SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Geometrie (SINUS-Transfer)

herausgegeben vom

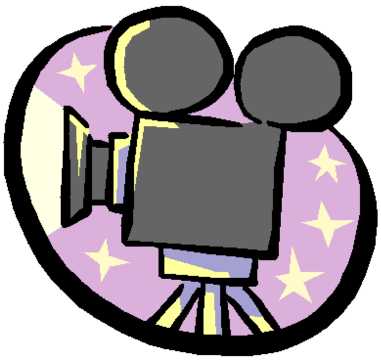
Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. Mai 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Oberflächen und Volumina

1. **Videoclip „Zwei Männer und viele Bälle“**



   In dem 10-minütigen Videoclip wird gezeigt, wie bei unterschiedlichen Bällen jeweils das Volumen und der Umfang empirisch bestimmt werden.
   Im Abspann endet das Video mit der Frage „Was nun?“
   Das beiliegende Blatt mit den Messwerten soll als Kopiervorlage dienen und kann an die Schülerinnen und Schüler ausgehändigt werden.
   Dann lässt man der Phantasie und Kreativität der Schülerinnen und Schüler freien Lauf.

Angaben in cm	Angaben in cm^3
$70,4$	5900
$56,5$	3050
$51,0$	2250
$38,0$	900
$20,0$	140
$12,7$	40

2. **Rotierende Figuren**

   Die äußeren Quadrate in der unten stehenden Abbildung haben jeweils die Seitenlänge a.

(a) Bestimme die prozentualen Anteile der Teilflächen.

(b) Die Figur rotiert - sofern vorhanden - um eine frei wählbare Symmetrieachse.

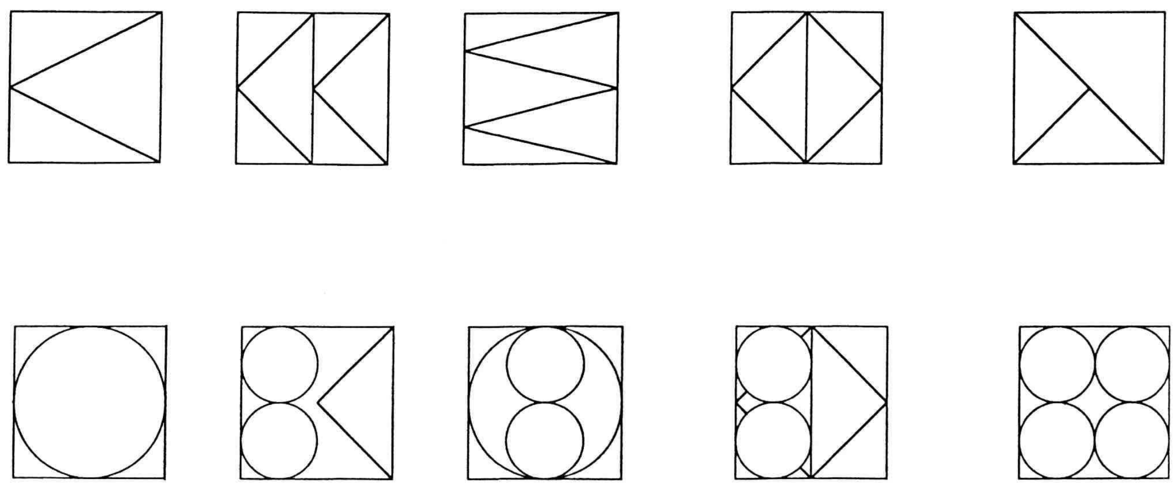
   i. Bestimme das Verhältnis der Volumina der entstehenden Körper. Die Bezugsgröße ist der durch das rotierende Quadrat entstehende Körper.

   ii. Bestimme das Verhältnis der Oberflächeninhalte der entstehenden Körper. Wähle als Bezugsgröße:

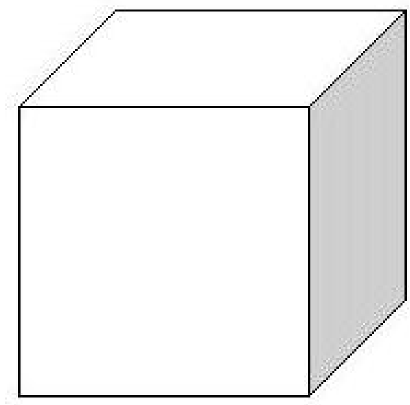
      A. den Flächeninhalt des Quadrates;

      B. den Oberflächeninhalt des durch das rotierende Quadrat entstehenden Körpers.

(c) Finde selbst weitere geeignete Figuren und untersuche sie.



3. **Maximales im Würfel**



Setze in den Würfel

(a) eine Kugel,
(b) einen Kegel,
(c) einen Zylinder
(d) eine Pyramide

mit maximalem Volumen. Vergleiche die Volumina und Oberflächeninhalte der Körper mit dem Volumen und dem Oberflächeninhalt des Würfels.

4. **Die A-Klasse**

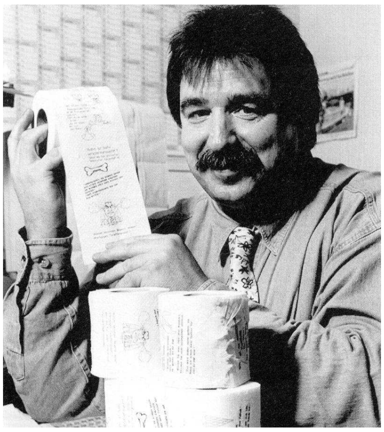
Mercedes bietet von seinem A-Klasse Modell 140 zwei verschiedene Versionen an. Eine „normale“ und eine etwas längere Version. Die normale Version kostet mit Normalausstattung 16530€, die längere 140L Version kostet mit gleicher Ausstattung und Motorisierung 17632€.

Entscheide anhand des Bildes und der folgenden Daten, ...

(a) ... wie viel qm beim Mercedes 140 bzw. 140L lackiert werden müssen?
(b) ... wie viele Sprudelkisten (Länge: 35 cm; Breite: 27 cm ; Höhe: 34, 5 cm) passen in die jeweiligen Autos bei umgeklappter Rückbank?
(c) ... ob der Preis des Mercedes 140L gegenüber dem des 140 gerechtfertigt ist.

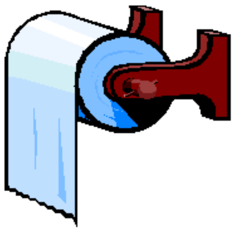
Version	140	140L
Radstand in mm	2423	2593
Länge in mm	3606	3776
Breite in mm	1719	1719
Höhe in mm	1575	1589
Leergewicht in kg	1105	1060
Nutzlast in kg	385	520
Gesamtgewicht in kg	1490	1580
Ladevolumen in Liter	390	390
Ladevolumen umgeklappt in Liter	1740	1930
Tankinhalt in Liter	54	54

5. **Klopapier**



Das Format ist etwas gewöhnungsbedürftig: ziemlich lang und zehn Zentimeter breit. Aber der gelernte Dekorateur und Werbefachmann Georges Hemmerstoffer, 50, aus Saarbrücken ist dennoch guten Mutes. Denn was für einen normalen Stuhlgänger eine schlichte Rolle Klopapier ist, betrachtet er als „die längste Werbefläche der Welt“.
Wer, genervt von den überlangen Werbeblöcken der TV-Sender, auf seinem WC die werbefreie Stille sucht, soll sich ab Herbst wundern. Rohrreinigungs-, Pharmaunternehmen und Putzmittelhersteller machen den Anfang mit Werbebotschaften auf Toilettenpapier. Die Berliner Band „Knorkator“ hat auch schon fest gebucht. Pünktlich zum Erscheinen ihrer neuen CD will sie die Liedertexte dreilagig zum Mitsingen bringen. Der Kontakt zur Werbebotschaft ist garantiert, schließlich müsse jeder mehrmals pro Tag auf die Toilette, schwärmt Hemmerstoffer.
Hemmerstoffer ist zuversichtlich. Schon prophezeit der Saarbrücker Klopapier zum Nulltarif. Was heute noch im Sechserpack so zwischen $1,5$ und 3 Euro kostet, werde dank der Werbebotschaften in ein paar Jahren grundsätzlich „umsonst werden“. Etwa so, wie Anzeigenblätter, die sich rein über Werbung finanzieren.

Es bleiben ein paar „emotionale Probleme“. Hemmerstoffer: „Der Gang zur Toilette ist auch heute noch bei manchen Mitmenschen mit höchster Diskretion verbunden“. Doch glücklicherweise werde das Verhältnis der Deutschen zu ihrem Stoffwechsel immer unverkrampfter: Den 1. FC Kaiserslautern als potenziellen Werbetreibenden konnte dieses Argument nicht überzeugen. Dort konterten die Vereinsoberen kurzerhand: „Wir wollen nicht, dass sich unsere Gegner mit unserem Logo den Hintern abwischen“.



(a) Wie viel m Klopapier sind auf einer Rolle?

(b) Was müsste der Meter Werbung auf einer Rolle kosten, damit die Rolle für den Verbraucher kostenlos ist?

(c) Schätze: Wie viel €müsste für Werbung auf Klopapier jährlich ausgegeben werden, wenn alle Deutschen (ca. 80 Millionen) ihr Klopapier umsonst bekommen sollen?

Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

6. **Heißluftballon**

Viel heiße Luft bringt einen mit Sicherheit nach oben. Niemand weiß das besser als Ian Ashpole. Der 43-Jährige stand in England auf der Spitze eines Heißluftballons. Die Luft-Nummer in 1500 Meter Höhe war noch der ungefährlichste Teil der Aktion. Kritischer war der Start: Nur durch ein Seil gesichert, musste sich Ashpole auf dem sich füllenden Ballon halten. Bei der Landung strömte dann die heiße Luft aus einem Ventil direkt neben seinen Beinen vorbei. Doch außer leichten Verbrennungen trug der Ballonfahrer keine Verletzung davon.

(a) Wie viel Luft sind wohl in diesem Heißluftballon?

(b) Wie viel Stoff benötigte man zur Herstellung dieses Ballons?

Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

7. **Zeitungslieferant**

Wie schwer ist wohl dieser Zeitungsstapel?

Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

8. **Lagertanks**

Millimeterarbeit war vonnöten, um die jeweils drei Einzelteile zweier Lagertanks für den Transport vom Gelände der Firma Apparatebau vorzubereiten. Mit sechs Kesselbrücken wurden die riesigen bleiummantelten Behälter jetzt nach Ludwigshafen zu einem großen Chemieunternehmen gefahren. Die Tanks sind nach der Montage 30 Meter groß, sieben Meter breit und fassen jeweils 900 Kubikliter Flüssigkeit. Pro Exemplar erreichen sie ein Gewicht von 150 000 Kilogramm. In den Behältern soll Rückschwefelsäure gelagert werden.

Goslarsche Zeitung vom 4.7.1997

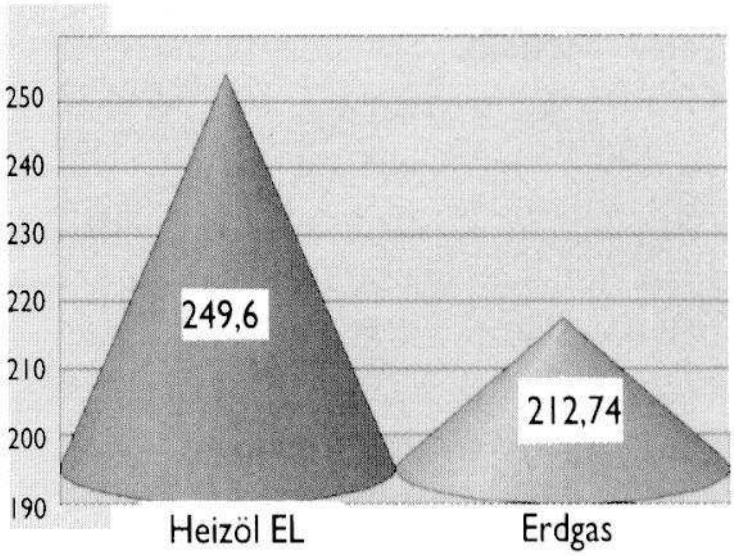
(a) Zeige, dass die im Text genannte Einheit „Kubikliter“ keine Volumeneinheit ist! Welche Potenz einer Längeneinheit wird durch die Einheit „Kubikliter“ dargestellt?

(b) Berechne das (Außen-)Volumen eines solchen Tanks und korrigiere dann die falsche Einheit!

Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

9. CO_2**-Emission**

   Das nebenstehende Diagramm befand sich in der Kundenzeitschrift „Tag und Nacht“ 3/1999 der Wetzlarer Stadtwerke. Es soll Kunden zur Umstellung ihrer Heizungsanlage von Heizöl auf Erdgas motivieren.

   Bisherige Minderung der CO_2-Emission – unter Berücksichtigung gleicher Energieinhalte – in Tonnen pro Jahr durch Brennstofftausch bei der Aktion WechselGeld

   (a) Was meinst du dazu? Um wie viel Prozent ist der Erdgas-Kegel kleiner als der Heizöl-Kegel?
   (b) Vergleiche mit den angegebenen Zahlen.
   (c) Versuche eine angemessene Darstellung der Werte mit Kegeln (bzw. mit anderen geometrischen Körpern) zu finden.

   Quelle: mathematik lehren (1999)

10. **Forever-Stone**

    Als vor einigen Jahren das chemische Mittel „Forever-Stone“ auf den Markt kam, das die Verwitterung von Steinen verlangsamen oder gar stoppen sollte, begann die

Diskussion um die Erhaltung der Cheops-Pyramide bei Gise (Abb. auf der nächsten Seite). Viele forderten den Einsatz dieses Mittels, um das älteste und einzige noch erhaltene Weltwunder des Altertums, die Cheops-Pyramide, zu bewahren. Andere lehnten eine derartige Aktion ab, da sie eine Entweihung der alten Grabstätten darstelle. Wieder andere argumentierten, dass die Kosten weit über das hinausgingen, was an anschließenden Mehreinnahmen zu erwarten sei, wohingegen andere meinten, dass bei derartigen Kulturdenkmälern der Kostenaufwand keine Rolle spielen dürfe. Soll das Mittel also angewendet werden oder nicht?
Wenn du einen Bericht für die internationale Gesellschaft für die Bewahrung historischer Güter abgeben müsstest, wie würde deine Stellungnahme aussehen?
Der schriftliche Bericht soll folgende Punkte enthalten:

- Eine Analyse der historischen Bedeutung der Pyramide;
- Eine Kostenaufstellung für die Anwendung des Mittels „Forever-Stone“;
- Eine Erörterung der Vor- und Nachteile der Anwendung;
- Eine Begründung der Entscheidung (möglichst an Diagrammen und grafischen Darstellungen erläutert).

Du sollst deine Überlegungen auch mündlich darstellen. Bei dieser mündlichen Präsentation hast du nur 5 Minuten Zeit. Bitte denke an eine auch visuell gut unterstützte Präsentation.

Als Anlage erhältst du die folgende Produktinformation:
„Forever-Stone“ ist das einzige Mittel, das zur Bewahrung der Steine empfohlen werden kann. Eine Behandlung schützt den Stein für 10 Jahre unter den klimatischen Verhältnissen von Ägypten. Ein Kanister (4 Liter) reicht für $100\,\mathrm{m}^2$ halbporösen Stein und $50\,\mathrm{m}^2$ porösen Stein und kostet 30 €. Für dieses „Pyramiden-Projekt“ bietet Forever-Stone einen Sonderpreis an: Beim Erwerb von mehr als 100 Kanistern erfolgt ein Preisnachlass von 30%.

Quelle: mathematik lehren (2001)

11. **Der menschliche Körper: Herzschlag**

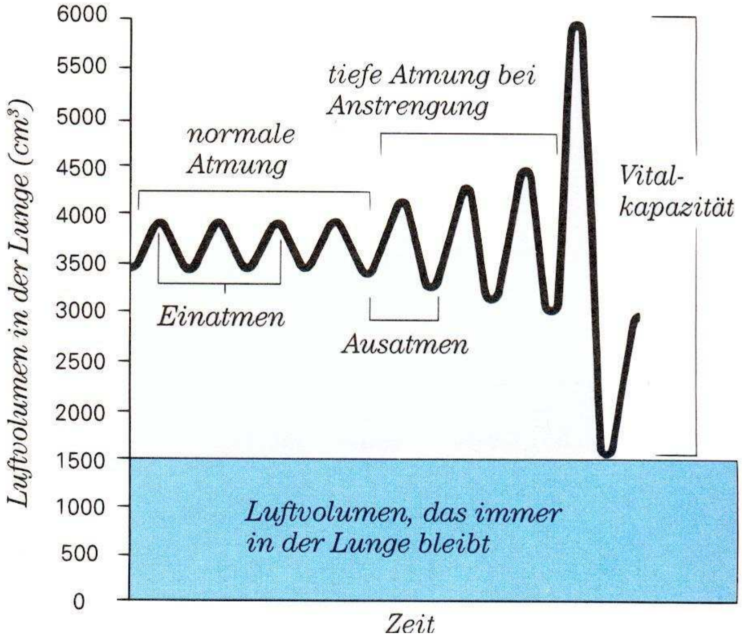
    Das Herz des Menschen pumpt bekanntermaßen unsere ca. 5 Liter Blut in einem Kreislauf. Wie lange dauert ein solcher Kreislauf, d.h. ein kompletter Blutumlauf, wenn pro Herzschlag ca. $70 - 100\,\text{ml}$ Blut gepumpt werden?

12. **Atmung**

    Bestimme näherungsweise deine „Vitalkapazität“ mit Hilfe des neben stehenden Diagramms: Atme dazu so tief wie möglich ein und dann in einen Luftballon aus.

    (a) Wie groß ist das gesamte Luftvolumen deiner Lunge?

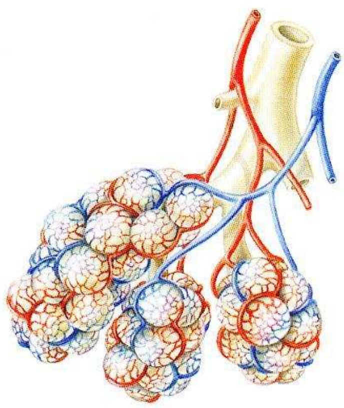
    (b) Deine Lunge besteht aus Lungenbläschen, von denen jedes einzelne ein Volumen von ca. $0,004\,\text{mm}^3$ hat. Wie viele dieser Lungenbläschen hast du?



In den Lungenbläschen findet der Gasaustausch zwischen Sauerstoff und Kohlendioxid statt. Der Mensch besitzt ca. 400 Mio. Lungenbläschen mit einem Radius von jeweils $0,1\,\text{mm}$.

(c) Berechne den Gesamtoberflächeninhalt aller Lungenbläschen eines Menschen.

(d) Welchen Radius müsste eine einzige Kugel mit dem gleichen Oberflächeninhalt haben?



(e) Um wie viel Prozent ist die Gesamtoberfläche der Lungenbläschen größer als die der Haut?

13. **Haut**

Das größte Organ des menschlichen Körpers ist die Haut. Versuche mit einem Maßband als Hilfsmittel ungefähr herauszufinden, wie viel Haut ein Mensch hat. Mediziner gehen davon aus, dass bei einem Erwachsenen mit Verbrennungen von mehr als 15% Lebensgefahr besteht. Einer wie großen Fläche entspricht dies?

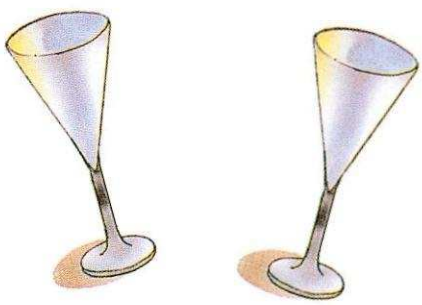
14. **Glas im Flugzeug**

Auf einem runden Tisch in einem Flugzeug steht ein zylindrisches Glas, das bis zum Rand mit Wasser gefüllt ist. Das Glas ist 12 cm hoch und hat einen Durchmesser von 8 cm. Wir nehmen an, dass das Glas so dünn ist, dass wir im Folgenden von der Dicke des Glases absehen können. Außerdem sehen wir von besonderen physikalischen Eigenschaften wie der Oberflächenspannung des Wassers ab.
Wenn sich das Flugzeug beim Hochsteigen um 20 Grad im Verhältnis zur Erdoberfläche neigt, wie viel Wasser läuft aus dem Glas? Wie viel Prozent des ursprünglichen Inhalts sind dies?

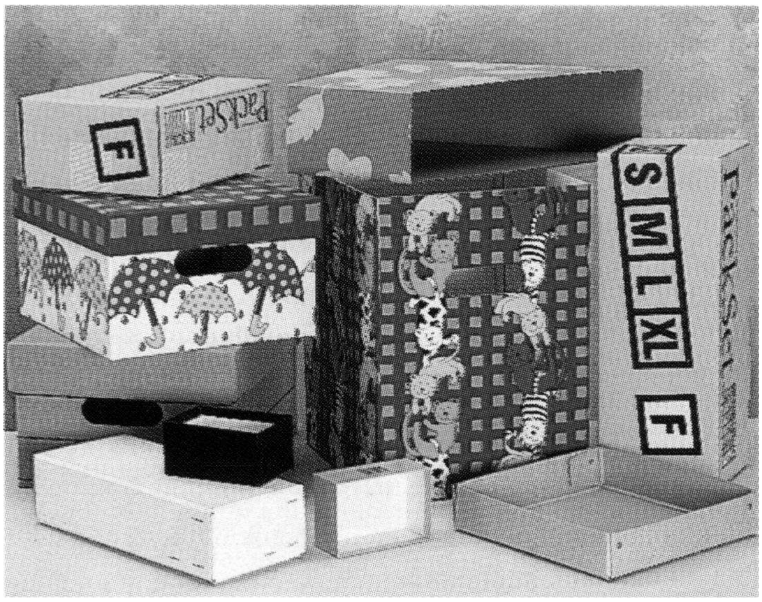
Quelle: Fich, O.: Mathelogik (2001)

15. **Sektgläser**

Eine übliche Sektflasche reicht für sieben „normal große“ Sektgläser. Für wie viele Sektgläser reicht eine Sektflasche, wenn die Gläser nur halb gefüllt werden?
Bevor ihr rechnet: Gebt einen Tipp ab und versucht, eine möglichst schöne Begründung zu finden.



16. **Faltkartons**



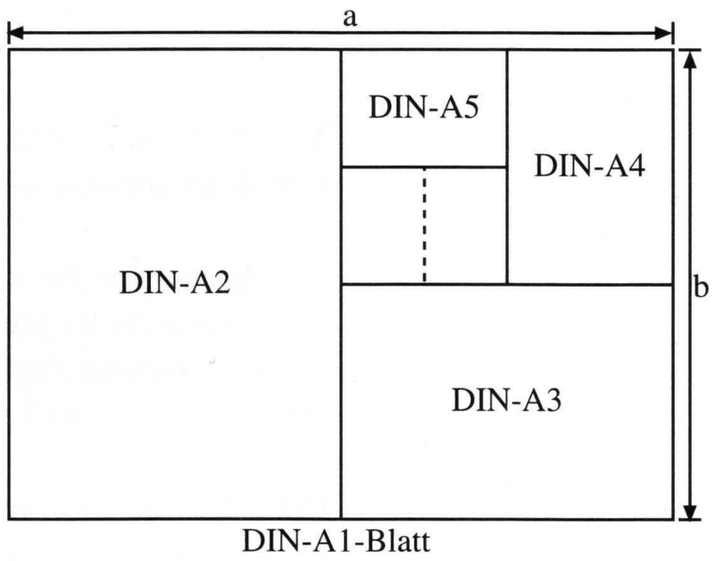
(a) Untersuche Faltkartons für Zeitschriften, Umzüge usw.
Zeichne Netze für die Kartons und baue sie nach. Berechne jeweils den Papierverbrauch und den Rauminhalt. Welche Kartonform wird man wählen, wenn der Verbrauch möglichst niedrig sein soll?

(b) Suche dir noch interessantere Körper, die in deinem Alltag vorkommen, und wiederhole die Aufgabe mit ihnen.

17. **Papierformate**

In Deutschland werden bestimmte Papiergrößen nach der DeutschenIndustrieNorm (DIN) bezeichnet. Für DIN-A Formate von Papier gelten folgende Bedingungen:

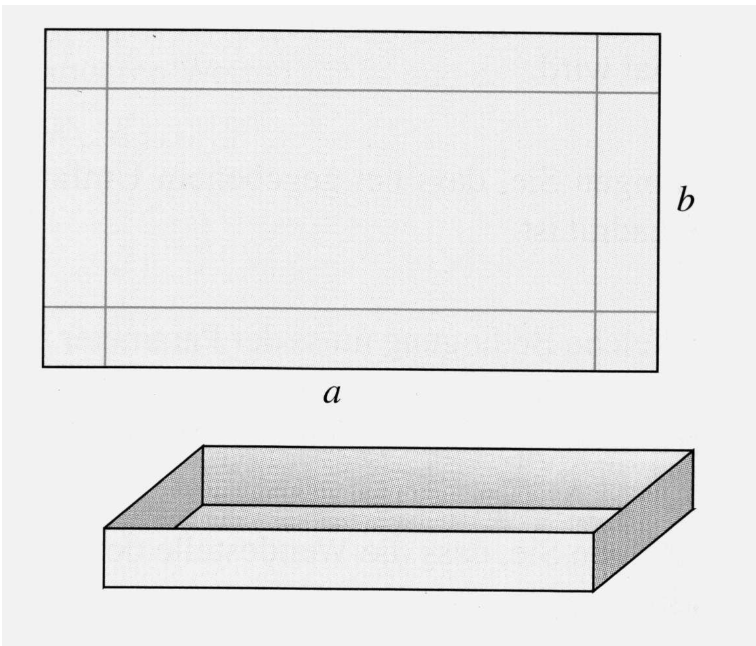
- Die Rechtecke sind einander ähnlich.
- Durch Halbieren der längeren Seite erhält man das nächstkleinere DIN-A Format.
- Ein Rechteck des Formats DIN-A 0 ist $1\,\mathrm{m}^2$ groß.



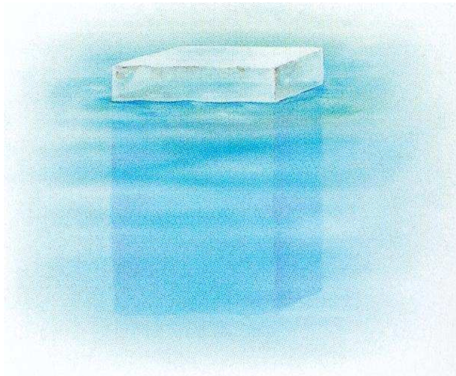
(a) Bestimme den Verkleinerungsfaktor, den man am Fotokopierer einstellen muss, um ein DIN-A4 Blatt auf DIN-A5 zu verkleinern.

(b) Wie ist das beim Verkleinern von DIN-A2 auf DIN-A3?

(c) Eine Fabrik stellt aus DIN-A4 Pappstücken oben offene quaderförmige Pappkästen mit maximalem Volumen her (siehe Abbildung). Dabei wird an jeder Ecke ein Quadrat als Klebefalz benutzt. Den wie vielfachen Rauminhalt hätte ein solcher Kasten aus DIN-A3 Papier?



18. **Schwimmende Körper**



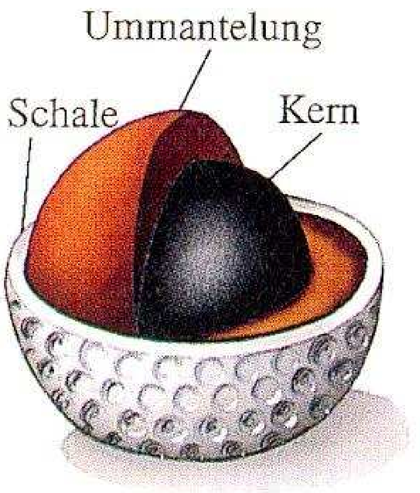
Wenn ein Körper im Wasser schwimmt, so stimmt seine Masse mit der Masse des von ihm verdrängten Wassers überein. Ein quaderförmiger Eisblock ist 80 cm lang, 25 cm breit und 20 cm tief. Wie tief taucht der Eisblock ins Wasser ein (Dichte: Eis $0,9\,\frac{g}{cm^3}$ - Wasser $1\,\frac{g}{cm^3}$) ?

19. **Golfball**

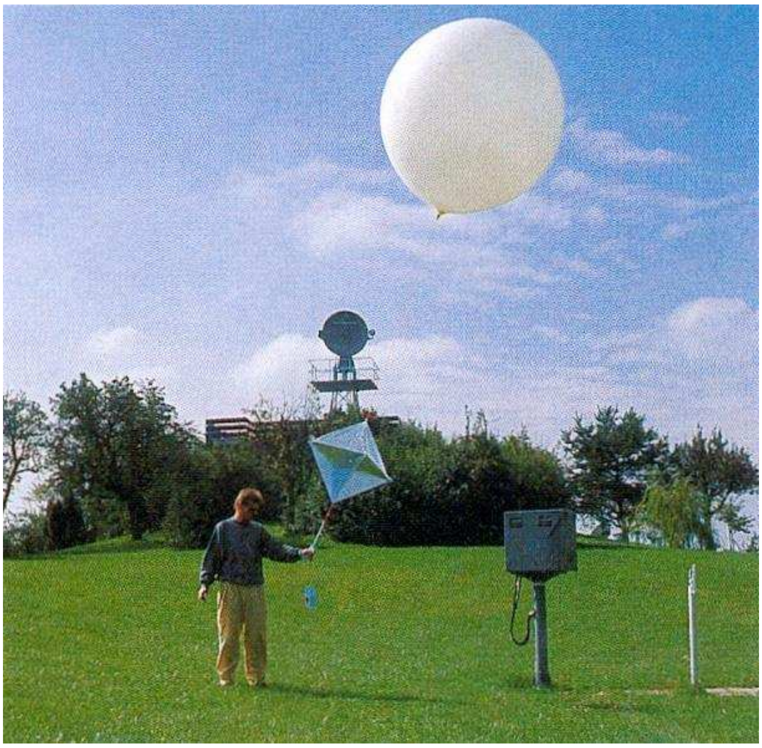
Ein Turniergolfball besteht aus drei Schichten, dem Kern, der Ummantelung und der Schale. Ein Ball hat $42,8$ mm Durchmesser und ein Gewicht von $46,23$ g. Die Ummantelung hat eine Schichtdicke von $3,0$ mm, der Kern hat einen Durchmesser von $34,8$ mm, die Schale hat eine Dicke von $1,0$ mm.

(a) Bestimme den prozentualen Anteil des Volumens der Schale, der Ummantelung und des Kerns am Gesamtvolumen des Balles.

(b) Die Schale ist aus Lithium, 1 cm^3 Lithium wiegt $0,534$ g, die Ummantelung aus Graphit, 1 cm^3 wiegt $2,39$ g. Welche Dichte hat das Material des Kerns?



20. **Wetterballon**

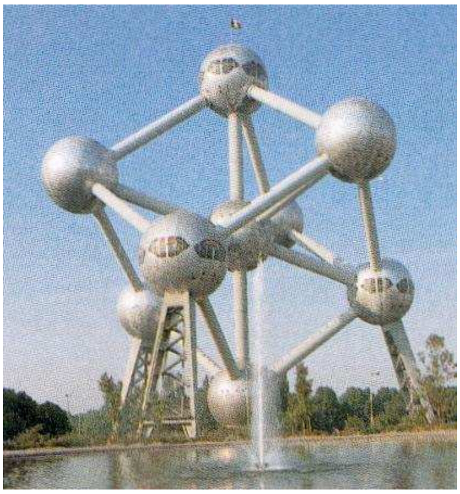


Viermal am Tag lässt die Aerologische Abteilung des Wetteramts Stuttgart vom Schnarrenberg aus einen Wetterballon in die Atmosphäre aufsteigen, der beim Aufstieg Wetterdaten sammelt und dieser zur Erde funkt. In der dünner werdenden Atmosphäre nimmt das Volumen des Ballons zu bis er schließlich in 30 bis 35 km Höhe zerplatzt. Am Boden besitzt der Wetterballon einen Durchmesser von etwa 1, 70 m.

(a) Berechne das Gewicht seiner hochempfindlichen Latexhülle, von der 1 dm^2 etwa 1, 1 g wiegt.

(b) Bis zum Zerplatzen wächst das Volumen auf das 500fache an. Berechne die Oberfläche des Ballonriesen.

21. **Atomium**



Das Wahrzeichen der Weltausstellung 1958 in Brüssel ist das „Atomium". Es besteht aus 9 Kugeln von je 18 m Durchmesser. Berechne das Gesamtvolumen aller Kugeln. Wie viele m2 muss ein Reinigungsteam putzen (ohne das Gestänge zwischen den Kugeln), wenn das Wahrzeichen so glänzen soll, wie hier auf dem Bild? Vergleiche mit den Quadratmetern an Fensterfläche bei euch zu Hause, die beim Frühjahresputz auf Hochglanz gebracht werden!

22. **Brunnen**

Bei einem Brunnen wird eine Granitkugel ($d = 1\,\text{m}$) durch einen Wasserstrahl in der Schwebe gehalten. Berechne das Gewicht der Kugel ($1\,\text{cm}^3$ wiegt $2,9\,\text{g}$).

23. **Kegel**

(a) Aus welchen Flächen lässt sich ein Kegel herstellen?

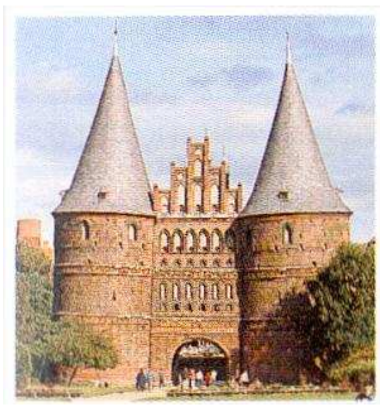
(b) Schneide einen Viertelkreis, einen Halbkreis und einen Dreiviertelkreis mit je 8 cm Radius aus und forme offene Kegel. Wie groß sind jeweils die Grundkreisdurchmesser? Wie kann man sie berechnen?

24. **Turmspitze**

Ein Turmdach hat die Form eines Kegels mit dem Grundkreisdurchmesser $d = 4,8\,\mathrm{m}$ und der Höhe $h = 6\,\mathrm{m}$.

(a) Berechne den umbauten Raum

(b) Wie teuer ist die Belegung mit Dachplatten, wenn für $1\,\mathrm{m}^2$ Dachbelegung 285 € berechnet werden?

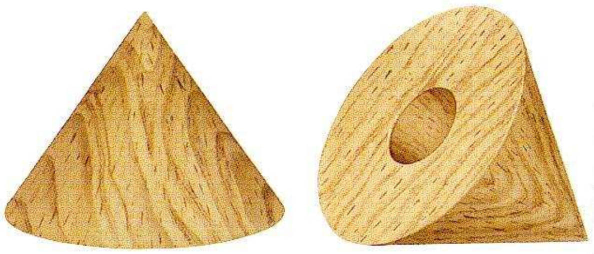


25. **Holzkegel**

Ein Holzkegel (Buche: $0,7\frac{g}{cm^3}$) hat ein Gewicht von 665 g und eine Höhe von 7,5 cm.

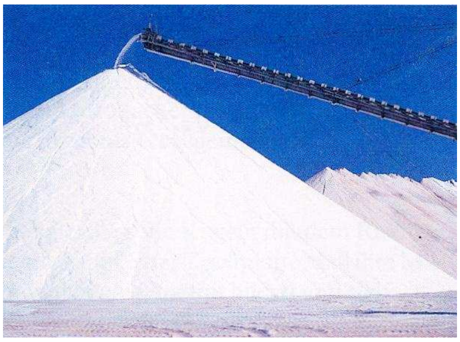
(a) Berechne den Radius des Kegels.

(b) Welchen Durchmesser muss eine 4 cm tiefe Bohrung haben, damit das Gewicht des Kegels auf 650 g verringert wird?



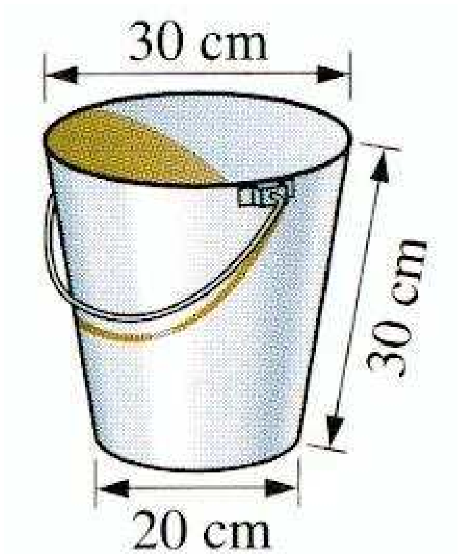
26. **Sandhaufen**

    Über ein Förderband werden $2\,\mathrm{m}^3$ Sand wie nebenstehend abgebildet aufgeschüttet. Welche Bodenfläche bedeckt der Sandhaufen bei einer Höhe von $0,8\,\mathrm{m}$?



27. **Blech-Eimer**

    Eine Firma stellt Eimer aus Zinkblech her. Wie viel Quadratmeter Blech werden zur Herstellung von 1000 Eimern gebraucht, wenn mit 14% Verschnitt gerechnet werden muss?



28. **Messbecher**

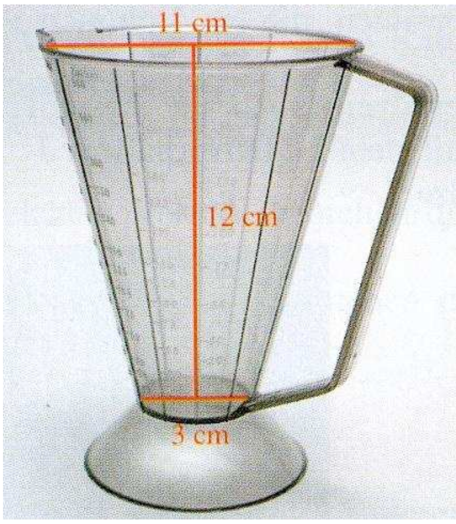
In jeder Küche ist ein Messbecher notwendig, um die Menge von Flüssigkeiten oder Zucker, Mehl und ähnliches zu bestimmen.

(a) Wie viel Kubikzentimeter Wasser fasst der nebenstehende Messbecher?

(b) In welcher Höhe ist auf dem Mantel des Messbechers die Markierung für $\frac{1}{20}$ l ($\frac{1}{10}$ l; $\frac{1}{8}$ l; $\frac{1}{4}$ l und $\frac{1}{2}$ l) anzubringen?

(c) Der Messbecher fasst 350 g Mehl. In welcher Höhe ist die Markierung für 10 g (20 g; 30 g; 40 g; 50 g; 100 g; 150 g; 200 g und 250 g) Mehl anzubringen?

Anleitung: Zeichne eine Schnittfigur des Messbechers und verlängere sie so weit, dass ein Kegel entsteht! Wende den zweiten Strahlensatz an!



29. **Cheopspyramide**

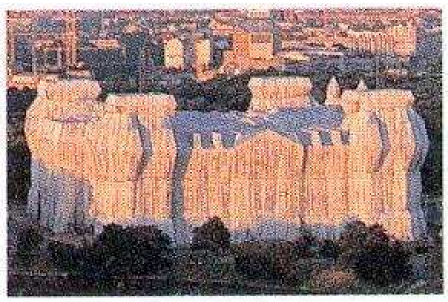
Die größte ägyptische Pyramide, die Cheopspyramide (erbaut um 2600 v.Chr.), ist eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Ihre Grundkante war 233 m lang, ihre Seitenkanten 221 m.

(a) Wie hoch war die Pyramide ursprünglich?

(b) Das verwendete Gestein wiegt 2,75 t pro m^3. Wie viel t Gestein wurden benötigt, wenn man von den Gängen und Kammern im Inneren der Pyramide absieht?

(c) Heute hat die Cheopspyramide aufgrund der Verwitterung nur noch eine Grundkantenlänge von 227 m und eine Höhe von 137 m. Wie viel Prozent des ursprünglichen Volumens sind inzwischen verwittert?

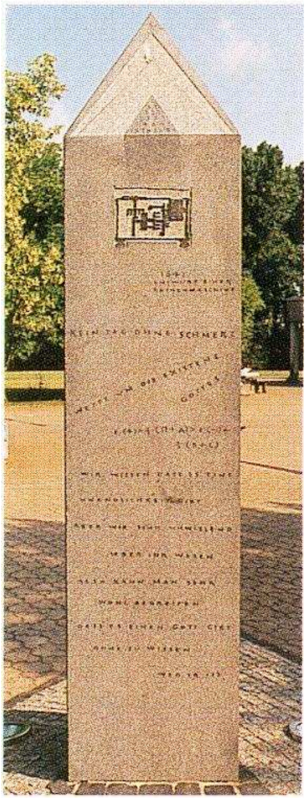
(d) Angenommen, Christo und Jeanne-Claude möchten die Cheopspyramide verhüllen. Wie viel m^2 Gewebe benötigen sie dazu mindestens?



Christo und Jeanne-Claude verpackten im Juni 1995 den Reichstag in Berlin.

30. **Denkmal**

Im Hof des Pascal-Gymnasiums steht ein Denkmal für Blaise Pascal. Es besteht aus Granit und hat eine Gesamthöhe von $2,50\,\text{m}$. Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von $30\,\text{cm}$. Die Pyramide ist $43\,\text{cm}$ hoch. $1\,\text{dm}^3$ Granit wiegt $2,9\,\text{kg}$. Wie schwer ist das Denkmal?



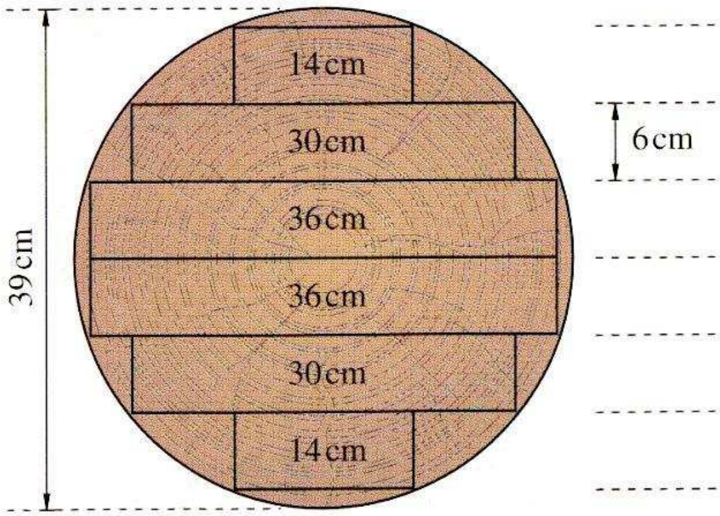
31. **Baumstamm**

Aus einem 39 cm dicken und 7 m langen Baumstamm sollen Dielen gesägt werden wie in nebenstehender Abbildung angegeben.

(a) Berechne das Volumen des Baumstamms.

(b) Wie viel m^3 Holz kann für die Dielen genutzt werden? Wie viel Prozent beträgt der Schnittverlust

(c) Wenn die Dielen eine Dicke von $1,5\,\text{cm}$ haben sollen, wie viel m^2-Wohnfläche können damit ausgelegt werden?



32. **Stehaufmännchen**

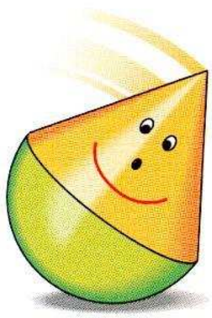
Ein 11 cm hohes Stehaufmännchen besteht aus einer Halbkugel von 4 cm Radius und einem aufgesetzten Kegel. Beide Teile sind aus dem gleichen Material.

(a) Wie groß ist der Rauminhalt?

(b) Wie viel Prozent des Rauminhaltes befinden sich in der Ruhelage unterhalb des Kugelmittelpunktes?

(c) Damit ein Stehaufmännchen funktioniert, darf der aufgesetzte Kegel höchstens so schwer sein wie die Halbkugel. Ist das hier der Fall?

(d) Wie hoch darf bei einem Stehaufmännchen der aufgesetzte Kegel höchstens sein, damit das Stehaufmännchen funktioniert?



33. **Fresh-Drinks**

Eine Getränkefirma bietet ihre verschiedenen Sorten Fresh-Drink in Standard-Tetrapacks an, deren Höhe immer doppelt so groß ist wie die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche.

(a) Wie viel Milliliter Fresh-Drink befinden sich in einem 10 cm hohen Mini-Tetrapack?

(b) Die Verpackung wiegt 10 g. Wie schwer ist das Trinkpäckchen ? (Nimm an, dass der Fresh-Drink und Wasser die gleiche Dichte haben.)

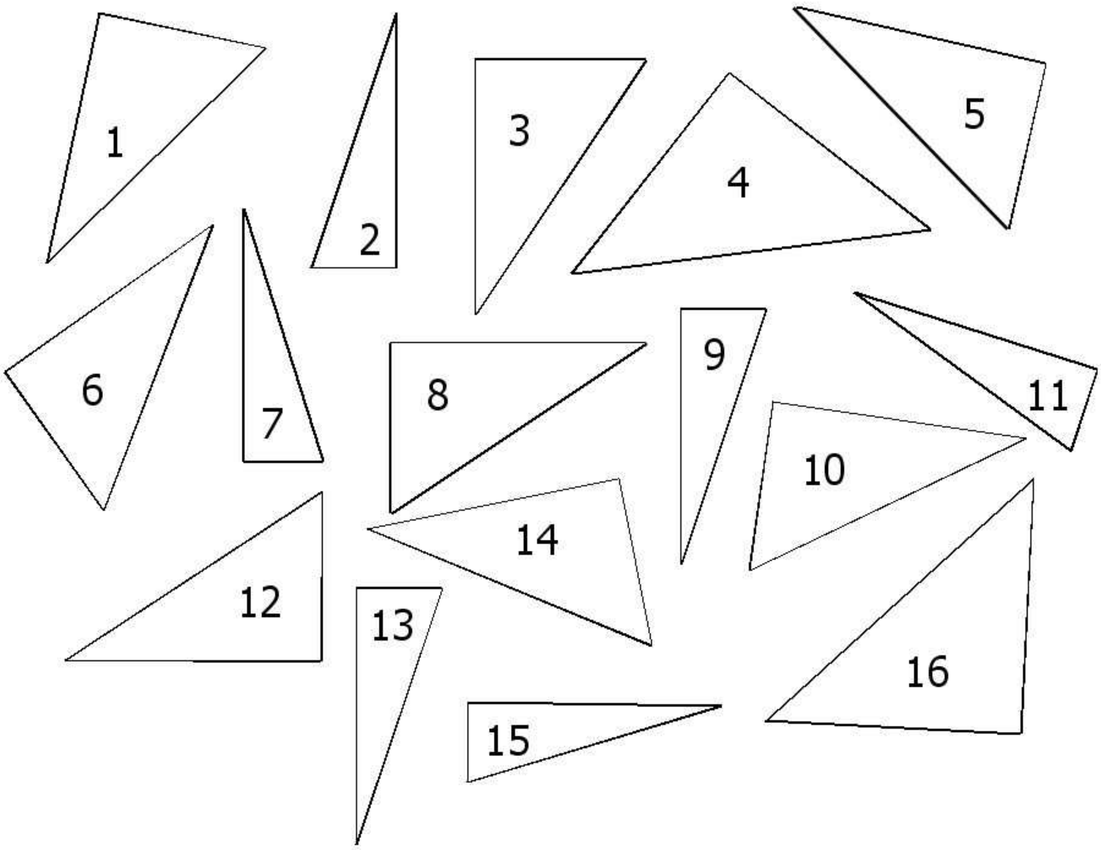
(c) Bestimme einen Term für die Oberfläche eines beliebigen Standard-Tetrapacks.

(d) Während einer Sonderaktion werden Party-Tetrapacks abgefüllt, deren Kantenlängen um jeweils 5 cm länger sind als die der Standard-Tetrapacks. Die Oberfläche der Party-Tetrapacks ist doppelt so groß wie die der Standardverpackung. Wie viel Liter Fresh-Drink ist in der Standardverpackung?

(e) Die Firma bietet Trinkpäckchen im 3-er Pack an. Dieser ist 15,9 cm lang und 5,3 cm breit. Je 5 dieser 3-er Packs sollen hintereinander in 4 mm starken Kartons verpackt werden. Wie lang und wie breit ist ein solcher Karton? Die Kartons sollen so auf eine 1 m x 1 m große Palette gepackt werden, dass sie an den Rändern nicht überstehen. Skizziere, wie man diese Kartons auf der Palette anordnen kann und gib an, wie viele Kartons höchstens in einer Lage untergebracht werden können.

34. Kongruente Dreiecke

a) Welche dieser Dreiecke sind kongruent?

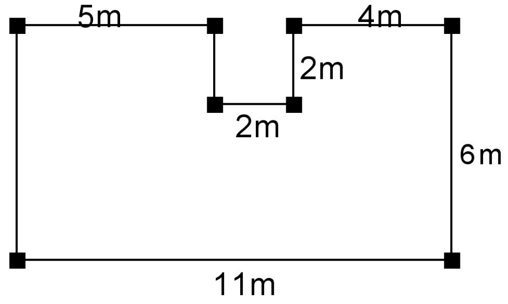


b) Setze alle Dreiecke zu einer möglichst einfachen Fläche zusammen.

35. Mit zweierlei Maß messen...

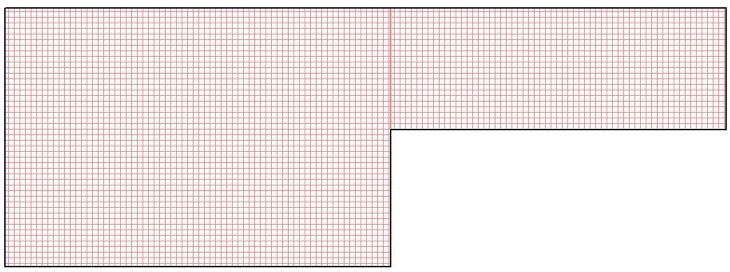
a) „Maßstab 1:250 000" — erkläre die Bedeutung dieser Angabe.
b) Welcher wirklichen Länge entsprechen 25 mm auf einer Karte?
c) Welchen wirklichen Flächeninhalt hat ein kreisförmiges Gebiet, das auf der Karte einen Radius von 1,4 cm hat?
d) Die Orte Großdorf und Kleindorf liegen 64 km auseinander. Welcher Länge entspricht das auf der Karte?

36. Top-Figur



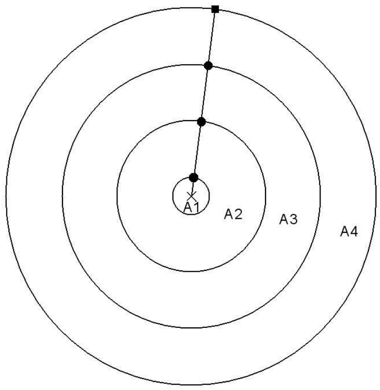
a) Berechne den Flächeninhalt der abgebildeten Figur.
b) Gib den Maßstab zu dieser Abbildung an.
c) Berechne den Umfang der Figur.
d) Stelle dir die Figur als geschlossenes Rechteck vor. Wie viel Prozent der Gesamtrechtecksfläche macht das entstandene Quadrat aus?

37. Liegender Teppich



Abgebildet ist der Fußboden zweier ineinander übergehender Zimmer im Maßstab 1:100. Dieser Fußboden soll mit Teppichboden ausgelegt werden. Um die Teppichkanten soll eine Leiste angebracht werden. Der Teppichboden kostet 26 € pro m^2; ein Meter Fußleiste kostet 5,80 €. Wie teuer wird die Renovierung?

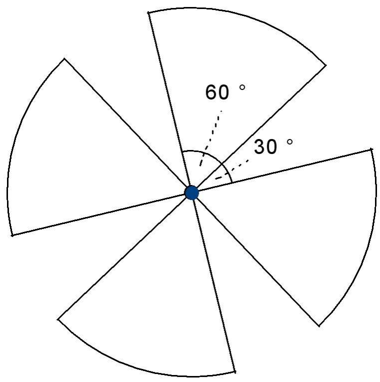
38. Kreisringe



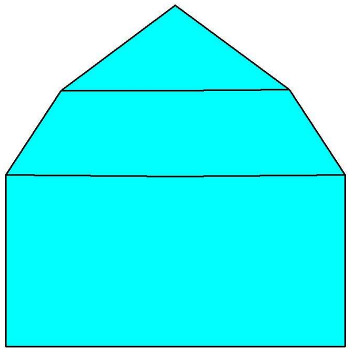
a) Berechne die Größe der Kreisringflächen A_2 bis A_4. Beachte die Größe des jeweiligen Radius. Der Radius r_1 des kleinen Innenkreises beträgt 0,75 cm; die Breite jedes Kreisringes beträgt 2,5 cm.

b) Wie viel Prozent der gesamten Kreisfläche entfällt auf die Kreisringfläche A_4?

39. Urlaub in Holland
Berechne den Flächeninhalt der Mühlenflügel (d = 8 cm).

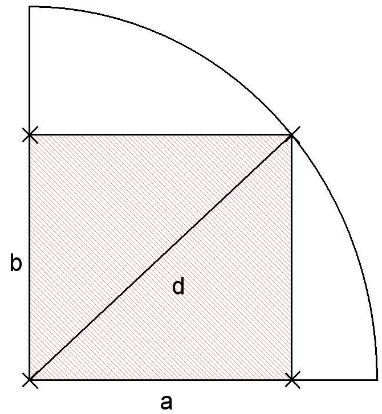


40. Bunte Bude
Die unten abgebildete Giebelfläche eines Gebäudes (Maßstab 1:150) soll mit Farbe gestrichen werden.



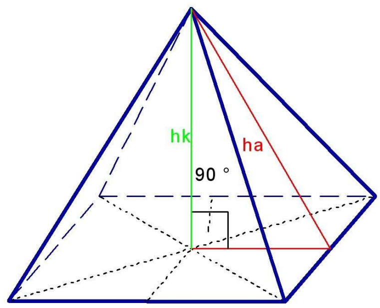
a) Berechne die Fläche. Entnimm dazu die Maße der Zeichnung, beachte den Maßstab.
b) Ein Eimer Farbe enthält 18 kg und kostet 65,00 €. Pro m^2 werden 1,2 kg benötigt. Wie teuer wird der Anstrich?

41. Flächen berechnen



Berechne den Flächeninhalt der weißen Fläche (d = 8 cm, a = 6,5 cm).

42. Wer im Glashaus sitzt...
Von einer Pyramide aus Glas (Dichte für Glas $\varrho = 2{,}7\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) mit quadratischer Grundfläche sind gegeben:



a) $a = 15$ cm, $h_{\mathrm{a}} = 18$ cm

b) $h_{\mathrm{k}} = 7{,}8$ cm, $h_{\mathrm{a}} = 9{,}4$ cm

c) $V = 260\ \ell$, $h_{\mathrm{k}} = 7{,}2$ dm

Berechne die jeweils fehlenden Größen (a, h_{a}, h_{k}, s, V, M, O und die Masse m)!

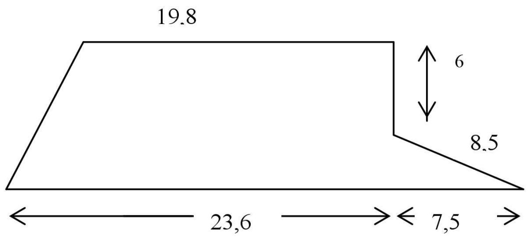
43. Kupferbolzen
Ein Zylinder aus Kupfer (Dichte für Kupfer $\varrho = 8{,}9\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$) hat eine Masse von 1500 kg und eine Körperhöhe von 45 cm.

    a) Fertige eine Planfigur an.

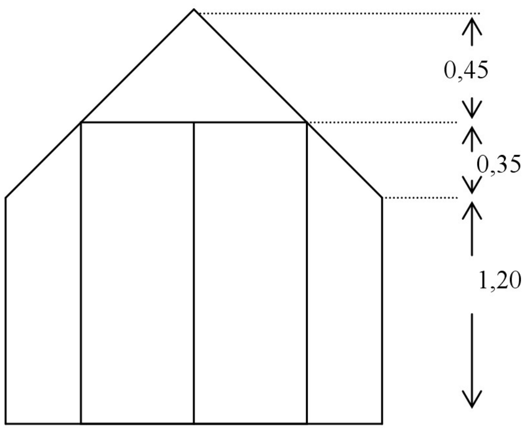
    b) Berechne das Volumen und die Oberfläche des Zylinders.

44. Die Würfel sind gefallen...
Wie oft passt ein Würfel mit der Kantenlänge 2 cm in einen Würfel mit den Kantenlängen 6 cm, 8 cm, 4 cm?

45. Flächeninhalt und Umfang
Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der abgebildeten Figur. Die Maße sind in cm angegeben! Hinweis: Zeichne Hilfslinien ein.



46. Hexenhäuschen
    Benenne die Formen der einzelnen Scheiben eines Giebelfensters und berechne ihren Flächeninhalt und den Flächeninhalt der Gesamtfläche der Scheiben. Maße in m.



2 Grundformen und -konstruktionen

1. **Die gehfaulen Ameisen**

   Die gemütliche Anatevka and die dicke Berta stehen 50 mm voneinander entfernt. Sie wollen sich zwar treffen, aber keine will weiter als 28 mm laufen.

   (a) Kennzeichne das Gebiet ihrer möglichen Treffpunkte!

   (b) Wie weit müssten sie voneinander entfernt sein, damit es nur einen einzigen Treffpunkt gibt?

2. **Gehgerechtigkeit**

   Anatevka und Berta sind für Gehgerechtigkeit und achten deshalb genau darauf, dass keine weiter als die andere krabbeln muss, egal wie weit, Hauptsache beide gleich weit. Zeichne ihre möglichen Treffpunkte ein!

3. **Training der gehfaulen Ameisen**

   Anatevka und Berta sind 60 mm voneinander entfernt und trainieren „Weitlauf“. Anatevka will 40 mm laufen, Berta traut sich 50 mm zu.
   Wo können sie sich treffen, wenn beide ihre Höchstleistung erreichen?

4. **Neues von den gehfaulen Ameisen**

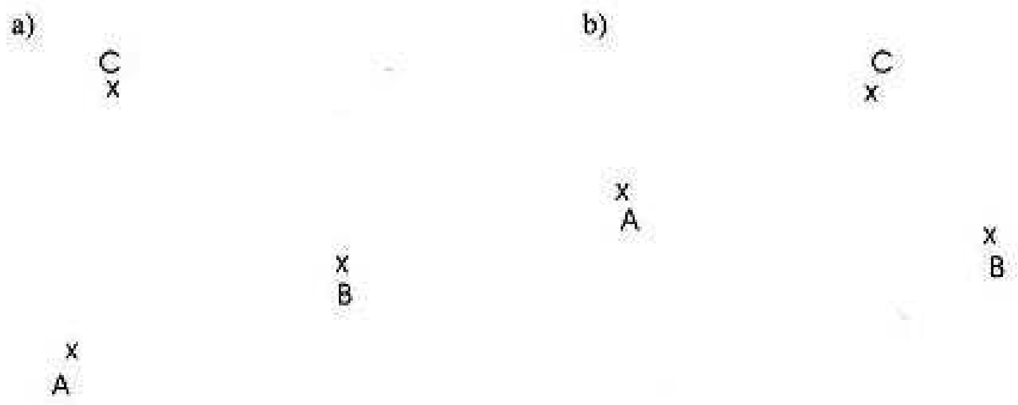
   Die gemütliche Anatevka and die dicke Berta stehen 60 mm voneinander entfernt.

   (a) Beide wollen 40 mm laufen. Wo können sie sich treffen?

(b) Beide wollen gleich weit, egal wie weit, laufen. Wo können sie sich treffen?

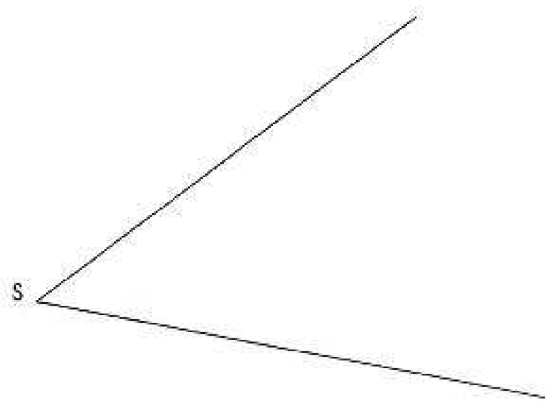
5. **Der Gehgerechtigkeitsverein**

   Clothilde wird Mitglied im Gehgerechtigkeitsverein. Kannst du einen Treffpunkt konstruieren, zu den alle drei gleich weit krabbeln müssen?



6. **Das Neueste von den gehfaulen Ameisen**

   Anatevka und Berta stehen am Punkt S und machen ein Schwätzchen. Plötzlich setzt ein heftiger Platzregen ein, und zwei Rinnsale treiben die beiden Freundinnen auseinander.

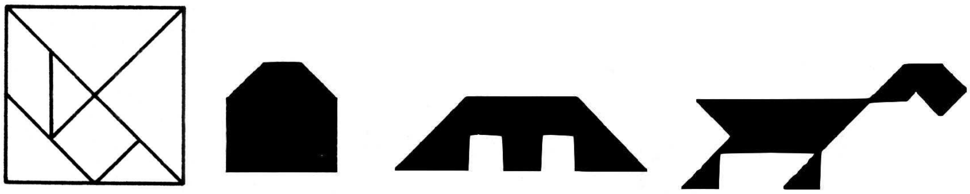


   (a) Anatevka und Berta werden zur gleichen Zeit weggespült und treiben gleich schnell. Wo könnten sie jetzt sein?

   (b) Sie wollen sich nun treffen, aber beide wollen gleich weit laufen. Konstruiere die möglichen Treffpunkte!

7. **Tangram**

In zahlreichen Schulbüchern finden sich Aufgaben der folgenden Art:



Stelle die Teile des Tangram-Spiels nach der Vorlage aus Karton her.

(a) Aus welchen Formen besteht das Spiel?

(b) Lege die abgebildeten Tangramfiguren nach. Erfinde selbst weitere Figuren.

Anregungen zum Öffnen der Aufgabe:

(a) vorgegebene oder selbst erfundene Figuren nachlegen

(b) möglichst viele verschiedene konvexe Polygone legen (Wittmann)

(c) Figuren aus anderen Grundformen zusammensetzen, geometrische Eigenschaften betrachten

8. **Dreiecke**

Konstruiere ein Dreieck ABC aus den gegebenen Größen. Bestimme durch Messen die übrigen Größen. Kontrolliere die Winkelgrößen mit Hilfe des Winkelsummensatzes.

(a) $a = 5\,\text{cm},\ b = 4cm\,\text{cm},\ \gamma = 67°$

(b) $c = 9\,\text{cm},\ a = 6\,\text{cm},\ \gamma = 53°$

(c) $a = 4{,}5\,\text{cm},\ \beta = 57°,\ \gamma = 43°$

(d) $a = 7\,\text{cm},\ b = 5\,\text{cm},\ c = 4\,\text{cm}$

Aus welchen der vier Kongruenzsätze folgt, dass alle Lösungsdreiecke mit den gegebenen Größen kongruent zueinander sind? Miss auch die Höhen im Dreieck.

Anregungen zum Öffnen der Aufgabe:

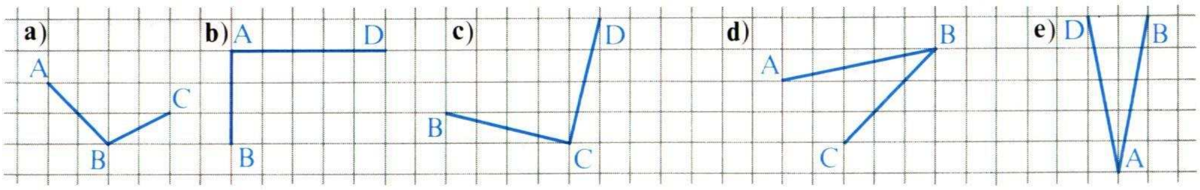
(a) Angaben weglassen (unterbestimmte Aufgabe)

(b) ein vorgegebenes Dreieck auf verschiedene Arten konstruieren (überbestimmte Aufgabe)

(c) In welchen Fällen ist es nicht möglich, ein Dreieck zu konstruieren?

9. **Vierecke**

Ergänze zu einem Parallelogramm $ABCD$. Wann entsteht eine Raute?



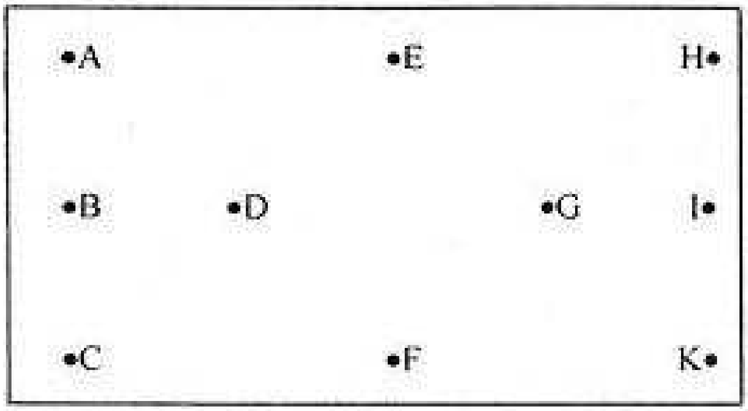
Anregung zur Öffnung der Aufgabe:

Hier sind einige Teilfiguren. Ergänze sie jeweils zu einem Viereck. Welche Möglichkeiten gibt es?

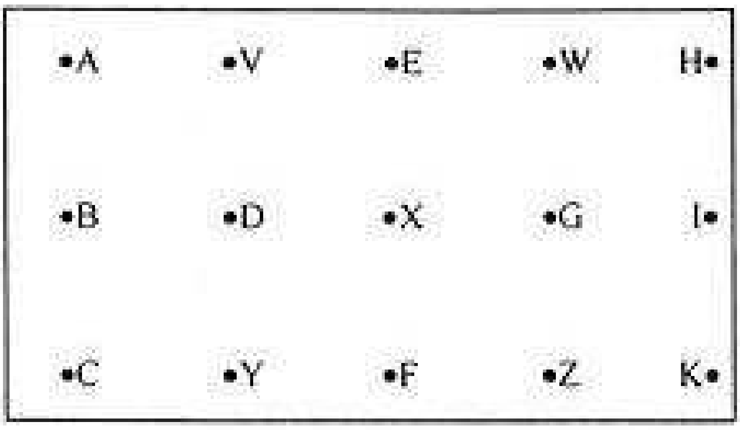
10. **Geobrett**

Man schneidet aus einem Stück dicken Kartons ein Rechteck der Größe 16 cm × 9 cm aus. Dann sticht man mit Hilfe eines Nagels 10 Löcher und kennzeichnet sie wie folgt:

Version1:



Version2:



Von der Rückseite werden nun „Briefklammern“ durch diese Löcher gesteckt, in dem der eine „Klammerarm“ umgeknickt wird.

Mit Hilfe unterschiedlich langen Gummis kann man jetzt Vierecke und Dreiecke um den anderen Klammerarm spannen.

11. **Figuren legen**

    Welche Drei- und Vierecke lassen sich mit zwei gegebenen rechtwinkligen Dreiecken legen?
    Schneide die vorgegebenen Dreiecke aus und lege sie so aneinander, dass eine neue Figur entsteht. Benenne jeweils Ihre Eigenschaften.

    Mögliche Verallgemeinerung: Welche Drei- und Vierecke lassen sich aus zwei gegebenen Dreiecken legen?

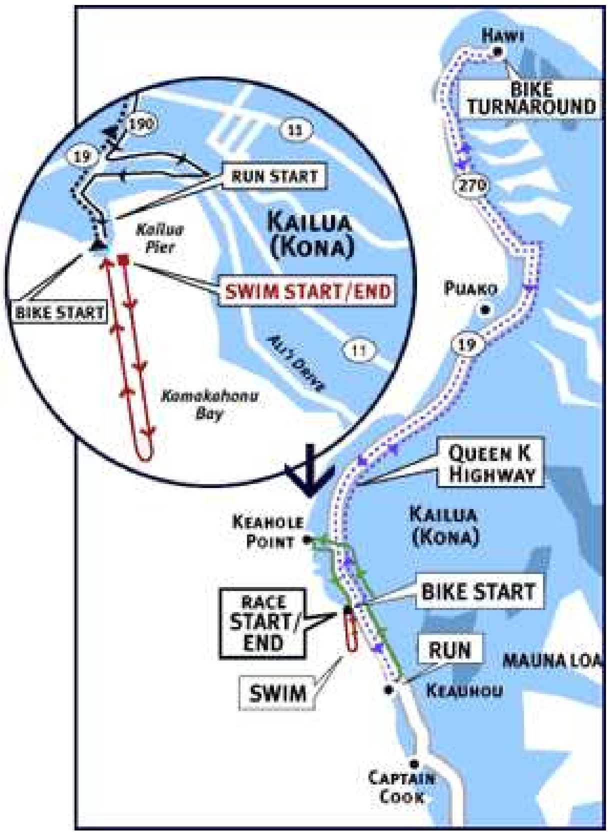
12. 15 m^2

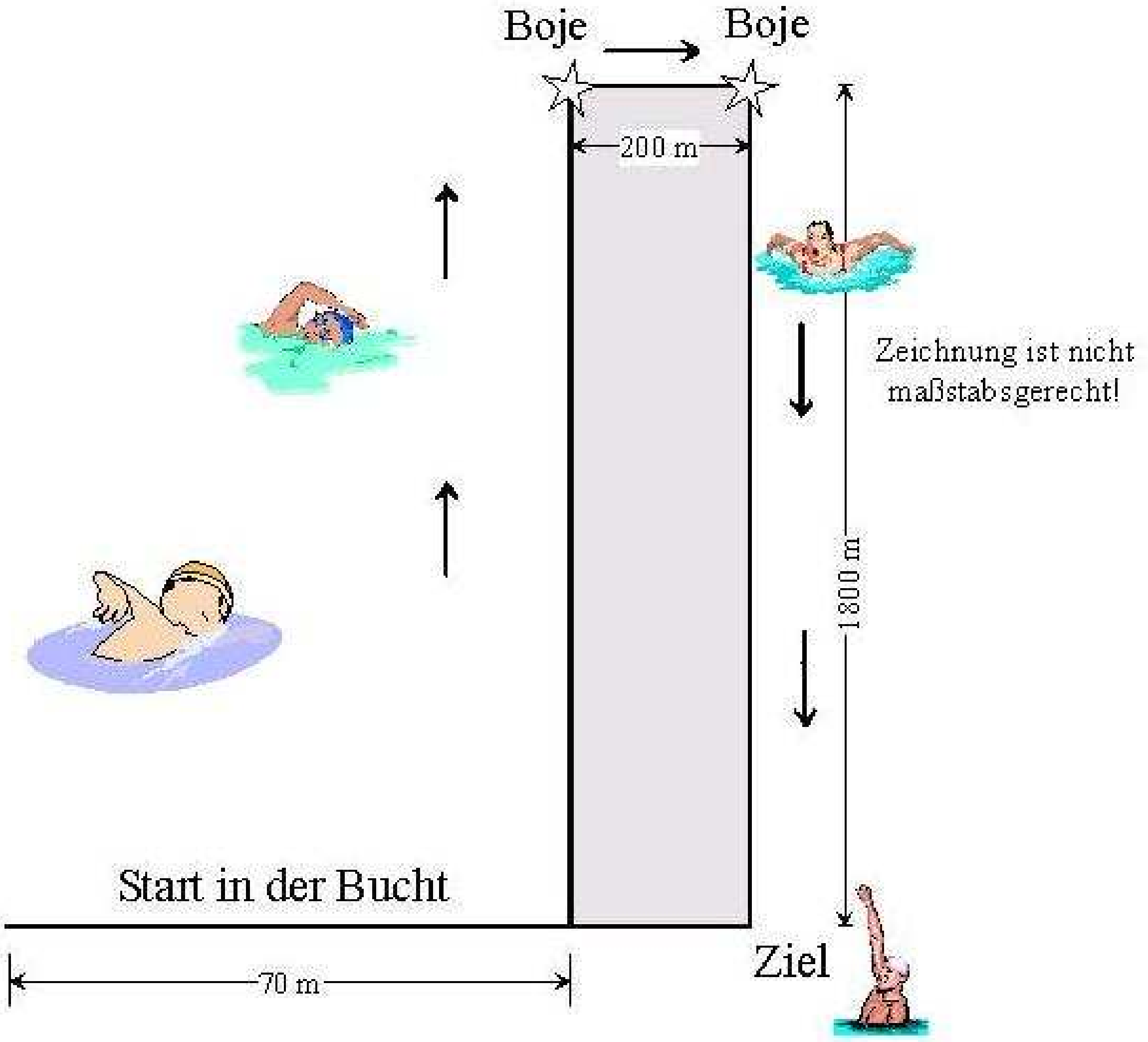
    a) Zeichne ein Rechteck mit 15 m^2 Flächeninhalt.
    b) Zeichne ein Parallelogramm mit 15 m^2 Flächeninhalt.
    *c) Schaffst du es auch, eine Raute mit 15 m^2 Flächeninhalt zu zeichnen?

3 Satzgruppe des Pythagoras

1. **Pythagoras auf Hawaii**

   Mitte Oktober findet alljährlich die Weltmeisterschaft im Triathlon („IronMan“) auf Big Island (Hawaii) statt. Dabei müssen folgende Distanzen zurückgelegt werden:
   3, 8 km Schwimmen im Meer,
   180, 0 km Radfahren und
   42, 2 km Laufen (Marathon).
   Die Schwimmstrecke ist ein Rechteckkurs.
   Alle 1400 Teilnehmer starten gleichzeitig von der 70 m breiten Bucht. Nachdem sie die beiden Wendebojen passiert haben, gehen sie im Ziel wieder an Land.





(a) Wie viele Teilnehmer stehen auf einem Meter, wenn sich beim Start alle gleichmäßig auf die Bucht verteilen?

(b) Wie lang ist die Strecke auf der Ideallinie? Zeichne alternative Strecken und berechne deren Länge.

(c) Welche Strecke legt ein Schwimmer zusätzlich zurück, der (linksstartend) zunächst 1500 m geradeaus schwimmt und dann Kurs auf die erste Wendeboje nimmt?

(d) Wie viel Zeit verliert dieser Schwimmer wenn er 100 m durchschnittlich in 1 : 30 min schwimmt?

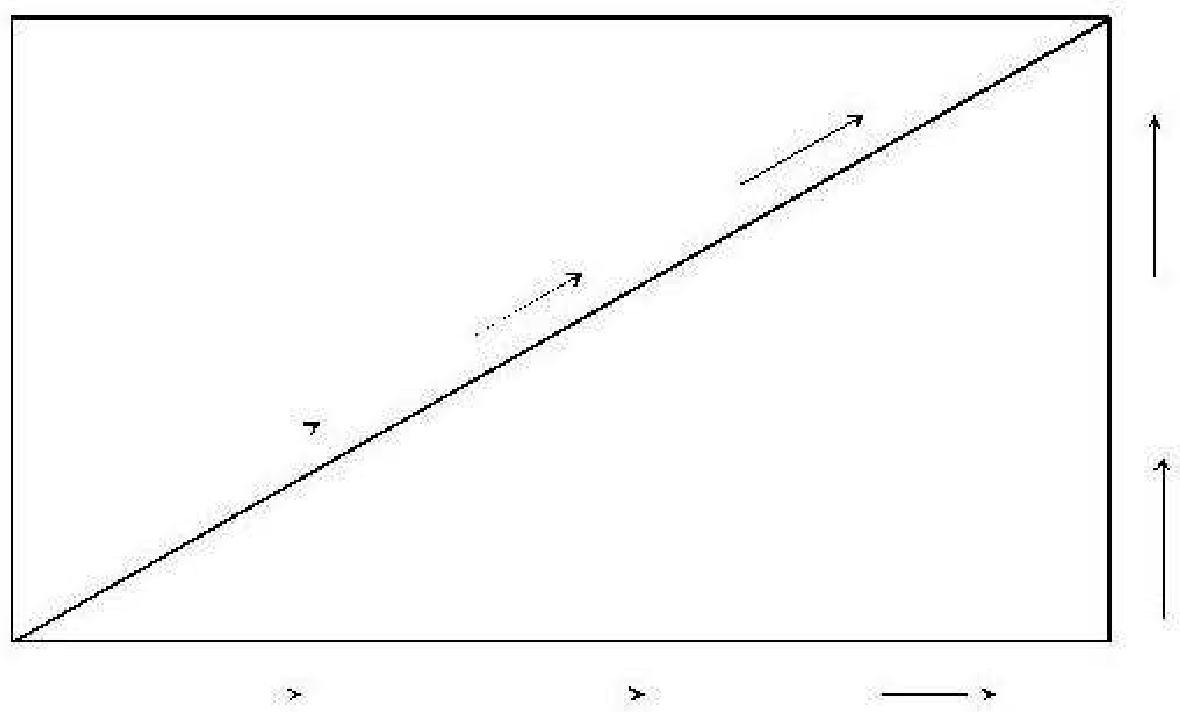
(e) Wie viel Prozent macht dieser Zeitverlust gegenüber seiner theoretisch erreichbaren Zeit (Schwimmen auf der Ideallinie) aus?

(f) Wie groß ist der Zeitverlust, wenn ein Teilnehmer vom linken Rand der Bucht direkt die erste Boje ansteuert?

(g) Wie wirkt sich das Gedränge auf einen Schwimmer aus? Oder: Finde mögliche mathematische Beschreibungen des Vorteils nicht im Gedränge schwimmen zu müssen (z.B. höhere konstante Geschwindigkeit oder prozentualer Vorteil) und berechne jeweils die Gesamtzeiten.

(h) Wie viel schneller müsste der Schwimmer außerhalb des Gedränges mindestens sein, damit er den Nachteil der längeren Strecke ausgleichen kann?

2. **Pythagoras auf dem Sportplatz**



Ein rechteckiger Sportplatz ist 100 m lang und 50 m breit. Ulli startet direkt zur gegenüberliegenden Ecke. Frank läuft an der Außenlinie entlang.

(a) Wie viel Prozent des Weges spart Ulli?

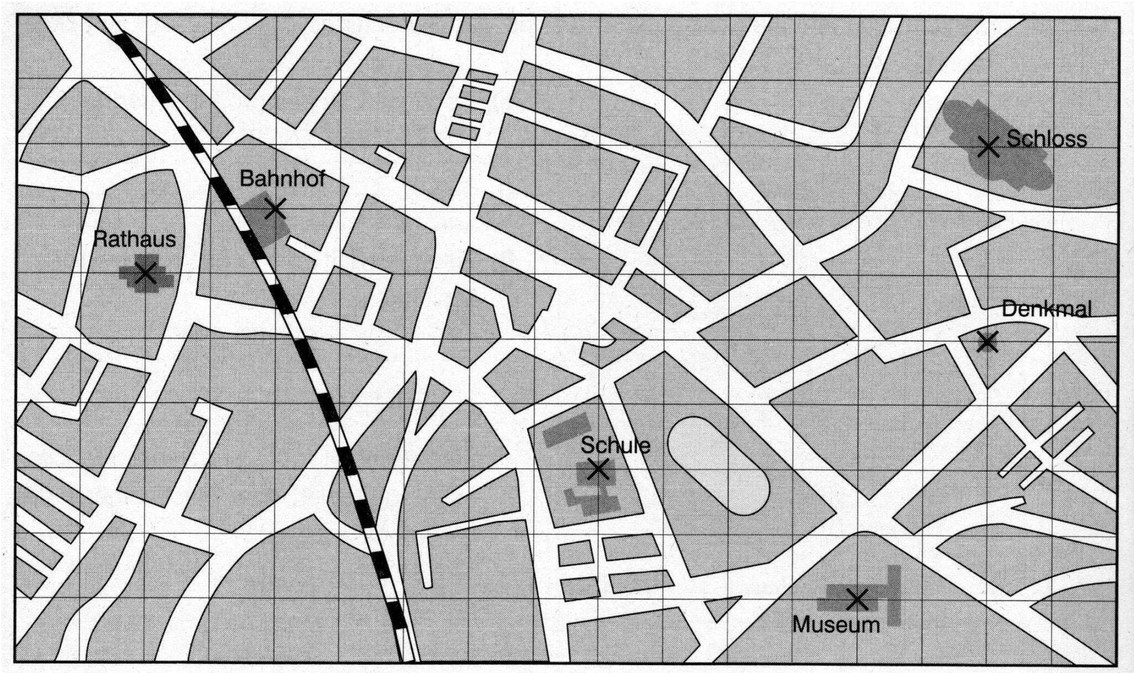
(b) Wie viel m ist Frank noch vom Ziel entfernt, wenn Ulli ankommt? (Was muss man hierbei voraussetzen? Gleiche Geschwindigkeit)

(c) Mit welcher Geschwindigkeit muss Frank laufen, um gleichzeitig mit Ulli anzukommen?

(d) Wann treffen sie sich wieder, wenn sie auf ihren Wegen dauernd hin- und herlaufen?

(e) Wo begegnen sie sich, wenn Ulli Frank entgegenläuft?

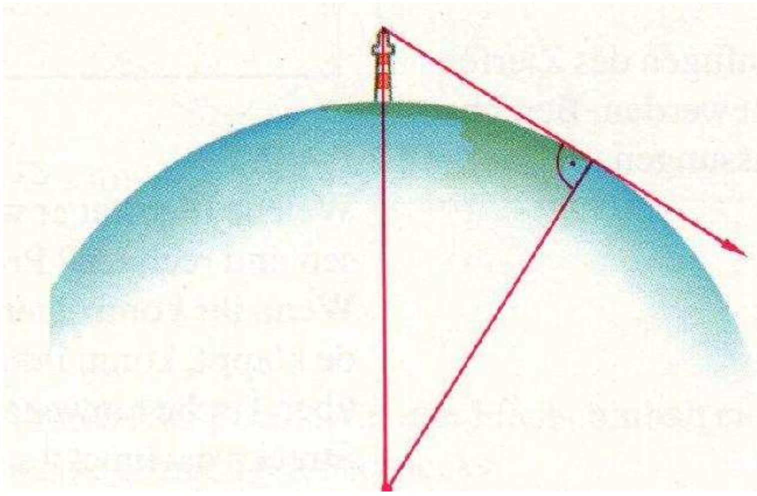
3. **Entfernungen auf dem Stadtplan**



Ein Kästchen auf der Karte entsprechen 100 m in der Realität.
Berechne die Luftlinienentfernungen.

4. **Wie weit kann man sehen?**

Wie weit kann man von einem 45 m hohen Leuchtturm sehen? Stelle dir Erde als Kugel vor und verwende bei der Berechnung für den Erdradius 6370 km .



Quelle: Schnittpunkte 9 (1995), S. 130

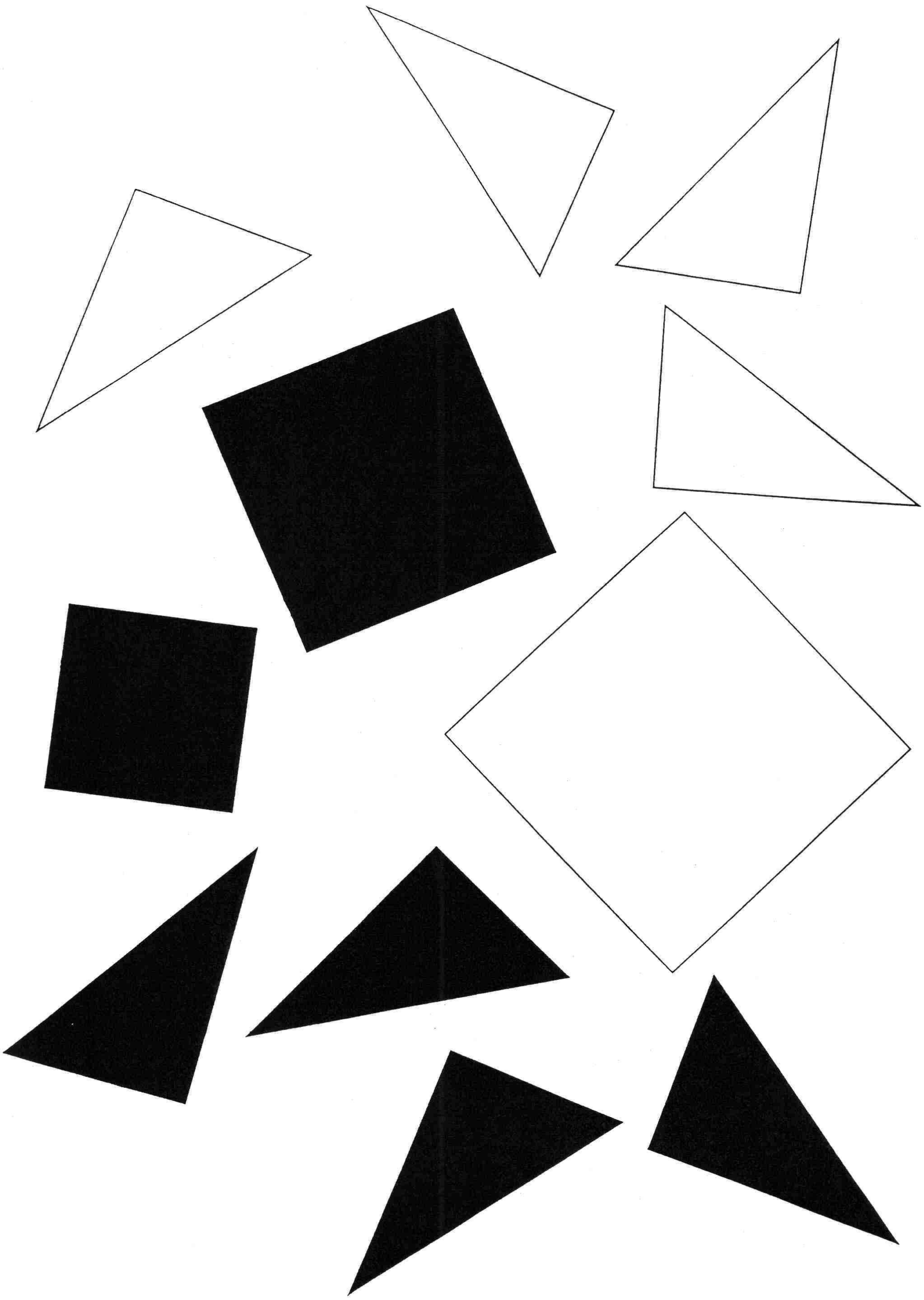
Variation: Auf Vorgabe der Zeichnung verzichten.

5. **Der Leuchtturm von Alexandria (vgl. Aufg. 4)**

   In dem nachfolgenden Text sind falsche Werte für die Sichtweiten von diversen Türmen angegeben worden. Korrigiere sie!

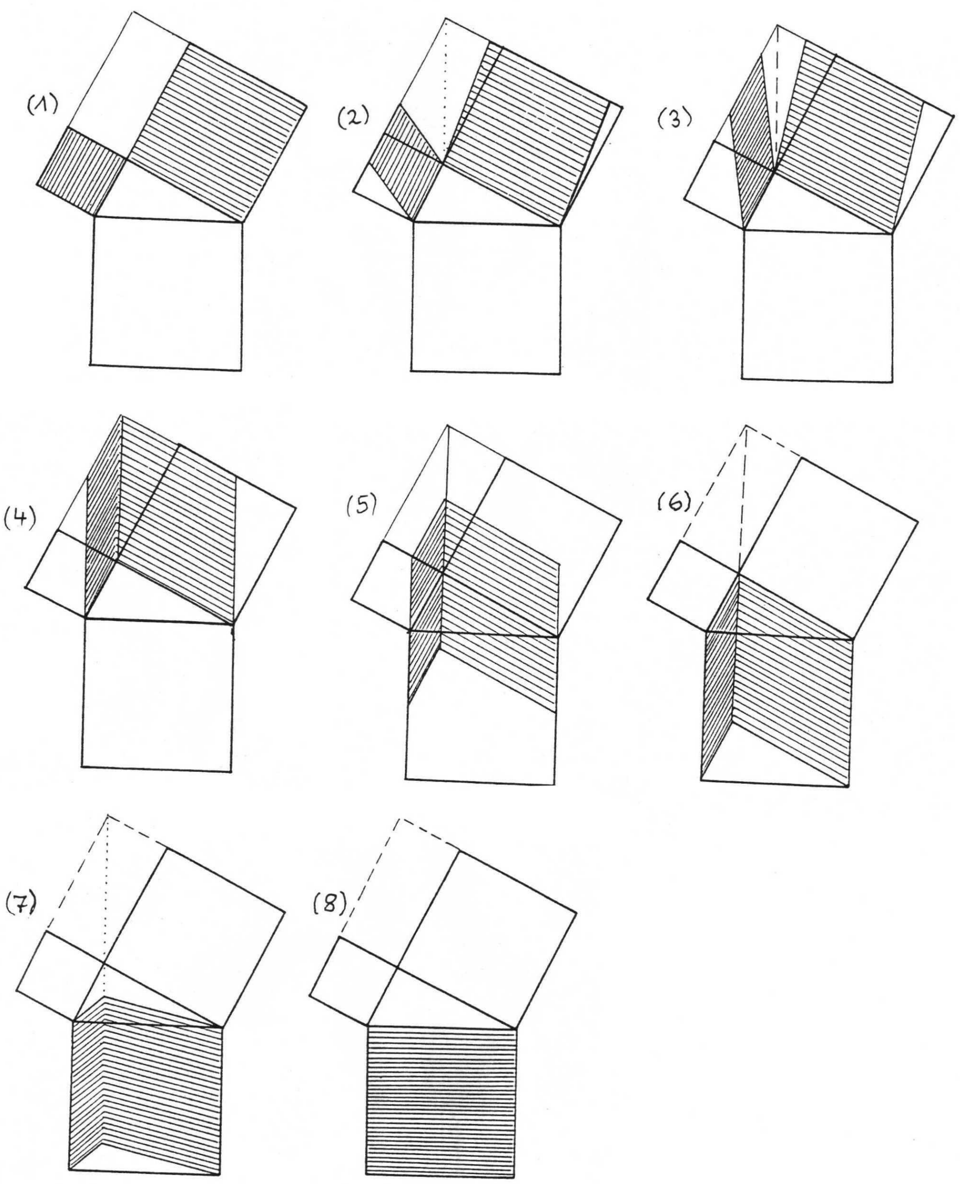
Im Altertum gab es sieben Bauwerke, die man als „Weltwunder“ bezeichnete. Eines dieser sieben Weltwunder war der Leuchtturm von Alexandria. Alexandria ist eine Hafenstadt in Ägypten, sie wurde 331 *v. Chr. von Alexander dem Großen gegründet und war eine der bedeutendsten Großstädte der alten Welt. Damals gehörte Ägypten zum griechischen Weltreich, das sich über Persien bis Indien erstreckte. Der berühmte Leuchtturm stand auf einer kleinen Felsinsel vor der Hafeneinfahrt, die Insel nannte sich Pharos. Mit der Zeit hat sich der Name der Insel so mit dem Turm verknüpft, dass man von dem Bauwerk selbst als dem „Pharos von Alexandria“ sprach. Das französische Wort „Phare“ für Leuchtturm kommt daher. Gebaut wurde der Turm ab* 290 *v. Chr.,* 279 *wurde er dann feierlich eingeweiht.*
Ursprünglich war das Bauwerk allerdings gar nicht als Leuchtturm gedacht, sondern als Wahrzeichen der neuen Stadt, als Künder der Weltmacht des griechisch-morgenländischen Reiches. Seine enorme Höhe deutet das an, er war mehr als 120 m *hoch.*
Schon im Altertum war bekannt, dass die ideale Höhe eines Leuchtturms bei etwa 40 m *liegt. Sein Leuchtfeuer hat nämlich durch die Erdkrümmung nur eine begrenzte Reichweite. Ein Feuer auf der Spitze eines* 10 m *hohen Turms leuchtet* 20 km *weit. Baut man ihn doppelt so hoch, leuchtet das Feuer nicht etwa doppelt so weit: Die Sichtweite eines in* 20 m *Höhe angebrachten Lichts beträgt nur* 25 km*. Und ein Turm von* 110 m *Höhe strahlt nicht einmal* 1 km *weiter als einer von* 100 m*. Der Bau eines allzu hohen Leuchtturms bedeutet folglich nur Verschwendung von Zeit und Material. Da der riesige Turm aber nun schon mal stand, ging man um das Jahr* 150 *(also rund* 400 *Jahre nach seiner Vollendung) dazu über, auf der Turmspitze ein nächtliches Feuer zu schüren und das Bauwerk fortan auch als Leuchtturm zu benutzen.*

6. **Ein Pythagoras Puzzle**



Quelle: Steudel, H.: Der Satz des Pythagoras - ein Legespiel. In: mathematik lehren (1994)

7. **Und er sagte sein einziges Wort ...**

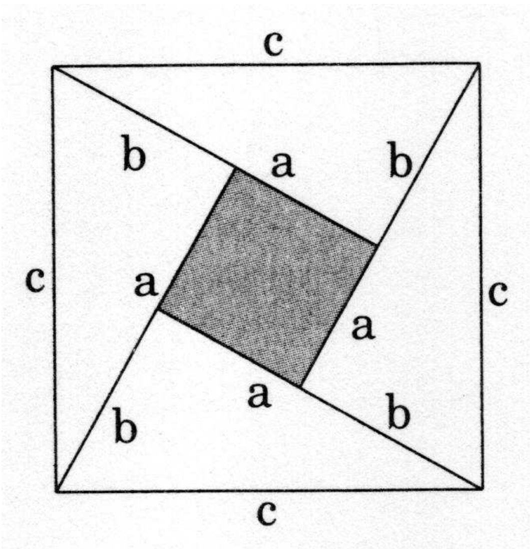


Quelle: Fraedrich, A.M.: Die Satzgruppe des Pythagoras. BI (1995)

8. **Wie lang ist die Diagonale im Rechteck**

   Zunächst wird an die vorangegangene Unterrichtseinheit angeknüpft und die Länge der Diagonalen im Quadrat bestimmt. (Teilen von zwei identischen Quadraten durch Diagonalschnitt). Wichtig ist, dass die Schüler begründen, warum beim Zusammenlegen alles passt.
   Nun kann die Frage gestellt werden, ob sich zur Bestimmung der Diagonalenlänge im

Rechteck nicht analog zwei kongruente Rechtecke zerlegen lassen. Die Schülerinnen und Schüler erhalten dazu Papier und Schere, damit sie experimentieren können.
Die naheliegende Figur (die Raute) löst das Problem nicht, aber weiteres Probieren dürfte mit ziemlicher Sicherheit in jeder Klasse auf die dem indischen Mathematiker Bhaskara (12 Jh.) zugeschriebene Konfiguration führen: Die vier rechtwinkligen Teildreiecke bilden ein Quadrat mit einem quadratischen Loch. Das Quadrat hat die Seitenlänge c, das Loch die Seitenlänge $(a - b)$.
Damit lässt sich die Gleichung $c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab + (a-b)^2$ aufstellen und unter Benutzung der zweiten binomischen Formel in den Satz des Pythagoras umformen.
Die Beweislast liegt im Nachweis, dass wirklich Quadrate entstehen. Hierzu muss man wie im Spezialfall die Kongruenz der Teildreiecke, den rechten Winkel in jedem Teildreieck und die Tatsache heranziehen, dass die restlichen Winkel jedes Teildreiecks zusammen einen rechten Winkel bilden. Kritisch ist die Stelle, wo drei rechtwinklige Dreiecke bereits zusammengesetzt sind und bewiesen werden muss, dass das vierte Dreieck wirklich eingepasst werden kann.



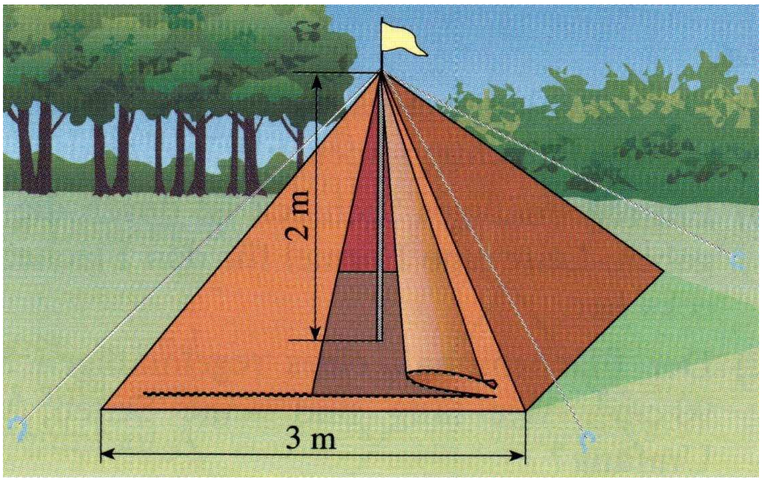
9. **Amasis' Problem**

Es begab sich im alten Ägypten, dass der reiche Kaufmann Potiphar nach reiflicher Überlegung der Vermählung seiner Tochter zugestimmt hatte. Nun wollte er dieses große und wunderbare Ereignis in der ganzen Stadt bekannt geben. Sein Schreiber sollte die freudige Neuigkeit in schönsten Hieroglyphen auf feines Papyrus schreiben. Zu diesem Zwecke benötigte Potiphar Papyrusrollen der besten Qualität.
So ging er zu dem Papyrushändler Amasis und erklärte ihm sein Anliegen. Amasis zeigte ihm die feinsten Papyrusblätter, die alle von quadratischer Form waren. Sie gefielen Potiphar durchaus, jedoch war ihm seine Tochter sehr kostbar, und deshalb wünschte er sich für die Bekanntgabe ihrer Vermählung noch größere Papyrusblätter.

So sprach er: „Edler Amasis, du wirst doch gerühmt für deine geometrischen Fähigkeiten. Könntest du nicht Papyrusblätter konstruieren, deren Fläche jeweils genau doppelt so groß ist wie die des hier vorliegenden Papyrus, und die ebenso quadratisch sind?“ „Aber selbstverständlich, guter Potiphar“, antwortete Amasis sichtlich geschmeichelt. „Ich werde gerne quadratische Papyrusblätter nach deinen Wünschen konstruieren. Das ist für mich eine der leichteren Übungen. Gib mir einen Tag Zeit. Morgen um die gleiche Stunde kannst du die Papyrusblätter abholen.“ Worauf Potiphar sich gebührend bedankte und ging.
Zurück blieb der arme Amasis, der in jener Nacht viele Stunden schwitzend über Papyrusrollen gelehnt zubrachte. Sein leichtfertig gegebenes Versprechen war doch nicht so einfach einzuhalten, wie er zunächst geglaubt hatte. Ihm wollte keine Lösung zur Konstruktion von Papyrusblättern in der von Potiphar gewünschten Größe einfallen. Vielleicht kannst du ihm helfen.

10. **Pyramiden**

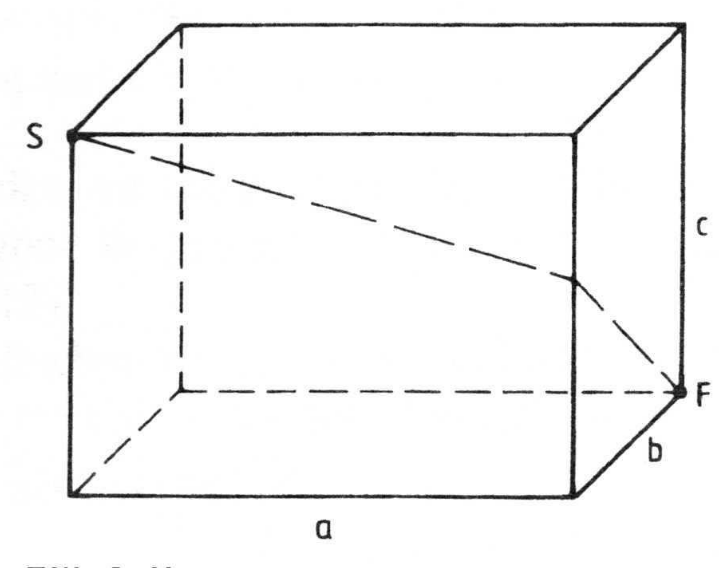
Wie viel Zeltstoff benötigt man für die Herstellung des Zeltes?



Quelle: Mathematik heute 9 (1996)

11. **Kürzeste Wege**

Gegeben sei ein quaderförmiger Körper mit $a = 20\,\text{cm}, b = 10\,\text{cm}$ und $c = 15\,\text{cm}$. Auf dem Eckpunkt S sitzt eine Spinne, auf F eine Fliege. Die Spinne will auf kürzestem Weg - auf den Begrenzungsflächen des Körpers laufend - zur Fliege gelangen.

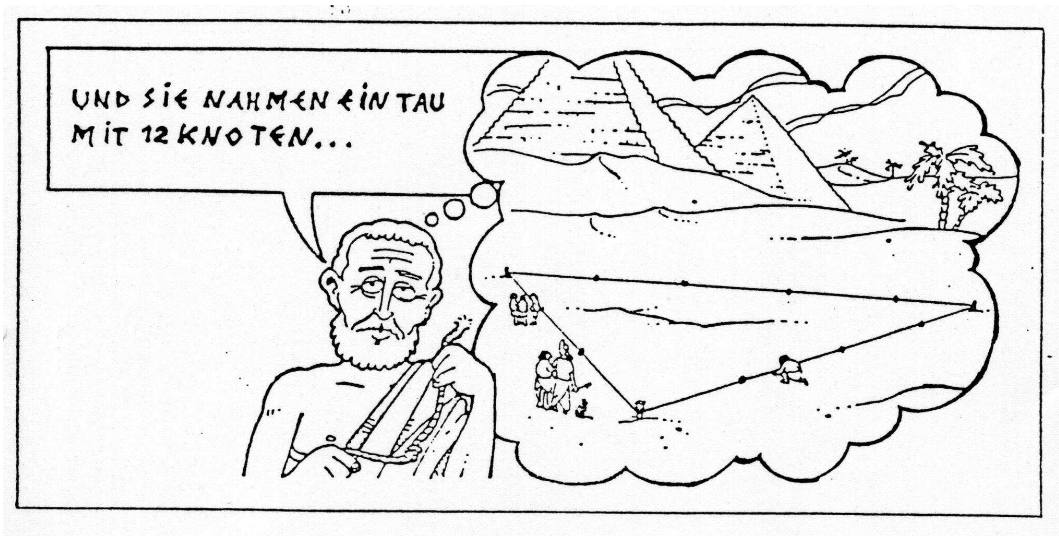


Quelle: Walsch, W.: Aufgabenfamilien 9, in: MiS 33 (1995)

12. **Die ägyptischen Seilspanner**

    Lies die folgenden Zeitungsartikel.
    Erkläre,worum es geht. Ein Artikel enthält Fehler.

    Die ägyptischen Seilspanner (um 2000 v. Chr.) hatten eine sehr genaue Methode um rechte Winkel zu konstruieren. Sie benutzten dazu ein Seil mit Knoten in gleichen Abständen.

    (a) Warum soll es wichtig sein, genau rechte Winkel konstruieren zu können? Hast du eine Idee, wie das heute die Maurer machen?

(b) Nimm ein langes Stück Bindfaden und markiere darauf 12 gleich große Abschnitte. Finde möglichst viele Dreiecke, so dass jeder der drei Eckpunkte genau bei einem Knoten liegt. Welches haben wohl die ägyptischen Seilspanner benutzt und warum gerade dieses?

Quelle: MUED

Variationen:

(a) Selbst Schnur hestellen, Schüler Tripel finden lassen.

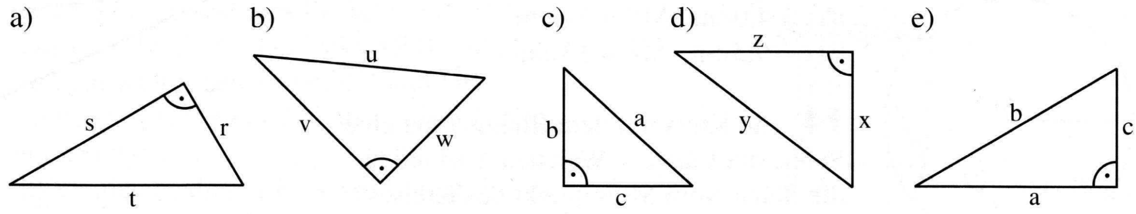
(b) Alle 15 Dreiecke finden lassen, die man mit weniger als 12 Knoten legen kann.

(c) Streichhölzer statt Schnur verwenden.

13. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

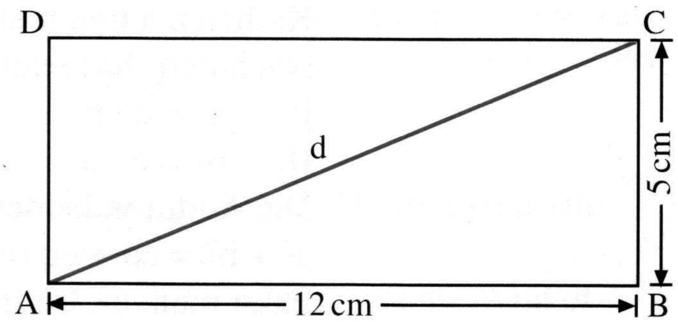
Quellen: Welt der Mathematik 9 (1990), Mathematik heute 9 (1996), Lambacher Schweizer 9 (1997), Schnittpunkt 9 (1995), MUED

Gib für die rechtwinkligen Dreiecke jeweils die Gleichung nach dem Satz des Pythagoras an.



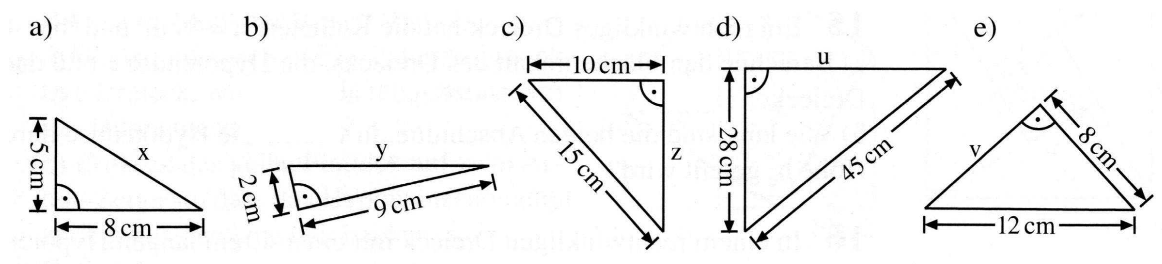
14. **Rechteckdiagonale**

Berechne die Länge der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$.



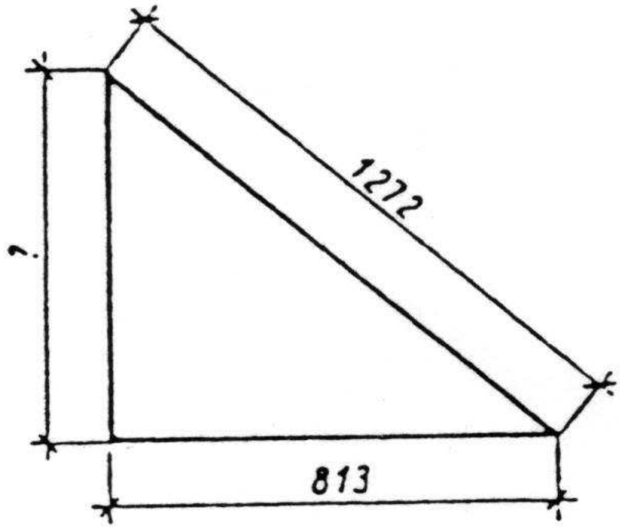
15. **Dreiecke berechnen**

Berechne bei den rechtwinkligen Dreiecken die fehlenden Seitenlängen.



16. **Kathetenbestimmung**

Bei der Festlegung der Bestellmaße für eine rechtwinkligdreieckige Isolierglasscheibe wurde vergessen, das Maß einer Seitenlänge anzugeben.



17. **Dreieck-Flächenberechnung**

Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Kathete $r = 6\,\text{cm}$ und die Hypotenuse $t = 15\,\text{cm}$. Berechne die Länge der anderen Kathete s und den Flächeninhalt des Dreiecks.

18. **Dreieckseiten**

In einem Dreieck ABC sind gegeben:

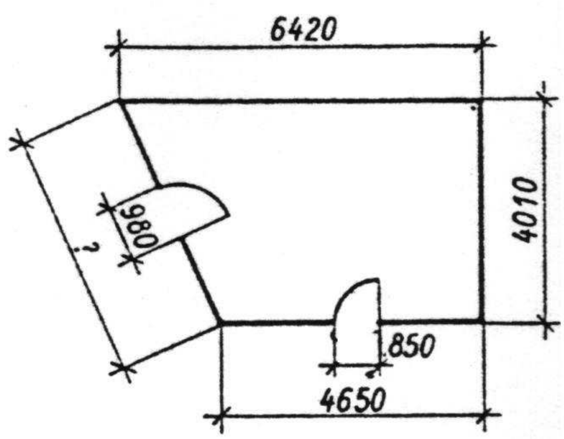
(a) $a = 10\,\text{dm}$
$c = 6\,\text{dm}$
$\alpha = 90°$

(b) $a = 8\,\text{m}$
$b = 12\,\text{m}$
$\beta = 90°$

Berechne die dritte Dreiecksseite.

19. **Sockelleisten**

In einem Wohnraum werden Fußsockelleisten montiert. Wie viele Meter dieser Leisten werden in der Kalkulation verrechnet, wenn die beiden Türen ausgespart werden und ein Verschnittzuschlag von 15% einbezogen wird?



20. **Pfostenschuss**

Elfmeter! Olaf knallt den Ball in einer Höhe von $1,50\,\text{m}$ an den Pfosten. Welche Strecke legt der Ball dabei mindestens zurück?
Das Tor ist $7,32,\text{m}$ breit und $2,44,\text{m}$ hoch.

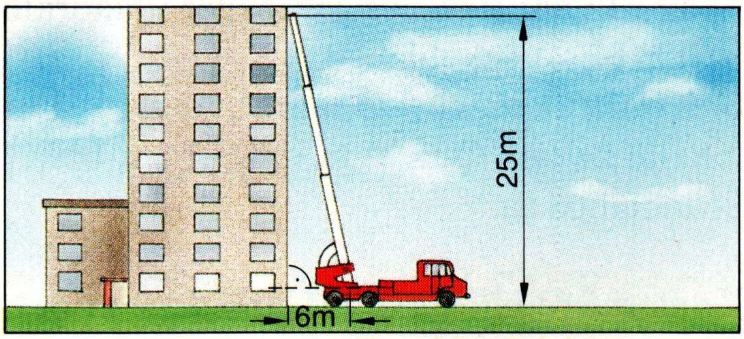
21. **Zahnradbahn**

(a) Die steilste Zahnradbahn der Welt fährt auf den Pilatus (Schweiz). Auf einem Streckenabschnitt von 1130 m Länge überwindet sie gleichmäßig einen Höhenunterschied von 489 m.
Wie lang erscheint dieser Steckenabschnitt auf einer Karte im Maßstab 1 : 25000?

(b) Eine andere Zahnradbahnstrecke erscheint auf einer Karte 12 cm lang (Maßstab 1 : 10000). Die wirkliche Streckenlänge beträgt 1250 m.
Wie groß ist der Höhenunterschied?

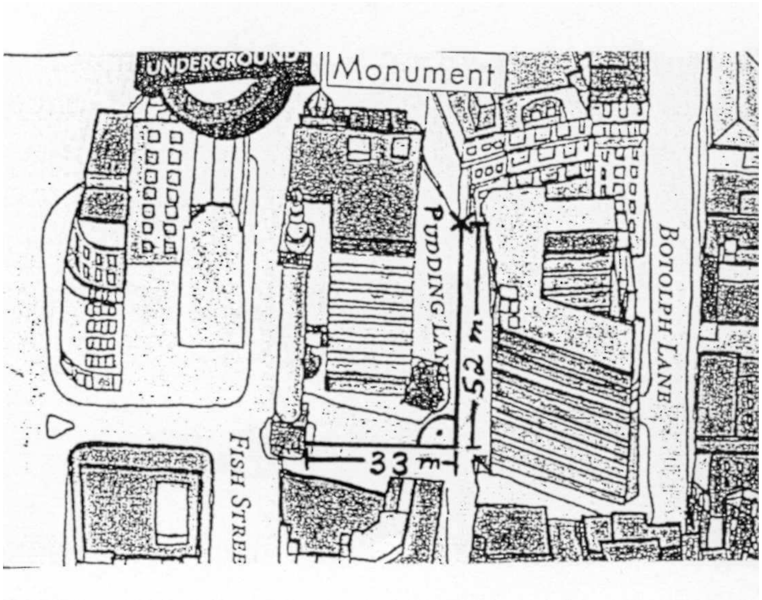
22. **Feuerwehrleiter**

Wie lang muss die Feuerwehrleiter sein, falls es im obersten Stockwerk des Hochhauses brennen sollte?



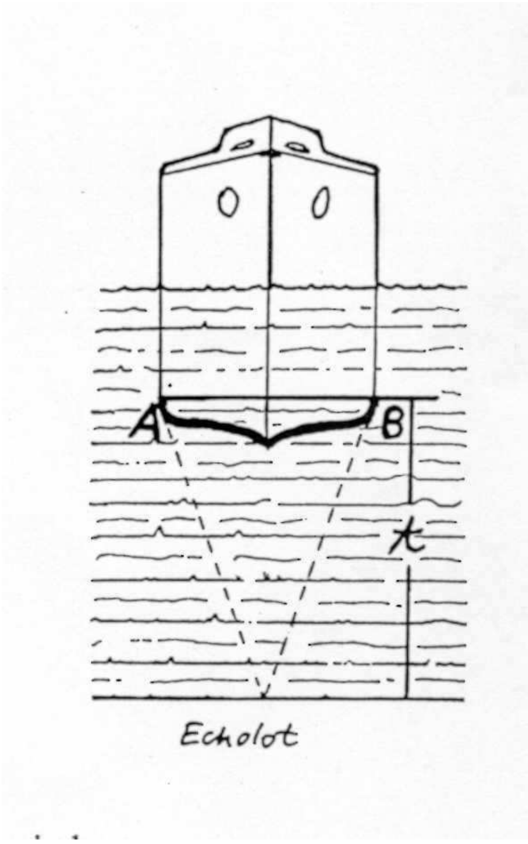
23. **Säule**

Beim großen Brand von London im September 1666 wurden $\frac{4}{5}$ der City vernichtet. Als Mahnmal wurde ein Säule (genannt Monument) errichtet, deren Höhe genau der Entfernung vom Fuß der Säule zu der Stelle entspricht, an der das Feuer ausbrach (einer Bäckerei in der Pudding Lane). Ein Londonbesucher misst die noch zugänglichen Strecken. Bestimme damit die Höhe der Säule.



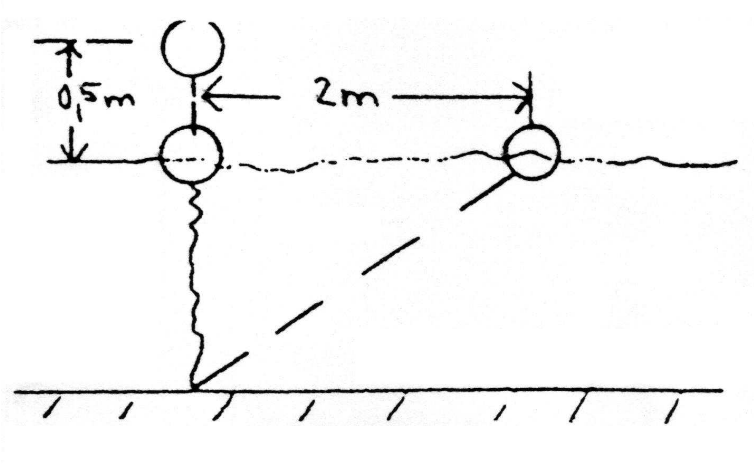
24. **Echolot**

Man benutzt das Echolot, um die Meerestiefe zu messen. Das funktioniert folgendermaßen:
In A wird ein Schallsignal erzeugt. Dieses breitet sich aus und wird am Meeresboden zurückgeworfen. In B wird der reflektierte Schall nach einiger Zeit wieder empfangen. Aus der Schalldifferenz zwischen Schallempfang in B und Schallerzeugung in A rechnet man die Tiefe t aus.
Bestimme die Meerestiefe für den vorliegenden Fall:
Das Schiff ist 16 m breit. Der Schall legt in einer Sekunde 1510 m im Wasser zurück. Die Schalldifferenz an der Stelle sei 0,4 Sekunden. Ergänze und beschrifte die Skizze so, dass dein Rechenweg erkennbar wird.



25. **Boje**

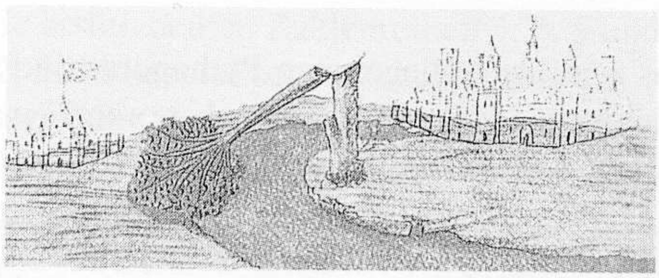
Eine Boje kann $0,5\,\text{m}$ senkrecht über die Wasseroberfläche emporgehoben oder $2\,\text{m}$ zur Seite bewegt werden, bis das Halteseil straff gespannt ist. Wie tief ist das Wasser?



26. **Geknickter Baum**

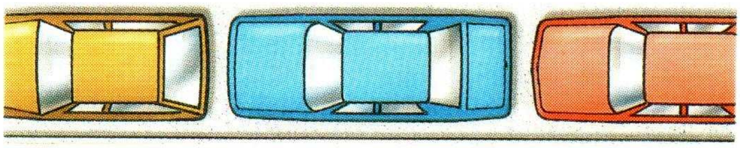
Ein $3,40\,\text{m}$ hoher Baum ist umgeknickt. Er ragt jetzt genau über den $2\,\text{m}$ breiten Fluss. In welcher Höhe ist der Baum umgeknickt?

Fig. 5



27. **Parklücke**

Kann das mittlere Auto noch ausparken? Es ist $4,80\,\text{m}$ lang und $1,80\,\text{m}$ breit; der Abstand zum vorderen und hinteren Fahrzeug beträgt jeweils $30\,\text{cm}$.



28. **Wäscheleine**

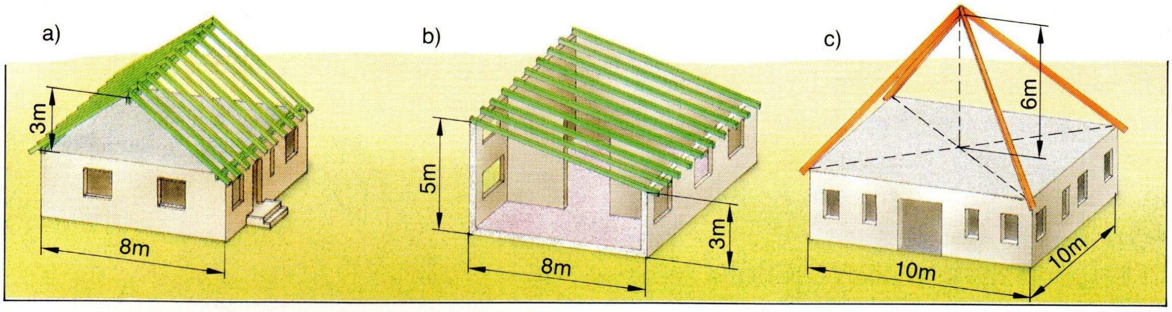
Zwischen zwei Pfählen mit einem Abstand von $3,80\,\text{m}$ ist waagerecht eine dehnbare Wäscheleine straff gespannt.

(a) Hängt man z.B. in die Mitte der Leine einen Bügel mit einem nassen Wäschestück, senkt sich die Wäscheleine um $20\,\text{cm}$. Wie stark hat sich die Wäscheleine gedehnt?

(b) Die Wäscheleine ist bis zu 8% ihrer Länge dehnbar. Um wie viel cm dürfte sich die Wäscheleine höchstens senken, ohne zu zerreißen?

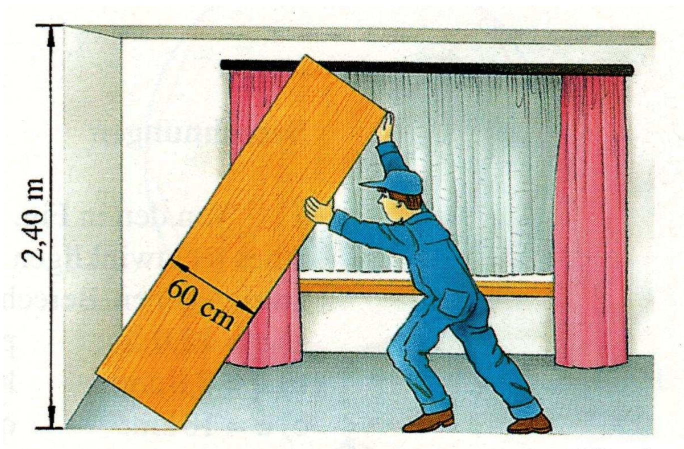
29. **Dachsparren**

Berechne für jedes abgebildete Gebäude die Länge eines Dachsparren. Jeder Dachsparren soll dabei 40 cm überstehen.



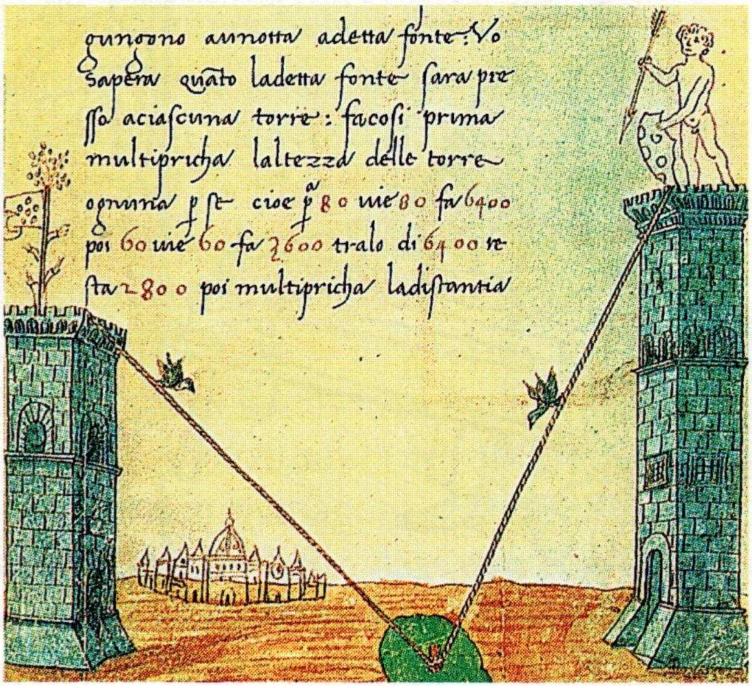
30. **Maximale Schrankhöhe**

Wie hoch darf der Schrank höchstens sein, damit man ihn wie angegeben aufstellen kann?



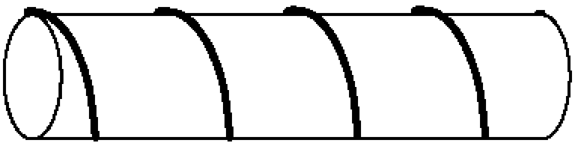
31. **Turm und Brunnen**

Auf einem ebenen Feld stehen zwei Türme, einer 60 Fuß hoch, der andere 80 Fuß hoch. Ihr Abstand beträgt 100 Fuß. Für die beiden Vögel ist der Weg von der Turmspitze bis zu einem Brunnen zwischen den Türmen gleich weit. Wie weit ist der Brunnen von den Türmen entfernt?



32. **Aufgerollte Schnur**

    Eine Schnur ist symmetrisch um einen Stab gewickelt. Die Schnur windet sich genau 4 mal um den Stab. Der Umfang des Stabes ist 4 cm und die Länge des Stabes ist 12 cm.
    Wie lang ist die Schnur?

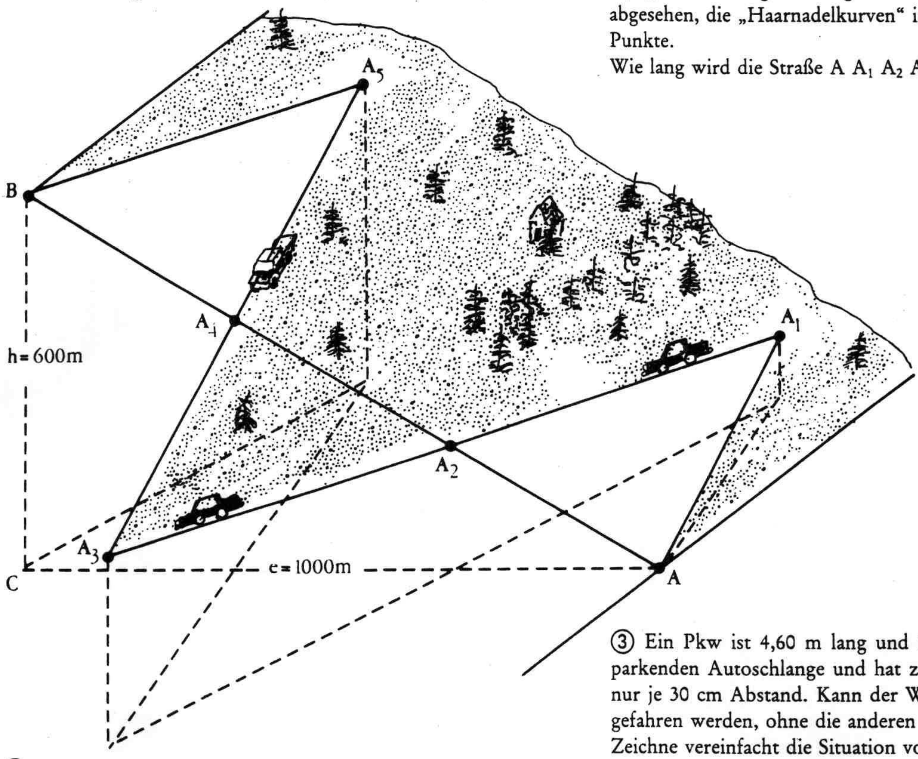


33. **Pythagoras und Vernetzungen**

„Pythagoras auf der Straße“

① Geringe Steigungen sind im Verkehr sehr erwünscht. Nenne Gründe dafür.

Die Steigung der Autobahnen ist in der Regel geringer als 4 %, steile Strecken (z. B. zwischen Stuttgart und Ulm, Albrand) haben selten mehr als 6 % Steigung. Geringe Steigungen müssen aber durch lange Wege erkauft werden: Je geringer die Steigung, um so länger der Weg bei fester Höhe. Die Anlage langer und gerader Wege ist oft gar nicht möglich oder wäre zu teuer (Brückenbauten!). Ein Ausweg sind Serpentinen. Hier ist eine typische Situation stark vereinfacht dargestellt.

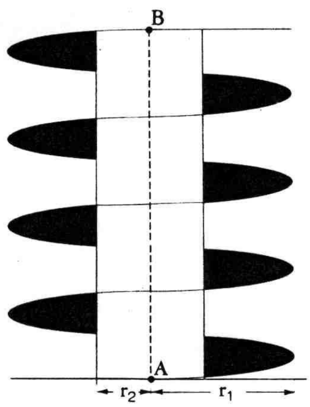


Eine Straße soll vom Talpunkt A zum Bergpunkt B über eine steile Ebene (also überall gleich geneigte Fläche) führen. Der Höhenunterschied zwischen A und B betrage h = 600 m, und der Horizontalabstand, also die Länge von $\overline{AC}$ sei 1000 m, (dieses Maß kann man aus der Landkarte bekommen, dort sind ja immer nur die Horizontalabstände gezeichnet.) Die Steigung ist also 60 %, eine gerade Straße AB wäre viel zu steil. Statt dessen soll eine Serpentinenstraße A A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 B gebaut werden, die überall dieselbe Steigung haben soll, nämlich nur noch 20 %. Die Teilstrecken $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, ... sollen gleich lang sein. Von der Breite der Straße wird abgesehen, die „Haarnadelkurven“ in A_1, A_3, A_5 betrachten wir als Punkte.

Wie lang wird die Straße A A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 B?

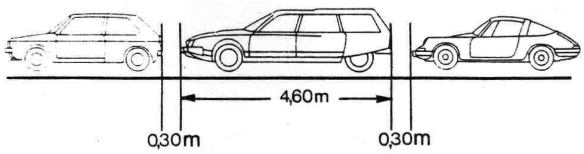
② Manche Kaufhäuser haben das Dach, das über eine Wendelstraße erreichbar ist, als Parkfläche eingerichtet. Wie groß muß man den Radius r_1 für den äußeren Zylinder, der die Wendelstraße umgrenzt, wählen, wenn die Höhe 16 m beträgt und die Straße 4 volle Windungen enthalten und die Steigung der Straße auf ihrer rechten (äußeren) Randlinie 10 % betragen soll?

Wie lang sind weiterhin der äußere und der innere Rand der Straße, wenn diese 4 m breit sein soll?

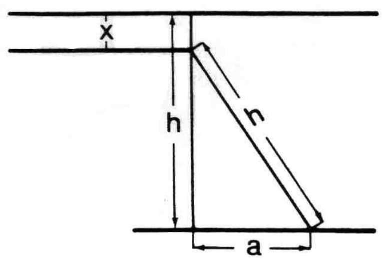


③ Ein Pkw ist 4,60 m lang und 1,70 m breit. Er steht in einer parkenden Autoschlange und hat zum Vorgänger und Nachfolger nur je 30 cm Abstand. Kann der Wagen aus der Parklücke heraus gefahren werden, ohne die anderen Wagen zu berühren?

Zeichne vereinfacht die Situation von oben (Grundriß)!

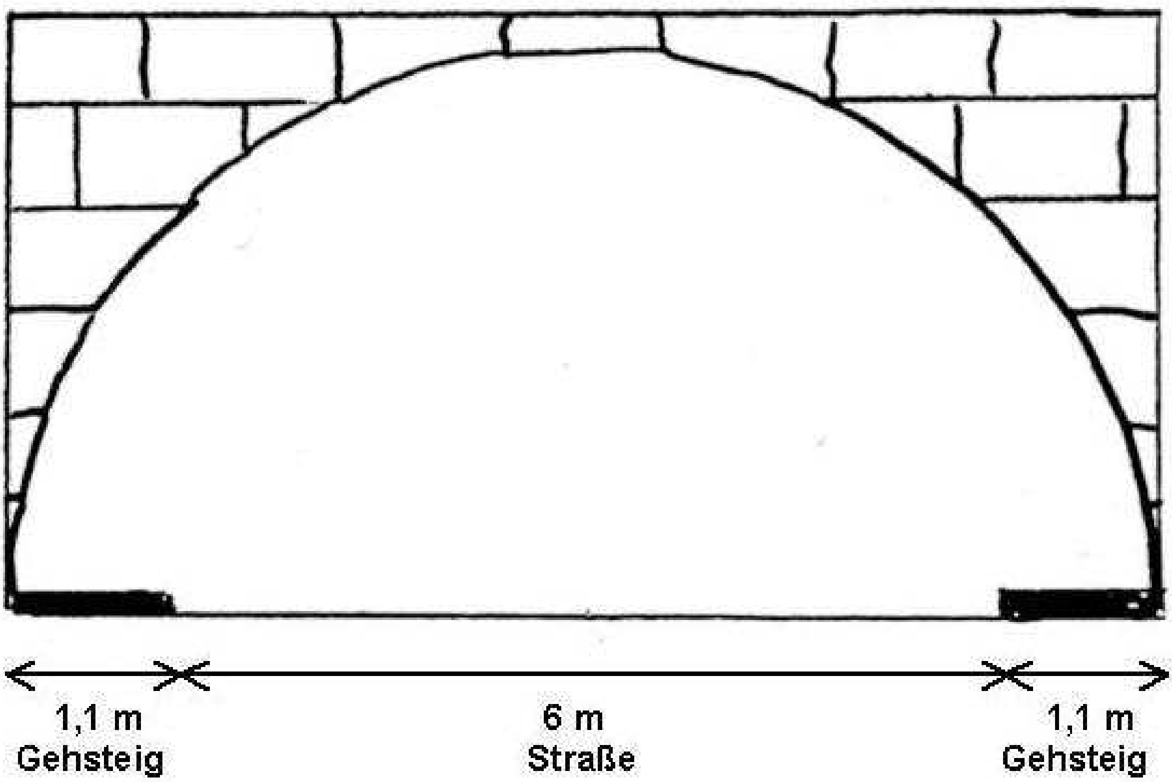


④ Besondere Beachtung verdienen Brücken, die regelmäßig kontrolliert werden müssen. Durch Bewegungen der Erde, verursacht z. B. durch starke Regenfälle, können Brückenpfeiler unten verschoben werden, so daß sie nicht mehr lotrecht stehen, was eine Unebenheit der Fahrbahn nach sich zieht. Ein Brückenpfeiler von 12 m Höhe sei unten um 20 cm seitlich verschoben worden. Welche Senkung der Brücke wird dadurch bewirkt?



34. **Das Tunnelproblem**

Unterwegs nach Hamburg: Das Tunnelproblem



Stellt euch vor, ihr seid mit einem Transporter auf dem Weg nach Hamburg. Immer auf der $A7$ Richtung Norden. Kurz hinter Göttingen geratet ihr in einen langen Stau und entscheidet euch deshalb, bei der nächsten Abfahrt die Autobahn zu verlassen. Weiter geht's auf der Landstraße. In einer kleinen Ortschaft stellt sich euch allerdings ein schwieriges Problem: die Straße, auf der ihr euch befindet, führt durch einen Tunnel, der euch sehr, sehr niedrig erscheint. Ob der Transporter hindurchpassen wird? Leider haben böse Buben, die in der Gegend ihr Unwesen treiben, das Verkehrsschild zur Höhenbegrenzung, das normalerweise über jeder Straßenunterführung oder Brücke befestigt ist, entwendet. Ein Blick in die Wagenpapiere bringt keine Erleichterung, denn es stellt sich heraus, dass der Transporter $2,70\,\mathrm{m}$ hoch ist. Ganz schön hoch! Das Risiko, auf gut Glück loszufahren, erscheint euch zu groß, zumal das Verkehrsaufkommen auf der Gegenspur sehr groß ist, ihr also auf eurer Fahrspur bleiben müsst.
Aber schließlich erinnert ihr euch an den Matheunterricht. Wenn sich die Höhe der Tunneldurchfahrt an der kritischen Stelle berechnen ließe, hättet ihr ja tatsächlich

etwas Nützliches gelernt! Immerhin wisst ihr, dass der Querschnitt des Tunnels halbkreisförmig ist. Außerdem habt ihr ein einfaches Maßband bei euch, mit dem ihr zumindest die Breite der Straße und des schmalen Gehsteigs messen könnt (Maße siehe Zeichnung).

Quelle: Mathematik heute (1996); Text: Dagmar Seuberlich

35. **Vermischtes zur Satzgruppe des Pythagoras**

Internet Recherche zum Satz des Pythagoras

Ihr sollt in Zweiergruppen eine Recherche im Internet zum Satz des Pythagoras machen und eure Ergebnisse dokumentieren. Die Dokumentation wird bewertet. Die folgenden Aufgaben geben eine Leitlinie für Recherche und Dokumentation. Die Dokumentation kann handschriftlich erfolgen.

(a) Benutzt eine deutsche Suchmaschine, z.B. `www.altavista.de` oder `www.fireball.de` um geeignete Webseiten zu finden.
Hinweis: Verwendet das Zeichen + und Anführungszeichen z.B. bei „Satz des Pythagoras“ (warum?).

(b) Was besagt der Satz des Pythagoras? Gebt drei unterschiedliche von euch gefundene Formulierungen an. Formuliert den Satz auch in euren eigenen Worten.

(c) Schwerpunkt: Findet Beweise zum Satz des Pythagoras und vollzieht sie für euch selbst nach (Mitschrift, Zeichnungen ins Matheheft) Dokumentiert zwei unterschiedliche Beweise (es gibt z.B. arithmetische, Zerlegungs-, Ergänzungs- oder Scherungsbeweise).

(d) Was besagt die Umkehrung des Satzes des Pythagoras?
(Zusatz: Warum muss man die Umkehrung extra beweisen?)

(e) Dokumentiert einige unterschiedliche Anwendungen des Satzes des Pythagoras und dessen Umkehrung.

(f) Findet biografische Daten über Pythagoras und dokumentiert Wesentliches.

(g) Gebt maximal drei Webadressen (URL) an, bei denen das Thema eurer Meinung nach am besten dargestellt wird.

(h) Zusatz: Findet Anekdoten, Witze, Cartoons und sonstiges „Schräges“ zum Thema und dokumentiert diese.

36. **Der Satz von Fermat**

MA- :MATIK HNA, 11.7.93

„Fermat-Theorem“: 350 Jahre altes Rätsel gelöst

Als „Beglückung“ empfinden führende Mathematiker auf der ganzen Welt, daß das wohl bekannteste Rätsel der Mathematik jetzt gelöst ist. Andrew Wiles (40) von der Cambridge University legte Fachkollegen einen Beweis der 350 Jahre alten „Fermat-Theorems“ vor. „Durch diesen Beweis hat sich die Landschaft der Mathematik verändert“, würdigte Kenneth Ribet von der Universität von Kalifornien (Berkeley) die Arbeit des Briten.

Der französische Gelehrte Pierre de Fermat hatte 1637 die Behauptung aufgestellt, daß es unmöglich sei, den Kubus einer ganzen Zahl (beispielsweise „zwei hoch drei“) als eine Summe zweier Kuben darzustellen. Anders ausgedrückt: Der Lehrsatz von Pythagoras ist – zumindest für ganze Zahlen – im Dreidimensionalen nicht gültig. Der Franzose blieb in seinem Buch den Beweis schuldig – mit dem schlichten Hinweis, er würde nicht auf den Rand der Seite passen.

Nachdem Generationen von Profi- und Amateur-Mathematikern an der strengen Beweisführung gescheitert waren, gelang nach mehr als 350 Jahren dem Briten Wiles die Verifizierung des Fermatschen Theorems.

„Wiles konnte in seiner Arbeit auf Vermutungen zurückgreifen, die der japanische Zahlenforscher Yutaka Taniyama in den fünfziger Jahren formulierte“, erläuterte Hans-Georg Rück vom Institut für Experimentelle Mathematik der Universität Essen. Bedeutend für die Forschung sei vor allem der strenge Beweis der Taniyama-Thesen. Es könne aber noch bis zu einem Jahr dauern, bis alle Einzelheiten nachgeprüft sind.

(dpa)

DIE ZEIT Nr. 46 11. November 1994

Nun ist das Fermatsche Theorem wohl endlich bewiesen

Erledigt?

Die berühmteste mathematische Kopfnuß, der Beweis der Fermatschen Vermutung, ist anscheinend geknackt. Bereits vor eineinhalb Jahren schien es, als habe der Brite Andrew Wiles das Problem gelöst (siehe *ZEIT* 27/93). Doch stellte sich die Meldung wenige Wochen später als voreilig heraus. Eine Lücke im Beweis war aufgetaucht. Wiles scheint sie jetzt geflickt zu haben.

Vor 357 Jahren kritzelte der französische Jurist und Hobbymathematiker Pierre de Fermat an den Rand eines Buches: „Es ist unmöglich, eine Kubikzahl als Summe zweier Kuben zu schreiben, eine vierte Potenz als Summe zweier vierten Potenzen, oder allgemeiner gesagt, irgendeine höhere Potenz als Summe von zwei Potenzen gleichen Grades.“ Mit anderen Worten: Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ hat keine positiven ganzzahligen Lösungen, wenn n eine ganze Zahl größer als 2 ist (für $n = 2$ gibt es die natürlich, zum Beispiel $3^2 + 4^2 = 5^2$). Fermat fügte hinzu: „Ich habe eine wahrhaft wunderbare Beweisführung dieses allgemeinen Satzes entdeckt, die auf diesem Rand nicht Platz findet.“ Der Autor nahm sie mit ins Grab. Und bis heute nerven ganze Heerscharen von Hobbymathematikern die Zunft damit, sie hätten Fermats Geheimnis gelüftet. Doch bislang saß noch jedes der Möchtegerngenies einem Trugschluß auf – genauso wie vermutlich seinerzeit der Altmeister selbst.

Vor elf Jahren ließ sich aus einer Arbeit des deutschen Mathematikers Gerd Faltings folgern, daß es für jedes n, das größer als 2 ist, höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen der Gleichung gibt. Zum ersten Mal war damit eine für alle Exponenten gültige Aussage bewiesen. Faltings' Überlegungen hatten eine weitere Konsequenz: Sollte die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ doch lösbar sein, muß einer der Summanden mehr als eine halbe Million Stellen haben. Computerberechnungen haben zudem Fermat für alle n kleiner als 150 000 verifiziert. Ein Beweis wollte dennoch niemandem gelingen.

Im vergangenen Jahr reichte Andrew Wiles seinen 200 Seiten dicken Beweisversuch bei der Fachzeitschrift *Interventiones Mathematicae* ein. Interessierten Kollegen verweigerte Wiles indes den Vorabdruck seines Formelwerks, über das er acht Jahre lang einsam in seinem Büro auf einem Dachboden gegrübelt hatte. Als Faltings, der damals wie Wiles an der Universität Princeton arbeitete, ihn um eine Kopie bat, meinte der Brite, er wolle lieber alles für sich behalten, bis die Arbeit veröffentlicht sei. Unter Mathematikern ist derartige Geheimniskrämerei äußerst ungewöhnlich. Wiles mußte harsche Kritik einstecken.

Wie üblich schickten die Herausgeber der *Interventiones Mathematicae* das Manuskript anderen Fachkollegen zur Durchsicht, und die fanden die Lücke. An der mühte sich Wiles, auf den Dachboden zurückgekehrt, fast ein Jahr lang ab – und nun erzielte er zusammen mit seinem ehemaligen Studenten Richard Taylor, der an der Universität Cambridge in England lehrt, den Durchbruch. Ihre neue, 25 Seiten starke Arbeit schickte Wiles vor drei Wochen zusammen mit der ersten an vier Kollegen. Einer von ihnen war Faltings. Der hat den Beweis inzwischen für richtig befunden: „Ich halte Fermat damit für erledigt.“

Wiles scheint nicht nur mathematisch dazugelernt zu haben: Diesmal läßt er die beiden Papiere jedem Fachkollegen zukommen, der sie bei ihm anfordert. Ansonsten hüllt er sich in Schweigen; Interviews verweigert er. Nach der Pleite im letzten Jahr will er wohl abwarten, bis sein Beweis mit ausreichender Sicherheit als korrekt gelten kann. Da sich diesmal viele Köpfe darüberbeugen können, um Fehler zu suchen, sollte sich das innerhalb weniger Wochen herausstellen. Bis dahin gilt die Devise, die Nicholas Katz, ebenfalls Mathematiker in Princeton und ein Freund Wiles', ausgegeben hat: Daumen drücken.

Wolfgang Blum

ANDREW JOHN WILES

HVA 1.7.97

Das „Jahrhundert-Rätsel" gelöst

350 Jahre lang haben sich Generationen von Wissenschaftlern und Laien an dem „Fermatschen Problem" abgemüht. 1994 fand Andrew Wiles die Lösung – eine wissenschaftliche Sensation.

GÖTTINGEN ■ Seit der Schulzeit weiß ein jeder: $x^2 + y^2 = z^2$. Doch gilt die Geichung noch, wenn der Exponent größer ist als zwei? Um das Jahr 1636 be-

VON GERD HENKE

hauptete der französische Jurist und Hobby-Mathematiker, Pierre de Fermat, schlichtweg, daß es eben keine natürlichen Zahlen gäbe, die diese Gleichung erfüllten. Damit war sie – auf den Rand eines Lehrbuches gepinnt – in der Welt, die Vermutung, an der Generationen von Mathematikern schier verzweifelten.

Auch Paul Wolfskehl erging es wie vielen seiner Zunft-Kollegen: Irgendwann während seines Studiums in den 80er Jahren des vorigen Jahrhundert wurde der Sohn eines reichen jüdischen Bankiers mit dem „Fermatschen Theorem", kurz FLT, konfrontiert. Das Rätsel schlug ihn fortan in seinen Bann und ließ ihn bis zu seinem Tod im Jahr 1905 nicht mehr los. Wolfskehl war so fasziniert von der Aufgabe, daß er testamentarisch einen Preis auslobte: 100 000 Goldmark für den, der den Beweis für Fermats Vermutung lieferte.

Welche Anziehungskraft das zahlentheoretische Problem entfaltete, erfuhr fortan auch die Göttinger Akademie der Wissenschaften. Dort, wo der Wolfskehl-Preis verwaltet wurde, verging kaum eine Woche, in der nicht ein Lösungsvorschlag aus irgendeinem Winkel der Welt im Briefkasten landete. So hatte die Akademie seit 1905 mehr als 5000 Vorschläge zu prüfen. An der mathematischen Fakultät waren eigens Assistenten für die Prüfung der ernstzunehmenden Ansätze abgestellt.

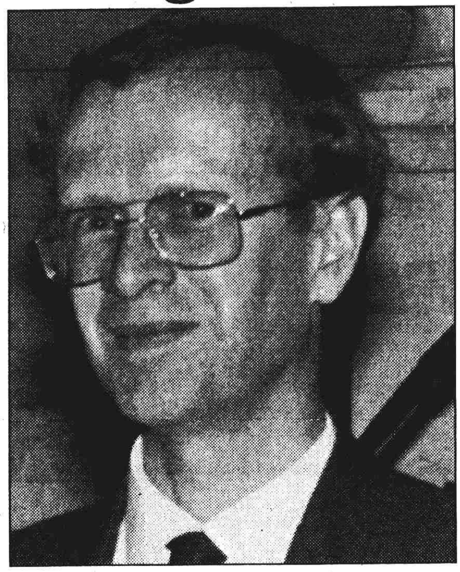
Fast neun Jahrzehnte vergingen, ohne daß der endgültige Beweis für das FLT erbracht werden konnte. Zwar hatte es einige bemerkenswerte Ansätze gegeben, so von dem Essener Mathematik-Professor Gerhard Frey, doch des Rätsels vollständige Lösung war noch nicht gelungen. Die war Andrew John Wiles allein vorbehalten: 1994 – 89 Jahre nach Wolfskehls Testament – ließ sein Aufsatz in den „Annals of Mathematics" die wissenschaftliche Welt aufhorchen. Der Mathematik-Professor an der amerikanischen Elite-Uni Princeton, hatte den Weg gefunden. Das Jahrhundertproblem war tatsächlich gelöst. Auch die Fachleute der Göttinger Akademie sahen die wissenschaftliche Sensation und erkannten dem heute 44jährigen gebürtigen Engländer den Wolfskehl-Preis zu.

Vergangenen Freitag, drei Jahre nach der Veröffentlichung seines FLT-Beweises, erhielt Andrew John Wiles sein Preisgeld in Höhe von 70 000 Mark – ganz wie es Paul Wolfskehl in seinem Testament bestimmt hatte. Die Akademie ehrte Wiles mit einem Festakt anläßlich ihrer Sommertagung. Mit mehr als 1000 Gästen fand die Veranstaltung in der Aula der Universität eine Resonanz wie kaum eine zuvor.

Schon als zehnjähriger Junge sei er in einer öffentlichen Bücherei auf Fermats Problem gestoßen, berichtete Wiles. Von da an habe es ihn nicht mehr losgelassen. Auch während seines Studiums in Cambridge und Oxford sah sich das Mathematik-Genie immer im Bann des FLT. Als Professor in Princeton habe er schließlich „acht Jahre lang Tag und Nacht mit dem Problem gekämpft", bekannte Wiles.

Er habe „durch souveräne Beherrschung modernster mathematischer Methoden, mit Ausdauer und Genialität" eines der großen zahlentheoretischen Probleme gelöst, würdigte Gerhard Frey den Preisträger.

Einen Computer habe er dazu nie in Anspruch genommen, verriet Professor Wiles. Den benötige er allenfalls zur Kommunikation.



Andrew John Wiles hat das Fermatsche Problem gelöst. Auf dem Lösungsweg habe der Princeton-Professor der Zahlentheorie völlig neue Wege eröffnet, anerkennen Kollegen. (Foto: Pohl)

37. **Umzugsprobleme**

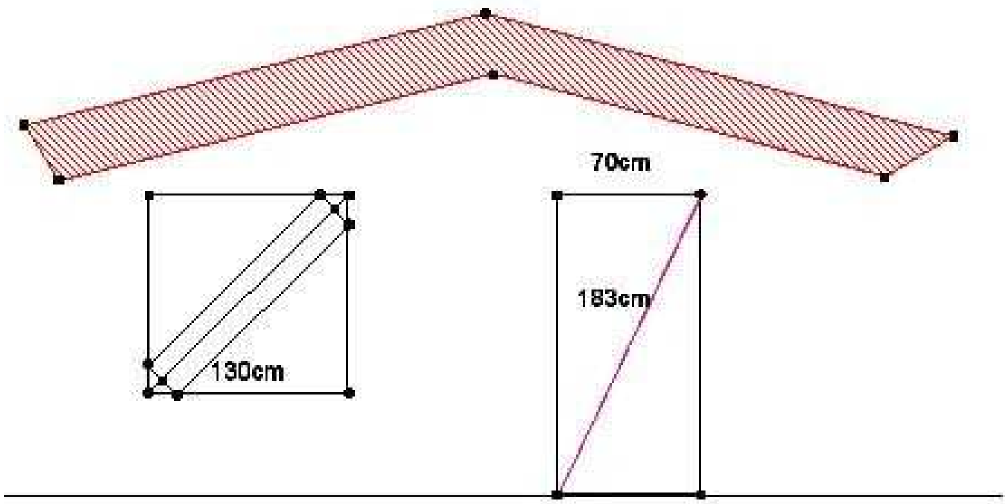
Herr Hurtig will beim Umzug seinen tollen Tisch in die neue Wohnung schaffen. Allerdings ist die Tischplatte 1,83m breit und 2,20 m lang. Sie besteht aus einer starren Metallplatte und einer darunter liegenden Holzplatte. Durch die nur 70cm breite Haustüre geht die Metallplatte, deren Höhe zu vernachlässigen ist, nicht durch.

(a) Wie hoch ist die Haustüre höchstens?

(b) Bekommt er die Platte durch sein quadratisches Fenster, das 1,3m breit ist?

(c) Wie viel muss er von der Breite der Holzplatte absägen, damit die 10cm dicke Platte durch das Fenster passt?

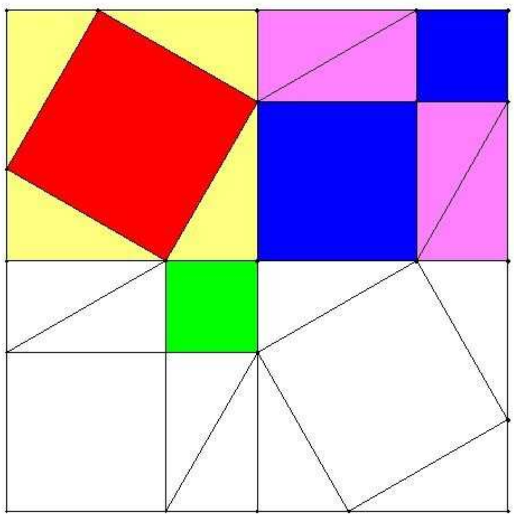
Die Schüler erhalten keine Skizze. Sie sollen aus dem Text ein mathematisches Modell entwickeln, das den oben beschriebenen Sachverhalt möglichst gut wiedergibt. Erst damit lässt sich die Aufgabe bewältigen.

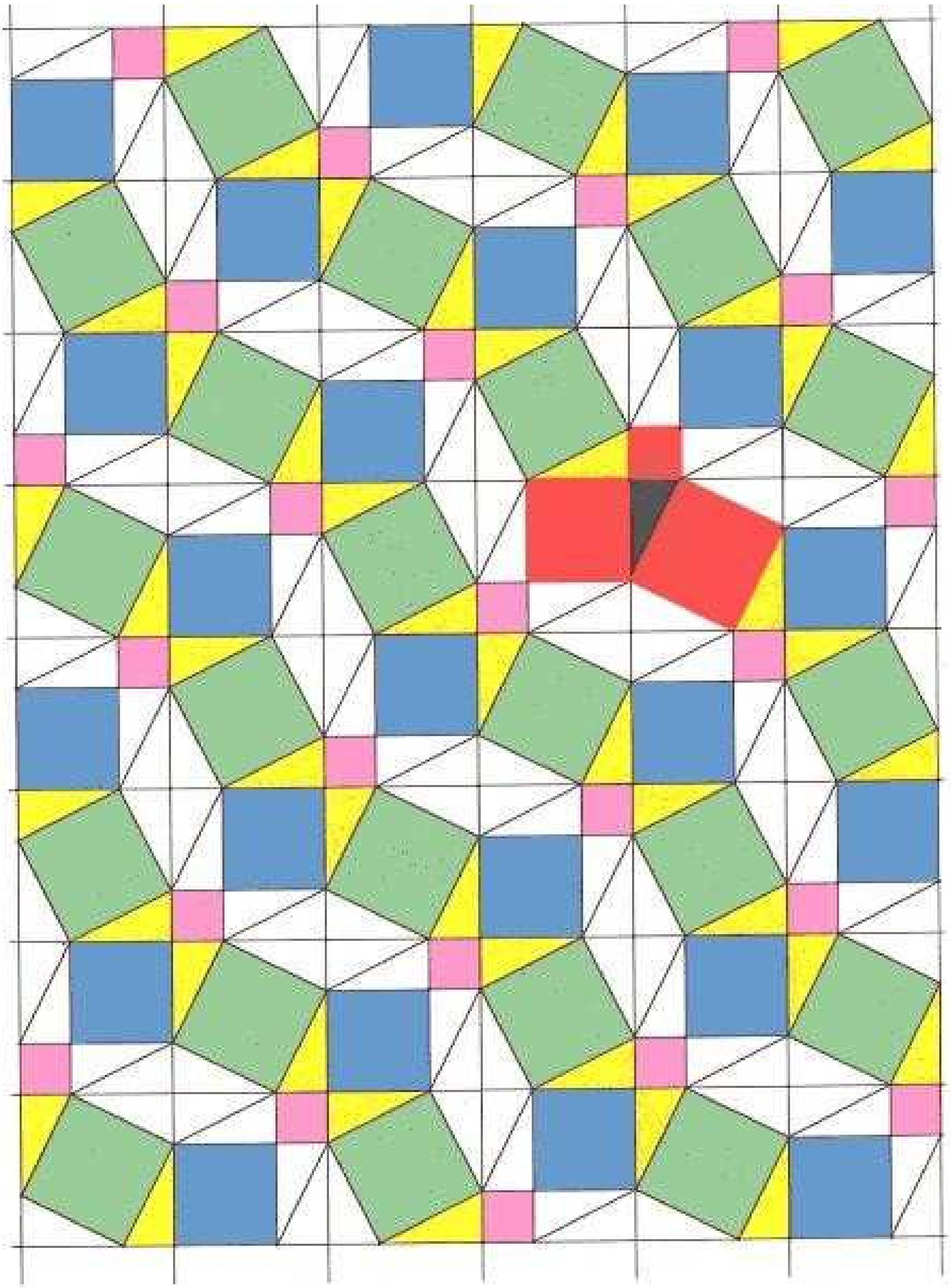


Als Hilfe kann die oben abgebildete Skizze in beweglicher Form mit einem Beamer projiziert werden.

38. **Pythagoras-Parkett**

Ein Pythagoras-Beweis ohne viele Worte





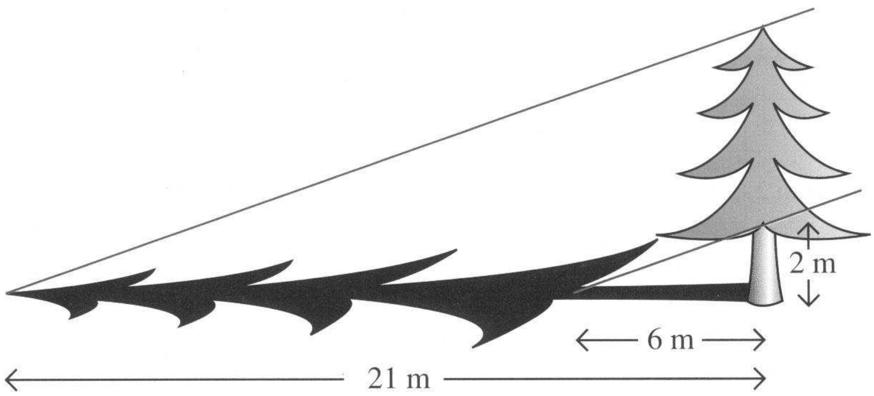
Die Zeichnung kann an der Tafel, am TLP oder am Computer entwickelt werden.

Es ist aber auch empfehlenswert, genügend viele rechtwinklige Dreiecke und Quadrate aus Papier oder Karton auszuschneiden, und die Figur durch konkretes Tun zu erzeugen.

4 Symmetrie und Ähnlichkeit, Strahlensätze

1. **Ein Baum und sein Schatten**

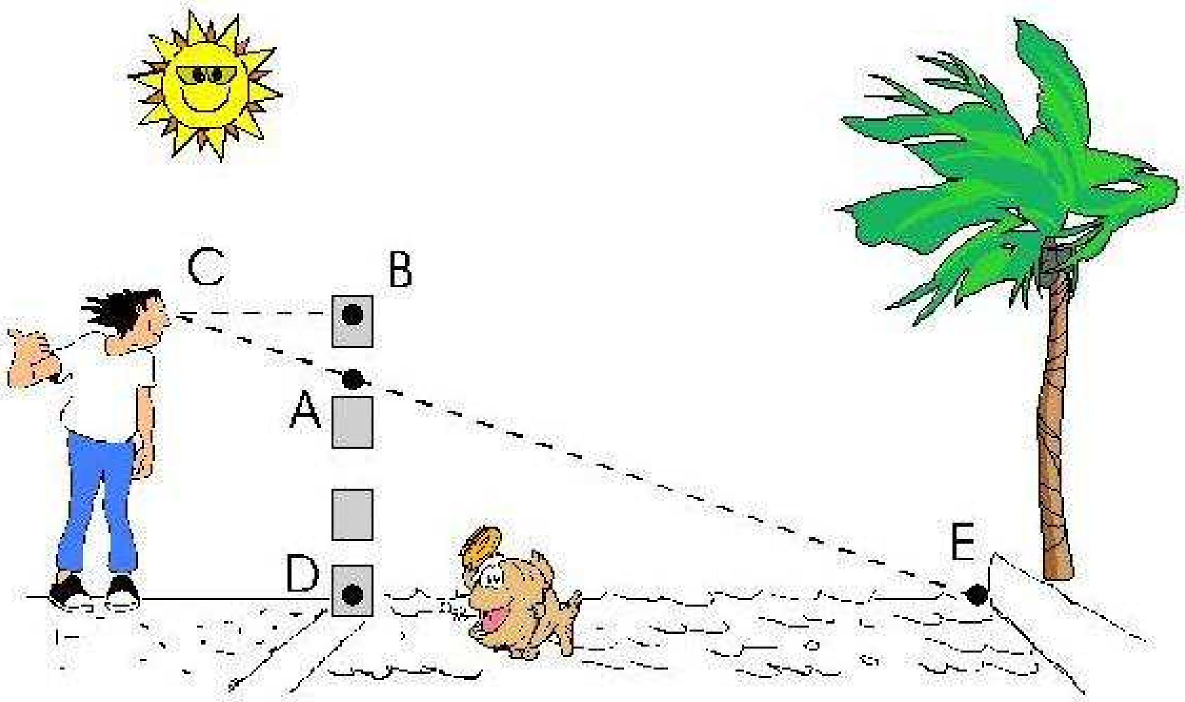
   Greta Grübel hat an einem Baum und an seinem Schatten Längen gemessen.
   Wie kann Greta die Höhe des Baumes berechnen?
   Funktioniert die Methode auch, wenn der Baum an einem (geraden) Hang steht? Begründe!

   Quelle: Abakus 9, S.99

2. **Wie Leonardo da Vinci die Breite eines Flusses bestimmte**

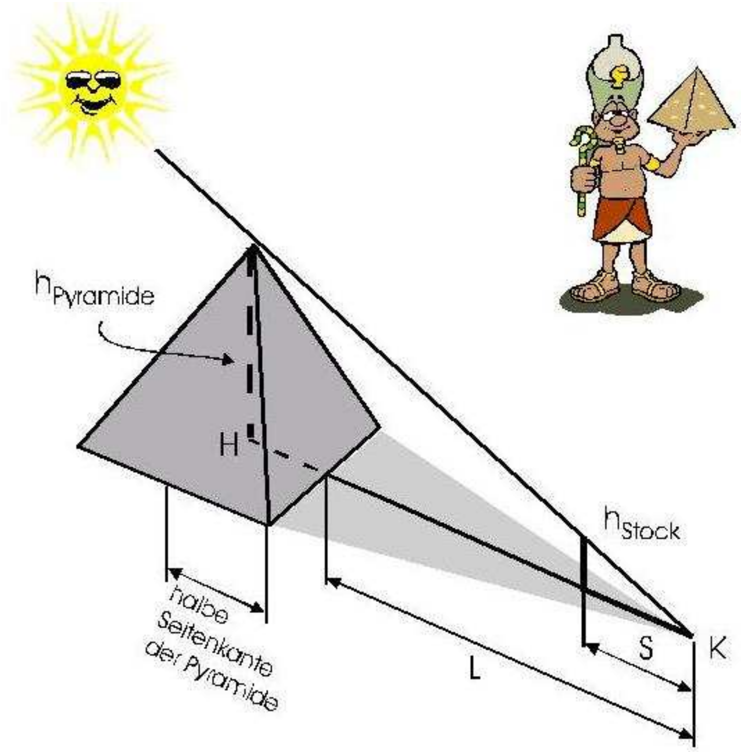
   Der italienische Maler und Bildhauer Leonardo da Vinci (1452 – 1519) schlug vor, die Breite eines Flusses wie in der Abbildung dargestellt zu bestimmen.



Quelle: Bigalke: Einführung in die Mathematik; Diesterweg

3. **Wie Thales die Höhe von Pyramiden bestimmte**

   Thales von Milet (ca. 624 – 547 v. Chr.) war aristokratischer Herkunft und erwarb sich auf seinen Reisen nach Babylonien und Ägypten mathematische Kenntnisse und Methoden. Sein Interesse galt besonders geometrischen Problemen. So weiß man aus Berichten, dass er die Höhe ägyptischer Pyramiden durch einfache Messung bestimmen konnte. Er brauchte nur einen Stab und ein wenig Sonne, die es ja in Ägypten ziemlich reichlich gibt.
   Wie machte er das?



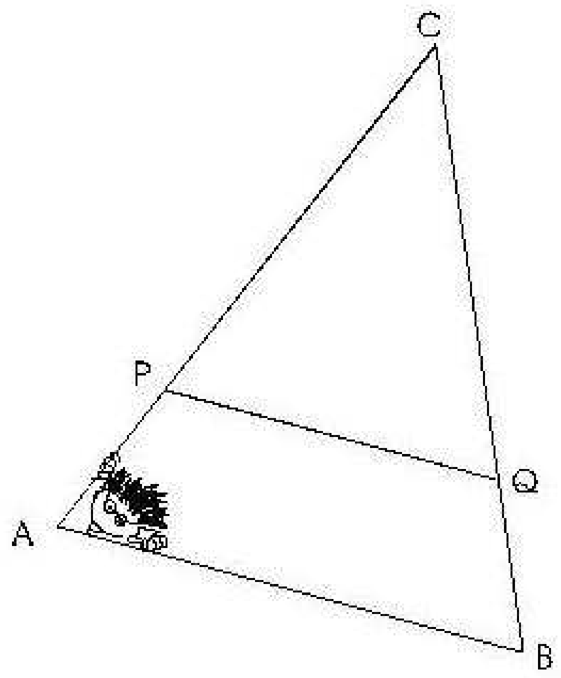
Quelle: Historische Verfahren - zeitgemäß aufbereitet; Aulis

Variationen:

(a) Zahlen statt Variablen angeben
(b) Schüler denken sich selbst Zahlen aus
(c) Beschriftung ganz weglassen
(d) Funktioniert die Methode zu jeder Tageszeit?
(e) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die Pyramide doppelt so hoch ist

4. **Gleichschenkliges Dreieck**

ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AB}$ als Basis. Die Strecke $\overline{PQ}$ ist parallel zur Basis.



(a) Halbiert $\overline{PQ}$ den Umfang, d.h. ist der Umfang des Dreiecks PQC halb so groß wie der des Dreiecks ABC?

(b) Halbiert $\overline{PQ}$ den Flächeninhalt des Dreiecks ABC?

Quelle: Eigenmann, Geometrische Denkaufgaben, Klett

Variationen:

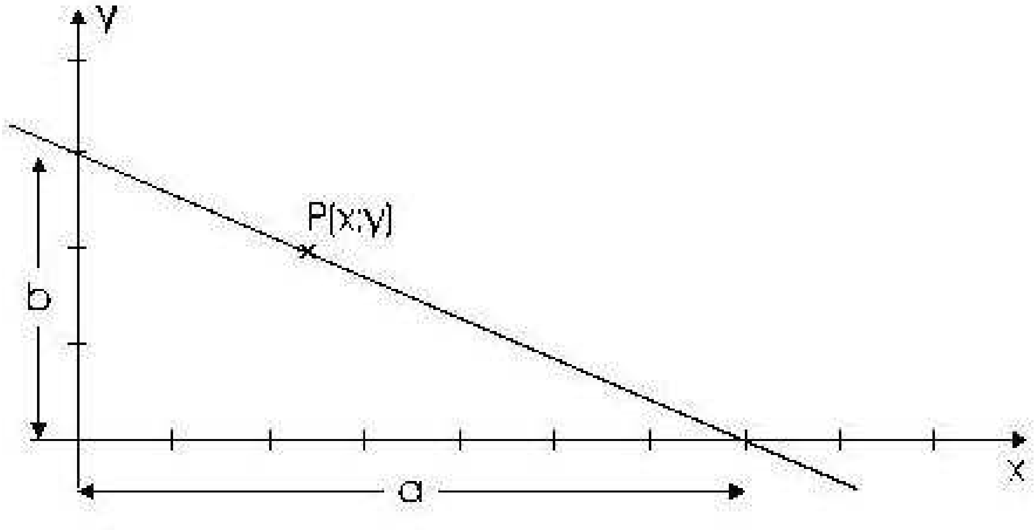
(a) Lage von PQ auf halber Höhe im Dreieck vorgeben

(b) Zahlenwerte vorgeben

(c) Wo muss PQ liegen, damit das Dreieck PQC halb so groß ist wie ABC ?

5. **Achsenabschnittsform der Geradengleichung**

Eine Gerade schneidet die x-Achse bei a und die y-Achse bei b.
Bestimme die Geradengleichung!



Variationen:

(a) Koordinaten von P als Linien einzeichnen

(b) P mit ganzzahligen Koordinaten vorgeben

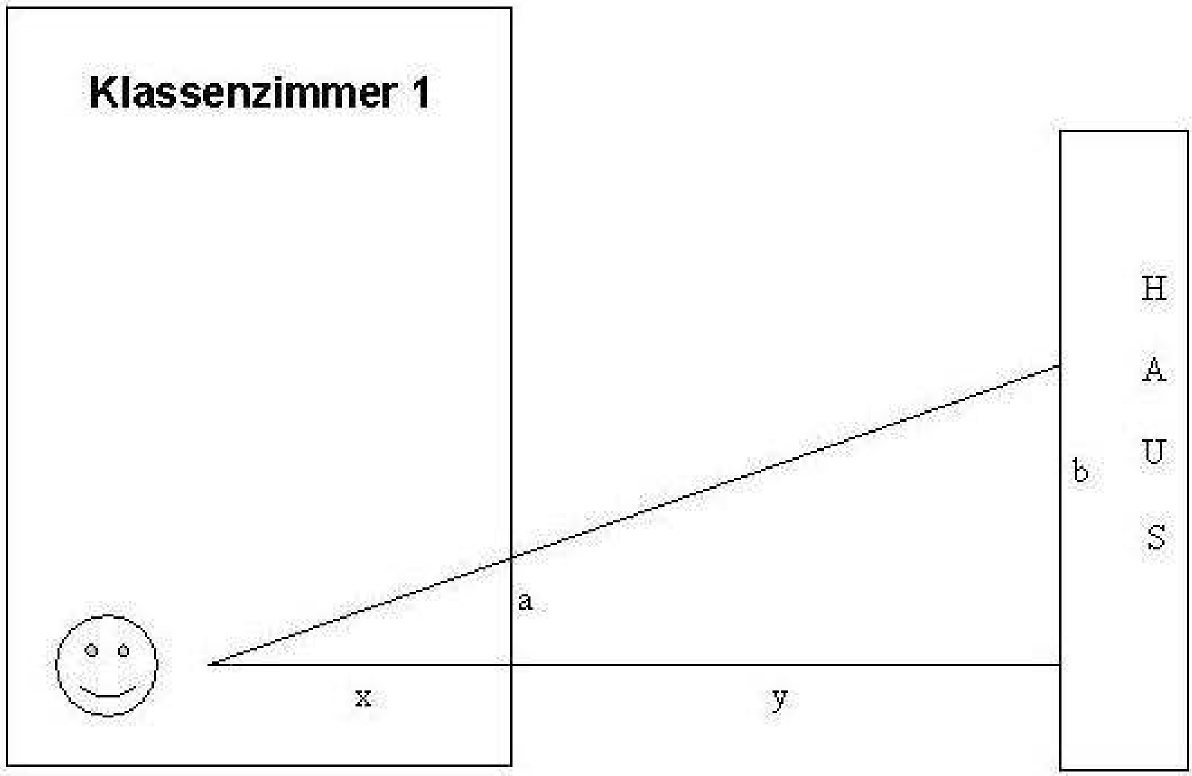
(c) keinen Punkt vorgeben

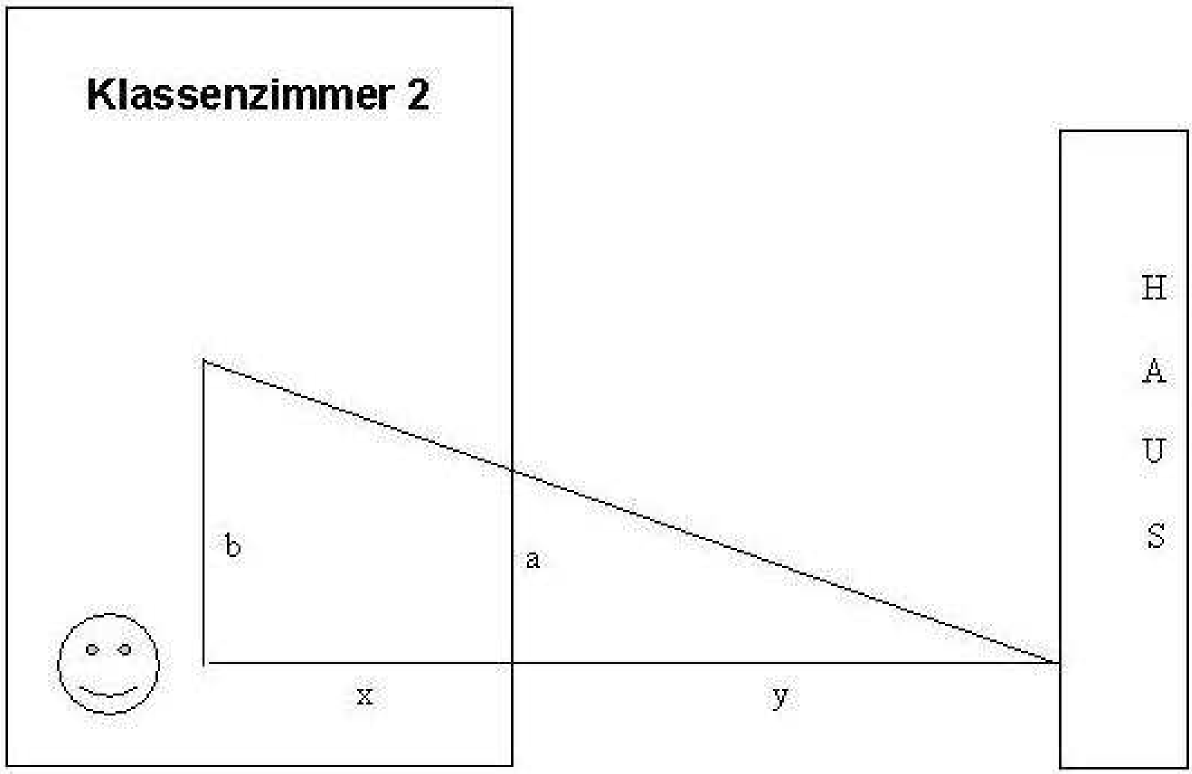
(d) Zusatzfrage: Kann P auf der Geraden wandern?

(e) Geradengleichung auf verschiedene Arten bestimmen

6. **Messungen im Klassenzimmer**

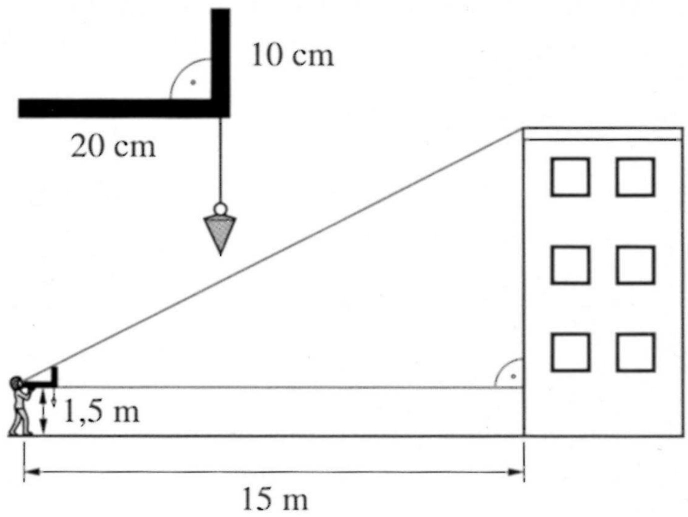
   Entwerft in eurer Gruppe einen Plan, um durch Messungen im Klassenraum den Abstand zum gegenüberliegenden Haus zu berechnen.
   Maßband und Anpeilstäbe stehen euch zur Verfügung.


Klassenzimmer 1
H
A
U
S
b
a
x
y


Klassenzimmer 2
H
A
U
S
b
a
x
y

Anregung: Berechnungen können auch auf dem Schulhof durchgeführt werden.

7. **Das Försterdreieck**

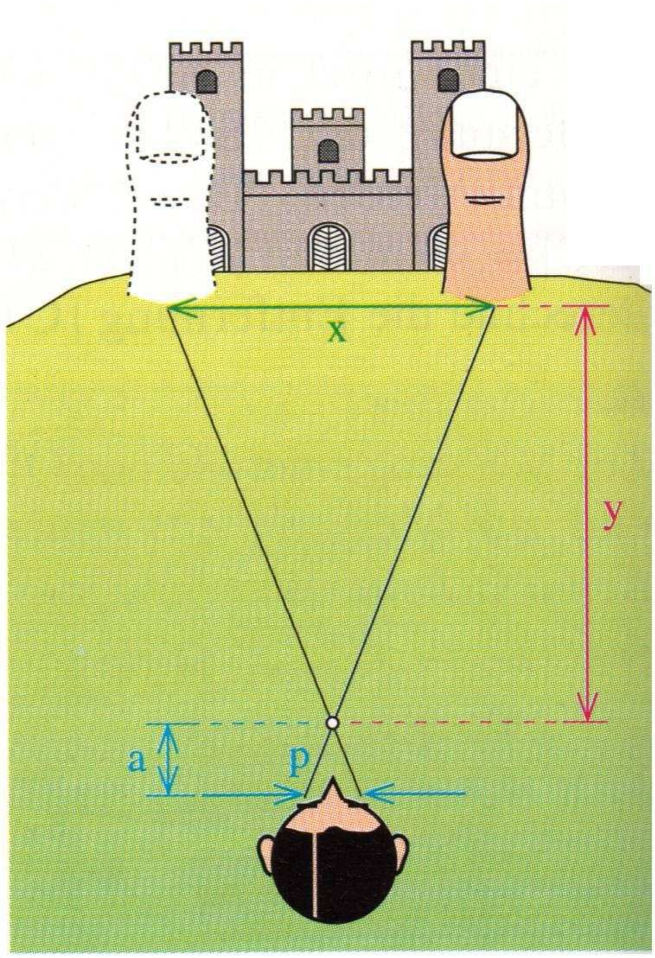


Martina findet in einem Bastelheft eine Anleitung zum Bau eines Peilgerätes, mit dem man Höhen messen kann. Die Anwendung des Peilgerätes wird dort durch die nebenstehende Zeichnung erklärt.
Martina erfährt von ihrem Vater, dass Förster mit einem ähnlichen Gerät die Höhe von Bäumen bestimmen. Ein solches „Försterdreieck“ ist ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck.

- Warum ist das Försterdreieck praktischer als das Peildreieck aus dem Bastelheft?
- Wie hoch ist ein 18 m entfernter Baum, den ein Förster aus $1,8$ m Augenhöhe anpeilt?

Quelle: Mathematik 9, Cornelsen (1995)

8. **Der Daumensprung**



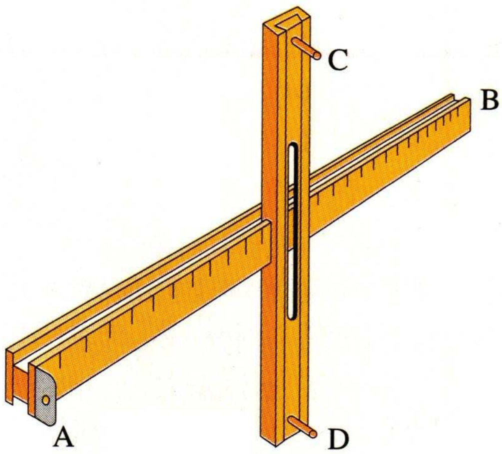
Strecke einen Arm aus und visiere den Daumen zunächst mit dem linken Auge, dann mit dem rechten Auge an.
Du bemerkst, dass der Daumen einen „Sprung“ im Gelände macht. Diese Tatsache benutzt man, um Entfernungen in der Landschaft zu schätzen (Daumensprungmethode).
Wie ist es möglich, die Entfernung zu dem Schloss zu „schätzen“??

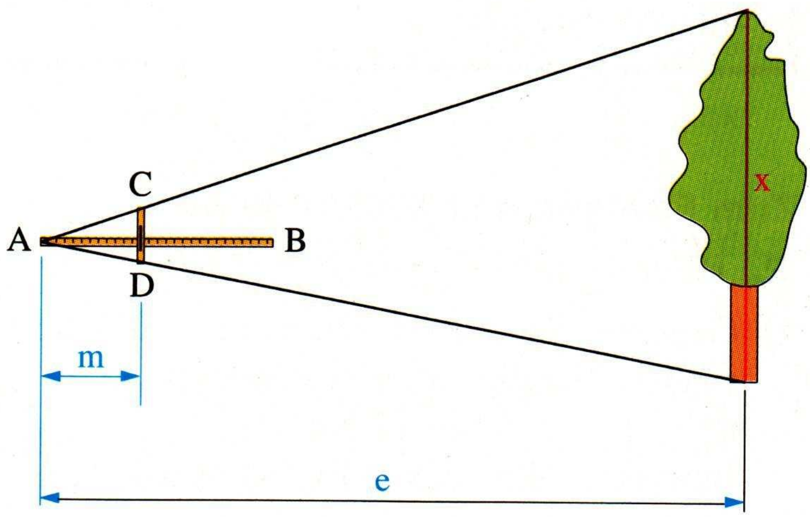
Quelle: Mathematik heute 9 (1996)

9. **Der Jakobsstab**


AKG Berlin * AKG London * AKG Paris


Tropicus Capricorni

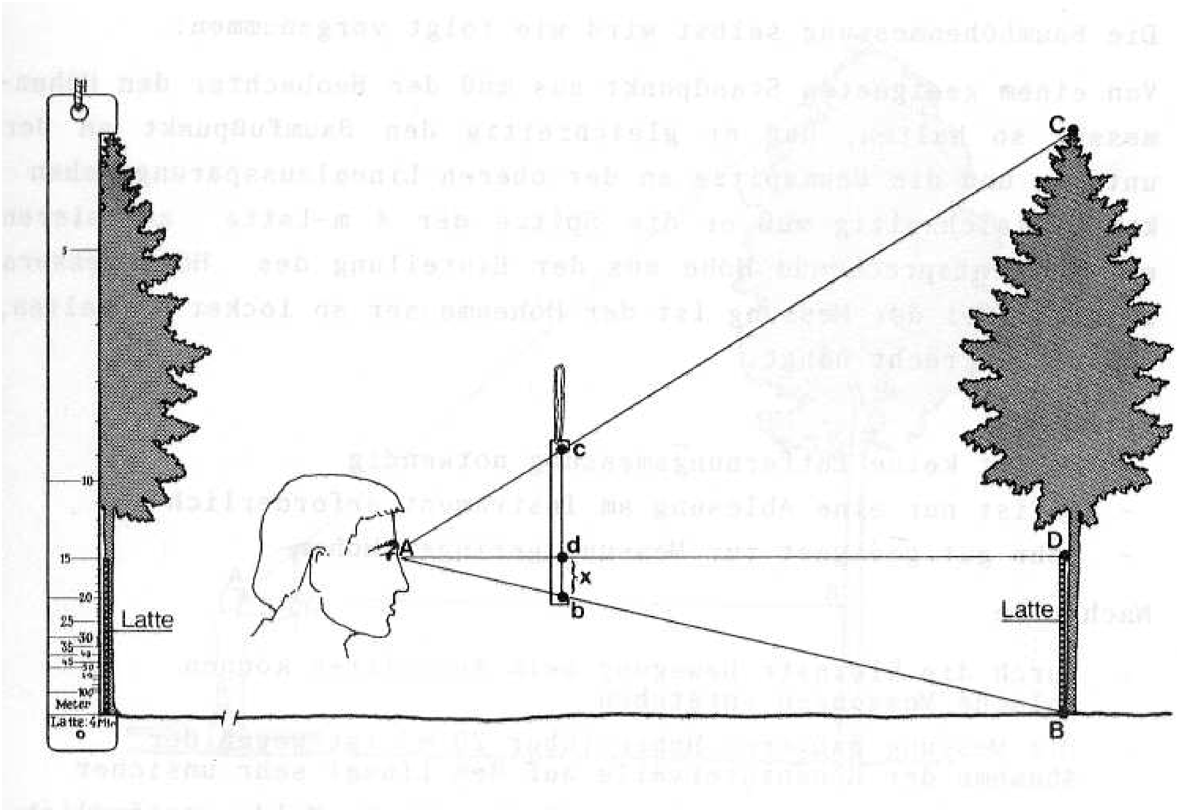

C
B
A
D

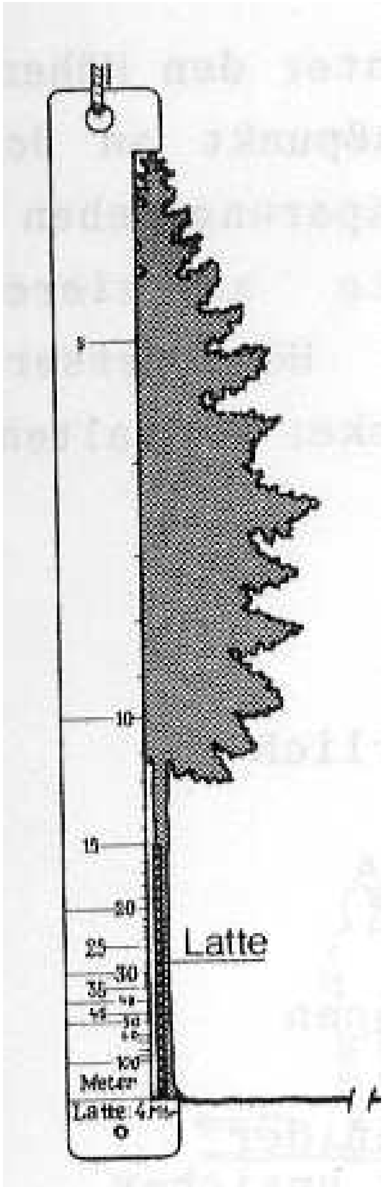


Die obigen Bilder zeigen in zeitgenössischen Darstellungen aus dem 16. Jahrhundert den Gebrauch des Jakobsstabs. Dieser ist ein kreuzförmiges Holz mit verschiebbarer Vertikalen. Beispielsweise wurde die Entfernung zwischen zwei Punkten (Stern und Mond) mit diesem Gerät angenähert ermittelt.
Wie kann dies geschehen? Welche Größen braucht man gegebenenfalls?

Quellen: Mathematik heute 9 (1996) Bigalke (1986), Diesterweg

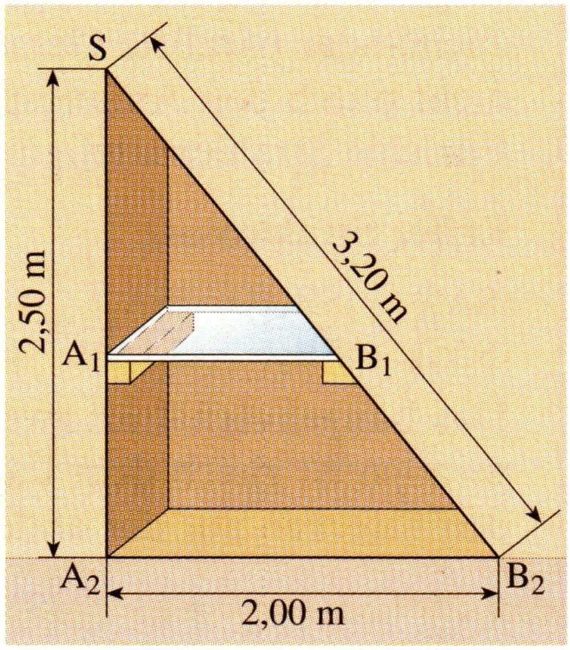
10. **Der Baumhöhenmesser von Christen**


C
c
A
d
x
b
D
B
Latte
Latte
Meter



In einem Leitfaden für Förster wird der Höhenmesser von CHRISTEN beschrieben. Er besteht aus einem einfachen Metall-Lineal mit einer 30 cm (= $|bc|$) langen Aussparung. Von einem geeigneten Standpunkt aus muss der Beobachter den Höhenmesser so halten, dass er gleichzeitig den Baumfußpunkt an der unteren und die Baumspitze an der oberen Linealaussparung sehen kann. Gleichzeitig muss er die Spitze der 4 m-Latte anvisieren und die entsprechende Höhe aus der Einteilung des Höhenmessers ablesen. Bei der Messung ist der Höhenmesser so locker zu halten, dass er senkrecht hängt.
Als Vorteil wird gepriesen, dass keine Entfernungsmessung notwendig und nur eine Ablesung am Instrument erforderlich ist. (Als Nachteil gilt der Transport einer 4 m-Latte durch das Dickicht, wobei schon so manches Wildschwein aufgeschreckt worden sein soll!)
Überprüfe diese Behauptung und kläre das Messverfahren auf!

11. **Das Regal im Dachgiebel**



In der Nische einer Dachschräge soll in $1,00\,\mathrm{m}$ Höhe ein Boden aus Glas angebracht werden.

(a) An welcher Stelle des schrägen Brettes muss ein Träger für den Boden angebracht werden?

(b) Wie lang muss der Glasboden sein? Löse diese Aufgaben rechnerisch; begründe.

Quelle: Schroedel, Elemente 9

12. **Flussbreiten bestimmen**

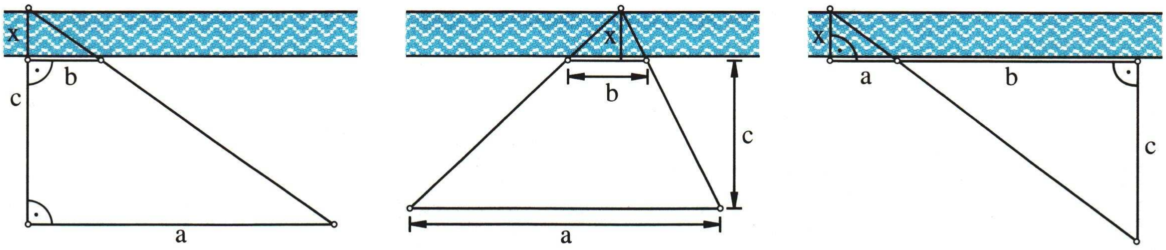


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Will man die Breite x eines Flusses von einer Uferseite aus bestimmen, so kann man vier Punkte wie in Fig. 1, Fig.2 oder Fig. 3 wählen. Aus den Abständen a, b und c lässt sich x berechnen. Bestimme jeweils x für

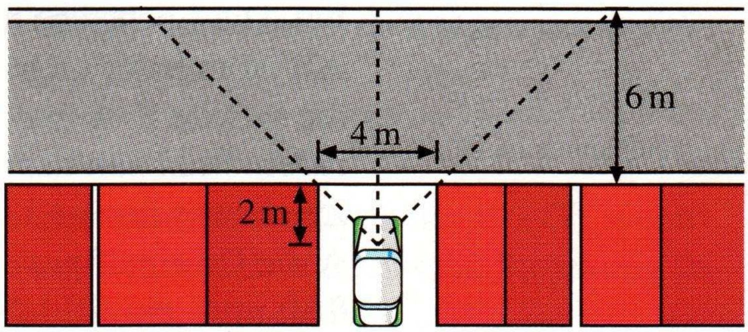
(a) Fig. 1 mit $a = 45\,\text{m},\ b = 18\,\text{m},\ c = 11\,\text{m}$

(b) Fig. 2 mit $a = 40\,\text{m},\ b = 33{,}5\,\text{m},\ c = 12\,\text{m}$

(c) Fig. 3 mit $a = 75\,\text{m},\ b = 50\,\text{m},\ c = 47\,\text{m}$

Quelle: Klett, Lambacher Schweizer 9

13. **Das Polizeiauto**



Ein Polizeiauto steht in einer Einfahrt.

(a) Wie viele Meter der gegenüberliegenden Straßenfront kann die Streife überblicken?

(b) Kann man mehr oder weniger sehen, wenn das Auto beim gleichen Abstand zur Straße weiter rechts in der Einfahrt steht?

Quelle: Klett, Lambacher Schweizer 9

14. **Geometrie aus Jules Vernes „Die geheimnisvolle Insel“**

Die Beobachtungsmomente der verflossenen Tage waren nunmehr durch die Berechnung der Plateauhöhe über dem Meeresspiegel zu vervollständigen...
Cyrus Smith hatte eine gerade, zwölf Fuß lange Stange mitgenommen, die er an seiner eigenen, ihm bekannten Körperlänge gemessen hatte. Harbert trug ein Lot oder Senkblei; es bestand aus einem einfachen Stein, der an eine geschmeidige Pflanzenfaser gebunden war. Etwa zwanzig Fuß vom Küstensaum und etwa fünfhundert Fuß

von der senkrecht aufsteigenden Granitwand entfernt, grub Cyrus Smith die Stange zwei Fuß tief in den Sand und brachte sie durch sorgfältiges Absteifen mittels des Lotes in eine senkrechte Stellung zur Himmelsebene. Darauf ging er so weit zurück, bis er, im Sande liegend, die Spitze der Stange mit dem Grate der Granitwand zugleich sah. Diesen Punkt kennzeichnete er durch einen Pflock. „Du kennst doch die Grundlehren der Geometrie?“ fragte er Harbert.
„Einigermaßen, Herr Cyrus“, antwortete Harbert, der nie mehr sagte als er wusste. „Welche Eigenschaften ähnliche Dreiecke haben, weißt du doch noch?“ „O ja“, erwiderte Harbert, „die entsprechenden Seiten derselben sind einander proportional.“ „Richtig, mein Sohn“, sagte der Ingenieur. „Sieh, ich habe hier soeben zwei einander ähnliche rechtwinklige Dreiecke konstruiert, das erste, kleinere hat als Seiten oder Schenkel die senkrechte Stange, die Entfernung zwischen Pflock und Basis der Stange und als Hypotenuse meinen Gesichtswinkel; das zweite Dreieck hat als Seiten die senkrechte Wand, deren Höhe noch gemessen werden soll, die Entfernung zwischen Pflock und Basis der Wand und meinen Gesichtswinkel wieder als Hypotenuse, die als Verlängerung der des ersten Dreiecks zu betrachten ist.“ „Ach, Herr Cyrus, ich verstehe!„ rief Harbert. „Da die Entfernung zwischen Pflock und Stange der Entfernung zwischen Wandbasis und Pflock proportional ist, so ist auch die Höhe der Stange der Höhe dieser Wand proportional.„
„Sehr richtig, Harbert“, antwortete der Ingenieur, „und wenn wir die ersten beiden Entfernungen gemessen haben, so brauchen wir nur, da uns die Höhe der Stange bekannt ist, eine Verhältnisrechnung aufzustellen, um die Höhe der Felswand zu ermitteln. Wir sparen uns dadurch die Mühe, die Wand direkt zu messen.“
Die beiden Horizontalen wurden mit Hilfe der Stange ermittelt, deren Höhe über dem Sand genau zehn Fuß betrug.
Die erste Horizontale beziehungsweise die Entfernung zwischen dem Pflock und dem Standpunkt der Stange betrug fünfzehn Fuß, die Entfernung zwischen dem Pflock und der Mauerbasis nur fünfhundert Fuß. Als das Ergebnis der Messung festlag, kehrten Cyrus Smith und Harbert zu den Schloten zurück.
Dort suchte der Ingenieur einen flachen Stein hervor, den er auf einem seiner früheren Wege gefunden hatte, eine Art Schieferstein, auf den er mit einer scharfen Muschel leicht schreiben konnte, und er stellte folgende Proportion auf:
$15 : 500 = 10 : x$
$500 \cdot 100 = 15 \cdot x$
$5000 = 15 \cdot x$
$x = \frac{5000}{15}$
$x = 333,33$
Diese Berechnung ergab für die Granitwand eine Höhe von dreihundertdreiunddreißig Fuß ($1\,\mathrm{ft} = 12\,\mathrm{Zoll} = 0,3048\,\mathrm{m}$).

An der Stelle, von wo er die Stangenspitze sich mit dem Felsgrat decken sah, trieb er seinen Pflock in den Boden. Jetzt war die Messung einfach.

15. **Geometrie im Gelände**

Kaum ein Themengebiet lädt so sehr zur praktischen Umsetzung ein, wie die Strahlensätze. Im Folgenden sollen die Vorteile aber auch die Risiken, die ein Verlassen des Klassenraums mit sich bringt, angesprochen werden.

16. **Die Werbetafel**

    Mit großen Schritten geht die Fertigstellung des neuen Verwaltungsgebäudes der weltbekannten Schokoladenfirma „Ritter Sport“ voran. Es fehlt noch die gute alte quadratische Reklametafel an der Giebelfläche. Doch dieses Prunkstück aus alten Tagen ist viel zu klein für diese riesige Fläche. Welche Größe könnte eine neue quadratische Werbetafel maximal haben?
    Die Giebelfläche kannst du im Verhältnis 1 : 250 leicht zeichnen: Sie sieht aus wie ein Dreieck mit den Seitenlängen 12 cm, 10 cm und 7,2 cm.

    Quelle: Sinus-Modellversuchsband Rheinland-Pfalz

17. **Mathe-Nachhilfe im Internet**

    Im Internet gibt es unter `http://www.zahlreich.de/` die Möglichkeit, Fragen zu Mathematikaufgaben zu veröffentlichen und sich von anderen helfen zu lassen. Hier ist eine Auswahl der Fragen, die Schüler dort gestellt haben.
    Kannst du ihnen helfen?

    (a) Wie ist der Rechenweg das Ergebnis dieser Aufgabe:
    Indianer Häuptling „Galoppierende Schnecke“ kann bei ausgestrecktem Arm (Armlänge 80 cm) mit seinem Daumen (Breite 3 cm) die 120 m lange Eisenbahnbrücke über den Rattlesnake River gerade verdecken. Wie weit ist er von

der Brücke entfernt?
Gruß
E.

(b) Zeichne ein Dreieck ABC durch das eine Gerade läuft, die die Seite $|AC|$ im Punkt D und die Seite $|AB|$ im Punkt E schneidet (Leider kann ich die Schaufigur nicht mitschicken).
$|AD| = 4\,\text{cm}$; $|AC| = 6\,\text{cm}$; $|AB| = 7,5\,\text{cm}$; $|BC| = 3,6\,\text{cm}$; $|DE| = 2,4\,\text{cm}$
Frage: Ist $|BC|$ parallel zu $|DE|$?
cu Kolja.

(c) Frage:
Der Mond ist 382200 km von der Erde entfernt. Wenn man einen Bleistift von 7 mm Durchmesser in einer Entfernung von c.a.78 cm vor das Auge hält verdeckt dieser gerade den Mond. Welchen Durchmesser hat der Mond?
Danke, Anna!

(d) Hallo ihr alle!
Kann mir mal bitte jemand helfen? Ich brauche die Lösung aber heute noch!!
Viktor hält mit ausgestrecktem Arm (60 cm) ein Streichholz so in der Hand, dass es gerade einen Laternenmast (Höhe etwa 4 m) verdeckt. Wie viele Meter steht er vom Laternenmast entfernt?
Hoffentlich kann mir jemand helfen!!!!!!!!!

(e) Wer kann mir die Umkehrung der Strahlensätze erklären und wie man diese dann auf die Aufgaben anwendet?
Wie beweist man den 1. Strahlensatz?
Wir haben zwar was im Heft stehen aber ich versteh nicht wie ich das morgen in der Arbeit schreiben soll.
Zudem weiß ich nicht, wie man den 1. und 2. Strahlensatz auf Aufgaben. Theoretisch kann ich ihn aber nicht praktisch.
Wenn man a, b, a_1 gegeben hat, wie rechnet man das dann mit dem Strahlensatz.
Oder wenn c gesucht wird?
Das ist sicher gar nicht schwierig, aber ich raff das echt nicht.
Also helft mir bitte, wenn ihr wollt, das ich morgen nicht schon wieder eine 5 schreibe.
Bitte!!

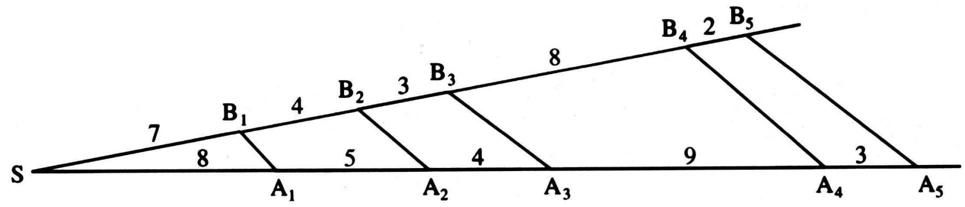
(f) Hallo!
Ich brauche Informationen zu den Strahlensätzen → aber allgemeine!!! Geschichtlichen Hintergrund, wer hat sie „erfunden“? Soll ein Referat werden. Was das ist und wie das geht mit den SS weiß ich schon. Vielen DANK!
Martin

18. **Anwendungen der Strahlensätze**

Quellen (bis Aufg. 35): Welt der Mathematik 9 (1990), Mathematik heute 9 (1996), Lambacher Schweizer 9 (1997), Schnittpunkt 9 (1995), MUED

Parallele Geraden

Welche Strecken in der Abbildung sind parallel zueinander?



19. **Kamera**

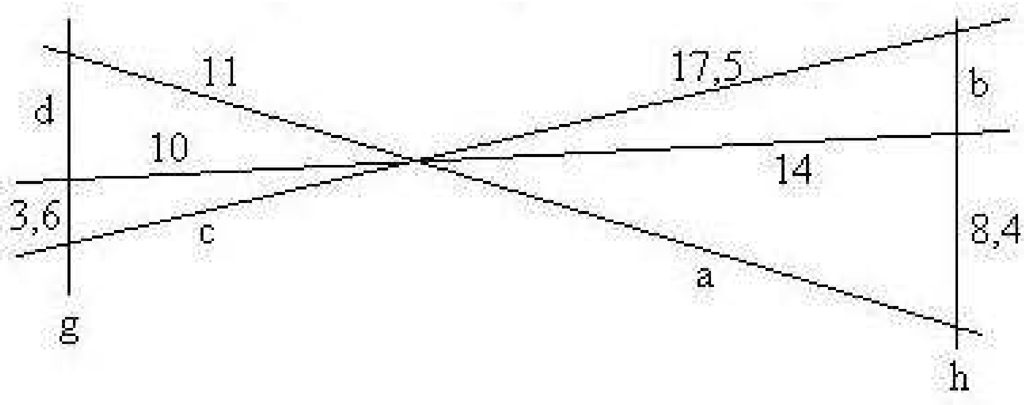
Eine Kleinbildkamera macht Negativbilder der Größe 24 mm × 36 mm.

(a) Geben die üblichen Vergrößerungsmaße das ganze Bild wieder? (7 cm×10 cm; 9 cm× 13 cm; 10 cm × 15 cm; 13 cm × 18 cm)

(b) Gib, falls möglich, den Vergrößerungsfaktor an.

20. **Trockenübung**

Berechne a, b, c und d (Maße in cm). Die Geraden g und h sind parallel zueinander.



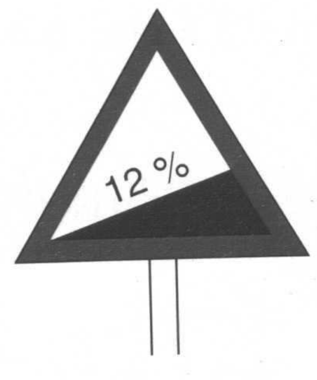
21. **Steigung und Gefälle**

Im Gebirge sieht man häufig Straßenschilder, die die Steigung bzw. das Gefälle einer Straße in Prozent angeben. 12% bedeutet z.B., dass die Straße auf 100 m horizontal gemessen um 12 m ansteigt.

(a) Welchen Höhenunterschied überwindet die Straße auf 2,3 km?

(b) Was bedeutet 100% Steigung?

(c) Was steht auf dem Schild, wenn eine Straße auf 3,8 km einen Höhenunterschied von 285 m überwindet.

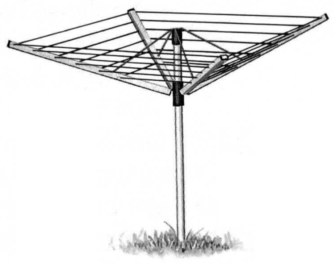


22. **Wäschespinne**

Eine Wäschespinne hat sechs Leinen. Sie sind im Abstand von 12,5 cm gespannt. Die innerste Leine ist 30,5 cm vom Mittelpunkt entfernt und ist vier mal 40 cm lang.

(a) Wie lang ist die äußerste Leine?

(b) ie viel Meter Leine steht auf der Wäschespinne insgesamt zur Verfügung?



23. **Kopiergerät**

(a) Bei einem Fotokopiergerät wurden bei einer Kopie alle Seiten im Verhältnis 2 : 5 verkleinert. Auf wie viel Prozent hat sich die Fläche verkleinert?

(b) Bei einer anderen Fotokopie wurde die Fläche auf 225% vergrößert. Um wie viel Prozent wurden die Strecken vergrößert?

24. **Geometrische Figuren**

Welche der folgenden Figuren sind immer ähnlich zueinander?

(a) gleichseitige Dreiecke, spitzwinklige Dreiecke, kongruente Dreiecke, rechtwinklige Dreiecke, gleichschenklige Dreiecke.

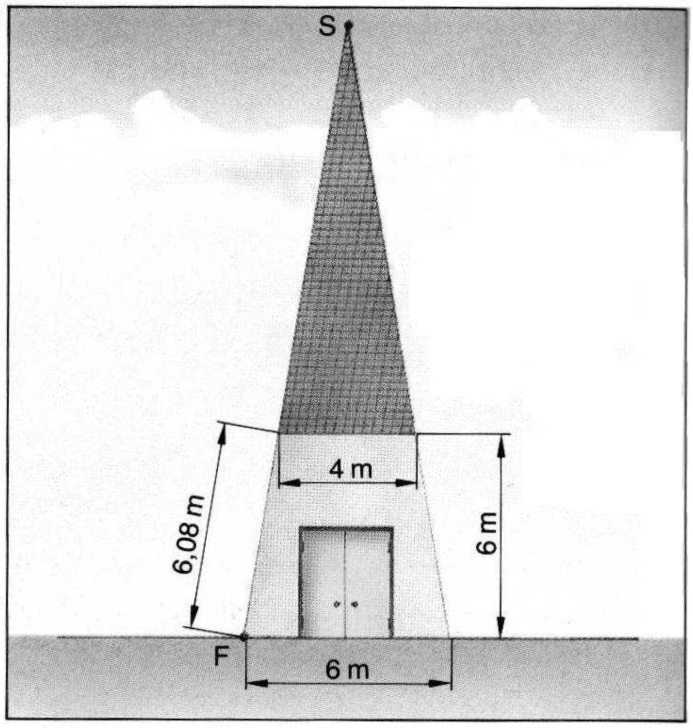
(b) Kreise, Rechtecke, Quadrate, Drachen, Rauten.

25. **Kirchturm**

Ein Kirchturm wird wie in der Zeichnung dargestellt vermessen.

(a) Wie hoch ist der Turm?

(b) Wie lang ist eine Kante?

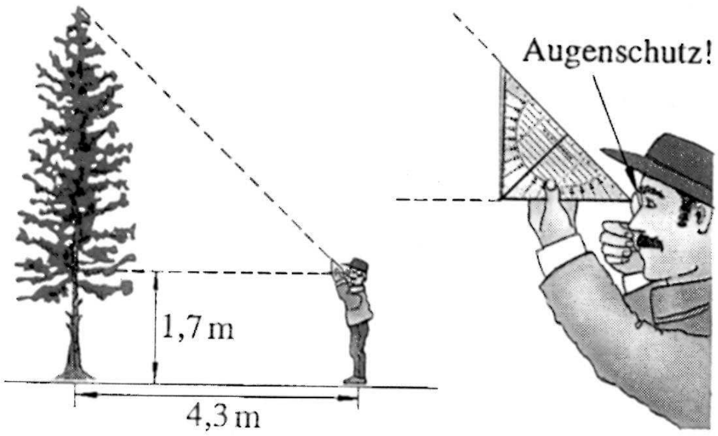


26. **Försterdreieck**

    Ein Försterdreieck ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck. Du willst die Höhe eines Turmes mit Hilfe eines Försterdreiecks bestimmen. Beschreibe dein Vorgehen. Begründe, warum diese Methode funktioniert.
    Benutze in deiner Erklärung den Begriff „ähnlich“.

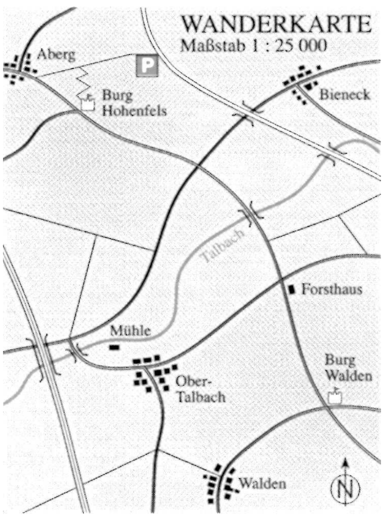
27. **Höhenmessung**

    Wie hoch ist der Baum?
    Wie hoch ist dein Schulgebäude?



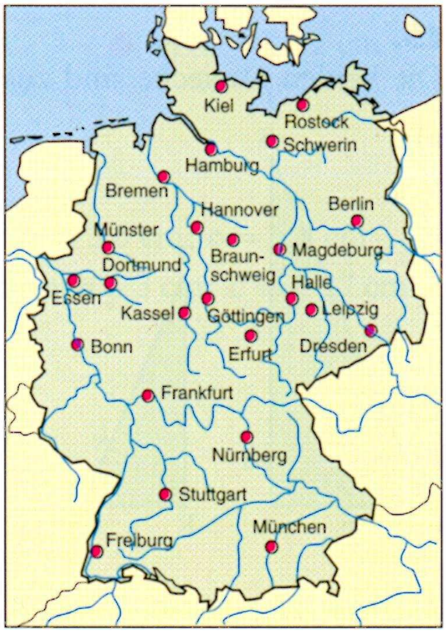
28. **Entfernungen**

Der Maßstab bei einer Zeichnung oder Landkarte zeigt das Verhältnis der Länge einer Strecke in der Zeichnung zu der Länge in der Wirklichkeit an.
Auf der neben stehenden Landkarte sind zwei interessante Ausflugsziele 43 mm voneinander entfernt.



29. **Luftlinie**

Gib die Luftlinienentfernungen von 4 Orten deiner Wahl an. Die Karte ist im Maßstab 1 : 15000000 abgebildet.



30. **Pyramiden**

Im alten Ägypten wurden die Höhen von Pyramiden nach der „Schattenmethode“ mit Hilfe eines Stabes bestimmt.

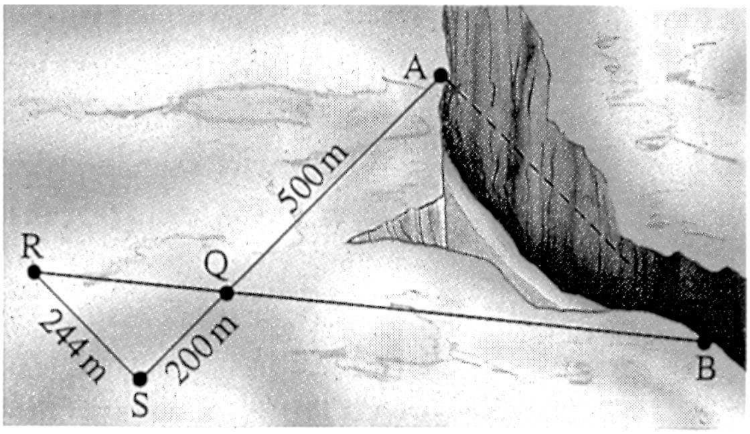
(a) Fertige eine geeignete Skizze der Schattenmethode an und erläutere, wie man den Stab halten muss.

(b) Berechne die Pyramidenhöhe für die Cheopspyramide.

Länge des Schattens der Pyramide (am Boden gemessen; inklusive der halben Pyramidenbreite):	240 m
Höhe des Stabes:	3 m
Länge des Schattens des Stabes (am Boden gemessen):	5 m

31. **Unwegsames Gelände**

Zwei Punkte A und B liegen am Rand einer Schlucht in ebenem Gelände. Ihr Abstand soll mit Hilfe der Punkte Q, R und S bestimmt werden. Sie sind so gewählt, dass RS zu AB parallel ist.
Berechne aus den Angaben den Abstand $|AB|$.



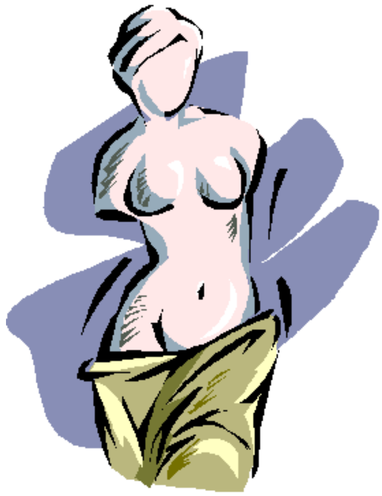
32. **Kunstwerk auf Sockel**

Eine Person (Augenhöhe $1,70\,\text{m}$) steht in einer Entfernung von $10,0\,\text{m}$ vor einer Skulptur, welche auf einem Sockel steht. Um die Höhe der Skulptur zu bestimmen, dreht sich die Person auf der Stelle mit dem Rücken zur Skulptur und hält sich einen $25\,\text{cm}$ hohen, ebenen Spiegel vertikal so vor das Gesicht, dass sie darin die Skulptur gerade formatfüllend (ohne den Sockel!) sieht. Der Spiegel muss sich dabei genau $50\,\text{cm}$ vor dem Gesicht befinden.

(a) Erstelle zunächst eine (nicht maßstabsgetreue) Überlegungsskizze! Beachte dabei, dass das Spiegelbild eines Gegenstandes in derselben Entfernung hinter dem Spiegel zu sein scheint, in welcher sich der Gegenstand vor dem Spiegel befindet.

(b) Berechne die Höhe der Skulptur!

(c) Berechne die Höhe des Sockels, wenn sich die Spiegelunterkante genau $1,67\,\text{m}$ über dem Boden befindet!

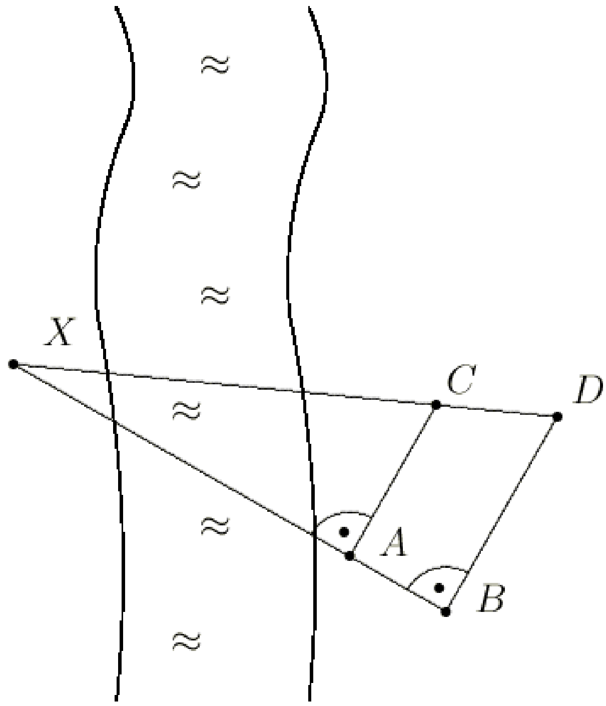


33. **Messgenauigkeit**

Um die Entfernung eines unzugänglichen Punktes X zu bestimmen kann man folgendermaßen vorgehen:
Man legt zwei Punkte A und B fest, die mit X auf einer Geraden liegen („fluchten„).
Mit einfachen optischen Geräten werden Lotgeraden zu AB festgelegt und auf diesen zwei Punkte C und D, die wieder in einer Flucht mit X stehen.

(a) Berechne aus $AC = 60\,\mathrm{m}$, $BD = 67\,\mathrm{m}$ und $AB = 35\,\mathrm{m}$ den Abstand XA.

(b) Wie groß ist der prozentuale Fehler des Ergebnisses, wenn AC um 1% zu groß gemessen wurde?



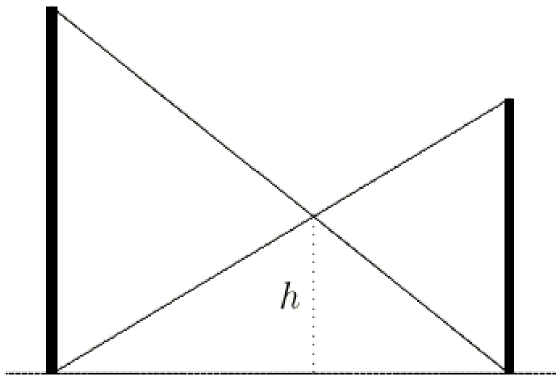
34. **Mond und Sonne**

(a) Eine Kreisscheibe mit 8 cm Durchmesser bedeckt genau den Vollmond, wenn sie 8 m 84 cm 7 mm vom Auge entfernt ist. Zur gleichen Zeit wird die Entfernung Erde-Mond mit einem Radarstrahl zu 384400 km bestimmt. Berechne den Durchmesser des Mondes!

(b) Bei einer totalen Sonnenfinsternis bedeckt der Mond genau die Sonne, die zu dieser Zeit 149600000 km von der Erde entfernt ist. Welchen Durchmesser hat die Sonne, wenn die Entfernung Erde-Mond zum Zeitpunkt der Sonnenfinsternis 373600 km beträgt?

35. **Regal**

Die Seitenteile eines Regals sind $1,80\,\mathrm{m}$ bzw. $1,50\,\mathrm{m}$ lang. Zur Stabilisierung des Regals sollen zwei Diagonalstreben festgeschraubt werden.
In welcher Höhe h treffen sich die beiden Streben?
Was wäre, wenn das Regal breiter wäre?



36. **DIN-Formate**

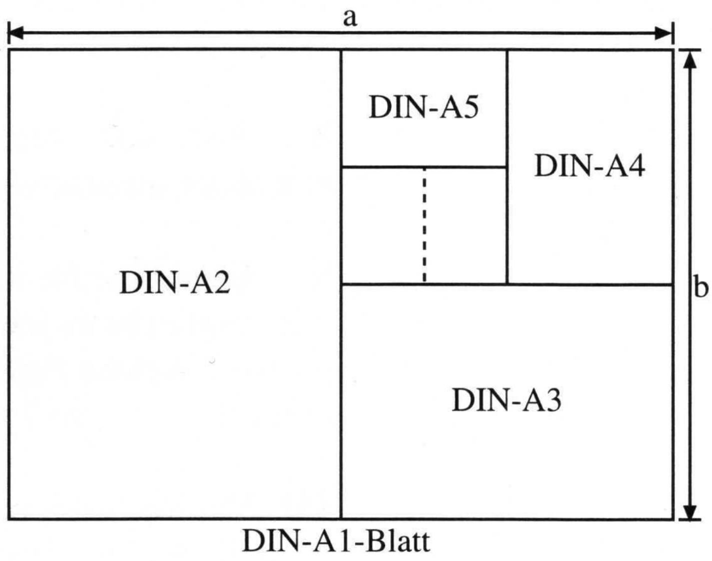
Für DIN-A Formate gelten folgende Bedingungen:

(a) Die Rechtecke sind einander ähnlich

(b) Durch Halbieren der längeren Seite erhält man das nächstkleinere DIN-A Format, z.B. aus DIN A4 entsteht DIN A5

(c) Ein Rechteck des Formats DIN A0 ist $1m^2$ groß

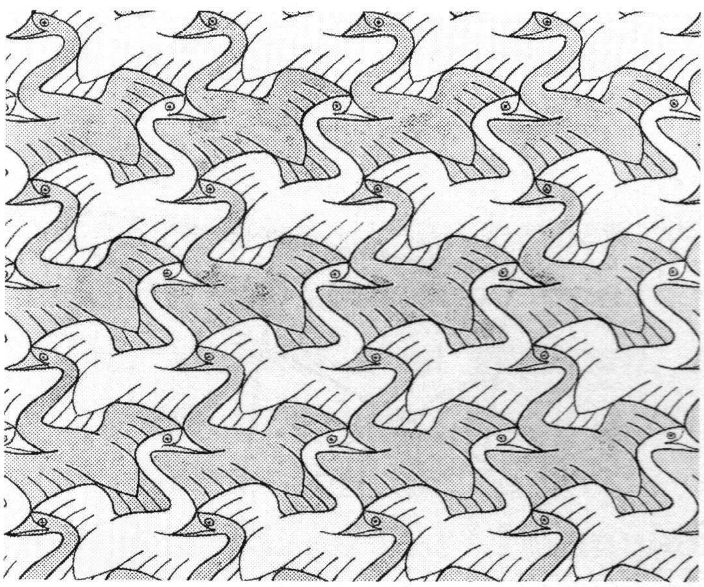
Was kannst du über die einzelnen Seitenlängen aussagen?

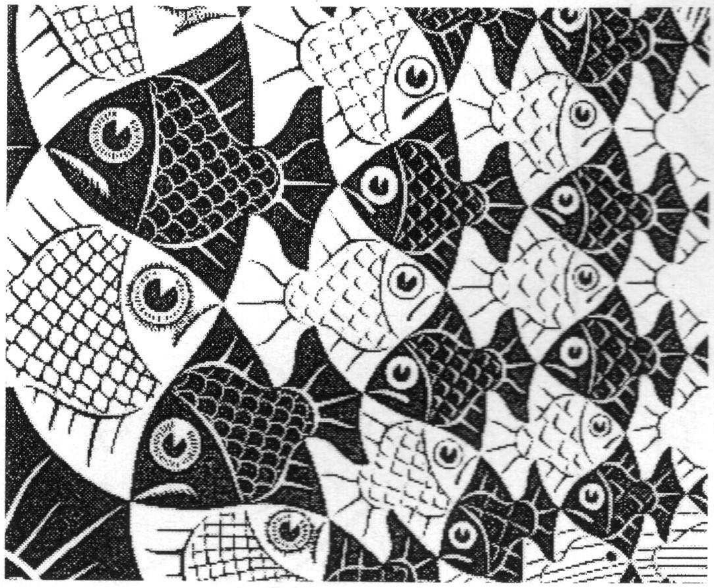


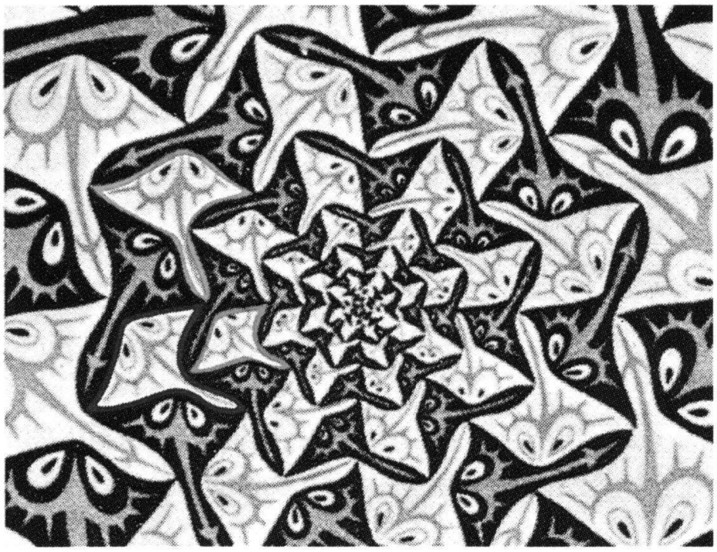
Quellen: Elemente 9 (1995), Lambacher Schweizer 9 (1997)

37. **Escherbilder**

Finde möglichst viele Gemeinsamkeiten und Unterschiede der folgenden Abbildungen

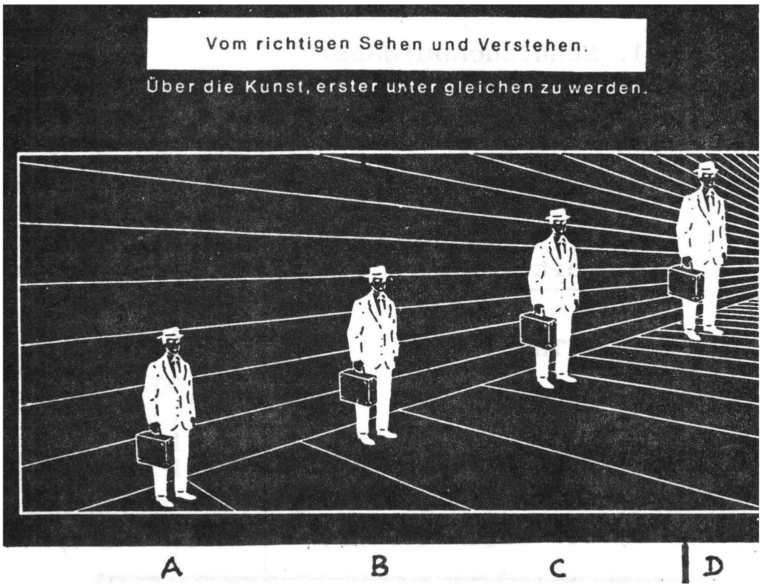


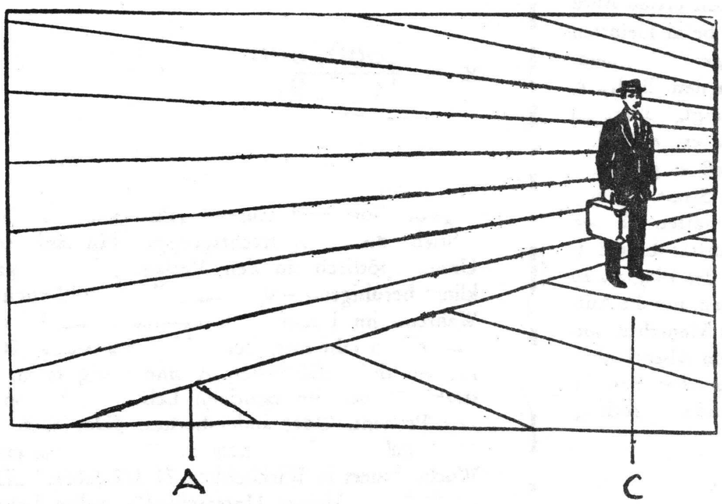




38. **Optische Täuschung**

Wie müsste Herr A gezeichnet werden, damit er genau so groß aussieht wie Herr C?





39. **Ähnlichkeitspuzzle**

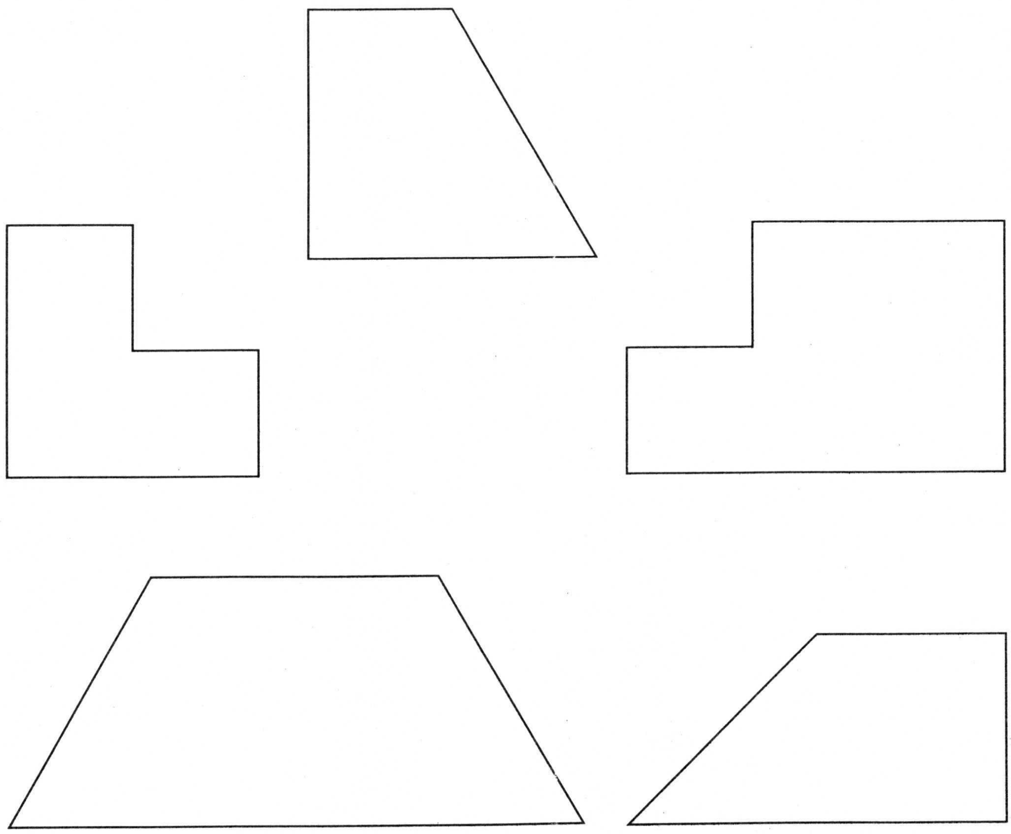
KOPIERVORLAGE

Unten sind fünf verschiedene ebene Figuren abgebildet. Sie sind die Ausgangsfiguren für fünf kleine geometrische Puzzles.

- *Fertige von jeder Figur vier Exemplare an (Vorlage auf Karton oder Papier legen, dann die Eckpunkte der Figuren mit dem Zirkel durchstechen, die Punkte entsprechend verbinden und die Figur ausschneiden).*

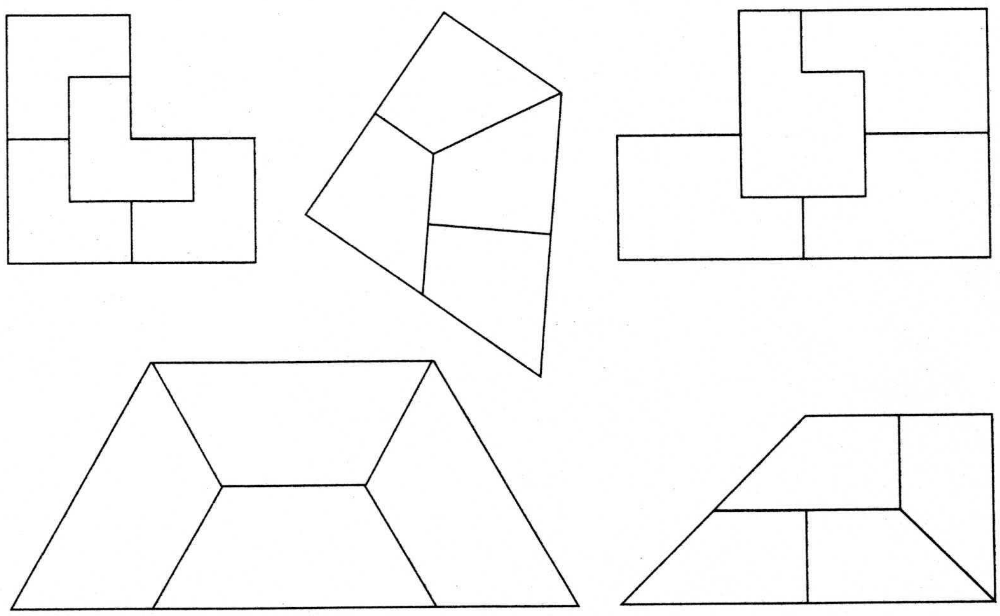
- *Setze diese vier (zueinander kongruenten) Einzelteile nun zu einer (größeren) Figur zusammen, die zu der Teilfigur ähnlich ist!*

Das Legemuster für die fünf verschiedenen Puzzles ist natürlich immer ein anderes.

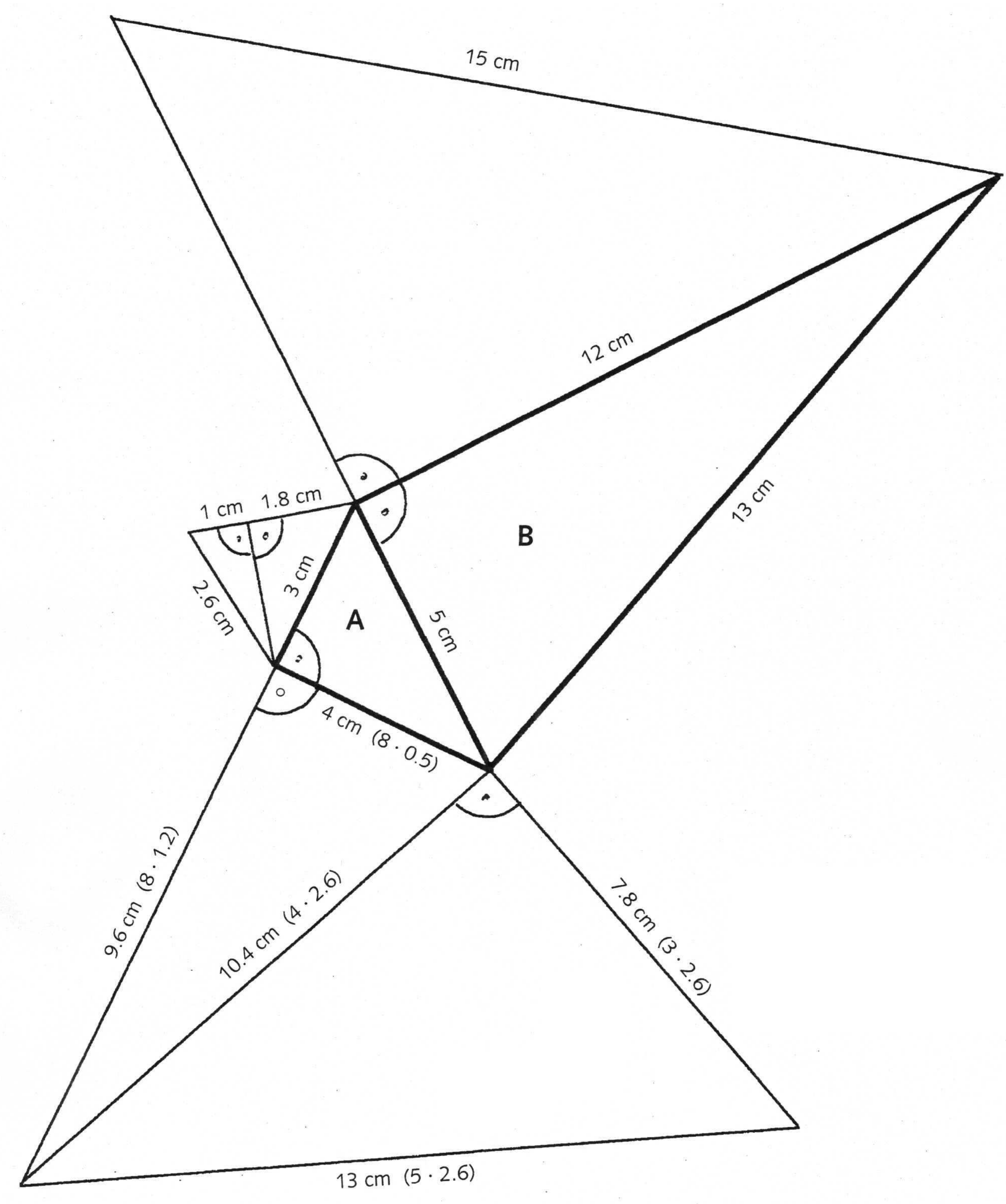


Quelle: Armbrust, A. in: mathematik lehren (1998)

Lösung:



40. **Pythagoreische Grüße**

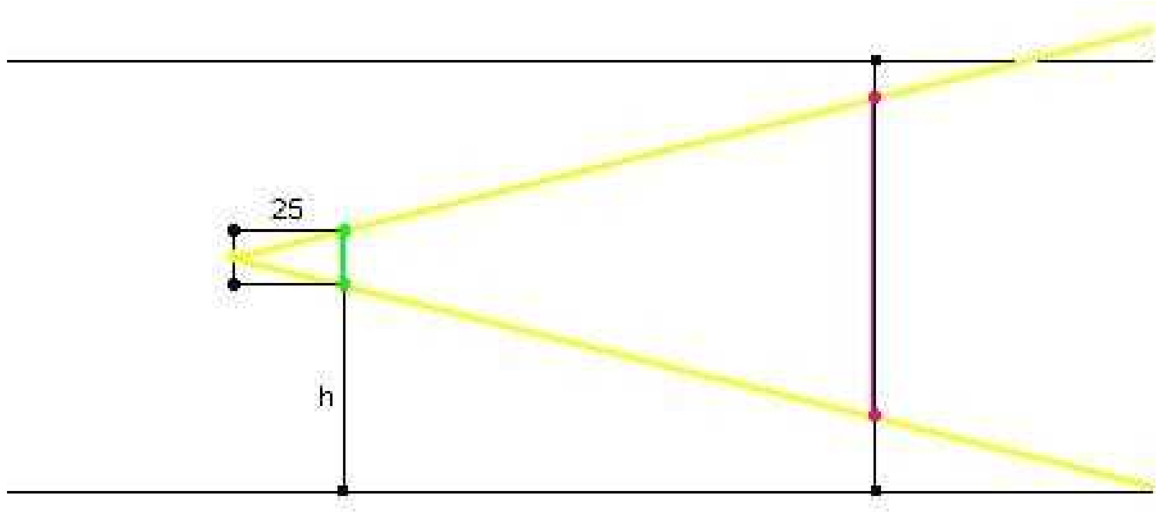


Quelle: Wälti, B.: Mathespiele für die Sek.I. Verlag an der Ruhr, S. 63f.

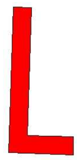
Spielregeln:

Die Spieler zeichnen als Ausgangsfigur gemeinsam zwei (rechtwinklige) Dreiecke A und B, die eine Seite gemeinsam haben (vgl. Abb.). Spieler 1 beginnt, indem er eine der 4 vorhandenen freien Dreieckseiten wählt und darüber ein zu A oder B ähnliches Dreieck errichtet. Bedingung ist, dass das neue Dreieck vollständig auf das Blatt passt (mm-Genauigkeit) und dass keine Seite kleiner als 1 cm ist. Dann kommt Spieler 2 an die Reihe. Wer das letzte Dreieck zeichnen kann, gewinnt.

41. **Diashow**
Für den Urlausbsdiaabend soll ein 5cm hohes Dia auf eine 2m hohe Leinwand vergrößert werden, die von der Decke herunter hängt. Das Zimmer ist ca. 2,4m hoch und das Dia wird in einem Abstand von 25cm von der Projektorlampe in den Apparat gesteckt. Wo muss der Projektor stehen, damit das Dia unverzerrt auf die Leinwand projiziert werden kann?
Die Schüler erhalten keine Skizze. Sie sollen aus dem Text ein mathematisches Modell entwickeln, das den oben beschriebenen Sachverhalt möglichst gut wiedergibt. Erst damit lässt sich die Aufgabe bewältigen.
Als Hilfe kann die unten abgebildete Skizze in beweglicher Form mit einem Beamer projiziert werden.

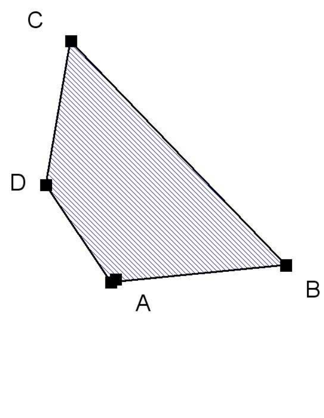


42. Vergrößern



Vergrößere den vorgegebenen Buchstaben mit dem Faktor 2,5.

43. Stretching



a) Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks ABCD, indem du erforderlichen Längen misst.

b) Bilde das Viereck ABCD durch zentrische Streckung mit k = 1,5 ab. Bestimme jeweils den Flächeninhalt von Original und Bild.

5 Trigonometrische Beziehungen

1. **Vermessungen**

   Auf einem Hügel namens Ffynnon Garw in Wales; um die Jahrhundertwende; zwei Vermessungstechniker bei der Arbeit, zahlreiche Dorfbewohner warten gespannt auf das Ergebnis.

   Pfarrer: Nun, wie hoch ist er?
   Vermessungstechniker: Bitte, bitte vor uns liegen noch stundenlange Berechnungen.
   2.Vermessungstechniker: Ich fürchte, Sie werden noch etwas Geduld aufbringen müssen, doch heute Abend wissen wir's. [...]
   Dorftrottel: Später wissen Sie's dann. Wie denn?
   2.Vermessungstechniker: Nun, wir haben Messungen vorgenommen in Bezug auf die beiden Hügel da, die Höhe [...] kennen wir schon.
   Dorftrottel: Wie wurden die denn gemessen?
   2.Vermessungstechniker: Auf dieselbe Art, im Vergleich zu anderen Hügeln.
   Dorftrottel: Und wer hat die gemessen?
   Pfarrer: Gott, mein Junge, Gott!!!?

Zitiert aus dem Film: „Der Engländer, der auf einen Hügel stieg und von einem Berg herunterkam“:
In diesem Film spielt Hugh Grant einen freundlichen Kartographen, der bei einer Landvermessung im Sommer 1917 ungewollt eine ganze walisische Kleinstadt gegen sich aufbringt. Er erklärt den Berg, auf den die Bürger so stolz sind, kurzerhand zum Hügel. Der Wirt des Ortes reagiert prompt: Der übergenaue Engländer wird gefangen gesetzt, bis der Hügel von den Bürgern um die fehlenden fünf Meter, und somit amtlich, zum 'Berg' erhöht wurde …

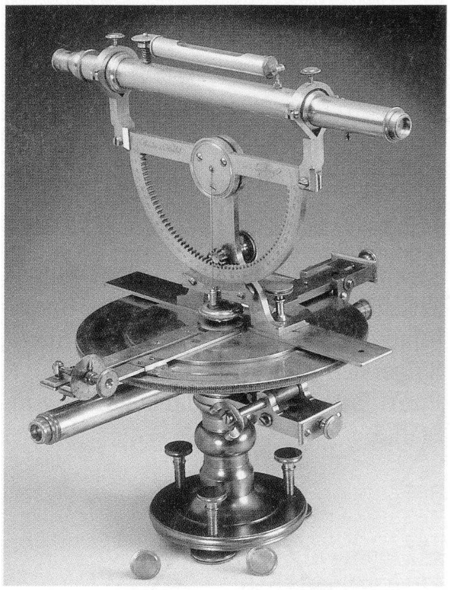
Wie könnten die beiden Vermessungstechniker die Höhe des Berges gemessen haben?

Quelle: Mathematische Unterrichtspraxis 21 (2000)

2. **Historisches zum Theodolit**

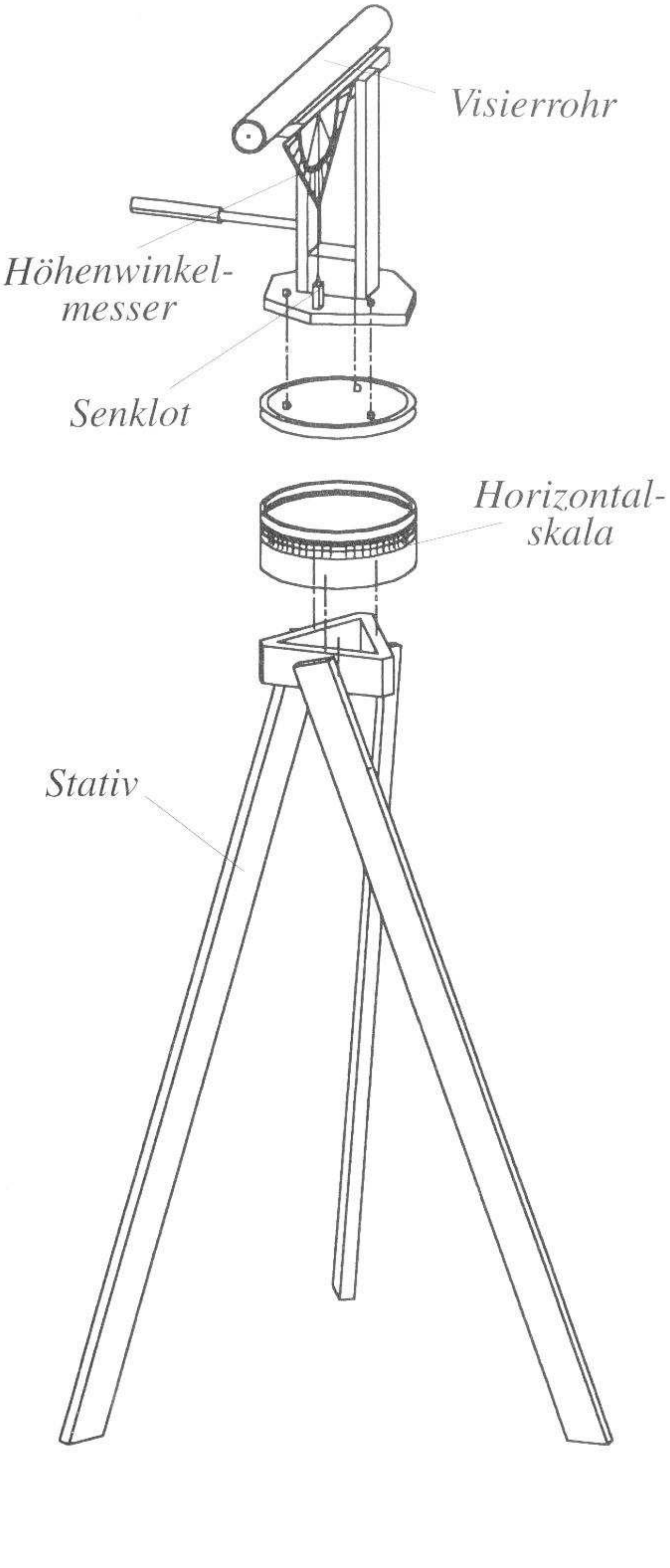
   Seit dem 16. Jahrhundert ermöglicht die Erfindung des Theodoliten, größere Distanzen und Flächen in der Vermessungstechnik auf völlig neue Art zu bestimmen.
   In seiner einfachen Form besteht der Theodolit aus einem Fernrohr, das man um zwei Achsen (vertikal und horizontal) drehen kann. Teilkreise mit Skalen gestatten, die Horizontalwinkel und Vertikalwinkel (Höhenwinkel) zu messen.
   Zwischen Theodolit und dem Gegenstand, dessen Höhe gemessen werden soll, besteht Sichtverbindung. Mit Hilfe des Visierrohrs wird die Spitze des Objekts angepeilt. Wenn das Fadenkreuz genau auf die Spitze zeigt, kann der richtige Winkel am Höhenmesser abgelesen werden.

   In den letzten Jahren wirkte sich die rasche Entwicklung der Mikroelektronik revolutionierend auf die Entwicklung der Vermessungsverfahren und Instrumente aus. Moderne Theodoliten können nicht nur vertikale und horizontale Winkel, sondern mit Hilfe von Infrarotstrahlen auch Entfernungen bis 3 km auf 2 mm genau messen. Die Messdaten werden dann per Computer ausgewertet.



(a) Fertige zunächst eine Zeichnung an, die die Höhenmessung mithilfe eines Theodolits darstellt. Schreibe im Anschluss daran eine Gebrauchsanleitung, die einem Laien die (mathematische) Funktionsweise des Theodolits erklärt.

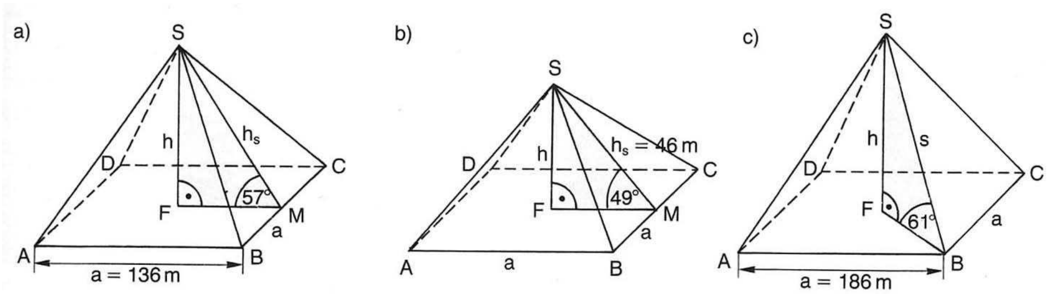
(b) Baut mithilfe der nebenstehenden Skizze und der folgenden Materialliste den unten abgebildeten einfachen Theodoliten und messt die Höhe des Schulgebäudes.


Visierrohr
Höhenwinkel-
messer
Senklot
Horizontal-
skala
Stativ

Quelle: Einblicke Mathematik 10 (2001), Klett

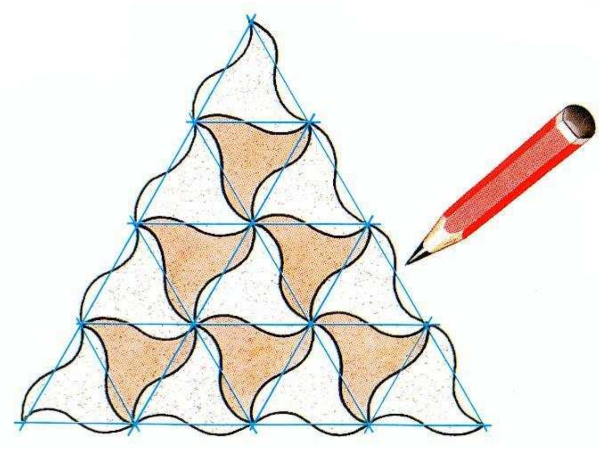
3. **Aufgaben zur Anwendung**

   Berechne das Volumen und die Oberfläche der unten abgebildeten Pyramiden.



4. **Aufgaben zur Anwendung**

   Mit den nebenstehenden Parkettsteinen (helle und dunkle) kann man z.B. einen Fußboden lückenlos auslegen. Skizziere zunächst das Parkett mit freier Hand. Versuche nun eine Konstruktionsbeschreibung für das Parkett bzw. die Parkettsteine zu finden. Wodurch könnte man das Aussehen der Parkettsteine verändern?

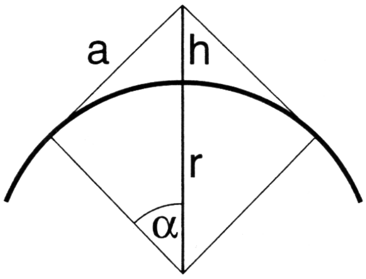


5. **Die aufgehängte Erdkugel**

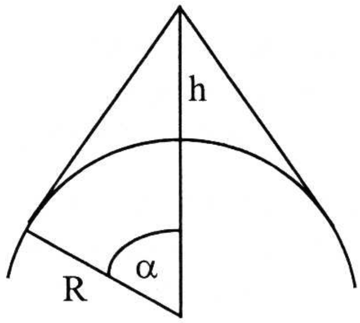
   Stell dir vor, du hättest eine Schnur, die genau 1 m länger als der Erdumfang ist. Die Schnur werde dann so gespannt, dass sie überall den gleichen Abstand von der Erdkugel hat. Könnte eine Maus unter der Schnur hindurchkriechen?

   Die um 1 m längere Schnur wird wieder um die Erde herumgelegt, diesmal aber an einer Stelle soweit wie möglich von der Erdoberfläche abgezogen. Wie weit kann man die Schnur abheben?

   In der Literatur finden sich verschiedene Lösungen. Vergleiche und bewerte!



Gegeben $u = 40.000.000\,\text{m}$ somit $r = 6.366.197,7\,\text{m}$. Gesucht: h.
Lösung:
$(1) h + r = \frac{r}{\cos\alpha} \Leftrightarrow h = \frac{r}{\cos\alpha} - r$
Ermitteln von α
$(2) \tan\alpha = \frac{a}{r}$
$(3) a = r \cdot \alpha + 0,5\,\text{m}$
Aus (2) und (3) folgt:
$(4) \tan\alpha = \frac{r\cdot\alpha + 0,5\,\text{m}}{r} \Leftrightarrow \tan\alpha - \alpha = \frac{0,5\,\text{m}}{r}$
Mit Hilfe des Befehls SOLVE liefert der TI92 mehrere Lösungen dieser Gleichung (Periodizität der Tangensfunktion!). Es kommt aber nur der Wert $\alpha = 0,006167$ in Frage, da weder negative Lösungen noch solche, die größer als π sind, für die Aufgabe relevant werden.
(5) Aus (1) und (4) folgt: $h = 121,4144\,\text{m}$. [...] Diese Ergebnis dürfte den Schülerinnen und Schülern ziemlich unglaubwürdig erscheinen. (Auch ich selbst war zunächst sehr im Zweifel.) [...]



$U = 2\pi R + 1$
$U = 2(\pi - \alpha) \cdot R + 2R \cdot \tan\alpha$
Eliminiert man hieraus U, dann ergibt sich die Gleichung:
$1 = 2R \cdot (\tan\alpha - \alpha)$
Für die Bestimmung einer Näherungslösung dieser Gleichung kann man in der 10. Klasse dann das Computeralgebrasystem verwenden. Aus α lässt sich anschließend leicht die Höhe h bestimmen:
$\cos\alpha = \frac{R}{R+h} \Leftrightarrow h = \frac{R}{\cos\alpha} - R$
Es ergibt sich als Lösung übrigens eine Höhe von ca. 12 m. Die in Schüleraugen verblüffend große Höhe muss nun im Nachhinein begründet werden [...].

Quellen: Math. Unterrichtspraxis (2000), H. 1, S. 31-35; Istron Bd. 6 (2000), S. 14-24

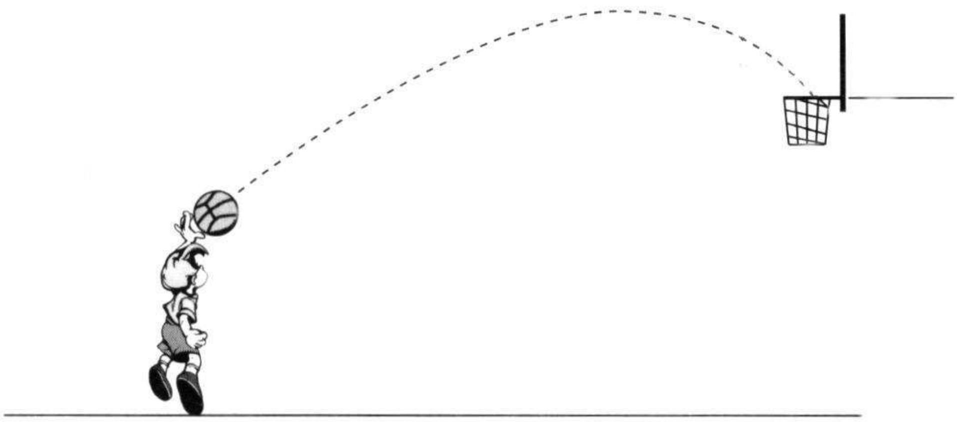
6. **Basketball**

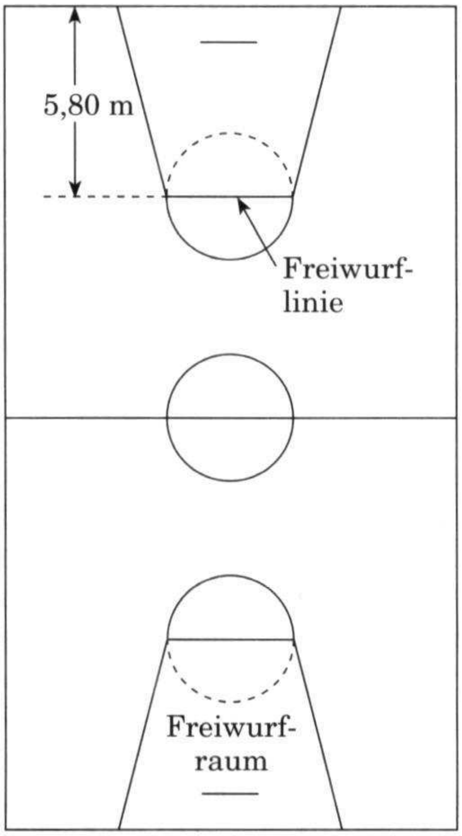
„Wie muss man den Basketball beim Freiwurf werfen, damit er im Korb landet?“ Um sich darüber Klarheit zu verschaffen, ist es hilfreich, folgende Fragen zu beantworten:

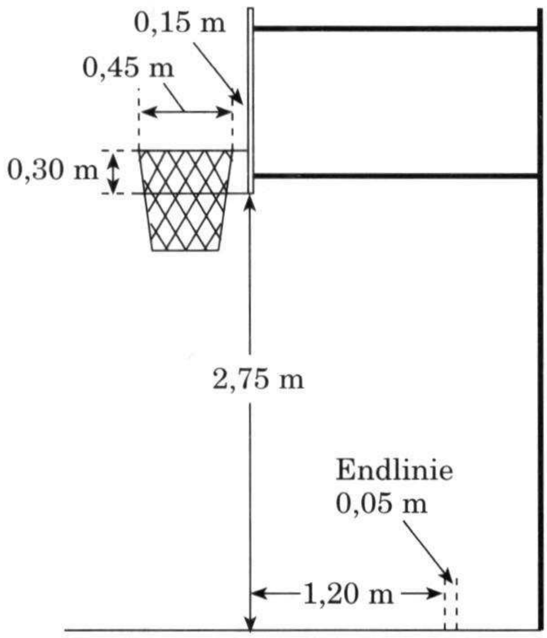
(a) Wie groß muss der Einfallswinkel beim Korbwurf mindestens sein, damit der Ball ungestört (ohne Berührung des Korbringes) und auf direktem Wege (ohne Verwendung des Spielbretts) ins Netz fallen kann?

(b) Bei einem erfolgreichen Korbwurf geht idealerweise der Mittelpunkt des Balles durch den Mittelpunkt des Korbringes. Aber auch bei Abweichung von der Ideallinie ist ein erfolgreicher Wurf möglich. Wie groß darf die Abweichung sein?

(c) Wie groß darf die seitliche Winkelabweichung? (d.h. nach links oder rechts) sein?





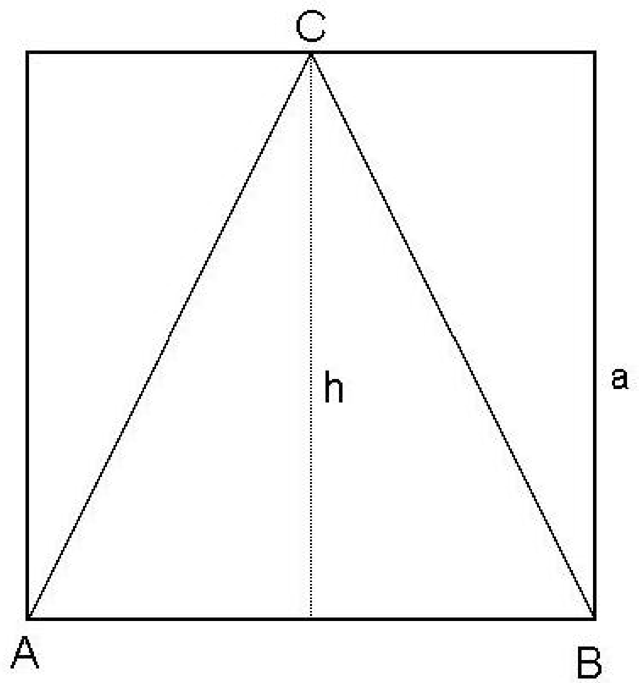


Daten gemäß den offiziellen Basketballregeln

- Der innere Durchmesser des Korbrings beträgt 45 cm, maximal 45,7 cm (kleine Unterschiede je nach Hersteller).
- Der Umfang des Balls darf nicht weniger als 75 cm und nicht mehr als 78 cm betragen.

Quelle: mathematik lehren (1999), H. 95, S. 21-49

7. **Dreiecke im Quadrat**



Oben abgebildet siehst du ein Dreieck, dass in ein Quadrat „eingepasst“ wurde.

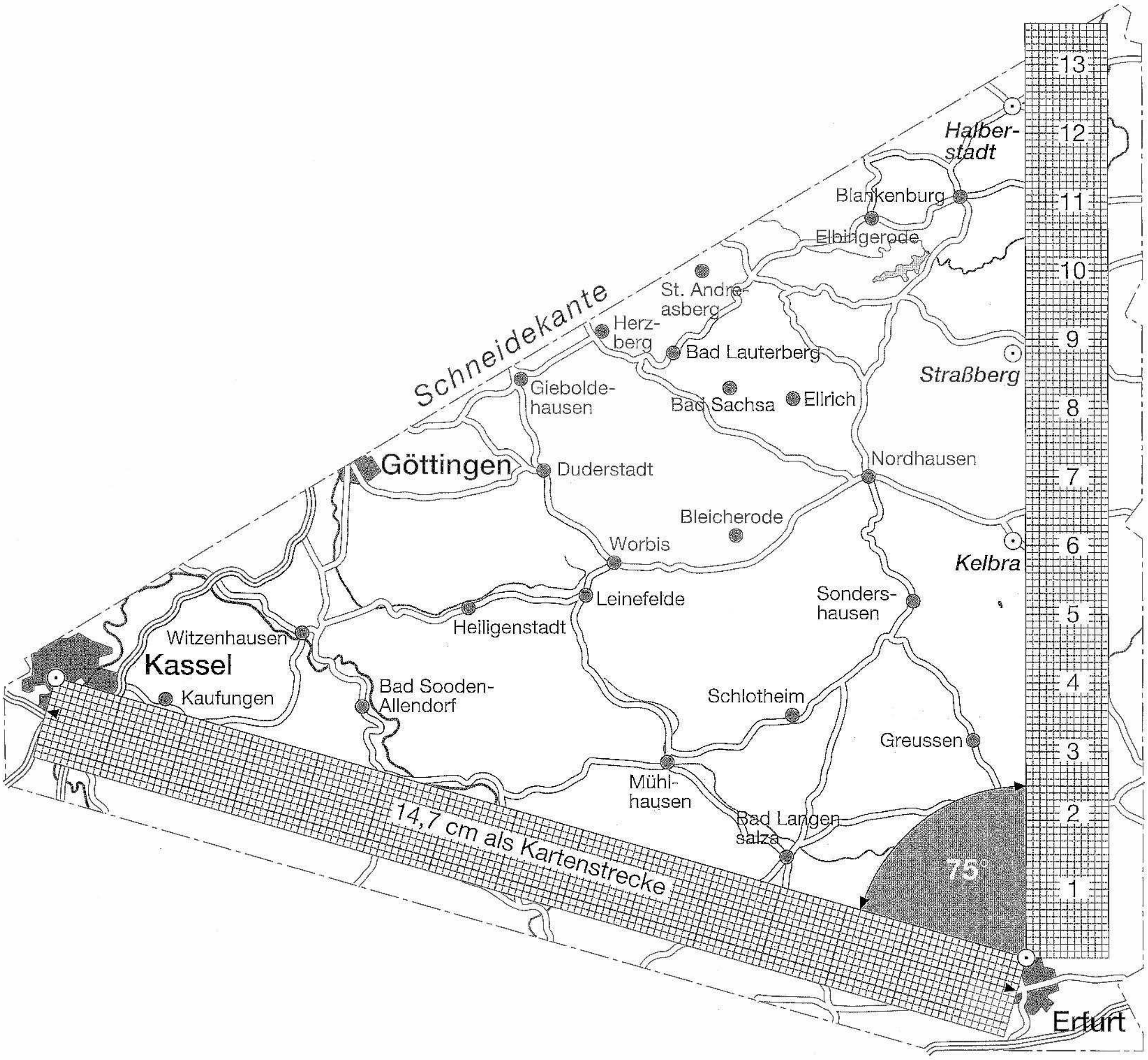
(a) Mache möglichst viele (mindestens 5) mathematische Aussagen über die Figuren (z.B. über Flächeninhalte, Winkel,...).

(b) Verschiebe den Punkt C auf der Höhenlinie h so, dass das entstehende Dreieck $\triangle ABC'$ gleichseitig ist. Wie groß ist dann h'? Beantworte die Frage mit und ohne Trigonometrie!

(c) Wie viel Prozent der Gesamtfläche nimmt das neue Dreieck ein?

8. **Entfernungsberechnung**

Klebe die folgende Karte auf ein Stück Pappe uns schneide die Kerben (auf der rechten Seite und bei Kassel) ein.
Spanne dann ein Gummiband durch die Kerbe bei Kassel und einer Kerbe auf der rechten Seite



Berechne die Luftlinienentfernung von der Stadt Kassel zu einigen anderen Städten!

(a) Bestimme die reale Entfernung von Kassel nach Erfurt.

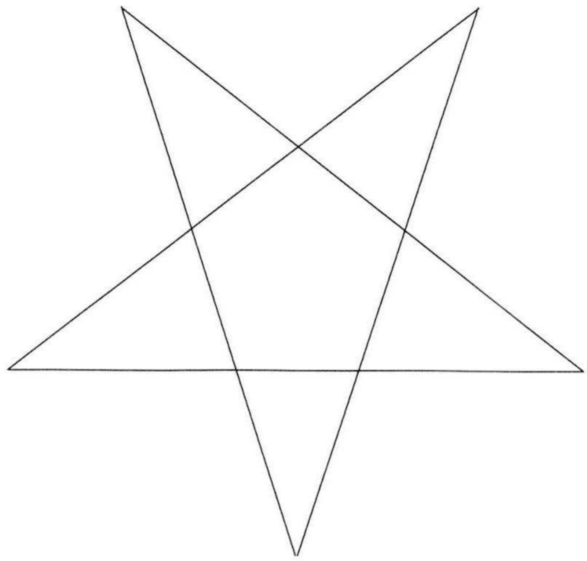
(b) Bestimme die Entfernung zu 3 weiteren Städten, indem du das Gummi auf der rechten Seite in die Kerben einspannst.

(c) Beurteile das Verfahren.

Quelle: Trigonometrie, 10. Schuljahr (1999), Cornelsen

9. **Stern**

   Ein fünfzackiger Stern, wie abgebildet, soll völlig symmetrisch sein (alle fünf Linien sind gleich lang und alle gleichartigen Innenwinkel gleich groß).
   Die Gesamtlänge der Linien sei 1000 mm, d.h. dass bei der Zeichnung des Sterns ein Bleistift ohne das Papier zu verlassen 1000 mm zurückgelegt hat.
   Wie groß ist der Abstand von einer Sternspitze bis zum Mittelpunkt des Sterns?

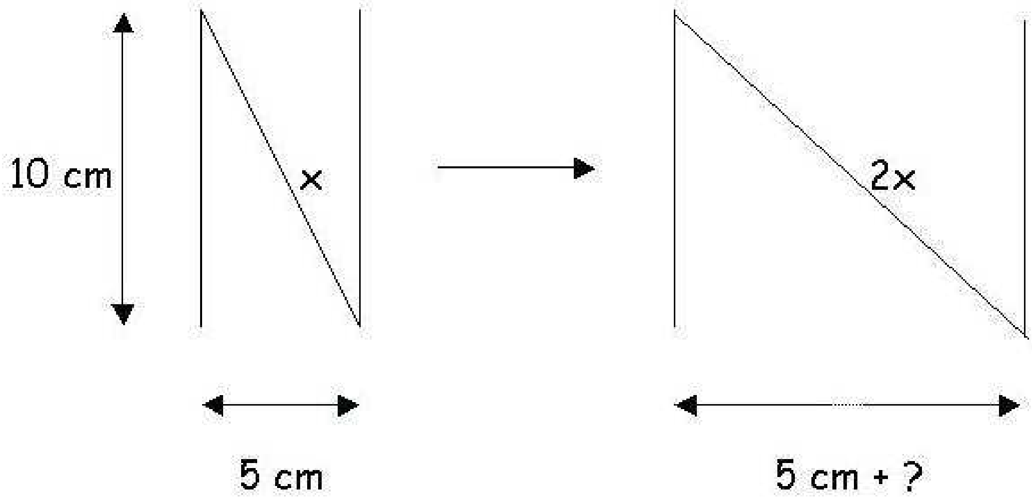
   

   Quelle: Fich, O.: Mathelogik

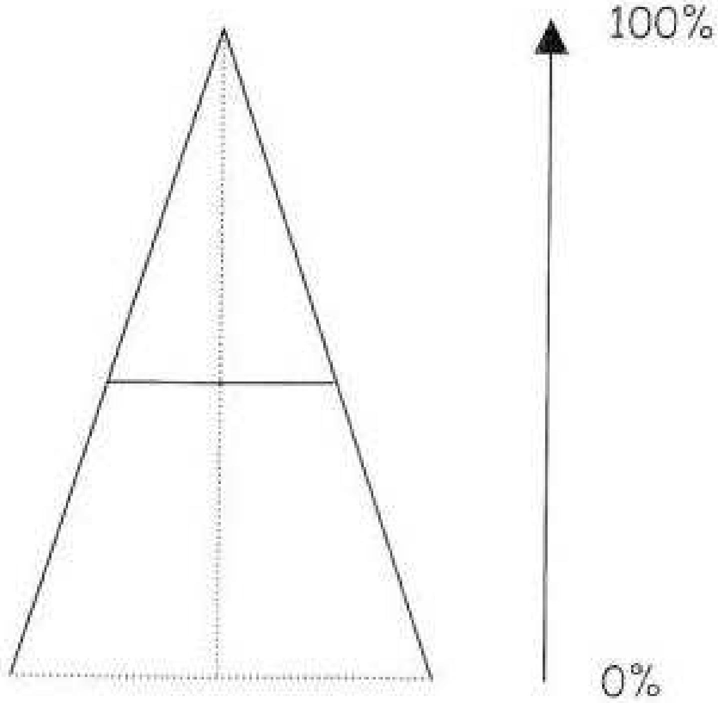
10. **Buchstaben-Geometrie**

    Einige Buchstaben sind hervorragende Repräsentanten für die Geometrie. Schauen wir uns z.B. den Buchstaben N an - er besteht aus zwei senkrechten Linien und einer schrägen Linie. Der Buchstabe ist ca. doppelt so hoch wie breit. Wir nehmen eine Breite von 5 cm an. Damit beträgt die Höhe 10 cm.

    (a) Wenn wir uns vorstellen, dass die linke senkrechte Linie sich nicht bewegt, während sich die rechte senkrechte Linie von der feststehenden Linie fortbewegt - wie weit muss diese Linie verschoben werden, damit sich die Länge der schrägen Linie (siehe Abbildung) verdoppelt?



(b) Wenn wir die senkrechte Linie weiter parallel verschieben, so dass sich die Länge der schrägen Linie wiederum verdoppelt (d.h. eine Vervierfachung im Vergleich zur ursprünglichen Linie) - muss die Linie dann im Vergleich zur ersten Verschiebung um mehr oder um weniger verschoben werden?



Schauen wir uns jetzt einmal den Buchstaben A an - er besteht aus zwei schrägen Linien und einem Querstrich. Wir nehmen an, dass der Winkel zwischen den beiden Schräglinien 30° beträgt. Wenn wir uns jetzt vorstellen, dass die beiden „losen“ Enden der beiden Schräglinien mit einer geraden Linie verbunden werden, so bilden diese ein Dreieck (siehe Abbildung). Der Querstrich des Buchstaben A teilt das Dreieck in zwei Bereiche. Wir zeichnen eine Hilfslinie in Form einer Senkrechten vom höchsten Punkt zur Grundlinie.

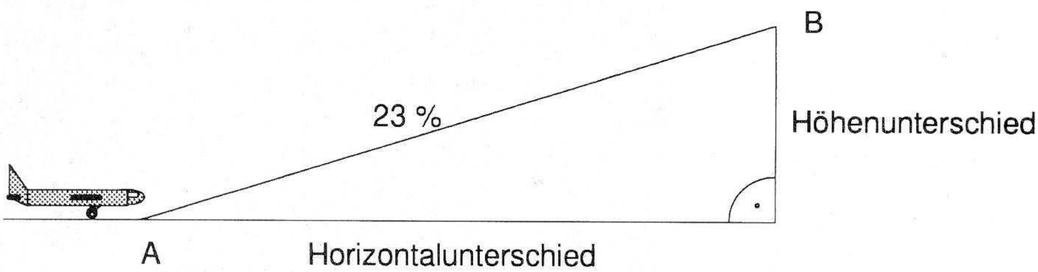
(c) Wenn wir den unteren Punkt der Hilfslinie mit 0% bezeichnen und den obersten Punkt mit 100%, bei welchem Prozentsatz muss dann der Querstrich die Hilfslinie schneiden, wenn die beiden Flächen (geteilt durch den Querstrich des A's) gleich groß sein sollen?

(d) Wie lang ist der Querstrich in diesem Fall?

Quelle: Fich, O.: Mathelogik

11. **Über den Wolken ...**

Doris Trump ist Pilotin eines Passagierflugzeuges. Sie ist dafür verantwortlich, dass sich ihre Gäste während des Fluges wohlfühlen. Vor allem beim Start hat sie darauf zu achten, dass nach dem Abheben vom Boden eine Steigung von 23% nicht überschritten wird.



Die Steigung von $23\% = 0,23$ wird aus dem Quotienten von Höhen- und Horizontalunterschied ermittelt: $Steigung = \frac{Höhenunterschied}{Horizontalunterschied}$.

Unsere Pilotin Doris Trump hat es da einfacher - ganz ohne Rechnerei. Sie schaut nur auf das Steigungsmessgerät im Cockpit ihres Flugzeuges. Dieses zeigt nämlich den Winkel an, den die Flugstrecke mit der Horizontalstrecke bilden soll. Man nennt diesen Winkel Anstellwinkel, d.h. dieser Winkel wird von der Pilotin eingestellt, der tatsächliche Ansteigwinkel ist aber ein anderer. Dabei ist die Differenz vom tatsächlichen Ansteig- und dem theoretischen Anstellwinkel u.a. von Richtung und Stärke des Windes sowie vom Luftdruck abhängig.

Doris Trump hebt mit ihrer Maschine Richtung London ab. Vom Steigungsmessgerät liest sie einen Steigungswinkel von $16°$ ab.

(a) Wie groß ist die Steigung des Flugzeuges in Prozent?

(b) Gib die tatsächlich geflogene Steigung in Prozent an, wenn wir annehmen, dass der Ansteigwinkel der Boing $747 - 400$ um $3°$ kleiner ist als der Anstellwinkel.

Quelle: RAAbits Reihe 5 Material S. 5

12. **Wasserglas**

Auf einem runden Tisch in einem Flugzeug steht ein zylindrisches Glas, das bis zum Rand mit Wasser gefüllt ist. Das Glas ist 12 cm hoch und hat einen Durchmesser von 8 cm. Wir nehmen an, dass das Glas so dünn ist, dass wir im Folgenden von der Dicke des Glases absehen können. Außerdem sehen wir von besonderen physikalischen Eigenschaften wie der Oberflächenspannung des Wassers ab.

Wenn sich das Flugzeug beim Hochsteigen um 20 Grad im Verhältnis zur Erdoberfläche neigt, wie viel Wasser läuft aus dem Glas? Wie viel Prozent des ursprünglichen Inhalts sind dies?

13. **Hofmathematik**

Stell dir vor, du bist Hofmathematiker am Hofe König Rudolfs II, der in Prag residiert. Wir schreiben das Jahr 1610 nach Christi Geburt. In dieser Zeit ist es üblich, dass gelehrte Damen und Herren der Mathematik, Astronomie und Physik miteinander in Briefen kommunizieren, einander neue Entdeckungen mitteilen und Probleme miteinander diskutieren.
Als berühmter Mathematiker erhältst du des Öfteren Post von dir unbekannten Leuten, die dir ihre (manchmal vermeintlichen) Entdeckungen mitteilen und dich um Stellungnahme bitten.
Einen ebensolchen Brief hast du soeben von dem Sohn eines reichen Gutsbesitzers und Handelsherren, Bartholomäus Schobinger aus St. Gallen, erhalten, der ein antikes, weltberühmtes Problem gelöst haben will. Es geht um die konstruktive Dreiteilung eines Winkels allein mit Zirkel und Lineal. Dieses bis dahin ungelöste Problem wurde von dem Griechen einige Jahrhunderte vor Christus gestellt. Viele berühmte Mathematiker haben sich schon die Zähne an diesem Problem ausgebissen, und nun schreibt dieser Schobinger, er habe eine Lösung gefunden.

St. Gallen, 3. *Februar* 1610

Hochgeehrter Mathematiker, Freund der Wissenschaften und der bildenden Künste, königlicher Würdenträger, Entdecker vieler Wahrheiten Gottes,

ich getraue mich kaum, an einen Mann solchen Ruhmes und solcher Geisteskraft mein bescheidenes Wort zu richten. Doch die Resultate meiner Arbeiten sind so unfasslich, dass ich sie nicht mehr weiter nur für mich behalten kann. Ich glaube, mit Gottes Hilfe das alte Problem der Winkeldreiteilung gelöst zu haben, und bitte nun um Ihren werten Kommentar. Ich beschreibe im Folgenden das Verfahren, mit dem es mir gelungen ist, jeden beliebigen Winkel allein mit Zirkel und Lineal zu dritteln.

Um den Scheitel des Winkels ziehe ich einen Kreisbogen beliebiger Größe. Dieser schneide die Schenkel des Winkels in den Punkten A *und* B*. Im Punkt* A *errichte ich ein Lot zur Sehne* AB *und trage auf ihr die doppelte Länge des Radius des Kreisbogens ab und erhalte den Punkt* C*. Verbinde ich den Scheitel mit diesem Punkt* C *und über ihn hinaus, erhalte ich den Strahl, welcher den ursprünglichen Winkel drittelt.*
Ich habe diese Konstruktion an männiglich vielen Winkeln ausprobiert, speziell an den Winkeln $15°$, $30°$, $60°$ *und* $90°$ *und beim Nachmessen die Drittelung des Winkels feststellen können.*

Ich wage es nicht, Sie zur Eile zu drängen, warte aber in höchster Ungeduld auf Ihre Antwort. Möge der allmächtige und barmherzige Gott Sie beschützen und leiten.

Bartholomäus Schobinger

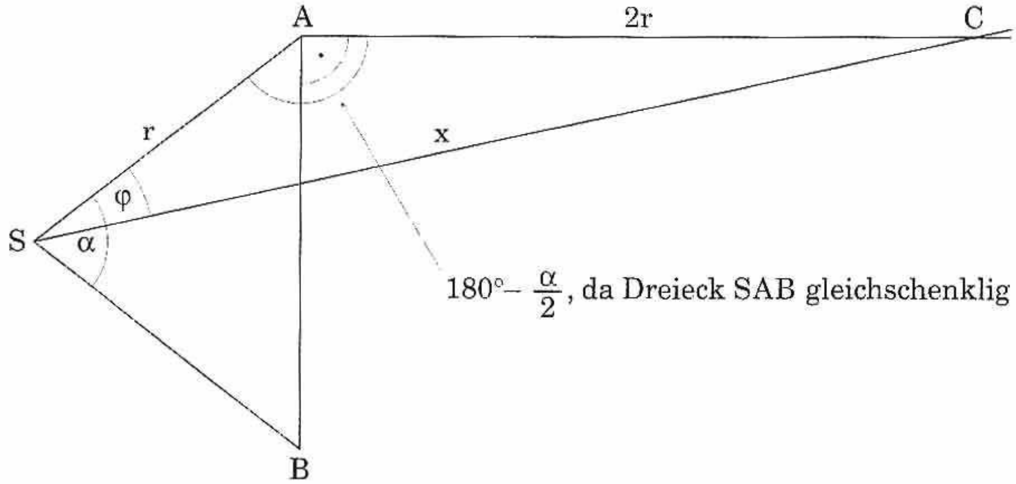
Quelle: mathematik lehren (1997) H. 83, S. 68f

Prag, 11. April 1610

Hoch geehrter Bartholomäus Schobinger aus St. Gallen, Sohn eines reichen Gutsbesitzers und Handelsherren,

ich bedanke mich für die Ehre, die Sie mir beweisen, indem Sie mir ihre Ergebnisse mitteilen. Ihre Behauptung war, dass Sie ein Verfahren gefunden haben, mit dem es Ihnen gelungen ist, jeden beliebigen Winkel allein mit Zirkel und Lineal zu dritteln.

Dieses Verfahren haben Sie anschaulich beschrieben. Wenn man die Winkel wie in der Skizze benennt, ist die Behauptung: $\varphi = \frac{\alpha}{3}$.



Um Ihr Verfahren rechnerisch zu prüfen, muss man mit Hilfe des Cosinus-Satzes (siehe Zeichnung) die folgenden Formeln aufstellen:

I. $x^2 = r^2 + (2r)^2 - 2r2r\cos(180 - \frac{\alpha}{2})$ II. $(2r)^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cdot \cos\varphi$

$x^2 = 5r^2 + 4r^2\cos\frac{\alpha}{2}$ $\qquad \cos\varphi = \frac{r^2 + x^2 - (2r)^2}{2rx}$

Wenn x^2 eingesetzt wird, ergibt sich:

$$\cos\varphi = \frac{2r^2 + 4r^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{2r\sqrt{5r^2 + 4r^2\cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2r^2\left(1 + 2\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2r^2\sqrt{5 + 4\cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 + 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{5 + 4\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

Wenn man die von Ihnen genannten Winkel mit Hilfe dieser Formel prüft, kommt man zu den genauen gezeichneten Winkeln, aber nicht genau zu Winkeldritteln:

α	15°	30°	60°	90°
φ	5,0016°	10,018°	20,104°	30,361°

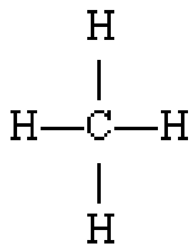
Je größer die Winkel werden, desto ungenauer ist die Drittelung durch Ihr Verfahren.

Die richtige Behauptung für Ihr zeichnerisches Verfahren wäre also nur $\varphi \approx \frac{\alpha}{3}$.

Ich danke Ihnen trotzdem für Ihre Mühe.

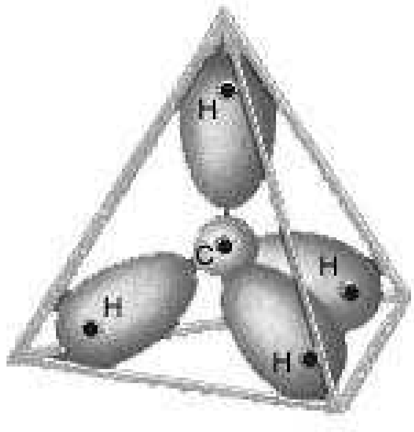
14. **Methan**

Methan (Summenformel CH_4) ist die einfachste Kohlenwasserstoffverbindung. Es bildet sich dort, wo organische Substanzen unter Luftabschluss verfaulen, was dazu führt, dass es die Hauptsubstanz von Erdgas, Grubengas, Sumpfgas, Faulgas und dem sogenannten „Biogas“ bildet. Die Molekülformel CH_4 und die Strukturformel (siehe links) sagen jedoch noch nichts über die räumliche Anordnung der Atome aus. Durch die gegenseitige Abstoßung der Elektronen bildet sich ein Tetraeder, in dessen Mittelpunkt sich das C-Atom befindet. Die „Orbitale“ um die Atome im unteren Bild sind die Bereiche, wo man die jeweiligen Atome mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit antreffen kann. Am wahrscheinlichsten ist, dass sich die Wasserstoffatome an den Eckpunkten des Tetraeders aufhalten.



(a) Berechne den Bindungswinkel im Methanmolekül, d.h. den Winkel HCH.

(b) Die Kantenlänge des Tetraeders beträgt 177 Pikometer. Wie groß ist die Bindungslänge zwischen Wasserstoff und Kohlenstoff, d.h. welchen Abstand haben diese beiden Atome?



15. **Steigung**

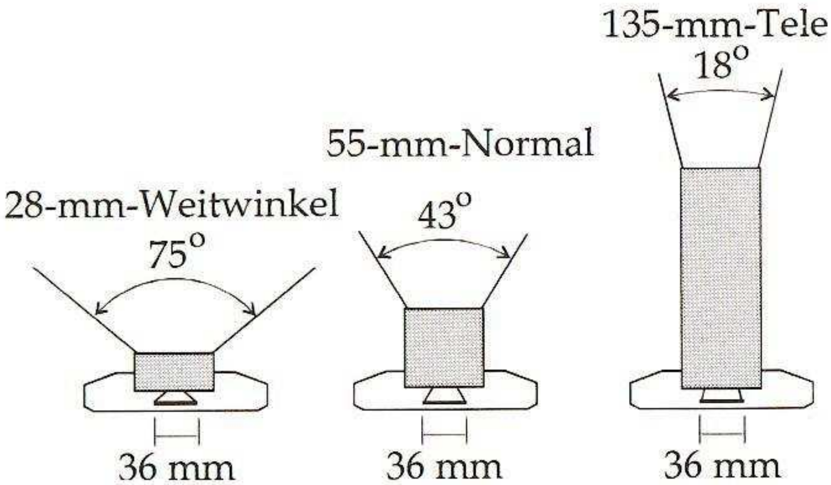
Die Steigung einer Straße mit dem Steigungswinkel α ist der Wert von $\tan\alpha$, umgerechnet in Prozent.

(a) Die steilste Straße der Welt soll im neuseeländischen Ort Duneddin sein. Sie hat den Steigungswinkel 31°. Ermittle die Steigung.

(b) Ein Spezialfahrzeug für Waldarbeit im Gebirge kann 50° geneigte Hänge hochfahren. Wieviel % Steigung sind das?

16. **Fotoapparat**

Auch Foto-Apparate haben einen „Sehwinkel". Bei einem Normalobjektiv mit 55 mm Brennweite beträgt er 43°. Zoom-Objektive haben variable Brennweiten und damit auch verschiedene Sehwinkel.
Ein 30 m breites und 17 m hohes Gebäude soll frontal aufgenommen werden. In welcher Entfernung vom Objekt muss der Fotograf die Aufnahme mit einem Weitwinkel-, einem Normal- und einem Teleobjektiv machen?
Worin unterscheiden sich die Aufnahmen trotz des gleichen Ausschnitts?

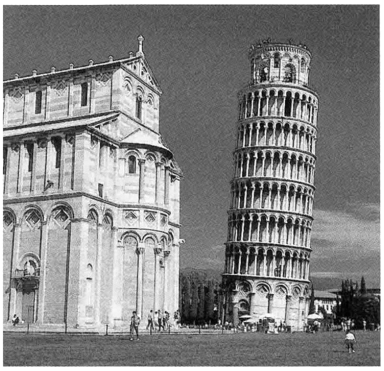


17. **Pisa**

Bereits während des Baus im Mittelalter stellte sich der weltberühmte schiefe Turm von Pisa schräg. In einem Reiseführer steht, dass er mittlerweile um $5,47°$ geneigt ist.

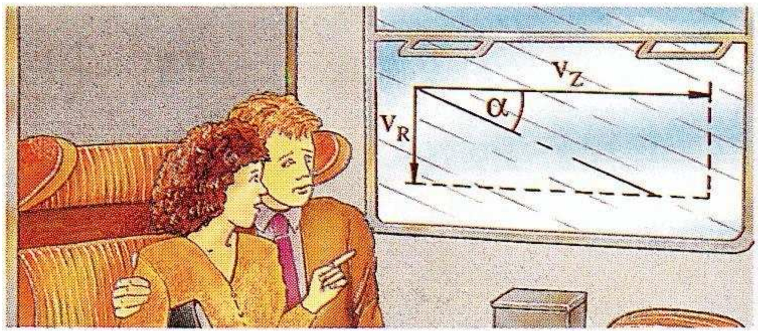
(a) Um wie viel Meter ragt der Turm über seine ursprüngliche Standfläche hinaus?

(b) Der Turm war dann lange für Besucher geschlossen während sich die Experten bemühten ihn aufzurichten. In der HNA vom 05.03.2002 stand: „Neigung wurde um fast 40 cm verringert!". Welcher Neigungswinkel ergibt sich jetzt nach den Rettungsversuchen?



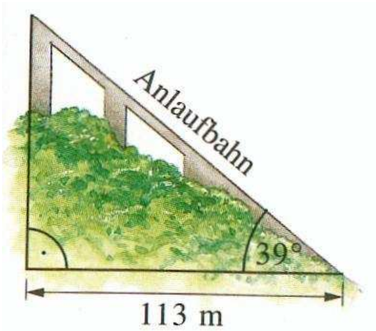
18. **Regentropfen**

    Bei Windstille bilden die Regentropfen am Fenster eines mit einer Geschwindigkeit $v_z = 140\,\frac{km}{h}$ fahrenden Zuges einen Winkel $\alpha = 20°$ mit der Waagerechten. Berechne die Fallgeschwindigkeit v_R der Regentropfen.



19. **Himmelsguckloch**

    In Oberstdorf befindet sich eine der größten Skiflugschanzen der Welt. Sie wird auch „Himmelsguckloch“ genannt.

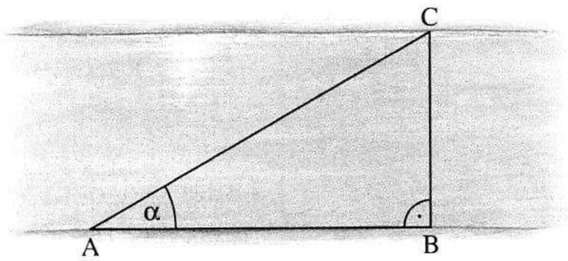


    (a) Welchen Höhenunterschied hat die Anlaufbahn und wie lang ist sie?

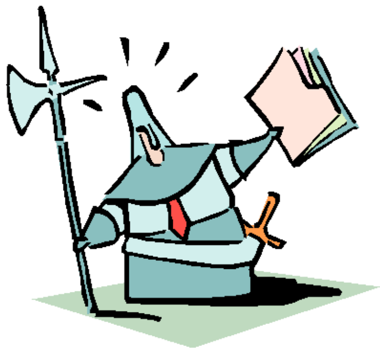
(b) Welchen Höhenunterschied legt ein Springer auf der Anlaufbahn zurück, wenn diese wegen zu großer Weiten der Teilnehmer im ersten Durchgang im zweiten Durchgang um 5 m verkürzt worden ist?

20. **Flussbreite**

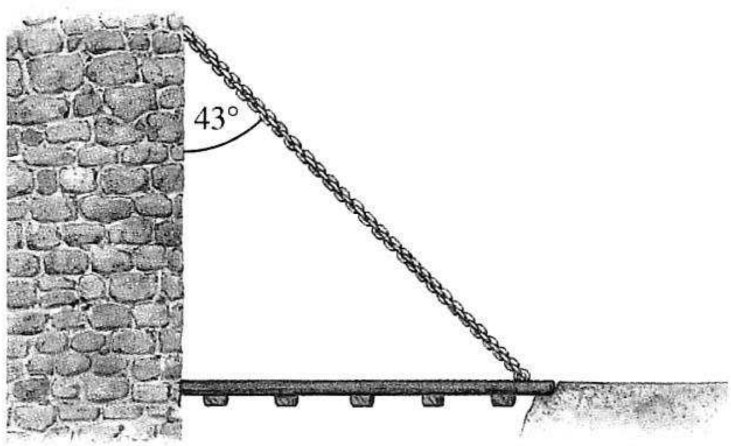
Um die Breite eines Flusses zu bestimmen, hat man unmittelbar an einer Uferseite eine Strecke $|\overline{AB}| = 80\,\text{m}$ abgesteckt und den Visierwinkel $\alpha = 38°$ gemessen. Wie breit ist der Fluss?



21. **Zugbrücke**

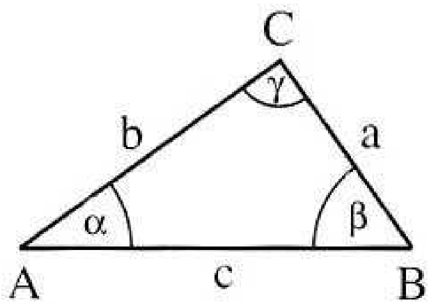


Ritter Eisenkopf soll für die neue Zugbrücke unter anderem eine Kette kaufen, mit der man die 8 Meter lange Brücke im Notfall hochziehen kann. Bei seinen vielen Einkaufszetteln findet er jedoch nur die nebenstehende Zeichnung ohne Längenangabe der Kette. Kannst du ihn davor bewahren ohne Kette in die Burg heimzukehren?



22. **Dreieckberechnung**

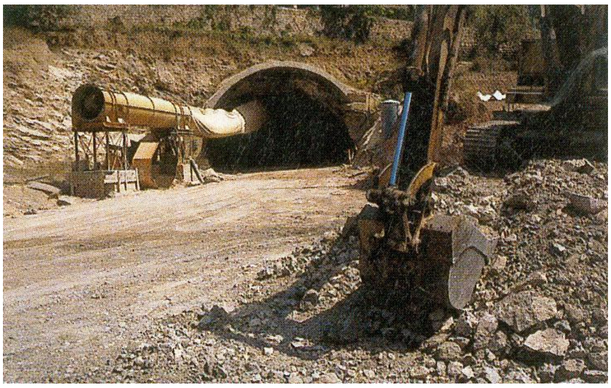
Berechne im Dreieck ABC jeweils die fehlenden Stücke und trage sie in die Tabelle ein (Längenangaben in cm).



	(a)	(b)	(c)	(d)
a	$3,5$		$8,2$	$0,75$
b	$5,7$	$22,7$		$2,4$
c		$31,6$	$5,9$	$2,15$
α		$45,2°$		
β			$95,7°$	
γ	$67,5°$			

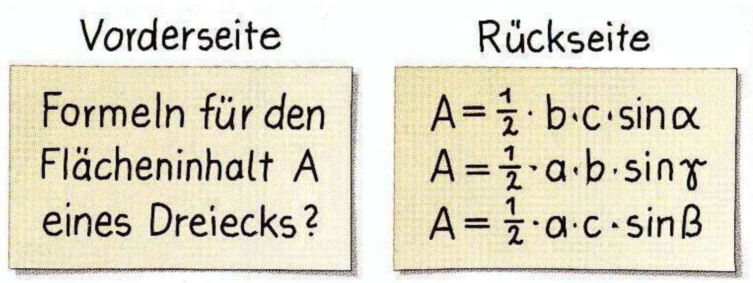
23. **Tunnelbau**

Ein Autobahntunnel soll geradlinig durch einen Berg gebaut werden. Um die Tunnellänge $|AB|$ zu bestimmen, misst man von einem Punkt C aus folgende Längen und Winkel: $|CB| = 1,6\,\text{km}$, $|CA| = 2,5\,\text{km}$, $\gamma = 56°$.
Fertige eine Skizze an und bestimme dann die Tunnellänge.



24. **Lernkärtchen**

Sabine hat sich für ihre Mathematik-Lernkartei ein Kärtchen angelegt. Was hältst du davon?



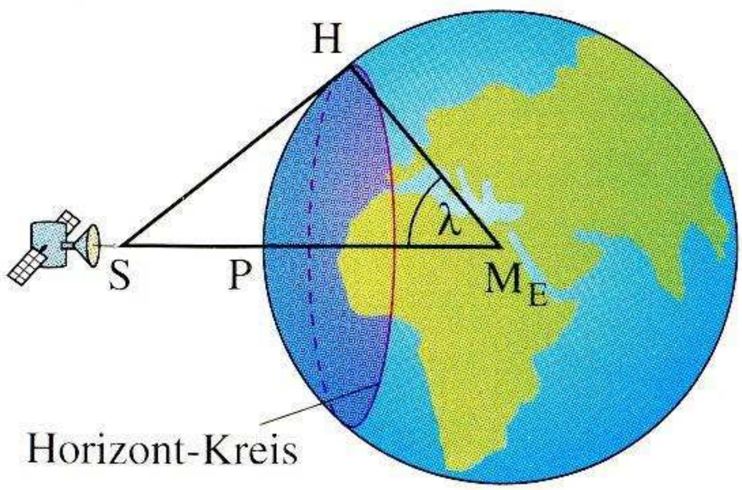
25. **Satellit**

Ein Beobachtungssatellit „sieht“ immer nur einen Ausschnitt der Erdoberfläche. Die Kugelkappe wird vom sogenannten Horizontkreis begrenzt, den Winkel λ nennt man Radiuswinkel.
Bestimme für den Satelliten OGO-1 (Orbiting Geophysical Observatory One) den Radiuswinkel λ ($\sphericalangle SM_EH$) und den Radius des Horizontkreises,

(a) wenn er seine weiteste Entfernung (Apogäum) 150000 km von der Erde hat.

(b) wenn er seinen erdnächsten Punkt (Perigäum) 260 km von der Erde erreicht.

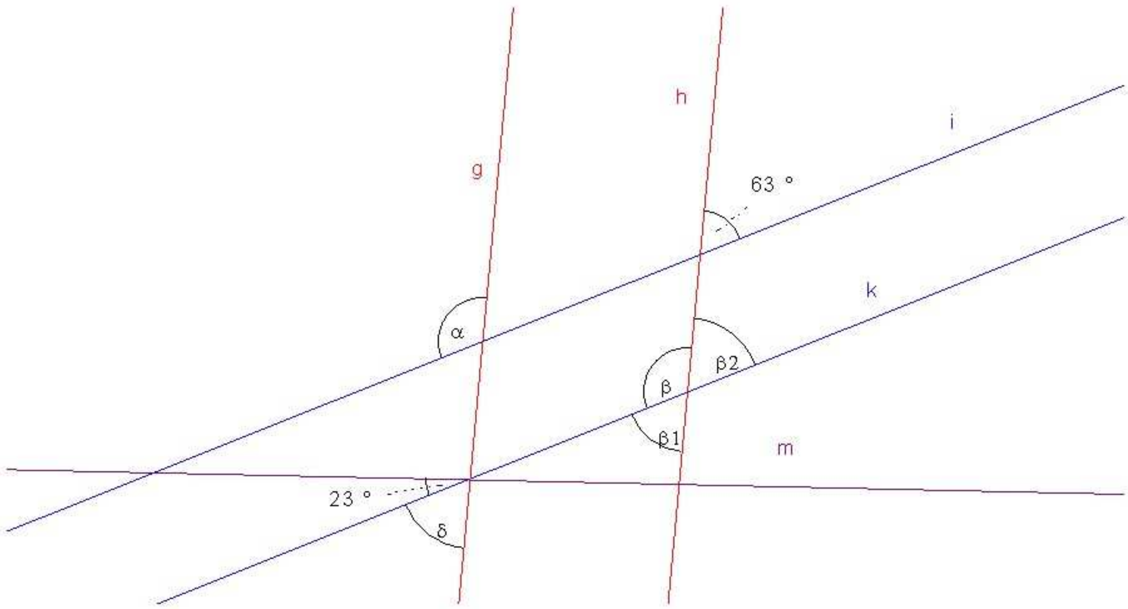
(c) Wie groß ist der Radiuswinkel λ für einen Beobachter auf einer 65 m hohen Bohrinsel? Wie weit ist für diesen Beobachter der Horizont entfernt?



26. **Schiff**

Die Bugwelle eines Schiffes hat immer einen Öffnungswinkel von etwa 40°. Das Schiff fährt in der Mitte eines 160 m breiten Flusses. Wie weit ist sein Bug vom Auftreffpunkt der Welle am Ufer entfernt?

27. Winkel
    Die Geraden g und h sind zueinander parallel und ebenso die Geraden i und k. Bestimme die Größe der eingezeichneten Winkel! Finde andere Winkel, benenne sie und bestimme deren Größe.



28. Kartennavigation
    Auf einer Karte, Maßstab 1:48 000, wird ein gerader Weg mit 1,2 cm gemessen. Punkt A liegt auf der Höhenlinie 480 m, Punkt B liegt auf der Höhenlinie 590 m. Wie lang ist der Weg in Wirklichkeit?