SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Funktionen (SINUS-Transfer)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. Mai 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Exponential- und Logarithmusfunktionen

1. Quelle: Abakus 10 (1995), Schöningh

   (a)

$3,9$	$5,3$	$7,1$	$9,5$	$12,8$	$17,3$	$23,2$	$31,3$

   (b)

$56,8$	$102,9$	$251,2$	$825,9$

   Gründe für die schlechte Passung: Weltkriege und Rezessionen führen zu einem veränderten Fortpflanzungsverhalten

   (c) $f(t) = 1.000.000 \cdot 1,03^t$ und $g(t) = 100.000t + 2.000.000$

t	0	1	2	3	4	5	...	75	76	77	78
$f(t)$ in Mio	1	$1,03$	$1,06$	$1,09$	$1,13$	$1,16$		$9,2$	$9,5$	$9,7$	$10,0$
$g(t)$ in Mio	2	$2,1$	$2,2$	$2,3$	$2,4$	$2,5$		$9,5$	$9,6$	$9,7$	$9,8$

   Tabellarische Darstellung ist auch im Sinne einer systematischen Einschachtelung möglich. Ansatzweise Termumformung: $1.000.000 \cdot 1,03^t = 2.000.000 + 100.000t \Leftrightarrow 1,03^t - 0,1t = 2$. Hier ist der Tippaufwand geringer als oben und die Lösung schneller erreichbar: $76 < t < 77$.

2.
   (a) 313
   (b) 777

3. Nein, da nur noch $0,06\,\mathrm{g}$ vorhanden sein dürfen.

4. $0,66\,\mathrm{m}$

5. 1500; $33\,\mathrm{h}$

6. ≈ 162 Jahre; ≈ 232 Jahre (etwas länger zum „Übertreffen“)

7.

(a) 384 / 3072 / 24576 / 196608

(b) 6 / 4, 25 / 2, 125 / 0, 75

8. Zwischen 36 und 37 h nach Zerfallsbeginn (37 bzw. 38 h nach Einnahme $\approx 37,86$)

9. 23 h; 17 h

10. Nach ca. 13 h ist die Konzentration auf ca. 10% abgesunken. $N(t) = N(0) \cdot 0,84^t$; $a^3 = \frac{1,18}{2} \Leftrightarrow a = 0,84$
Wenn „weitgehend abgebaut“ als Restmenge 10% angesehen wird, sind ca. 13, 09 h richtig. Konsequenz: Vom Mittel ist abzuraten, da es zu lange wirkt. Was aber, wenn jemand mit größeren Prozentzahlen operiert? Ein schönes Beispiel für offeneres Herangehen, da die Voraussetzungen zum Lösen individuell variieren können und damit auch die Einschätzungen.

11.

12.

13.

14.

15.

Quelle: Mathematik 11 Hessen

16. Quelle: Elemente 11

(a) Brasilien 0, 87%; Deutschland 0, 26%; Indien 1, 07%; Mexiko 0, 86%; USA 0, 46%

(b) Deutschland nein, sogar Abnahme; Brasilien 193530 (ja); Indien 1163610 (?); Mexiko 109373 (?); USA 286737 (?). Tabellenwerte liegen über dem errechneten Wert; das Wachstum wird sich also beschleunigen, aber ob exponentiell, das lässt sich eigentlich nicht beantworten. Prozentualer Zuwachs pro Jahr ab 1999: Indien 1, 71%; Mexiko 1, 71%; USA 1, 98%.

17. Quelle: Mathematik 11 Hessen

18. Quelle: Analysis Grundkurs Gesamtband (2000), Klett

Gaza: $\approx 15,41$ Jahre; Lettland: $\approx 98,67$ Jahre bzw. $\approx 327,79$ Jahre; BRD: $N_0 \cdot 0,999^t$

19. Wir setzen $t = 0$ als den Zeitpunkt der Kontrolle und gehen davon aus, dass in der Abbauphase kein Alkohol konsumiert wurde.

(a) $g(t) = -0,2t + 0,8$

(b) Nach Voraussetzung gilt: $f(t) - f(t+1) = c \cdot f(t)$. Also gilt auch: $f(t+1) = (1-c) \cdot f(t)$ und allgemeiner $f(t) = (1-c)^t \cdot f(0)$. Demnach hier: $f(t) = (\frac{3}{4})^t \cdot 0,8$.

(c) Nach allem was wir über den Abbau von Blutalkohol wissen, ist ein lineares Modell angemessener. Entscheidungskriterium hier in erster Linie Fachkenntnisse.

(d) Vor einer Stunde: Pegel ca. 1 Promille in beiden Modellen.
Vor zwei Stunden: Lineares Modell: Pegel $1,2$.
Exponentielles Modell: Pegel ca. $1,4$.

20.

Quelle: Herget/Scholz: Die etwas andere Aufgabe aus der Zeitung

Diese „Faustformel“ liefert in dem „üblichen“ Zinsbereich sehr brauchbare Werte: Die Verdopplungszeit berechnet man mit: $2K_0 = K_0(1 + \frac{p}{100})^d$ umgeformt ergibt sich: $\lg 2 = d \cdot \lg(1 + \frac{p}{100})$, d.h. $d \approx \frac{0{,}3}{\lg(1+\frac{p}{100})}$.
Hintergrund-Info für Lehrer: Es gilt: $\ln 2 = d \cdot \ln(1 + \frac{p}{100})$, wegen $\ln(1+x) \approx x$ (für kleine $|x|$) folgt: $d \cdot \frac{p}{100} \approx \ln 2 \approx 0,6931 \approx 0,7$, d.h. $d \cdot p \approx 70$.
Für sehr kleine p wäre also eigentlich 69 noch besser als 70 - aber 70 lässt sich natürlich leichter merken, und für die „üblichen“ Zinssätze liefert die 70 tatsächlich bessere Werte.

p%	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15
t exakt	17,7	14,2	11,9	10,2	9,0	8,0	7,3	6,6	6,1	5,7	5,0
t Artikel	17,5	14	11,7	10	8,75	7,8	7	6,4	5,8	5,4	4,7

21. **Plan A:** $K_{10} = 10000 \cdot (1 + \frac{8}{100})^{10} = 21589,25$
Plan B: Man erkennt, dass zunächst fast nur Zinsen und kaum Tilgung geleistet werden. Es müssen nur $10000 € + 5855,07 € = 15855,07 €$ gezahlt werden.

Jahre	Abtrag	Restschuld
1	1000	9700,00
2	1000	9379,00
3	1000	9035,53
4	1000	8668,02
5	1000	8274,78
6	1000	7854,01
7	1000	7403,79
8	1000	6922,06
9	1000	6406,60
10	1000	5855,07

Jahre	Einzahlung	Kapital 4%	Kapital 5%
1	0	$0,00$	0
2	1000	$1040,00$	$1050,00$
3	1000	$2121,60$	$2152,50$
4	1000	$3246,46$	$3310,13$
5	1000	$4416,32$	$4525,63$
6	1000	$5632,98$	$5801,91$
7	1000	$6898,29$	$7142,01$
8	1000	$8214,23$	$8549,11$
9	1000	$9582,80$	$10026,56$
10	1000	$11006,11$	$11577,89$

Zusatz: Was passiert, wenn man die 1000 Euro jährlich spart, die man bei **Plan A** zunächst nicht zu zahlen hat?
In den 10 Jahren könnte Herr Huber nur ca. 1500 Euro an Zinsen erwirtschaften. **Plan A** bleibt trotzdem teurer.

22. Es handelt sich nicht um eine exponentielle Abnahme, sondern um eine Überlagerung eines exponentiellen Prozesses mit einem linearen Anteil.

Wirtschaft

BAUGELD VON BANKEN UND SPARKASSEN

Stand: 4. September 2001

Bank	5 Jahre effektiv	10 Jahre effektiv	Beleihungs-grenze	Telefon
Regionale Anbieter				
Kasseler Sparkasse	5,35	5,93	80%	05 61/ 7 12 40
Sparda-Bank Kassel	5,39	5,81	60%	05 61/ 7 00 52 19
Kasseler Bank	5,51	5,95	80%	05 61/ 7 89 34 01
Raiffeisenbank Baunatal	5,90	5,90	80%	05 61/ 4 99 52 23
Sparkasse Werra-Meißner	5,46	5,98	80%	0 56 51 / 3 06-2 89
SEB Kassel	5,43	5,96	80%	05 61/ 71 20 70
Norisbank Kassel	5,46	6,06	80%	05 61/ 1 47 05
Wüstenrot Bank Kassel	5,69	6,01	60%	05 61/ 7 12 89 21
Citibank Kassel	5,64	6,06	85%	05 61/ 78 16 90
Postbank Kassel	5,48	5,95	80%	05 61/ 70 06-3 97
Überregionale Anbieter				
Nordfinanz Bank	5,11	5,64	60%	04 21/ 3 07 5-0
Gladbacher Bank	5,14	5,60	60%	0 21 61/ 2 49-3 15
Voba Düsseldorf/ Neuss	5,25	5,67	60%	0 21 31/ 92 96 70
Direktbanken				
American Express Bank	4,91	5,38	60%	06 21/ 12 99 26-0
Immo Bank Direkt	4,98	5,42	60%	01 80/ 1 00 03 33
Volkswagen-Bank direct	5,04	5,62	60%	01 80/ 3 22 42 27

23. Quelle: Lambacher Schweizer 10

Zur Vereinfachung: Ausgangsstrecke 1 LE.
1. **Schritt:** $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$
2. **Schritt:** $4 \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{9} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9}$
3. **Schritt:** $16 \cdot \frac{4}{27} = \frac{64}{27} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{16}{27}$
4. **Schritt:** $64 \cdot \frac{4}{81} = \frac{256}{81} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{16}{27} + \frac{64}{81}$
n. **Schritt:** $(\frac{4}{3})^n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{4^{i-1}}{3^i}$

Es handelt sich um exponentielles Wachstum mit dem Wachstumsfaktor $\frac{3}{4}$.

n	Länge
4	$3,16049$
40	$99437,3$
400	$9,45317 \cdot 10^{49}$
100.000	$7,47585 \cdot 10^{1249}$

24. Quelle: mathematik lehren (1996), H. 75, S. 55-60

(a) Es lassen sich eine Vielzahl von Eigenschaften angeben, u.a.:

- Spiegelt man den Graph von a^x an der y-Achse, so erhält man den Graph von $(\frac{1}{a})^x$
- Für $a > 1$ steigt der Graph
- Für $0 < a < 1$, fällt der Graph
- $1^x = 1$; der Graph ist eine Parallele zur x-Achse
- der Graph schneidet die x-Achse in $(0|1)$ bzw. in $(0|c)$
- die x-Achse ist Asymptote für Graphen mit $a \neq 1$

(b)

(c) $f(x) = c \cdot 2^x$: $c > 1$ Streckung; $0 < c < 1$ Stauchung; $c < -1$ Streckung und Spiegelung an der x-Achse; $-1 < c < 0$ Stauchung und Spiegelung an der x-Achse

25.

26.

(a) i. $60,8\,\mathrm{mg}$
ii. 8 Tage

(b) $11,4$ Tage

(c) 8,3 Tage

27.

28.

29. Quelle: mathematik lehren (1998), H. 92, S. 60

Lösungen der Aufgaben: 3; 9; 7; 1; 5; 0; 6; 8; 4; 12; 10; 2
Lösungssatz: MEIN NAME IST HASE; ICH WEISS VON NICHTS

30.

31.

(a) $f(x) = 3^x$

(b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

(c) $f(x) = 2^x - 3$

(d) $f(x) = (\frac{1}{3})^{x+2}$ oder $f(x) = \frac{1}{9} \cdot (\frac{1}{3})^x$

(e) $f(x) = 3 \cdot 0{,}8^x$

(f) $f(x) = 4 \cdot 2^x$

32. Quelle: mathematik lehren (2001), H. 106, S. 55-57

(a) Beim absoluten Zuwachs wird die Differenz gebildet, beim relativen Zuwachs der Quotient.

(b) Der Wachstumsfaktor q ist größer als 1; für den Zerfallsfaktor gilt: $0 < q < 1$

(c) In Prozent.

(d) Die Halbwertszeit gibt an, in welchem Zeitraum sich bei einem Zerfallsprozess die Substanz jeweils um die Hälfte verringert.

(e) Äquidistant bedeutet den gleichen Abstand habend.

(f) Der Logarithmus a einer Grundzahl b ist die Hochzahl k, mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten.

(g) Hochzahl oder Exponent

(h) Numerus

(i) Grundzahl = Basis; Hochzahl = Exponent

(j) $\lg x$

(k) $\log_2 16 = x$

(l) $r = q - 1 = \frac{W_{i+1}}{W_i} - 1 = \frac{W_{i+1} - W_i}{W_i}$

(m) $x = 6$

(n) $x = 4$

(o) $x = 4$

33.

(a) $d = W_{i+1} - W_i$

(b) $d = W_{i+1} - W_i$

(c) Die Differenz d gibt an, um wie viel der neue Wert gegenüber dem vorhergehenden Wert in der entsprechenden Zeiteinheit gestiegen ist.
Die Differenz d gibt den (regelmäßigen) Zuwachs pro Zeiteinheit an.

(d) $q = \frac{W_{i+1}}{W_i}$

(e) Der Quotient q gibt an, auf welchen Anteil des vorausgegangenen Wertes der neue Wert angestiegen (bzw. gesunken) ist.

(f) Der absolute Zuwachs

(g)
   i. Wachstum einer Bakterienkultur - radioaktiver Zerfall - Abbau eines Pflanzenschutzmittels - Verwesung eines abgestorbenen Organismus
   ii. Zinsen ohne Zinseszins - Füllen bei gleichmäßiger Fließgeschwindigkeit

(h) $K_n = K \cdot q^n = K \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$

(i)
   i. Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$ mit Zinssatz p
   ii. Wachstumsfaktor q: $f(t + h) = q \cdot f(t)$ bzw. $q = \frac{f(t+h)}{f(t)}$

(j) Indem man die beiden Hochzahlen multipliziert. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

(k) Alle Graphen gehen durch $(1|0)$ - monoton steigend für $a > 1$ - monoton fallend für $0 < a < 1$ - y-Achse ist Asymptote

(l) Wertebereich ist R^+ für alle $a \in R^+$ - alle Graphen durch $(0|1)$ - monoton steigend für $a > 1$

(m) Der Graph der Exponentialfunktion

(n) $P(0|1)$

(o) $P(1|0)$

2 Lineare Funktionen

1. Quelle: Lambacher Schweizer 8(1988)

   Variationen der Aufgabe:

   (a) Darstellung des Schulalltags des Sitznachbarn

   (b) Rekonstruktion des Alltags des Nachbarn aus dessen Graphen

   (c) Schulalltag als abschnittsweise def. lineare Funktion

   (d) Vernetzung mit Prozentrechnung: Wieviel Prozent des Tages verbringt man in der Schule?

2.

   (a) 10 Uhr morgens

   (b) 6.40 Uhr morgens

   Variationen: Biologische Prozesse behandeln (Biologieunterricht), Graphen zeichnen, Ausgangswert und Abbaufaktor variieren

3. Variationen:

   (a) Formulierung im deutschen Kontext

   (b) Andere Preisvergleiche vor Ort

4.

   (a) $y = -2 \cdot x + 3$

   (b) $y = 2 \cdot x$

   (c) $y = 3 \cdot x - 4$

   (d) $y = x$

   (e) $y = 0,5 \cdot x + 2$

   (f) $y = -x$

   (g) $y = -2,5 \cdot x - 3$

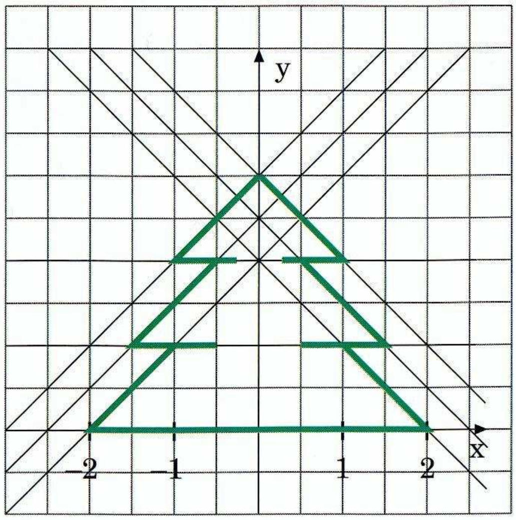
   (h) $y = 4 \cdot x - 1$

(i) $y = -2 \cdot x + 5$

(j) $y = 1,5 \cdot x + 3$

5. Alle geometrischen Figuren, die durch eine Gerade, die durch den Punkt $(3|4)$ geht, entstehen.

6. Es entsteht eine Tanne (siehe nebenstehende Abbildung)



7.

8. Variation: Vergleich aktueller Provider

(a) i. $y = 1,8x$ für $x \in [0;2]$
$y = 4,8x - 6$ für $x \in [2;6]$

ii. $y = 4,8x$ für $x \in [0;2]$
$y = 7,8x - 6$ für $x \in [2;6]$

iii. $y = 3,6x$ für $x \in [0;6]$

(b) Kundensicht: Die Zufriedenheit richtet sich nach meiner Nutzung: Wenn ich tagsüber surfe, habe ich mit dem neuen Tarif einen dauernden Vorteil unabhängig von der Nutzungsdauer. Wenn ich nachts surfe, habe ich erst einen Vorteil mit dem neuen Tarif ab einer Nutzung von 5 Stunden.

(c) Firmensicht: Ein Kunde wird, da er tagsüber arbeitet, erst abends oder nachts surfen. Innerhalb eines Monats sind 5 Stunden schnell erreicht, und dann ist der neue Tarif wirklich günstiger. Ein Kunde, der tagsüber surft, liegt mit dem neuen Tarif immer günstiger.

9.

Variationen:

Betrachtung anderer linearer Zusammenhänge, Untersuchung einer realen Waschmaschine

10.

(a) Teil (a) verlangt einen Wechsel der Darstellungsebene und die Angabe einer Funktionsgleichung einer abschnittsweise definierten linearen Funktion.

(b) Teil (b) ist durch eine weitere Modellannahme (konstante Durchschnittsgeschwindigkeit in jedem angegebenen Teilintervall) lösbar. Zudem muss ein Teilgraph zur Berechnung des Wertes zu 130 $\frac{km}{h}$ linear interpoliert werden (Vernetzung Algebra mit Geometrie).

11. Quelle: Mathe-Welt, in: mathematik lehren (2000) Heft 103, S. 3

Variationen:

(a) Fragen zu dem Diagramm formulieren

(b) zu einer gegebenen Geschichte ein Zeit-Ort-Diagramm zeichnen oder umgekehrt

(c) Wie schnell fahren die beiden Schiffe (in km/h)?

(d) Wie weit ist das erste Schiff noch vom Hafen in Goofytown entfernt, wenn das zweite Schiff gerade im Hafen von Entenhausen ankommt?

(a) Die beiden Schiffe fahren ungefähr nach $1,7\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{h}\,42\,\mathrm{min}$ aneinander vorbei.

(b) Ungefähr zwischen $1,4\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{h}\,24\,\mathrm{min}$ und $2\,\mathrm{h}$ sind die beiden Schiffe höchstens $20\,\mathrm{km}$ voneinander entfernt. In diesem Zeitintervall können die beiden Kapitäne einander im Fernglas sehen. Die beiden Schiffe sind dabei ungefähr 40 bis $64\,\mathrm{km}$ von Entenhausen entfernt.

12. Variationen der Aufgabe:

(a) Frage weglassen

(b) Nach wie vielen Jahren bilden die beiden Tropfsteine eine zusammenhängende Säule, wenn wir annehmen, dass das so weiter geht?

(c) Wie weit sind die beiden Tropfsteine dann nach 20000 Jahren voneinander entfernt?

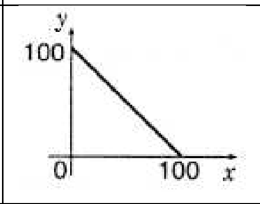
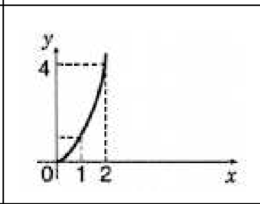
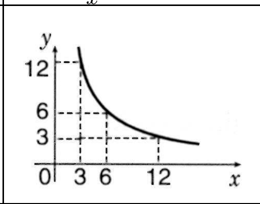
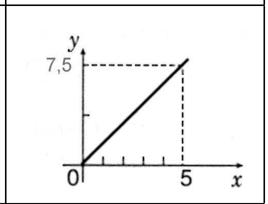
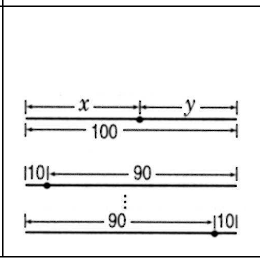
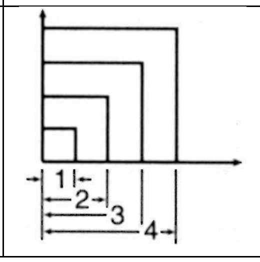
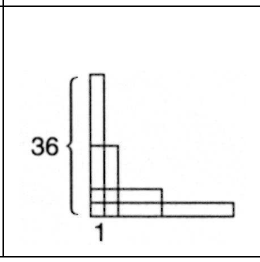
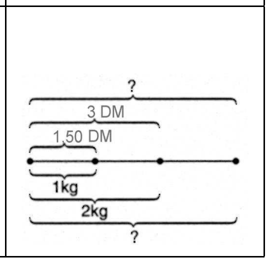
(d) Nach wie vielen Jahren sind die beiden Tropfsteine nur noch 50 cm voneinander entfernt?

(a) Nach ca. 30000 Jahren
(b) Ca. 100 cm
(c) Nach ca. 25000 Jahren

13. Quelle: Mathe-Netz 8, S. 60

Lösung:

(a) siehe Tabelle

	a.	b.	c.	d.
Werte	x: 0, 10, 20, 30, … y: 100, 90, 80, 70, …	x: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y: 1, 4, 9, 16, 25, 36	x: 1, 2, 3, 4, … y: 36, 18, 12, 9, …	x: 0, 1, 2, 3, … y: 0, 1,5, 3, 4,5, …
Term	$x + y = 100$ $y = 100 - x$	$y = x \cdot x$ $y = x^2$	$x \cdot y = 36$ $y = \frac{36}{x}$	$y = 1,5x$
Graph				
Bild				

(b)
- *a. und c.*
  je mehr desto weniger
  Graph fallend nicht durch Ursprung
  $x + y = const.$ vs. $x \cdot y = const.$
- *a. und d.*
  Graphen sind Geraden
  Konstantes Wachsen bzw. Fallen
  geht um Geld
- *b. und c.*
  Graphen sind Kurven
  geht um Flächeninhalte
- *b. und d.*
  Graphen gehen durch den Ursprung
  je mehr desto mehr wachsend

- *a., b. und c.*
  geht um Blumen
- *a. und b.*
  keine erkennbaren Gemeinsamkeiten

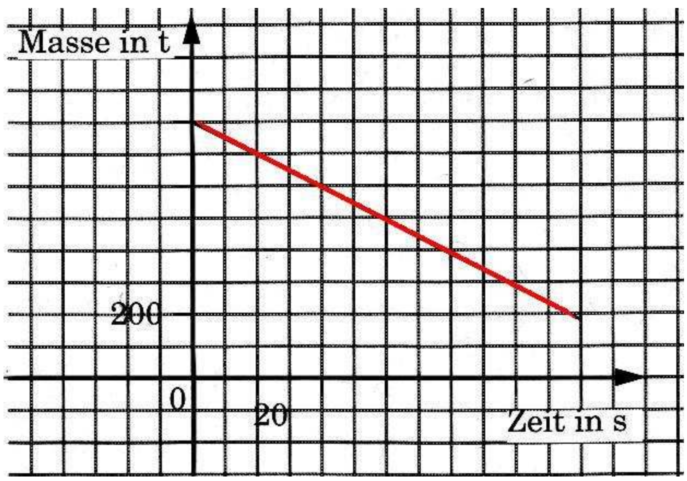
14.

1. Zuordnung
2. Schaubild
3. Steigung
4. Hyperbel
5. Descartes
6. Achsen
7. Ursprung
8. Funktionsterm
9. Absolutglied
10. FUNKTION
11. Proportional
12. Linear
13. Wertetabelle
14. Antiproportional

15.

(a)

(b) i. $f(m) = 800 - 306 \cdot m$
$g(s) = 800 - 5,2 \cdot s$

ii. 

iii. Die Rakete wiegt dann 341 t. Nach ca. 59 s wiegt sie nur noch 500 t.

16.

(a) i.

	(1)	(2)
30 $\frac{km}{h}$	18 m	17,55 m
60 $\frac{km}{h}$	54 m	52,2 m
90 $\frac{km}{h}$	108 m	103,95 m
120 $\frac{km}{h}$	180 m	172,8 m
150 $\frac{km}{h}$	270 m	258,75 m

30 km/h

ii.

(b)

	x	–2	$-\frac{1}{2}$	1	2,2
a)	$f(x) = 3x - 1$	–7	–2,5	2	5,6
b)	$f(x) = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	–2	1	$\frac{5}{11}$
c)	$f(x) = 1 - (\frac{1}{x})^2$	$\frac{3}{4}$	–3	0	$\frac{96}{121}$
d)	$f(x) = \frac{x}{2}$	–1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{10}$

(c)

(d)

Monatsnummer	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Anzahl der Paare	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

(e)

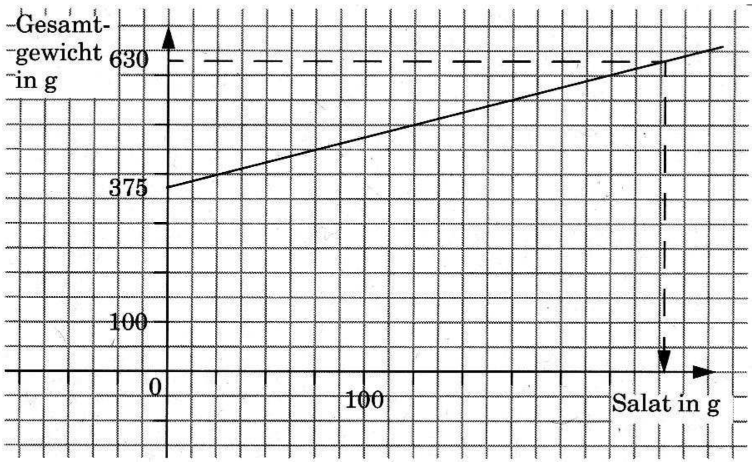
17. Quellen: MatheNetz 8 (2000), MatheLive 8 (2001), Lambacher Schweizer 8 (1996), Schnittpunkt 8 (1994), Mathematik heute 8 (1995), Zahlen und Größen 8 (2000), Mathematik 8 (1994), Die Welt der Zahl (1994), Elemente der Mathematik 8 (1994), Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sek.I (2001).

(a)

(b) $AB : y_1 = 4x - 3 \quad x \in [0; 1]$
$BC : y_2 = -\frac{1}{4}x + 1,25 \quad x \in [-3; 1]$
$CA : y_3 = -\frac{5}{3}x - 3 \quad x \in [-3; 0]$

(c) i. Er hat 255 g Salat.
ii. Teller wiegt 375 g.

Graphische Lösung:

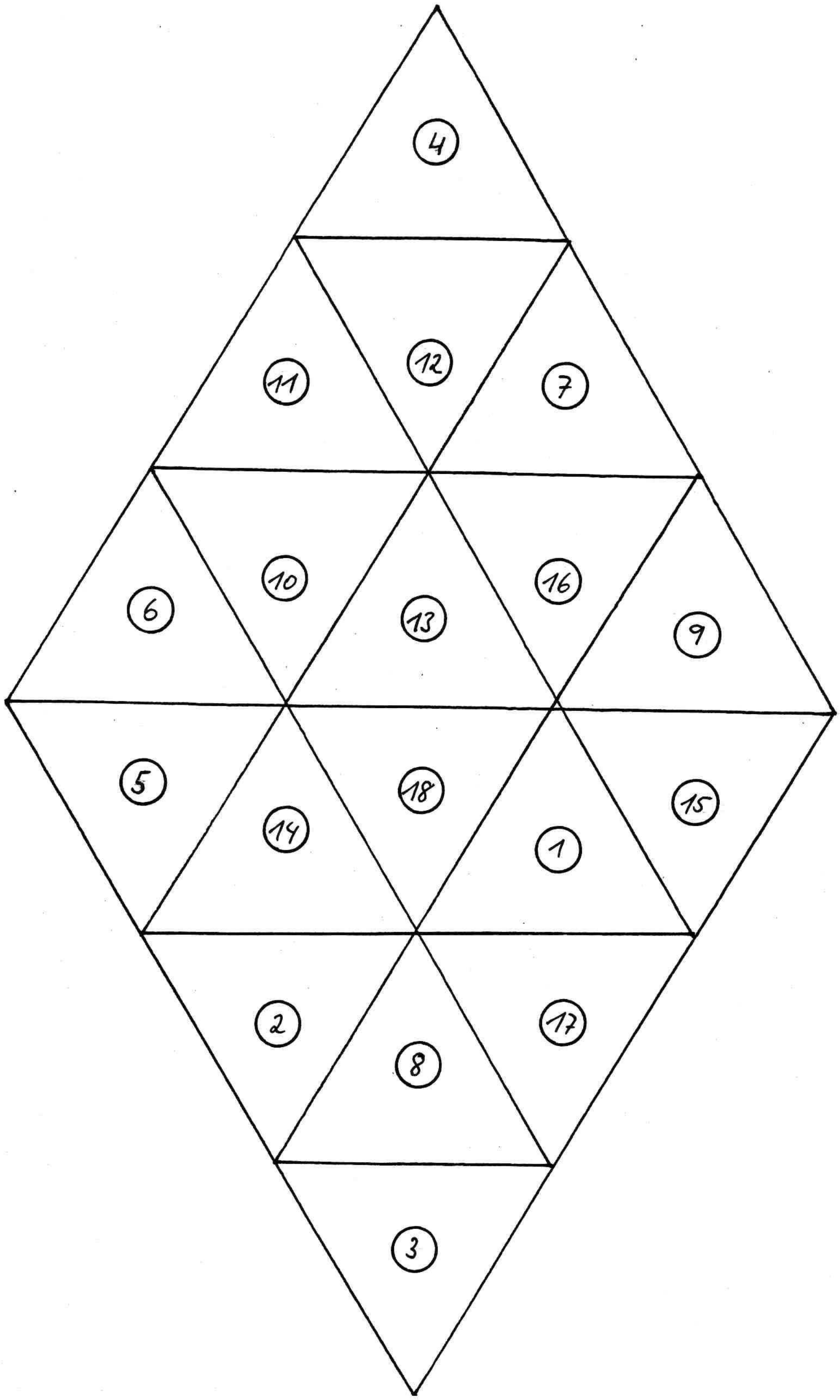


(d)

(e) i. $y = -2,5 \cdot x + 141,8$
x-Anzahl der Jahre seit 1993 / y-Erdgasreserve
Die geschätzten Erdgasreserven würden noch ca. 57 Jahre reichen.

ii. 71 Jahre

iii. 85 Jahre



18.

19.

20.

21.

a) Petra verlässt ihr Elternhaus um 7.18 Uhr.

b) Sie kommt um 7.43 Uhr in der Schule an.

c) Um 7.20 Uhr trifft sie sich mit ihrer Freundin.

d) Um 7.28 Uhr warten beide an der ersten Ampel auf weitere Freundinnen.

e) Um 7.36 Uhr müssen sie an der zweiten Ampel warten.

f) Um 7.33 Uhr merkt sie, dass sie sich beeilen müssen. Danach verläuft der Graph der Wegstrecke nämlich steiler, das bedeutet, dass sie schneller sind.

g) Z. B. auf der letzten Strecke bevor sie die Schule erreichen, ist sie wesentlich langsamer, wohl deshalb, weil sie das letzte Ende zu Fuß und bergan gehen müssen. Nachdem sie von zu Hause aufgebrochen ist, ist sie zunächst auch noch langsam...

22.

23.

b) U1 fährt um 8.00 Uhr in Station A los und erreicht um 10.00 Uhr Station G.
U2 fährt um 8.30 Uhr in Station G los und erreicht um 9.50 Uhr Station A.
U3 fährt um 8.22 Uhr in Station A los und fährt ohne Haltepause durch bis Station G. Sie erreicht die Station um 9.00 Uhr.
U4 fährt um 9.00 Uhr in Station A los, erreicht um 9.55 Uhr Station F, hält 10 Minuten und fährt dann direkt zurück zu Station A, die um 11.00 Uhr erreicht wird.
U5 und U6 fahren ähnlich wie U1—U4.

c) Die Leserichtung (Fahrtrichtung der U-Bahn) ist von der Zeitachse abhängig: Linke Zeitachse, fallende Verbindung, Fahrtrichtung A bis G. Rechte Zeitachse, fallende Verbindung, Fahrtrichtung G bis A.

d) Halt an Station F (weitere Beispiele für Haltestationen sind möglich).

e) U1 und U2, U1 und U3, U2 und U3, U2 und U4, U4 und U6, U5 und U6.

f) Nein.

g) Unterschiedliche Steigung bedeutet unterschiedliche Geschwindigkeit von U6: Steilere Steigung, größere Geschwindigkeit — flachere Steigung, kleinere Geschwindigkeit.

24.

25.

26.

27.

a) (I) $y = -3\,x + 2$, (II) $y = 2\,x - 3$

b) P$\,(\,1\,|\,-1\,)$

c) Werte aus b) für x und y einsetzen und dadurch erhaltene Aussage auf Wahrheit prüfen.

d) A liegt nicht auf I, B liegt auf II.

3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen

1.

2.

   120 m lang: SP $(30|1800)$
   Länge a: SP $(\frac{a}{4}|\frac{a^2}{8})$

3. $E(x) = (95 + y)(8 + x) = -20(x + 1,625)^2 + 812,81$
   Theoretisch maximale Einnahme bei Preisreduzierung auf $6,375$. Dies ist aber wohl kein guter Preis...

4.

5.

6.

   1. $f(x) = x^2 - 6,5$
   2. $f(x) = x^2$
   3. $f(x) = (x - 3)^2 - 5$
   4. $f(x) = (x - 6)^2 + 5$
   5. $f(x) = (x - 6)^2$
   6. $f(x) = (x + 4)^2 - 4,5$
   7. $f(x) = (x + 4)^2 + 3,5$
   8. $f(x) = (x + 2)^2 - 2$
   9. $f(x) = x^2 + 5$
   10. $f(x) = (x - \frac{1}{4})^2 + 2,5$

7.

   1. $f(x) = -(x + 7)^2$
   2. $f(x) = -x^2 + 3$

3. $f(x) = -x^2$
4. $f(x) = -x^2 - 3$
5. $f(x) = -(x-4)^2 + 2$
6. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
7. $f(x) = x^2$
8. $f(x) = 2x^2$
9. $f(x) = -2x^2$
10. $f(x) = -4x^2 + 6$

8.

1. $f(x) = (x+1,5)^2 - 3$
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$
3. $f(x) = -(x+4)^2 + 5$
4. $f(x) = (x-3,5)^2 + 1$
5. $f(x) = -(x-5)^2 + 7$
6. $f(x) = (x+3)^2 - 2$
7. $f(x) = -2x + 1,5$
8. $f(x) = x^2 + 3$
9. $f(x) = \frac{3}{4}x$
10. $f(x) = -(x-3,5)^2 + 3$

9.

(a) jeweils nur Bereich in dem der Graph fällt:
   - (a) $x \leq 0$
   - (b) $x \leq 0$
   - (c) $x \leq 3$
   - (d) $x \leq 3$
   - (e) $x \leq -1$
   - (f) $x \geq 7$
   - (g) $x \leq -2,5$
   - (h) $x \leq 4$ oder $x \geq 4$

(b) (a) z.B. $f(x) = (x+4)^2 + c$
   (b) z.B. $f(x) = -(x-2)^2 + c$

10.

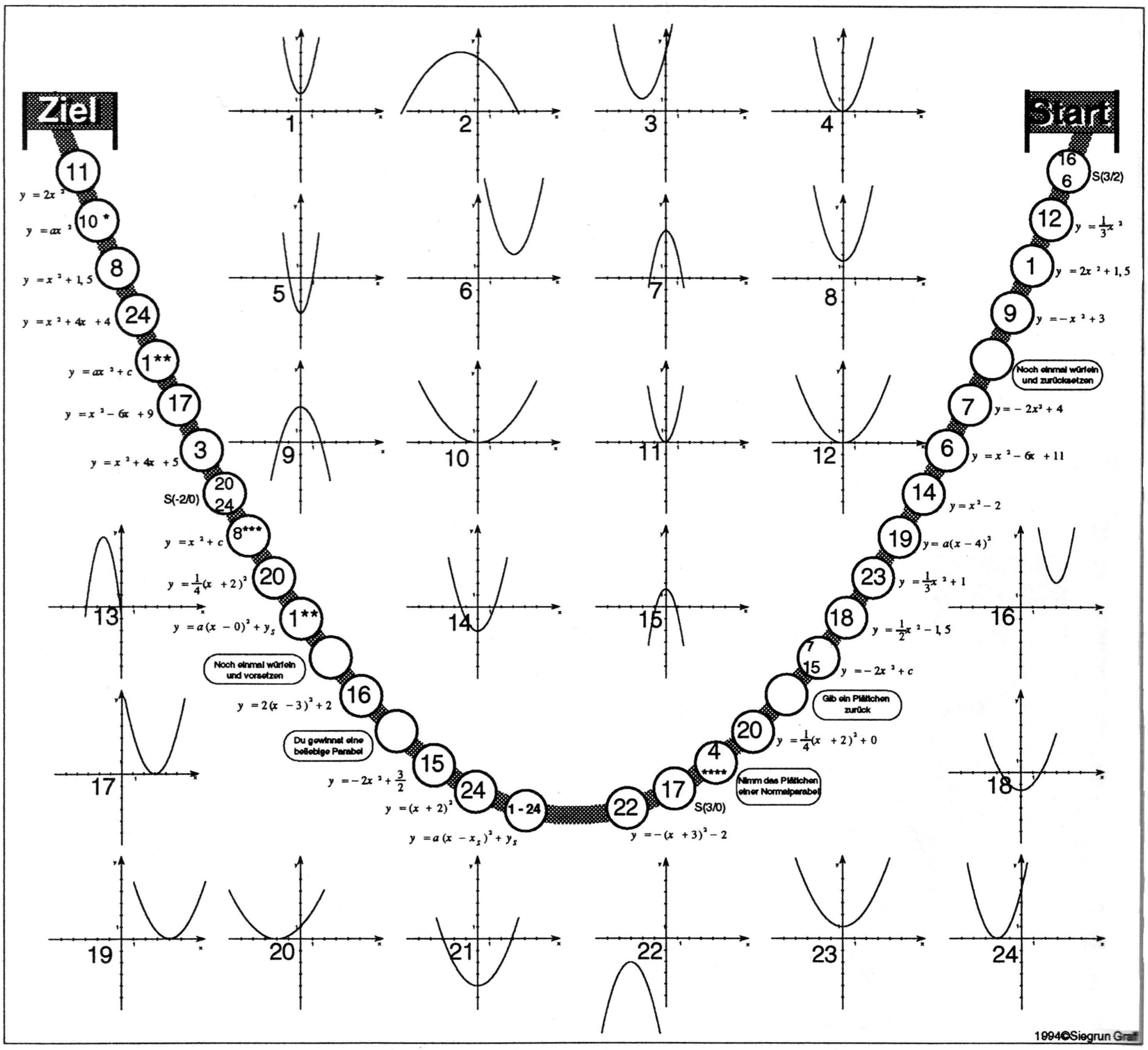
11.

12.

13.

Quelle: mathematik lehren 66 (1994), S. 57-59

Lösung:



10* (11; 12; Sonderfall a= 1: 4) **1**** (5; 7;13; 15; 18; 21; 23; Sonderfall: /a/ = 1: 4; 8; 9; 14; Sonderfall c=0 : 4; 10; 11; 12)
8*** (14; Sonderfall c= 0 : 4) **4****** (3; 6; 8; 9; 14; 17; 22; 24)

14.

15. **Grundeigenschaften:**
proportionale Funktionen: zum Doppelten (der Argumente) das Doppelte (der Funktionswerte), zum k-fachen das k-fache, zur Summe die Summe;
lineare Funktionen: zu gleichen Schritten die gleiche Änderung
Quadratfunktionen: zum Doppelten das Vierfache, zum k-fachen das k^2-fache

16. Der Flächeninhalt wird um den Faktor $1,21$ erhöht, der Preis um ca. $1,20$. Nimmt man an, dass der Preis um den gleichen Faktor steigen darf wie der Flächeninhalt, fällt die Preissenkung mit $1,29$ Pfennigen doch recht gering aus. Man könnte jedoch auch argumen-

tieren, dass der Preis erhöht wurde, da man gezwungen ist mehr Schokolade zu kaufen (die man vielleicht gar nicht isst)

17.

18.

19. ca. 158 m

20.

21. $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + 4$

22. $y = -1,04x^2$

23. Scheitelpunkt bei $(3,36|1,78)$, Nullstelle bei ca. $8,95$.

24. $5,7s;\ 7,7s;\ 10,5s;\ 7,6s;\ 9,1s;\ 9,4s$

25.

(a) 500 m

(b) 1,57 m

26.

(a) 124 m

(b) 5,12 s; 131,4 m

(c) 1,1 s und 9,4 s

27.

28.

(a) 7 cm [8 cm]

(b) 2 cm [8 cm/4 cm]

29. 60 cm mal 120 cm

30.

31.

(a) $12,25\,\mathrm{dm}^2$

(b) $f(x) = (s+1)^2$

(c) 2 dm

32. 13 Geraden

33. 22 m mal 45 m

34. ca. 1,37 m

35. 6 cm

36.

37. linearer Prozess!!!

(a) 1 Liter

(b) 150 min nach Infusionsbeginn

38. Für die Zahl 3

39.

40.

- Gesucht: Gehgeschwindigkeit v in $\frac{m}{s}$.
- Wir wissen: $t = \frac{s}{v}$, wenn s die Strecke und t die Zeit ist.
- Die Gesamtzeit t setzt sich zusammen aus der Zeit t_1 für den Hinweg und der Zeit t_2 für den Rückweg, dies ergibt den Ansatz $t = t_1 + t_2 = \frac{100\,\mathrm{m}}{v+1\frac{m}{s}} + \frac{100\,\mathrm{m}}{v-1\frac{m}{s}} = 120\,\mathrm{s}$
- Die Lösungen sind gerundet $v_1 = 2,1\frac{m}{s}$ und $v_2 = -0,5\frac{m}{s}$; die positive Lösung entspricht $7,7\frac{km}{h}$ was für einen Fußgänger schon recht flott ist.

- Interessant und direkt einleuchtend ist, dass die Gehgeschwindigkeit nicht unter $1\frac{m}{s}$ (der Geschwindigkeit des Bandes) fallen darf, damit man beim Rückweg nicht „hinten runter fällt", dies spiegelt sich in den Lösungen für verschiedene Zeiten wieder, die für wachsende Zeit gegen $1\frac{m}{s}$ konvergieren.
- Wer findet sinnvolle Interpretationen für die negative Lösung?

41.

42. Hier benutzt: Satz von Vieta
Sind x_1 und x_2 die Lösungen einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + px + q$, dann gilt: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

(a) Die Lösungen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen: $x_2 = -x_1$
Also: $x_1 - x_1 = 0 = -p$ und $x_1 \cdot (-x_1) = x_1^2 = q$
Also: $p = 0$ und $q < 0$. Für q gilt weiterhin oben stehende Beziehung.

(b) Eine Lösung ist der Kehrwert der anderen: $x_2 = \frac{1}{x_1}$
Also: $x_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1^2+1}{x_1} = -p \Leftrightarrow (x_1 + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - 1$ und $x_1 \cdot \frac{1}{x_1} = 1 = q$
Also: $q = 1$ und $|p| > 2$. Für p gilt weiterhin oben stehende Beziehung.

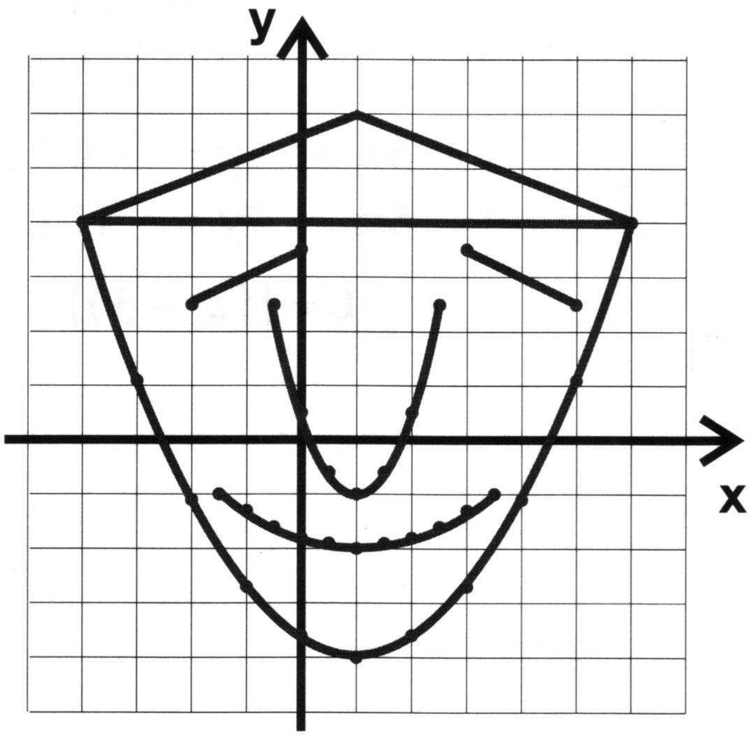
(c) Genau eine der beiden Lösungen ist 0: Sei o.B.d.A. $x_1 = 0$
Also: $0 + x_2 = -p$ und $0 \cdot x_2 = q$
Also: $q = 0$ und $p \neq 0$, denn sonst gibt es keine zweite Lösung. Für p gilt weiterhin oben stehende Beziehung.

43.

44.

Quelle: Herget/Jahnke/Kroll: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sek. I, Cornelsen (2001)

45.



46.

zu b): knapp 5 Tage

47.

a) $L = \{3, -19\}$
b) $L = \{3, 1\}$

48.

a) lila
b) blau
c) grün
d) rot

49.

blau:	$S(-3{,}5 \mid -2{,}25)$	$y = (x + 3{,}5)^2 - 2{,}25$
rot:	$S(-2 \mid 0)$	$y = (x + 2)^2$
grün:	$S(7 \mid -3)$	$y = (x - 7)^2 - 3$
orange:	$S(-7 \mid 2)$	$y = -(x + 7)^2 + 2$
lila :	$S(0 \mid -1)$	$y = -x^2 - 1$

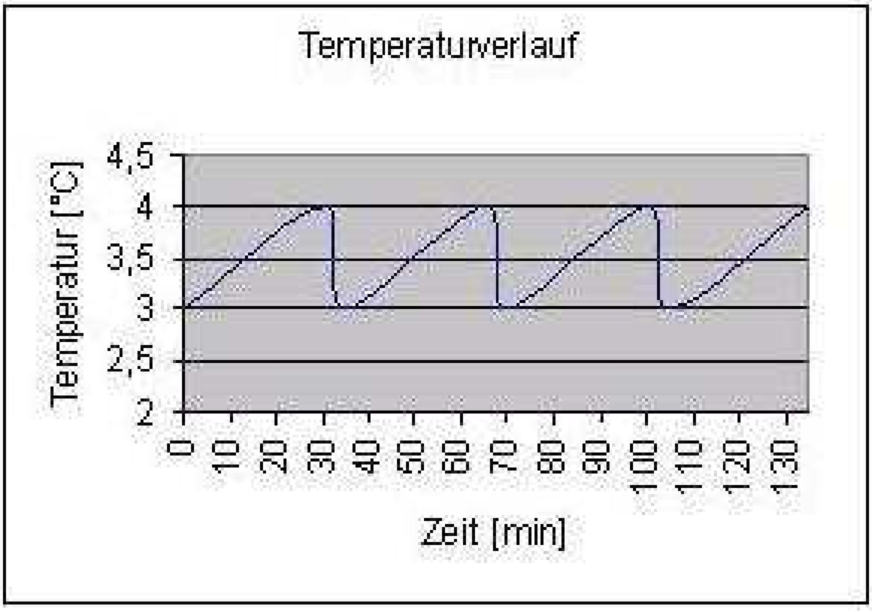
4 Trigonometrische Funktionen

1. Quelle: Elemente der Mathematik 11 (2000)

   (a) Modellierung durch Sinuskurve $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$:
   Periodenlänge beträgt ca. 365 Tage. Damit klar: $b = \frac{2\pi}{365}$
   Maximum wird am 21.6. (172. Tag) und. Minimum am 21.12. (355. Tag) angenommen. Folglich muss die Amplitude a als $\frac{16{,}5-8}{2} = 4{,}25$ festgesetzt werden. Der Mittelwert von $12{,}25$ wird dabei ungefähr am 21.3. (dem 80. Tag) und 21.9. angenommen. Damit sind auch c und d klar. Insgesamt erhalten wir: $f(x) = 4{,}25 \sin(\frac{2\pi}{365} \cdot (x - 80)) + 12{,}25$.

   (b) Der 10. Juli ist der 191 Kalendertag. Demnach $f(191) = 4{,}25 \sin(\frac{2\pi}{365} \cdot (191 - 80)) + 12{,}25 = 16{,}26 \approx 16$

2. Quelle: Jahnke et al.: Analysis (2002), Cornelsen



   (a)

   (b) Beispiel: „In regelmäßigen Abständen wiederholen sich alle Funktionswerte.“ D.h. misst man zu einem bel. Zeitpunkt die Temperatur und dann alle 35min wieder, hat der Kühlschrank immer die gleiche Temperatur.

   (c) Natur: Tageslänge (von Sonnenauf- bis Sonnenuntergang) über ein Jahr verteilt, Sonnenstand der Mittsommersonne am Nordkap (siehe Deckblatt), Tidenkurve, ...
   Technik: Backofen, EKG, ...

(d) i. periodisch: Jedem Winkel ist eindeutig eine Höhe der Kabine zugeordnet. Dabei $H\ddot{o}he(\alpha) = H\ddot{o}he(\alpha + 360°)$. Winkel völlig unabhängig von Zeit, Geschwindigkeit etc.

ii. nicht periodisch: wohl gewisse Regelmäßigkeiten innerhalb eines Jahres, die durch Wetterlage beeinflusst werden, aber keine Periodizität.

iii. periodisch: Einschränkung: Hinterrad auf dem Boden ohne Durchrutschen, d.h. Weg führt zu Höhenveränderung und Veränderung nur durch Zurücklegen von Weg.

iv. ...

3. Da es sich anscheinend um eine periodische Funktion handelt, deutet dies auf einen gleichmäßigen gesunden Herzschlag hin.

4.

(a)

(b) 4

(c) Periode beträgt $1\frac{1}{3}$

5.

6.

7.

(a) $h(\alpha) = 10 \cdot \sin\alpha + 12$

(b)

(c) $[-15°; 15°]$

8.

(a) Der Motor leistet $12,1\,\mathrm{kW}$ bei $100\,\frac{km}{h}$ auf ebener Fahrbahn.

(b) Die Steigung betrug ca. $15,1°$.

5 Zuordnungen, Graphen

1. Anregungen zur Öffnung der Aufgabe:

   (a) Schüler erstellen selbst Temperaturkurven, z. B. zu Hause.

   (b) Die Daten werden im Unterricht in eine geeignete Darstellung überführt (Diskussion verschiedener Darstellungsarten.

   (c) Schüler formulieren sinnvolle Fragen zu den graphischen Darstellungen (höchste Temperatur, stärkster Temperaturanstieg).

   (d) Graph ohne Achsenbeschriftungen vorgeben. Was könnte hier dargestellt sein?

2. Anregungen zur Öffnung dieser Aufgabe:

   (a) Schüler erstellen einen eigenen Alters-Graphen und diskutieren über Verlauf.

   (b) Schüler formulieren selbst sinnvolle Fragen (Gibt es einen höchsten Wert? Wann ist das Wachstum am größten?).

   (c) Schüler berechnen jährliche Anstiege (um die Hälfte, um ein Viertel,...) und vergleichen.

3.

   Anregungen zur Öffnung dieser Aufgabe:

   (a) Frage ersetzen durch: Betrachte die Zuordnung Durchmesser $\rightarrow$ Höhe. Was fällt dir auf?

   (b) Alternative: Erstellt selbst Graphen durch Füll-Versuche.

   (c) Umkehraufgabe: Gegeben sind verschiedene Graphen, Schüler zeichnen die dazu passenden Gefäße.

4.

   Umkehraufgabe: Schüler erfinden eine Geschichte und stellen dann den Graph dazu auf.

5.

Umkehraufgabe: Die Schüler erfinden eigene Geschichten und stellen den Graph dazu auf.

100 m-Lauf des Siegers, der am Ende mit der Fahne winkend gleichmäßig durchs Stadion läuft.

6.

Anregung zum Öffnen dieser Aufgabe: Beziehe weitere Sportarten deiner Wahl ein!

7. Quelle: Rosi Heinrich (Wiss. Einrichtung Laborschule)

Variation der Aufgabe:

Angst vor/während der Mathearbeit

8. Anregungen zur Öffnung dieser Aufgabe:

(a) Die Schüler finden selbst Rechtecke mit identischem Flächeninhalt.

(b) enaktiv mit ausgeschnittenen Rechtecken arbeiten.

9. *Lösung:*

(a) 1,5 / 200 / 31 / 11 / 33 / 2,5 / 2,5 / 4,5 / 8

(b) Tiere mit kleinerer Körperlänge haben das bessere Sprungvermögen.

(c) Floh (vgl.a)

(d) 55,80 m

(e) So weit wie als Riese.

(f) 10,80 m

(g) etwa 8,75 cm

10.

Umkehraufgabe: Gegeben ist ein Graph, wie könnte ein zugehöriges Gefäß aussehen?

Begründungen: Warum/wann tritt ein Knick auf usw.

11.

12.

3 Maler.