SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Geometrie (SINUS-Transfer)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. Mai 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Oberflächen und Volumina

1.

2.

3.

4.

(a) Durch Zerlegen der Gesamtoberfläche der Autos in berechenbare Teilflächen kann unter zu Hilfenahme die m^2-Anzahl an Lack für die jeweiligen Autos bestimmt werden.

(b1) Kann durch die Vorgaben nicht bestimmt werden. Annäherung durch Volumenvergleich: Volumen einer Sprudelkiste: $32600\,\text{cm}^2$
Volumen des umgeklappten Kofferraums: $1740000\,\text{cm}^3$ bzw. $1930000\,\text{cm}^3 \Rightarrow 53$ bzw. 59 Wasserkisten (theoretisch! Praktisch sieht das sicher anders aus)

(b2) Wenn man davon ausgeht (dem Bild entnommen), dass der umgelegte Kofferraum ca. 30% der Gesamtlänge der Autos einnimmt und man mit Gesamtvolumen, Breite und Länge die Höhe ermitteln kann, dann ergeben sich folgende Maße für die beiden Kofferräume:

	140	140L	
Breite:	1719 mm	1719 mm	
Länge:	1082 mm	1133 mm	
Höhe:	930 mm	990 mm	[Hierbei handelt es sich um eine Durchschnittshöhe, die so in der Realität nicht existiert!]

Mithilfe dieser Daten kann man sich nun überlegen, bei welcher Stellweise man wie viele Kisten in den Kofferraum bekommt.

(b3) Man misst die exakten Daten in einem realen Auto (z.B. im Autohaus) aus und ermittelt mit unter Berücksichtigung der verschiedenen Stellweisen die mögliche Anzahl.

(c) Wenn die Daten des Mercedes 140 als Grundwerte angenommen werden, dann gilt:

Mercedes 140L - 107% Radstand
105% Länge
111% Ladevolumen (umgeklappt)
96% Leergewicht (!)
106% Gesamtgewicht
$106,5\%$ Preis

Wenn man diese Werte betrachtet, kann man zu dem Schluss kommen, dass bei einem prozentualen Preisvergleich der Preis für den Mercedes 140L im Vergleich zum 140 durchaus angemessen ist.

5. Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

(a) Ohne eine Klopapier-Rolle vollständig auszurollen (kann am Ende als Kontrolle verwendet werden) ist das Problem der Längenbestimmung keine triviale Aufgabe. Ein möglicher, aber keineswegs naheliegender Weg führt über das Volumen der Klopapier-Rolle. Naheliegender, aber etwas umständlicher ist eine Lösung mit Folgen.
Die Papierdicke (mit Luft) beträgt etwa $0,25\,\mathrm{mm}$, wie eine Messung von z.B. 10 Lagen zeigen (dieser Wert variiert zwischen den Herstellern). Die gesuchte Länge L multipliziert mit der Papierdicke und der Breite ergibt das Volumen des gewickelten Papiers! Für einen Außendurchmesser $D = 11\,\mathrm{cm}$ und einen Innendurchmesser $d = 4,5\,\mathrm{cm}$ und die Breite $10\,\mathrm{cm}$ ergibt sich somit (alles Näherungswerte):
$V_{gesamte\ Rolle\ ohne\ Innenkern} \approx 790\,\mathrm{cm}^3$
$V_{Papier\ der\ Länge\ L} = 0,25\,\mathrm{cm}^2 \cdot L$
Ansatz: $0,25\,\mathrm{cm}^2 \cdot L = 790\,\mathrm{cm}^3$
Somit: $L \approx 3160\,\mathrm{cm} = 31,60\,\mathrm{m}$

(b) Bei 30 Meter pro Rolle kosten 180 Meter ca. $2,25$ €. Damit kostet 1 Meter Klopapier $1,25$ Cent.

(c) Bei der Annahme, dass jeder Bürger pro Tag ca. $1,5$ Meter Klopapier (entspricht ungefähr 10 Blatt) benötigt, werden im Jahr mit 365 Tagen ungefähr 547.500.000 € für Klopapier ausgebeben. Dass heißt über eine halbe Milliarde DM müsste für Werbung auf Klopapier ausgegeben werden, damit die Rollen umsonst wäre.

6.

Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

Je mehr man mathematisch vorgebildet ist, umso mehr mathematisches Instrumentarium wird man bei dieser Aufgabe wie selbstverständlich einsetzen - und zwar ohne darüber nachzudenken, ob diese hoch genauen Instrumente wirklich genauere Ergebnisse liefern. So könnte man hier den Heißluftballon sehr genau modellieren, etwa durch eine obere Halbkugel und einen zylindrischen Kegel. In der Analysis bietet sich die Interpretation als Rotationskörper an, wobei der Fantasie für die zugrunde gelegte Kurve (fast) keine Grenzen gesetzt sind - hoffentlich ist das Integral dann elementar lösbar; und wenn nicht, könnte man es schließlich noch numerisch lösen. Aber es geht (auch) hier einfacher: In jedem Fall ist man darauf angewiesen, die Maße des Ballons aus dem Foto zu entnehmen und in die Wirklichkeit hochzurechnen (Proportionen/Verhältnis/Dreisatz). Einziger Bezugspunkt dafür ist wohl der Mann auf der Spitze des Ballons. Daraus ergibt sich für die Höhe des Ballons (ohne Gondel) und ebenso für seine Breite etwa $20 - 25\,\mathrm{m}$. Bei dieser unvermeidbaren Unschärfe sind solch feinsinnige Modellierungen wie die oben aufgeführten schlichtweg „oversized“.
Ein ganz einfaches Modell leistet schon das Gewünschte: Etwa ein Würfel, den wir uns „nach Augenmaß“ so vorstellen, dass er an den Ecken über den Ballon herausragt, seine

Seitenfläche aber teilweise in den Ballon „hineintauchen“ - oder eine entsprechend dimensionierte Kugel als geeignete „Ersatz-Form“ für den Ballon.
Auf diese Weise kann man als gute Näherung einen Würfel mit einer Kantenlänge von 16m wählen oder eine Kugel mit einem Durchmesser von etwa 20 m. Das Volumen des Würfels ist besonders einfach: $V = 4096\,\text{m}^3$ und für die Kugel erhalten wir
$V = \frac{4\pi}{3} \cdot 10 \approx 4180\,\text{m}^3$.
Beide Modelle liefern für das Volumen also rund $4000\,\text{m}^3$, das sind 4 Millionen Liter, und für die Oberfläche ungefähr $1500\,\text{m}^2$ - mit wenig Rechnung, aber geschickten, der Situation angepassten Überlegungen!

7.

   Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

8. Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

   (a) Es gilt 1 Kubikliter $= 1\,\text{l}^3 = 1\,(\text{dm}^3)^3 = 1\,\text{dm}^9$. Die Einheit „Kubikliter“ entspricht einer Längeneinheit in neunter Potenz und ist damit keine Volumeneinheit (Längeneinheit in dritter Potenz).

   (b) Gegeben sind die Größe (gemeint ist die Höhe) $h = 30\,\text{m}$ und die Breite (gemeint ist der Durchmesser) $d = 7\,\text{m}$, womit für den Radius $r = 3,5\,\text{m}$ folgt. Für die Stirnfläche A der Tanks gilt $A = \pi r^2$, somit für das Volumen V eines Tanks $V = \pi r^2 \cdot h \approx 1150\,\text{m}^3$. Aufgrund der Dicke der Wände, des Bodens und der Decke der Tanks ist ihr Fassungsvermögen sicherlich jeweils kleiner als $1150\,\text{m}^3$. In der Zeitung sollte es also vermutlich „und fassen 900 Kubikmeter Flüssigkeit“ heißen.

9.

   Quelle: mathematik lehren (1999)

   Der „unbefangene“ Betrachter der Grafik assoziiert nahe liegender Weise das Volumen der dargestellten Kegel als Maß für die CO_2-Menge und stellt fest: Bei Erdgasheizung wird die CO_2-Emission um rund 60% reduziert. Rechnet man dagegen mit den angegebenen Zahlen, so erhält man eine Reduktion um rund 15%, was weit weniger eindrucksvoll ist.

10. Quelle: mathematik lehren (2001)

11. Das menschliche Herz pumpt pro Herzschlag ca. $70 - 100$ ml pro Herzkammer das macht bei ca. 70 Schlägen pro Minute (können die Schüler bei sich selber messen) zwischen 5 und 7 Liter Blut!

12.

(a)
(b)
(c) $\approx 50\,\mathrm{m}^2$
(d) $\approx 2\,\mathrm{m}$
(e) $\approx 2500\%$

13. ca. $2\,\mathrm{m}^2$ Haut, 15% sind also $0,3\,\mathrm{m}^2$

14.

Quelle: Fich, O.: Mathelogik (2001)

Klar: Das verbliebene Wasser steht bis zu einer unbekannten Höhe h. Kippt man das Glas, ist der Flüssigkeitspegel an dieser Stelle höher als h, sagen wir $h+x$. Auf der anderen Seite des Glases ist dann der Pegel natürlich gerade $h-x$.
Also müssen wir den Abstand bis zum oberen Rand ($2x$) bestimmen, wenn es auf der gegenüberliegenden Seite gerade am Rand ist.
Dazu denken wir uns ein rechtwinkliges Dreieck in das Glas gelegt, bei dem eine Kathete der (obere) Durchmesser des Glases ist, die Hypotenuse auf der Wasseroberfläche entlangläuft und die andere Kathete gleich der gesuchten Länge $y = 2x$ ist.
In diesem Dreieck gilt für die gesuchte Länge offenbar:$y = tan(20°) \cdot 8\,\mathrm{cm}$
Also ist das verschüttete Volumen:
$V = \frac{1}{2} \cdot (4\,\mathrm{cm})^2 \cdot \pi \cdot 8\,\mathrm{cm} \cdot tan(20°) \approx 73\,\mathrm{cm}^3$ und dies sind ca. 12% des ursprünglichen Inhalts.

15. Die folgende Lösung gilt nur für Sektgläser, die die Form von Kreiskegeln haben.
Zunächst muss dann geklärt werden, was „halb gefüllt“ bedeutet. Meint man damit, dass die Füllhöhe halbiert wird, so können mit einer üblichen Sektflasche 56 Sektgläser halb gefüllt werden.
Dies kann insbesondere mit rein funktionalen Argumenten begründet werden (Halber Radius und halbe Höhe; Radius tritt quadratisch auf, also Volumen nur $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ des ursprünglichen.

16.

17.

(a) Für das DIN-A4 Blatt beträgt das Seitenverhältnis $a : b$, für das Blatt DIN-A5 beträgt es $b : \frac{a}{2}$. Also gilt: $\frac{a}{b} = \frac{2 \cdot b}{a} \Rightarrow a^2 = 2b^2$. Das Seitenverhältnis $a : b$ beträgt also $\sqrt{2} : 1$. Der Flächeninhalt wird halbiert, also wird jede Seitenlänge (und darauf bezieht sich die eingestellte Zahl) um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 70,71\%$ gekürzt.

(b) entsprechend

(c) Auf anschaulichem Niveau: Klar, die Schachteln sind ähnlich zueinander. Jede Seitenlänge wird mit dem Faktor $\sqrt{2}$ gestreckt, also vervielfacht sich das Volumen um den Faktor $\sqrt{8}$.

18. 72 cm

19.

(a) Kern: 54% / Ummantelung: 33% / Schale: 13%

(b) $0,5\,\frac{g}{cm^3}$

20.

(a) 1 kg

(b) $572\,\mathrm{m}^2$

21. $27482\,\mathrm{m}^3$ Gesamtvolumen / $9160\,\mathrm{m}^2$

22. 1518 kg

23.

24.

25.

26.

27.

28.

29.

30.

31.

32.

33.

34.

35.

36.

a) 62 m^2
b) Maßstab 1:200
c) 38 m
d) ca. 6,06 %

37.

21,7 cm^2 bzw. 21,7 m^2; Messungenauigkeit in Wirklichkeit mit einbeziehen.
Preis (Teppich): 564,20 €
24,8 cm bzw. 24,8 m
Preis (Leisten): 143,84 €
Preis (gesamt): 708,04 €

38.

a) $A_{\text{Kr2}} = 31{,}42\ \text{cm}^2$, $A_{\text{Kr3}} = 70{,}69\ \text{cm}^2$, $A_{\text{Kr4}} = 110{,}0\ \text{cm}^2$
b) ca. 51,42 %

39.

40.

a) 14,772 cm^2 bzw. 33,237 m^2
b) 39,8844 kg; 2,2 Eimer ⇒ 3 Eimer; 195 € kostet der Anstrich.

41.

$50{,}27\ \text{cm}^2 - 30{,}32\ \text{cm}^2 = 19{,}95\ \text{cm}^2$

42.

a) $h_\mathrm{k} = 16{,}36$ cm; $s = 19{,}5$ cm; $V = 1227{,}23$ cm^3; $M = 540$ cm^2; $O = 765$ cm^2; $m = 3313{,}52$ g

b) $a = 10{,}49$ cm; $s = 10{,}76$ cm; $M = 197{,}248$ cm^2; $O = 307{,}328$ cm^2; $V = 286{,}208$ cm^3, $m = 772{,}7616$ g

c) $a = 10{,}41$ cm; $h_\mathrm{a} = 8{,}88$ cm; $s = 10{,}3$ cm; $M = 184{,}932$ cm^2; $O = 293{,}266$ cm^2; $m = 702$ g

43.

b) $V = 168{,}539$ dm^3; $O = 172{,}5315402$ dm^2

44.

27 mal, 64 mal, 8 mal

45.

46.

3,36 m^2

2 Grundformen und -konstruktionen

1. b) 56 mm
2. Mittelsenkrechte auf AB, Pfütze berücksichtigen!
3. Schnittpunkte der Kreise mit Radius 40 mm bzw. 50 mm
4. a) Schnittpunkte der Kreise mit Radius 40 mm b) Mittelsenkrechte
5.
6.
7. Anregungen zum Öffnen der Aufgabe:
   (a) vorgegebene oder selbst erfundene Figuren nachlegen
   (b) möglichst viele verschiedene konvexe Polygone legen (Wittmann)
   (c) Figuren aus anderen Grundformen zusammensetzen, geometrische Eigenschaften betrachten
8.

   Anregungen zum Öffnen der Aufgabe:
   (a) Angaben weglassen (unterbestimmte Aufgabe)
   (b) ein vorgegebenes Dreieck auf verschiedene Arten konstruieren (überbestimmte Aufgabe)
   (c) In welchen Fällen ist es nicht möglich, ein Dreieck zu konstruieren?
9.

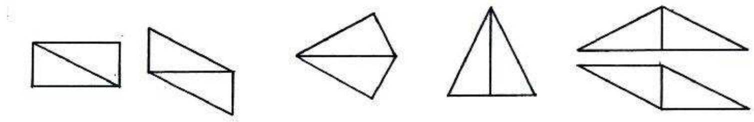
   Anregung zur Öffnung der Aufgabe:

   Hier sind einige Teilfiguren. Ergänze sie jeweils zu einem Viereck. Welche Möglichkeiten gibt es?
10.

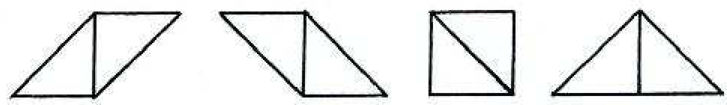
11.

Mögliche Verallgemeinerung: Welche Drei- und Vierecke lassen sich aus zwei gegebenen Dreiecken legen?

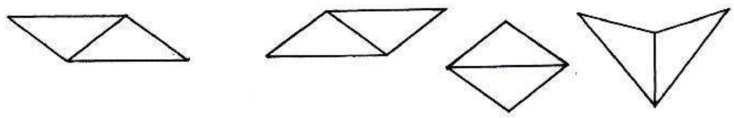
- z. B. kann aus zwei rechtwinkligen (nicht gleichschenkligen) Dreiecken ein Rechteck, Drachen oder (zwei nicht-kongruente) Parallelogramme entstehen, ebenso zwei nicht-kongruente gleichschenklinge Dreiecke:



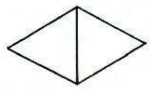
- aus zwei rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecken ein Quadrat oder (zwei kongruente) Parallelogramme entstehen, ebenso ein rechtwinkliges Dreieck:



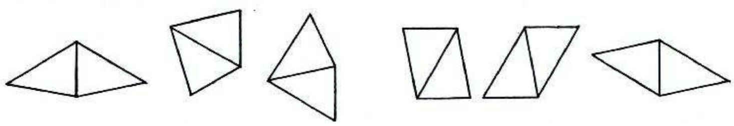
- aus zwei rechtwinkligen Dreiecken: nur Raute, Drachen mit einspringender Ecke oder (zwei kongruente) Parallelogramme:



- aus zwei glechseitigen Dreiecken: nur eine Raute:



- aus zwei beliebigen Dreiecken (nicht gleichwinkling, gleichschenkling und gleichseitig): drei nicht-konguente Drachen, ebenso (drei nicht-konguente) Parallelogramme:



12.

Produkte gemäß Flächeninhaltsformeln zusammenstellen, Maßstab erforderlich (Papierverbrauch Original!).

3 Satzgruppe des Pythagoras

1.

(a) 20 Teilnehmer pro Meter bei gleichmäßiger Verteilung. Allerdings Häufung auf der rechten Seite zu erwarten.

(b) Schwimmen auf der Ideallinie: Strecke = 3800 m.

(c) Länge der Alternativroute: $\sqrt{70^2 + 300^2} \approx 308,1$; also zusätzliche Strecke von ca. 8,1 m.

(d) Zeitverlust: $90 \cdot 0,081 = 7,29$; also rund 7 Sekunden.

(e) Insgesamt benötigte Zeit $= 1,5 \cdot 38 = 57\,(min)$. Damit ein Zeitverlust von ca. 0,2%.

(f) Zusätzliche Strecke: 1,36 m; dies entspricht einem Zeitverlust von ca. einer Sekunde. Es stellt sich allerdings die Frage, ob die Diagonalstrecke frei ist.

(g) z.B.: Die Geschwindigkeit des Schwimmers verringert sich im Gedränge so, dass er durchschnittlich für 100 m 1 : 40 min braucht. Dann benötigte Zeit auf Ideallinie (nur bis zur ersten Boje): $\frac{5}{3} \cdot 18 = 30$; also 30 Minuten. Benötigte Strecke bis zur ersten Boje mit Umweg (wie 3): 1808,1 m; also Zeit: $1,5 \cdot 18,081 \approx 27,1$; also 27 Minuten und 7 Sekunden.

(h) z.B.: Die Geschwindigkeit des Schwimmers, der den Umweg schwimmt sei x. Der Schwimmer auf der Ideallinie legt 100 m in 90 sek zurück. Dann gilt: $90 \cdot 18 = x \cdot 18,081 \Leftrightarrow x \approx 89,6$; also ungefähr genauso lange, falls der Schwimmer 100 m durchschnittlich in 89,6 sek zurücklegt.

2.

(a) Diagonale: $\sqrt{100^2 + 50^2} \approx 111,8$ A 74,5% des Außenweges.

(b) Entfernung: $150 - 111,8 = 38,2$ m.

(c) Frank muss ca. 1,34 mal so schnell laufen wie Ulli.

(d) Nach 900 bzw. 894,4 m wird es relativ knapp. Gilt das als Treffpunkt?

(e) Begegnung ca. 19,1 m von der Eckfahne entfernt.

3. Schule - Bahnhof: 640,31 m
Schule - Schloss: 781,02 m
Schule - Museum: 447,21 m

Rathaus - Museum: 1208, 30 m
Rathaus - Bahnhof: 223, 61 m
Bahnhof - Museum: 1081, 67 m
Bahnhof - Schloss: 1104, 54 m
Bahnhof - Denkmal: 1118, 03 m

4. Quelle: Schnittpunkte 9 (1995), S. 130

   Variation: Auf Vorgabe der Zeichnung verzichten.

5.

6. Quelle: Steudel, H.: Der Satz des Pythagoras - ein Legespiel. In: mathematik lehren (1994)

7. Quelle: Fraedrich, A.M.: Die Satzgruppe des Pythagoras. BI (1995)

8.

9.

10. Quelle: Mathematik heute 9 (1996)

11. Quelle: Walsch, W.: Aufgabenfamilien 9, in: MiS 33 (1995)

    Sicher muss man irgendwie „schräg“ über jeweils zwei Begrenzungsflächen laufen. Um die genaue Lage dieses Weges zu ermitteln, kann man die Seitenflächen geklappt vorstellen. Für die Abbildung ergibt sich so: $l_1 = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}; l_1 = 33,5\,\text{cm}$. Damit ist die Aufgabe aber noch nicht gelöst, da die Spinne ja auch über andere Begrenzungsflächen laufen kann. So findet man hier: $l_2 = \sqrt{(a+c)^2 + b^2}; l_2 = 36,4\,\text{cm}$ und $l_3 = \sqrt{(b+c)^2 + a^2}; l_2 = 32,0\,\text{cm}$.

12. Quelle: MUED

    Variationen:

    (a) Selbst Schnur hestellen, Schüler Tripel finden lassen.
    (b) Alle 15 Dreiecke finden lassen, die man mit weniger als 12 Knoten legen kann.
    (c) Streichhölzer statt Schnur verwenden.

    (a) Neueinteilung der Felder nach der jährlichen Nilschwemme. Maurer nutzen oft eine analoge Lattenkonstruktion.
    (b) 12 verschiedene Tripel.

13.

14. Diagonale $= 13\,\text{cm}$

15.

(a) $x \approx 9,43\,\text{cm}$

(b) $y \approx 9,22\,\text{cm}$

(c) $z \approx 11,18\,\text{cm}$

(d) $u \approx 35,23\,\text{cm}$

(e) $v \approx 8,94\,\text{cm}$

16. Maß $\approx 978,27$

17. Kathete $s \approx 13,75\,\text{cm}$
Flächeninhalt $\approx 41,24\,\text{cm}^2$

18.

(a) $b = 8\,\text{dm}$

(b) $c \approx 8,94\,\text{m}$

19. $U \approx 17633,26$
Mit Verschnitt $\approx 20278,25$

20. Strecke (min.) $\approx 11,69\,\text{m}$

21.

(a) Strecke $\approx 1018,71\,\text{m}$
Auf der Karte $\approx 4,07\,\text{cm}$

(b) Höhenunterschied $= 350\,\text{m}$

22. Feuerleiter $\approx 25,71\,\mathrm{m}$

23. Höhe der Säule $\approx 61,59\,\mathrm{m}$

24. Meerestiefe $\approx 301,89\,\mathrm{m}$

25. Wassertiefe $= 3,75\,\mathrm{m}$

26. Knick in Höhe $\approx 1,11\,\mathrm{m}$ (Voraussetzung: Baum steht direkt am Fluss)

27. Diagonale $\approx 5,13\,\mathrm{m}$; das klappt schon...

28.
   (a) Dehnung $\approx 2,1\,\mathrm{cm}$
   (b) Senkung (max.) $\approx 60\,\mathrm{cm}$

29. Sparrenlängen
   (a) $= 5,4\,\mathrm{m}$
   (b) $\approx 9,05\,\mathrm{m}$
   (c) $\approx 9,67\,\mathrm{m}$

30. Schrankhöhe (max.) $\approx 2,32\,\mathrm{m}$

31. Entfernung Brunnen - Turm $= 64\,\mathrm{m}$ bzw. $36\,\mathrm{m}$

32. Handlungsvorstellung: Küchenpapierrolle längs aufschneiden; Schnur $= 20\,\mathrm{cm}$

33.

Hinweise zu den Arbeitsblättern
„Pythagoras auf der Straße“

Bei Aufgabe ① ist zu beachten: Durch Ausstrecken erhält man das neue Steigungsdreieck mit h = 600 m und e = 3000 m (Also s ≈ 3059 m, während die direkte Verbindung $\overline{AB}$ rd. 1166 m beträgt). Zusatzfrage: Wie lang müßte die Serpentinenstraße sein, wenn man die Steigung auf 10 % herunterdrücken will? (rund 6030 m).

Im Unterricht erscheint bei Aufgabe ② folgende Hilfe sinnvoll: Schlitzen wir den äußeren Zylinder längs einer Mantellinie (in Gedanken) auf und rollen ihn in der Ebene ab, so erscheint die äußere Randlinie der Wendelstraße, die in Wirklichkeit eine Schraubenlinie ist, als Streckenschar, was an einem Pappmodell sofort einsichtig wird (Bild 4).

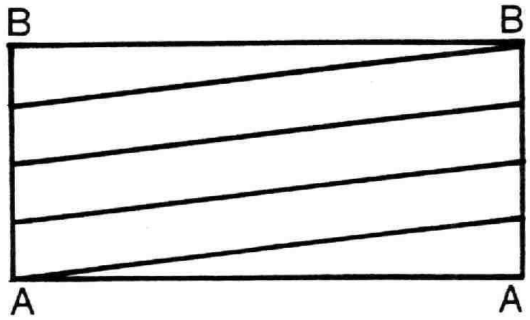


Bild 5: Aufgeschlitztes Pappmodell einer Parkhausstraße.

Länge des Rechtecks = Umfang des Grundkreiszylinders = 10·4 m = 40 m (wegen 10 % Steigung).

Also r_1 = 40 m : 2 π ≈ 6,37 m. Damit ist r_2 ≈ 2,37 m und die linke innere Steigung beträgt 4 m : 2,37 m · 2 π ≈ 27 % (!).

Länge des äußeren und des inneren Straßenrandes (Pythagoras)

$4 \cdot \sqrt{40^2+4^2}$ m ≈ 160,8 m und
$4 \cdot \sqrt{14{,}89^2+4^2}$ m ≈ 61,7 m.

Was ändert sich, wenn man r_1 = 10 m wählt, bei 4 Windungen, 16 m Höhe und 4 m Straßenbreite?

Zu Aufgabe ③: Die Länge des Parkrechtecks (hier 4,60 m + 2 · 0,30 m = 5,20 m) muß etwas größer sein als die Diagonale des „Autorechtecks“, das hier 4,60 m lang und 1,70 m breit ist. Mit Hilfe des Pythagoras ergibt sich als Länge der „Diagonalen“

$\sqrt{4{,}60^2 + 1{,}70^2}$ m ≈ 4,90 m < 5,20 m.

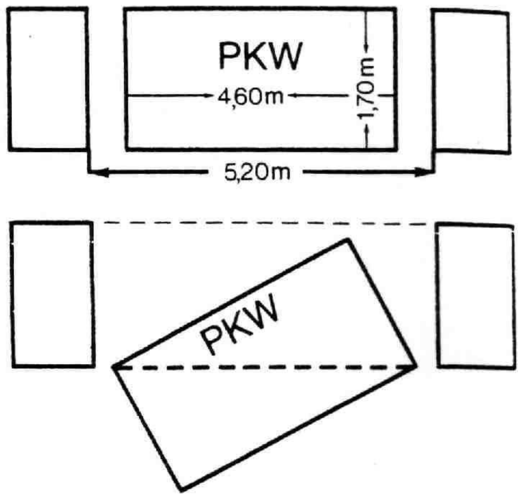


Bild 6: Zeichnung zu Aufgabe ③

Der Wagen kann also sogar ganz gut aus der Parklücke herausgefahren werden. Ginge das auch noch, wenn der Wagen 4,69 m lang und 1,77 m breit (Audi 100) wäre? (Ja). – Wie lang muß das Parkrechteck mindestens sein, wenn ein Pkw von 4,25 m Länge und 1,52 m Breite parken können soll? (4,52 m).

Bei Aufgabe ④ ist ein stark vereinfachendes und vergröberndes Bild der Situation gezeichnet. Gesucht ist x, gegeben sind

h = 12 m, a = 0,2 m.
Es ist $x = h - \sqrt{h^2-a^2}$
$= 12 - \sqrt{12^2-0{,}2^2}$
$= 12 - \sqrt{143{,}96} \approx 0{,}00166$
Die Brücke senkt sich also um rd. 1,7 mm.

34.

Quelle: Mathematik heute (1996); Text: Dagmar Seuberlich   Aufstellen von drei Gleichungen nach Satz des Pythagoras. Lösung des linearen Gleichungssystems. Allgemeine Lösung liefert Höhensatz. Kritische Höhe $\approx 2,79\,\mathrm{m}$; Durchfahrt möglich.

35.

36. In der HNA vom 11.7.93 wird der Satz auf den dreidimensionalen Fall beschränkt.

37.

38.

4 Symmetrie und Ähnlichkeit, Strahlensätze

1.

   Quelle: Abakus 9, S.99

   $\frac{h}{2} = \frac{21}{6}$
   $h = 7\,\mathrm{m}$

2. Quelle: Bigalke: Einführung in die Mathematik; Diesterweg

   Zahlenvorschlag: $|BC| = 1\,\mathrm{m}$; $|AB| = 20\,\mathrm{cm}$; $|AD| = 1,5\,\mathrm{m}$
   $\frac{0,2}{1} = \frac{1,5}{x}$ wobei $x = 7,5$

3. Quelle: Historische Verfahren - zeitgemäß aufbereitet; Aulis

   Variationen:

   (a) Zahlen statt Variablen angeben
   (b) Schüler denken sich selbst Zahlen aus
   (c) Beschriftung ganz weglassen
   (d) Funktioniert die Methode zu jeder Tageszeit?
   (e) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die Pyramide doppelt so hoch ist

   Thales hat gemessen, dass die Länge der Seitenkante der Pyramide $232,50\,\mathrm{m}$ betrug.
   Für $h_{Stock} = 1,20\,\mathrm{m}$; $L = 175,30\,\mathrm{m}$ und $S = 2,80\,\mathrm{m}$ gilt:
   $\frac{h_{Pyramide}}{h_{Stock}} = \frac{L + halbe\,Seitenkante\,der\,Pyramide}{S}$
   $\frac{h_{Pyramide}}{1,20m} = \frac{291,55\,\mathrm{m}}{2,80\,\mathrm{m}}$
   $h_{Pyramide} = 124,95\,\mathrm{m}$

4. Quelle: Eigenmann, Geometrische Denkaufgaben, Klett

   Variationen:

   (a) Lage von PQ auf halber Höhe im Dreieck vorgeben
   (b) Zahlenwerte vorgeben
   (c) Wo muss PQ liegen, damit das Dreieck PQC halb so groß ist wie ABC ?

- Liegt $\overline{PQ}$ auf halber Höhe, dann wird der Umfang halbiert. Der Flächeninhalt wird nicht halbiert, sondern geviertelt.
- Zusatzfrage: Für die Höhe h' im Dreieck PQC gilt $h' = \frac{h}{\sqrt{2}}$, wobei h die Höhe im Dreieck ABC ist.

5. Variationen:

   (a) Koordinaten von P als Linien einzeichnen

   (b) P mit ganzzahligen Koordinaten vorgeben

   (c) keinen Punkt vorgeben

   (d) Zusatzfrage: Kann P auf der Geraden wandern?

   (e) Geradengleichung auf verschiedene Arten bestimmen

   $\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a}$
   $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

6. $\frac{x+y}{x} = \frac{b}{a}$
   $\frac{x+y}{y} = \frac{b}{a}$

7. Quelle: Mathematik 9, Cornelsen (1995)

   - $\frac{1500}{20} = \frac{x}{10}$
   - $\frac{1500}{20} = \frac{x}{20}$

8. Quelle: Mathematik heute 9 (1996)

   $\frac{e}{l} = \frac{s}{a}$

9. Quellen: Mathematik heute 9 (1996) Bigalke (1986), Diesterweg

   $\frac{x}{e} = \frac{|CD|}{m}$

10. $\frac{0{,}3}{h} = \frac{x}{4}$; $h = \frac{1{,}2}{x}$; $x = \frac{1{,}2}{h}$
    Für verschiedene Baumhöhen lassen sich folgende x-Werte berechnen:

Höhe in m	4	5	6	8	10	12	15	20	30	35	40
X in cm	30	24	20	15	12	10	8	6	4	3,4	3

11. Quelle: Schroedel, Elemente 9

(a) $\frac{1{,}5}{2{,}5} = \frac{x}{3{,}2}$, also $x = 1,92$

(b) $\frac{1{,}5}{2{,}5} = \frac{x}{2}$, also $x = 1,2$

12. Quelle: Klett, Lambacher Schweizer 9

(a) $\frac{x}{x+c} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{x}{x+11} = \frac{18}{45}$, also $x \approx 7,33\,\text{m}$

(b) $\frac{x}{x+c} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{x}{x+12} = \frac{33{,}5}{40}$, also $x \approx 61,85\,\text{m}$

(c) $\frac{x}{x+c} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{x}{47} = \frac{75}{50}$, also $x = 70,5\,\text{m}$

13. Quelle: Klett, Lambacher Schweizer 9

(a) $\frac{2}{2+6} = \frac{2}{\frac{x}{2}}$, also $x = 16\,\text{m}$ (wenn man nur das halbe Dreieck betrachtet)

(b) Man könnte zunächst annehmen, dass das Auto in der Mitte steht. $\frac{1}{1+6} = \frac{2}{\frac{x}{2}}$, also $x = 28\,\text{m}$
Ein weiterer Spezialfall wäre, das Auto steht ganz rechts: $\frac{1}{1+6} = \frac{4}{x}$, also wieder $x = 28\,\text{m}$
Pendelt der Betrachter auf einer Parallelen zur Straßenfront im Abstand von 1 m, so ändert sich die Strahlensatzfigur, das Ergebnis aber nicht.

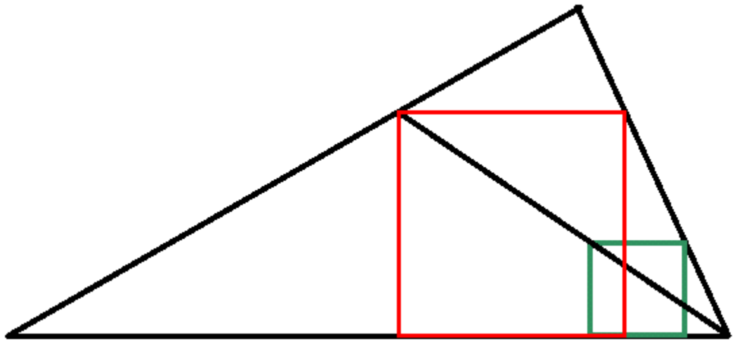
14.

15.

16.

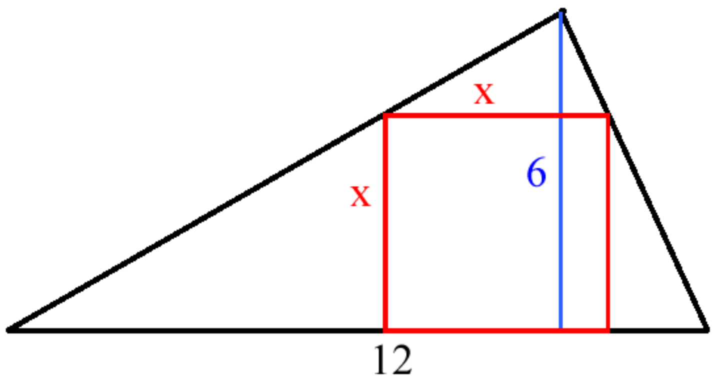
Quelle: Sinus-Modellversuchsband Rheinland-Pfalz

(a) Zentrische Streckung anwenden
Das kleine Quadrat durch systematisches Probieren, so in das Dreieck legen, dass die Figur als Ergebnis einer zentrischen Streckung gedeutet werden kann. Das kleine Quadrat kann z. B. ausgeschnitten oder zeichnerisch verschoben werden.



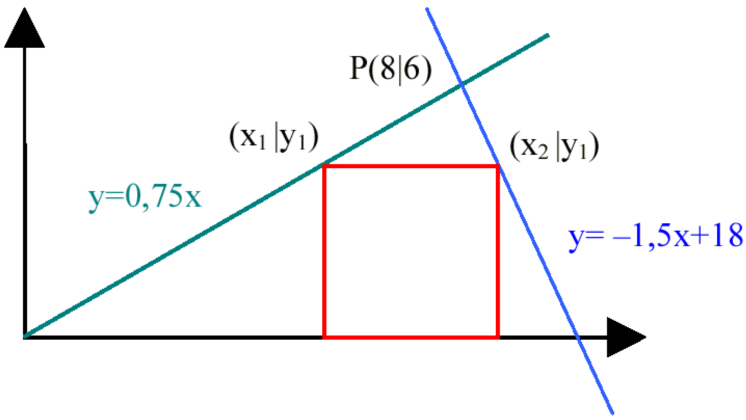
(b) Ähnlichkeitssätze anwenden
Einem kleinen Quadrat wird ein Dreieck umbeschrieben, dessen Seiten parallel zu den Seiten des großen gegebenen Dreiecks sind.

(c) Strahlensätze anwenden
Nach erfolgter konstruktiver Lösung (siehe (a) bzw. (b) Weg) oder an Hand einer möglichen Skizze lässt sich die Seitenlänge des Lösungsquadrats mit Hilfe der Strahlensätze berechnen.



(d) Systematisches Probieren
Mit einem geeigneten Computerprogramm das Dreieck auf den Bildschirm zeichnen und systematisch probieren, ein Quadrat einzubeschreiben

(e) Lineare Funktionen anwenden
Ein geeignetes Koordinatensystem auf das Dreieck legen und die Eckpunkte des gesuchten Quadrats rechnerisch bestimmen. Die Schülerinnen und Schüler können selbst erkennen, dass es sinnvoll ist, als Einheit auf den Achsen 1 cm zu wählen. Da die Seiten des Quadrats gleich lang sind, gilt: $y_1 = x_2 - x_1$.
Eingesetzt in die Geradengleichungen:
$x_2 - x_1 = 0,75x_1$
$x_2 - x_1 = -1,5x_1 + 18$



17.

(a) Galoppierende Schnecke: $\frac{12000}{3} = \frac{x}{80} \Rightarrow x = 320000\,\text{cm} = 3,2\,\text{km}$

(b) Dreieckskonstruktion: BC ist nicht unbedingt parallel zu DE. Das wäre die Umkehrung des 2. Strahlensatzes. Von Dreieck ADE sind 2 Seiten und der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel bekannt. Wäre $|DE| \geq |BC|$, wäre die Konstruktion eindeutig.

(c) Monddurchmesser: $\frac{0{,}007}{0{,}78} = \frac{d}{382200000} \Rightarrow d = 3430000\,\text{m} = 3430\,\text{km}$

(d) Streichholz: $\frac{400}{4} = \frac{x}{60} \Rightarrow x = 6000\,\text{cm} = 60\,\text{m}$

18. $B_2A_2||B_4A_4$

19.

(a) gemeint: nur 10×15 tut's

(b) $2,4$

20. $a = 15,4;\ b = 5,04;\ c = 12,5;\ d = 6$

21. $a = 276\,\text{m};\ c = 7,5\%$

22. ca. $1950\,\text{m}$

23.

(a) auf 16%
(b) um 50%

24.

(a) gleichseitige und kongruente Dreiecke
(b) Kreise und Quadrate

25.

(a) $18\,\mathrm{m}$
(b) $20,4\,\mathrm{m}$

26.

27. $6\,\mathrm{m}$

28.

29.

30.

(a)
(b) $144\,\mathrm{m}$

31. $610\,\mathrm{m}$

32.

(a)
(b) $5,5\,\mathrm{m}$
(c) $1,04\,\mathrm{m}$

33.

(a) 300 m
(b) Fehler = 26,4 m, also 10%

34.

(a) 3476 km
(b) 1392000 km

35. $h \approx 82$ cm. Unabhängig von Regalbreite!

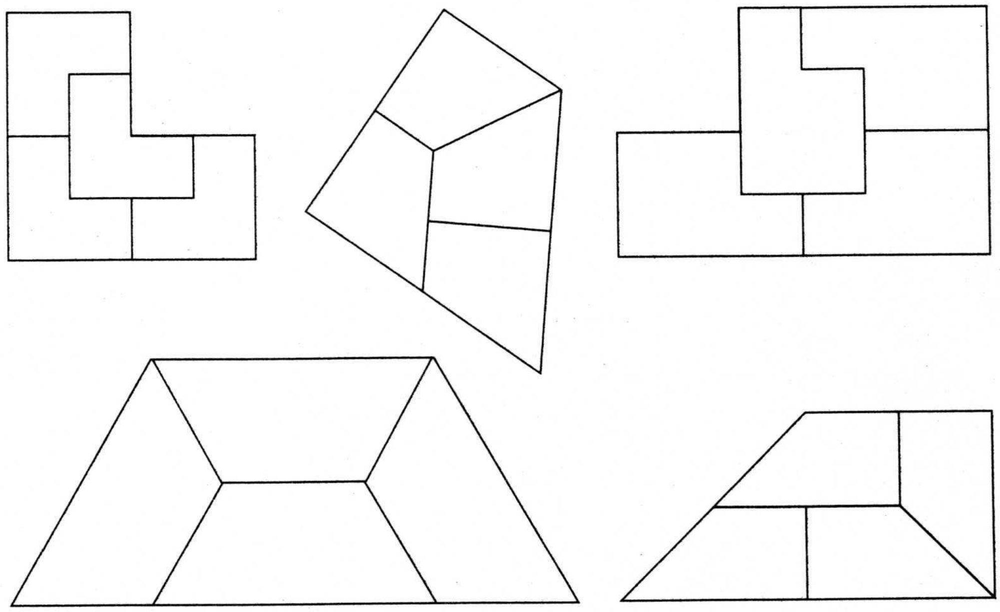
36. Quellen: Elemente 9 (1995), Lambacher Schweizer 9 (1997)

37. Abb. 1: Kongruenz
Abb. 2: Kein mathematischer Begriff
Abb. 3: Ähnlichkeit (wird leider nicht ganz deutlich, da einige Rochen im Original farblich hervorgehoben)

38.

39. Quelle: Armbrust, A. in: mathematik lehren (1998)

Lösung:



40. Quelle: Wälti, B.: Mathespiele für die Sek.I. Verlag an der Ruhr, S. 63f.

Spielregeln:

Die Spieler zeichnen als Ausgangsfigur gemeinsam zwei (rechtwinklige) Dreiecke A und B, die eine Seite gemeinsam haben (vgl. Abb.). Spieler 1 beginnt, indem er eine der 4 vorhandenen freien Dreieckseiten wählt und darüber ein zu A oder B ähnliches Dreieck errichtet. Bedingung ist, dass das neue Dreieck vollständig auf das Blatt passt (mm-Genauigkeit) und dass keine Seite kleiner als 1 cm ist. Dann kommt Spieler 2 an die Reihe. Wer das letzte Dreieck zeichnen kann, gewinnt.

41.

42.

Zentrische Streckung.

43.

5 Trigonometrische Beziehungen

1. Quelle: Mathematische Unterrichtspraxis 21 (2000)

2. Quelle: Einblicke Mathematik 10 (2001), Klett

3.
   (a) Volumen = $645577,1\,\mathrm{m}^3$, Oberfläche = $52456,1\,\mathrm{m}^2$
   (b) Volumen = $42157,8\,\mathrm{m}^3$, Oberfläche = $9195,9\,\mathrm{m}^2$
   (c) Volumen = $2736217,5\,\mathrm{m}^3$, Oberfläche = $129399,6\,\mathrm{m}^2$

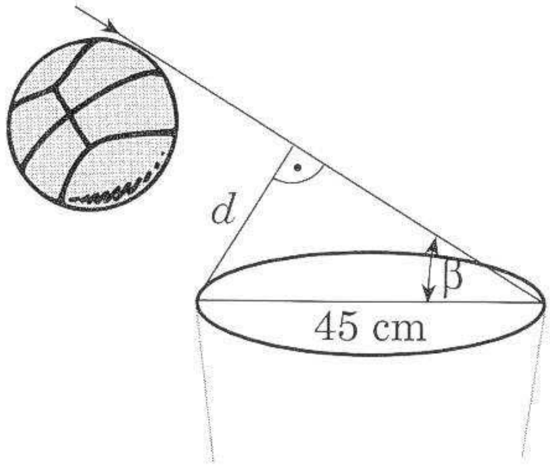
4. Durch Streckung oder Stauchung der verwendeten Sinus- bzw. Cosinusfunktion.

5. Quellen: Math. Unterrichtspraxis (2000), H. 1, S. 31-35; Istron Bd. 6 (2000), S. 14-24

   Die Rechnung in der linken Spalte ist korrekt, die in der rechten Spalte ein schönes Beispiel für den unreflektierten Einsatz eines Computeralgebrasystems: ($\tan\alpha - \alpha = \frac{1}{2R}$) ist viel zu klein, um daraus α einigermaßen genau zu bestimmen.

6. Quelle: mathematik lehren (1999), H. 95, S. 21-49

   (a) Das Maß des Einfallswinkels nennen wir β. Den Durchmesser des Balles nennen wir D_B. Wir lassen D_B zunächst variabel. Nach der nebenstehenden Abbildung gilt dann: $\sin\beta = \frac{d}{45\,\mathrm{cm}}$. Wegen $d \geqq D_B$ muss also gelten: $\sin\beta \geqq \frac{D_B}{45\,\mathrm{cm}}$. Nach den offiziellen Basketballregeln gilt für den Umfang U_B des Balles: $75\,\mathrm{cm} \leqq U_B \leqq 78\,\mathrm{cm}$. Daraus ergibt sich für D_B: $\frac{75\,\mathrm{cm}}{\pi} \leqq D_B \leqq \frac{78\,\mathrm{cm}}{\pi}$, also $23,8\ldots\,\mathrm{cm} \leqq D_B \leqq 24,8\ldots\,\mathrm{cm}$. Für einen Ball mit dem kleinstmöglichen Umfang erhalten wir demnach: $\beta \geqq 32,0°$ ($\beta \leqq 90°$). Für einen Ball mit dem größtmöglichen Umfang ergibt sich: $\beta \geqq 33,5°$ ($\beta \leqq 90°$).



(b) $\triangle L$ (siehe Skizze) ist vom Einfallswinkel β abhängig. Es gilt (D_K ist der innere Durchmesser des Korbringes: $\sin\beta = \frac{|\overline{FG}|}{D_K} = \frac{|\overline{AE}|}{2\cdot\triangle L}$ und $|\overline{AE}| = |\overline{FG}| - 2r_B$.

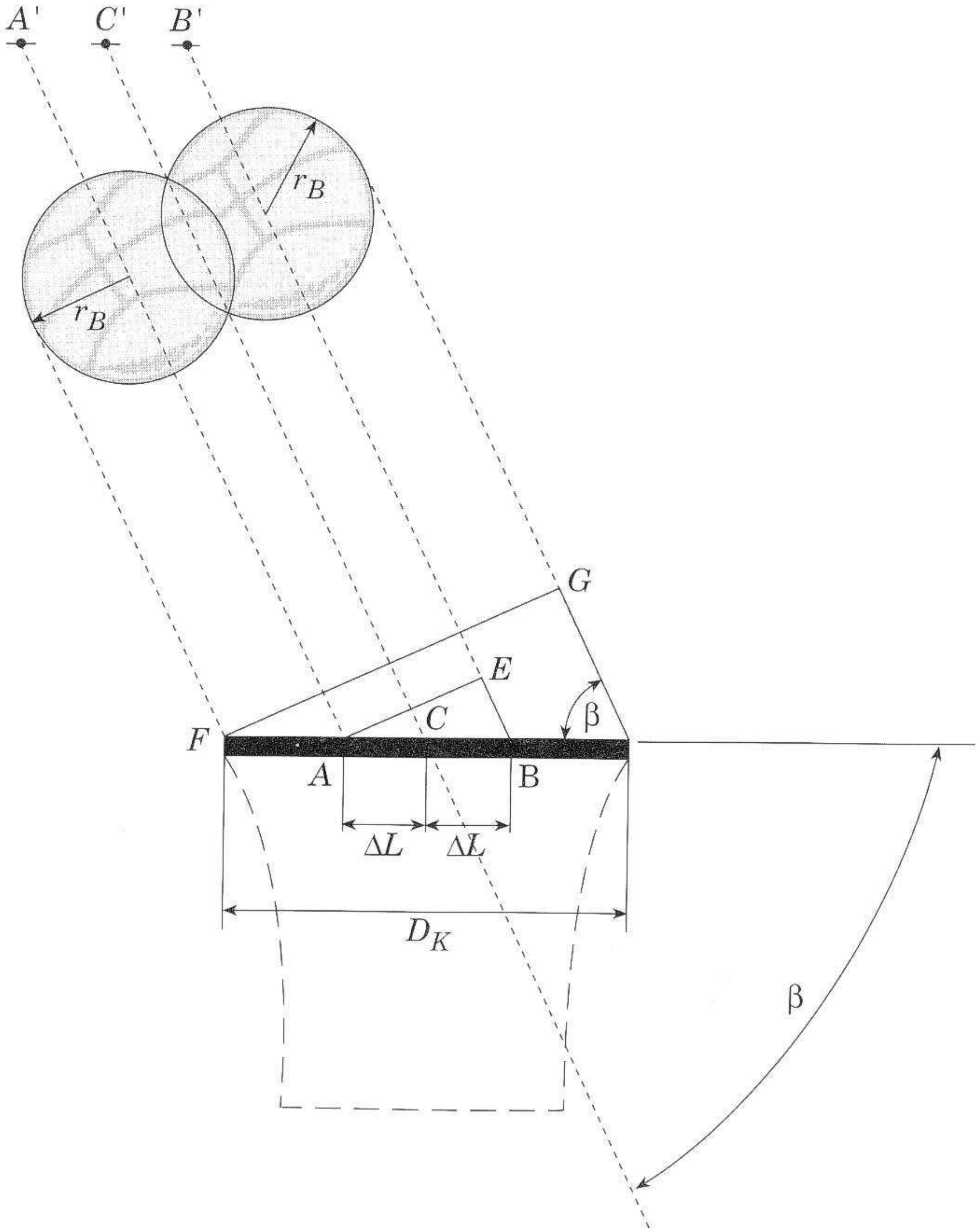
Daraus ergibt sich: $2 \cdot \triangle L = \frac{|\overline{AE}|}{\sin\beta} = \frac{|\overline{FG}|-2r_B}{\sin\beta} = \frac{D_K\cdot\sin\beta - D_B}{\sin\beta} = D_K - \frac{D_B}{\sin\beta}$ also

(1) $\triangle L = \frac{1}{2}(D_K - \frac{D_B}{\sin\beta})$. Wir argumentieren: Je größer β, desto größer $\sin\beta$, desto kleiner $\frac{1}{\sin\beta}$, desto kleiner $\frac{D_B}{\sin\beta}$, desto größer $D_K - \frac{D_B}{\sin\beta}$, also auch desto größer $\triangle L$. $\triangle L$ ist am größten, wenn β am größten ist, nämlich wenn $\beta = 90°$ beträgt. Dann gilt: $\triangle L = \frac{1}{2}(D_K - D_B) = r_K - r_B$. (Fortsetzung nächste Seite)

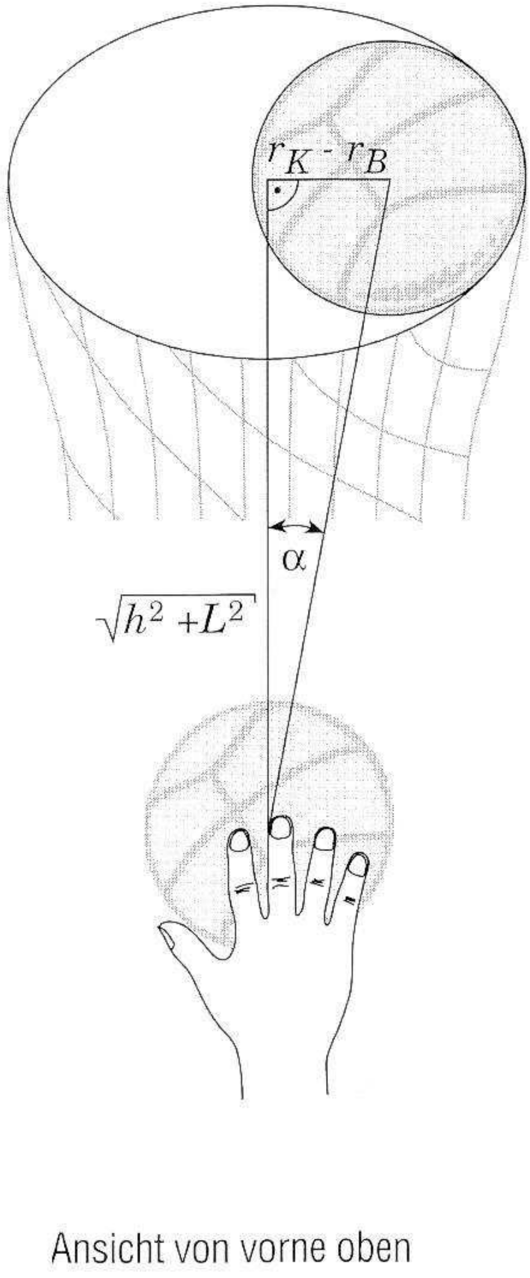
Im Folgenden legen wir für D_K das arithmetische Mittel von 75 cm und 78 cm zugrunde (also 76,5 cm) und verwenden $D_B = 24,4$ cm. Unter dieser Annahme berechnen wir für $\triangle L$ die verschiedenen Werte von β:

β	$\triangle L$
45°	5,2 cm
60°	8,4 cm
75°	9,9 cm
90°	10,3 cm

Indem wir in der Gleichung (1) $\triangle L = 0$ setzen und den zugehörigen Winkel β geeignet interpretieren, erhalten wir natürlich auch eine Antwort auf die erste Problemstellung: $D_K - \frac{D_B}{\sin\beta}$ führt zu $\sin\beta = \frac{D_B}{D_K}$.

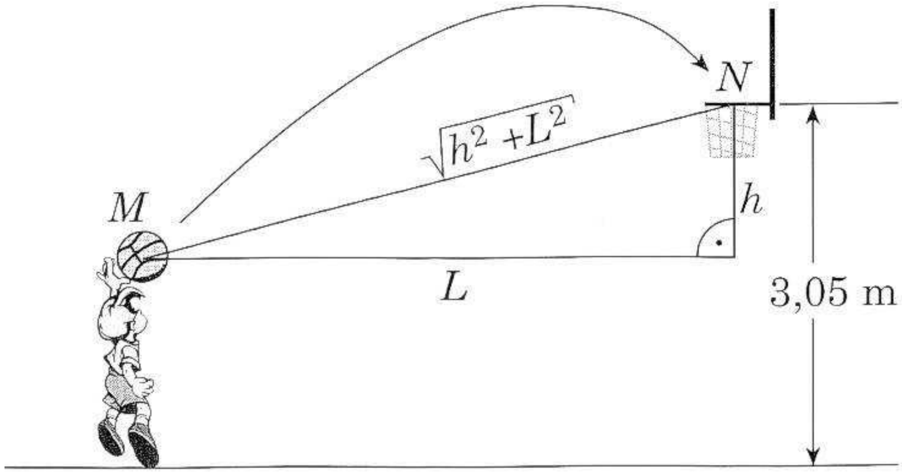


(c) Das Maß des Winkels der maximal möglichen seitlichen Abweichung bezeichnen wir mit α. Es gilt: $r_K - r_B = 22,5\,\text{cm} - 12,2\,\text{cm} = 10,3\,\text{cm}$. Gemäß der nebenstehenden Abbildung ergibt sich: $\tan\beta = \frac{10{,}3\,\text{cm}}{\sqrt{h^2+L^2}}$.



Lassen wir L konstant, so gilt: Je größer ein Basketballspieler ist, desto kleiner ist h, desto größer ist $\tan\alpha$.
Lassen wir h konstant, so gilt: Je weiter ein Basketballspieler vom Korb entfernt ist, das heißt je größer L ist, desto kleiner ist $\tan\alpha$ und damit auch α. Wir berechnen einige Werte von α:

h	L	α
70 cm	423 cm Freiwurf	$1,38°$
90 cm	423 cm	$1,36°$
130 cm	423 cm	$1,33°$
90 cm	200 cm	$2,69°$
90 cm	600 cm	$0,97°$



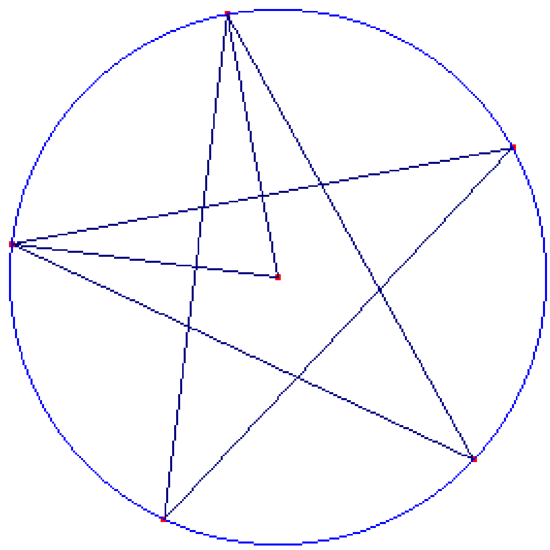
7.

- Das Dreieck ist gleichseitig, also sind alle Winkel 60° und es gilt $\tan 60° = \frac{2h'}{a}$. Wegen $\tan 60° = \sqrt{3}$ folgt: $h' = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
- Eine weitere Lösungsmöglichkeit: Die Kantenlänge des Quadrats ist a. Dann soll für das Dreieck laut Pythagoras gelten: $(\frac{1}{2}a)^2 + h'^2 = a^2$. Daraus folgt dann die Lösung für h' und somit kann das gleichseitige Dreieck gezeichnet werden.

8. Quelle: Trigonometrie, 10. Schuljahr (1999), Cornelsen

9. Quelle: Fich, O.: Mathelogik

Von jeder Sternspitze gehen zwei Linien aus. Wenn man sich vorstellt, dass der Stern von einem Kreis umgeben ist, bei dem die fünf Sternspitzen genau auf dem Kreisrand liegen, wird deutlich, dass der Winkel zwischen den beiden Linien der Sternspitze 36 Grad betragen muss (Umfangswinkelsatz oder Winkelsumme). Zeichnet man eine Linie von einer Sternspitze zum Mittelpunkt des Sterns und eine Linie vom Zentrum des Sterns rechtwinklig zu einer der beiden Linien von der Sternspitze, erhält man ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem man den Abstand von einer Sternspitze zum Mittelpunkt folgendermaßen berechnen kann: $s = \frac{1000\,\mathrm{mm}}{cos 18°} = 105\,\mathrm{mm}$.



10. Quelle: Fich, O.: Mathelogik

(a) Ausgehend vom Satz des Pythagoras muss die Länge der Diagonalen $\sqrt{125}$ cm betragen. Das Doppelte hiervon ist $\sqrt{500}$ cm. Die Länge der senkrechten Linie ist unverändert 10 cm und damit 100, wenn sie quadriert wird. Die Breite zum Quadrat muss daher 400 sein, wenn die Summe 500 betragen soll. Die Quadratwurzel aus 400 ist 20, d.h. die neue Breite ist also 15 cm größer als vorher.

(b) Die Verdopplung entspricht in diesem Fall einer schrägen Linie mit der Länge $\sqrt{2000}$ cm, und da die Länge der senkrechten Linie unverändert ist, muss die Breite des Buchstabens $\sqrt{900}\,\text{cm} = 43,6\,\text{cm}$ sein, was einer Vergrößerung um ca. $23,6$ cm entspricht.

(c) Wenn wir die Länge der senkrechten Linie als 1 definieren, muss die Fläche des großen Dreiecks (das ganze A) sein: A (großes Dreieck) $= \frac{1}{2} \cdot \tan 15° \cdot 1 \cdot 2 = \tan 15°$. Der Querstrich soll nun entsprechend der Hälfte der Fläche des As platziert werden. Wenn wir die Länge der Linie, die von der Spitze des As rechtwinklig zum Querstrich verläuft, b nennen, ist die Fläche des Dreiecks über dem Querstrich: A (kleines Dreieck) $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \tan 15° \cdot 2 = b^2 \tan 15°$. Dies soll gleich $\frac{1}{2} \cdot \tan 15°$ sein, weshalb $b = \sqrt{0,5} \approx 0,707$ entsprechend $70,7\%$ ist, oder $29,3\%$, von unten nach oben gemessen.

(d) Die Länge der Querlinie beträgt: $L = 2 \cdot \sqrt{0,5} \cdot \tan 15° \approx 0,379$.

11. Quelle: RAAbits Reihe 5 Material S. 5

(a) $\approx 28,67\%$

(b) $\tan 13^\circ \approx 23,09\%$

12. Klar: Das verbliebene Wasser steht bis zu einer unbekannten Höhe h. Kippt man das Glas, ist der Flüssigkeitspegel an dieser Stelle höher als h, sagen wir $h+x$. Auf der anderen Seite des Glases ist dann der Pegel natürlich gerade $h-x$ (Strahlensatz).
Also müssen wir den Abstand bis zum oberen Rand ($2x$) bestimmen, wenn es auf der gegenüberliegenden Seite gerade am Rand ist.
Dazu denken wir uns ein rechtwinkliges Dreieck in das Glas gelegt, bei dem eine Kathete der (obere) Durchmesser des Glases ist, die Hypotenuse auf der Wasseroberfläche entlangläuft und die andere Kathete gleich der gesuchten Länge $y = 2x$ ist.
In diesem Dreieck gilt für die gesuchte Länge offenbar: $y = \tan(20^\circ) \cdot 8\,\text{cm}$
Also ist das verschüttete Volumen: $V = \frac{1}{2} \cdot (4\,\text{cm})^2 \cdot \pi \cdot 8\,\text{cm} \cdot \tan(20^\circ) \approx 73\,\text{cm}^3$ und dies sind ca. 12% des ursprünglichen Inhalts.

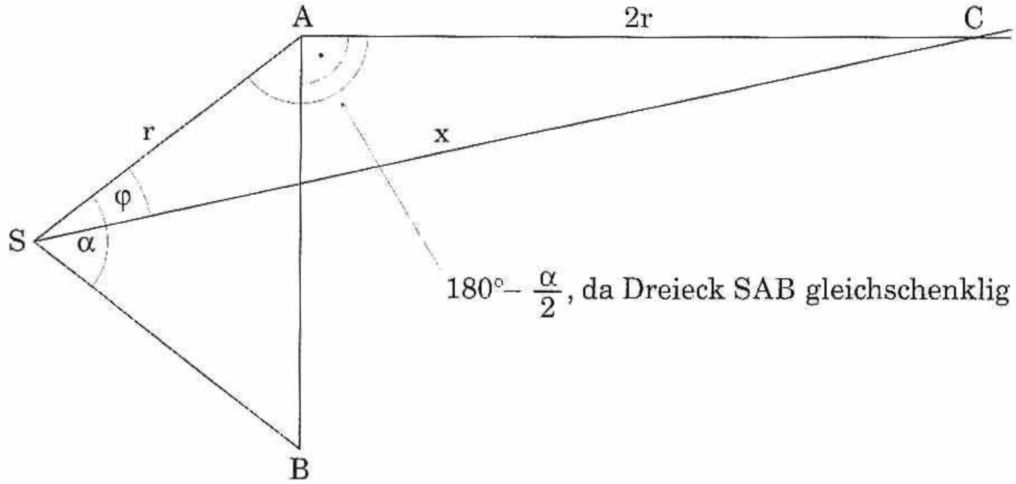
13. Quelle: mathematik lehren (1997) H. 83, S. 68f

Prag, 11. April 1610

Hoch geehrter Bartholomäus Schobinger aus St. Gallen, Sohn eines reichen Gutsbesitzers und Handelsherren,

ich bedanke mich für die Ehre, die Sie mir beweisen, indem Sie mir ihre Ergebnisse mitteilen. Ihre Behauptung war, dass Sie ein Verfahren gefunden haben, mit dem es Ihnen gelungen ist, jeden beliebigen Winkel allein mit Zirkel und Lineal zu dritteln.

Dieses Verfahren haben Sie anschaulich beschrieben. Wenn man die Winkel wie in der Skizze benennt, ist die Behauptung: $\varphi = \frac{\alpha}{3}$.



Um Ihr Verfahren rechnerisch zu prüfen, muss man mit Hilfe des Cosinus-Satzes (siehe Zeichnung) die folgenden Formeln aufstellen:

I. $x^2 = r^2 + (2r)^2 - 2r2r\cos(180 - \frac{\alpha}{2})$ II. $(2r)^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cdot \cos\varphi$

$x^2 = 5r^2 + 4r^2\cos\frac{\alpha}{2}$ $\cos\varphi = \frac{r^2 + x^2 - (2r)^2}{2rx}$

Wenn x^2 eingesetzt wird, ergibt sich:

$$\cos\varphi = \frac{2r^2 + 4r^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{2r\sqrt{5r^2 + 4r^2\cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2r^2\left(1 + 2\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2r^2\sqrt{5 + 4\cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 + 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{5 + 4\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

Wenn man die von Ihnen genannten Winkel mit Hilfe dieser Formel prüft, kommt man zu den genauen gezeichneten Winkeln, aber nicht genau zu Winkeldritteln:

α	15°	30°	60°	90°
φ	5,0016°	10,018°	20,104°	30,361°

Je größer die Winkel werden, desto ungenauer ist die Drittelung durch Ihr Verfahren.

Die richtige Behauptung für Ihr zeichnerisches Verfahren wäre also nur $\varphi \approx \frac{\alpha}{3}$.

Ich danke Ihnen trotzdem für Ihre Mühe.

14. Bindungswinkel: $109,5°$; Bindungslänge: 109 Pikometer

15.

(a) 60% Steigung
(b) 119% Steigung

16. Weitwinkel − $19,55\,\text{m}$
Normal − $38,08\,\text{m}$
Tele − $94,71\,\text{m}$

17. Der Turm ragt $4,52,\text{m}$ über seine ursprüngliche Standfläche hinaus.

18. Die Regentropfen fallen mit einer Geschwindigkeit von $14,15\,\frac{m}{s}$ oder $50,96\,\frac{km}{h}$.

19.

(a) Höhenunterschied $= 91,5\,\text{m}$ Länge der Anlaufbahn $= 145,4\,\text{m}$
(b) Höhenunterschied $= 88,4\,\text{m}$

20. Breite des Flusses $= 62,5\,\text{m}$

21. Die Kette muss mindestens $11,7\,\text{m}$ lang sein.

22.

(a) $c = 5,43 \quad \alpha = 36,5° \quad \beta = 76°$
(b) $a = 22,4 \quad \beta = 46,0° \quad \gamma = 88,9°$
(c) $b = 10,6 \quad \alpha = 50,5° \quad \gamma = 33,8°$
(d) $\alpha = 17,9° \quad \beta = 100,3° \quad \gamma = 61,8°$

23. Die Tunnellänge beträgt ca. $2082\,\text{m}$.

24. Da die Formel für den Flächeninhalt bekanntermaßen $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ lautet und man die Höhe h durch z.B. $a \cdot \sin\beta$ bestimmen kann, ist die Beschriftung von Sabines Kärtchen richtig.

25. Bei einem Erdradius von $6400\,\text{km}$ ergibt sich

(a) $\lambda = 87,65°$ Horizontkreis $= 6394,64\,\text{km}$

(b) $\lambda = 16,06$ Horizontkreis $= 1770,78\,\text{km}$

(c) $\lambda = 0,2582$ Horizontkreis $= 28,84\,\text{km}$

26. Der Bug ist ca. 234 m vom Auftreffpunkt der Welle am Ufer entfernt.

27.

28.

Die maßstäblich umgerechnete direkte Entfernung beträgt 576 m, unter Berücksichtigung des Höhenunterschieds von 110 m ergibt sich eine Luftlinie von 586,4 m.