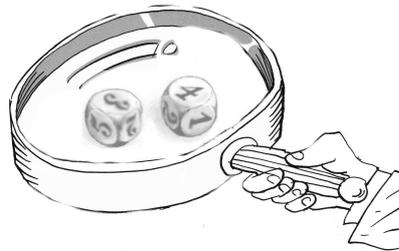
Quelle: Mathe Live 8, S. 57f.

Variationen:

- Zusätzliche Behandlung des Erwartungswertes (man spricht von Efron-Würfeln, wenn alle den gleichen Erwartungswert haben)
- Angenommen, es sind drei Spieler, die mit allen drei Würfeln spielen. Wer gewinnt jetzt?

### 3. Getarnte Würfel

Im Gegensatz zu einem klassischen 6er Würfel sollt ihr in Partnerarbeit einen sechsseitigen Würfel herstellen, auf dem Zahlen aus der Menge 1, 2, 3, 4, 5, 6 einfach, mehrfach oder gar nicht vorkommen.



Dafür klebt ihr auf die sechs Seiten eines herkömmlichen Würfels kleine Papierschnipsel auf denen eure Zahlen stehen. Wenn ihr damit fertig seid, sucht ihr euch eine andere 2er-Gruppe und würfelt so, dass diese Schüler euren Würfel nicht sehen können. Lediglich das Ergebnis wird mitgeteilt und in die folgende Tabelle eingetragen:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl (absolute Häufigkeit)						

- (a) Wie könnte die Beschriftung des Würfels aussehen?
- (b) Wie oft muss man werfen, um eine möglichst sichere Aussage über die Beschriftung des Würfels machen zu können? Begründe!
- (c) Was könnte der Grund dafür sein, dass eine Zahl häufiger gewürfelt wird als eine andere, die genauso oft auf dem Würfel ist?

#### 4. Lego-Steine

Statt mit einem normalen Spielwürfel kann man auch mit einem Lego-Stein „würfeln“. Nimm einen „Achter“ und beschrifte ihn wie hier gezeigt. Wie bei einem richtigen Spielwürfel haben gegenüberliegende Seiten zusammen die Augenzahl 7. Beim Würfeln sollte ein Würfelbecher benutzt werden. Als Ergebnis notiert man die Augenzahl.



Anne, Gisa und Simon haben vor ihrem Würfeln mit dem Lego-Stein die Chancen für die Augenzahlen 1 bis 6 geschätzt.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Schätzung Anne	2%	10%	31%	45%	10%	2%
Schätzung Peter	1%	7%	40%	36%	12%	4%
Schätzung Gisa	0%	5%	40%	50%	5%	0%
Schätzung Simon	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- (a) Welcher Schätzung würdest du am ehesten zustimmen? Begründe deine Antwort!
- (b) Gib selbst eine Schätzung ab und überprüfe die Schätzungen, indem du 100mal mit dem Lego-Stein würfelst. Stelle die absolute und die relative Häufigkeit in einer Tabelle zusammen. Gib nach diesem Versuch eine (möglicherweise verbesserte) Schätzung ab.
- (c) Wolfgang behauptet, die Chance für das Würfeln einer Augenzahl hängt vom Flächeninhalt der zugehörigen Seite ab. Berechne die Flächeninhalte, wobei du die Flächen mit 3 und 4 als eben annehmen kannst. Gib den Anteil jedes einzelnen Flächeninhalts an der gesamten Oberfläche an. Vergleich mit den Angaben aus (a).

Quelle: Lambacher Schweizer 8, S. 156

Variation:

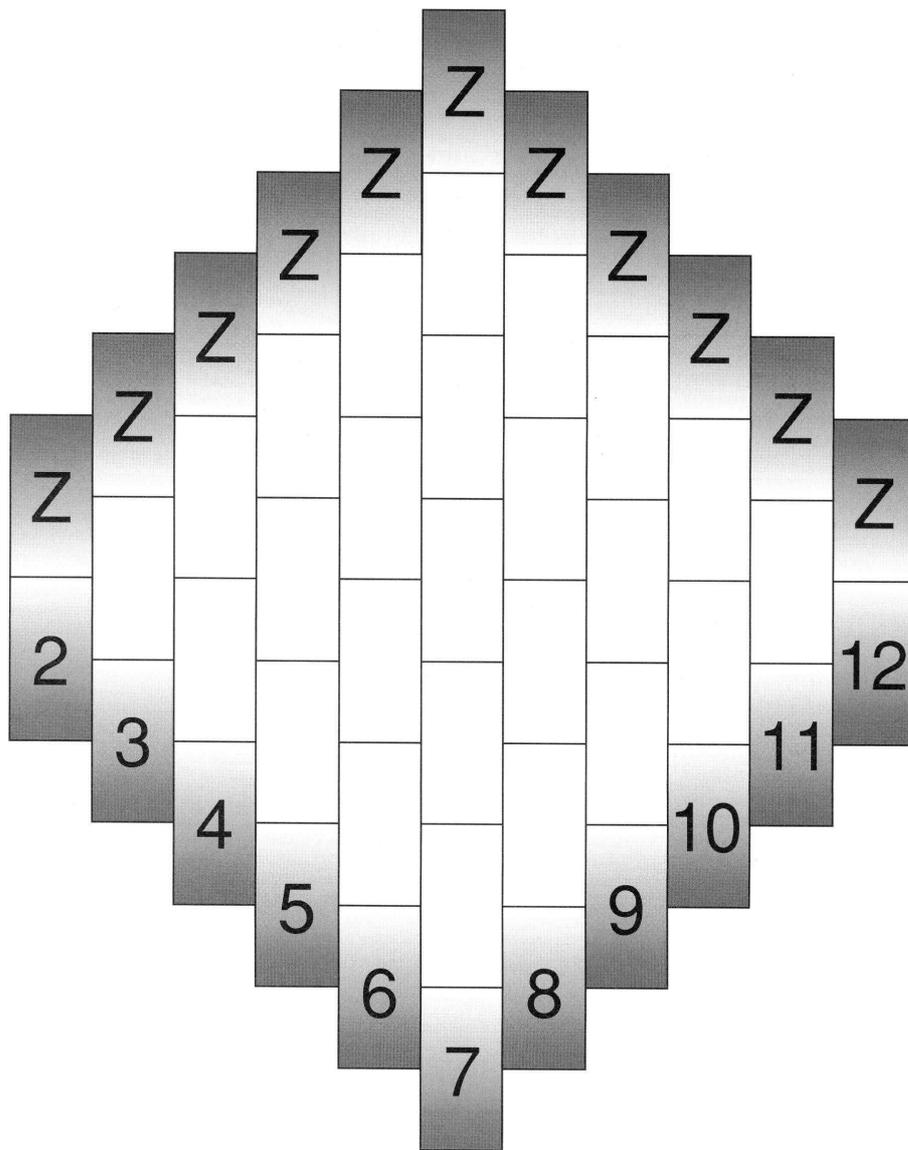
Riemer-Würfel statt Lego-Steine

5. **Spiel „Der schnellste Weg“**

Zu Beginn des Spieles wird von jedem Mitspieler ein Spielstein auf eine Startzahl zwischen 2 und 12 gesetzt. Anschließend wird mit zwei Würfeln gewürfelt und die Augensumme gebildet. Stimmt die Augensumme mit der besetzten Startzahl überein, darf man ein Feld vorrücken und nochmals würfeln. Stimmen Augensumme und Startzahl nicht überein, ist der nächste Spieler dran. Wer mit seinem Spielstein auf ein Zielfeld ( $Z$ ) kommt, hat einen Gewinnpunkt gemacht und darf seinen Stein wieder auf eine beliebige Startzahl setzen.

Gewonnen hat derjenige, der zuerst 3 Gewinnpunkte hat.

Spielplan „Der schnellste Weg...“



- (a) Spielt das Spiel in Dreier-Gruppen. Die Mehrfachbelegungen eines Startfeldes ist nicht erlaubt!
- (b) Notiert in der folgenden Strichliste wie oft eine Startzahl gewürfelt wurde.

#### 4 Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit

Startzahl	Absolute Häufigkeit
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

- (c) Notiert in der folgenden Strichliste wie oft eine Startzahl zum Erwerb eines Gewinnpunktes geführt hat.

Startzahl	Gewinnpunkte
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

- (d) Wie viele Möglichkeiten / Kombinationen gibt es, eine Startzahl zu werfen?

Startzahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl der Möglichkeiten											

- (e) Überlegt euch Variationen des Spiels um es (noch) spannender zu machen (z.B. drei Würfel einsetzen und die geeignete Kombination aus zweien auswählen, mehrere Startfelder besetzen etc.).

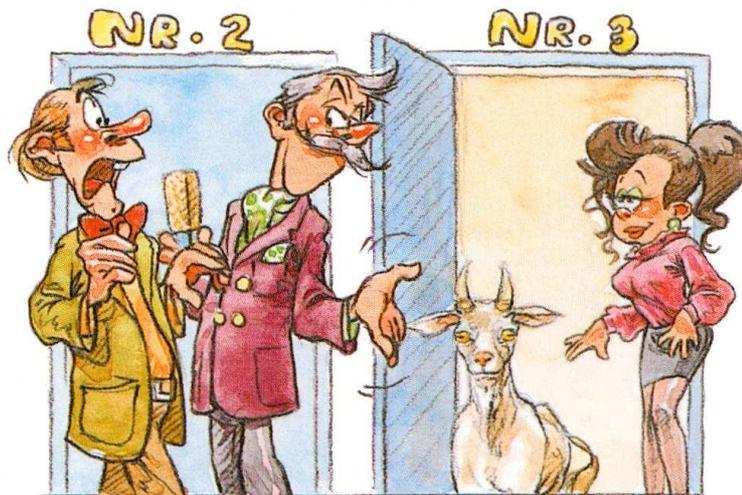
Variationen der Aufgabe:

- (a) mehrere Spielsteine pro Person
- (b) mehrere Würfel pro Person
- (c) Personenzahl variieren

- (d) eigenes Spielfeld entwerfen
- (e) zusätzliche Würfelbedingungen einführen
- (f) Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Startzahl berechnen

## 6. Das „3-Türen-Problem“

In der amerikanischen Fernsehshow „Let’s make a deal“ ist ein Auto ein Hauptpreis. Um ihn zu gewinnen, muss sich der Kandidat schließlich für die richtige von drei verschlossenen Türen entscheiden. Hinter einer befindet sich das Auto, hinter den beiden anderen jeweils eine Ziege. Wenn sich der Kandidat für eine der drei Türen entschieden hat, zum Beispiel für Tür 1, öffnet der Moderator, der weiß, was sich hinter den Türen befindet, mit den Worten „Soll ich Ihnen ’mal ’was zeigen?“ eine der beiden anderen Türen, zum Beispiel Tür 3, und eine Ziege schaut ins Publikum, denn der Moderator öffnet niemals die Tür, hinter der das Auto steht.



Der Kandidat hat nun noch die Möglichkeit, sich für die andere verschlossene Tür (hier Tür 2) zu entscheiden oder bei seiner ursprünglichen Wahl zu bleiben (hier Tür 1). Was soll der Kandidat machen? Diese Frage wurde der Journalistin *Marilyn vos Savant*, die angeblich der Mensch mit dem höchsten Intelligenzquotienten ist, von einem Leser der Zeitschrift „Parade“ gestellt. In ihrer Kolumne „Ask Marilyn“ antwortete sie, dass der Kandidat auf jeden Fall wechseln sollte. Dieses Vorgehen würde seine Gewinnwahrscheinlichkeit verdoppeln, nämlich von  $\frac{1}{3}$  auf  $\frac{2}{3}$ . Daraufhin erhielt sie etwa zehntausend Leserbriefe, die diese Strategie für falsch hielten.

### Argumentation von Marilyn vos Savant

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 1 befindet, ist  $\frac{1}{3}$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter einer der beiden anderen Türen befindet, ist somit  $\frac{2}{3}$ . Mindestens hinter einer dieser beiden Türen steht eine Ziege.

Öffnet der Moderator eine dieser Türen, so steht die Tür fest, hinter welcher das Auto mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$  steht. Also empfiehlt es sich, die gewählte Tür zu wechseln. Die Chance auf den Hauptgewinn verdoppelt sich.

#### **Argumentation der meisten Leser**

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 1 befindet, ist  $\frac{1}{3}$ , genauso wie für jede der beiden anderen Türen.

Öffnet der Moderator eine der beiden anderen Türen, zum Beispiel Tür 3, so scheidet diese Tür als mögliche Auto-Tür aus. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 1 befindet, beträgt jetzt  $\frac{1}{2}$ , genauso wie für Tür 2. Es gibt also keinen Grund die Tür zu wechseln. Die Gewinnchance ist für beide Türen gleich.

- (a) Diskutiert die beiden unterschiedlichen Argumentationen zu zweit.
- (b) Wenn du als Kandidat entscheiden müsstest, würdest du die Tür wechseln oder nicht? Begründe deine Überlegung!
- (c) Überprüft eure Überlegungen an einem Experiment, das dem „3-Türen-Problem“ entspricht (z.B. drei Würfelbecher und eine Münze als Gewinn).

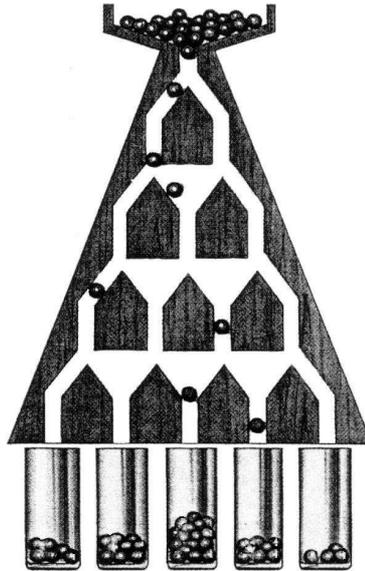
Quelle: Zahlen und Größen 8, S. 159

Variationen:

- (a) Schüler schreiben ihre eigene Argumentation
- (b) 1000 Türen, von denen der Moderator 98 öffnet
- (c) Simulation im Internet nutzen: [www.zufallsgeneratoren.de](http://www.zufallsgeneratoren.de)

## 7. Galton-Brett

Francis Galton (1822 – 1911) erfand das neben stehende Galton-Brett. Auf diesem sind mehrere Reihen gleichgeformter Plättchen auf Lücken befestigt. Hindurchfallende Kugeln treffen auf die Spitze des ersten Plättchens und werden dort jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 nach rechts oder nach links abgelenkt. Dieser Vorgang setzt sich von Reihe zu Reihe fort. Die Kugeln werden unter jedem Ausgang zur Auszählung aufgefangen.

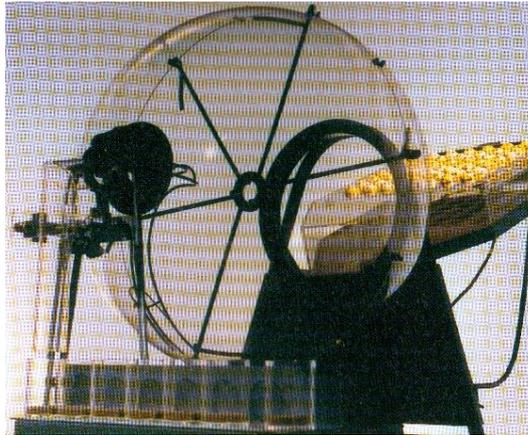


Sollte euch kein Galton-Brett zur Verfügung stehen, könnt ihr trotzdem ausprobieren, wie sich die Kugeln verteilen. Simuliert den Versuch und entscheidet bei jeder Plättchenspitze mit Hilfe einer Münze, welchen Weg (rechts oder links) die Kugel nimmt.

- Macht in Partnerarbeit 100 Durchgänge und zählt die Zahl der Kugeln in jedem Behälter. Tragt die Anzahl in einem Säulendiagramm auf.
- Wie viele verschiedene Wege kann eine Kugel nehmen?
- Stellt die Situation in einem Ergebnisbaum dar und bestimmt zu jedem Weg die Wahrscheinlichkeit.
- Am Boden des Galton-Bretts fällt jede Kugel in eine der fünf Kammern. Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet der Weg in Kammer 1 [bzw. 2, 3, 4, 5]?

#### 8. Lotto „3 aus 9“

Anstelle des bekannten Lottos „6 aus 49“ sollt ihr den kleinen Ableger davon „3 aus 9“ spielen. Dafür müsst ihr zunächst 9 Papierschnipsel mit den Zahlen 1 – 9 beschriften und dann in einen undurchsichtigen Behälter füllen.



Jeder aus der Klasse tippt eine Dreierkombination aus der Menge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (z.B. 3 – 6 – 7). Es darf dabei keine Zahl doppelt vorkommen. Im Anschluss daran zieht der Lehrer drei Schnipsel aus dem Behälter.

- (a) Nachdem an der Tafel die Ergebnisse aller Schüler notiert wurden (absolute Häufigkeit), berechne die relative Häufigkeit der einzelnen Zahlen.
- (b) Wie groß war rein rechnerisch die Wahrscheinlichkeit, 0, 1, 2 oder 3 „Richtige“ zu haben.
- (c) Vergleiche das Ergebnis aus Teil (b) mit dem aus (a). Was könnte die Ursache für die Differenzen sein?

Variationen:

Die Anzahl der gezogenen und die Gesamtzahl der Kugeln können variiert werden.

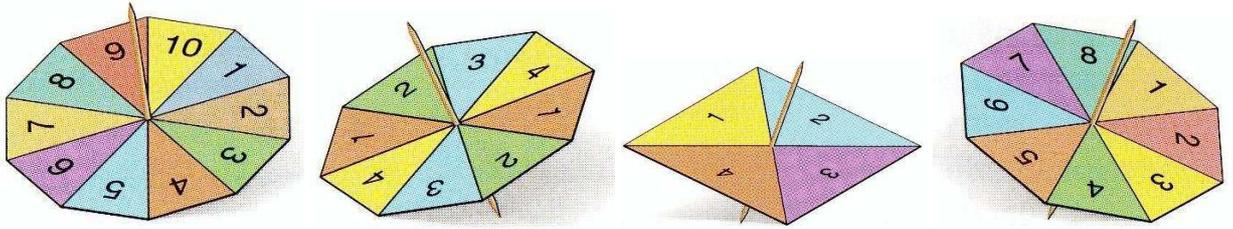
## 9. Laplace

Lege die möglichen Ergebnisse fest und entscheide und begründe, ob es sich bei den folgenden Experimenten um ein Laplace-Experiment (Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind) handelt oder nicht.

- (a) Eine Geldmünze wird geworfen.
- (b) Ein Elfmeter wird geschossen.
- (c) Ein Marmeladenbrot fällt vom Tisch.
- (d) Ein Dartpfeil wird auf die Dartscheibe geworfen.

Überlege dir drei Experimente, die ein Laplace-Experiment darstellen und drei, die dies nicht tun!

### 10. Glückskreisel



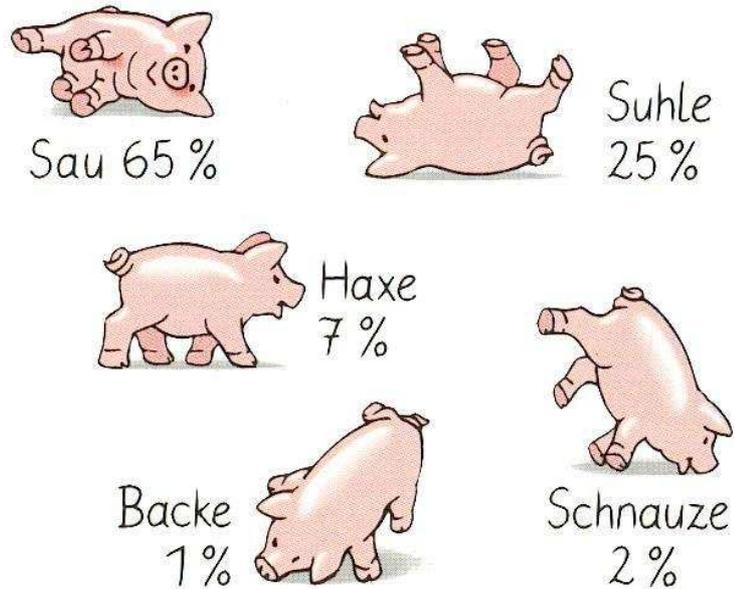
Die oben abgebildeten Glückskreisel werden gedreht.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie im Feld „2“ liegen bleiben?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie auf einer geraden Zahl liegen bleiben?
- Für welche Glückskreisel ist das Spiel „Du gewinnst, wenn eine Primzahl kommt“ fair?
- Finde andere faire bzw. unfaire Spielregeln für die einzelnen Glückskreisel. Finde ggf. einen Kreisel bei dem das Spiel fair wäre.

### 11. Schweinerei

Bei dem Spiel „Schweinerei“ werden Schweine geworfen. Dabei gibt es fünf Möglichkeiten, wie das Schweinchen fallen kann.

- Sau - Seitenlänge
- Suhle - Rückenlage
- Haxe - stehend
- Schnauze - auf der Schnauze
- Backe - wie Schnauze, jedoch seitlich auf einer Backe



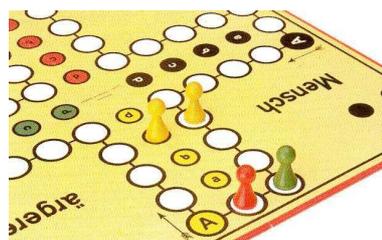
Die Wahrscheinlichkeit für jede Lage kannst du der Abbildung entnehmen.

- (a) Gib einige mögliche Ergebnisse an, wenn zwei Schweinchen geworfen werden?
- (b) Bestimme für die Ergebnisse die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

### 12. Mensch ärgere dich nicht

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gelbe Stein beim nächsten Wurf

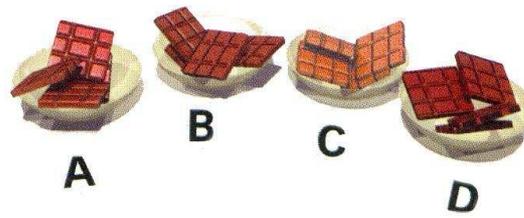
- (a) den grünen [bzw. den roten] Stein schlägt?
- (b) in sein Haus gelangt?
- (c) weder einen Stein schlägt noch in sein Haus gelangt?



### 13. Schokolade

Eine Klasse führt einen Geschmackstest zur Untersuchung zweier Sorten Vollmilchschokolade durch. Dazu werden vier zufällig bestimmte Proben *A*, *B*, *C* und *D* bereitgestellt.

#### 4 Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit



- Zeichne ein Baumdiagramm.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand zufällig mindestens drei Treffer erzielt.
- Entscheide und begründe, wann man bei diesem Test von einem „guten Schmecker“ sprechen kann.

#### 14. Lotto

Peters Lieblingszahl ist die Zahl 25. Peter schaut bei der Wochenziehung des Lotospieles 6 aus 49 zu. Dabei werden nacheinander 6 Kugeln aus einer Urne mit 49 nummerierten Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 25 als erste Kugel der Wochenziehung gezogen wird?
- Begründe, warum die Wahrscheinlichkeit, dass die 25 als zweite [als dritte; als vierte,...] gezogen wird  $\frac{1}{49}$  beträgt.

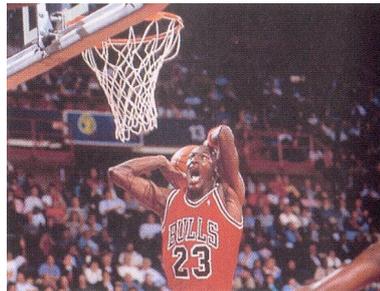
#### 15. Basketball

In der amerikanischen Basketball-Liga NBA wird der Meister nach der Regel „best of five“ ermittelt. Das bedeutet, wer zuerst drei von fünf Spielen gewonnen hat, ist Meister. In einem Computerspiel kommt es (leider ohne Beteiligung des Computerspieler, der ist vorher ausgeschieden) zu einem Endspiel zwischen den *Chicago Bulls*

#### 4 Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit

und den *Utah Jazz*. Die Bulls gewinnen, aufgrund der vorher vom Spieler eingestellten Teamstärke, dabei mit durchschnittlich 2 zu 1 jedes einzelne Spiel, d.h. von drei Spielen gewinnen die Bulls durchschnittlich zwei Spiele.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen die Bulls den Titel? Nutze für deine Überlegungen die Möglichkeiten eines Baumdiagramms.
- Wie ändern sich die Chancen für die Bulls, wenn man einstellt, dass sie jedes einzelne Spiel nur noch mit der Chance 4 zu 3 gewinnen?
- Wie kann man die Eintragungen im Baumdiagramm überprüfen?
- Gib eine Regel an, mit der du mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit für den Sieg berechnen kannst.



#### 16. Spielautomat

Bei dem abgebildeten Spielautomaten beträgt der Einsatz pro Spiel 1 €. Gewonnen hat man bei: dreimal Eins (111): 30 €

drei gleiche Zahlen (außer 111): 10 €

Berechne den Erwartungswert. Lohnt sich das Spiel?

(Laut Gesetz müssen mindestens 60% aller Einsätze wieder ausgespielt werden.)



### 17. Streichhölzer

Eine Streichholzfirma stellt täglich 3.000.000 Streichholzschachteln her. Eine Stichprobe von 5000 Schachteln ergab folgende Verteilung:

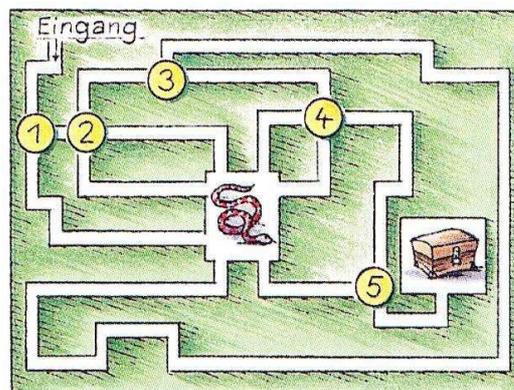
Inhalt der Schachteln	36	37	38	39	40	41	42	43
Anzahl der Schachteln	12	28	238	765	2517	936	342	162

- Wie viele Schachteln mit der entsprechenden Anzahl Streichhölzer sind täglich zu erwarten?
- Wie viele Streichhölzer kann man beim Kauf von 20 Schachteln erwarten?
- Wie viel Prozent der Päckchen enthalten demnach mindestens 39 Streichhölzer?
- Wie viel Prozent der Päckchen enthalten mehr als 39, aber weniger als 42 Streichhölzer?

### 18. Gefährliche Schatzsuche

In einem Labyrinth wird ein wertvoller Schatz aufbewahrt, der durch eine Grube voller Schlangen gesichert wird. Ihr Biss ist für jeden Schatzjäger absolut tödlich.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Schlangen zu entkommen und den Schatz zu finden? Die Zahlen stehen dabei für die Kreuzungen.
- Entwirf ein eigenes Labyrinth mit eigenen Fallen und bestimme die Wahrscheinlichkeit den Schatz zu finden.

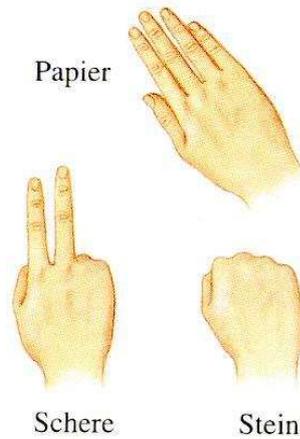


### 19. Stein-Schere-Papier

Bei dem Spiel „Stein-Schere-Papier“ knobeln Jean und Ben gegeneinander. Es gilt: Schere schlägt Papier, Stein schlägt Schere, Papier schlägt Stein. Gleiche Ergebnisse zählen nicht. Wer zuerst seinen Gegner dreimal schlägt, hat gewonnen.

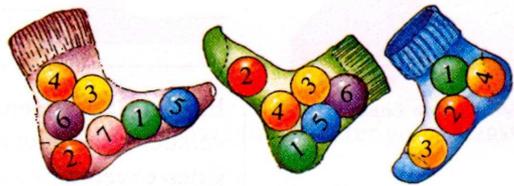
#### 4 Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ben gewinnt?  
(b) Nach der ersten Schritt liegt Jean in Führung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ben noch gewinnt?



#### 20. Urnenziehung: Zahlen

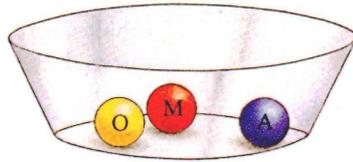
- (a) Welche Wahrscheinlichkeit hat die Zahl „3“ bei den Urnen in der Abbildung?  
(b) Lina zieht 75-mal aus der Urne 1, dabei wird jede gezogene Kugel vor dem nächsten Zug zurückgelegt. Wie oft wird sie etwa in den 75 Versuchen die „3“ erwischen?



#### 21. Urnenziehung: Buchstaben

In einer Urne liegen drei Kugeln mit Buchstaben, sie werden nacheinander gezogen und hintereinander gelegt.

- (a) Schreibe alle „Wörter“ auf, die dabei entstehen können.  
(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht das Wort OMA?



**22. Schaltjahr-Geborene**

Bestimme mit einer Laplace-Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der nicht in einem Schaltjahr geboren ist,

- (a) am 12. Januar
- (b) am 24. Dezember
- (c) am 29. Februar
- (d) im April
- (e) an einem Monatsersten
- (f) an einem Datum deiner Wahl

Geburtstag hat.

**23. Laplace: ja oder nein?**

Welche der folgenden Laplace-Annahmen sind gerechtfertigt, welche sind nur annähernd gerechtfertigt, welche sind eindeutig falsch?

- (a) Es gibt 12 Monate, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand im Januar Geburtstag hat,  $\frac{1}{12} \approx 8,3\%$ .
- (b) Es gibt 7 Wochentage, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig herausgegriffene Person in diesem Jahr an einem Sonntag Geburtstag hat,  $\frac{1}{7} \approx 14,3\%$ .
- (c) Es gibt 7 Wochentage, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Advent dieses Jahr auf einen Montag fällt,  $\frac{1}{7} \approx 14,3\%$ .
- (d) Jeder Knopf hat zwei Seiten. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass er auf die Oberseite fällt, 50%.

**24. Warten auf die Sechs**

Beim Mensch-ärgere-Dich-nicht darf man bei einer Sechs starten. Man hat bis zu drei Versuche. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Start gelingt?



25. **Pasch-Wahrscheinlichkeit**

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln mit zwei Würfeln einen Pasch zu bekommen?

26. **Treffer-Wahrscheinlichkeit**

Beim Basketball trifft Mag mit Wahrscheinlichkeit 40%, Wim mit 70%. Sie werfen nacheinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zusammen 0, 1 oder 2 Treffer erhalten?

27. **Siedler von Catan**

Beim Spiel „Die Siedler von Catan“ muss man seine Siedlungen an besonders ertragreiche Felder bauen. Die Felder sind von 2 bis 12 durchnummeriert und die Auszahlung des Rohstoffs wird fällig, wenn die Summe eines Wurfes mit zwei Würfeln gleich der Feldnummer ist. An welche Felder sollte man bauen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe gleich 1, 2, 3, ..., 11, 12 ist?

Quellen: MatheNetz 8 (2000), MatheLive 8 (2001), Lambacher Schweitzer 8 (1996), Schnittpunkt 8 (1994), Mathematik heute 8 (1995), Zahlen und Größen 8 (2000), Mathematik 8 (1994), Die Welt der Zahl (1994), Elemente der Mathematik 8 (1994), Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sek. I (2001).

28. **Kniffel**

Kniffel ist ein geschicktes Kombinationsspiel mit 5 Würfeln. Jeder Spieler, der an der Reihe ist, gibt zunächst alle 5 Würfel in den Würfelbecher, schüttelt ihn und rollt die Würfel heraus. Je nach Ausfall dieses ersten Wurfes entscheidet der Spieler, ob er alle Würfel oder nur einen Teil wieder aufnimmt und erneut würfelt. So kann ein ungünstiger erster Wurf mit Glück beim zweiten oder maximal dritten Würfeln zu einem optimalen Ergebnis führen.

# Kniffel Gewinnkarte



Name \_\_\_\_\_

		1. SPIEL	2. SPIEL	3. SPIEL	4. SPIEL	5. SPIEL	6. SPIEL
1er	nur Einsen zählen						
2er	nur Zweier zählen						
3er	nur Dreier zählen						
4er	nur Vierer zählen						
5er	nur Fünfer zählen						
6er	nur Sechser zählen						
gesamt							
Bonus bei 63 oder mehr	plus 35						
gesamt oberer Teil							
Dreierpasch	alle Augen zählen						
Viererpasch	alle Augen zählen						
Full-House	25 Punkte						
Kleine Straße	30 Punkte						
Große Straße	40 Punkte						
Kniffel	50 Punkte						
Chance	alle Augen zählen						
gesamt unterer Teil							
gesamt oberer Teil							
Endsumme							

SCHMIDT SPIEL + FREIZEIT GMBH

Die Zählliste enthält dreizehn Rubriken (siehe nebenstehende Abbildung). In der oberen Abteilung können die Einsen, ..., bis zu den Sechsern eingetragen werden.

In der unteren Abteilung gibt es den Dreier- und Viererpasch (drei bzw. vier gleiche Zahlen), Full House (bestehend aus einem Dreier- und einem Zweierpasch), der kleinen und großen Straße (Folge von vier bzw. fünf Würfeln mit aufeinanderfolgender Augenzahl), dem Kniffel (Fünferpasch) und der Chance (hier werden keinerlei Bedingungen an den Wurf geknüpft).

Spielziel ist es, das höchste Punktergebnis von allen Mitspielern zu erreichen.

Zunächst wird nur der erste Wurf aus 5 Würfeln betrachtet. Bestimmt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten folgender Ereignisse:

- (a) Dreierpasch aus „Zweien“
- (b) Beliebiger Dreierpasch
- (c) Viererpasch
- (d) Kniffel
- (e) Große Straße
- (f) Kleine Straße

### 29. Würfeln

Wirf einen Würfel, bis sich eines der sechs möglichen Ereignisse wiederholt.

Notiere die Anzahl der notwendigen Würfe bis zur ersten Wiederholung.

Welcher Mittelwert für die Anzahl der notwendigen Würfe ergibt sich bei 50 Versuchsserien?

Quelle: Elemente 12/13 (2000)

### 30. Platonische Körper

Wirf einen regulären Oktaeder (Dodekaeder, Ikosaeder), bis sich eines der 8(12, 20) möglichen Ereignisse wiederholt.

Welcher Mittelwert für die Anzahl der notwendigen Versuchsdurchführungen bis zur ersten Wiederholung eines Ergebnisses ergibt sich bei 50 Versuchsserien?

### 31. Das Geburtstagsproblem

23 Personen werden zufällig ausgewählt. Lohnt es sich darauf zu wetten, dass unter diesen mindestens zwei sind, die am gleichen Tag Geburtstag haben?

- (a) Schätzt zunächst, ob sich eine solche Wette lohnt.
- (b) Was könnte diese Aufgabe mit den obigen beiden Aufgaben zu tun haben? Versucht diesen Zusammenhang zu erläutern.
- (c) Versucht zu begründen, warum die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der 23 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, gleich  $1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots 343}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdots 365}$  ist.

### 32. Entenfeier

Im Hause der Familie Duck halten sich  $n$  Enten zu einer Familienfeier auf. Eine muss trotz des scheußlichen Regens hinaus und den Erbonkel Dagobert mit dem Schirm abholen. Donald Duck hält  $n$  Streichhölzer in der Hand, eins davon ist gekürzt. Wer dieses zieht, muss hinaus in den Regen.

- (a) Soll Trick als erster ziehen, als letzter oder mehr so in der Mitte? Berechnet die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und nehmt dann Stellung zu Daisys Aussage: „Die ersten und die letzten, die ziehen, haben die besten Chancen, nicht hinaus zu müssen, denn zu Beginn sind noch alle langen Hölzchen da, und bis zum Ende wird wohl kaum gezogen werden, da schon vorher jemand das kurze Streichholz gezogen haben wird. Die in der Mitte sind am schlechtesten dran, weil nur noch etwa die Hälfte der langen Hölzchen da sind und dadurch die Chancen zu verlieren viel größer sind.“
- (b) Wenn nur noch Trick und Track im Raum sind, weil alle anderen damit beschäftigt sind, den mit Wasser vollaufenden Keller zu entleeren, wird folgendes Verfahren vereinbart: Trick und Track ziehen abwechselnd eines der  $n$  Streichhölzer. Wer zuerst das kurze zieht, muss hinaus in den Regen. Soll Trick jetzt anfangen oder lieber Track den Vortritt lassen?

*Hinweis:* Macht euch den Sachverhalt zunächst anhand von konkreten Zahlenbeispielen für  $n$  klar.



### 33. Glücksspirale

Zur teilweisen Finanzierung der Olympischen Spiele 1972 in München wurde eine Lotterie eingeführt: die Glücksspirale. Die 7-ziffrigen Glückszahlen wurden dabei wie folgt ermittelt: In einer Trommel befanden sich 70 Kugeln; auf 7 Kugeln stand die 0, auf 7 Kugeln die 1,  $\dots$ , auf 7 Kugeln die 9. Aus dieser Trommel wurden 7 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in der Reihenfolge des Ziehens zur jeweiligen Glückszahl angeordnet.

- (a) Geben Sie den Ergebnisraum an. Wie viele Glückszahlen sind in ihm enthalten?
- (b) Nach der ersten Ziehung gab es in der Presse Kritik, daß durch dieses Verfahren nicht alle 7-ziffrigen Glückszahlen die gleiche Gewinnchance gehabt hätten. Bestätigen oder widerlegen Sie diese Kritik. Machen Sie gegebenenfalls (falls die Kritik zutrifft) einen Vorschlag zur Verbesserung des Ziehungsverfahrens und begründen Sie Ihren Vorschlag in Form eines Briefes an die Geschäftsführung der Glücksspirale.



### 34. Lottostrategie

Zahlen unter 32 werden (wegen der Geburtstage der Tipper) beim Lottospiel 6 aus 49 häufiger angekreuzt als andere Zahlen. Im allgemeinen ist deshalb die Zahl der Gewinner um so größer, je mehr Zahlen unter 32 ausgelost werden. Sollte man also nur noch Zahlen über 32 tippen?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	✗	13	14
✗	✗	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	✗	35
36	37	✗	39	40	41	42
43	44	45	46	47	✗	49

### 35. Gezinkte Würfel

Walter zinkt Würfel so, dass äußerlich keine Veränderung zu erkennen ist, die Wahrscheinlichkeit für „6“ aber 0,25 beträgt. Seine Frau Trude testet die Würfel folgendermaßen: Sie würfelt zwölfmal mit jedem Würfel. Wirft Sie mit einem Würfel mehr als dreimal eine „6“, so legt sie ihn zu den gezinkten, sonst zu den idealen.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein idealer Würfel zu den gezinkten gelegt wird?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gezinkter Würfel zu den idealen gelegt wird?

(c) Wie könnte Trude die Fehlerquote verringern?



### 36. Roulette

Beim Roulette ist in den vergangenen zehn Spielen jedesmal eine rote Zahl gezogen worden. Auf welche Farbe würdest du im elften Spiel setzen? Begründe!



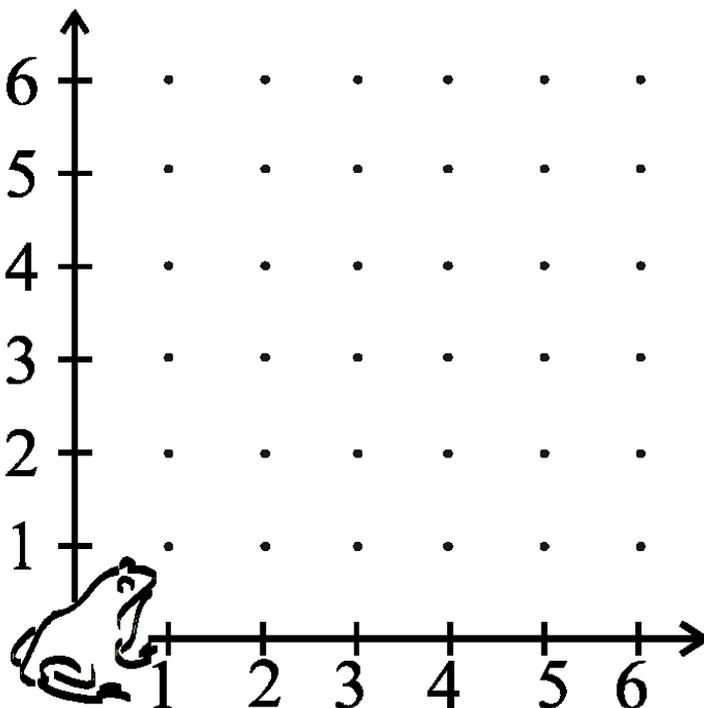
### 37. Froschgeschichten

Ein Ko-Frosch sitzt auf einem Gitterpunkt eines Koordinatensystems und kann jeweils nur zum nächsten Gitterpunkt nach oben oder nach rechts springen und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $p = \frac{1}{2}$ .

*Beispiel:* Befindet sich der Ko-Frosch auf dem Gitterpunkt  $(4|3)$ , dann kann er nur nach  $(4|4)$  oder  $(5|3)$  springen.

- (a) Der Ko-Frosch sitzt auf dem Gitterpunkt  $(0|0)$ .
- Auf welchen Gitterpunkten kann er sich nach 5 Sprüngen befinden?
  - Wie viele Sprünge benötigt er, um den Gitterpunkt  $(18|17)$  zu erreichen?
  - Denk dir weitere zwei weitere Fragen aus und beantworte sie.

- (b) Der Ko-Frosch sitzt auf dem Gitterpunkt  $(0|0)$  des Koordinatensystems und kann jeweils nur zum nächsten Gitterpunkt nach oben oder nach rechts springen und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $p = \frac{1}{2}$
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er den Gitterpunkt  $(4|0)$ , den Gitterpunkt  $(8|1)$ , den Gitterpunkt  $(2|2)$ ?
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzt er nach 20 Sprüngen nicht auf einer Koordinatenachse?
  - Denk dir weitere zwei weitere Fragen aus und beantworte sie.



### 38. Arme Ritter

Die Ritter Kunibald, Georgius und Ottokar sind bei einer Schlacht gefangen genommen und anschließend zum Tode verurteilt worden. Der Herrscher beschließt, einen der drei per Losverfahren zu begnadigen. Der Name des Glücklichen wird streng geheim gehalten. Kunibald sagt sich: „Die Wahrscheinlichkeit, dass ich es bin, beträgt  $\frac{1}{3}$ .“, Er sagt dem Wärter: „Einer der beiden anderen wird sicher hingerichtet werden. Du wirst mir also nichts verraten, wenn du mir einen Mann nennst, Georgius oder Ottokar, der hingerichtet wird.“ Darauf sagt der Wärter, „Ottokar wird hingerichtet.“ Die Antwort hat Kunibald ermutigt, denn damit wird er oder aber Georgius sicher nicht hingerichtet. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er selbst überlebt,  $\frac{1}{2}$ . Hat Kunibald Recht?

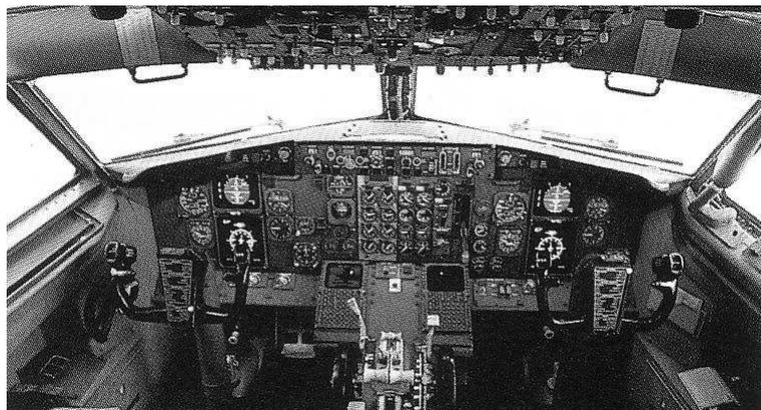


### 39. Falscher Alarm?

Moderne Düsenverkehrsflugzeuge verfügen über Bodenannäherungswarnanlagen, die den Piloten akustisch und optisch warnen, wenn sich das Flugzeug ungeplant dem Boden nähert. Aus langjährigen Studien haben sich ergeben:

Wenn in einer Flugminute tatsächlich eine ungeplante Bodenannäherung vorliegt, dann schlägt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9% Alarm. Wenn dagegen in einer Flugminute tatsächlich ungeplante Bodenannäherung vorliegt, so gibt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,002% einen falschen Alarm. Eine ungeplante Bodenannäherung ist aufgrund der hohen navigatorischen und technischen Zuverlässigkeit der Verkehrsluftfahrt sehr selten. Durchschnittlich nur in einer von zwei Millionen Flugminuten ist eine solche Bodenannäherung zu erwarten.

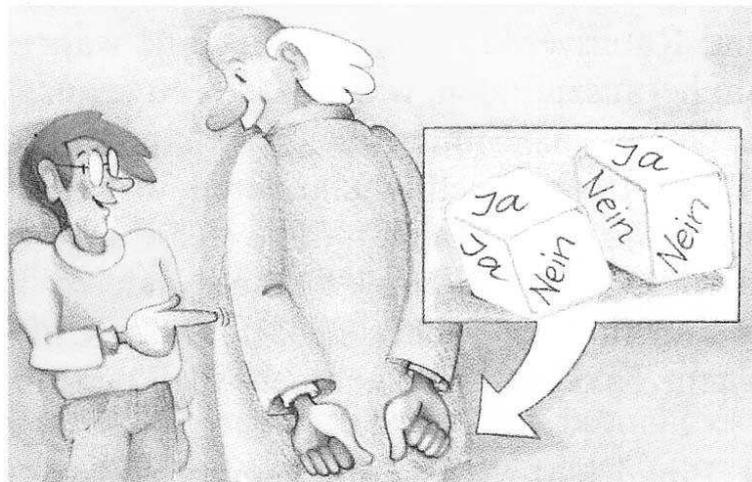
Wenn das System Alarm gibt, wie wahrscheinlich ist es dann, dass sich das Flugzeug tatsächlich ungeplant dem Boden nähert? Was bedeutet das Ergebnis psychologisch für den Piloten, der jederzeit über die Möglichkeit verfügt das Warnsystem auszu-schalten?



#### 40. Ratespiel mit Würfeln

Der Lehrer bringt zwei faire Würfel mit. Auf dem ersten Würfel sind fünf Flächen mit „Ja“ überschrieben, auf dem anderen Würfel nur zwei Flächen. Auf den restlichen Flächen steht „Nein“. Nachdem der Lehrer diese Würfel gezeigt hat, nimmt er sie verdeckt jeweils in die eine oder die andere Hand. Peter muss nun blind nach Zufall einen Würfel auswählen, den er dann - für die Klasse verdeckt - vom Lehrer erhält. Peter würfelt mit diesem Würfel dreimal - weiterhin für die Klasse verdeckt - und nennt als Ergebnisse: „Ja, Ja, Nein.“

Die übrige Klasse soll nun wetten, ob Peter den ersten Würfel oder den zweiten Würfel erhielt.



- (a) Was tippst du? Bestimme für die beiden Würfel die Wahrscheinlichkeiten!
- (b) Baut euch selber Würfel (auch mit anderen Beschriftungen) und überprüft eure vorher (!) erstellten Berechnungen!