SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Stochastik (SINUS-Transfer)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. Mai 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Kombinatorik

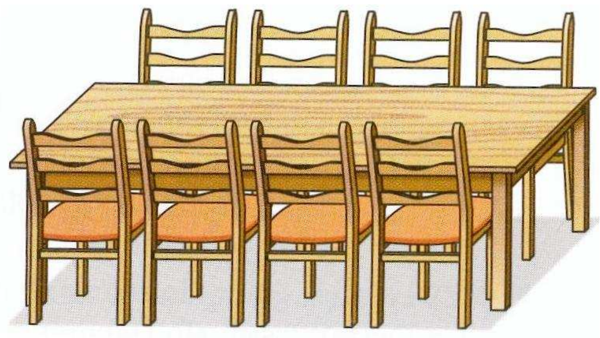
1. **Sitzordnung**

   An einem Tisch soll die Sitzverteilung für 4 Paare festgelegt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es

   (a) wenn die Paare sich gegenüber sitzen sollen?

   (b) wenn die Paare nebeneinander sitzen sollen?

   (c) bei einer beliebigen Anordnung?



Lösung: (a) $4! \cdot 2^4 = 384$

Begründung: Angenommen die Paare bestehen jewils aus Mann und Frau. Dann platziere alle Frauen auf der einen Tischseite. Dazu hat man 4! Möglichkeiten. Nun hat man für jedes Paar zu entscheiden, wie die Tischseiten-Verteilung sein soll. Für jedes Paar gibt es 2 Möglichkeiten, insgesamt also $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$.

(b) $4! \cdot 2^4 = 384$

(c) $8! = 40320$

2. **CD-Player**

   Auf einer Audio-CD sind 13 Titel. Der Zufallsgenerator eines CD-Players wird eingestellt. Berechne, wie viele verschiedene Reihenfolgen der Songs möglich sind.

Lösung: 6.227.020.800

3. **In der Metzgerei**

   Heute bietet die Metzgerei Schnarr 10 Sorten Wurst an. Hans soll 3 verschiedene Sorten Wurst einkaufen. Wie viel Möglichkeiten hat Hans?

Lösung:

- Wir interessieren uns für den Einkauf als Handlung. Dazu gehört sein zeitlicher Ablauf. Dieser kann hervorragend in einem Baumdiagramm dargestellt werden.
  Hans kauft ein erstes Stück Wurst. Dabei hat er 10 Möglichkeiten. Danach kauft er ein zweites Stück Wurst. Gleichgültig, welche Wurst er als erste gekauft hat, gibt es für ihn nun jeweils 9 Möglichkeiten, das zweite Stück Wurst zu kaufen. Insgesamt hat Hans $10 \cdot 9$ Möglichkeiten, zwei Stücke unterschiedlicher Wurst zu kaufen. Schließlich kauft er ein drittes Stück Wurst. Bei jedem der 90 möglichen Einkäufe kann er dazu eine aus 8 Sorten auswählen. Insgesamt hat er $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ Möglichkeiten. Hans kann also 720 verschiedene Einkäufe realisieren.
- Es interessiert nicht der Einkauf als Vorgang, uns interessiert nun nur das Resultat des Einkaufs. Wir fragen: „Wie viele Warenkörbe kann Hans zusammenstellen?“
  Hans kauft drei verschiedene Wurstsorten. Betrachten wir einen Warenkorb. Er enthält drei Wurstsorten. Diese können auf $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Arten angeordnet werden. Der gleiche Warenkorb kann daher durch 6 verschiedene Einkäufe realisiert werden. Die Menge der möglichen Einkäufe zerfällt in elementfremde Teilmengen mit jeweils gleichwertigen Einkaufsergebnissen. Jede dieser Teilmengen heißt „ein Warenkorb“. Keine der Einkaufshandlungen führt zu zwei verschiedenen Warenkörben, und jeweils 6 Einkaufshandlungen liefern den gleichen Warenkorb. Daher gibt es $720 : 6 = 120$ mögliche Warenkörbe.

4. **Leber- und Griebenwurst**

   Wenn Hans Leberwurst kauft, dann erwirbt er auch Griebenwurst, denn dann kocht die Mutter Sauerkraut. Wie viele Warenkörbe gibt es für Hans?

Lösung: *1. Fall:* Hans kauft Leberwurst. Dann kauft er auch Griebenwurst. Danach kann er noch unter 8 Wurstsorten frei wählen. Insgesamt hat er in dieser Situation 8 Möglichkeiten.
2.Fall: Hans kauft keine Leberwurst. Dann wird über den Einkauf von Griebenwurst keine Aussage gemacht. Hans kann nun aus 9 Wurstsorten drei Sorten frei auswählen. Dabei hat er $\frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3} = 84$ Möglichkeiten. Insgesamt erfüllen $(8 + 84)$ Warenkörbe, also 92.

5. **Bierschinken**

Heute hat die Metzgerei Schnarr sogar 57 Sorten Wurst im Angebot.

(a) Wie viele Warenkörbe gibt es für Hans, wenn entweder gekochter Bierschinken oder aber gebackener Bierschinken dabei sein muss?

(b) Hans bringt immer gekochten oder gebackenen Bierschinken mit nach Hause. Wie viele Warenkörbe gibt es für Hans?

Lösung: (a) *1. Möglichkeit:* Hans kauft gekochten, aber keinen gebackenen Bierschinken. Dann steht es ihm frei, aus 55 Sorten zwei beliebige auszuwählen. Hier sind $\frac{55\cdot54}{1\cdot2} = 1485$ Warenkörbe möglich.
2. Möglichkeit: Hans kauft keinen gekochten, aber gebackenen Bierschinken. Hier sind ebenfalls 1485 Warenkörbe möglich.
Insgesamt gibt es 2970 Warenkörbe, welche die Forderung erfüllen.

(b) Weder gekochter noch gebackener Bierschinken sind in $\frac{55\cdot54\cdot53}{1\cdot2\cdot3} = 26235$ Warenkörben. Heute gibt es 57 Sorten Wurst. Dann können $\frac{57\cdot56\cdot55}{1\cdot2\cdot3} = 29260$ verschieden Warenkörbe gebildet werden. Dann gibt es aber $(29260 - 26235)$ Warenkörbe, also 3025 Warenkörbe, die gekochten oder gebackenen Bierschinken enthalten.

6. **Wurst und Käse**

Heute bietet die Metzgerei Meyer an der Wursttheke 38 Sorten Wurst und an der Käsetheke 8 Sorten Käse an. Die Kunden kaufen erfahrungsgemäß zuerst Wurst und dann Käse.

(a) Kathrin soll 3 Sorten Wurst und 2 Sorten Käse mitbringen. Wie viele Warenkörbe dieser Art gibt es?

(b) Kathrin weiß es besser: „Käse ist für meinen Papa gesünder“, denkt sie und kauft 2 Sorten Wurst und 3 Sorten Käse. Wie viele Warenkörbe kann sie zusammenstellen?

(c) Im Laden sieht Kathrin, dass die Theken zusammengestellt sind. Sie kauft fünf Sorten Lebensmittel in beliebiger Reihenfolge. Wie viele Warenkörbe sind möglich?

(d) Kathrin kauft 2 Sorten Wurst und 3 Sorten Käse in beliebiger Reihenfolge. Wie viele Warenkörbe sind möglich?

Lösung: (a) $\frac{38 \cdot 37 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 8436 \cdot 28 = 236208$ Warenkörbe

(b) $\frac{38 \cdot 37}{1 \cdot 2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 703 \cdot 56 = 39368$ Warenkörbe

(c) $\frac{46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1370754$ Warenkörbe

(d) Es kommt auf die Reihenfolge nicht an, in welcher die Lebensmittel erworben werden. Wir wissen aus der Teillösung (b), dass es 39368 Warenkörbe sind. Um Zweifel zu beseitigen, berechnen wir das Ergebnis noch anders - und zwar auf dem Wege, welcher dem realen Handlungsablauf entspricht.
Das Quintupel (w,w,k,k,k) beschreibt $38 \cdot 37 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 472416$ mögliche Einkäufe; (w,k,k,w,k) beschreibt $38 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 37 \cdot 6 = 472416$ mögliche Einkäufe. Insgesamt gibt es $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ solcher Quintupel mit zwei „w“ und drei „k“, welche für jeweils 472416 mögliche Einkäufe stehen. Insgesamt sind nun $472416 \cdot 10 = 4724160$ Einkäufe möglich, wobei uns die Reihenfolge interessiert.
Zu beachten ist, dass in der Einkaufstasche 5 verschiedene Lebensmittel liegen. Diese können auf $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ verschiedene Reihenfolgen erworben worden sein. Daher gibt es hier $4724160 : 120 = 39368$ Warenkörbe.

7. **Frau Seidel**

In der Metzgerei Wagner gibt es 46 Sorten Wurst und 7 Sorten Käse. Frau Seidel ist der Meinung, sie könne $(\frac{45 \cdot 44}{1 \cdot 2} \cdot 7 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3})$ Warenkörbe zusammenstellen. Welche Bedingungen stellt Frau Seidel an ihre Einkäufe? Erzähle eine Geschichte.

Lösung: Frau Seidel kauft niemals Mettwurst. Abgesehen davon kauft sie entweder zwei Sorten Wurst und eine Sorte Käse oder aber keine Wurst und dafür drei Sorten Käse.

8. **Fußball-WM**

An der Fußball-WM nehmen 32 Nationen teil, die in acht Spielgruppen aufgeteilt werden. Wie viele mögliche Aufteilungen gibt es, wenn

(a) die Gruppeneinteilung zufällig erfolgt,

(b) vier bestimmte Mannschaften gesetzt werden (je Gruppe eine) und die restlichen Mannschaften zufällig auf die Gruppen verteilt werden,

(c) die 16 Nationen in vier Kategorien zu je vier Mannschaften aufgeteilt werden (z.B. vier nord-, vier west-, vier ost- und vier südeuropäische Mannschaften) und in jede Gruppe aus jeder Kategorie je ein Vertreter gelost wird?

9. Geheimbotschaften

Lars und Tim Hendrik haben zusammen eine Geheimschrift ausgeknobelt. Sie ersetzen in einer Nachricht jeden Buchstaben durch einen anderen, der im Alphabet erst nach fünf weiteren Buchstaben folgt.
Damit die Mitteilungen schneller verschlüsselt und entschlüsselt werden können, haben beide ein Hilfsmittel zur Darstellung dieser Geheimschrift.

a) Entwickle eine Darstellung, die dir als Schlüssel dienen kann.

b) Entschlüssele folgenden Satz:
JKX SGZNKSGZOQATZKXXOINZ HXOTMZ YVGYY.

c) Verschlüssele folgenden Satz:
WAS HAST DU AM WOCHENENDE GEMACHT.

d) Schreibe eine Antwort in Geheimschrift an deinen Nachbarn.

*e) Entwickle eine eigene Geheimschrift und schreibe eine Botschaft.

*f) Kannst du hier den Schlüssel bestimmen? Wenn ja, dann schreibe ihn auf.
BYQ FYQR BS ESR ECKYAFR.

(* Zusatzaufgabe)

Lösung: Lösungen zur Geheimbotschaften-Aufgabe

a) SCHLÜSSEL

Original	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Geheim	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F

b)

JKX SGZNKSGZOQATZKXXOINZ HXOTMZ YVGYY
DER MATHEMATIKUNTERRICHT BRINGT SPASS

c)

WAS HAST DU AM WOCHENENDE GEMACHT?
CGY NGYZ JA GS CUINKTKTJK MKSGINZ?

d) OIN NGHK MKRKYKT. (Vorschlag)

e) Entwickle eine eigene Geheimschrift und schreibe eine Botschaft.

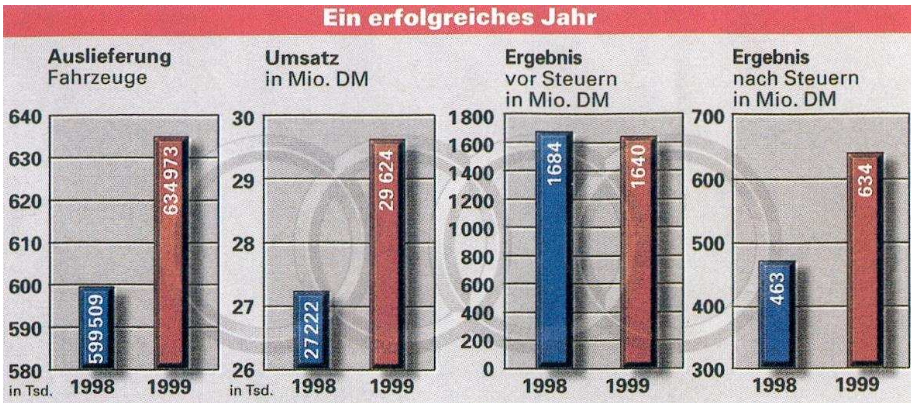
f) SCHLÜSSEL

Original	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Geheim	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X

2 Diagramme, Statistiken

1. **Audi-Bilanz**

   Am Ende eines jeden Jahres erstellen Firmen eine Bilanz der Unternehmensergebnisse, um zu schauen, ob sie sich im Vergleich zum Vorjahr verbessert bzw. verschlechtert haben. Für die Öffentlichkeit und besonders für potentielle Aktienkäufer werden die Bilanzen besonders dargestellt. Die vier unten abgebildeten Balkendiagramme stellen die Jahresbilanz des Audikonzerns der Jahre 1998 und 1999 gegenüber.

   (a) Beschreibe, welchen Eindruck die Grafiken dem Betrachter beim ersten Anblick vermitteln und wodurch dies erreicht wird.

   (b) Versuche, für die Daten eine andere Darstellungsart zu finden. Welchen Eindruck erhält man nun von der Jahresbilanz 1999 des Audikonzerns?

   (c) Können die Ergebnisse des Audikonzerns auch besonders schlecht dargestellt werden?

   (d) Was ist die richtige"Darstellungsart der Jahresbilanz?

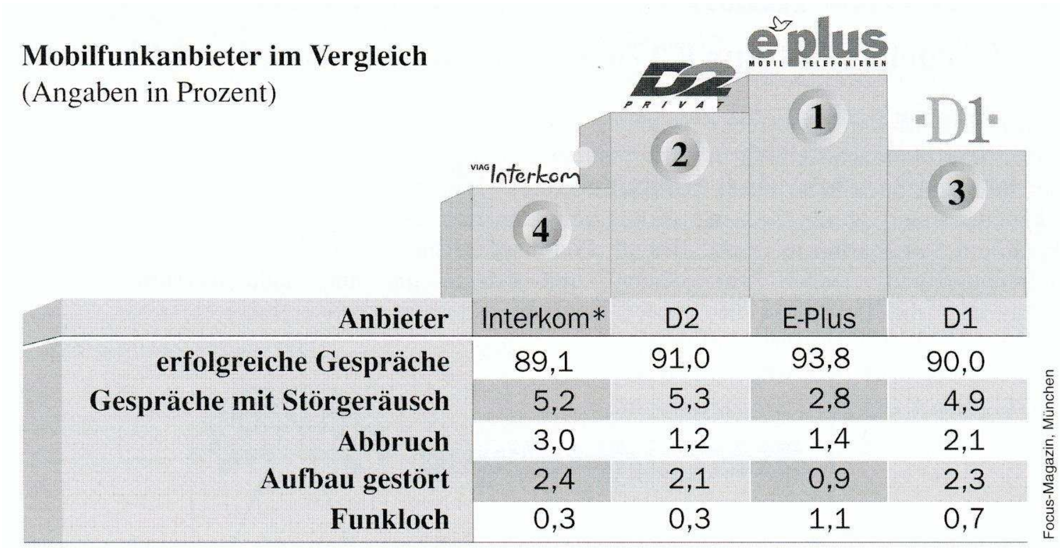
   Quelle: mathematik lehren (2000) Heft 103, S. 67

   Variation: Schüler suchen ähnliche Fälle in Printmedien

Lösung: Lediglich beim dritten Balkendiagramm, bei dem die im Vergleich zum Vorjahr etwas schlechtere Jahresbilanz „vor Steuern“ dargestellt wird, ist die linke Skala von 0 an skaliert. Bei den übrigen dreien werden die positiven Ergebnisse dadurch verstärkt dargestellt, dass man nur Ausschnitte der linken Skalen sieht. Eine eindeutige Antwort auf Frage d gibt es wohl nicht. Das kommt ganz darauf an. . .

2. **Telefonanbieter**

Die Zeitschrift FOCUS (in der Ausgabe 45/99) fasst die Ergebnisse eines Testes von Mobilfunkanbietern in einer Grafik zusammen.



Anbieter	Interkom*	D2	E-Plus	D1
erfolgreiche Gespräche	89,1	91,0	93,8	90,0
Gespräche mit Störgeräusch	5,2	5,3	2,8	4,9
Abbruch	3,0	1,2	1,4	2,1
Aufbau gestört	2,4	2,1	0,9	2,3
Funkloch	0,3	0,3	1,1	0,7

(a) Welcher Eindruck wird durch die Grafik erzielt?

(b) Sind die Prozentangaben angemessen veranschaulicht?

(c) Gestalte mit diesen Angaben jeweils eine Werbe-Anzeige für die vier Mobilfunkanbieter.

Quelle: Herget/Jahnke/Kroll: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, Berlin 2001, S. 84

Variation:

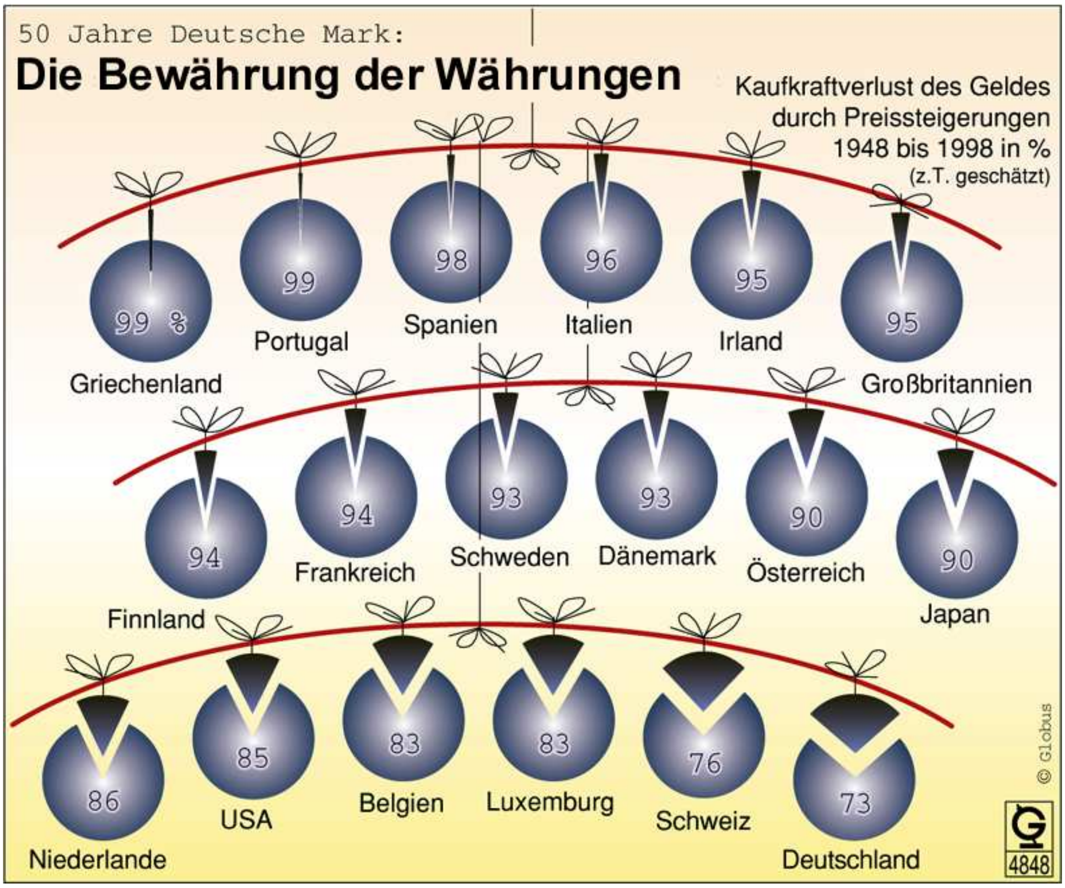
Vergleich von anderen arfen, graphische Darstellung

Lösung:

- Die Grafik erzielt den Eindruck, dass E-plus den anderen Mobilfunkanbietern deutlich überlegen ist. Vermutlich wurde sie mithilfe der ersten Zeile der Tabelle erstellt. Diese Zahlen sind aber nicht korrekt in Balkenlängen umgerechnet worden. Dadurch wird der Eindruck vermittelt, als kämen bei dem konkurrierenden Anbieter Interkom nur etwa halb so viele Gespräche zustande wie bei E-plus.
- Den tatsächlichen Unterschied in den Prozentzahlen der erfolgreichen Gespräche (geringer als 4%) würde ein Kunde in der Praxis kaum merken.

3. **Der harte €**

(a) Erläutere die Grafik!



(b) Berechne den durchschnittlichen jährlichen Kaufkraftverlust des Geldes für die einzelnen Länder!

(c) Nach wie vielen Jahren waren dementsprechend die einzelnen Währungen jeweils nur noch halb so viel wert?

(d) Finde einen Zusammenhang zwischen dem jährlichen Kaufkraftverlust und der Halbwertzeit des Geldes!

Quelle: Herget/Jahnke/Kroll: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, Berlin 2001, S. 88

Lösung: (a) Der Kaufkraftverlust betrug von 1948 auf 1998 zum Beispiel für Deutschland 73%. Das bedeutet, dass 100 €, die Großmutter 1948 in den Strickstrumpf tat, 1998 nur noch eine Kaufkraft von 27 € hatten.

(b) Griechenland / Portugal - $8,8\%$
Spanien - $7,53\%$
Italien - $6,23\%$
Irland / GRB - $5,82\%$
USA - $3,72\%$
Schweiz - $2,81\%$
Finnland / Frankreich - $5,47\%$

Schweden / Dänemark - $5,18\%$
Österreich / Japan - $4,5\%$
Niederlande - $3,86\%$
Belgien / Luxemburg - $3,48\%$
Deutschland - $2,58\%$

(c) Griechenland / Portugal - $7,5$
Spanien - $8,9$
Italien - $10,8$
Irland / GRB - $11,6$
USA - $18,3$
Schweiz - $24,3$
Finnland / Frankreich - $12,3$
Schweden / Dänemark - 13
Österreich / Japan - $15,1$
Niederlande - $17,6$
Belgien / Luxemburg - $19,6$
Deutschland - $26,5$

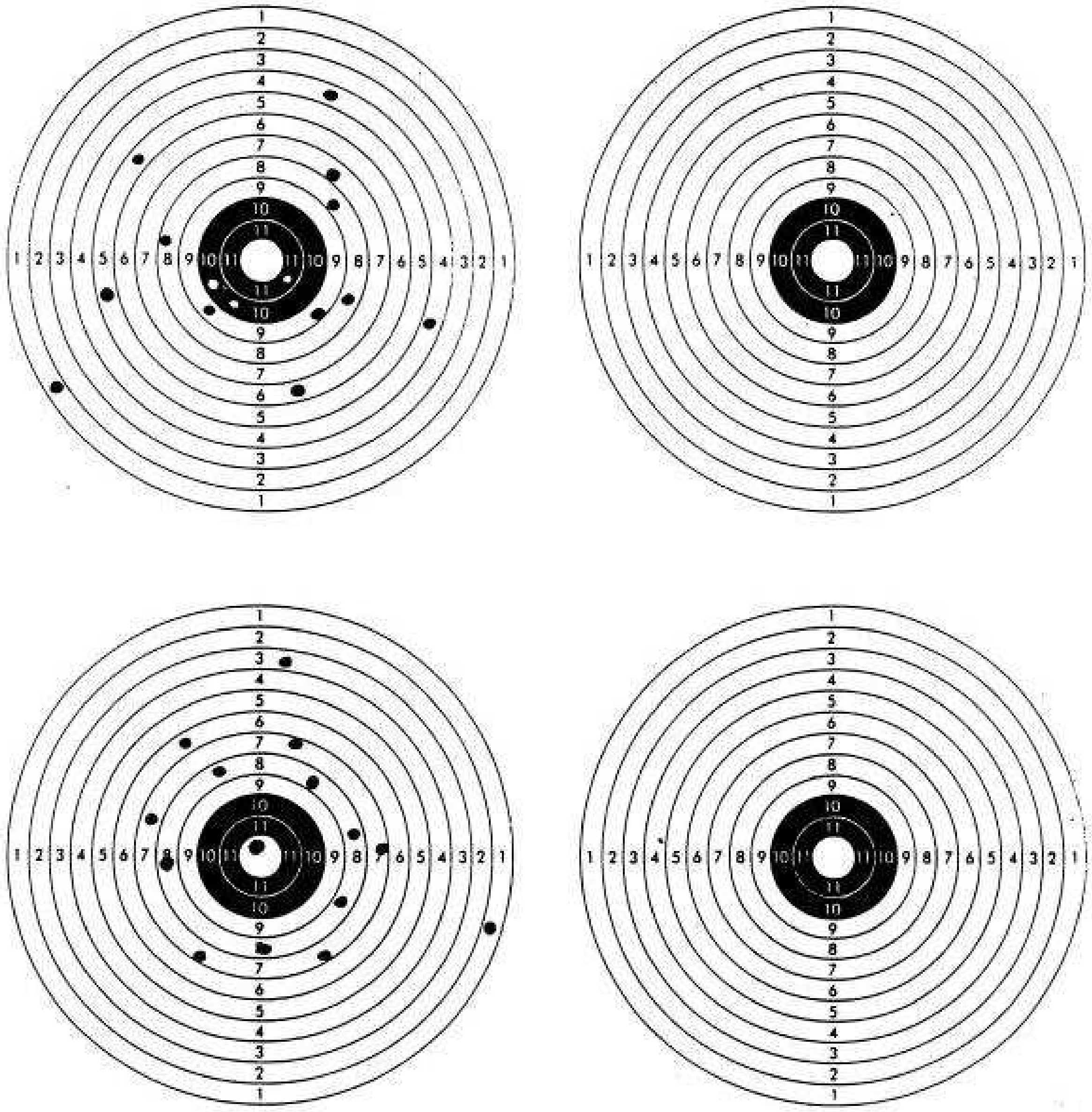
(d) Für den Zusammenhang zwischen der jährlichen Geldentwertung ($p\,\%$) und der Halbierungszeit H der Kaufkraft in Jahren gilt näherungsweise: $p\,\% \cdot H \approx 0,7$.

4. **Schützenverein**

Zwei Schützen messen sich im Schießen mit dem Luftgewehr. Beide geben 15 Schuss auf eine Zielscheibe ab (siehe unten links).

(a) Welcher von beiden ist nach deiner Meinung der bessere Schütze?
Begründe deine Antwort. Wie könnte man den Qualitätsunterschied messen?

(b) Markiere auf den beiden Zielscheiben unten rechts die Einschüsse von zwei Schützen wie folgt: Bei beiden soll die Zahl der Schüsse 10 und die „Summe der Ringe“ 90 betragen, in einem Fall sollen aber die Schüsse möglichst weit über die Scheibe verteilt sein, im anderen sehr konzentriert.



Quelle: Herget/Jahnke/Kroll: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, Berlin 2001, S. 85

Variation: Noten - arithm. Mittel vs. Median

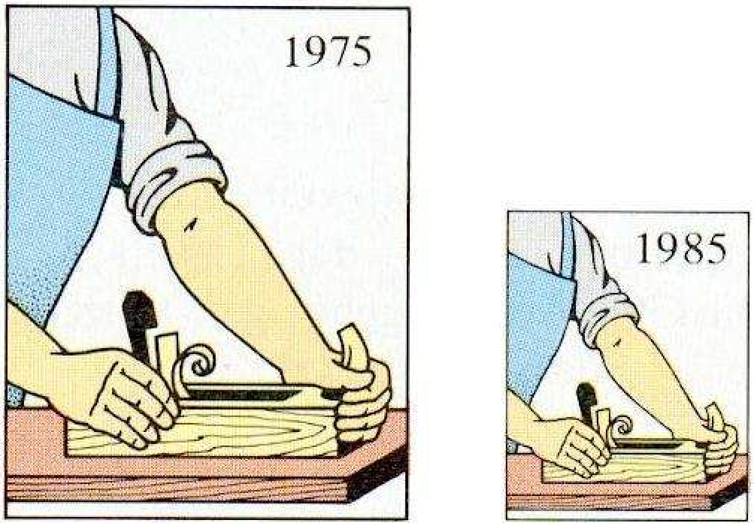
Lösung: (a) Die Summe der Ringe ist in jedem Fall gleich, nämlich 105. Jeder trifft also im Mittel pro Schuss den siebten Ring. Die maximale Abweichung von diesem Mittelwert ist ebenfalls gleich, nämlich 6. Aber die durchschnittliche absolute Abweichung beträgt im ersten Fall $2,3$ und im zweiten Fall $1,5$. Das heißt, die Treffer, des zweiten Schützen, streuen weniger und konzentrieren sich, wie man unmittelbar sieht, auf wenige Ringe. Er kann deshalb als der bessere oder zuverlässigere Schütze gelten.

Das ist aber nur eine mögliche Antwort. Man kann auch argumentieren, dass der erste drei Mal ins Schwarze trifft und das im „Ernstfall“ viel wichtiger ist.

5. **Bildbetrug**

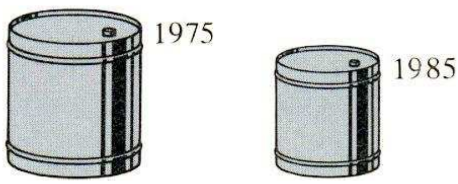
In den Tageszeitungen findet man oft bildliche Darstellungen, in denen die Häufigkeiten flächenhaft oder körperhaft dargestellt werden. Diese Darstellungen können aber oft die Betrachter gewollt oder ungewollt irreführen.

(a) In einem Bezirk ist die Anzahl der Schreiner-/Tischler-Betriebe von 1975 bis 1985 auf 60% abgesunken.



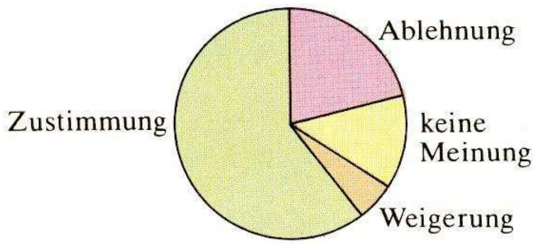
In der nebenstehenden Abbildung ist die Länge der Seiten im rechten Bild 60% der Länge der Seiten im linken Bild. Gibt die Abbildung die Abnahme der Anzahl der Betriebe „richtig“ an?
Welchen Eindruck hast du aufgrund der Abbildung?

(b) Die Öleinfuhren der Bundesrepublik Deutschland betrugen 1985 nur noch 80% der Einfuhren von 1975.



Rechts sind die Öleinfuhren durch jeweils zwei Fässer veranschaulicht worden. Die Fasshöhe und der Fassdurchmesser des kleinen Fasses sind in der oberen Abbildung jeweils 80% des größeren Fasses. In der unteren Abbildung ist der Fassinhalt auf 80% verringert. Nimm Stellung dazu!

(c) Das Ergebnis einer Umfrage ist in einem Kreisdiagramm festgehalten worden (→).



Es kann auch durch sogenannte Piktogramme veranschaulicht werden (↓).

Welche Darstellungsart ist dem Problem angemessen? Welche Eindrücke werden durch die verschiedenen Darstellungsarten erweckt?

Quelle: Mathematik heute. Differenzierte Ausgabe (1988), S. 180

6. **Neues aus Frankreich**

Klar, die Zeiten vom Bundesberti sind lange vorbei. Aber damals in Frankreich hat er doch so etwas wie Kultstatus erreicht …
Berti Vogts kann sich nicht entscheiden, welchen Spieler er Elfmeter für seine Nationalmannschaft schießen lässt. Eine Vorauswahl hat er schon getroffen. Für ihn

kommen nur Jürgen Klinsmann, Olaf Thon, Lothar Matthäus, Andy Möller oder Thomas Häßler in Frage.
Um sicher zu gehen, den richtigen Spieler auszuwählen, lässt er seine Favoriten im Training Elfmeter üben. Jedoch können nicht alle Spieler gleich oft schießen. Von seinem Torhüter bekommt er folgende Information:

Name	Tore	Verschoss. Elfmeter	Anzahl Versuche	Rel. Trefferhäufigkeit
Klinsmann	24	16		
Häßler	21	9		
Matthäus	10	5		
Möller	25	15		
Thon	18	7		

(a) Fülle die Tabelle weiter aus !

(b) Welchen Spieler wird Berti Vogts im Spiel Elfmeter schießen lassen? Warum?

Dieter Hamann ist enttäuscht, dass er für Berti Vogts nicht in Frage kam. Er legt sich den Ball auf den Elfmeterpunkt und schießt. Er trifft!

(c) Sollte Berti Vogts Dieter Hamann schießen lassen?
Begründe Deine Antwort!

Thomas Häßler ist nach dem Training verärgert, weil er sehr gerne die Elfmeter für Deutschland schießen würde. Er sagte in einem Interview: „ . . . Hätte ich die beiden letzten Elfmeter nicht geschossen, hätte sich Herr Vogts wohl für mich entschieden . . . “

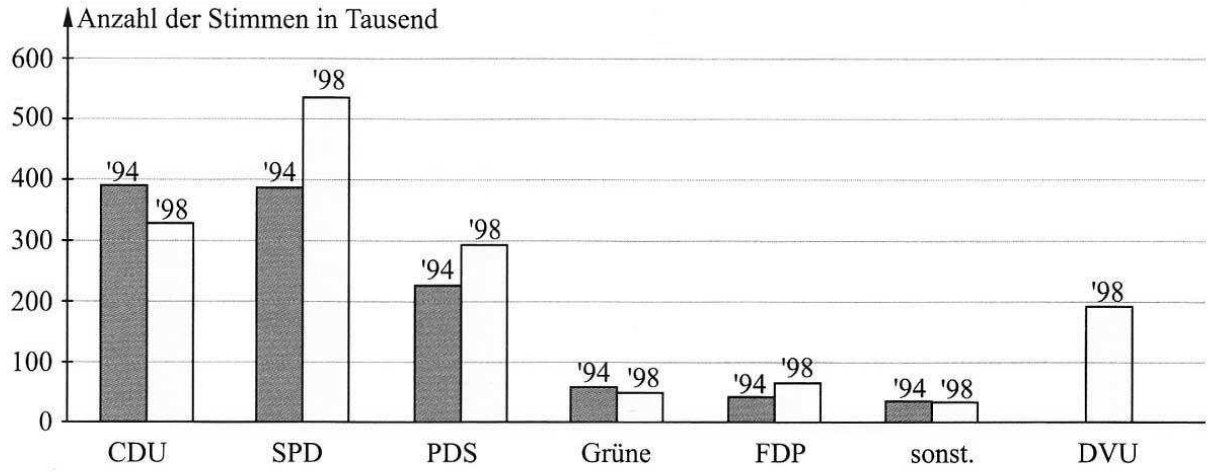
(d) Was sagst Du zu dieser Aussage?

7. **Wahlen**

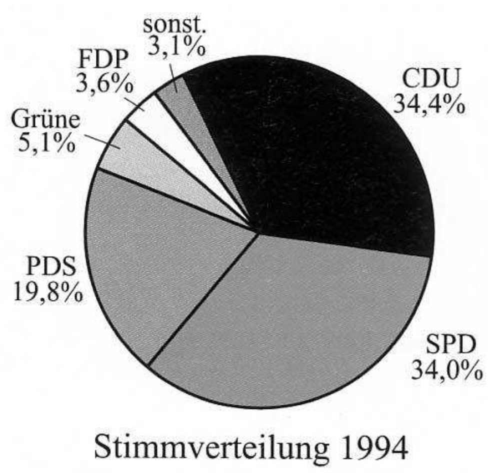
Tabelle

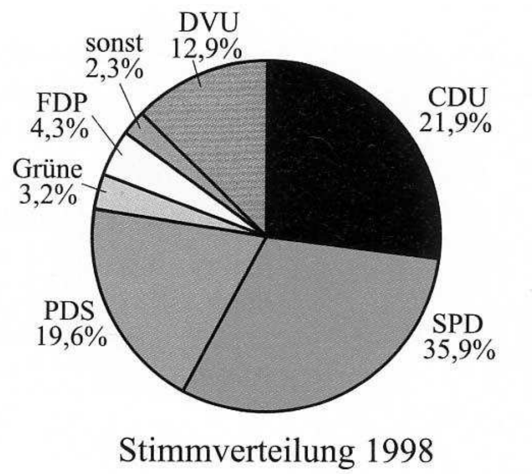
	Anzahl der Stimmen Wahl 1994	Anzahl der Stimmen Wahl 1998
CDU	391000	327000
SPD	387000	536000
PDS	225000	293000
Grüne	58000	48000
FDP	41000	64000
sonst.	35000	34000
DVU	0	192000

Säulendiagramm

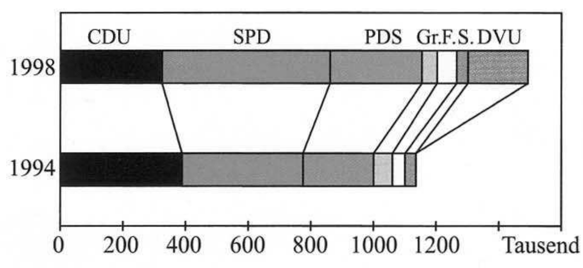


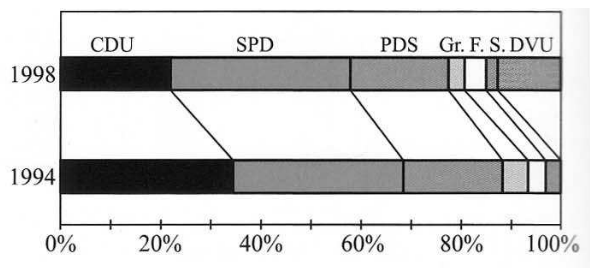
Kreisdiagramm





Blockdiagramm





Hier sind die Ergebnisse der Landtagswahl in Sachsen-Anhalt im April 1998 auf verschiedene Weisen dargestellt.

(a) Beschreibt kurz, welche Informationen man jeweils aus den Abbildungen entnehmen kann.

(b) Die Tabelle sei vorgegeben. Wie kann man daraus die anderen Darstellungsformen ableiten?

(c) Vergleicht die verschiedenen Darstellungsformen miteinander.

(d) Benennt jeweils auch Vor- und Nachteile.

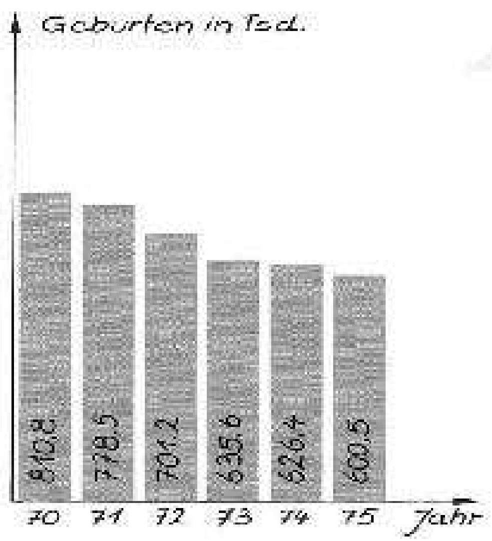
Quelle: Elemente der Mathematik 11 (1999)

8. **Vorsicht Statistik! (1)**

Die beiden neben stehenden Säulendiagramme zeigen die Geburtenrate in Deutschland für die Zeit von 1970 bis 1975. Beide Tabellen stellen trotz ihres unterschiedlichen Aussehens den selben Sachverhalt dar.

(a) Welchen unterschiedlichen Eindruck vermitteln die beiden Diagramme?

(b) Welchen Vor- bzw. Nachteil haben sie?



Quellen: Schnittpunkt 10; Elemente 11; mathematik lehren (2002), H. 102, S. 59

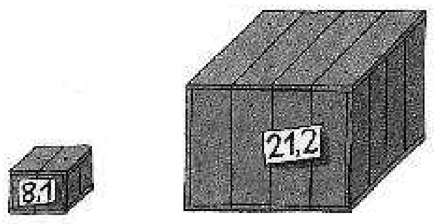
Lösung: Fortlassen eines Sockelbetrages

9. **Vorsicht Statistik! (2)**

Die Umweltschutzausgaben der Industrie für die Einrichtung und Unterhaltung von Anlagen stiegen innerhalb von 10 Jahren von $8,1$ Mrd. €auf $21,2$ Mrd. €.

(a) Was ist an der Darstellung falsch? Welchen Eindruck soll die Manipulation bewirken?

(b) Zeichne eine geeignetere Darstellung des Sachverhalts. Nenne Vor- bzw. Nachteile der verschiedenen Darstellungen.



Lösung: Verstoß gegen die Proportionalität bei 3-dimensionalen Symbolen oder Flächen

10. **Vorsicht Statistik! (3)**

Die Grafik zeigt die Ergebnisse der Bundestagswahlen von 1949 bis 1998.

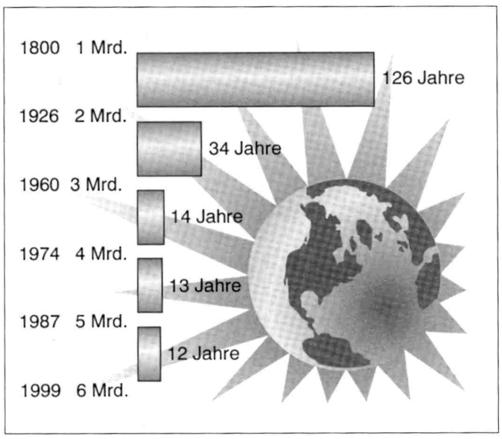
(a) Welche Partei bekam 1970 die meisten Stimmen?

(b) Nenne mögliche Gründe für diese Manipulation?

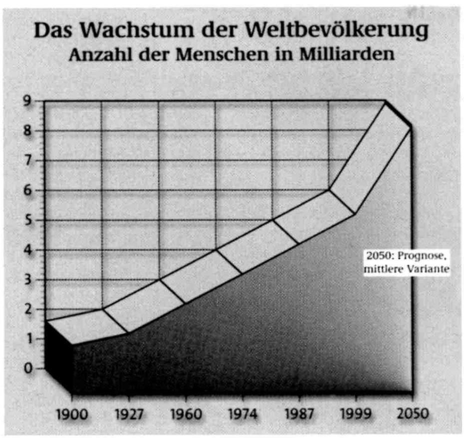
Lösung: Verwendung von Polygonzügen (Genaugenommen falsch, aber es soll natürlich gerade die Änderungen visualisieren)

11. **Vorsicht Statistik! (4)**

Das Wachstum der Weltbevölkerung, sinnvoll und weniger sinnvoll dargestellt:



Schroedel@ktuell, Erdkunde, September 1999



Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit (Hrsg.): Aus Verantwortung für die Zukunft. Umweltpolitik als globale Herausforderung. Berlin, Januar 2000.

(a) Untersuche die beiden Darstellungsformen. Nenne Vor- und Nachteile.

(b) Zeichne eine geeignetere Darstellung des Sachverhalts.

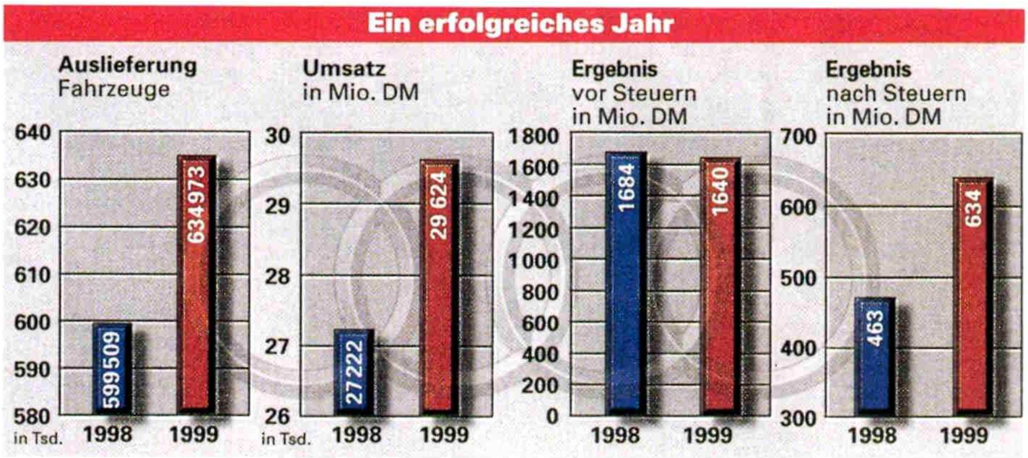
Lösung: Keine Äquidistanz auf den Achsen

12. **Vorsicht Statistik! (5)**

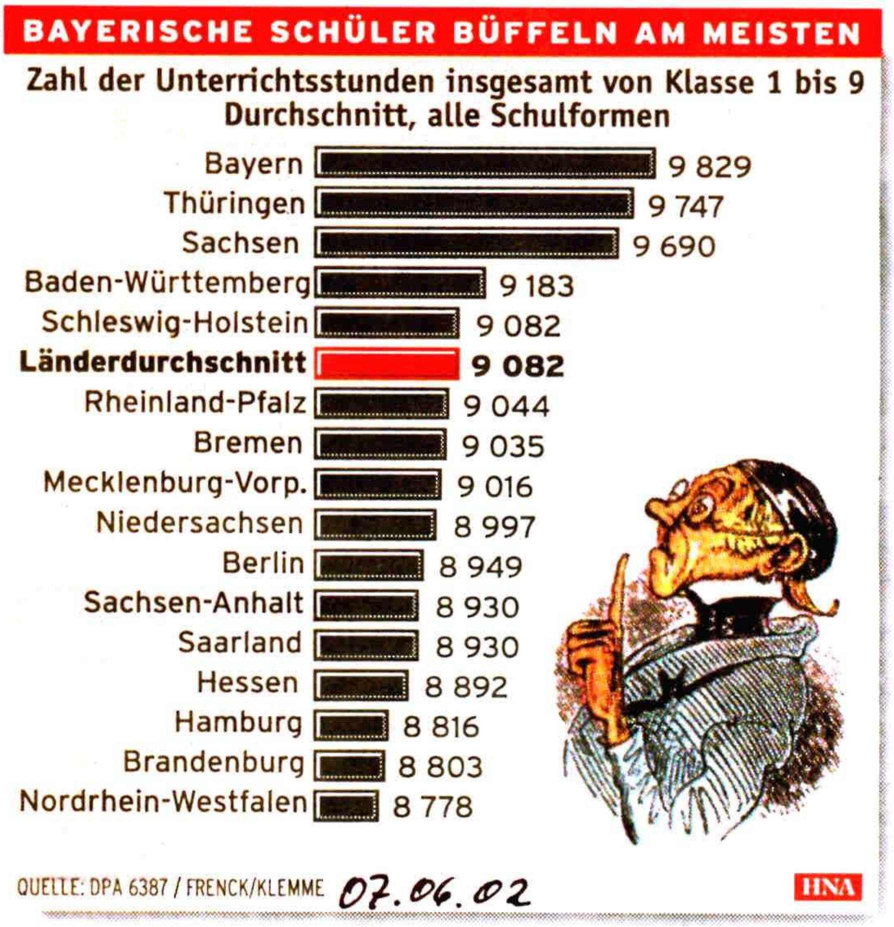
Fasse die unterschiedlichen Fehler bei der Aufbereitung und Darstellung statistischer Daten zusammen.

Lösung: Verstöße gegen perspektivische Verzerrungen (vgl. Piktogramm b)

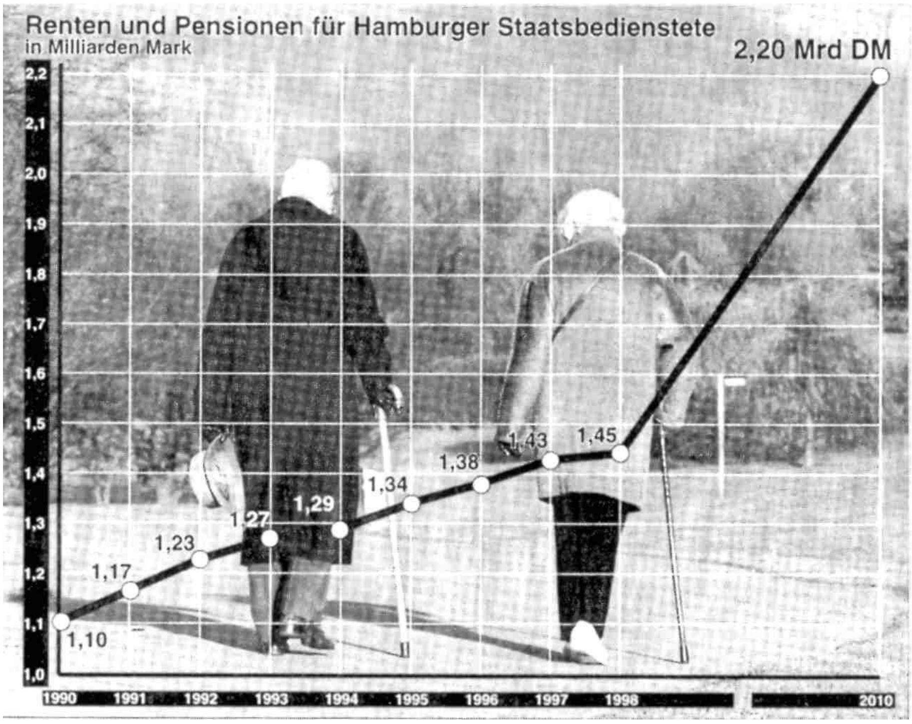
13. **Mathematik aus der Zeitung**

(a) 

Audi mobil, März 2000


BAYERISCHE SCHÜLER BÜFFELN AM MEISTEN
Zahl der Unterrichtsstunden insgesamt von Klasse 1 bis 9
Durchschnitt, alle Schulformen
Bayern 9 829
Thüringen 9 747
Sachsen 9 690
Baden-Württemberg 9 183
Schleswig-Holstein 9 082
Länderdurchschnitt 9 082
Rheinland-Pfalz 9 044
Bremen 9 035
Mecklenburg-Vorp. 9 016
Niedersachsen 8 997
Berlin 8 949
Sachsen-Anhalt 8 930
Saarland 8 930
Hessen 8 892
Hamburg 8 816
Brandenburg 8 803
Nordrhein-Westfalen 8 778
QUELLE: DPA 6387 / FRENCK/KLEMME
07.06.02
HNA

(b)

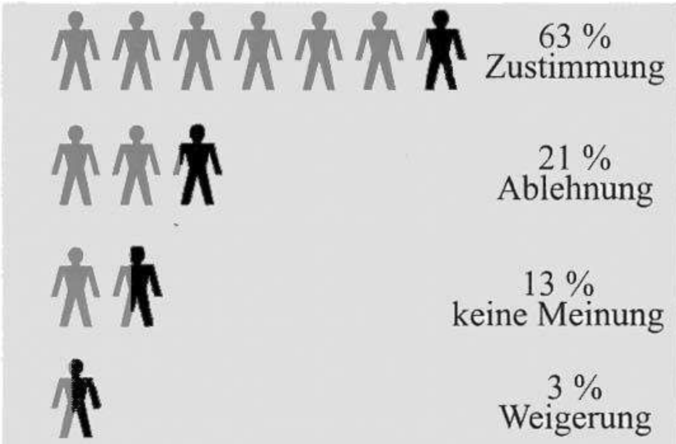

Renten und Pensionen für Hamburger Staatsbedienstete
in Milliarden Mark
2,20 Mrd DM
2,2
2,1
2,0
1,9
1,8
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
1,10
1,17
1,23
1,27
1,29
1,34
1,38
1,43
1,45
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
2010

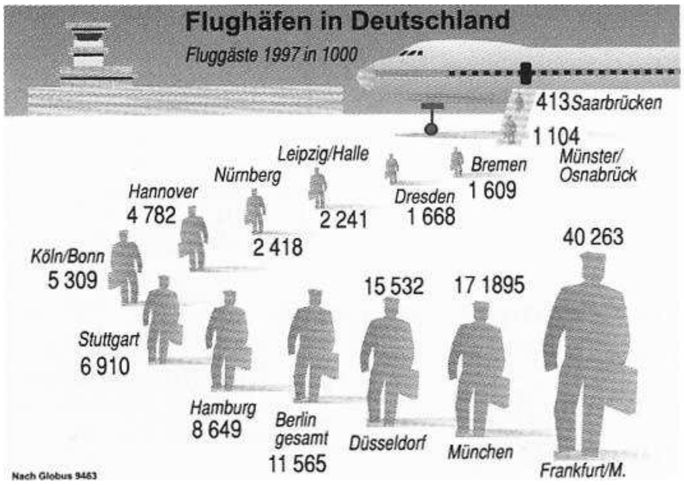
(c)

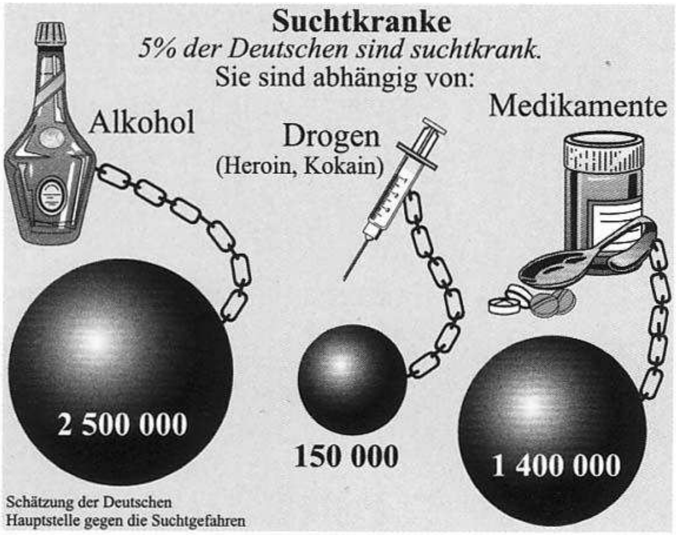
Erläutere, was durch die oben abgebildeten Grafiken ausgedrückt werden soll. Ist die Darstellungsform jeweils angemessen?

14. **Piktogramme**

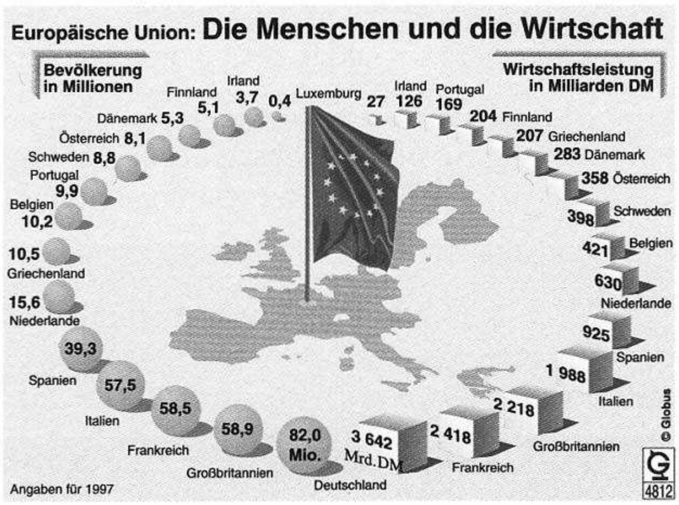
Zur Darstellung von Häufigkeiten werden oft so genannte Piktogramme verwendet, die mithilfe von Symbolen die betrachteten Größen veranschaulichen sollen.

(a)


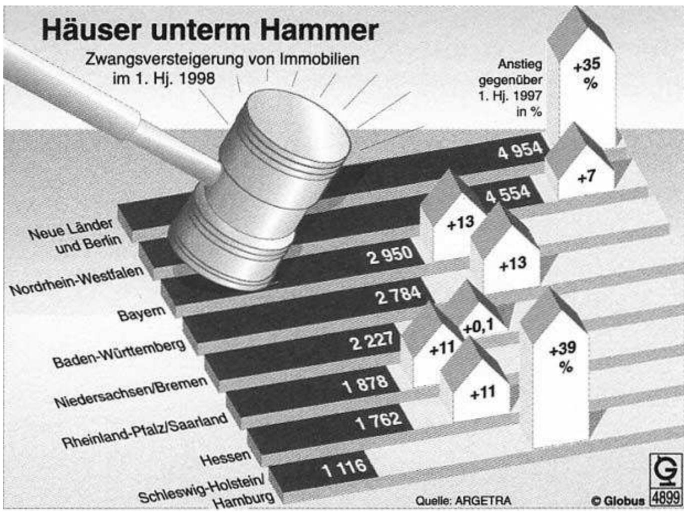
(b)



Suchtkranke
5% der Deutschen sind suchtkrank.
Sie sind abhängig von:
Alkohol
Drogen
(Heroin, Kokain)
Medikamente
2 500 000
150 000
1 400 000
Schätzung der Deutschen
Hauptstelle gegen die Suchtgefahren

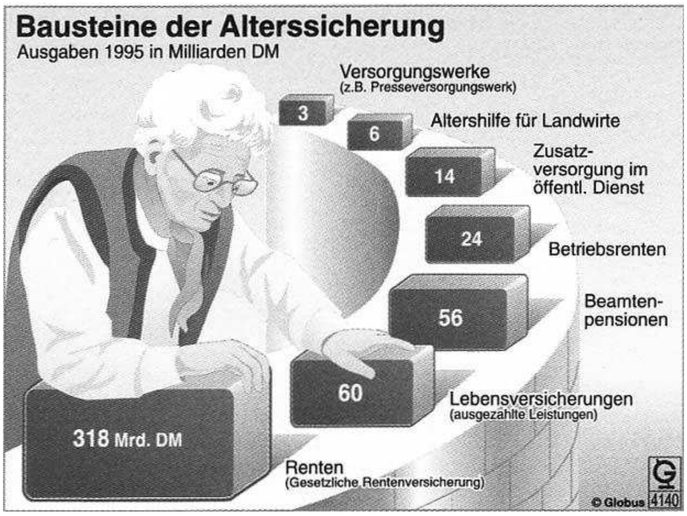
(c)


Europäische Union: Die Menschen und die Wirtschaft
Bevölkerung in Millionen
Wirtschaftsleistung in Milliarden DM
Luxemburg 0,4
Irland 3,7
Finnland 5,1
Dänemark 5,3
Österreich 8,1
Schweden 8,8
Portugal 9,9
Belgien 10,2
10,5 Griechenland
15,6 Niederlande
39,3 Spanien
57,5 Italien
58,5 Frankreich
58,9 Großbritannien
82,0 Mio. Deutschland
27
Irland 126
Portugal 169
204 Finnland
207 Griechenland
283 Dänemark
358 Österreich
398 Schweden
421 Belgien
630 Niederlande
925 Spanien
1 988 Italien
2 218 Großbritannien
2 418 Frankreich
3 642 Mrd.DM
Angaben für 1997
© Globus
4812

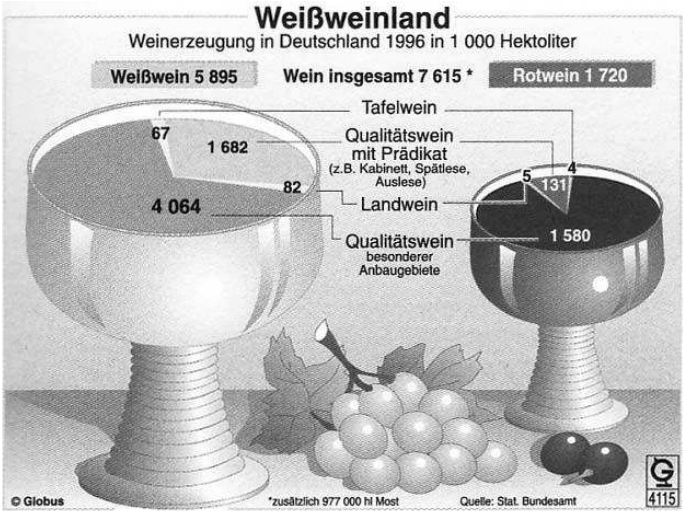
(d)


Häuser unterm Hammer
Zwangsversteigerung von Immobilien
im 1. Hj. 1998
Anstieg gegenüber 1. Hj. 1997 in %
Neue Länder und Berlin 4 954 +35 %
Nordrhein-Westfalen 4 554 +7
Bayern 2 950 +13
Baden-Württemberg 2 784 +13
Niedersachsen/Bremen 2 227 +0,1
Rheinland-Pfalz/Saarland 1 878 +11
Hessen 1 762 +11
Schleswig-Holstein/Hamburg 1 116 +39 %
Quelle: ARGETRA
© Globus 4899

(e)



(f)



(g)

(h)

Erläutere, was durch die oben abgebildeten Piktogramme ausgedrückt werden soll. Ist die Darstellungsform jeweils angemessen?

Quelle: Elemente 11 (1999)

15. **Gleichberechtigung der Frauen?**

Frauenrechtlerinnen betonen:
„Obwohl Frauen und Männer nach dem Gesetz gleichberechtigt sind, werden Frauen immer noch in vielen Bereichen benachteiligt.“
Lässt sich diese Aussage mithilfe der folgenden Daten bestätigen oder widerlegen?

Aus einer Bevölkerungsstatistik	Gesamt	davon weiblich
Gesamtbevölkerung	80 438 000	41 485 000
Schulabgänger	928 200	438 830
– ohne Abschluß	63 600	23 340
– mit Hauptschulabschluß	209 600	91 800
– mit Realschulabschluß	356 200	184 150
– mit Hochschulreife	298 800	139 540
Studierende	1 858 455	745 924
Erwerbstätige	34 660 000	13 583 000
Arbeitslose	2 142 000	1 153 000

Quelle: Mathematik heute 9 (1996)

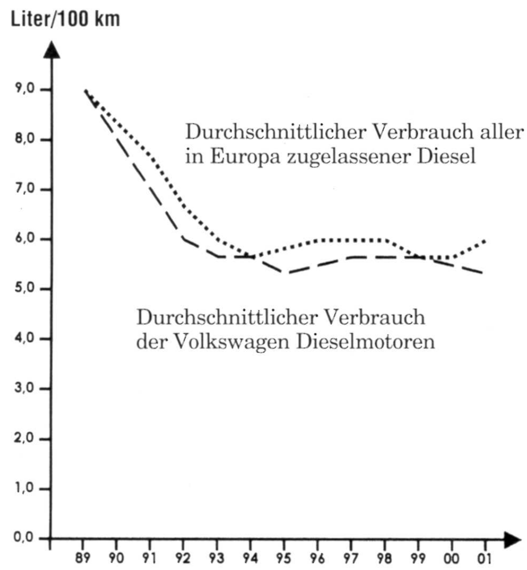
Lösung:

Berechnung der entsprechenden Mädchen-/Frauenanteile:

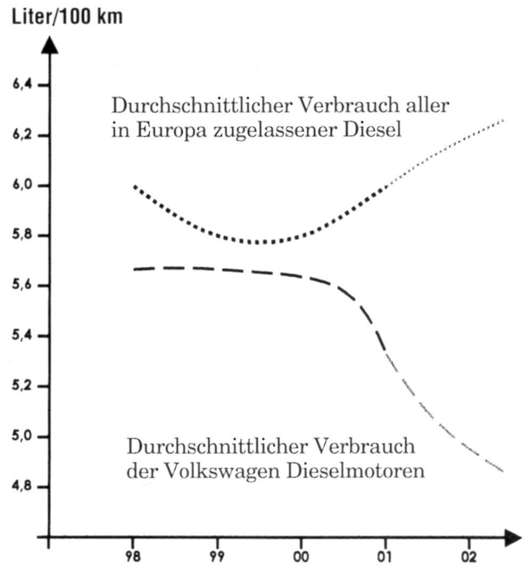
an der Gesamtbevölkerung		$51,6\%$
an den Schulabgängern		$47,3\%$
davon - ohne Abschluss		$36,7\%$
	- mit Hauptschulabschluss	$43,8\%$
	- mit Realschulabschluss	$51,7\%$
	- mit Hochschulreife	$46,7\%$
an den Studierenden		$40,1\%$

16. **Die Zeitungsredaktion**

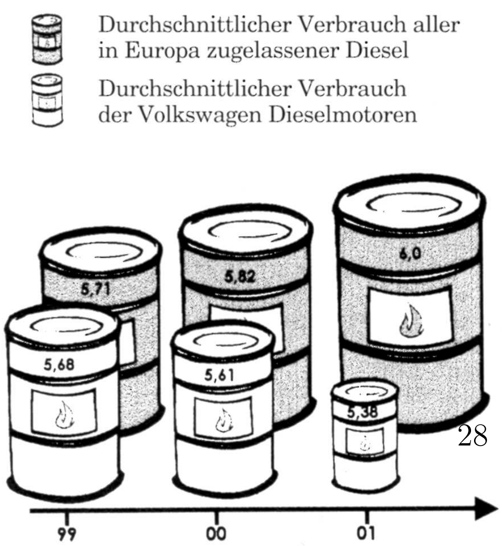
Ihr seid Mitglieder einer Zeitungsredaktion und erhaltet die folgende Grafik.
Erstellt eine möglichst „griffige“ Schlagzeile und formuliert eine Kurzmitteilung (nicht mehr als vier Sätze).
Zwei aus eurer Gruppe präsentieren eure Ergebnisse anschließend auf einer Redaktionssitzung, bei der euer Vorschlag diskutiert wird.



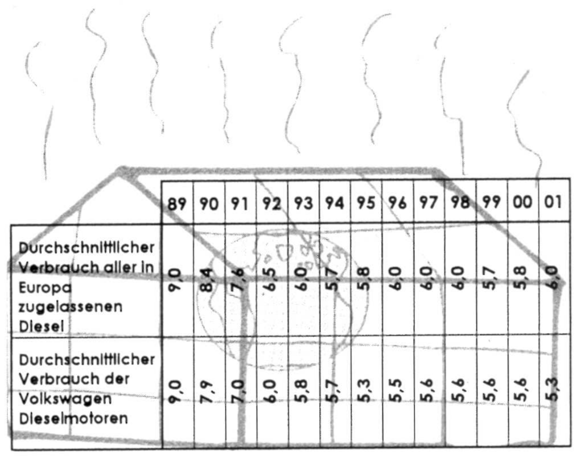
Ihr seid Mitglieder einer Zeitungsredaktion und erhaltet die folgende Grafik.
Erstellt eine möglichst „griffige“ Schlagzeile und formuliert eine Kurzmitteilung (nicht mehr als vier Sätze).
Zwei aus eurer Gruppe präsentieren eure Ergebnisse anschließend auf einer Redaktionssitzung, bei der euer Vorschlag diskutiert wird.



Ihr seid Mitglieder einer Zeitungsredaktion und erhaltet die folgende Grafik.
Erstellt eine möglichst „griffige“ Schlagzeile und formuliert eine Kurzmitteilung (nicht mehr als vier Sätze).
Zwei aus eurer Gruppe präsentieren eure Ergebnisse anschließend auf einer Redaktionssitzung, bei der euer Vorschlag diskutiert wird.



Ihr seid Mitglieder einer Zeitungsredaktion und erhaltet die folgende Grafik.
Erstellt eine möglichst „griffige“ Schlagzeile und formuliert eine Kurzmitteilung (nicht mehr als vier Sätze).
Zwei aus eurer Gruppe präsentieren eure Ergebnisse anschließend auf einer Redaktionssitzung, bei der euer Vorschlag diskutiert wird.



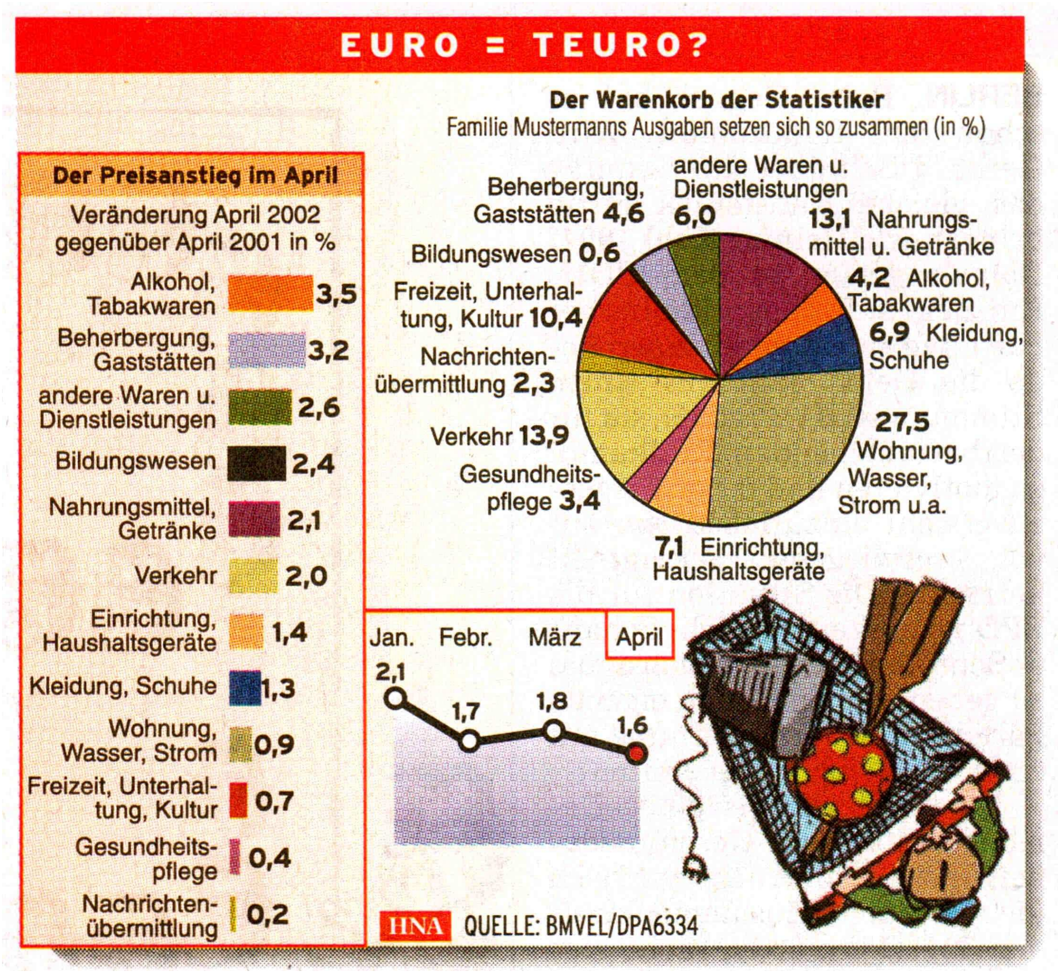
	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01
Durchschnittlicher Verbrauch aller in Europa zugelassenen Diesel	9,0	8,4	7,6	6,5	6,0	5,7	5,8	6,0	6,0	6,0	5,7	5,8	6,0
Durchschnittlicher Verbrauch der Volkswagen Dieselmotoren	9,0	7,9	7,0	6,0	5,8	5,7	5,3	5,5	5,6	5,6	5,6	5,6	5,3

Quelle: mathematik lehren (2001), H. 109, S. 46-48

Lösung: **Erste Graphik:** Polygonzüge suggerieren die Existenz von Zwischenwerten.
Zweite Graphik: Nur Werte zwischen $4,8$ und $6,4$ berücksichtigt; Nur ein Ausschnitt der Daten verwendet.
Dritte Graphik: Nichtbeachtung der Proportionalität von Verbrauch und Volumen der Fässer.
Vierte Graphik: Hintergrund suggeriert Zusammenhang zum Treibhauseffekt.

17. **Euro = Teuro?**

INTERNET-FORUM ALS ERGEBNIS
Berlin. Wie von vielen erwartet, ist der „Anti-Teuro-Gipfel“ der Bundesregierung ohne konkrete Maßnahmen zu Ende gegangen. Verbraucherministerin Renate Künast (Grüne), die die Veranstaltung ins Leben gerufen hatte, zeigte sich aber ebenso wie der Einzelhandel zufrieden. [...] Künast hatte den Gipfel nach wachsendem Unmut in der Bevölkerung über massive Preiserhöhungen im Zuge der Euro-Einführung ins Leben gerufen. [...] Eine klare Mehrheit der Bundesbürger ist der Meinung, dass die Regierung das Problem unterschätzt habe. In einer Umfrage für den Nachrichtensender *N*24 erklärten 66 Prozent der Beteiligten, der Ratschlag, bei seriösen Händlern einzukaufen, sei zu wenig.
Eine weitere Studie ergab, dass vor allem Dienstleister die Euro-Umstellung zu drastischen Preiserhöhungen genutzt haben. Rund 80 Prozent aller geprüften Angebote seinen teurer geworden, im Schnitt um knapp zehn Prozent, berichten die ARD-„Tagesthemen“. Bei Lebensmitteln sei eine durchschnittliche Preiserhöhung von $0,7$ Prozent festgestellt worden. [...]



Wie kann es sein, dass so viele Menschen das Gefühl haben, dass alles durch den Euro wesentlich teurer geworden ist und sich dies trotzdem nicht in den Statistiken zeigt?

Quelle: HNA vom 1.6.02

18. **Das Simpson-Paradoxon**

	Potentio-Forte	Placebo
Patienten in Kassel	250	1050
Wirksam bei …	180 (72 %)	630 (60 %)

	Potentio-Forte	Placebo
Patienten in Bonn	1050	250
Wirksam bei …	420 (40 %)	70 (28 %)

	Potentio-Forte	Placebo
Patienten in Kassel und Bonn	1300	1300
Wirksam bei …	600 (46 %)	700 (54 %)

Potentio-Forte wirkt kleine Wunder!

Neue Hoffnung für die Männerwelt: Potentio-Forte ist da. Die Wirksamkeit des neuen Wundermedikaments wurde in mehreren deutschen Städten eindrucksvoll bewiesen. In allen Teststädten half Potentio-Forte den Männern eindeutig besser als ein zu Vergleichszwecken eingesetztes Placebo.

Nimm Stellung zu den Angaben in dem Pressetext!

Einer Universität wird ein geschlechterdiskriminierendes Annahmeverfahren vorgeworfen. Der Universitätspräsident ist auf das Höchste beunruhigt und fordert umgehend die Bewerbungszahlen der sechs größten Fachbereiche an.

Fachbereich	**Bewerber**	**davon angenommen**		**Bewerberinnen**	**davon angenommen**	
A	800	496		100	82	
B	600	378		25	17	
C	300	111		600	204	
D	400	132		400	140	
E	200	56		400	96	
F	400	24		300	21	
Summe						

(a) Nimm unter Zuhilfenahme mathematischer Methoden zu der Frage Stellung, inwieweit der Universität ein geschlechterdiskriminierendes Annahmeverfahren vorgeworfen werden kann.

(b) Schreibe auf der Basis der vorliegenden bzw. von ihnen errechneten Daten einen wahren (!) Zeitungsartikel. In diesem Artikel kannst du dich entweder um eine ausgewogene Darstellung des Sachverhalts bemühen, oder der Universität Geschlechterdiskriminierung vorwerfen und nur geeignete Daten anführen.

Quelle: mathematik lehren (2002), H. 110, S. 21

Lösung:

- Wenn man die jeweiligen Anteile als Brüche deutet, kann man besser verstehen, dass die größeren Nenner (und damit die größeren Anzahlen von Menschen in der Stadt, in der beide Medikamente besser wirken) das so genannte Ampèresche Mittel auf seine Seite zieht (ausführlichere Beschreibung in dem Artikel von Biermann/Blum)
- Trotz $\frac{a}{A} < \frac{b}{B}$ und $\frac{c}{C} < \frac{d}{D}$ kann $\frac{a+c}{A+C} > \frac{b+d}{B+D}$ sein (so genanntes Simpson-Paradoxon); dies kann mithilfe von Apfelsaftschorlen oder Kirsch-Bananensaftmischungen visualisiert werden bzw. ist in diesen Kontexten leicht vorstellbar

19. **Vierfeldertafeln**

Gegeben ist folgender Zeitungsartikel:

Fahrstuhleffekt im Schulsystem

Eltern wünschen höheren Bildungsabschluss für Kinder

37% aller 10− bis 16jährigen Kinder besuchen derzeit die Schulform Gymnasium. Jedoch nur 35% dieser Jugendlichen haben Eltern, die selbst zum Gymnasium gingen. Umgekehrt findet man unter den Schülerinnen und Schülern, die eine Haupt- oder Realschule besuchen, nur 8%, deren Eltern ein Gymnasium absolvierten.

(a) Stellt die Informationen des Zeitungsartikels in einem zweistufigen Baum dar.

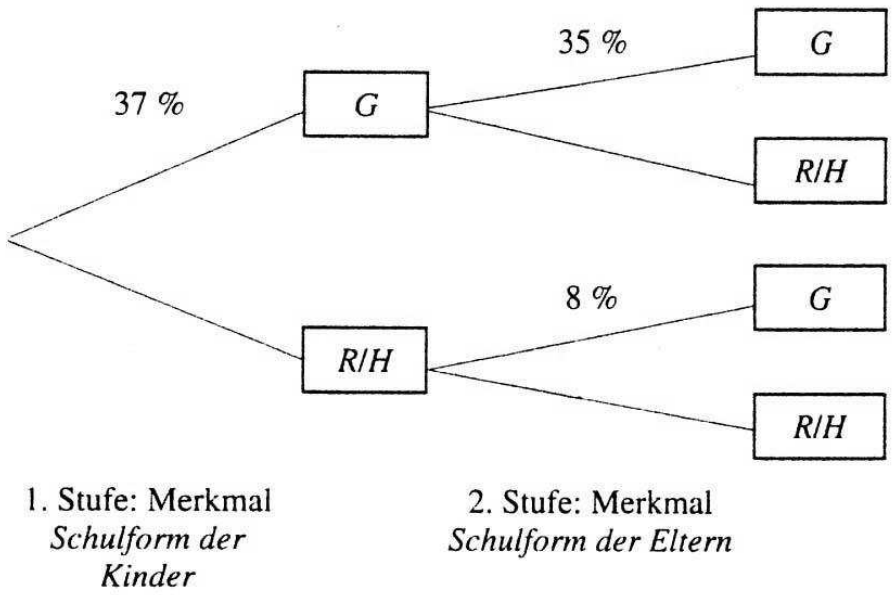
(b) Stellt eine Vierfeldertafel dazu auf.

(c) Entwickelt aus (b) das umgekehrte Baumdiagramm.

(d) Verfasst auf Grundlage der nun gewonnenen Daten einen Zeitungsartikel.

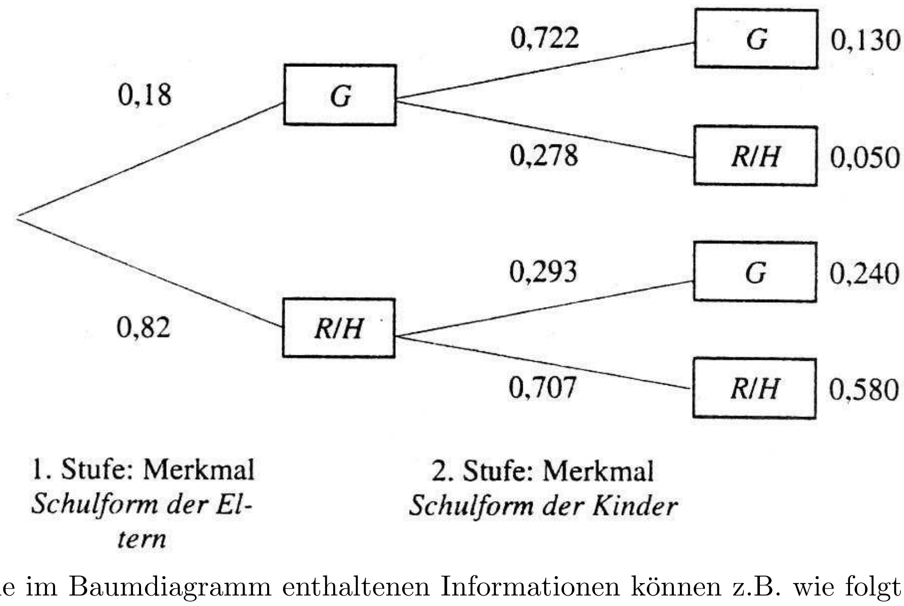
Quelle: PM 2/41 (1999)

Lösung: (a) Aus dem Text entnehmen wir unmittelbar folgende Informationen über die Merkmale *Schulform, die die Kinder besuchen bzw. Schulform, die die Eltern besuchten:*



(b) Die zugehörige Vierfeldertafel sieht dann so aus:

Eltern / Kinder	Gymnasium	Real- / Hauptschule	gesamt
Gymnasium	$13,0\%$	$24,0\%$	$37,0\%$
Real- / Hauptschule	$5,0\%$	$58,0\%$	$63,0\%$
gesamt	$18,0\%$	$82,0\%$	100%



(c)

(d) Die im Baumdiagramm enthaltenen Informationen können z.B. wie folgt als Zeitungsnotiz erscheinen:

Schulform Gymnasium immer beliebter
Viele Eltern bevorzugen aber bekannte Schulform

72% der Eltern, die selbst ein Gymnasium besuchten, schicken heute ihr Kind wieder auf ein Gymnasium; bei den Eltern, die eine Haupt- oder Realschule absolvierten, ist es ähnlich: 71 % lassen ihr Kind ebenfalls eine Schule dieser Schulform besuchen. Der Anteil der Gymnasiasten ist allerdings in einer Generation von 18 % auf 37 % angewachsen.

20. **Krebsfrüherkennung**

Im Folgenden sind die Ergebnisse eines schwedischen Modellversuchs zur Krebsfrüherkennung durch Mammographie dargestellt:

		Vorliegen einer Krebserkrankung		
		ja	nein	gesamt
Untersuchungs-Ergebnis	auffällig	0,75%	2,62%	3,37%
	ohne Befund	0,07%	6,56%	96,63%
gesamt		0,82%	99,18%	100%

(a) Welche Informationen kann man aus diesen Daten entnehmen?

(b) Stellt dazu auch die entsprechenden Bäume erster und zweiter Art auf.

(c) Versucht mithilfe dieser Resultate Außenstehende über die mathematischen Hintergründe einer solchen Vorsorgeuntersuchung zu informieren. Erstellt ein entsprechendes Wandplakat.

Quelle: PM 6/42 (2000)

21. **AIDS**

Material 1.1: Aids in der Bundesrepublik Deutschland
In den Quartalen I/98 und II/98 in das Fallregister aufgenommene Berichte über AIDS-Patienten

	Quartal I/98	Quartal II/98
Berichte insgesamt:	463	502
Erstberichte	239	213
davon Berichte mit Todesmeldungen	36	20
Berichte mit zusätzlichen Informationen für bereits bekannte Fälle	224	289
davon Berichte mit Todesmeldungen	162	243

aus: Quartalsbericht III/98 des Robert-Koch-Instituts, Berlin (vgl. auch www.rki.de)

Material 1.2.: Zahl der gemeldeten AIDS-Fälle nach Geschlecht sowie der gemeldeten Todesfälle nach Bundesländern bzw. ausgewählten Großräumen und aufgeführten Zeiträumen der Registrierung

Bundesländer/ Großräume	Zeitraum der Registrierung							Verstorben gemeldet
	Quart. II/98	1. 7. 97–30. 06. 98			Gesamt			
	Ges.	Ges.	Männl.	Weibl.	Ges.	Männl.	Weibl.	
Baden-Württemberg	18	80	65	15	1431	1139	292	830
Bayern (ohne M)	16	73	56	17	989	835	154	611
München (M)	7	115	102	13	1602	1481	121	1070
Berlin (West)	27	126	113	13	3325	3028	297	2406
Berlin (Ost)	7	27	26	1	202	186	16	96
Brandenburg	2	5	2	3	36	26	10	16
Bremen	0	64	50	14	254	215	39	115
Hamburg	13	89	77	12	1632	1514	118	1056
Hessen (ohne F)	13	36	26	10	866	750	116	559
Frankfurt/Main (F)	12	37	30	7	1153	1039	114	819
Mecklenburg-Vorpommern	1	3	3	0	26	25	1	14
Niedersachsen	14	68	53	15	918	793	125	622
NRW (ohne K/D)	42	217	181	36	2431	2112	319	1389
Köln (K)	13	78	71	7	884	819	65	668
Düsseldorf (D)	2	10	9	1	547	503	44	346
Rheinland-Pfalz	4	20	15	5	522	432	90	328
Saarland	4	11	20	1	178	150	28	117
Sachsen	1	5	4	1	35	31	4	15
Sachsen-Anhalt	4	8	6	2	24	22	2	9
Schleswig-Holstein	12	36	33	3	420	383	37	266
Thüringen	1	2	2	0	15	12	3	8
Gesamt	213 100%	1110 100%	934 84,1%	176 15,9%	17490 100%	15495 88,6%	1995 11,4%	11360 65,0%

Material 1.3.: Verteilung der gemeldeten AIDS-Fälle nach Bundesländern, Großstädten über 100.000 Einwohner bzw. ausgewählten Großräumen sowie nach Infektionsrisiko

	Infektionsrisiko							Gesamt	Als verst. gemeldet
	Homo/ bi	IVDA	Hämo/ Trans	Hetero	Pattern II	PPI	k. A.		
Nordrhein-Westf.	2526	523	220	215	117	24	237	3862	2403
Köln	703	56	22	30	18	1	54	884	668
Düsseldorf	428	42	17	25	9	2	24	547	346
Ruhrgeb.-West	78	37	12	10	7	3	6	153	109
Ruhrgeb.-Mitte	199	67	22	17	9	4	22	340	175
Ruhrgeb.-Ost	192	83	20	14	7	0	20	336	168
Ruhrgeb.-SO	37	17	8	3	2	2	3	72	35
Wuppertal	63	10	8	7	2	3	9	102	64
Bielefeld	51	17	3	4	0	1	3	79	51
Bonn	77	15	13	10	11	1	10	137	62
Mönchen-gladbach	29	4	3	5	0	0	2	43	31

Material 1.4: Bei Infektionskrankheiten ist es wichtig, dass man schnell die Art der Krankheit erkennt, damit man sie bekämpfen kann. Hierzu führt man Schnelltests durch, die allerdings Mängel haben: Manchmal wird eine Krankheit angezeigt, obwohl sie nicht vorliegt, gelegentlich wird eine Krankheit nicht angezeigt, obowhl sie vorhanden ist.
Bei der HIV-Diagnostik sind die Empfindlichkeit *(Sensitivität)* des Tests, vor allem aber die Zuverlässigkeit positiver Testergebnisse *(Spezifität)* von besonderer Bedeutung.
Die vorliegenden Testverfahren zum Nachweis der Infektion haben mittlerweile eine hohe Sicherheit (Sensitivität): Bei 99,9 % der tatsächlich Infizierten erfolgt positive Testreaktion, nur bei 0,3 % der nicht-infizierten Testpersonen wird irrtümlich eine Infektion angezeigt (Spezifität 99,7 %).

aus Strick (1998)

Formuliert in eurer Gruppe mindestens vier sinnvolle (statistische) Fragen, die mit Hilfe des zur Verfügung stehenden Datenmaterials untersucht werden können. Versucht diese Fragen zu beantworten.
Bereitet euch auch auf die Präsentation der Lösungen vor. Quelle: mathematik lehren (2001), H. 104, S. 62-66

22. **BSE**

BSE

Blindflug ins Hirn

Im Rinderwahn gehen auch die letzten Sicherheiten zu Grunde: Der meistbenutzte Schnelltest hat eine BSE-Kuh nicht erkannt.

Kaum hat die neue Landwirtschaftsministerin Renate Künast vergangene Woche mehr Tests angekündigt, richtet sich der massivste Verdacht ausgerechnet gegen den Schnelltest "Platelia BSE", nach Herstellerangaben Deutschlands meistverwendetes Hilfsmittel für die Fahndung nach der Rinderseuche.
Schon mehrfach hat der Test der Firma Bio-Rad (...) gepatzt, als er bei gesunden Rindern BSE ortete. Jedes Mal musste das nationale BSE-Referenzzentrum, die Bundesforschungsanstalt für Viruskrankheiten in Tübingen, den Spuk auflösen. Forscher stöhnen dort mittlerweile schon über die Welle von Fehlmeldungen; die „falsch-positiven“ Fälle lähmten den Testapparat bei der Enttarnung des Erregers.
Auch für die betroffenen Bauern hatten die Scheintreffer Folgen: Ihre Bestände wurden bis zur Entwarnung gesperrt. Doch bisher konnte wenigstens der Verbraucher beruhigt sein – besser eine Meldung zu viel als eine zu wenig.

Jetzt aber steht der Bio-Rad-Test erstmals im Verdacht, eine BSE-Kuh nicht erkannt zu haben, ein Fall, der das Vertrauen in den gesamten Testapparat erschüttert. Erst recht, weil sich am gleichen Material später auch noch der Test des einzigen Bio-Rad-Konkurrenten in Deutschland, Prionics, vergeblich versuchte.

(aus: DER SPIEGEL, 04/2001)

(a) Recherchiert, was man unter BSE und nCJK versteht. Tragt Informationen zusammen, was zum Ausbruch und zur Verbreitung von BSE geführt hat. Forscht im Internet nach aktuellem Zahlenmaterial aus europäischen Staaten.

(b) Wie würdet ihr die Sicherheit des erwähnten Tests beschreiben? Wie wirkt sich der Fehler des Tests auf die betroffenen Bauern und Verbraucher aus?

(c) Tragt Informationen zusammen, was zum Ausbruch und zur Verbreitung von BSE geführt hat. Forscht im Internet nach aktuellem Zahlenmaterial aus europäischen Staaten.

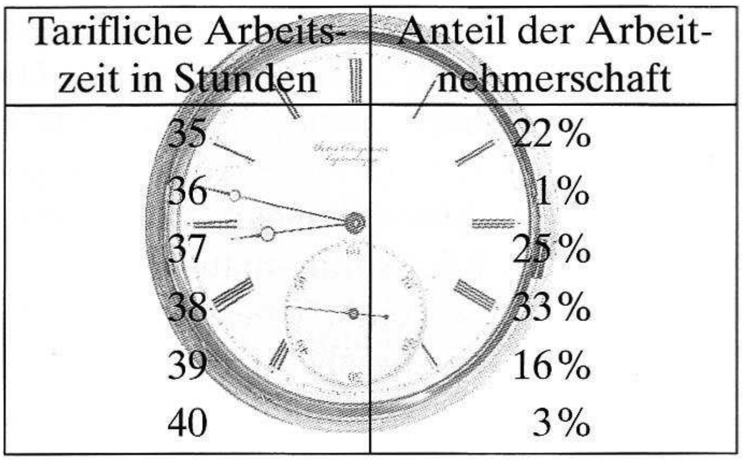
(d) In der Bundesrepublik wurden in den Jahren um 2000 jährlich etwa 480000 Rinder geschlachtet. Die Verbraucherschutzministerin Renate Künast hat im Jahr 2001 angegeben, „dass in diesem Jahr 500 BSE-Fälle erwartet werden“. Alle geschlachteten Rinder werden mit einem Schnelltest untersucht. Dieser Schnelltest identifiziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% die erkrankten Rinder korrekt, er gibt aber auch in 3% der Fälle gesunde Rinder als BSE-erkrankt aus.
Bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rind, das positiv getestet wurde, auch wirklich krank ist.

(e) Da Schnelltests nicht absolut sicher sind, treten immer Fehler auf. Wie wirken sich die Fehler aus, wenn der Anteil der BSE-Erkrankungen ansteigt?

Quelle: MatheNetz 9 (2001)

23. **Arbeitszeit**

In vielen Berufsfeldern gelten Vereinbarungen zwischen Arbeitgeberverbänden und Gewerkschaften hinsichtlich der Arbeitszeit der Arbeitnehmer. Berechne die mittlere Wochenarbeitszeit aus den Daten der nebenstehenden Tabelle.



Tarifliche Arbeitszeit in Stunden	Anteil der Arbeitnehmerschaft
35	22 %
36	1 %
37	25 %
38	33 %
39	16 %
40	3 %

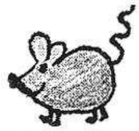
24. **Zentralwerte**

    Der Zentralwert teilt eine Rangliste in zwei Hälften, die untere und obere Hälfte. Das untere Qantil bzw. das obere Quantil ist im Allgemeinen jedoch nicht der Zentralwert der unteren bzw. oberen Hälfte. Zeige dies an einem Beispiel.

    Der Zentralwert ist auch der Zentralwert der zentralen Hälfte. Zeige dies mithilfe von Beispielen. Du musst vier Fälle unterscheiden.

25. **Normalverteilung**

    Viele statistischer Erhebungen, vor allem im biologischen Bereich, haben die Eigenschaft, dass die meisten Ausfallswerte relativ nah beim Mittelwert liegen. So gibt es z.B. nur wenige sehr große oder sehr kleine Menschen. Genauere Untersuchungen zeigen, dass in solchen Fällen etwa $\frac{1}{3}$ aller Ausfälle zwischen $(m - s)$ und $(m + s)$ liegen [m - Mittelwert, s - Standardabweichung]. Im Bereich $(m - 2 \cdot s)$ und $(m + 2 \cdot s)$ liegen sogar $95,4\%$. Liegt eine solche Häufigkeitsverteilung annähernd vor, so spricht man in der Statistik von einer **Normalverteilung**.
    Prüfe, ob es sich bei den nebenstehenden statistischen Erhebungen um Normalverteilungen handelt. Falls keine Normalverteilung vorliegt, begründe dies auch inhaltlich.



Gewicht von Mäusen

in g	Häufigk.
10	1
11	0
12	1
13	0
14	2
15	1
16	1
17	3
18	5
19	7
20	8
21	6
22	3
23	4
24	3
25	2
26	1
27	0
28	1
29	1

Zahl der Druckfehler pro Seite

Anzahl	Häufigk.
0	49
1	20
2	5
3	4
4	1
5	0
6	1

Wurf mit drei Würfeln

Augenzahl	Häufigk.
3	4
4	17
5	28
6	52
7	79
8	109
9	131
10	132
11	135
12	122
13	107
14	74
15	49
16	32
17	13
18	6

Zufallszahlen

Zahl	Häufigk.
0	11
1	10
2	8
3	10
4	12
5	9
6	10
7	13
8	9
9	8

26. **Wahr oder falsch?**

Überprüfe ob die beiden folgenden Aussagen gelten:

(a) Wird zu allen Ausfallwerten einer statistischen Erhebung eine feste Zahl z addiert, so ändern sich die Spannweite und die mittlere Abweichung nicht, der Mittelwert hingegen wird um z größer.

(b) Werden alle Ausfallwerte einer statistischen Erhebung mit $z > 0$ multipliziert, so werden Spannweite, Mittelwert und mittlere Abweichung z-mal so groß.

27. **Kennwerte**

    Bilde zwei unterschiedliche Ranglisten, bei denen alle Kennwerte (Spannweite, Mittelwert, Zentralwert, unteres und oberes Quantil) gleich groß sind. Was kannst du aus dem Beispiel folgern?

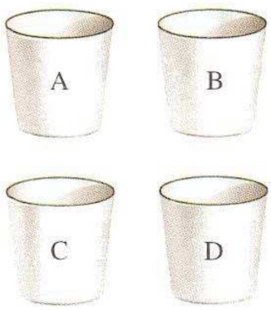
3 Testverfahren

1. **Pepsi vs. Coca-Cola**

   Über Geschmack lässt sich bekanntermaßen streiten. Häufig stellt sich nämlich die Frage, ob der Unterschied zwischen zwei Produkten überhaupt feststellbar ist. Einer der wohl bekanntesten Tests diesbezüglich ist der sogenannte Pepsitest. Bei diesem versucht man herauszufinden, ob sich in einem Becher Pepsi oder eine andere Cola befindet. Dieser Test soll im Folgenden unter Berücksichtigung mathematischer Aspekte durchgeführt werden.

   Schritt 1: Bestimmt einen Versuchsleiter (Schüler oder Lehrer).
   Schritt 2: Der Versuchsleiter füllt - von der Klasse unbeobachtet - der Reihe nach vier beschriftete Becher A, B, C, D je nach Ausfall eines Münzwurfs mit Pepsi oder Coca-Cola.
   Vorschrift: Zahl $\sim$ Pepsi / Wappen $\sim$ Coca-Cola

   Schritt 3: Die Becher machen die Runde durch die Klasse. Jeder kostet die vier Getränke mit einem Trinkhalm und entscheidet, welche Colasorte sich in den einzelnen Bechern befinden. Die Ergebnisse werden an der Tafel gesammelt.
   Schritt 4: Der Versuchsleiter gibt die tatsächliche Füllung bekannt. Jeder ermittelt

seine Trefferzahl.
Schritt 5: Die erreichten Trefferzahlen der Klasse werden in einer Tabelle zusammengefasst, in der sowohl die absolute als auch die relative Häufigkeit für die einzelnen Trefferzahlen bestimmt werden.

Trefferzahl	0	1	2	3	4
abs. Häufigk. rel. Häufigk.					

Schritt 6: Wenn man annimmt, dass der Unterschied zwischen den Colasorten überhaupt nicht zu schmecken ist, dann erhält man bei jedem der Becher A bis D einen Treffer nur mit 50sich dann vorstellen, dass die Anzahl der Treffer völlig ohne Kostproben für jeden Versuchsteilnehmer durch viermaliges Werfen einer Münze ermittelt werden kann. Rechnet nach, dass dann die neben stehenden Wahrscheinlichkeiten stimmen.

Trefferzahl	0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{16}$ 6,25 %	$\frac{4}{16}$ 25 %	$\frac{6}{16}$ 37,5 %	$\frac{4}{16}$ 25 %	$\frac{1}{16}$ 6,25 %

Schritt 7: Vergleicht die Ergebnisse aus **Schritt** 5 mit denen aus **Schritt 6**. Was lässt sich damit über die Möglichkeit, den unterschiedlichen Geschmack zu schmecken, aussagen? Quelle: Lambacher Schweitzer 8, S. 172 (leicht verändert)

Variationen:

Variation der Produkte, der Kostprobenzahl, der Produktanzahl

2. **Tests, Tests, Tests, ...**

   In der folgenden Abbildung sind Testergebnisse für Stereoanlagen wiedergegeben.

Stereoanlagen im Test										
	Mittlerer Preis in € ca.	Preisspanne in €	Lautsprecher	Verstärker	Radio	CD-Player	Aufnahme/ Wiedergabe	Handhabung	Umwelt-eigenschaften	Qualitätsurteil
Gewichtung			20%	10%	15%	15%	15%	15%	10%	
Kanon 201	549,–		○	+	+	+	○	○	○	zufriedenstellend
Tuba 3000	680,–	600,– bis 700,–	○	+	+	+ +	+	○	○	gut
Woodo MP	740,–	650,– bis 750,–	○	+	+	+	○	–	○	zufriedenstellend
Hippo 73L	745,–	690,– bis 750,–	+	+	+	+	○	+	○	gut
Astro 400	745,–	700,– bis 750,–	○	+	○	+	○	–	○	zufriedenstellend
KZL 500	825,–	700,– bis 850,–	+	+	+	+	+ +	○	○	gut
Reihenfolge der Bewertung	+ + = sehr gut, + = gut, ○ = zufriedenstellend – = mangelhaft, – – = sehr mangelhaft									

Wie könnte der dort angegebene mittlere Preis bzw. das wiedergegebene Qualitätsurteil ermittelt worden sein? Quelle: Elemente 11 (1999)

Lösung:
- Der angegebene mittlere Preis ist jeweils der Median
- Das Qualitätsurteil ist (mit einer Einschränkung) das gewichtete arithmetische Mittel der einzelnen Test-Gesichtspunkte

3. **Dunkelfeldforschung**

Ein Kriminologe möchte in einer Befragung (Stichprobe: 1000 Personen) herausfinden, wie viel Prozent der Bundesbürger bereits einmal einen Ladendiebstahl begangen haben. Da aber auf die direkte Frage („Haben Sie bereits einmal einen Ladendiebstahl begangen?“) vermutlich viele Befragte nicht ehrlich antworten würden, plant er folgendes Verfahren: Er legt jedem Befragten 10 gleich aussehender Kärtchen vor. Auf 4 dieser Kärtchen steht: „Ist es richtig, dass Sie bereits einmal einen Ladendiebstahl begangen haben?“ Auf den 6 anderen steht: „Ist es richtig, dass Sie noch nie einen Ladendiebstahl begangen haben?“ Der Befragte zieht nun eines dieser Kärtchen, ohne dass der Kriminologe dies sehen kann, und beantwortet die darauf stehende Frage wahrheitsgemäß (mit ja oder nein).

(a) Wie lässt sich anhand dieses Vorgehens der Anteil der Bürger schätzen, die schon einmal einen Ladendiebstahl begangen haben?

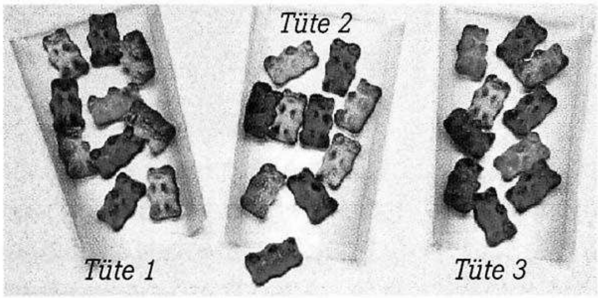
(b) Was ändert sich, wenn gleich viele von beiden Sorten Kärtchen vorhanden sind?

Quelle: MatheNetz 9 (2001)

Lösung: Sei A: Die gezogene Frage wird bejaht
B: Es wurde Frage 1 gezogen

C: Es wurde Frage 2 gezogen
p: Anteil der Bürger, die schon einmal einen Ladendiebstahl begangen haben
Also: $P(B) = 0,4$; $P(C) = 0,6$ sowie $P(A|B) = p$; $P(A|C) = 1 - p$
Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (oder elementar hergeleitet) folgt daher:
$P(A) = 0,4 \cdot p + 0,6 \cdot (1 - p) = 0,6 - 0,2 \cdot p \Leftrightarrow p = 3 - 5 \cdot P(A)$
Setzt man nun für $P(A)$ die relative Häufigkeit $h(A)$ der Ja-Antworten aus der Umfrage ein, kann man also den entsprechenden Anteil p schätzen.

4. **Gummibärchen-Test**



Auf einem Tisch liegen drei Tüten, in denen je zehn Gummibärchen sind. Die Zusammensetzung der Tüten wird an der Tafel notiert. Danach werden die Tüten verdeckt. Eine Schülerin wählt eine der Tüten aus, zieht ein Gummibärchen, zeigt es und legt es wieder zurück. Die anderen Schüler sollen nun erraten, welche Tüte sie ausgewählt hat. Aufgrund der angegebenen Farbe sollt ihr eine Prognose erstellen, welche der Tüten ausgewählt wurde. Um die Chancen der Mitschüler zu verbessern, wird das Experiment mehrfach durchgeführt, wobei die Gummibärchen natürlich immer aus derselben Tüte gezogen werden.

(a) Miriam durfte die Gummibärchen ziehen, hier sind die ersten vier Züge. Pedro sagt, dass man ja vor dem Ziehen der Gummibärchen auch schon die Wahrscheinlichkeit schätzen kann. Nach dem ersten und dem zweiten Zug notiert er die Zahlen in der Tabelle.
Führt eine eigene Schätzung durch und notiert die Werte. Begründet eure Schätzungen. Wie ändern sich die Werte, wenn Miriam im fünften Versuch ein gelbes Gummibärchen zieht?

Nr.	Farbe	Tüte 1	Tüte 2	Tüte 3
-	-	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	rot	$0,25$	$0,3$	$0,45$
2	rot	$0,2$	$0,25$	$0,55$
3	gelb			
4	gelb			

(b) Führt einen eigenen Versuch durch und notiert die Ergebnisse tabellarisch.

(c) Beschreibt genau, nach welchen Kriterien ihr eure Entscheidung fällt. Welche Bedeutung haben die Zahlenwerte, die zu den Tüten gehören, für die ihr euch nicht entschieden habt? Pedro sagt, dass sie die Chance beschreiben, dass er sich geirrt hat. Was meint ihr dazu?

Quelle: MatheNetz 9 (2001)

5. **Dopingproben (1)**

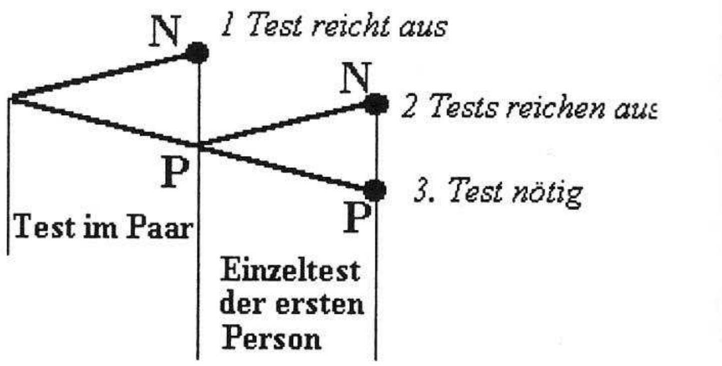
Nach einem großen Sportfest sollen alle Sportler Urinproben abgeben, mit Hilfe derer Dopingproben durchgeführt werden sollen.
Es werden zwei Möglichkeiten vorgeschlagen:

(a) Jede Probe wird einzeln überprüft.

(b) Jeweils Teile von zwei Proben werden zusammengeschüttet und das Resultat getestet. Fällt es positiv aus, testet man die Einzelproben.

Vergleicht die beiden Vorschläge.

Quelle: ISTRON 6, S. 124/125

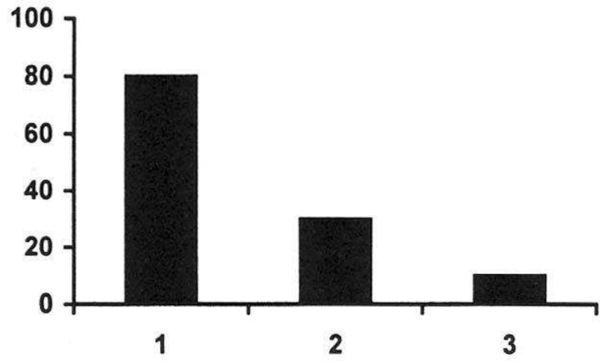


Lösung:

Entweder ist nur ein Test pro Paar erforderlich (wenn kein Doping nachgewiesen)
oder zwei Tests (wenn Doping nachgewiesen und erster Nachtest negativ)
oder drei Tests (wenn Doping nachgewiesen und erster Nachtest positiv)
Also:
Bei Einzeltests sind bei n Teilnehmern n Tests erforderlich, bei „Doppeltests" dagegen abhängig von Dopingquote: min. $\frac{n}{2}$ Tests und max. $1,5 \cdot n$ Tests.

6. **Dopingproben (2)**

Im folgenden Diagramm ist dargestellt, wie oft beim Dopingtest nach dem Sportfest die zwei Proben eines Paares jeweils nur einmal, zweimal oder sogar dreimal getestet werden mussten.



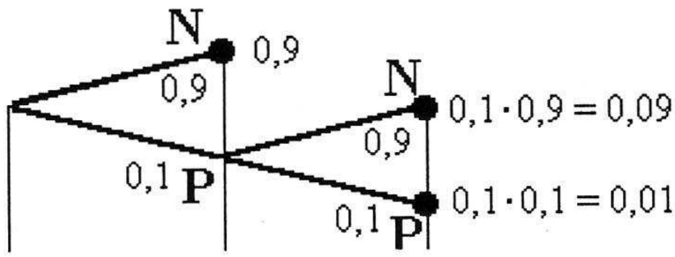
Was kann man alles aus diesem Diagramm entnehmen?

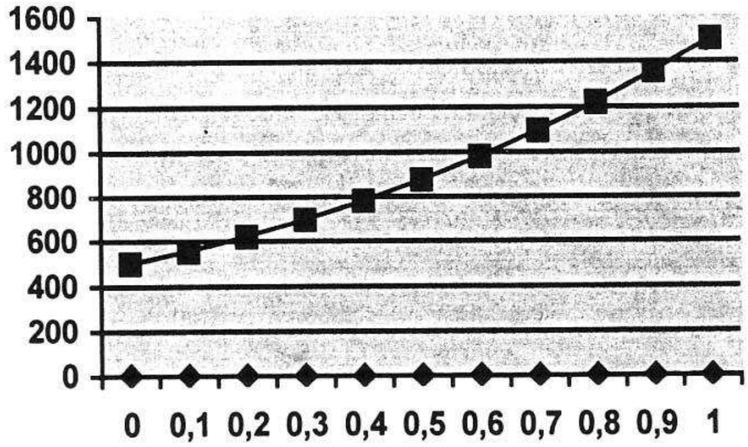
Lösung: Insgesamt $80 + 30 + 10 = 120$ Testpaare, also 240 Sportler
Statt 240 Einzeltests hier nur $80 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 150$ Tests
Abschätzung der Dopingfälle: min. $30 + 10 = 40$, max. $30 + 20 = 50$ Dopingfälle

7. **Dopingproben (3)**

Wie viele Proben sind bei 1000 Sportlern zu erwarten, wenn man aus langjähriger Erfahrung weiß, dass 10% (20%, 30%, ...) aller Sportler Doping betreiben?

Lösung: Zur Wahrscheinlichkeit von 10% Baumdiagramm aus Aufgabe 1!!! mit Pfadwahrscheinlichkeiten:

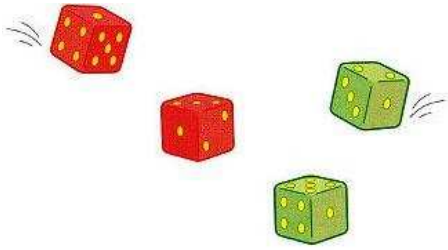




Man hat also für die 1000 Personen in 500 Testpaaren $(0,9 \cdot 1 + 0,09 \cdot 2 + 0,01 \cdot 3) \cdot 500 = 555$ Tests zu erwarten, im Vergleich zu Einzeltests also eine deutliche Ersparnis
Verallgemeinerung (für 20%, 30%, ...) :
Berechnung liefert das neben stehende Ergebnis. Die Vermutung eines quadratischen Zusammenhangs lässt sich bestätigen:
Zu erwarten sind $[(1-p) \cdot 1 + p \cdot (1-p) \cdot 2 + p^2 \cdot 3] \cdot 500 = (p^2 + p + 1) \cdot 500$ Tests (im Vergleich zu 1000 Einzeltests)

4 Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit

1. **Würfeltest**



Mit welchem Würfel würfelt man am häufigsten eine 6? Findet heraus, wer von euch den „besten“ 6er Würfel hat. Dabei sollt ihr wie folgt vorgehen.

(a) Jeder würfelt mit seinem Würfel, der sich in einem Würfelbecher befinden sollte.

(b) Das Ergebnis eines jeden Wurfes wird in die unten abgebildete Protokolltabelle bei der entsprechenden Wurfnummer eingetragen.

(c) Wer zuerst bei 60 Würfen angelangt ist, ruft laut STOP; alle anderen hören dann sofort mit Würfeln auf.

(d) In die Tabellen unter der Protokolltabelle sind die (sogenannten absoluten) Häufigkeiten für die einzelnen Augenzahlen zu notieren.

(e) Wenn ihr mit allem fertig seid, vergleicht zunächst eure Ergebnisse mit denen eurer Nachbarn. Gib es zwischen den einzelnen Würfeln unterschiede? Begründe warum oder warum nicht!

(f) Was könnte mit dem Begriff „relative Häufigkeit“ gemeint sein?

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	1
21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	3
41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.	51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	5

Anzahl der Versuche:

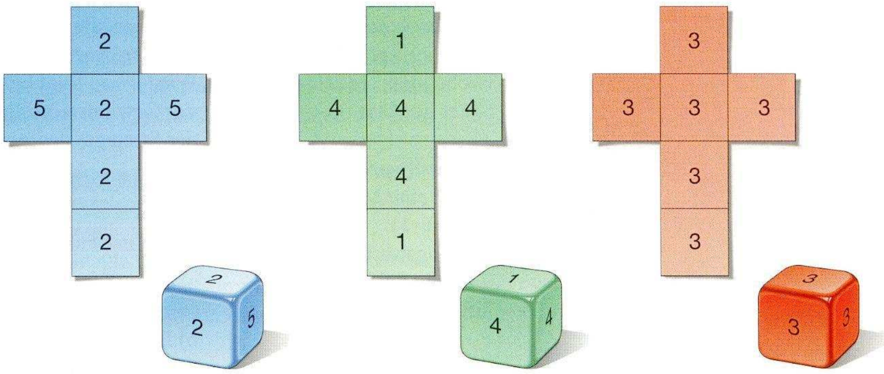
Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit						
relative Häufigkeit						

Variationen:

Würfel des Herrn Efron oder getarnte Würfel

2. **Würfel des Herrn Efron**

   Die sechs Seiten eines Würfels müssen nicht unbedingt mit den Zahlen von eins bis sechs beschriftet sei, sie können ganz unterschiedliche Beschriftung haben.
   Für ein einfaches, aber im Ergebnis recht verblüffendes Würfelspiel kann man die unten abgebildeten „Würfel des Herrn Efron“ verwenden. Es handelt sich dabei um drei verschiedenfarbige und unterschiedlich beschriftete Würfel. Ihr könnt sie leicht herstellen, indem ihr auf herkömmliche Würfel kleine Papierstreifen (Würfelnetze) klebt und diese entsprechend beschriftet.



   Spielregel (für zwei Spieler):

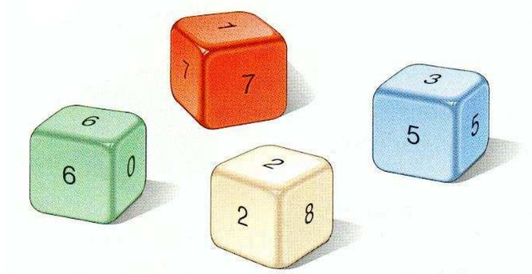
   - Jeder Spieler erhält sechs Münzen.
   - Der erste Spieler wählt einen der drei Würfel.
   - Der zweite Spieler wählt einen anderen Würfel.
   - Beide Spieler würfeln. Wer die höhere Augenzahl erreicht, gewinnt und erhält vom Verlierer eine Münze.
   - Die Schritte $1 - 4$ werden wiederholt bis ein Spieler keine Münzen mehr hat.

   (a) Welchen Würfel sollte der zweite Spieler wählen, wenn der erste Spieler den blauen Würfel $(5, 5, 2, 2, 2, 2)$ gewählt hat?

   (b) Gibt es einen besonders günstigen Würfel?

   (c) Die Spielregeln sollen geändert werden: die Höhe der Ergebnisse soll berücksichtigt werden. Wer die größere Zahl würfelt, erhält so viele Münzen wie die Differenz der Augenzahlen ausmacht.
   Ist das Spiel nun fair und wenn ja warum?

(d) Überlegt euch ein eigenes möglichst faires Glücksspiel mit von euch beschrifteten Würfeln (auch Zahlen über 6 sind möglich!).



Quelle: Mathe Live 8, S. 57f.

Variationen:

(a) Zusätzliche Behandlung des Erwartungswertes (man spricht von Efron-Würfeln, wenn alle den gleichen Erwartungswert haben)

(b) Angenommen, es sind drei Spieler, die mit allen drei Würfeln spielen. Wer gewinnt jetzt?

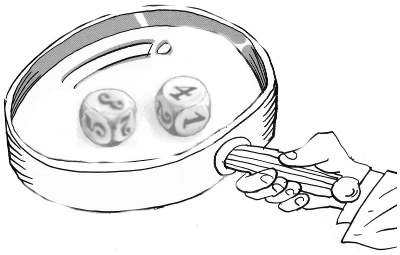
Lösung: (a) Am besten wählt man den roten Würfel, da dieser mit 66% Wahrscheinlichkeit gegen den blauen Würfel gewinnt.

(b) Wenn man die erste Wahl hat, ist man immer benachteiligt, da der zweite Spieler immer einen auf den ersten abgestimmten „besseren“ Würfel wählen kann.
$B \to R \quad R \to G \quad G \to B$ [B, R, G: Blauer, roter und grüner Würfel]

(c) Jetzt ist das Spiel fair. Begründung beispielsweise über identische Augensummen

3. **Getarnte Würfel**

Im Gegensatz zu einem klassischen 6er Würfel sollt ihr in Partnerarbeit einen sechsseitigen Würfel herstellen, auf dem Zahlen aus der Menge $1, 2, 3, 4, 5, 6$ einfach, mehrfach oder gar nicht vorkommen.



Dafür klebt ihr auf die sechs Seiten eines herkömmlichen Würfels kleine Papierschnipsel auf denen eure Zahlen stehen. Wenn ihr damit fertig seid, sucht ihr euch eine andere 2er-Gruppe und würfelt so, dass diese Schüler euren Würfel nicht sehen können. Lediglich das Ergebnis wird mitgeteilt und in die folgende Tabelle eingetragen:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl (absolute Häufigkeit)						

(a) Wie könnte die Beschriftung des Würfels aussehen?

(b) Wie oft muss man werfen, um eine möglichst sichere Aussage über die Beschriftung des Würfels machen zu können? Begründe!

(c) Was könnte der Grund dafür sein, dass eine Zahl häufiger gewürfelt wird als eine andere, die genauso oft auf dem Würfel ist?

4. **Lego-Steine**

Statt mit einem normalen Spielwürfel kann man auch mit einem Lego-Stein „würfeln“. Nimm einen „Achter“ und beschrifte ihn wie hier gezeigt. Wie bei einem richtigen Spielwürfel haben gegenüberliegende Seiten zusammen die Augenzahl 7. Beim Würfeln sollte ein Würfelbecher benutzt werden. Als Ergebnis notiert man die Augenzahl.

Anne, Gisa und Simon haben vor ihrem Würfeln mit dem Lego-Stein die Chancen für die Augenzahlen 1 bis 6 geschätzt.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Schätzung Anne	2%	10%	31%	45%	10%	2%
Schätzung Peter	1%	7%	40%	36%	12%	4%
Schätzung Gisa	0%	5%	40%	50%	5%	0%
Schätzung Simon	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(a) Welcher Schätzung würdest du am ehesten zustimmen? Begründe deine Antwort!

(b) Gib selbst eine Schätzung ab und überprüfe die Schätzungen, indem du 100*mal* mit dem Lego-Stein würfelst. Stelle die absolute und die relative Häufigkeit in einer Tabelle zusammen. Gib nach diesem Versuch eine (möglicherweise verbesserte) Schätzung ab.

(c) Wolfgang behauptet, die Chance für das Würfeln einer Augenzahl hängt vom Flächeninhalt der zugehörigen Seite ab. Berechne die Flächeninhalte, wobei du die Flächen mit 3 und 4 als eben annehmen kannst. Gib den Anteil jedes einzelnen Flächeninhalts an der gesamten Oberfläche an. Vergleich mit den Angaben aus (a).

Quelle: Lambacher Schweizer 8, S. 156

Variation:

Riemer-Würfel statt Lego-Steine

Lösung: (a) Die Schätzung von Simon ist nicht gut, da sie den unterschiedlichen Seiten gleiche Chancen zuordnet.
Gisas Schätzung ist auch nicht gut. Obwohl 1 und 6 kleine Chancen haben, ist die Schätzung 0% nicht gerechtfertigt.
Annes Schätzung ist am besten. Die Chance der Landung auf den größten Flächen ist am größten, und die Chance der Landung auf den kleinsten Flächen ist am kleinsten, aber nicht 0%.

(b) individuelle Lösung

(c)

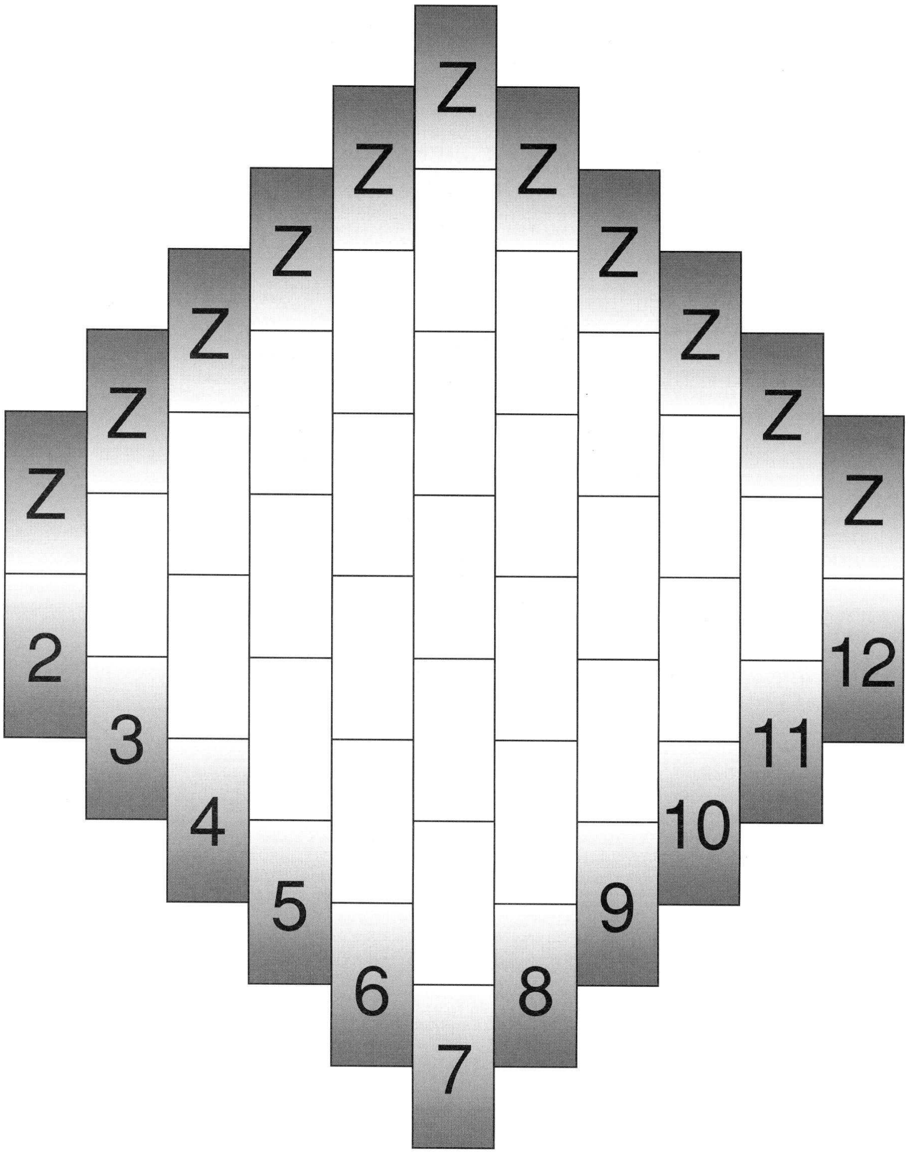
Zahl	Fläche	Anteil an der Gesamtfläche
1 und 6	$1,4\,\mathrm{cm}^2$	$7,4\%$
2 und 5	$2,9\,\mathrm{cm}^2$	$15,4\%$
3 und 4	$5,1\,\mathrm{cm}^2$	$27,1\%$

Gesamtfläche $18,8\,\mathrm{cm}^2$.
Wolfgangs Behauptung spiegelt die Tendenz von Annes Schätzung aus Aufgabe (a) wider. Allerdings ist bei ihm die Wahrscheinlichkeit für die großen Flächen zu klein und die Wahrscheinlichkeit für die kleinen und mittleren Flächen zu groß.

5. **Spiel „Der schnellste Weg“**

Zu Beginn des Spieles wird von jedem Mitspieler ein Spielstein auf eine Startzahl zwischen 2 und 12 gesetzt. Anschließend wird mit zwei Würfeln gewürfelt und die Augensumme gebildet. Stimmt die Augensumme mit der besetzten Startzahl überein, darf man ein Feld vorrücken und nochmals würfeln. Stimmen Augensumme und Startzahl nicht überein, ist der nächste Spieler dran. Wer mit seinem Spielstein auf ein Zielfeld (Z) kommt, hat einen Gewinnpunkt gemacht und darf seinen Stein wieder auf eine beliebige Startzahl setzen.
Gewonnen hat derjenige, der zuerst 3 Gewinnpunkte hat.

Spielplan „Der schnellste Weg..."



(a) Spielt das Spiel in Dreier-Gruppen. Die Mehrfachbelegungen eines Startfeldes ist nicht erlaubt!

(b) Notiert in der folgenden Strichliste wie oft eine Startzahl gewürfelt wurde.

Startzahl	Absolute Häufigkeit
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

(c) Notiert in der folgenden Strichliste wie oft eine Startzahl zum Erwerb eines Gewinnpunktes geführt hat.

Startzahl	Gewinnpunkte
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

(d) Wie viele Möglichkeiten / Kombinationen gibt es, eine Startzahl zu werfen?

Startzahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl der Möglichkeiten											

(e) Überlegt euch Variationen des Spiels um es (noch) spannender zu machen (z.B. drei Würfel einsetzen und die geeignete Kombination aus zweien auswählen, mehrere Startfelder besetzen etc.).

Variationen der Aufgabe:

(a) mehrere Spielsteine pro Person

(b) mehrere Würfel pro Person

(c) Personenzahl variieren

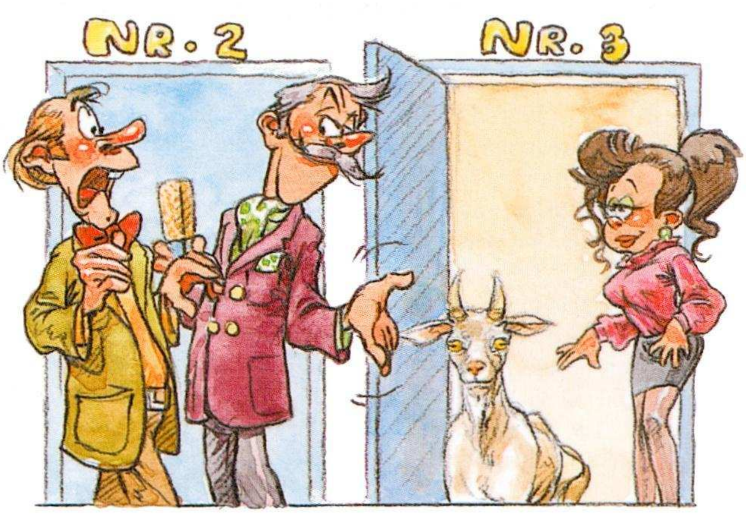
(d) eigenes Spielfeld entwerfen

(e) zusätzliche Würfelbedingungen einführen

(f) Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Startzahl berechnen

6. **Das „3-Türen-Problem“**

In der amerikanischen Fernsehshow „Let’s make a deal“ ist ein Auto ein Hauptpreis. Um ihn zu gewinnen, muss sich der Kandidat schließlich für die richtige von drei verschlossenen Türen entscheiden. Hinter einer befindet sich das Auto, hinter den beiden anderen jeweils eine Ziege. Wenn sich der Kandidat für eine der drei Türen entschieden hat, zum Beispiel für Tür 1, öffnet der Moderator, der weiß, was sich hinter den Türen befindet, mit den Worten „Soll ich Ihnen ’mal ’was zeigen?“ eine der beiden anderen Türen, zum Beispiel Tür 3, und eine Zeige schaut ins Publikum, denn der Moderator öffnet niemals die Tür, hinter der das Auto steht.



Der Kandidat hat nun noch die Möglichkeit, sich für die andere verschlossene Tür (hier Tür 2) zu entscheiden oder bei seiner ursprünglichen Wahl zu bleiben(hier Tür 1). Was soll der Kandidat machen? Diese Frage wurde der Journalistin *Marilyn vos Savant*, die angeblich der Mensch mit dem höchsten Intelligenzquotienten ist, von einem Leser der Zeitschrift „Parade“ gestellt. In ihrer Kolumne „Ask Marylin“ antwortete sie, dass der Kandidat auf jeden Fall wechseln sollte. Dieses Vorgehen würde seine Gewinnwahrscheinlichkeit verdoppeln, nämlich von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{2}{3}$. Daraufhin erhielt sie etwa zehntausend Leserbriefe, die diese Strategie für falsch hielten.

Argumentation von Marylin vos Savant
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 1 befindet, ist $\frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter einer der beiden anderen Türen befindet, ist somit $\frac{2}{3}$. Mindestens hinter einer dieser beiden Türen steht eine Ziege.

Öffnet der Moderator eine dieser Türen, so steht die Tür fest, hinter welcher das Auto mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ steht. Also empfiehlt es sich, die gewählte Tür zu wechseln. Die Chance auf den Hauptgewinn verdoppelt sich.

Argumentation der meisten Leser
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 1 befindet, ist $\frac{1}{3}$, genauso wie für jede der beiden anderen Türen.
Öffnet der Moderator eine der beiden anderen Türen, zum Beispiel Tür 3, so scheidet diese Tür als mögliche Auto-Tür aus. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 1 befindet, beträgt jetzt $\frac{1}{2}$, genauso wie für Tür 2. Es gibt also keinen Grund die Tür zu wechseln. Die Gewinnchance ist für beide Türen gleich.

(a) Diskutiert die beiden unterschiedlichen Argumentationen zu zweit.

(b) Wenn du als Kandidat entscheiden müsstest, würdest du die Tür wechseln oder nicht? Begründe deine Überlegung!

(c) Überprüft eure Überlegungen an einem Experiment, das dem „3-Türen-Problem“ entspricht (z.B. drei Würfelbecher und eine Münze als Gewinn).

Quelle: Zahlen und Größen 8, S. 159

Variationen:

(a) Schüler schreiben ihre eigene Argumentation

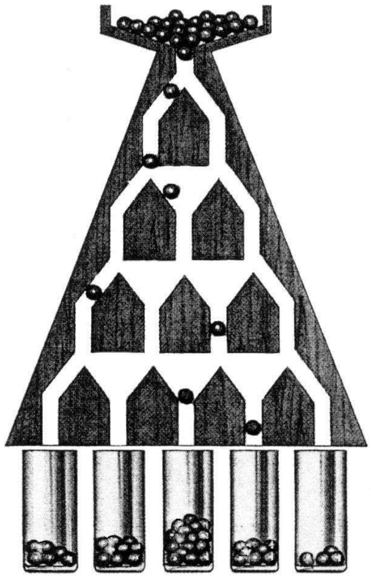
(b) 1000 Türen, von denen der Moderator 98 öffnet

(c) Simulation im Internet nutzen: www.zufallsgeneratoren.de

Lösung: Auch wenn es immer noch nicht alle glauben, hat Marylin vos Savant recht.

7. **Galton-Brett**

Francis Galton (1822 – 1911) erfand das neben stehende Galton-Brett. Auf diesem sind mehrere Reihen gleichgeformter Plättchen auf Lücken befestigt. Hindurchfallende Kugeln treffen auf die Spitze des ersten Plättchens und werden dort jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $0,5$ nach rechts oder nach links abgelenkt. Dieser Vorgang setzt sich von Reihe zu Reihe fort. Die Kugeln werden unter jedem Ausgang zur Auszählung aufgefangen.



Sollte euch kein Galton-Brett zur Verfügung stehen, könnt ihr trotzdem ausprobieren, wie sich die Kugeln verteilen. Simuliert den Versuch und entscheidet bei jeder Plättchenspitze mit Hilfe einer Münze, welchen Weg (rechts oder links) die Kugel nimmt.

(a) Macht in Partnerarbeit 100 Durchgänge und zählt die Zahl der Kugeln in jedem Behälter. Tragt die Anzahl in einem Säulendiagramm auf.

(b) Wie viele verschiedene Wege kann eine Kugel nehmen?

(c) Stellt die Situation in einem Ergebnisbaum dar und bestimmt zu jedem Weg die Wahrscheinlichkeit.

(d) Am Boden des Galton-Bretts fällt jede Kugel in eine der fünf Kammern. Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet der Weg in Kammer 1 [bzw. $2, 3, 4, 5$]?

Lösung: (a) Experiment

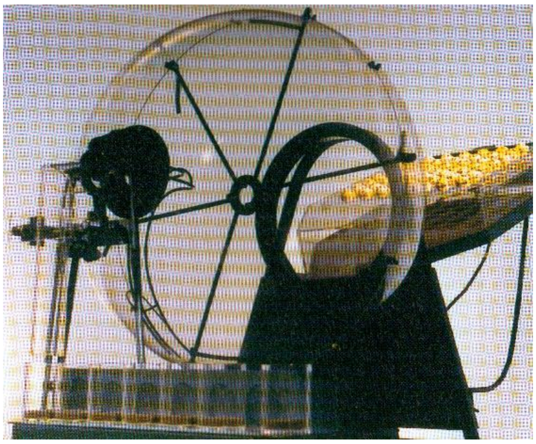
(b) Es gibt $2^4 = 16$ Wege.

(c) Jeder Weg ist gleichwahrscheinlich also $\frac{1}{16}$.

(d) Kammer 1 und 5: jeweils $\frac{1}{16}$
Kammer 2 und 4: jeweils $\frac{4}{16}$
Kammer 3: $\frac{6}{16}$

8. **Lotto „3 aus 9“**

Anstelle des bekannten Lottos „6 aus 49“ sollt ihr den kleinen Ableger davon „3 aus 9“ spielen. Dafür müsst ihr zunächst 9 Papierschnipsel mit den Zahlen $1-9$ beschriften und dann in einen undurchsichtigen Behälter füllen.



Jeder aus der Klasse tippt eine Dreierkombination aus der Menge $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (z.B. $3 - 6 - 7$). Es darf dabei keine Zahl doppelt vorkommen. Im Anschluss daran zieht der Lehrer drei Schnipsel aus dem Behälter.

(a) Nachdem an der Tafel die Ergebnisse aller Schüler notiert wurden (absolute Häufigkeit), berechne die relative Häufigkeit der einzelnen Zahlen.

(b) Wie groß war rein rechnerisch die Wahrscheinlichkeit, $0, 1, 2$ oder 3 „Richtige“ zu haben.

(c) Vergleiche das Ergebnis aus Teil (b) mit dem aus (a). Was könnte die Ursache für die Differenzen sein?

Variationen:

Die Anzahl der gezogenen und die Gesamtzahl der Kugeln können variiert werden.

Lösung: $P(0 Richtige) = \frac{5}{21} \approx 23,8\%$
$P(1 Richtige) = \frac{15}{28} \approx 53,5\%$
$P(2 Richtige) = \frac{3}{14} \approx 21,5\%$
$P(3 Richtige) = \frac{1}{84} \approx 1,2\%$

9. **Laplace**

Lege die möglichen Ergebnisse fest und entscheide und begründe, ob es sich bei den folgenden Experimenten um ein Laplace-Experiment (Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind) handelt oder nicht.

(a) Eine Geldmünze wird geworfen.

(b) Ein Elfmeter wird geschossen.

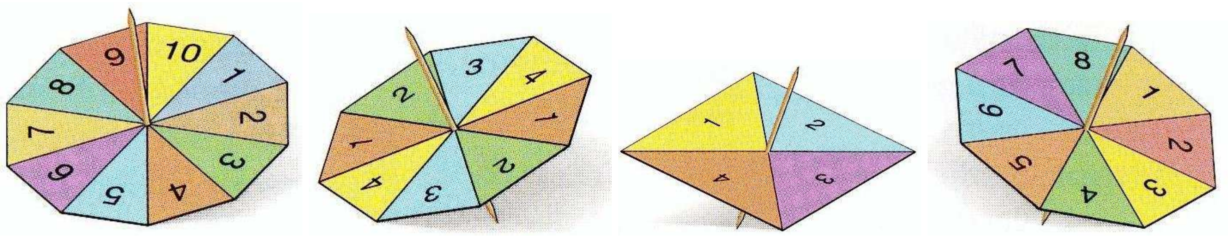
(c) Ein Marmeladenbrot fällt vom Tisch.

(d) Ein Dartpfeil wird auf die Dartscheibe geworfen.

Überlege dir drei Experimente, die ein Laplace-Experiment darstellen und drei, die dies nicht tun!

Lösung: (a) Laplace-Experiment (wobei in der Natur kein wirkliches Laplace-Experiment existiert)
(b) kein Laplace-Experiment
(c) Laplace-Experiment
(d) kein Laplace-Experiment

10. **Glückskreisel**



Die oben abgebildeten Glückskreisel werden gedreht.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie im Feld „2“ liegen bleiben?
(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie auf einer geraden Zahl liegen bleiben?
(c) Für welche Glückskreisel ist das Spiel „Du gewinnst, wenn eine Primzahl kommt“ fair?
(d) Finde andere faire bzw. unfaire Spielregeln für die einzelnen Glückskreisel. Finde ggf. einen Kreisel bei dem das Spiel fair wäre.

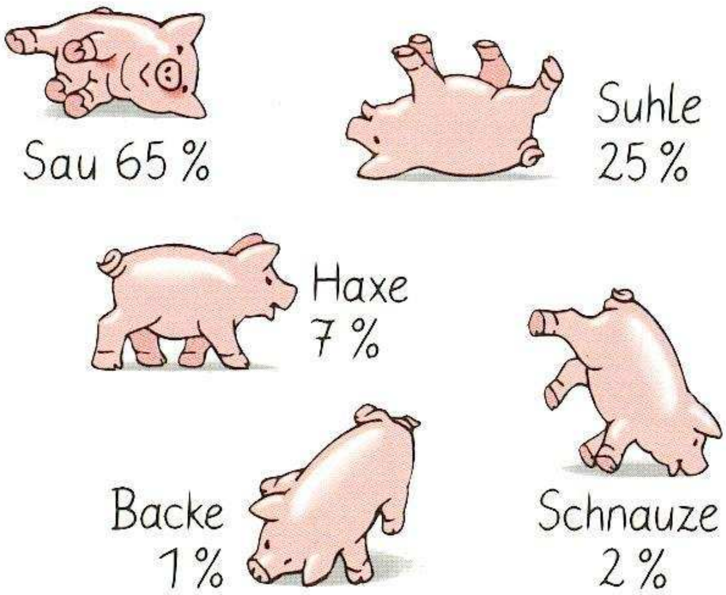
Lösung: (a) $0,1 \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 0,125$
(b) jeweils $0,5$

11. **Schweinerei**

Bei dem Spiel „Schweinerei“ werden Schweine geworfen. Dabei gibt es fünf Möglichkeiten, wie das Schweinchen fallen kann.

- Sau - Seitenlänge
- Suhle - Rückenlage
- Haxe - stehend

- Schnauze - auf der Schnauze
- Backe - wie Schnauze, jedoch seitlich auf einer Backe



Die Wahrscheinlichkeit für jede Lage kannst du der Abbildung entnehmen.

(a) Gib einige mögliche Ergebnisse an, wenn zwei Schweinchen geworfen werden?

(b) Bestimme für die Ergebnisse die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Lösung: Sau - Suhle $32,5\%$
Haxe - Schnauze $0,28\%$
Sau - Haxe $9,1\%$
Backe - Haxe $0,14\%$
Schnauze - Backe $0,04\%$
Sau - Sau 25%

12. **Mensch ärgere dich nicht**

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gelbe Stein beim nächsten Wurf

(a) den grünen [bzw. den roten] Stein schlägt?

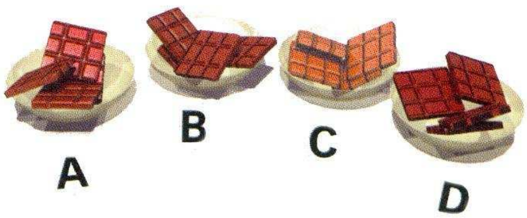
(b) in sein Haus gelangt?

(c) weder einen Stein schlägt noch in sein Haus gelangt?

Lösung: (a) $\frac{1}{6}$ [$\frac{1}{6}$]
(b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{1}{3}$

13. **Schokolade**

Eine Klasse führt einen Geschmackstest zur Untersuchung zweier Sorten Vollmilchschokolade durch. Dazu werden vier zufällig bestimmte Proben A, B, C und D bereitgestellt.

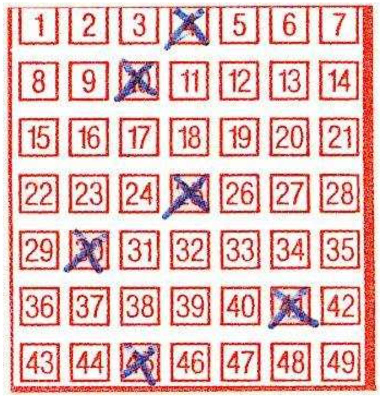


(a) Zeichne ein Baumdiagramm.
(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand zufällig mindestens drei Treffer erzielt.
(c) Entscheide und begründe, wann man bei diesem Test von einem „guten Schmecker“ sprechen kann.

Lösung: (a) Grafik
(b) $\sim 5\%$

14. **Lotto**

Peters Lieblingszahl ist die Zahl 25. Peter schaut bei der Wochenziehung des Lottospiels 6 aus 49 zu. Dabei werden nacheinander 6 Kugeln aus einer Urne mit 49 nummerierten Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.



(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 25 als erste Kugel der Wochenziehung gezogen wird?

(b) Begründe, warum die Wahrscheinlichkeit, dass die 25 als zweite [als dritte; als vierte,…] gezogen wird $\frac{1}{49}$ beträgt.

Lösung: (a) $\frac{1}{49}$

(b) als zweite: $\frac{48}{49}$ (nicht die 25) $\cdot \frac{1}{48}$ (als zweite die 25) $= \frac{1}{49}$

15. **Basketball**

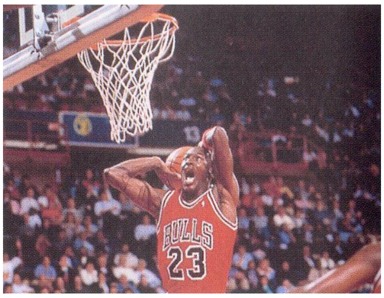
In der amerikanischen Basketball-Liga NBA wird der Meister nach der Regel „best of five“ ermittelt. Das bedeutet, wer zuerst drei von fünf Spielen gewonnen hat, ist Meister. In einem Computerspiel kommt es (leider ohne Beteiligung des Computerspieler, der ist vorher ausgeschieden) zu einem Endspiel zwischen den *Chicago Bulls* und den *Utah Jazz*. Die Bulls gewinnen, aufgrund der vorher vom Spieler eingestellten Teamstärke, dabei mit durchschnittlich 2 zu 1 jedes einzelne Spiel, d.h. von drei Spielen gewinnen die Bulls durchschnittlich zwei Spiele.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen die Bulls den Titel? Nutze für deine Überlegungen die Möglichkeiten eines Baumdiagramms.

(b) Wie ändern sich die Chancen für die Bulls, wenn man einstellt, dass sie jedes einzelne Spiel nur noch mit der Chance 4 zu 3 gewinnen?

(c) Wie kann man die Eintragungen im Baumdiagramm überprüfen?

(d) Gib eine Regel an, mit der du mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit für den Sieg berechnen kannst.



Lösung: (a) 79%
(b) 71%

16. **Spielautomat**

Bei dem abgebildeten Spielautomaten beträgt der Einsatz pro Spiel 1 €. Gewonnen hat man bei: dreimal Eins (111): 30 €
drei gleiche Zahlen (außer 111): 10 €
Berechne den Erwartungswert. Lohnt sich das Spiel?
(Laut Gesetz müssen mindestens 60% aller Einsätze wieder ausgespielt werden.)

Lösung: 60 Cent pro Spiel

17. **Streichhölzer**

Eine Streichholzfirma stellt täglich 3.000.000 Streichholzschachteln her. Eine Stichprobe von 5000 Schachteln ergab folgende Verteilung:

Inhalt der Schachteln	36	37	38	39	40	41	42	43
Anzahl der Schachteln	12	28	238	765	2517	936	342	162

(a) Wie viele Schachteln mit der entsprechenden Anzahl Streichhölzer sind täglich zu erwarten?

(b) Wie viele Streichhölzer kann man beim Kauf von 20 Schachteln erwarten?

(c) Wie viel Prozent der Päckchen enthalten demnach mindestens 39 Streichhölzer?

(d) Wie viel Prozent der Päckchen enthalten mehr als 39, aber weniger als 42 Streichhölzer?

Lösung: (a)

Inhalt	Anzahl
36	7200
37	16800
38	142800
39	459000
40	1510200
41	561600
42	205200
43	97200

(b) 803 Streichhölzer

(c) etwa 94%

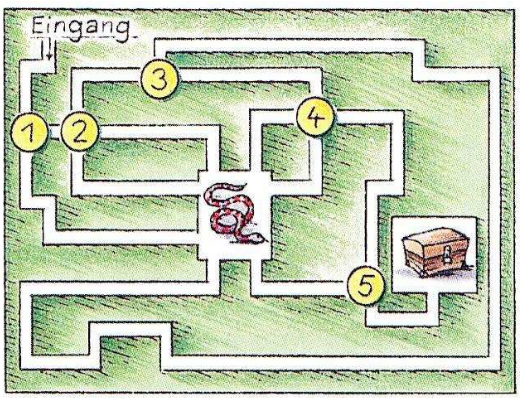
(d) etwa 69%

18. **Gefährliche Schatzsuche**

In einem Labyrinth wird ein wertvoller Schatz aufbewahrt, der durch eine Grube voller Schlangen gesichert wird. Ihr Biss ist für jeden Schatzjäger absolut tödlich.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Schlangen zu entkommen und den Schatz zu finden? Die Zahlen stehen dabei für die Kreuzungen.

(b) Entwirf ein eigenes Labyrinth mit eigenen Fallen und bestimme die Wahrscheinlichkeit den Schatz zu finden.



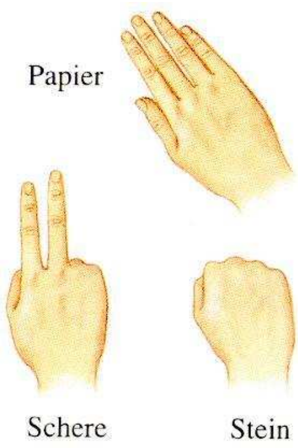
Lösung: (a) $\sim 1,4\%$

19. **Stein-Schere-Papier**

Bei dem Spiel „Stein-Schere-Papier“ knobeln Jean und Ben gegeneinander. Es gilt: Schere schlägt Papier, Stein schlägt Schere, Papier schlägt Stein. Gleiche Ergebnisse zählen nicht. Wer zuerst seinen Gegner dreimal schlägt, hat gewonnen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ben gewinnt?

(b) Nach der ersten Schritt liegt Jean in Führung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ben noch gewinnt?

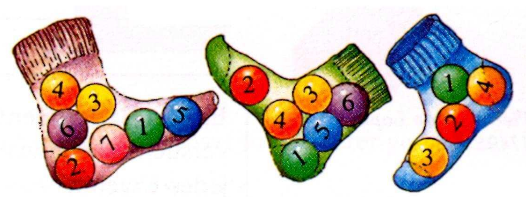


Lösung: (a) 50%
(b) 100% – 68, 75% [Jean] = 31, 25% [Ben]

20. **Urnenziehung: Zahlen**

(a) Welche Wahrscheinlichkeit hat die Zahl „3“ bei den Urnen in der Abbildung?

(b) Lina zieht 75-mal aus der Urne 1, dabei wird jede gezogene Kugel vor dem nächsten Zug zurückgelegt. Wie oft wird sie etwa in den 75 Versuchen die „3“ erwischen?



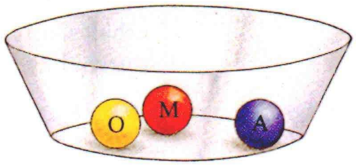
Lösung: (a) $\frac{1}{7}; \frac{1}{6}; \frac{1}{4}$
(b) ca. 11-mal

21. **Urnenziehung: Buchstaben**

In einer Urne liegen drei Kugeln mit Buchstaben, sie werden nacheinander gezogen und hintereinander gelegt.

(a) Schreibe alle „Wörter“ auf, die dabei entstehen können.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht das Wort OMA?



Lösung: (a) 6 verschiedene

(b) $\frac{1}{6}$

22. **Schaltjahr-Geborene**

Bestimme mit einer Laplace-Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der nicht in einem Schaltjahr geboren ist,

(a) am 12. Januar

(b) am 24. Dezember

(c) am 29. Februar

(d) im April

(e) an einem Monatsersten

(f) an einem Datum deiner Wahl

Geburtstag hat.

Lösung: (a) $\frac{1}{365}$

(b) $\frac{1}{365}$

(c) 0

(d) 0

23. **Laplace: ja oder nein?**

Welche der folgenden Laplace-Annahmen sind gerechtfertigt, welche sind nur annähernd gerechtfertigt, welche sind eindeutig falsch?

(a) Es gibt 12 Monate, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand im Januar Geburtstag hat, $\frac{1}{12} \approx 8,3\%$.

(b) Es gibt 7 Wochentage, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig herausgegriffene Person in diesem Jahr an einem Sonntag Geburtstag hat, $\frac{1}{7} \approx 14,3\%$.

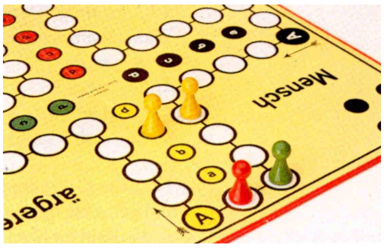
(c) Es gibt 7 Wochentage, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Advent dieses Jahr auf einen Montag fällt, $\frac{1}{7} \approx 14,3\%$.

(d) Jeder Knopf hat zwei Seiten. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass er auf die Oberseite fällt, 50%.

Lösung: (a) naja
(b) ja
(c) nein
(d) nein

24. **Warten auf die Sechs**

Beim Mensch-ärgere-Dich-nicht darf man bei einer Sechs starten. Man hat bis zu drei Versuche. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Start gelingt?



Lösung: $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \approx 42,1\%$

25. **Pasch-Wahrscheinlichkeit**

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln mit zwei Würfeln einen Pasch zu bekommen?

Lösung: $\frac{1}{6}$

26. **Treffer-Wahrscheinlichkeit**

Beim Basketball trifft Mag mit Wahrscheinlichkeit 40%, Wim mit 70%. Sie werfen nacheinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zusammen $0, 1$ oder 2 Treffer erhalten?

Lösung: $0 : 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$
$1 : 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,3 = 0,54$
$2 : 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$

27. **Siedler von Cartan**

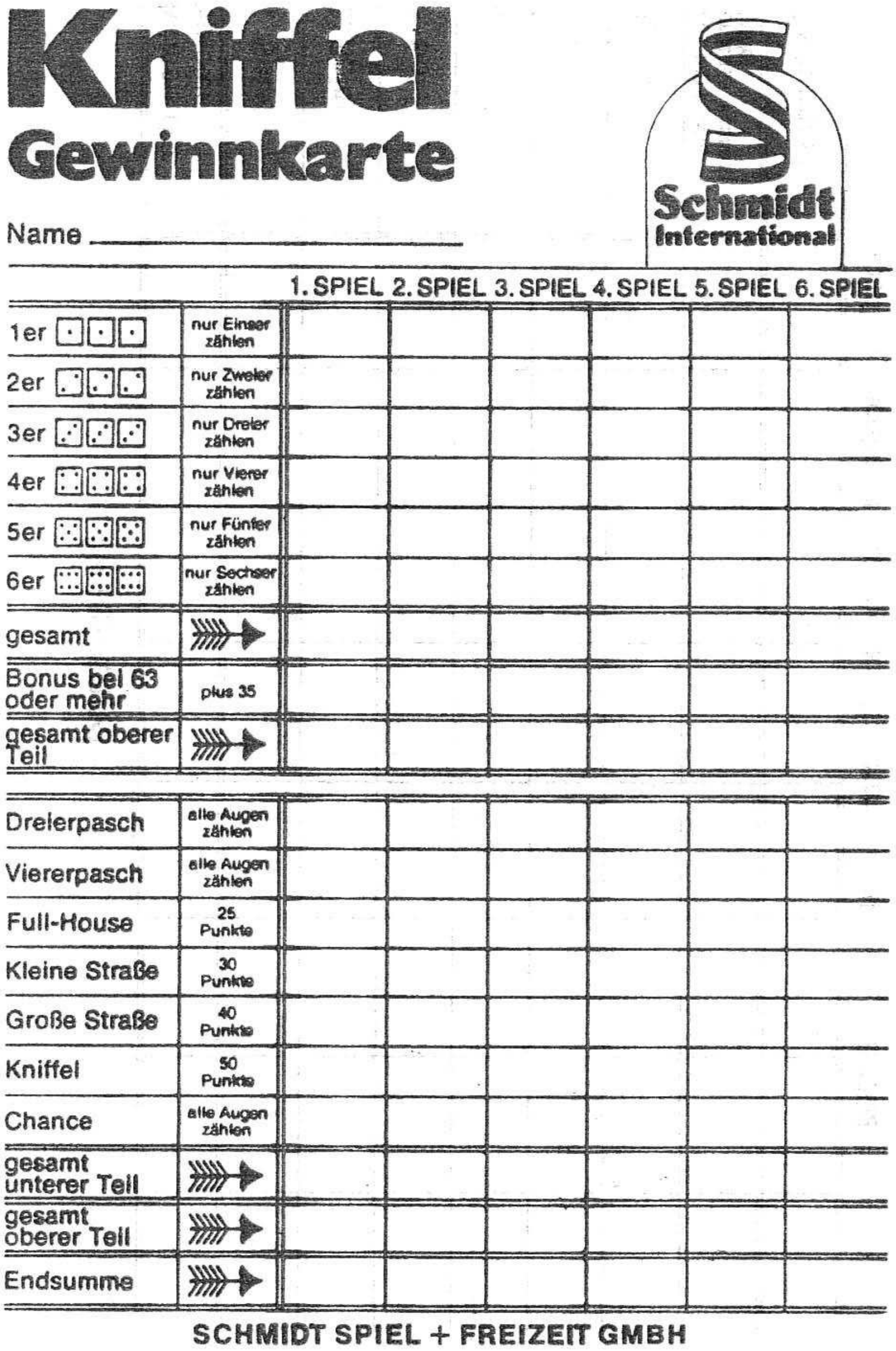
Beim Spiel „Die Siedler von Catan“ muss man seine Siedlungen an besonders ertragreiche Felder bauen. Die Felder sind von 2 bis 12 durchnummeriert und die Auszahlung des Rohstoffs wird fällig, wenn die Summe eines Wurfes mit zwei Würfeln gleich der Feldnummer ist. An welche Felder sollte man bauen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe gleich $1, 2, 3, ..., 11, 12$ ist?

Quellen: MatheNetz 8 (2000), MatheLive 8 (2001), Lambacher Schweitzer 8 (1996), Schnittpunkt 8 (1994), Mathematik heute 8 (1995), Zahlen und Größen 8 (2000), Mathematik 8 (1994), Die Welt der Zahl (1994), Elemente der Mathematik 8 (1994), Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sek. I (2001).

Lösung: Klar, je nach der Anzahl der Möglichkeiten diese Augensumme zu erzielen

28. **Kniffel**

Kniffel ist ein geschicktes Kombinationsspiel mit 5 Würfeln. Jeder Spieler, der an der Reihe ist, gibt zunächst alle 5 Würfel in den Würfelbecher, schüttelt ihn und rollt die Würfel heraus. Je nach Ausfall dieses ersten Wurfes entscheidet der Spieler, ob er alle Würfel oder nur einen Teil wieder aufnimmt und erneut würfelt. So kann ein ungünstiger erster Wurf mit Glück beim zweiten oder maximal dritten Würfeln zu einem optimalen Ergebnis führen.



Kniffel
Gewinnkarte

Schmidt International

Name ____________________

		1. SPIEL	2. SPIEL	3. SPIEL	4. SPIEL	5. SPIEL	6. SPIEL
1er	nur Einser zählen						
2er	nur Zweier zählen						
3er	nur Dreier zählen						
4er	nur Vierer zählen						
5er	nur Fünfer zählen						
6er	nur Sechser zählen						
gesamt	→						
Bonus bei 63 oder mehr	plus 35						
gesamt oberer Teil	→						
Dreierpasch	alle Augen zählen						
Viererpasch	alle Augen zählen						
Full-House	25 Punkte						
Kleine Straße	30 Punkte						
Große Straße	40 Punkte						
Kniffel	50 Punkte						
Chance	alle Augen zählen						
gesamt unterer Teil	→						
gesamt oberer Teil	→						
Endsumme	→						

SCHMIDT SPIEL + FREIZEIT GMBH

Die Zählliste enthält dreizehn Rubriken (siehe nebenstehende Abbildung). In der oberen Abteilung können die Einser, . . . , bis zu den Sechsern eingetragen werden.

In der unteren Abteilung gibt es den Dreier- und Viererpasch (drei bzw. vier gleiche Zahlen), Full House (bestehend aus einem Dreier- und einem Zweierpasch), der kleinen und großen Straße (Folge von vier bzw. fünf Würfeln mit aufeinanderfolgender Augenzahl), dem Kniffel (Fünferpasch) und der Chance (hier werden keinerlei Bedingungen an den Wurf geknüpft).
Spielziel ist es, das höchste Punktergebnis von allen Mitspielern zu erreichen.
Zunächst wird nur der erste Wurf aus 5 Würfeln betrachtet. Bestimmt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten folgender Ereignisse:

(a) Dreierpasch aus „Zweien“
(b) Beliebiger Dreierpasch
(c) Viererpasch
(d) Kniffel
(e) Große Straße
(f) Kleine Straße

Lösung: Jeweils „Günstige durch Mögliche“, wobei die Anzahl der Möglichen $6^5 = 7776$ beträgt

(a) Anzahl der „Günstigen“: $\binom{5}{3} \cdot 5 \cdot 4 = 200$, also Gewinnwahrscheinlichkeit $\approx 0,026$
wobei:$\cdot 5 \cdot 4$ nur bei versch. Augenzahlen
$+5$ falls auch identische Augenzahlen (also Full House)
$\cdot 6 \cdot 6$ falls auch Vierer-/Fünferpasch/Full House erlaubt
(b) Anz. „Günstige“: $6 \cdot 200 = 1200$ also Gewinnwahrscheinlichkeit $\approx 0,154$
wobei: siehe Bemerkungen zu Teilaufgabe (a)
(c) Anz. „Günstige“: $6 \cdot \binom{5}{4} \cdot 5 = 150$ also Gewinnwahrscheinlichkeit $\approx 0,019$
wobei: $\cdot 6$, wenn auch 5er-Pasch erlaubt ist
(d) Anz. „Günstige“: 6 also: Gewinnwahrscheinlichkeit $\approx 0,001$
(e) Anz. „Günstige“: $5! \cdot 2 = 240$ also Gewinnwahrscheinlichkeit $\approx 0,031$
(f) Anzahl „Günstige“: $4! \cdot 4 + 4! \cdot 5 = 336$ also Gewinnwahrscheinlichkeit $\approx 0,043$
wobei Anzahl „Günstige“ gleich $4! \cdot 6 \cdot 3$, wenn auch große Straße erlaubt

29. **Würfeln**

Wirf einen Würfel, bis sich eines der sechs möglichen Ereignisse wiederholt.
Notiere die Anzahl der notwendigen Würfe bis zur ersten Wiederholung.
Welcher Mittelwert für die Anzahl der notwendigen Würfe ergibt sich bei 50 Versuchsserien?

Quelle: Elemente 12/13 (2000)

30. **Platonische Körper**

Wirf einen regulären Oktaeder (Dodekaeder, Ikosaeder), bis sich eines der $8(12, 20)$ möglichen Ereignisse wiederholt.
Welcher Mittelwert für die Anzahl der notwendigen Versuchsdurchführungen bis zur ersten Wiederholung eines Ergebnisses ergibt sich bei 50 Versuchsserien?

31. **Das Geburtstagsproblem**

23 Personen werden zufällig ausgewählt. Lohnt es sich darauf zu wetten, dass unter diesen mindestens zwei sind, die am gleichen Tag Geburtstag haben?

(a) Schätzt zunächst, ob sich eine solche Wette lohnt.

(b) Was könnte diese Aufgabe mit den obigen beiden Aufgaben zu tun haben? Versucht diesen Zusammenhang zu erläutern.

(c) Versucht zu begründen, warum die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der 23 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, gleich $1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot 343}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \cdots \cdot 365}$ ist.

32. **Entenfeier**

Im Hause der Familie Duck halten sich n Enten zu einer Familienfeier auf. Eine muss trotz des scheußlichen Regens hinaus und den Erbonkel Dagobert mit dem Schirm abholen. Donald Duck hält n Streichhölzer in der Hand, eins davon ist gekürzt. Wer dieses zieht, muss hinaus in den Regen.

(a) Soll Trick als erster ziehen, als letzter oder mehr so in der Mitte? Berechnet die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und nehmt dann Stellung zu Daisys Aussage: „Die ersten und die letzten, die ziehen, haben die besten Chancen, nicht hinaus zu müssen, denn zu Beginn sind noch alle langen Hölzchen da, und bis zum Ende wird wohl kaum gezogen werden, da schon vorher jemand das kurze Streichholz gezogen haben wird. Die in der Mitte sind am schlechtesten dran, weil nur noch etwa die Hälfte der langen Hölzchen da sind und dadurch die Chancen zu verlieren viel größer sind.“

(b) Wenn nur noch Trick und Track im Raum sind, weil alle anderen damit beschäftigt sind, den mit Wasser vollaufenden Keller zu entleeren, wird folgendes Verfahren vereinbart: Trick und Track ziehen abwechselnd eines der n Streichhölzer. Wer zuerst das kurze zieht, muss hinaus in den Regen. Soll Trick jetzt anfangen oder lieber Track den Vortritt lassen?

Hinweis: Macht euch den Sachverhalt zunächst anhand von konkreten Zahlenbeispielen für n klar.

33. **Glücksspirale**

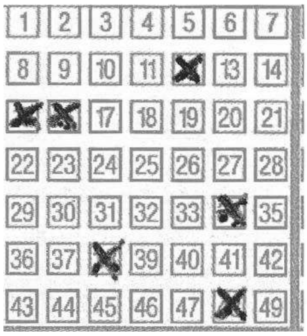
Zur teilweisen Finanzierung der Olympischen Spiele 1972 in München wurde eine Lotterie eingeführt: die Glücksspirale. Die 7-ziffrigen Glückszahlen wurden dabei wie folgt ermittelt: In einer Trommel befanden sich 70 Kugeln; auf 7 Kugeln stand die 0, auf 7 Kugeln die 1, . . . , auf 7 Kugeln die 9. Aus dieser Trommel wurden 7 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in der Reihenfolge des Ziehens zur jeweiligen Glückszahl angeordnet.

(a) Geben Sie den Ergebnisraum an. Wie viele Glückszahlen sind in ihm enthalten?

(b) Nach der ersten Ziehung gab es in der Presse Kritik, daß durch dieses Verfahren nicht alle 7-ziffrigen Glückszahlen die gleiche Gewinnchance gehabt hätten. Bestätigen oder widerlegen Sie diese Kritik. Machen Sie gegebenenfalls (falls die Kritik zutrifft) einen Vorschlag zur Verbesserung des Ziehungsverfahrens und begründen Sie Ihren Vorschlag in Form eines Briefes an die Geschäftsführung der Glücksspirale.

34. **Lottostrategie**

Zahlen unter 32 werden (wegen der Geburtstage der Tipper) beim Lottospiel 6 aus 49 häufiger angekreuzt als andere Zahlen. Im allgemeinen ist deshalb die Zahl der Gewinner um so größer, je mehr Zahlen unter 32 ausgelost werden. Sollte man also nur noch Zahlen über 32 tippen?



35. **Gezinkte Würfel**

Walter zinkt Würfel so, dass äußerlich keine Veränderung zu erkennen ist, die Wahrscheinlichkeit für „6“ aber $0,25$ beträgt. Seine Frau Trude testet die Würfel folgendermaßen: Sie würfelt zwölfmal mit jedem Würfel. Wirft Sie mit einem Würfel mehr als dreimal eine „6“, so legt sie ihn zu den gezinkten, sonst zu den idealen.

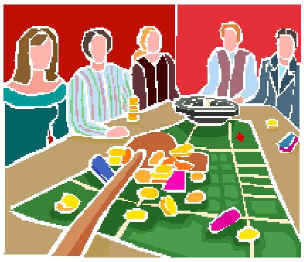
(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein idealer Würfel zu den gezinkten gelegt wird?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gezinkter Würfel zu den idealen gelegt wird?

(c) Wie könnte Trude die Fehlerquote verringern?

36. **Roulette**

Beim Roulette ist in den vergangenen zehn Spielen jedesmal eine rote Zahl gezogen worden. Auf welche Farbe würdest du im elften Spiel setzen? Begründe!



37. **Froschgeschichten**

Ein Ko-Frosch sitzt auf einem Gitterpunkt eines Koordinatensystems und kann jeweils nur zum nächsten Gitterpunkt nach oben oder nach rechts springen und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$.
Beispiel: Befindet sich der Ko-Frosch auf dem Gitterpunkt (4|3), dann kann er nur nach (4|4) oder (5|3) springen.

(a) Der Ko-Frosch sitzt auf dem Gitterpunkt (0|0).

i. Auf welchen Gitterpunkten kann er sich nach 5 Sprüngen befinden?

ii. Wie viele Sprünge benötigt er, um den Gitterpunkt (18|17) zu erreichen?

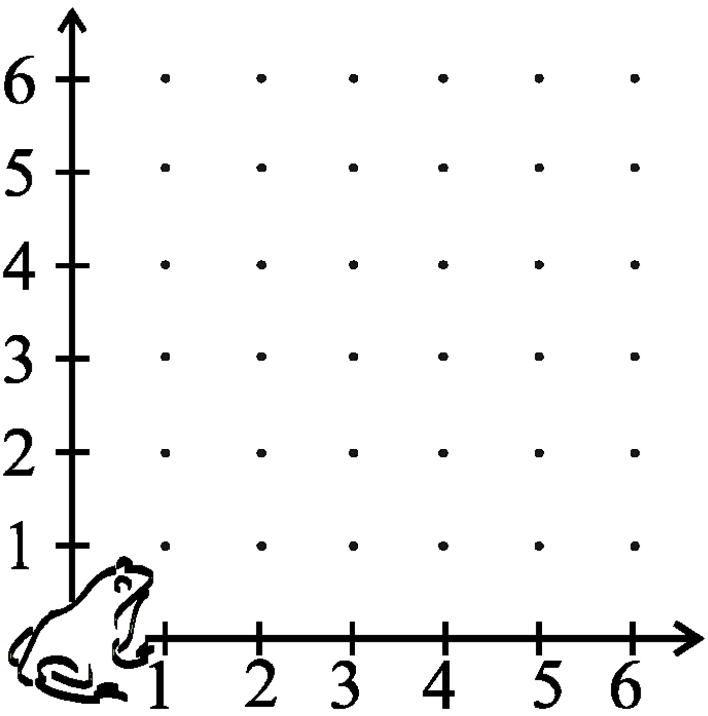
iii. Denk dir weitere zwei weitere Fragen aus und beantworte sie.

(b) Der Ko-Frosch sitzt auf dem Gitterpunkt (0|0) des Koordinatensystems und kann jeweils nur zum nächsten Gitterpunkt nach oben oder nach rechts springen und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$

i. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er den Gitterpunkt (4|0), den Gitterpunkt (8|1), den Gitterpunkt (2|2)?

ii. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzt er nach 20 Sprüngen nicht auf einer Koordinatenachse?

iii. Denk dir weitere zwei weitere Fragen aus und beantworte sie.

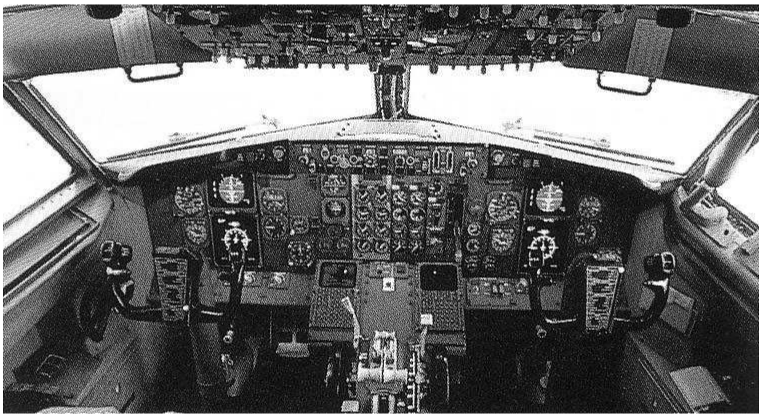


38. **Arme Ritter**

Die Ritter Kunibald, Georgius und Ottokar sind bei einer Schlacht gefangen genommen und anschließend zum Tode verurteilt worden. Der Herrscher beschließt, einen der drei per Losverfahren zu begnadigen. Der Name des Glücklichen wird streng geheim gehalten. Kunibald sagt sich: „Die Wahrscheinlichkeit, dass ich es bin, beträgt $\frac{1}{3}$.„ Er sagt dem Wärter: „Einer der beiden anderen wird sicher hingerichtet werden. Du wirst mir also nichts verraten, wenn du mir einen Mann nennst, Georgius oder Ottokar, der hingerichtet wird.“ Darauf sagt der Wärter, „Ottokar wird hingerichtet.“ Die Antwort hat Kunibald ermutigt, denn damit wird er oder aber Georgius sicher nicht hingerichtet. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er selbst überlebt, $\frac{1}{2}$. Hat Kunibald Recht?

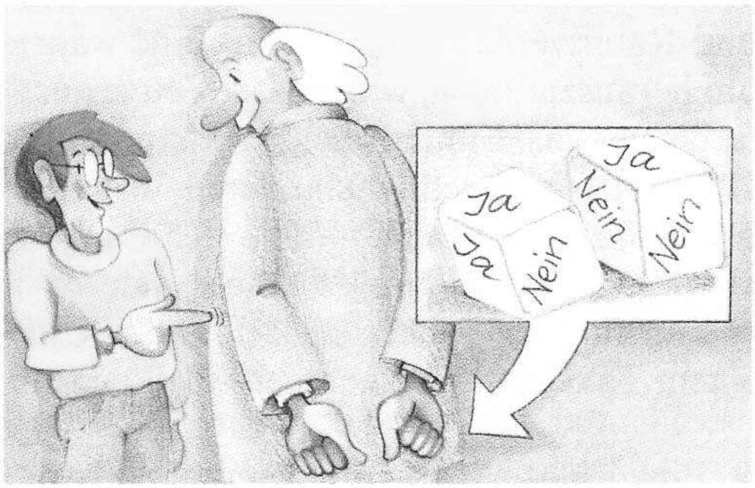
39. **Falscher Alarm?**

Moderne Düsenverkehrsflugzeuge verfügen über Bodenannäherungswarnanlagen, die den Piloten akustisch und optisch warnen, wenn sich das Flugzeug ungeplant dem Boden nähert. Aus langjährigen Studien haben sich ergeben:
Wenn in einer Flugminute tatsächlich eine ungeplante Bodenannäherung vorliegt, dann schlägt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von $99,9\%$ Alarm. Wenn dagegen in einer Flugminute tatsächlich ungeplante Bodenannäherung vorliegt, so gibt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,002\%$ einen falschen Alarm. Eine ungeplante Bodenannäherung ist aufgrund der hohen navigatorischen und technischen Zuverlässigkeit der Verkehrsluftfahrt sehr selten. Durchschnittlich nur in einer von zwei Millionen Flugminuten ist eine solche Bodenannäherung zu erwarten.
Wenn das System Alarm gibt, wie wahrscheinlich ist es dann, dass sich das Flugzeug tatsächlich ungeplant dem Boden nähert? Was bedeutet das Ergebnis psychologisch für den Piloten, der jederzeit über die Möglichkeit verfügt das Warnsystem auszuschalten?



40. **Ratespiel mit Würfeln**

Der Lehrer bringt zwei faire Würfel mit. Auf dem ersten Würfel sind fünf Flächen mit „Ja“ überschrieben, auf dem anderen Würfel nur zwei Flächen. Auf den restlichen Flächen steht „Nein“. Nachdem der Lehrer diese Würfel gezeigt hat, nimmt er sie verdeckt jeweils in die eine oder die andere Hand. Peter muss nun blind nach Zufall einen Würfel auswählen, den er dann - für die Klasse verdeckt - vom Lehrer erhält.
Peter würfelt mit diesem Würfel dreimal - weiterhin für die Klasse verdeckt - und nennt als Ergebnisse: „Ja, Ja, Nein.“
Die übrige Klasse soll nun wetten, ob Peter den ersten Würfel oder den zweiten Würfel erhielt.



(a) Was tippst du? Bestimme für die beiden Würfel die Wahrscheinlichkeiten!

(b) Baut euch selber Würfel (auch mit anderen Beschriftungen) und überprüft eure vorher (!) erstellten Berechnungen!