

---

**SMART**

**Sammlung mathematischer Aufgaben  
als Hypertext mit T<sub>E</sub>X**

**Funktionen (SINUS-Transfer)**

---

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des  
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts  
der Universität Bayreuth\*

18. Mai 2006

\*Die Aufgaben stehen für private und unterrichtliche Zwecke zur Verfügung. Eine kommerzielle Nutzung bedarf der vorherigen Genehmigung.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Exponential- und Logarithmusfunktionen</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Lineare Funktionen</b>	<b>26</b>
<b>3</b>	<b>Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen</b>	<b>60</b>
<b>4</b>	<b>Trigonometrische Funktionen</b>	<b>95</b>
<b>5</b>	<b>Zuordnungen, Graphen</b>	<b>101</b>

# 1 Exponential- und Logarithmusfunktionen

## 1. Das Bevölkerungsgesetz von Thomas R. Malthus (1766 – 1834)

Im Jahre 1798 veröffentlichte der englische Philosoph Thomas R. Malthus sein „Essay on the Principles of Population“. Er vermutete, dass die Nahrungsmittelerzeugung dem rasanten Bevölkerungswachstum im Zuge der industriellen Revolution nicht würde folgen können, und prognostizierte permanente Hungersnöte, die wir heute in Entwicklungsländern z.T. beobachten können. Zur Begründung seiner Thesen entwickelte er einfache Modelle für das Wachstum von Populationen: die Bevölkerung wachse exponentiell, die zur Verfügung stehenden Nahrungsmittel jedoch nur linear. Mit seiner „Wachstumsfunktion“  $N = N_0 \cdot 1,0302^t$  gelang es Malthus, das Bevölkerungswachstum in den USA für die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts gut zu beschreiben:



Jahr	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860
$N$ (in Mio.)	$N_0 = 3,9$	5,3	7,2	9,6	12,9	17,1	23,2	31,4

## 1 Exponential- und Logarithmusfunktionen

- (a) Vergleiche die Angaben aus Volkszählungen mit den „theoretischen“ Werten der Wachstumsfunktion.
- (b) Aus späteren Volkszählungen sind folgende Anzahlen bekannt:

Jahr	1880	1900	1930	1970
$N$ (in Mio.)	50,2	76,0	123,2	203,2

Überprüfe, ob die Wachstumsfunktion noch sinnvoll ist. Begründe!

- (c) Betrachtet wird eine Bevölkerung, die zu Beginn eines bestimmten Jahres aus 1 Million Personen besteht und jährlich um 3% wächst. Zum gleichen Zeitpunkt wären Nahrungsmittel für 2 Millionen Personen verfügbar, wobei die Produktion der Nahrungsmittel für jährlich 100000 Personen gesteigert werden könnte. Untersuche diese Entwicklung (mithilfe einer Tabellenkalkulation). In welchem Jahr übersteigt die Anzahl der Personen die zur Verfügung stehenden Mittel?

Quelle: Abakus 10 (1995), Schöningh

## 2. Exponentielle Prozesse

Quellen für Aufg. 2-14: Elemente 11, Abakus 10, Mathematik 11 Hessen, Mathematik 12.1 GK Hessen

### Meerschweinchen

Am Eröffnungstag eines Streichelzoos befanden sich 93 Meerschweinchen in einem Gehege. Ein Jahr später waren es bereits 115 Meerschweinchen.

- (a) Wie viele Meerschweinchen werden es am Tag des 10-jährigen Jubiläums sein, wenn man annimmt, dass der Bestand linear wächst?
- (b) Wie viele Meerschweinchen werden es an diesem Tag sein, wenn man ein exponentielles Wachstum annimmt?
- (c) Lässt sich die Vermehrung der Meerschweinchen eher mit dem linearen oder dem exponentiellen Modell erklären?

## 3. Untersuchung der Bauchspeicheldrüse

Um die Funktion der Bauchspeicheldrüse zu testen, wird ein bestimmter Farbstoff in sie eingespritzt und dessen Ausscheiden gemessen. Eine gesunde Bauchspeicheldrüse scheidet pro Minute 4% des jeweils noch vorhandenen Farbstoffs aus.

Bei einer Untersuchung wird einem Patienten 0,2 Gramm des Farbstoffes injiziert. Nach 30 Minuten sind noch 0,09 Gramm des Farbstoffes in seiner Bauchspeicheldrüse vorhanden.

Funktioniert seine Bauchspeicheldrüse normal?

#### 4. Wie hoch springt der Ball?

Ein Ball fällt aus 2 m Höhe auf eine feste Unterlage und springt nach jedem Aufprall jeweils auf 80% der Höhe zurück, aus welcher er gefallen ist.

Stelle den Funktionsterm auf, der angibt, welche Höhe der Ball nach dem  $n$ -ten Aufprall erreicht. Wie hoch springt der Ball nach dem 5. Aufprall?

#### 5. Bakterien vernichten

Ein Bakterienstamm kann durch Erhitzung vernichtet werden. Die Abnahme der Individuen folgt näherungsweise dem Gesetz  $N(t) = N(0) \cdot 0,8^t$ .

Wie viele Bakterien lagen zu Beginn der Beobachtung vor, wenn es nach 2 Stunden noch 960 sind?

Wann ist der Bakterienstamm abgestorben (d.h. weniger als ein Bakterium vorhanden)?

#### 6. Bevölkerungswachstum

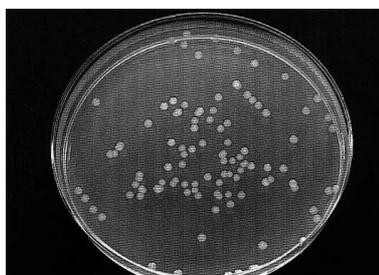
Wann wird bei Annahme gleich bleibender Wachstumsrate

	Bevölkerung 1991	Jährliche Wachstumsrate
Afrika	631.000.000	2,9%
Asien und Ozeanien	3.073.000.000	1,9%
Lateinamerika	497.000.000	2,7%

- die Bevölkerung von Afrika die von Asien und Ozeanien übertroffen haben?
- die Bevölkerung von Lateinamerika die von Asien und Ozeanien übertroffen haben?
- Stelle das Bevölkerungswachstum graphisch dar.

#### 7. Forschung mit Bakterien

In einem Forschungslabor wird ein neues Medikament gegen eine Infektionskrankheit entwickelt. Dazu wird unter anderem das Wachstum einer bestimmten Bakterienart experimentell untersucht. Das dargestellte Messprotokoll gibt die Anzahl  $N$  der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  an.



## 1 Exponential- und Logarithmusfunktionen

$t$ in min	30	40	50	60	70	80	90
$N$ in 100	17	24	34	48	68	96	136

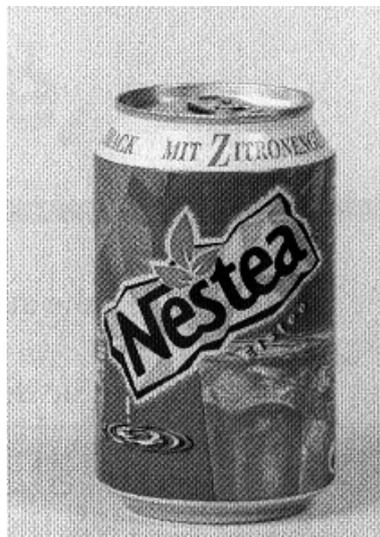
- (a) Wie viele Bakterien kann man nach 2 h, 3 h, 4 h und 5 h erwarten, wenn man die gleiche Verdopplungszeit annimmt? Stelle den Sachverhalt in einem Koordinatensystem dar.
- (b) Auch vor Beginn der Beobachtung verdoppelte sich die Anzahl der Bakterien jeweils in der gleichen Zeit. Wie viele Bakterien befanden sich zu Versuchsbeginn ( $t = 0$ ) in der Glasschale? Ermittle die Anzahl der Bakterien 10 min, 30 min und 1 h vor Versuchsbeginn.

## 8. Koffein

Abbau von Koffein im Blut

Eistee kann einen Koffeingehalt von 50 Milligramm pro 0,33 l Dose haben. Bei einem Jugendlichen setzt die Wirkung des Koffeins nach ca. 1 Stunde ein. Der Koffeingehalt im Blut nimmt dann exponentiell mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden ab. Eine Büchse Eistee enthält 50 mg Koffein.

Wann sind nur noch 0,01 mg Koffein im Blut vorhanden, wenn der Abbau ca. 1 Stunde nach dem Verzehr beginnt?



## 9. Abbau eines medizinischen Wirkstoffs

## 1 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Aus Unachtsamkeit wird einem Patienten die 2,5-fache Menge eines Medikamentes gespritzt. Er soll daher so lange unter medizinischer Kontrolle bleiben, bis sich im Körper nur noch die ursprünglich vorgesehene Dosis von 2 ml befindet. Es wird davon ausgegangen, dass pro Stunde etwa 4% des im Körper befindlichen Medikaments abgebaut und ausgeschieden werden.

- Nach wie vielen Stunden ist im Körper des Patienten nur noch die Normaldosis - 2 ml - enthalten?
- Veranschauliche den Abnahmeprozess in einem Graphen.
- Bestimme die „biologische Halbwertszeit“ des Medikamentes sowohl am Graphen als auch rechnerisch.

### 10. Schlafmittel

Es gibt verschiedene Schlafmittel auf dem Markt, die zu einer besseren nächtlichen Schlafeinleitung führen sollen. Ihre Wirkung sollte jedoch spätestens am nächsten Morgen weitgehend abgebaut sein. Die Messung ergab, dass von 2 mg des Wirkstoffes Triazolam nach 3 Stunden 1,18 mg noch nicht abgebaut sind. Was ist von diesem Schlafmittel zu halten?



### 11. Stadtflucht

1990 betrug die Einwohnerzahl einer Großstadt ca. 200000; ein Jahr später waren es 2000 weniger.

- Gib unterschiedliche Funktionsgleichungen an, mit deren Hilfe sich der Abnahmeprozess beschreiben lässt.
- Wie lautet die Prognose für die Entwicklung der Einwohnerzahl in den Jahren 2000 und 2010 in den unterschiedlichen Vorhersagemodellen?

- (c) In welchem Zeitraum hätte sich die Bevölkerungszahl bei den unterschiedlichen Vorhersagemodellen halbiert?

## 12. Krebszellen

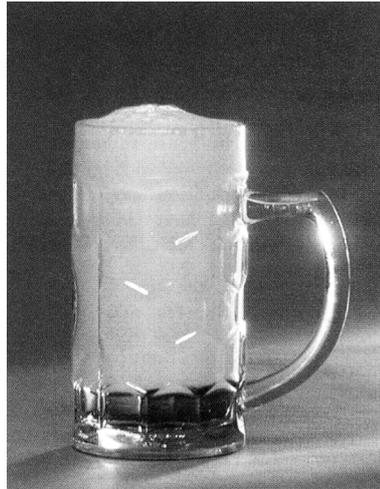
Eine einzelne Krebszelle wird einer Maus injiziert. Am Tag darauf sind durch Zellteilung bereits 5 Zellen vorhanden, wiederum einen Tag später bereits 25 Zellen.

- (a) Bestimme den Funktionsterm der zugehörigen Exponentialfunktion, die die Menge vorhandener Krebszellen in Abhängigkeit von der jeweiligen Zeitspanne (gemessen in Tagen) beschreibt.
- (b) Ein hochwirksames Gegenmittel steht zur Verfügung. Wann muss es spätestens eingesetzt werden, um die Maus am Leben zu erhalten?  
Hinweis: Man nimmt an, dass 1 Mio. Krebszellen tödlich sind. Berechne den Zeitpunkt für den Einsatz des Gegenmittels auf 2 Dezimalen genau.
- (c) Das eben erwähnte Gegenmittel tötet 91% aller Krebszellen. Angenommen, das Mittel wurde gespritzt, als die Anzahl der Krebszellen 900000 betrug. Wann muss erneut gespritzt werden? Beachte den Hinweis zu Teil (b). Berechne den Zeitpunkt auf 1 Dezimale genau.

## 13. Bierschaum

In einem zylindrischen Gefäß wird der Zerfall von Bierschaum untersucht. Die Höhe der Schaumsäule verringert sich alle 15 Sekunden um 9%.

- (a) Um wie viel Prozent verringert sich die Höhe der Schaumsäule in 1 Minute?
- (b) Zu Beobachtungsbeginn beträgt die Schaumhöhe 10 cm. Bestimme den Funktionsterm der zugehörigen Exponentialfunktion, die die Schaumhöhe (gemessen in *cm*) in Abhängigkeit von der jeweiligen Zeitspanne (gemessen in Minuten!) beschreibt. Runde dabei auf 4 Dezimalen.
- (c) Zeichne den Graphen aus Teil (b) im Bereich  $[0; 8]$ .
- (d) Man spricht von „sehr guter Bierschaumhaltbarkeit“, wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls mehr als 2 Minuten beträgt. Beschreibe, wie man am Graphen (!) überprüfen kann, ob im vorliegenden Fall sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vorliegt. Liegt sie vor?



#### 14. Wertverlust eines Pkw

Jedermann weiß, dass der Wertverlust eines Neuwagens im ersten Jahr am größten ist und in den Folgejahren zunehmend geringer wird.

- (a) Der Autohandel geht (bei einem bestimmten Kfz-Typ und einer durchschnittlichen Fahrleistung) davon aus, dass der jährliche Wertverlust 15% des letztjährigen Werts beträgt. Bestimme die Funktionsgleichung, die den jeweils noch vorhandenen Restwert (gemessen in €) eines 34000 € teuren Neuwagens in Abhängigkeit von der jeweiligen Zeitspanne (gemessen in Jahren) beschreibt.
- (b) Wie viel € ist das in Teil (a) beschriebene Auto nach 10 Jahren noch wert? Runde das Ergebnis auf volle €.
- (c) Nach wie vielen Jahren ist das in Teil (a) beschriebene Auto noch die Hälfte seines Neupreises wert? Runde das Ergebnis auf 1 Dezimale.
- (d) Ein Händler kalkuliert nach der Faustregel, dass sich der Wert eines Autos in 3 Jahren halbiert. Von welcher prozentualen jährlichen Wertminderung geht er aus?
- (e) Nach wie vielen Jahren hätte ein 40000 € teures Auto nach der Faustregel aus Teil (d) nur noch Schrottwert (= 700 €)? Runde auf eine Dezimale.

#### 15. Das Superballexperiment

Man lässt einen Superball (Flummi) aus 2 m Höhe senkrecht nach unten fallen. Er prallt auf den Boden und steigt ein erstes Mal nach oben, wobei er eine Sprunghöhe erreicht, die knapp unter 2 m liegt. Er beginnt erneut zu fallen, prallt ein zweites Mal auf und steigt ein zweites Mal nach oben usw. Die Sprunghöhe wird von Mal zu Mal

kleiner. Mit einem senkrecht gehaltenen Zollstock lässt sie sich relativ gut messen.

Überprüfe in einem Versuch, ob ein exponentieller Prozess vorliegt.

Quelle: Mathematik 11 Hessen

**16. Bevölkerungswachstum in unterschiedlichen Ländern**

Die Tabelle enthält die Bevölkerungszahlen (in Tausend) von 1990 und 1999 für verschiedene Länder und eine Prognose für das Jahr 2020.

Nimm an, dass zwischen 1990 und 1999 exponentielles Wachstum zugrunde liegt.

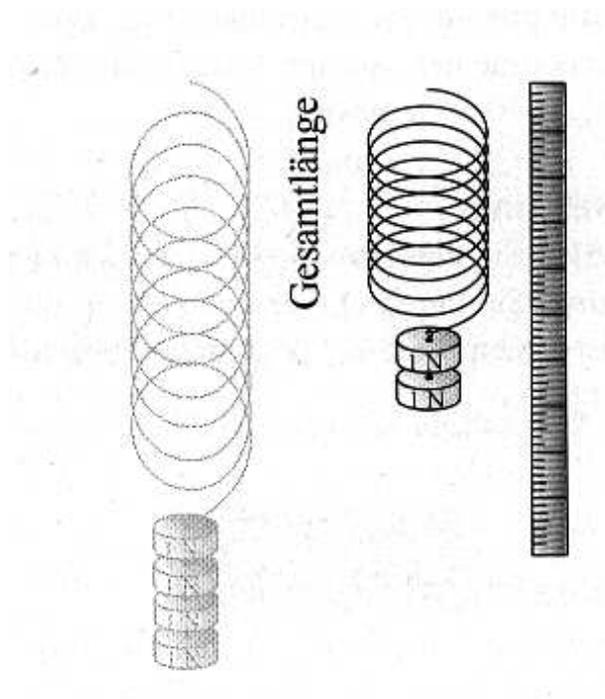
Jahr	1990	1999	2020
Brasilien	149042	161191	197950
Deutschland	79479	81378	73523
Indien	846191	931044	1328565
Mexiko	84486	91290	137717
USA	249975	260479	329337

- (a) Welches Land hat den größten (den kleinsten) prozentualen Zuwachs pro Jahr?
- (b) Überprüfe, ob bei der Prognose für das Jahr 2020 in den Ländern das exponentielle Wachstum beibehalten wurde.

Quelle: Elemente 11

**17. Ein Federexperiment**

Eine (feste) Schraubfeder wird durch Anhängen von Gewichtstücken von je 1 N ausgedehnt. Nach dem Anhängen jedes Gewichtstücks wird die Gesamtlänge der Feder gemessen. Führe das Experiment für 10 Gewichtstücke durch.



- Stelle die gesammelten Daten in einem Koordinatensystem graphisch dar.
- Liegt eine exponentielle Zunahme vor?

Quelle: Mathematik 11 Hessen

## 18. Erdbevölkerung

Es gibt optimistische Schätzungen, die davon ausgehen, dass die Erde mehr als 100 Milliarden Menschen ernähren kann. Die meisten Schätzungen gehen aber davon aus, dass die Obergrenze zwischen 8 und 12 Milliarden liegt.

1999 betrug die Erdbevölkerung 6,0 Mrd. Bewohner. Die beiden Tabellen geben einige Wachstumsraten aus dem Jahre 1998 an.

Länder mit der höchsten jährlichen Bevölkerungszunahme in Prozent	
1. Gaza	4,6
2. Komoren	3,6
3. Libyen	3,6
4. Jemen	3,5
5. Togo	3,5
6. Benin	3,4
7. Niger	3,4
8. Oman	3,4
9. Zaire	3,4
10. Madagaskar	3,3

Länder mit der niedrigsten jährlichen Bevölkerungszunahme in Prozent	
10. Deutschland	-0,1
9. Rumänien	-0,2
8. Tschechien	-0,2
7. Weißrussland	-0,4
6. Ungarn	-0,4
5. Russland	-0,5
4. Estland	-0,5
3. Bulgarien	-0,5
2. Ukraine	-0,6
1. Lettland	-0,7

- Berechne die Verdopplungszeit der Bevölkerung von Gaza.
- Wann hat sich die Bevölkerung Lettlands halbiert? Wann ist die Bevölkerungszahl Lettlands auf 10% gegenüber dem heutigen Stand geschrumpft?
- Berechne die Bevölkerungszahl von Deutschland für die Jahre 2010, 2030 und 2050.

Quelle: Analysis Grundkurs Gesamtband (2000), Klett

## 19. Alkoholkontrolle



Bei einer Verkehrskontrolle wird bei einem Verkehrsteilnehmer ein Alkoholgehalt im Blut von  $0,8\text{‰}$  festgestellt. Nach einer Stunde ergibt die Blutanalyse einen Alkoholgehalt von  $0,6\text{‰}$ . Es ist eine Funktion gesucht, die den Abbau des Alkohols im Blut beschreibt.

- (a) Berechne den Blutalkoholgehalt unter der Annahme, dass der Körper in jeder Stunde gleich viel Alkohol abbaut.
- (b) Gehe davon aus, dass die stündliche Abbaumenge proportional zum vorhandenen Bestand ist.
- (c) Vergleiche die beiden Ansätze und stelle die Entwicklung graphisch dar.
- (d) Welche Schlüsse kann man auf den Alkoholgehalt im Blut des Verkehrsteilnehmers eine Stunde (zwei Stunden) vor der Kontrolle ziehen?

20. Wann verdoppelt sich das Geld?

**Geldanlage:**

**Wann verdoppelt sich das Geld?**

Das ist leicht auszurechnen, wie die Gesellschaft für Bankpublizität mitteilt. Dafür müssen Sie lediglich die Zahl 70 durch die Rendite der Kapitalanlage teilen. Das bedeutet beispielsweise, bei einem Zinssatz von sieben Prozent sind aus angelegten 20.000 Euro in 10 Jahren bereits 40.000 Euro geworden ( $70 : 7 = 10$ ).

Beträgt die Rendite fünf Prozent, dauert es entsprechend länger, nämlich 14 Jahre, bis sich das Kapital verdoppelt.

Voraussetzung, damit die Rechnung aufgeht, ist allerdings, dass Sie die fälligen Zinsen zu gleichen Bedingungen regelmäßig wieder anlegen und so den Zinseszins-Effekt nutzen.

Was meinst du dazu?

Quelle: Herget/Scholz: Die etwas andere Aufgabe aus der Zeitung

**21. Schuldentilgung**

Herr Huber möchte sich von seiner Bank 10000 Euro leihen.

**Vorschlag A:** Das Geld wird mit 8% verzinst, er muss nach 10 Jahren die Schulden mit Zinseszinsen zurückzahlen.

**Vorschlag B:** Das Geld wird mit 7% verzinst. Er muss aber jedes Jahr einen Abtrag von 1000 Euro vornehmen.

Für welchen Rückzahlungsmodus würdest du dich entscheiden?

**22. Hypothekenzinsen**

In der HNA vom 5.9.01 ist die nachstehende Übersicht (nächste Seite) über die aktuellen Hypothekenzinsen erschienen. Diese Zinsen muss man beim Bau oder Kauf einer Immobilie an die Bank zahlen, wenn man sich das nötige Bargeld leihen muss. Man zahlt dann jedes Jahr einen konstanten Betrag zurück, der sich aus dem Tilgungsteil (in der Regel 1% der Hypothek) und dem Zinsanteil des ersten Jahres (siehe Übersicht) zusammensetzt.

Es werden 100000 Euro benötigt.

Wie könnte ein Tilgungsplan aussehen?

Ist die Abnahme der Schuld exponentiell?

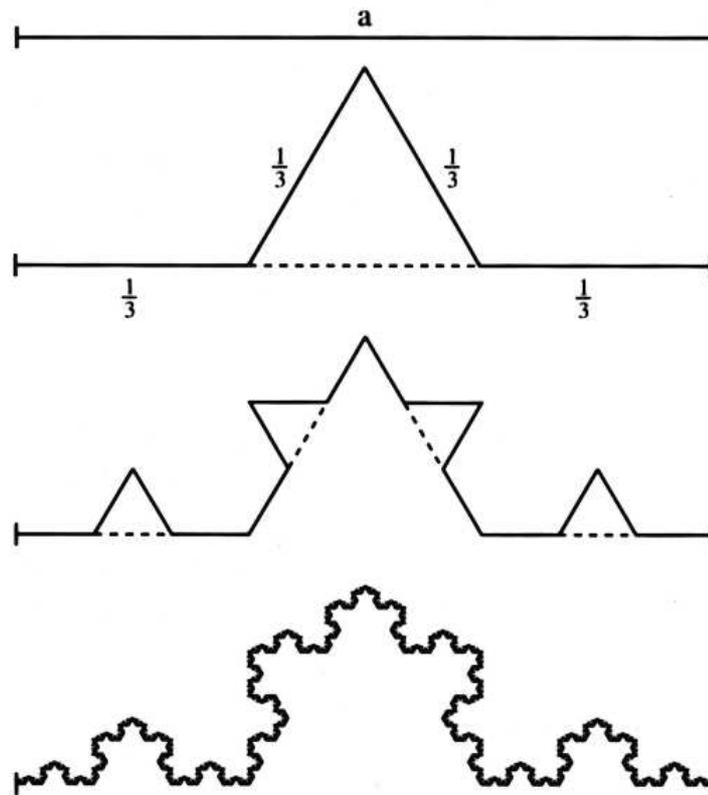
**23. Geometrische Figuren**

Die Abbildung zeigt den Beginn einer Folge geometrischer Figuren. Das Konstruktionsprinzip ist bei jedem Schritt dasselbe:

Jede Strecke wird gedrittelt. Über dem mittleren Stück wird ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt.

## 1 Exponential- und Logarithmusfunktionen

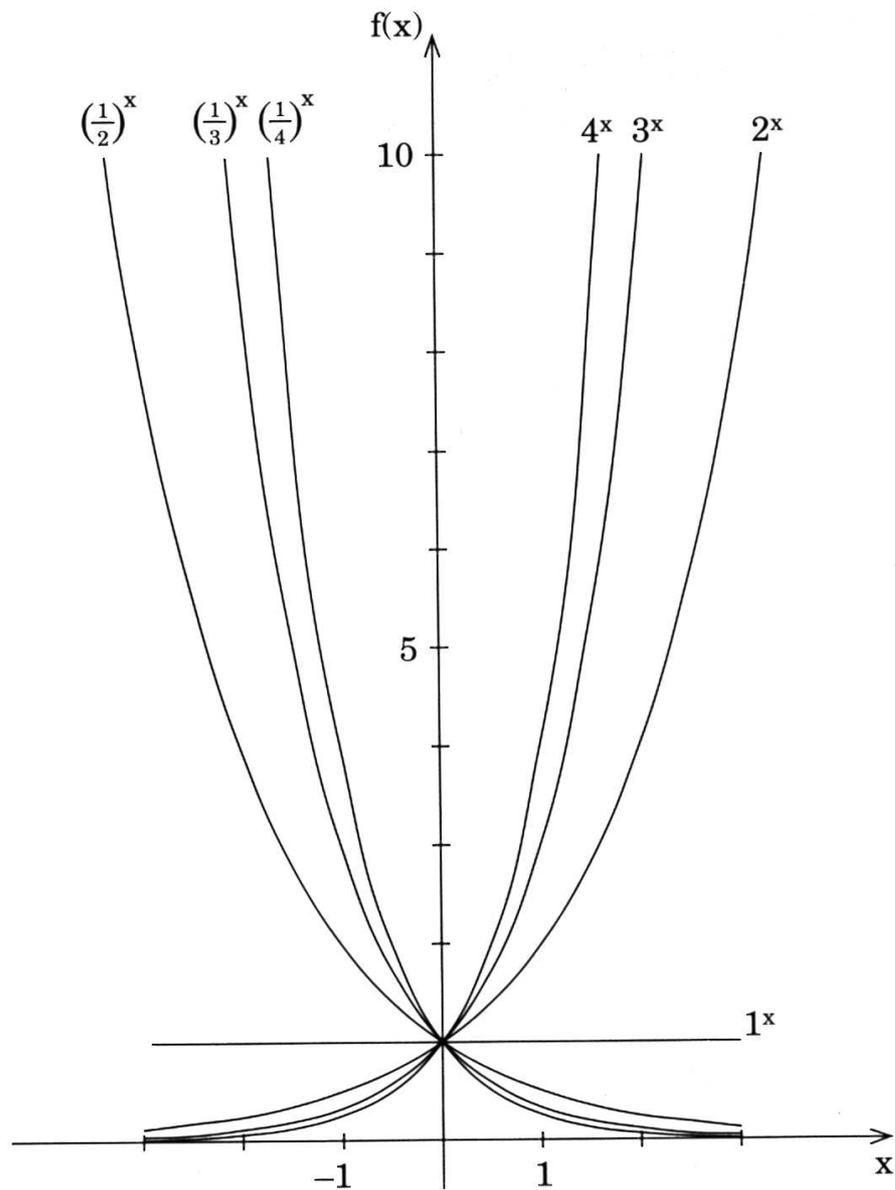
Offensichtlich wird die Länge des Streckenzuges von Schritt zu Schritt größer. Berechne die Länge des Streckenzuges nach 4, 40, 400 und 100000 Schritten. Handelt es sich um exponentielles Wachstum?



Quelle: Lambacher Schweizer 10

### 24. Deutungen der Koeffizienten der Exponentialfunktion

## 1 Exponential- und Logarithmusfunktionen



Graphen zu  $f(x) = a^x$  für verschiedene Werte von  $a$

Einige Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = c \cdot a^x$  sind in der neben stehenden Abbildung dargestellt:

- Was fällt auf?
- Beweise die Vermutung!
- Jetzt sei  $a = 2$ .

Wie ändert sich der Graph, wenn  $c$  verändert wird? Quelle: mathematik lehren (1996), H. 75, S. 55-60

## 25. Taschengeld

Peter startet in wenigen Tagen zu einer zweiwöchigen Klassenfahrt. Seine Eltern möchten ihm nach folgendem Plan Taschengeld mitgeben:

Für den ersten Tag 3 Euro, dann täglich 2 Euro mehr als am Tag vorher. Peter überlegt kurz und macht einen scheinbar bescheidenen Gegenvorschlag: Für den ersten Tag 3 Cent, dann täglich den doppelten Betrag des Vortages.

Was meinst du dazu?

## 26. Zerfall radioaktiver Stoffe

Beim radioaktiven Zerfall wandelt sich ein Stoff unter Aussendung von radioaktiver Strahlung in einen anderen Stoff um. Der ursprüngliche Stoff wird also weniger.

Die Anzahl der ursprünglich vorhandenen Atome des Stoffes bezeichnet man mit  $N(0)$ , die nach einer Zeit  $t$  noch vorhandene Anzahl mit  $N(t)$ . Dann lautet die Funktionsgleichung für den Zerfall radioaktiver Stoffe  $N(t) = N(0) \cdot a^t$ . Dabei ist  $a$  die *Zerfallskonstante*, die für jeden Stoff einen spezifischen Wert hat.

Meistens wird beim radioaktiven Zerfall die sog. *Halbwertszeit* angegeben. Das ist die Zeit, in der die Hälfte der zu Beginn vorhandenen Atome zerfallen ist.

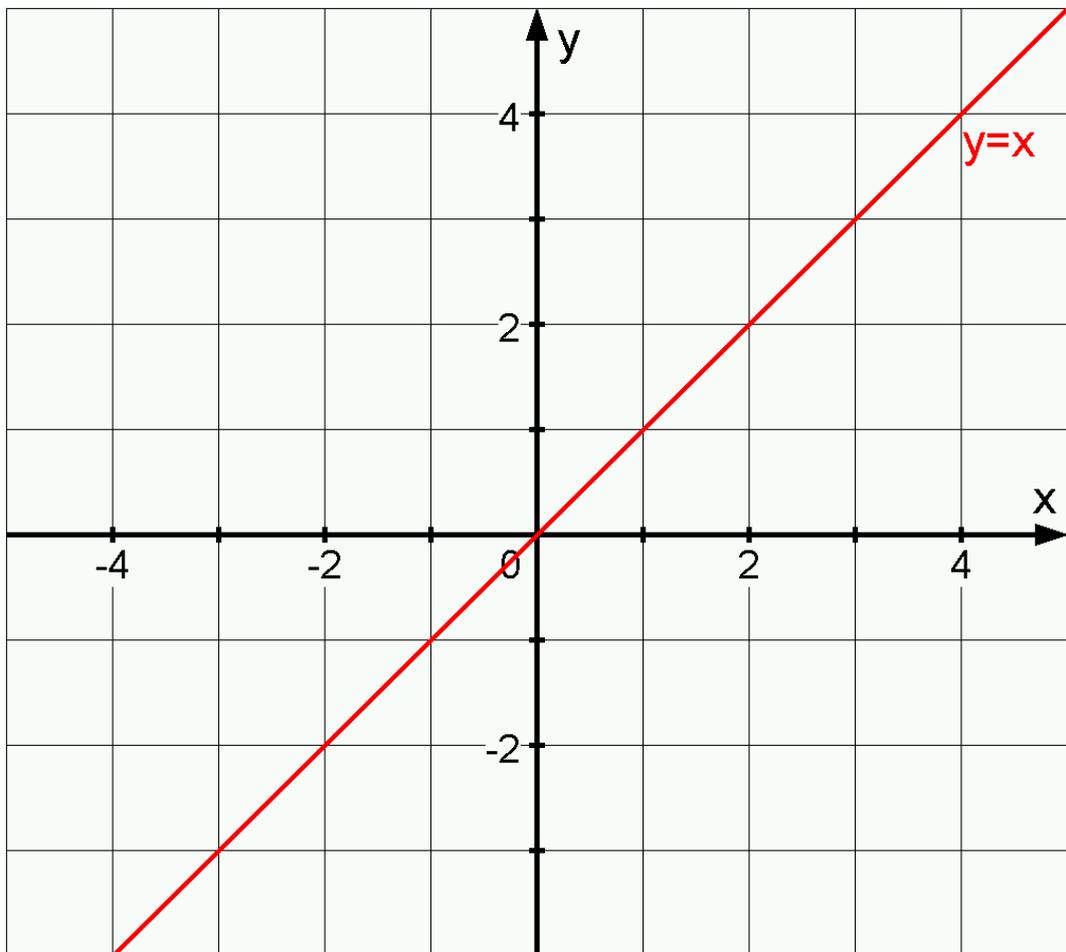


- (a) Für radioaktives Jod gilt  $a = 0,917$ .
  - i. Wie viel  $mg$  sind von 3 g dieses Jods nach 45 Tagen noch vorhanden?
  - ii. Bestimme die Halbwertszeit von radioaktivem Jod!
- (b) Das Element Radon zerfällt mit einer Halbwertszeit von 3,8 Tagen. Nach welcher Zeit ist noch ein Achtel der Ausgangsmenge Radon vorhanden?
- (c) Thorium zerfällt nach dem Gesetz  $N(t) = N(0) \cdot 0,963^t$ . Ein Stoff enthält 10 mg Thorium und 15 mg radioaktives Jod. Nach welcher Zeit sind von beiden Stoffen noch gleiche Mengen vorhanden?

27. **Eigenschaften der Exponentialfunktion**

**Exponentialfunktionen** sind Funktionen der Form  $f(x) = b^x$  mit  $x \in \dots\dots\dots$  und  $b \in \dots\dots\dots$ , d.h. für den Definitionsbereich gilt:  $D = \dots\dots\dots$

- (a) Die Exponentialfunktion hat nur ..... Funktionswerte  $y$ , d.h. für den Wertebereich gilt :  $W = \dots\dots\dots$
- (b) Die Graphen der Exponentialfunktionen  $f(x) = b^x$  mit  $b > 0$  gehen alle durch die Punkte  $P_1(\dots; \dots)$  und  $P_2(\dots; \dots)$ .
- (c) Die Graphen der Exponentialfunktionen  $f(x) = b^x$ 
  - mit ..... sind streng monoton .....
  - mit ..... sind streng monoton fallend;
- (d) Der Graph der Exponentialfunktion  $f(x) = b^x$  mit  $b > 0$  hat die ... - Achse als Asymptote, das bedeutet .....



Zeichne hier die Graphen von  $f(x) = 2^x$  und  $g(x) = (\frac{1}{3})^x$

- (e) Die charakteristische Eigenschaft von exponentiellem Wachstum ist:

(f) Beispiele für exponentielle Prozesse in der Realität sind:

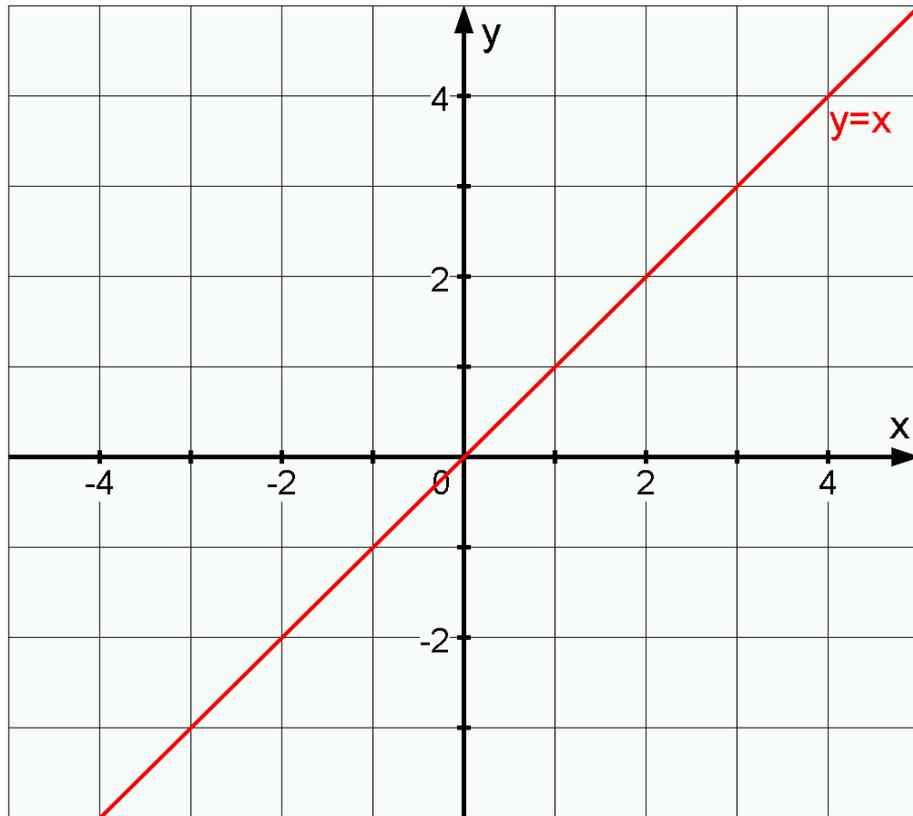
(g) Was ich sonst noch wichtig finde:

## 28. Eigenschaften der Logarithmusfunktion

**Logarithmusfunktionen** sind Funktionen der Form  $f(x) = \log_b x$  mit  $x \in \dots\dots\dots$  und  $b \in \dots\dots\dots$  d.h. die Logarithmusfunktion ist nur für  $\dots\dots\dots$   $x$ -Werte definiert:  $D = \dots\dots\dots$

- (a)  $\log_b x$  ist diejenige reelle Zahl, mit der man  $b$  potenzieren muss, um  $x$  zu erhalten. Damit ist die Logarithmusfunktion die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.  
Also gilt für den Wertebereich:  $W = \dots\dots\dots$
- (b) Die Graphen der Logarithmusfunktionen  $f(x) = \log_b x$  mit  $b > 0$  gehen alle durch die Punkte  $P_1 = (\dots; \dots)$  und  $P_2 = (\dots; \dots)$ .
- (c) Die Graphen der Logarithmusfunktionen  $f(x) = \log_b x$
- mit  $\dots\dots\dots$  sind streng monoton  $\dots\dots\dots$ ;
  - mit  $\dots\dots\dots$  sind streng monoton fallend.
- (d) Der Graph der Logarithmusfunktion  $f(x) = \log_b x$  mit  $b > 0$  hat die  $\dots$  - Achse als Asymptote.

## 1 Exponential- und Logarithmusfunktionen



Zeichne hier die Graphen von  $f(x) = 2^x$  und  $g(x) = \log_2 x$

(e) Für das Rechnen mit Logarithmen gelten die folgenden Regeln ( $u, v, a > 0$ ;  $a \neq 1$ ):

i.  $\log_b(u \cdot v) = \dots\dots\dots$

ii.  $\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \dots\dots\dots$

iii.  $\log_b(u^r) = \dots\dots\dots$

(f) Beispiele für Anwendungen der Logarithmusfunktion in der Realität sind:

(g) Was ich sonst noch wichtig finde:

29. Flucht aus Heidelberg

Im Jahr 1855 flüchtete in Heidelberg ein Student nach einem Duell mit einer Legitimationskarte, die er sich von einem Kommilitonen ausgeliehen hatte. Als die Flucht über die Grenze gelungen war, warf der Student die Karte fort; sie wurde als verdächtig an das Heidelberger Universitätsgericht eingesandt. In der folgenden Untersuchung antwortete der Kommilitone, dem die Karte gehörte, mit einem Satz, der sich zunächst unter den Studenten schnell verbreitete und heute als Redewendung allgemein bekannt ist. Dieser Satz ist der Lösungsspruch des Rätsels.

	Aufgaben:	Lösung
a)	$\log_3 27$	
b)	$\log_3 x = 2 \rightarrow x =$	
c)	$\log_x 49 = 2 \rightarrow x =$	
d)	$\log_{\frac{3}{4}} 3 - \log_{\frac{3}{4}} 4$	
e)	$(\log_2 2^{25}) : (\log_5 5^5)$	
f)	$\log_3 5 + \log_3 \frac{1}{5}$	
g)	$\log_2 4^2 + \log_2 4$	
h)	$\log_2 16 \cdot \log_2 4$	
i)	$6 \log_3 3 + \log_3 \frac{1}{9}$	
j)	$4(\log_2 88 - \log_2 11)$	
k)	$\log_2(\log_2 2^{2^{10}})$	
l)	$2 \log_2 5 + \log_3 90 + \log_2 \frac{1}{25} - \log_3 10$	

Zuordnung:

Lösung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Buchstabe	H	S	E	V	T	C	N	O	A	W	I

Lösung	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Buchstabe	B	M	Q	Y	L	Z	G	P	X	R	F

Als **Lösungssatz** ergibt sich eine Redewendung:

j)	l)	k)	g)	g)	h)	j)	l)	k)	d)	i)	f)	h)	d)	l)

k)	e)	f)	b)	l)	k)	d)	d)	a)	c)	g)	g)	k)	e)	f)	i)	d)

Quelle: mathematik lehren (1998), H. 92, S. 60

30. Graph und Termveränderungen

Lass die Graphen folgender Funktionen zeichnen!

Welchen Einfluss hat die Veränderung des Terms auf den Verlauf des Graphen? Formuliere Regeln!

(a)  $f_1(x) = 2^x$   
 $f_2(x) = -2^x$

$$f(x) = -b^x$$

(b)  $f_1(x) = 3^x$   
 $f_2(x) = 3^x + 1$   
 $f_3(x) = 3^x - 2$

$$f(x) = b^x + c$$

(c)  $f_1(x) = 2^x$   
 $f_2(x) = 2^{x+3}$   
 $f_3(x) = 2^{x-2}$

$$f(x) = b^{x+d}$$

(d) i.  $f_1(x) = 3^x$   
 $f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x$   
 $f_3(x) = 4 \cdot 3^x$

ii.  $f_1(x) = 5^x$   
 $f_2(x) = \frac{1}{3} \cdot 5^x$

iii.  $f_1(x) = 2^x$   
 $f_2(x) = 3 \cdot 2^x$

iv.  $f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$   
 $f_2(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

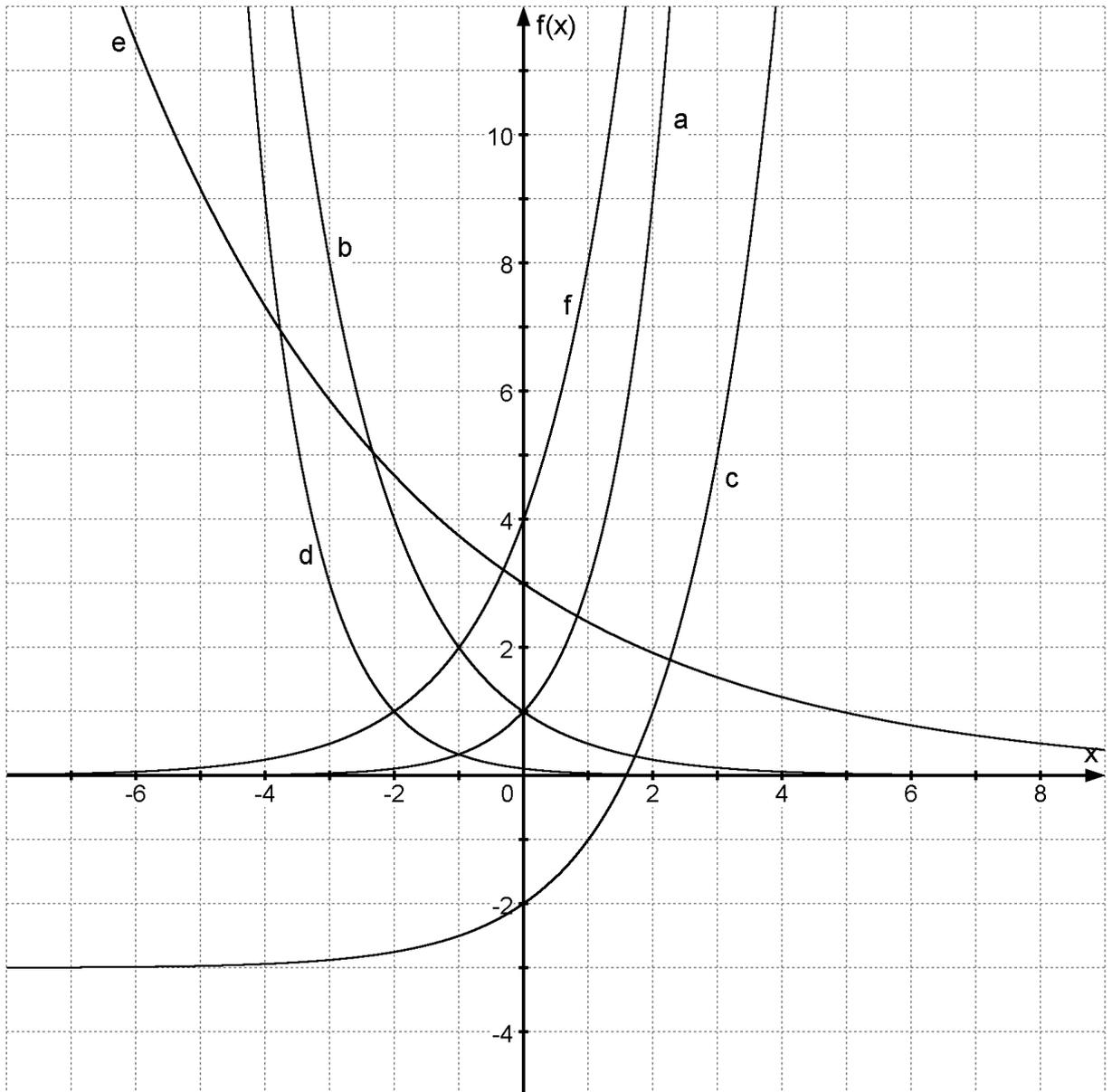
$$f(x) = a \cdot b^x$$

(e) Wie geht der Graph der Funktion  $f(x) = a \cdot b^{x+d} + c$  aus dem Graphen der Funktion  $f(x) = b^x$  hervor?

Beispiel:  $f(x) = 3 \cdot 2^{x+1} - 4$

### 31. Funktionsgleichungen bestimmen

Bestimme die Funktionsgleichungen zu den abgebildeten Graphen!



32. Mathe-Quiz I. selbstgemacht!

- (a) Was ist der Unterschied zwischen absolutem und relativem Zuwachs?
- (b) Was ist der Unterschied zwischen dem Wachstumsfaktor und dem Zerfallsfaktor?
- (c) Wie wird der relative Zuwachs in der Regel angegeben?
- (d) Erkläre den Begriff Halbwertszeit.
- (e) Was bedeutet äquidistant?

- (f) Was sind Logarithmen?
- (g) Wie nennt man die Zahl  $y$  in dem Term  $x^y$ ?
- (h) Wie nennt man in dem Ausdruck  $\log_a x$  die Zahl  $x$ ?
- (i) Nenne je einen anderen Begriff für die Grundzahl und für die Hochzahl einer Potenz.
- (j) Wie schreibt man kurz für  $\log_{10} x$ ?
- (k) Schreibe  $2^x = 16$  als Logarithmengleichung.
- (l) Gib die Formel für relativen Zuwachs an.
- (m) Bestimme  $x$  in  $x = \log_2 64$ .
- (n) Bestimme  $x$  in  $x = \log_5 625$ .
- (o) Bestimme  $x$  in  $x = \log_3 81$ .

Quelle: mathematik lehren (2001), H. 106, S. 55-57

### 33. Mathe-Quiz II. selbstgemacht!

- (a) Wie berechnet man den absoluten Zuwachs?
- (b) Wie bildet man die Differenz beim absoluten Zuwachs?
- (c) Was gibt die Differenz  $d$  beim absoluten Zuwachs an?
- (d) Wie bildet man den Quotienten beim relativen Zuwachs?
- (e) Was gibt der Quotient beim relativen Zuwachs an?
- (f) Welcher Zuwachs wird mit der Formel  $d = W_i - W_{i-1}$  ausgerechnet?
- (g) Nenne je ein Beispiel aus der Natur für relativen und absoluten Zuwachs.
- (h) Nenne die ZinseszinsFormel zur Berechnung des Endkapitals nach  $n$  Jahren.
- (i) Definiere den Wachstumsfaktor  $q$ 
  - i. bei der Zinsrechnung
  - ii. allgemein bei Wachstumsvorgängen.
- (j) Wie wird eine Potenz potenziert?
- (k) Nenne drei Eigenschaften der Logarithmusfunktion.
- (l) Nenne drei Eigenschaften der Exponentialfunktion.
- (m) Der Graph welcher Funktion schneidet nie die  $x$ -Achse?
- (n) Welchen Punkt haben die Graphen aller Exponentialfunktionen gemeinsam?
- (o) Welchen Punkt haben die Graphen aller Logarithmusfunktionen gemeinsam?

## 2 Lineare Funktionen

### 1. Carmens Schultag

Carmens Schultag beginnt um 7.00 Uhr. Sie fährt zunächst mit dem Bus zur Schule. Um 8.00 Uhr beginnt der Unterricht. Von 9.30 Uhr bis 9.50 Uhr und von 11.20 Uhr bis 11.40 Uhr ist Pause. Um 13.10 Uhr endet der Unterricht. Um 14.00 Uhr ist Carmen wieder zu Hause.



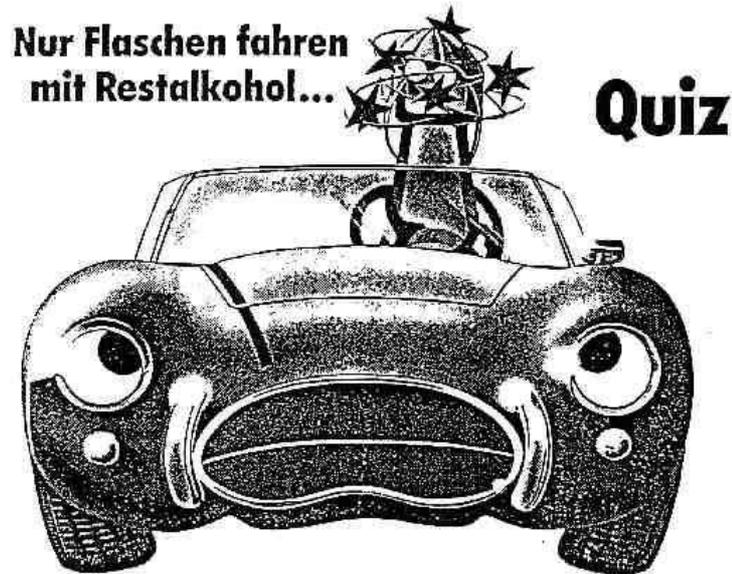
- (a) Zeichne den Graphen der Zuordnung  
*Gesamtzeit der Abwesenheit von zu Hause*  $\rightarrow$  *reine Unterrichtszeit*.
- (b) Zeichne einen entsprechenden Graphen für deinen eigenen Schultag.

Quelle: Lambacher Schweizer 8(1988)

Variationen der Aufgabe:

- (a) Darstellung des Schulalltags des Sitznachbarn
- (b) Rekonstruktion des Alltags des Nachbarn aus dessen Graphen
- (c) Schulalltag als abschnittsweise def. lineare Funktion
- (d) Vernetzung mit Prozentrechnung: Wieviel Prozent des Tages verbringt man in der Schule?

### 2. Flaschen hinterm Steuer



**Alkohol und Autofahren passen nicht zusammen.** Das leuchtet ein. Aber die wenigsten wissen, wie langsam Alkohol im Körper abgebaut wird. Der durchschnittliche Abbauwert beträgt lediglich 0,15 Promille stündlich. Weder Schlaf noch starker Mokka können dies beschleunigen. Wer z.B. nach einer Feier um Mitternacht einen Alkoholspiegel von 1,5‰ hat, kann sich leicht ausrechnen, wann er wieder restlos nüchtern ist. Denn bereits bei 0,3‰ muß ein Fahrer mit einer Geldstrafe und Führerscheinentzug rechnen, selbst dann, wenn er lediglich Anzeichen von Fahrunsicherheit zeigt. Bei 0,5‰ liegt auf jeden Fall eine Ordnungswidrigkeit vor, die mit Fahrverbot, Geldstrafe bis zu 3000,- DM und Punkten in Flensburg geahndet wird. **Darum: Nach Alkoholgenuß lieber Taxi, Bahn & Bus.** Jetzt fällt Ihnen die Beantwortung der Quiz-Fragen sicherlich nicht schwer.

- (a) Um wieviel Uhr sind Sie bei einer Ausgangslage von 1,5‰ um Mitternacht und einem durchschnittlichen Alkoholabbauwert von 0,15‰ stündlich wieder restlos nüchtern und
- (b) wann haben Sie immerhin noch einen Alkoholspiegel von 0,5‰?

Variationen: Biologische Prozesse behandeln (Biologieunterricht), Graphen zeichnen, Ausgangswert und Abbaufaktor variieren

### 3. Marillen

Kauft man Marillen beim Obsthändler, so kostet 1 kg Marillen 24 €. Familie Schneider fährt in die Wachau und zahlt dort 12 € pro Kilo. Die Fahrtkosten für die Hin- und Rückfahrt betragen 240 €.

Finde eine geeignete Frage und beantworte sie.

## 2 Lineare Funktionen

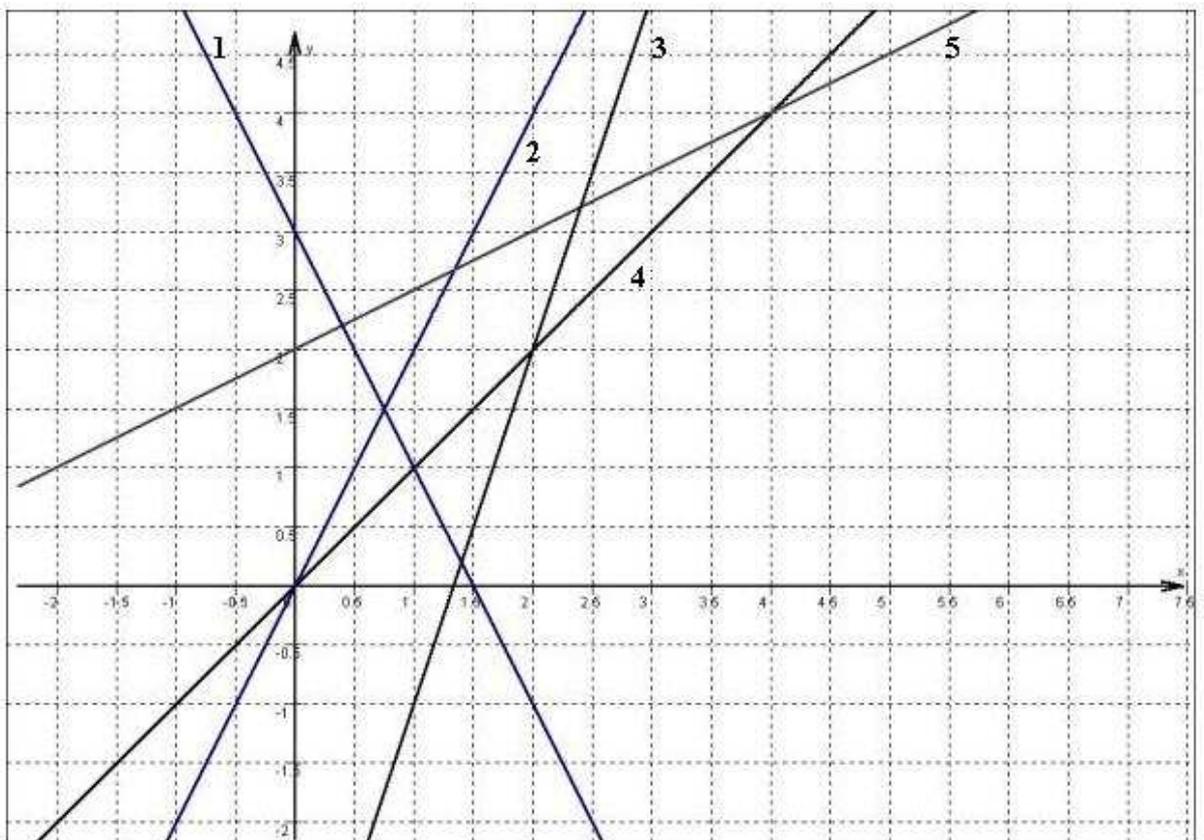


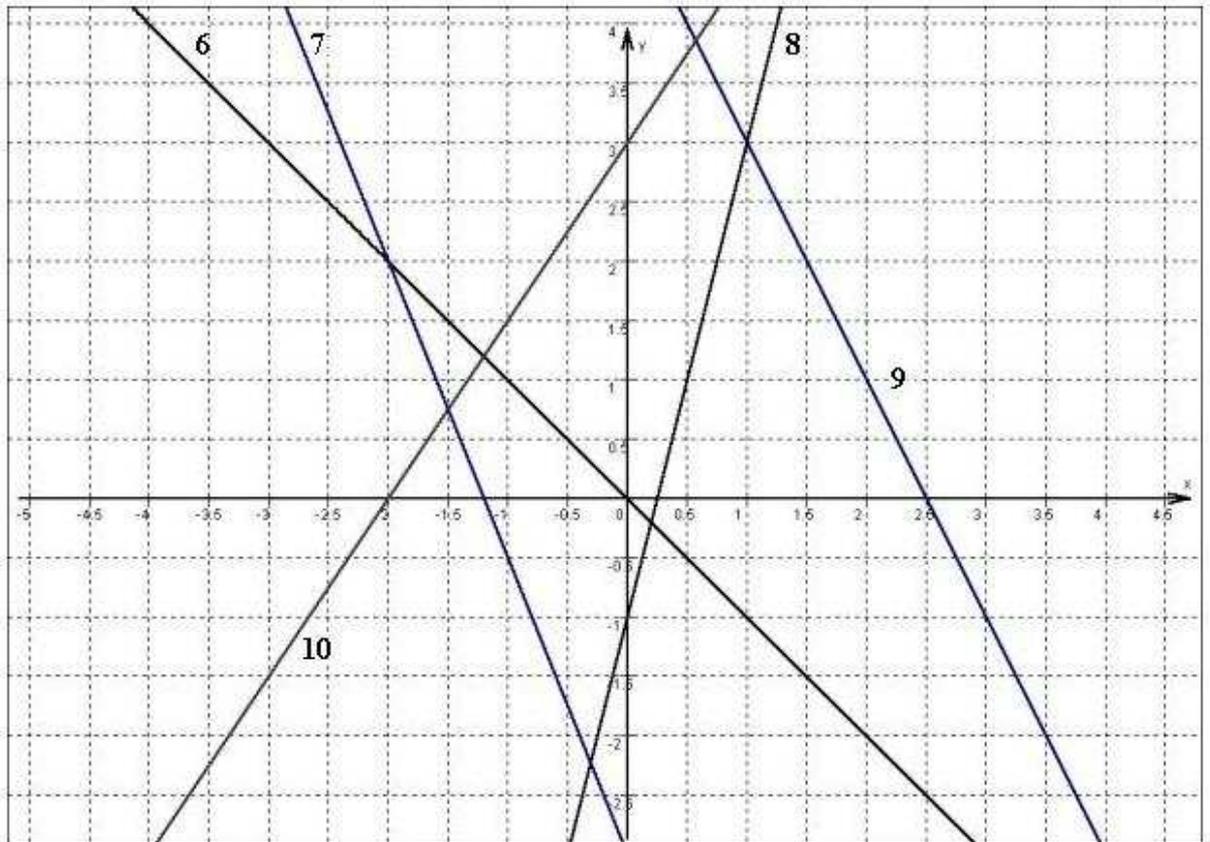
Variationen:

- (a) Formulierung im deutschen Kontext
- (b) Andere Preisvergleiche vor Ort

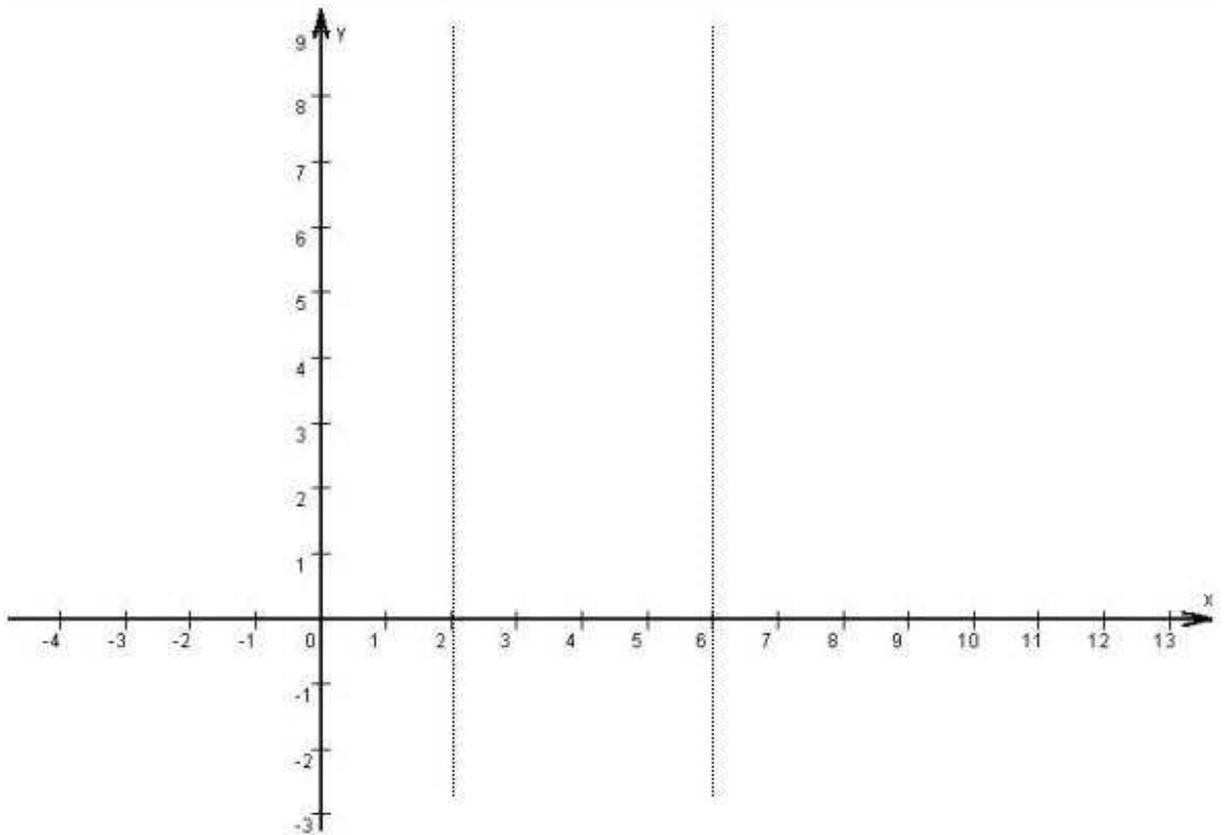
### 4. Übersetzungen zwischen Graph und Term

Finde die Funktionsterme  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{10}(x)$  zu den gezeichneten Geraden 1–10.





5. Geometrische Figuren im Koordinatensystem



Bestimme möglichst viele verschiedene lineare Funktionen so, dass die Fläche, die von der  $x$ -Achse, den gestrichelten Linien und dem Graphen der linearen Funktion umschlossen wird, den Inhalt 12 FE hat. Welche geometrischen Figuren entstehen dabei?

### 6. Zeichnen mit linearen Funktionen

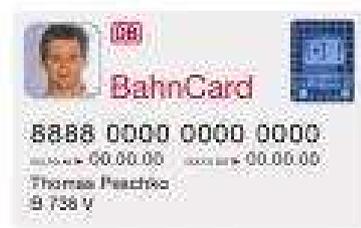
Zeichne die Graphen folgender Funktionen in ein Koordinatensystem ein:

- (a)  $y = x + 2$  für  $x \in [-2; -1]$
- (b)  $y = x + \frac{5}{2}$  für  $x \in [-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]$
- (c)  $y = x + 3$  für  $x \in [-1; -0]$
- (d)  $y = 2$  für  $x \in [-1; -\frac{1}{4}]$  und  $x \in [\frac{1}{4}; 1]$
- (e)  $y = 1$  für  $x \in [-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]$  und  $x \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$
- (f)  $y = 0$  für  $x \in [-2; 2]$
- (g)  $y = -x + 2$  für  $x \in [1; 2]$
- (h)  $y = -x + \frac{5}{2}$  für  $x \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$

(i)  $y = -x + 3$  für  $x \in [0; 1]$

### 7. Arbeitsblatt-BahnCard

Wann lohnt sich die BahnCard?



Preissystem: (Stand: 1.5.2000)

**„Normaler Fahrpreis“:**

<b>2. Klasse</b>	<b>27,2 Pf/km</b>	(Fernverkehr ab 101 km)
<b>1. Klasse</b>	<b>40,8 Pf/km</b>	(Fernverkehr ab 101 km)

Die Fahrpreise werden auf volle DM gerundet.

**Bahn Card Teen**

(12 - 17 Jahre)	<b>2.Klasse</b>	<b>65 DM</b>
	<b>1.Klasse</b>	<b>130 DM</b>

Die Bahn Card halbiert den normalen Fahrpreis und gilt 1 Jahr an allen Tagen in Deutschland.

**Aufgabe:**

1. Berechne die Fahrpreise für folgende Strecken jeweils *ohne* und *mit* Bahn Card Teen !

		<i>ohne</i> BC	<i>mit</i> BC
a) Rotenburg - Frankfurt a.M.	165 km		
b) Rotenburg - Berlin	430 km		
c) Rotenburg - Hamburg	360 km		
d) Rotenburg - Garmisch	520 km		
e) Rotenburg - Freiburg	415 km		

2. Notiere für die Funktionen

- a) Streckenlänge  $x$  (in km)  $\rightarrow$  Fahrpreis ohne Bahn Card (in DM)
  - b) Streckenlänge  $x$  (in km)  $\rightarrow$  Fahrpreis mit Bahn Card (in DM)
- die entsprechenden **Funktionsgleichungen:**

- a) \_\_\_\_\_
- b) \_\_\_\_\_

Zeichne die **Graphen** der beiden Funktionen in ein Koordinatensystem !

3. Ab welcher Streckenlänge lohnt sich die Bahn Card Teen ?  
(Begründe !)

8. Internet



## 2 Lineare Funktionen

Der Internet-Provider 1&1 hat zum 1.5.1999 seine Tarife verändert.

**Alter Tarif:** 2 Freistunden pro Monat, dann jede weitere Minute 5 Pfennig für den Internet Zugang. Allerdings kommen noch die Telefongebühren zum City-Tarif dazu, diese ohne Freistunden.

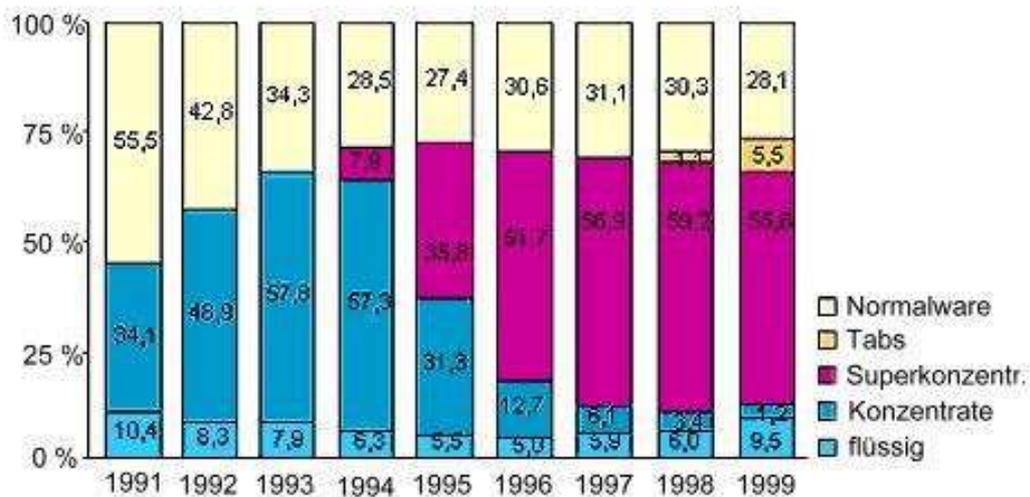
**Neuer Tarif:** Pro Minute 6 Pfennig (unabhängig von der Tageszeit) einschließlich der Telefongebühren; keine Freistunden.

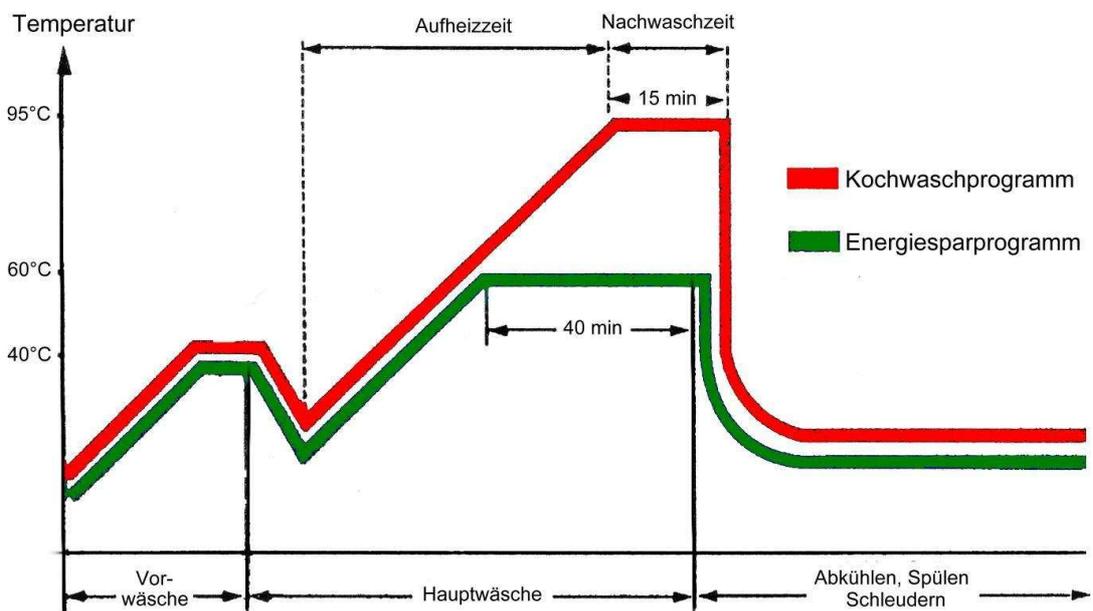
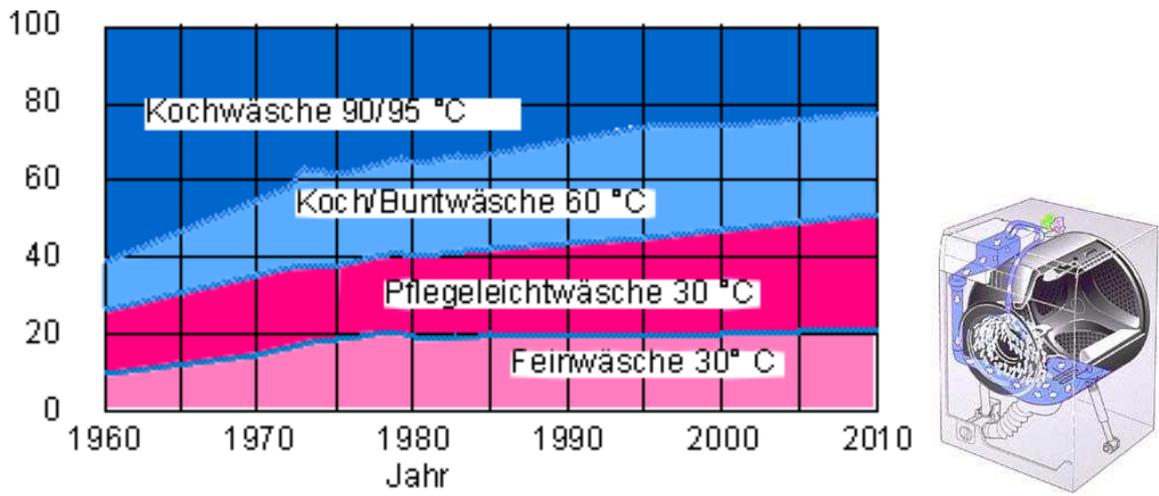
- (a) Zeichne in ein gemeinsames Koordinatensystem drei Graphen für die Zuordnung  $Zeit \rightarrow Gesamtkosten$  bis zu 6 Stunden für
- alter Tarif, Surf-Zeiten immer zwischen 21 und 5 Uhr (also je 240 Sekunden für 12 Pfennig Telefongebühren)
  - alter Tarif, Surf-Zeiten immer zwischen 9 und 18 Uhr (also je 90 Sekunden für 12 Pfennig Telefongebühren)
  - neuer Tarif
- (b) Wärest du als Kunde mit der Tarifänderung zufrieden? Begründe deine Antwort ausführlich.
- (c) Stell dir vor, du solltest (als Angestellter von 1&1) den Kunden die Tarifänderungen schmackhaft machen. Welche Argumente würdest du benutzen?

Variation: Vergleich aktueller Provider

## 9. Wäsche waschen

Verwendung von verschiedenen Waschmitteln im Laufe der Zeit





Vergleich: Kochwaschprogramm - Energiesparprogramm

Schreibe mit Hilfe der hier abgebildeten Diagramme und (Schau-)Bilder eine (mathematische) Geschichte über die Entwicklung des Wäschewaschens. Falls dir Informationen fehlen, besorge sie aus der Bibliothek, dem Internet, beim Fachverkäufer etc.

Variationen:

Betrachtung anderer linearer Zusammenhänge, Untersuchung einer realen Waschmaschine

## 10. Fahren mit dem ICE

## 2 Lineare Funktionen

Ein ICE beschleunigt von 0 auf  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  in einer Minute und 6 Sekunden. Dann beschleunigt er weiter in 2 Minuten und 14 Sekunden von  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  auf  $200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Zuletzt beschleunigt er von  $200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  auf  $250 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  in 3 Minuten.



- Stelle den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Zeit näherungsweise dar (graphisch und durch Angabe einer Funktionsgleichung).
- Berechne jeweils den gesamten zurückgelegten Weg, bis der ICE eine Geschwindigkeit von  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ,  $130 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  bzw.  $250 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  erreicht hat.

### 11. Kapitänsaufgabe

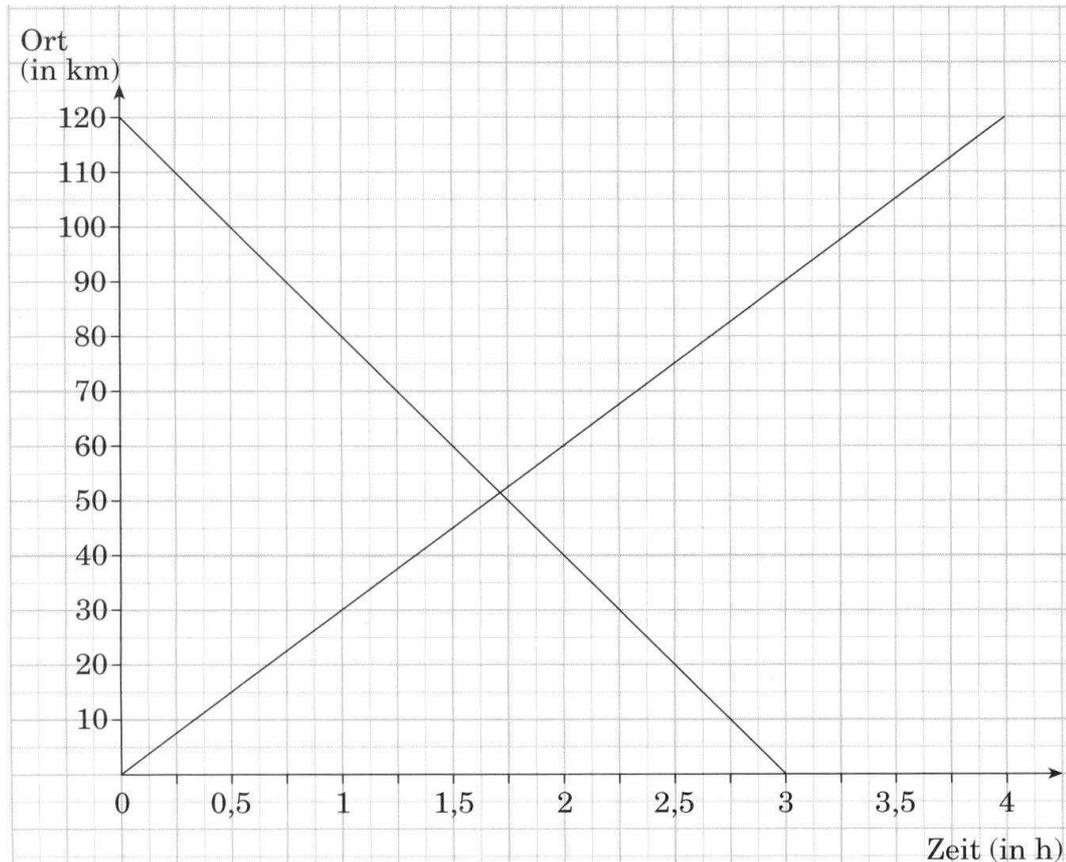


Ein Schiff startet vom Hafen Entenhausen und ist nach 4 Stunden im 120 km entfernten Hafen von Goofytown. Gleichzeitig mit ihm startet ein etwas schnelleres Schiff im Hafen von Goofytown und ist nach 3 Stunden im Hafen von Entenhausen. Unten siehst du das Zeit-Ort-Diagramm für die beiden Schiffe. Gib anhand des Diagramms zumindest ungefähre Antworten auf folgende Fragen:

- Wann und wo fahren die beiden Schiffe aneinander vorbei?

## 2 Lineare Funktionen

- (b) Die Kapitäne der beiden Schiffe besitzen Ferngläser, mit denen sie ungefähr 20 km weit sehen können. In welchem Zeitintervall können die beiden Kapitäne einander im Fernglas beobachten? Wo befinden sich die beiden Schiffe dabei ungefähr?
- (c) Finde selbst weitere geeignete Fragen und beantworte sie.

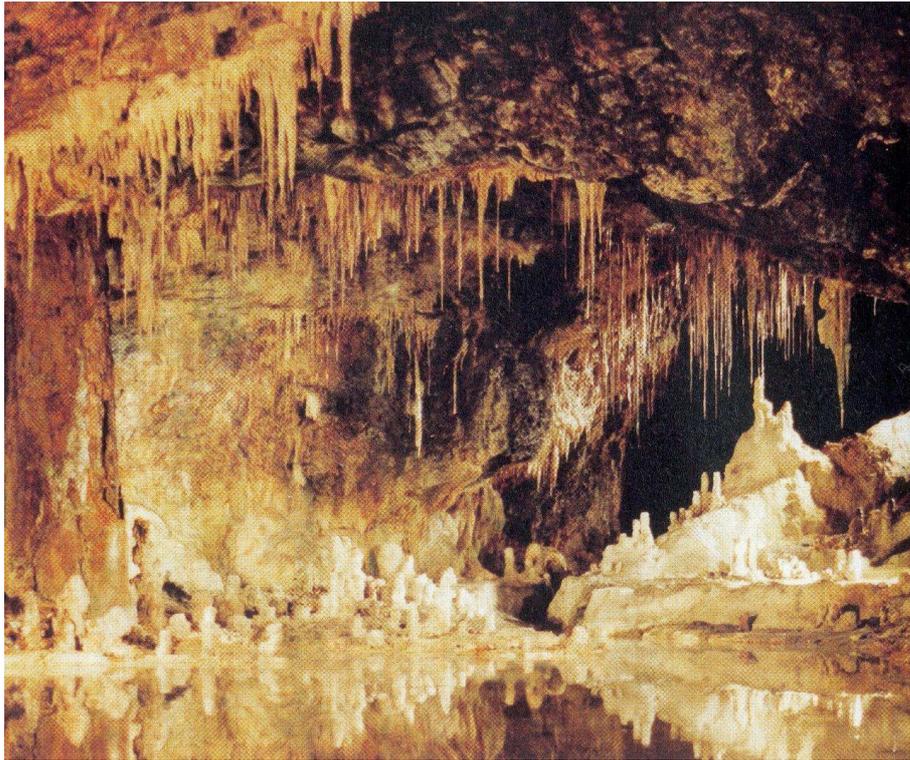


Quelle: Mathe-Welt, in: mathematik lehren (2000) Heft 103, S. 3

Variationen:

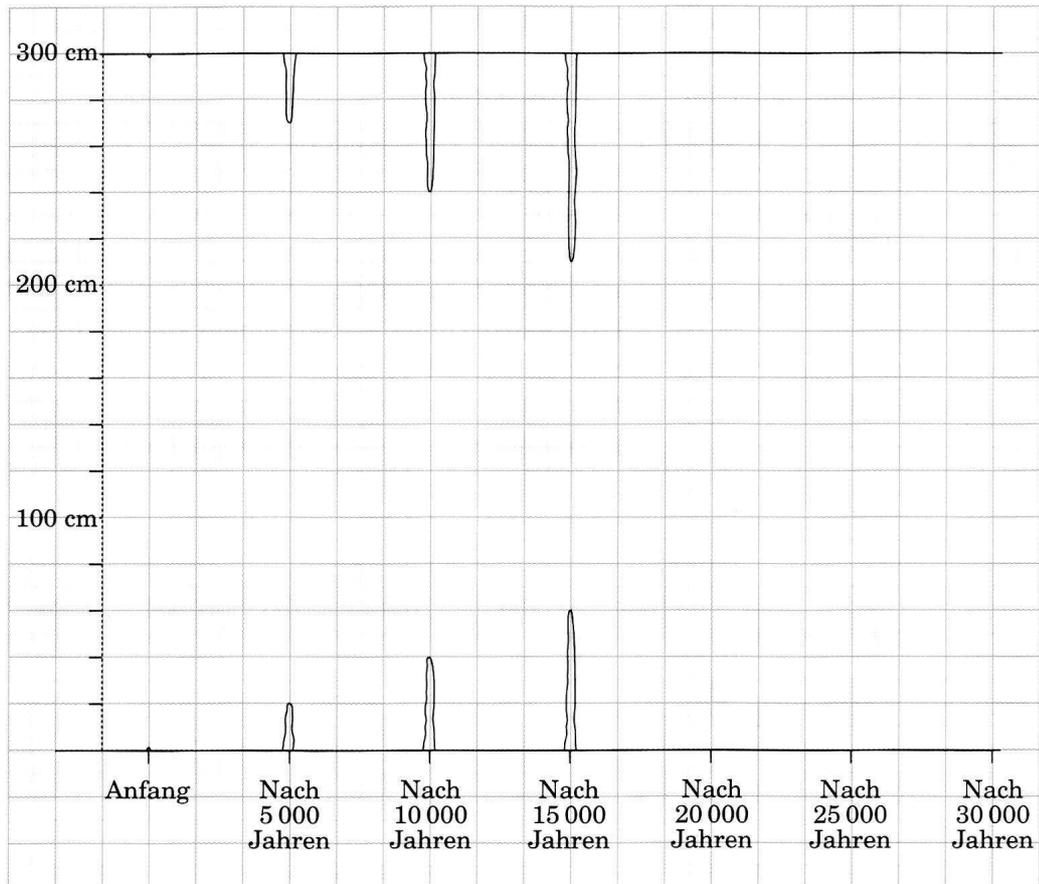
- (a) Fragen zu dem Diagramm formulieren
- (b) zu einer gegebenen Geschichte ein Zeit-Ort-Diagramm zeichnen oder umgekehrt
- (c) Wie schnell fahren die beiden Schiffe (in km/h)?
- (d) Wie weit ist das erste Schiff noch vom Hafen in Goofytown entfernt, wenn das zweite Schiff gerade im Hafen von Entenhausen ankommt?

## 12. Tropfsteinhöhle



In Tropfsteinhöhlen tropft an verschiedenen Stellen kalkhaltiges Wasser von der Decke. Durch ständige Kalkablagerungen bildet sich an jeder solcher Stelle ein von der Decke hängender Tropfstein (Stalaktit) und ein vom Boden aufsteigender Tropfstein (Stalagmit). Diese Tropfsteine wachsen allerdings sehr langsam und brauchen zu ihrer Entstehung viele tausend Jahre.

## 2 Lineare Funktionen



Anhand der Zeichnung können eine Reihe von Fragen rechnerisch und dann zur Kontrolle auch zeichnerisch beantwortet werden.

Finde selbst eine geeignete Frage und beantworte sie!

Quelle: Mathe-Welt, in: mathematik lehren (2000) Heft 103, S. 3

- Nach wie vielen Jahren bilden die beiden Tropfsteine eine zusammenhängende Säule, wenn wir annehmen, dass das so weitergeht?
- Wie weit sind die beiden Tropfsteine dann nach 20000 Jahren voneinander entfernt?
- Nach wie vielen Jahren sind die beiden Tropfsteine nur noch 50 cm voneinander entfernt?

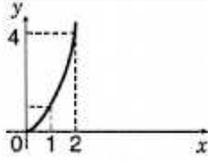
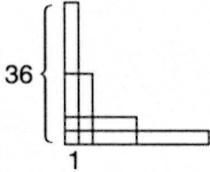
Variationen der Aufgabe:

- Frage weglassen
- Nach wie vielen Jahren bilden die beiden Tropfsteine eine zusammenhängende Säule, wenn wir annehmen, dass das so weiter geht?

- (c) Wie weit sind die beiden Tropfsteine dann nach 20000 Jahren voneinander entfernt?
- (d) Nach wie vielen Jahren sind die beiden Tropfsteine nur noch 50 cm voneinander entfernt?

13. Wiederholung von Funktionen

- (a) Felix grübelt über den unten aufgeführten Aufgabenstellungen. Seine ältere Schwester Gil hilft ihm und füllt einige Felder in der Tabelle aus. Versuche, die restlichen Einträge zu ergänzen.
  - i. Ich habe einen Blumenstrauß für  $x$  DM gekauft und mit einem Hundertmarkschein bezahlt. Als Wechselgeld habe ich  $y$  DM erhalten.
  - ii. Gegeben ist ein quadratisches Blumenbeet mit Seitenlänge  $x$ . Der Flächeninhalt ist  $y$ .
  - iii. Das Blumenbeet ist nun rechteckig. Der Flächeninhalt beträgt  $36\text{ m}^2$ . Die Länge des Rechtecks ist  $x$  und die Breite  $y$ .
  - iv. Ich habe  $x$  kg Zucker gekauft. 1 kg kostete  $1,50$  DM. Der Gesamtpreis betrug  $y$  DM.

	a.	b.	c.	d.
Werte	$\frac{x}{y} \begin{array}{ c c c c c c } \hline 0 & 10 & 20 & 30 & \dots \\ \hline 100 & 90 & 80 & 70 & \dots \\ \hline \end{array}$			
Term				$y = 1,5x$
Graph				
Bild				

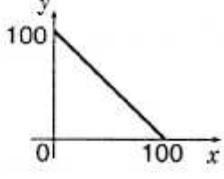
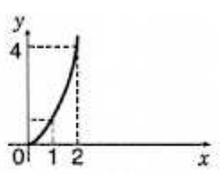
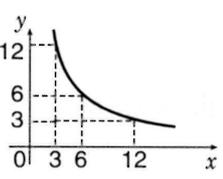
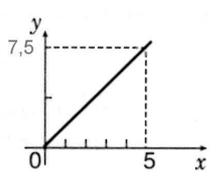
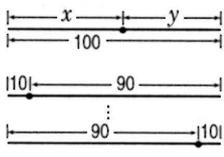
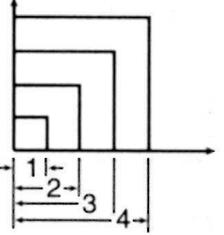
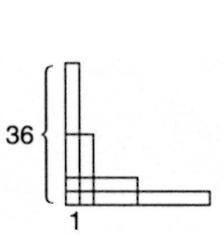
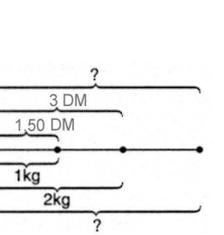
- (b) Nachdem Felix die leeren Tabellenfelder ausgefüllt hat, kommt seine Schwester wieder ins Zimmer. Sie sagt: „Situation 1 und 3 sind ähnlich.“ Inwiefern stimmt dies? Finde selbst möglichst viele andere Gemeinsamkeiten von zwei verschiedenen Situationen.

Quelle: Mathe-Netz 8, S. 60

Lösung:

## 2 Lineare Funktionen

(a) siehe Tabelle

	a.	b.	c.	d.																																																		
Werte	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>...</td></tr> <tr><td>y</td><td>100</td><td>90</td><td>80</td><td>70</td><td>...</td></tr> </table>	x	0	10	20	30	...	y	100	90	80	70	...	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>y</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td><td>25</td><td>36</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	6	y	1	4	9	16	25	36	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>...</td></tr> <tr><td>y</td><td>36</td><td>18</td><td>12</td><td>9</td><td>...</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	...	y	36	18	12	9	...	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>...</td></tr> <tr><td>y</td><td>0</td><td>1,5</td><td>3</td><td>4,5</td><td>...</td></tr> </table>	x	0	1	2	3	...	y	0	1,5	3	4,5	...
x	0	10	20	30	...																																																	
y	100	90	80	70	...																																																	
x	1	2	3	4	5	6																																																
y	1	4	9	16	25	36																																																
x	1	2	3	4	...																																																	
y	36	18	12	9	...																																																	
x	0	1	2	3	...																																																	
y	0	1,5	3	4,5	...																																																	
Term	$x + y = 100$ $y = 100 - x$	$y = x \cdot x$ $y = x^2$	$x \cdot y = 36$ $y = \frac{36}{x}$	$y = 1,5x$																																																		
Graph																																																						
Bild																																																						

- (b)
- *a. und c.*  
je mehr desto weniger  
Graph fallend nicht durch Ursprung  
 $x + y = const.$  vs.  $x \cdot y = const.$
  - *a. und d.*  
Graphen sind Geraden  
Konstantes Wachsen bzw. Fallen  
geht um Geld
  - *b. und c.*  
Graphen sind Kurven  
geht um Flächeninhalte
  - *b. und d.*  
Graphen gehen durch den Ursprung  
je mehr desto mehr wachsend
  - *a., b. und c.*  
geht um Blumen
  - *a. und b.*  
keine erkennbaren Gemeinsamkeiten

### 14. Rätsel

In das Gitter sind mathematische Begriffe zum Thema „Funktionen“ einzutragen.  
Hier sind die zugehörigen Umschreibungen angegeben. Zur Kontrolle sind die Lösungswörter



6. benötigt man für ein Koordinatensystem
7. zentraler Punkt
9. bestimmt den Schnittpunkt mit einer Achse
10. FUNKTION
11. viele einfache Zuordnungen sind...
13. Anordnung von Zahlenpaaren
14. je-mehr-desto-weniger-Zuordnung

*Senkrecht*

1. eindeutige Beziehung
3. kennzeichnet den Verlauf von Geraden
5. Französischer Mathematiker und Philosoph
8. sagt, wie zugeordnet wird
12. Gleichungstyp



Quelle: Elemente Unterrichtsmaterialien Band 2, Schroedel, 2001, S. 235

15. Aufgaben zu (linearen) Funktionen

## 2 Lineare Funktionen

(a) Bäume wachsen unterschiedlich schnell und hoch. Übertrage die Daten in ein Koordinatensystem und vergleiche die Wachstumsformen. Finde „Rekordbäume“, die besonders

- schnell wachsen
- alt werden
- hoch werden
- dick sind



Alter (in Jahren)	Höhe (in m)		
	Tanne	Eiche	Zirbel- kiefer
0	0	0	0
20	2,5	9,3	1,2
40	13,3	18,3	4,0
60	22,9	22,2	7,0
80	28,4	26,1	9,5
100	32,5	29,5	12,0
120	34,7	31,6	15,5
160	...	...	19,0

(b) Beim Start einer Rakete mit einer Startmasse von 800 t werden in den ersten zwei Minuten 612 t Treibstoff verbrannt. Dieser Vorgang verläuft gleichförmig.

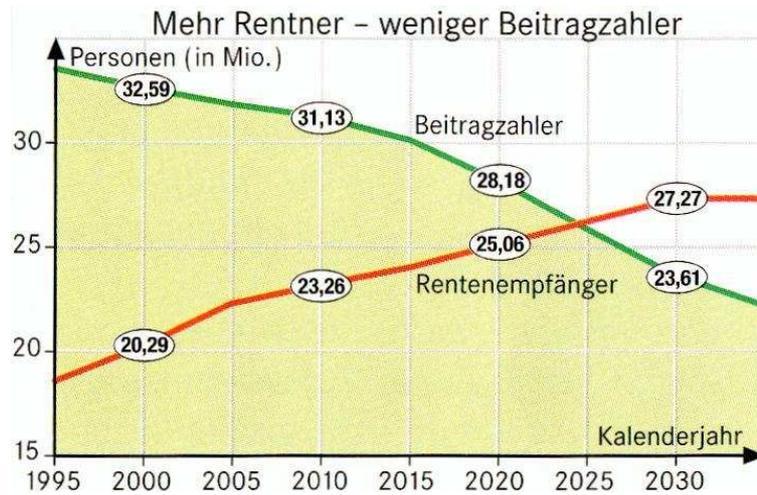
- i. Gib für die Funktion  $f$ : Zeit (in *min*)  $\rightarrow$  Masse der Rakete (in *t*) und  $g$ : Zeit (in *sek*)  $\rightarrow$  Masse der Rakete (in *t*) je eine Funktionsvorschrift an.
- ii. Zeichne den Graphen der Funktion  $f$ .
- iii. Lies die Antworten auf folgende Fragen am Graphen der Funktion  $f$  ab.  
Wie viel  $t$  wiegt die Rakete 1 min nach dem Start?  
Nach wie viel Sekunden wiegt die Rakete nur noch 500t?



- (c) Eine Vase wird mit gleichmäßig zulaufendem Wasser gefüllt. In der Tabelle ist eingetragen, wie hoch das Wasser zu den jeweiligen Füllzeiten steht.

Füllzeit in s	5	10	25	20	25	30	35
Wasserhöhe in cm	10	15	16	18	20	30	40

- i. Übertrage die Werte in ein Koordinatensystem und verbinde die Punkte zu einer Kurve.
  - ii. Wie könnte die Vase aussehen? Vergleiche eure Lösungen miteinander.
  - iii. In welchem Zeitraum steigt das Wasser am schnellsten?
  - iv. Lässt sich eine Antwort leichter aus der Tabelle oder dem Schaubild ablesen?
- (d) Eine Versicherung veröffentlicht die abgebildete Grafik.



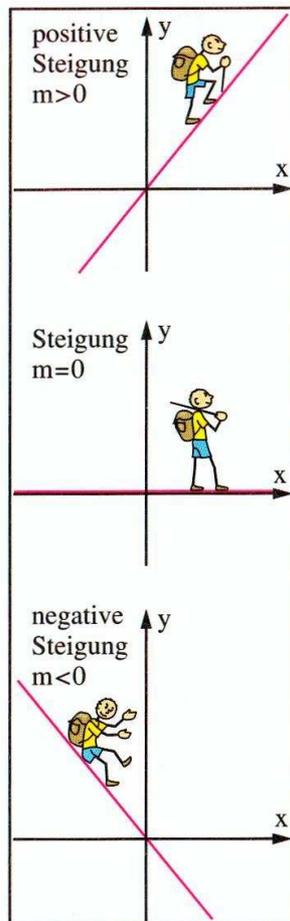
- i. Wie ist das Verhältnis von Beitragszahlern zu den Rentenempfängern heute und wie wird es sich verändern?
  - ii. Was beabsichtigt die Versicherung vermutlich mit dieser Veröffentlichung?
  - iii. Wie beurteilst du die dargestellte Prognose? Was kann sie für dich bedeuten?
- (e) Erkundige dich nach den Tarifen der Post oder denen eines anderen Anbieters und stelle fest, ob folgende Zuordnungen eine Funktion darstellen:  $Gewicht \rightarrow (\leftarrow)Porto$ .

## 16. Weitere Anwendungen

- (a) Für ein Kraftfahrzeug hat man festgestellt, dass sich der Anhalteweg  $y$  (in  $m$ ) beim Bremsen aus der vorher gefahrenen Geschwindigkeit  $x$  (in  $\frac{km}{h}$ ) mit Hilfe einer Gleichung berechnen lässt:
- i. (1)  $y = 0,01x^2 + 0,3x$  (ohne Verwendung eines Antiblockiersystems)
  - ii. (2)  $y = 0,0095x^2 + 0,3x$  (bei eingebautem Antiblockiersystem)
    - i. Berechne für die Geschwindigkeiten  $30 \frac{km}{h}, 60 \frac{km}{h}, \dots, 150 \frac{km}{h}$  den zugehörigen Anhalteweg. Fasse die Ergebnisse in einer Wertetabelle zusammen und zeichne die Graphen.
    - ii. Zeichne den Graphen der Zuordnung Geschwindigkeit (in  $\frac{km}{h}$ ) Abstand (in  $m$ ) in ein Koordinatensystem. Vergleiche mit dem Graphen in *i*.



- (b) Svetlana: „Du kannst die Steigung  $m = \frac{3}{7}$  auch einzeichnen, indem du von einem Punkt der Geraden 7 Einheiten nach links und 3 Einheiten nach unten gehst.“  
 „Gut, dann kann man auch  $m = -\frac{2}{5}$  einzeichnen, indem man 5 Einheiten nach links und 2 Einheiten nach unten geht,“ erwidert Kai.  
 Nimm zu beiden Äußerungen Stellung und verdeutliche deine Argumentation an selbst gewählten Beispielen.

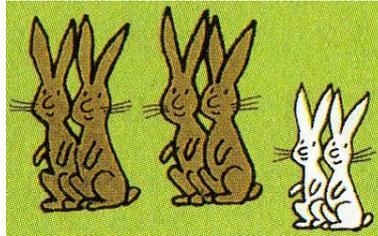


- (c) Gib jeweils eine Funktionsvorschrift an und berechne  $f(-2)$ ,  $f(-\frac{1}{2})$  und  $f(2, 2)$ .

## 2 Lineare Funktionen

- i.  $f : \text{Zahl} \rightarrow \text{das Dreifache der Zahl vermindert um Eins}$
- ii.  $f : \text{Zahl} \rightarrow \text{Kehrwert}$
- iii.  $f : \text{Zahl} \rightarrow \text{Eins vermindert um das Quadrat der Kehrzahl}$
- iv.  $f : \text{Zahl} \rightarrow \text{die Hälfte der Zahl}$

- (d) Im Jahre 1202 erschien das Werk „Liber abaci“ des Mathematikers Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci. Aus diesem Buch stammt das folgende Problem.



Ein Kaninchenpaar wirft vom 2. Monat an in jedem Monat ein junges Paar, und bei den Nachfahren ist es ebenso. Die Monatszählung beginnt mit dem ersten Monat, in dem das erste Kaninchenpaar lebt. Die Funktion  $a$  ordnet jeder Monatsnummer die Anzahl der in diesem Monat lebenden Kaninchenpaare aus der betrachteten Familie zu. Fülle die Tabelle vollständig aus.

Monatsnummer $n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl Paare $a(n)$	1	1	2	3						

(Erst im Jahre 1843 gelang es dem Mathematiker Jacques Philippe Marie Binet, für die Funktion  $a$  einen Funktionsterm anzugeben!)

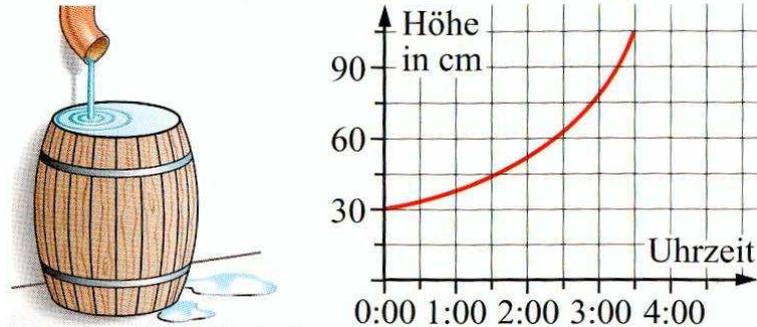
- (e) Starte eine Stoppuhr mit dem Anschalten einer Kaffeemaschine und lies ab, wie lange es dauert, bis eine, zwei, drei, vier, fünf, ... Tassen Kaffee durchgelaufen sind! Notiere deine Ergebnisse in einer Tabelle! Lässt sich der Vorgang angenähert durch eine lineare Funktion beschreiben und wenn durch welche?



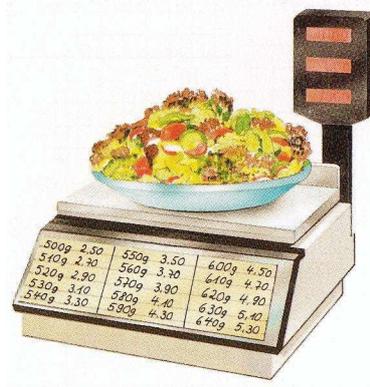
### 17. Vermischtes

## 2 Lineare Funktionen

- (a) In einer Regentonne steht das Wasser 30 cm hoch. Nachdem es nachts geregnet hat, ist sie am nächsten Morgen voll. Wie könnte der Graph verlaufen, wenn es jeweils von 1 Uhr bis 1.30 Uhr und von 3.30 Uhr bis 4.00 Uhr heftige Schauer gab und es dazwischen nicht geregnet hat? Skizziere und vergleiche die Graphen.



- (b) Ein Dreieck im Koordinatensystem ist durch die Punkte  $A(0 | -3)$ ,  $B(1 | 1)$  und  $C(-3 | 2)$  festgelegt. Bestimme die Gleichungen der drei Geraden, die das Dreieck umranden.
- (c) An dem Salatbuffet wird der Salat mit Teller gewogen. Löse zeichnerisch und rechnerisch:
- Jörg muss  $5,10\text{€}$  für seine Salatportion bezahlen. Wieviel  $g$  Salat hat er auf seinem Teller?
  - Wieviel  $g$  wiegt der Teller?



- (d) Überlege dir, dass sich eine Gerade auch durch eine Gleichung der Form:  $ax + by + c = 0$  mit  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  darstellen lässt.
- Für welche Werte von  $a$ ,  $b$  und  $c$  erhält man Geraden mit positiver Steigung?
  - Welche Bedingungen müssen für  $a$ ,  $b$  und  $c$  gelten, damit die Geraden parallel zur  $x$ -Achse bzw. parallel zur  $y$ -Achse verlaufen?
  - In welchen Fällen liegt eine lineare Funktion vor?
- (e) Die weltweite Erdgasreserven wurden 1993 auf etwa  $141,8 \text{ Billionen } m^3$  geschätzt. Die jährliche Fördermenge betrug etwa  $2,5 \text{ Billionen } m^3$ .

## 2 Lineare Funktionen

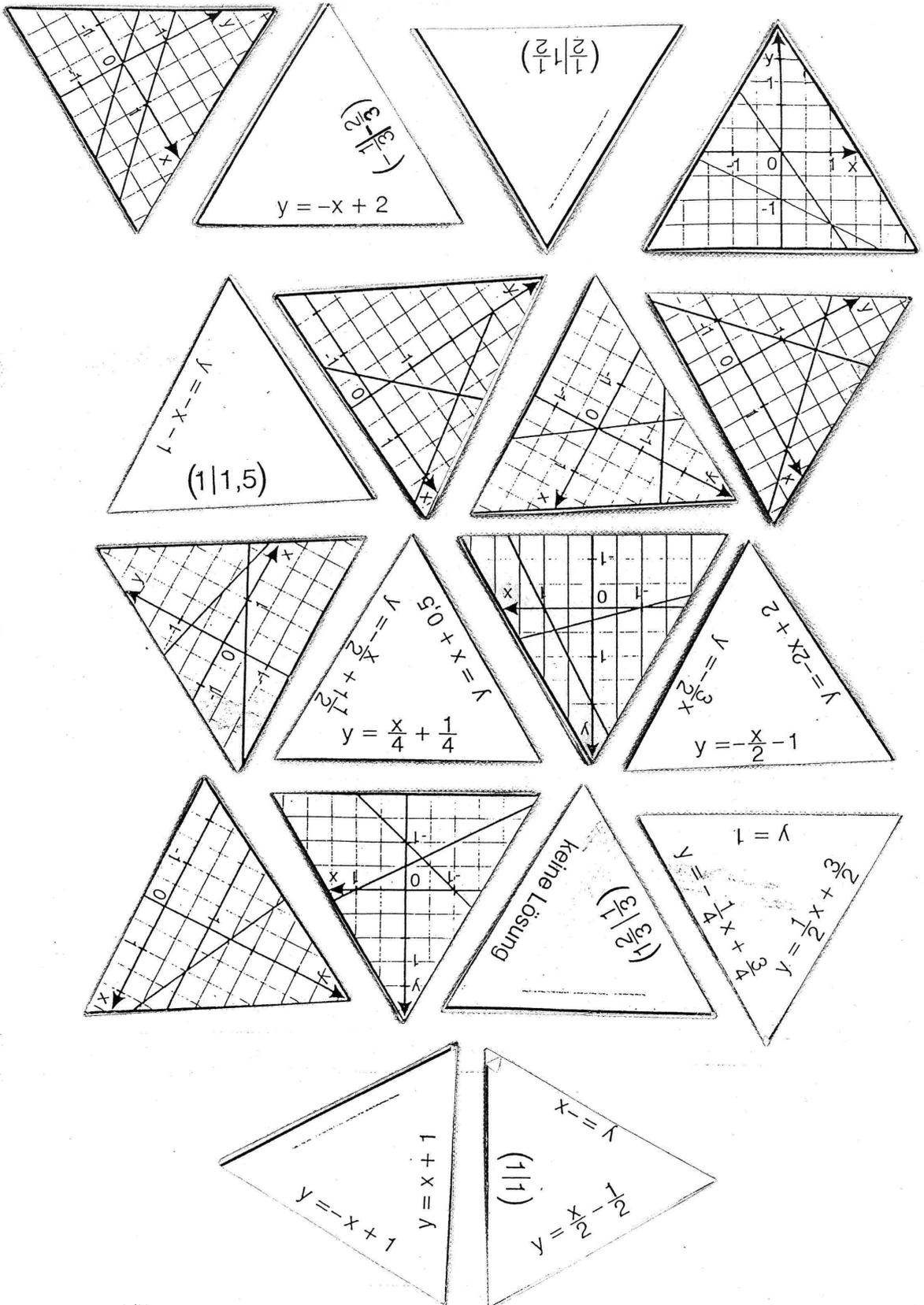
- i. Bestimme für die Zuordnung  $Zeit(\text{in Jahre seit } 1993) \rightarrow \text{Erdgasreserven}(\text{in } m^3)$  die Gleichung unter der Voraussetzung, dass sich die jährliche Fördermenge nicht ändert.  
Wie lange würden die geschätzten Erdgasreserven reichen?
- ii. Wie lange reichen die Erdgasreserven, wenn die Produktion von heute an auf jährlich zwei Billionen Kubikmeter zurückgefahren würde?
- iii. In Russland lagern etwa 60% der Welterdgasreserven. Das russische Energieunternehmen „Gazprom“ möchte die jährliche Fördermenge von 650 *Milliarden*  $m^3$  auf 1 *Billion*  $m^3$  steigern. Wie lange reichen unter diesen Voraussetzungen die Erdgasreserven in Russland?



Quellen: MatheNetz 8 (2000), MatheLive 8 (2001), Lambacher Schweizer 8 (1996), Schnittpunkt 8 (1994), Mathematik heute 8 (1995), Zahlen und Größen 8 (2000), Mathematik 8 (1994), Die Welt der Zahl (1994), Elemente der Mathematik 8 (1994), Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sek.I (2001).

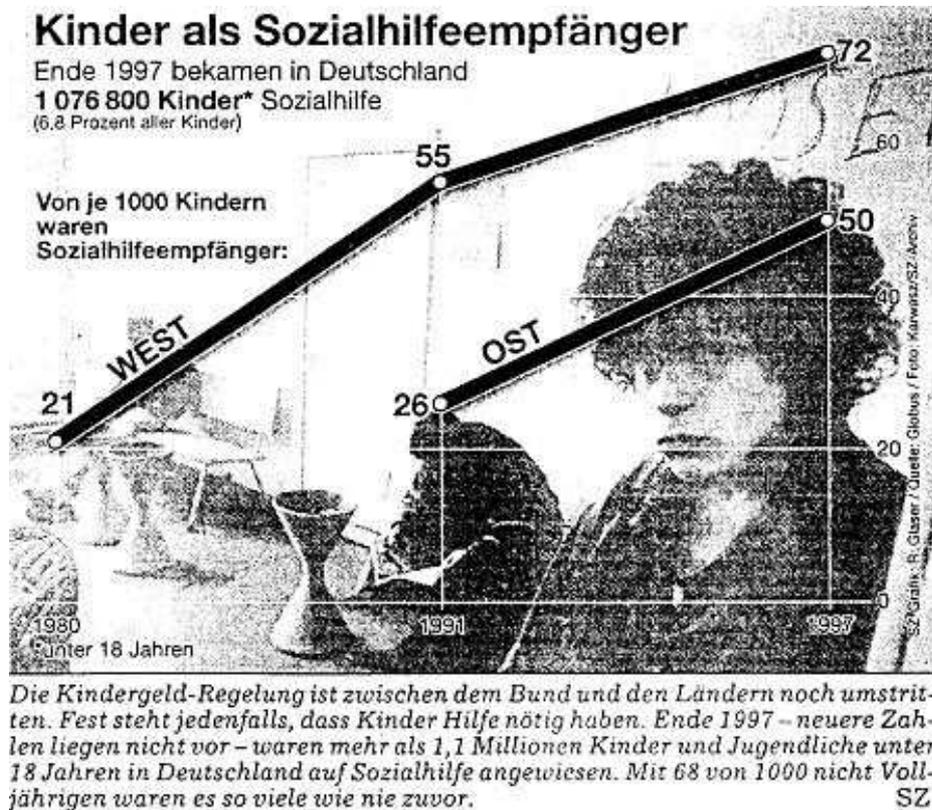
### 18. Funktionenpuzzle

2 Lineare Funktionen



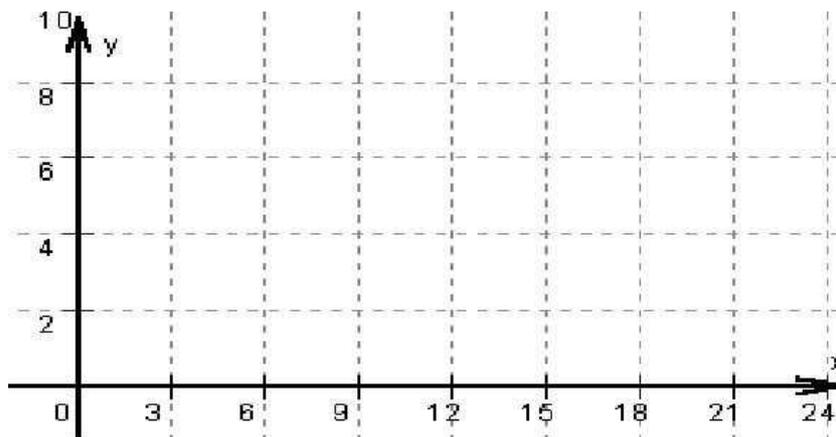
19. Kinder als Sozialhilfeempfänger

Wie viele Kinder waren 1984 Sozialhilfeempfänger und wie viele sind es im Jahr 2000?



Zeige, dass die Graphik aus der SZ einen falschen Eindruck erwecken soll. Benutze dazu das angegebene KO-System.

## 2 Lineare Funktionen



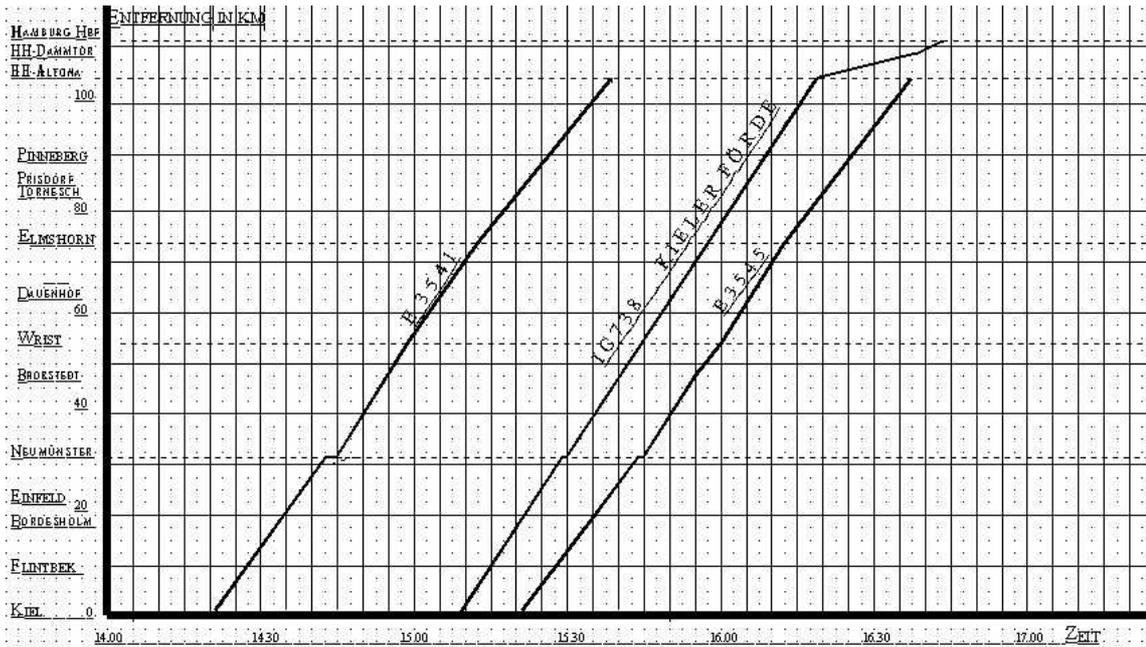
Wie viele Kinder waren 1997 Sozialhilfeempfänger?

Weitere Fragen:

- Wie viele Kinder waren nun 1884 Sozialhilfeempfänger? (relativ und absolut)
- Wie viele Kinder werden es laut der Prognose im Jahr 2000 sein?
- Warum ist diese Prognose problematisch? (Betrachte den bisherigen Verlauf des Graphen.)
- Wie sieht der Graph aus, wenn du nur die Zahlen von 1980 und 1997 kennst?
- Warum beschreibt der Graph die Wirklichkeit nur ungenau?

20. Bildfahrplan Kiel—Hamburg

## 2 Lineare Funktionen



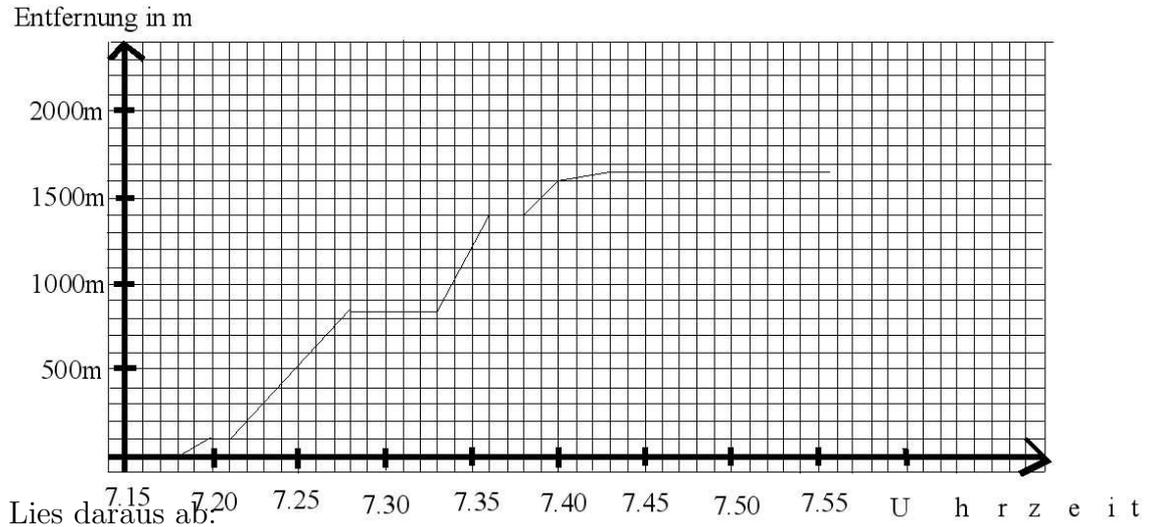
- Gib die Nummern der Züge an, die zwischen 14 und 16 Uhr von Kiel nach Hamburg fahren.
- Notiere daneben ihre Abfahrtszeiten von Kiel.

Zugnummern	Abfahrtszeiten

- Welcher Zug ist (welche Züge sind) am schnellsten von Kiel in Hamburg-Altona?
- Suche eine günstige Verbindung von Kiel nach Hamburg-Altona heraus. Begründe: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- Wie viele Minuten braucht der Zug für die Strecke? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- Der 5601 fährt um 15.50 Uhr ab Kiel und ist um 16.18 Uhr in Neumünster, fährt dort um 16.20 Uhr ab und kommt um 16.52 in Elmshorn an. Wann wird er bei gleicher Geschwindigkeit in Hamburg-Altona sein? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- Kannst du auch den Graphen eines Zuges einzeichnen, der von Hamburg-Altona nach Kiel fährt? Der E 3550 z. B. fährt um 14.20 Uhr ab Hamburg- Altona, ist um 14.42 Uhr in Elmshorn, um 14.55 Uhr in Wrist, um 15.09 Uhr in Neumünster, fährt dort um 15.11 Uhr ab, ist um 15.20 Uhr in Bordesholm und um 15.35 Uhr in Kiel.
- Finde selbst interessante Aufgaben zu diesem Bildfahrplan.

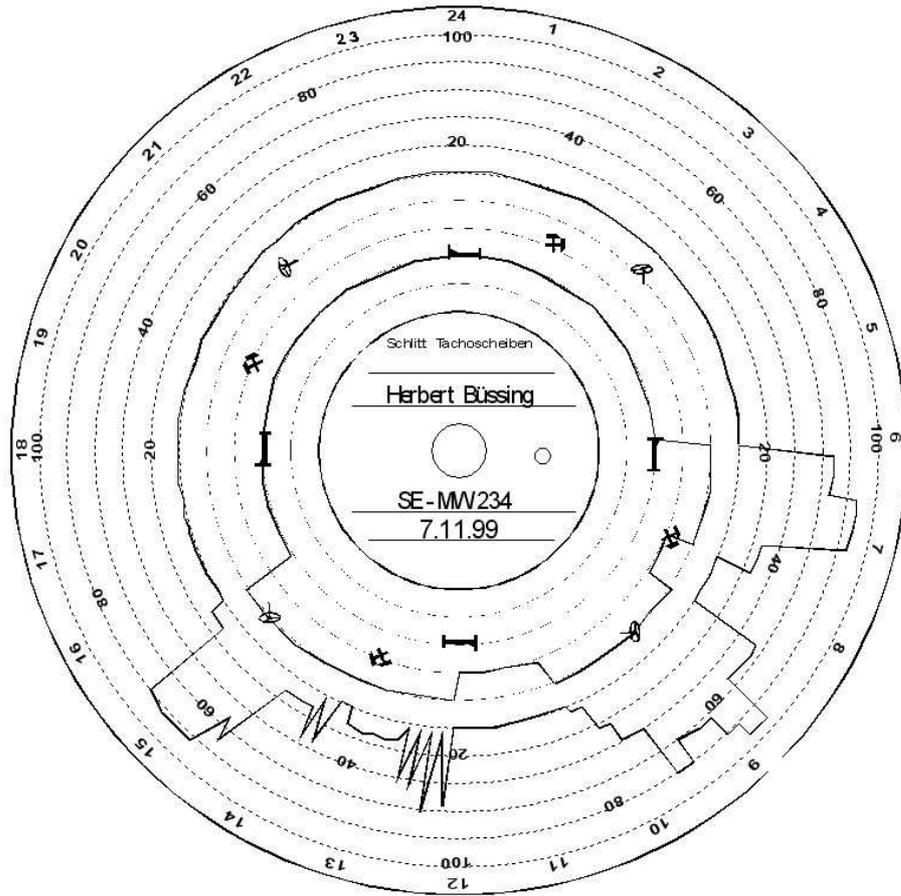
21. Petras Schulweg

Petra fährt jeden Morgen mit dem Fahrrad zur Schule und trifft auf dem Weg zur Schule einige Freundinnen. An zwei Stellen müssen sie an Ampeln Hauptstraßen überqueren. Nachdem sie ihr Fahrrad abgestellt hat, muss sie die letzten 30 m einen kleinen Hang hinaufgehen, um ins Schulgebäude zu gelangen. Der Verlauf von Petras Weg zur Schule ist hier abgebildet.



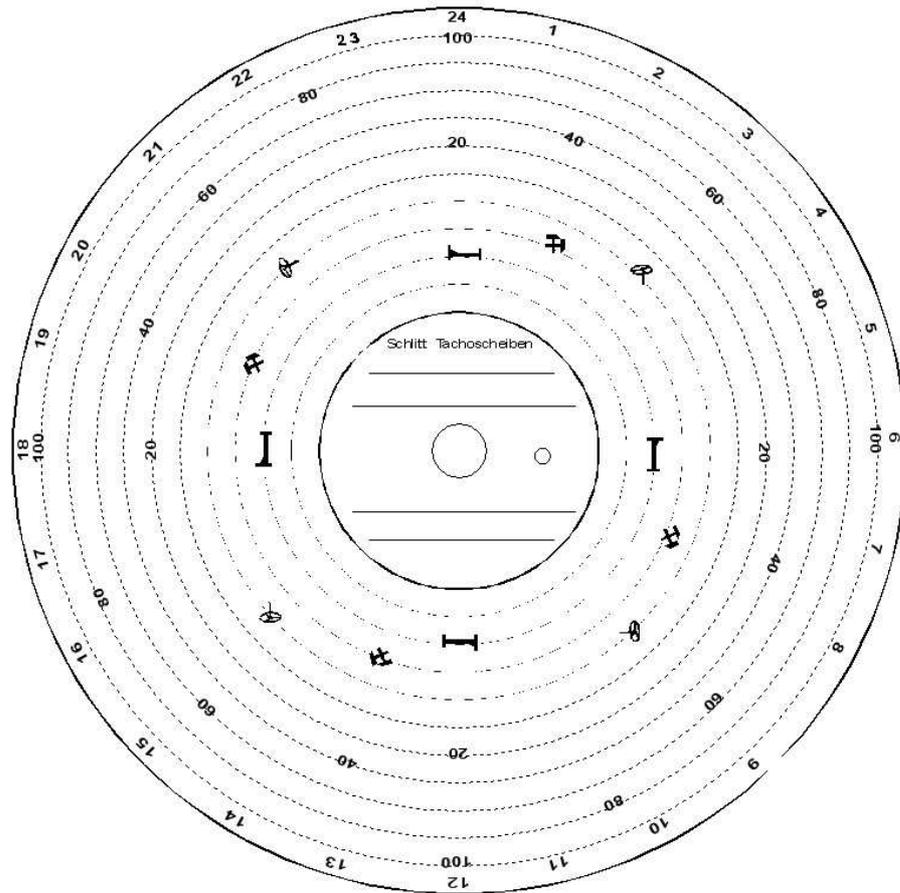
- Um welche Uhrzeit verlässt Petra ihr Elternhaus?
- Wann kommt sie in der Schule an?
- Wann trifft sie sich mit ihrer Freundin?
- Wann warten beide an der ersten Ampel auf eine weitere Klassenkameradin?
- Wann müssen sie an der zweiten Ampel warten?
- Um wieviel Uhr merkt sie, dass sie sich beeilen muss? Begründe, woran du das erkennst.
- Kannst du noch mehr aus der Tabelle ablesen? Notiere das.
- Zeichne den Verlauf deines eigenen Schulweges in ein Diagramm.
- Kannst du dir andere Situationen mit solchen „Verlaufsskizzen“ vorstellen?

22. Tachograph



Um 6.30 Uhr startet Fernfahrer Herbert K. seinen 40-Tonner und fährt vom Hof der Spedition, für die er arbeitet. Mit durchschnittlich  $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  steuert er seinen LKW durch den beginnenden Berufsverkehr zu einem Elektrogroßhandel, den er um 7.15 Uhr erreicht. Dort angekommen, parkt er sein Fahrzeug und fängt an, es mit 62 Kühlschränken und 27 Spülmaschinen zu beladen. Nach ca. 40 Minuten hat Herbert K. seinen Lastzug beladen, alle Formalitäten erledigt und startet zur nahe gelegenen Autobahn. Mit den vorgeschriebenen  $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  fährt er Richtung Süden. Um 9.00 Uhr hält er für ein zweites Frühstück an einer Raststätte an. Da er dort seinen Freund Karl trifft, dauert es 50 Minuten, bis er endlich weiter fährt. Mit durchschnittlich  $65 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  erreicht er nach 2,5 Stunden die Autobahnausfahrt, an der er die Autobahn verlässt. Jetzt dauert es noch 20 Minuten, da er im Durchschnitt nur  $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  fahren kann, bis er sein Ziel erreicht. (Aus: Segeberger Zeitung vom 09.09.1999)

- a) Wie sieht die Tachoscheibe von Fernfahrer Herbert K. aus? Trage deine Werte in die leere Tachoscheibe ein.
- b) Überlege dir selbst eine Geschichte und zeichne dazu einen passenden Fahrtenverlauf.



### Legende zur Tachoscheibe

Ungleichmäßige Öffnung in der Mitte bewirkt eindeutiges Mitführen der eingelegten Tachoscheibe.

Angaben in der Mitte: Name des Fahrzeugführers, Abfahrtsort, Bestimmungsort, Abfahrtstag, Ankunftstag, Amtliches Kennzeichen des Fahrzeugs, Kilometerstand bei der Ankunft, Kilometerstand bei der Abfahrt, gefahrene Kilometer.

1. Kreisring mit zackigen Ausschlägen: Kilometeraufschrieb

Jeder Ausschlag entspricht 5 gefahrenen Kilometern, also einmal hoch und runter bedeutet 10 gefahrene Kilometer. Dieser Teil dient der Kontrolle, ob alle gefahrenen Kilometer fortlaufend mit offiziell vorgelegten Tachoscheiben dokumentiert werden. Eine Tachoscheibe muss an die folgende lückenlos anschließen.

Symbole für die Tätigkeiten:



Lenkzeit



Arbeitszeit



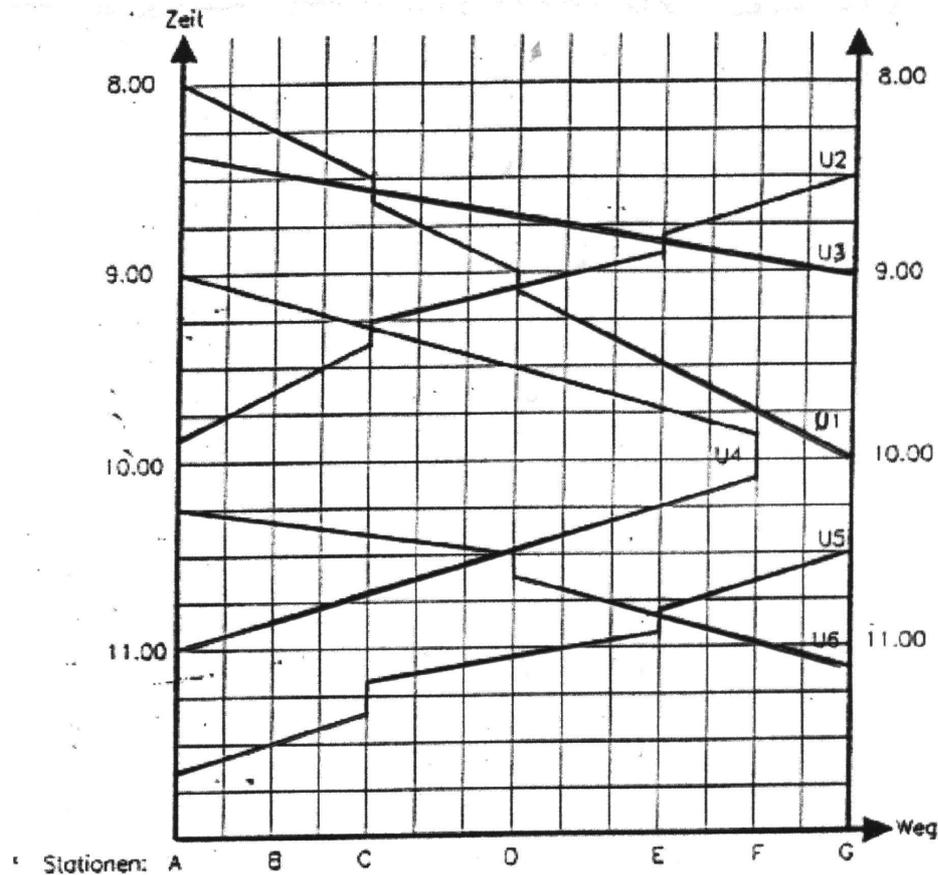
Mitfahrzeit



Ruhezeit

23. Fahrdienstleiter bei der U-Bahn

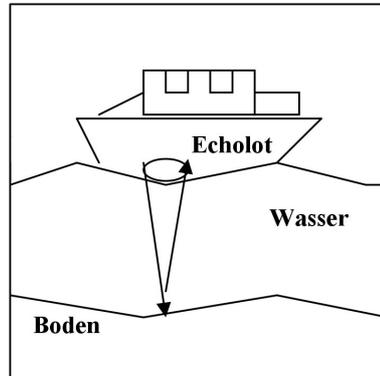
In einem Stellwerk findest du folgenden U-Bahn-Plan vor. Könntest du dich in diesem Plan zurechtfinden?



- Versuche, den Fahrplan zu lesen.
- Schreibe einige U-Bahnverbindungen auf.
- Warum ist es zum Lesen des Planes nicht notwendig, daß die U-Bahnen mit Pfeilen gekennzeichnet sind?
- Was macht U2 um 8.48 Uhr?
- Welche U-Bahnen begegnen sich?
- Kann man zwischen 9.00 Uhr und 10.00 Uhr von A nach G fahren?
- Bei U6 sind die Linien unterschiedlich steil. Erkläre die Bedeutung.
- Zeichne eine eigene U-Bahnverbindung ein.

24. Echolot

Beim Echolot sendet man Schallwellen auf den Meeresgrund. Bei einer Wassertiefe von 1480 m benötigen die Schallwellen für die Entfernung vom Echolot zum Meeresboden zwei Sekunden. Bei einer Wassertiefe von 2960 m benötigen sie dann vier Sekunden.



- a) Ein Echolot hat bei fünf Messungen in einem Abstand von 50 m nach folgenden Zeiteinheiten die vom Meeresboden zurückkehrenden Schallwellen aufgezeichnet:

nach 1,5 s   nach 1,2 s   nach 2 s   nach 1,1 s   nach 0,9 s

Kannst du einen Verlauf des Meeresbodens zeichnen (Maßstab 1:1000)?

- b) Ein Echolot hat folgende Tiefen des Meeresboden gemessen: 740 m, 1776 m, 1184 m, 2664 m. Gib die dazugehörigen Zeiten an.  
 c) Nach welcher Funktionsgleichung sendet das Gerät?  
 d) Zeichne einen Graphen mit geeigneter Achseneinteilung.

25. Natürliche Nachtsichtgeräte: Die Ohren der Fledermaus

Fledermäuse und Wale nutzen das Ultraschallprinzip. Das heißt: Sie stoßen Ultraschalltöne mit der Nase aus und fangen das Echo nach einer bestimmten Zeiteinheit wieder mit den Ohren auf. Auf diese Weise können sie sich auch bei Dunkelheit orientieren.

- a) Für das Lufttier Fledermaus gilt: Die Ultraschalltöne der Fledermaus treffen nach einer Sekunde auf einen 331 m entfernten Gegenstand. Zeichne einen sinnvollen Graphen. Berücksichtige dabei die Größen Zeit und Weg.  
 b) Bei einer sitzenden Fledermaus wurden die Zeitspannen zwischen Aussenden des Ultraschalls und Auffangen des Echos, das von verschiedenen Insekten zurückprallte, mit 1,7 s, 4 s und 1,4 s gemessen. Wie weit waren die Insekten jeweils von der Fledermaus entfernt?

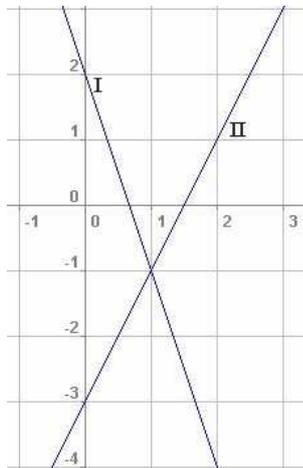
## 2 Lineare Funktionen

### 26. Hungriger Wal

Für das Meerestier Wal gilt: Die ausgesendeten Schallwellen treffen nach 2 Sekunden auf einen 1,480 km entfernten Gegenstand.

- Zeichne einen sinnvollen Graphen. Berücksichtige dabei die Größen Zeit und Weg.
- Wann hat der Wal einen Tintenfisch geortet, der in 962 m Entfernung auf einem Stein fest sitzt?
- Wie viele Minuten nach dem Orten kann der Wal den Tintenfisch fressen, wenn er mit einer Geschwindigkeit von  $v = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  schwimmt?

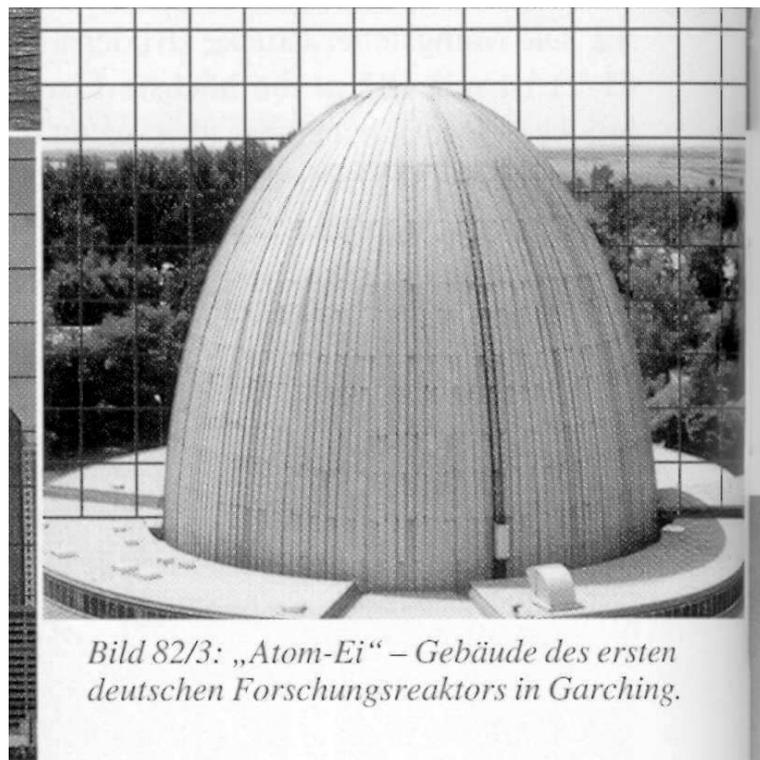
### 27. Lineare Funktionen



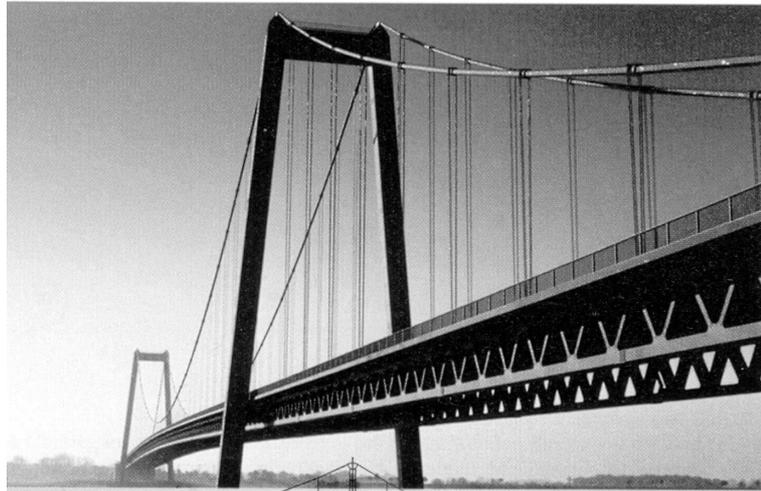
- Bestimme die Normalform der Funktionsgleichung der Geraden I und II.
- Lies den Schnittpunkt der beiden Geraden miteinander aus der Zeichnung ab.
- Überprüfe deine Lösung rechnerisch.
- Überprüfe, ob der Punkt A  $(-2|4)$  auf der Geraden I liegt und ob der Punkt B  $(4|5)$  auf der Geraden II liegt.

# 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen

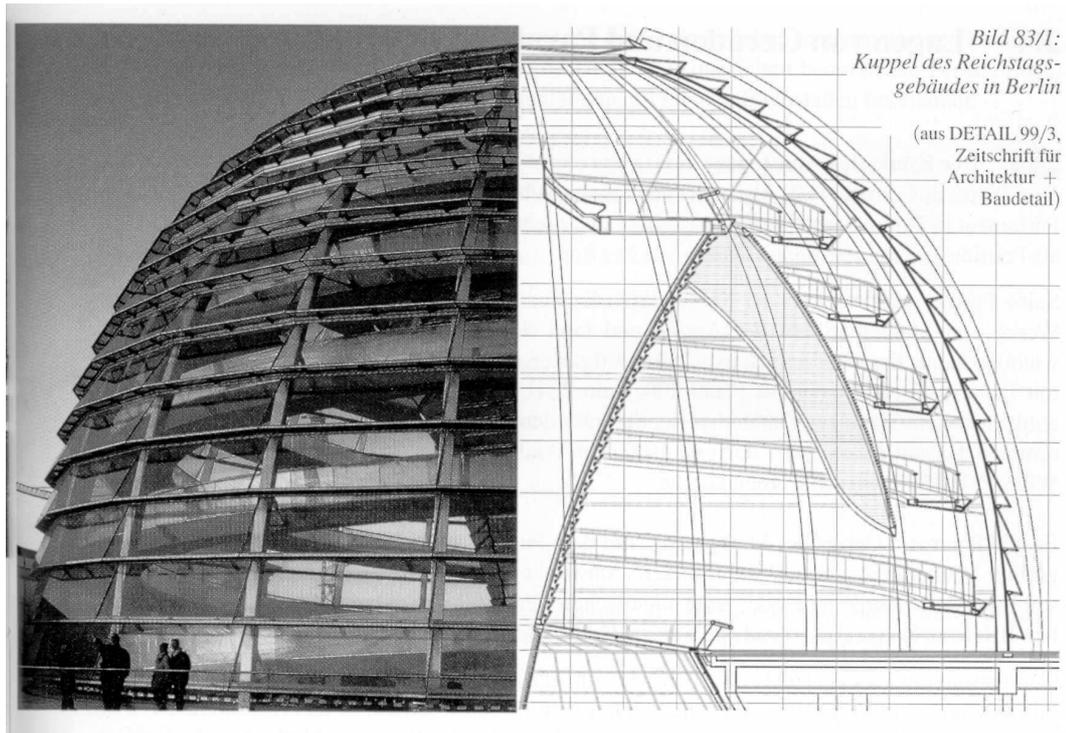
## 1. Parabeln kommen vor



3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen



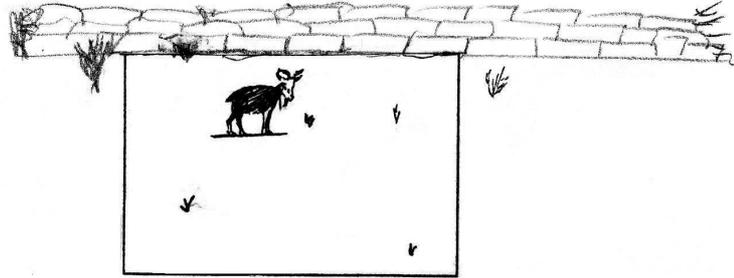
### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen



## 2. Die Ziegenweide

### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen

Mit 120 m Zaun soll eine rechteckige Weidefläche für die Ziege Alma abgezäunt werden. In welchem Abstand von der Mauer könnten die Pfosten eingeschlagen werden? Welche Weidefläche steht Alma dann zur Verfügung? Finde mehrere Möglichkeiten, wobei die 120 m Zaun jeweils verbraucht werden sollen.



### 3. Kinokrieg

Kassel besitzt inzwischen zwei große Kinocenter mit zahlreiche Kinosälen.

Da bangen die kleinen Kinos um ihre Einnahmen.

Eines dieser kleinen Kinos hat bei einem Eintrittspreis von 8 € durchschnittlich 95 Besucher pro Vorstellung.

Eine Marktstudie ergibt folgendes:

Würde der Besitzer den Eintrittspreis um 0,50 €; 1 €; 2 € usw. erhöhen, so ginge die Besucherzahl um 10 Personen; 20 Personen; 40 Personen usw. zurück.

Welche Preiserhöhung bringt die höchsten Einnahmen?

### 4. Verschiebungsregeln mit der Betragsfunktion

(a) Vergleiche die Graphen der folgenden Betragsfunktionen mit dem Graphen von  $f(x) = |x|$ .

i.  $f_1(x) = |x - 5|$

ii.  $f_2(x) = |x + 1|$

iii.  $f_3(x) = |x| + 1,5$

iv.  $f_4(x) = |x| - 2,5$

v.  $f_5(x) = |x - 2| - 4$

vi.  $f_6(x) = \frac{1}{3}|x|$

vii.  $f_7(x) = 3 \cdot |x|$

viii. Stelle selbst einen Funktionsterm auf und zeichne den Graphen.

(b) Formuliere aufgrund deiner Beobachtungen bei Aufgabe(a). Verschiebungsregeln für folgende Funktionen:

$$g_1(x) = |x + a|, \quad a \in P$$

$$g_2(x) = |x| + b, \quad b \in P$$

$$g_3(x) = |x + a| + b, \quad a, b \in P$$

- (c) Verändere den Faktor  $c$  in der Gleichung  $h(x) = c \cdot |x|$ . Wie geht der Graph von  $h$  aus dem von  $f$  hervor? Unterscheide  $c > 0$ ;  $c < 0$ ;  $c = 0$ ;  $c < 1$ ;  $c > 1$  usw.

5. **Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph (1)**

Aufträge für die Gruppen:

**Gruppe A:**

Gegeben sind Funktionsgleichungen der Form  $f(x) = x^2 + e$ . Zeichne die Parabeln für verschiedene Parameter  $e$  und beschreibe den Zusammenhang zwischen Graph und Funktionsgleichung.

Stelle ausgewählte Beispiele und den gefundenen Zusammenhang auf der beiliegenden Folie für die anderen Gruppen dar.

**Gruppe B:**

Gegeben sind Funktionsgleichungen der Form  $f(x) = (x + d)^2$ . Zeichne die Parabeln für verschiedene Parameter  $d$  und beschreibe den Zusammenhang zwischen Graph und Funktionsgleichung.

Stelle ausgewählte Beispiele und den gefundenen Zusammenhang auf der beiliegenden Folie für die anderen Gruppen dar.

**Gruppe C:**

Gegeben sind Funktionsgleichungen der Form  $f(x) = (x + d)^2 + e$ . Zeichne die Parabeln für verschiedene Parameter  $d$  und  $e$  und beschreibe den Zusammenhang zwischen Graph und Funktionsgleichung.

Stelle ausgewählte Beispiele und den gefundenen Zusammenhang auf der beiliegenden Folie für die anderen Gruppen dar.

**Gruppe D:**

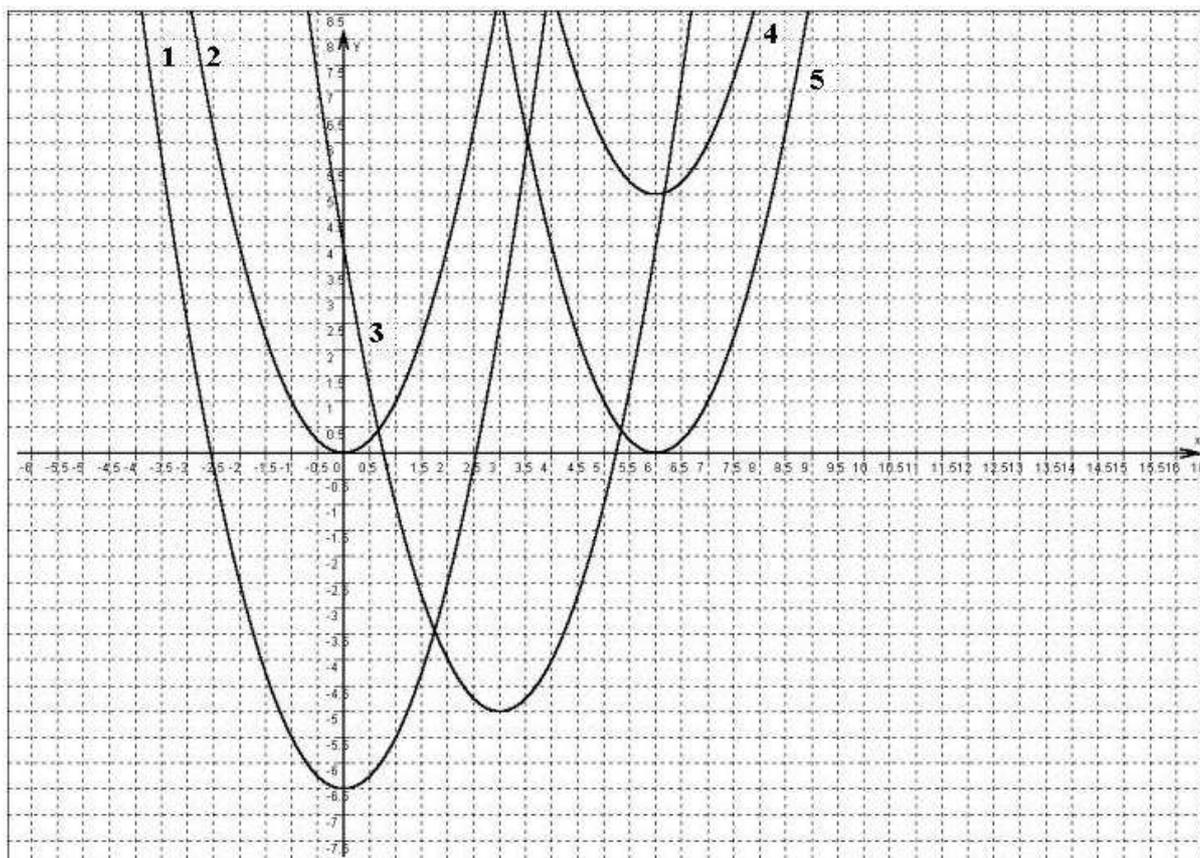
Verändere den Faktor  $a$  in der Gleichung  $f(x) = a \cdot x^2$ . Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Funktionsterm und der zugehörigen Parabel?

Stelle ausgewählte Beispiele und den gefundenen Zusammenhang auf der beiliegenden Folie für die anderen Gruppen dar.

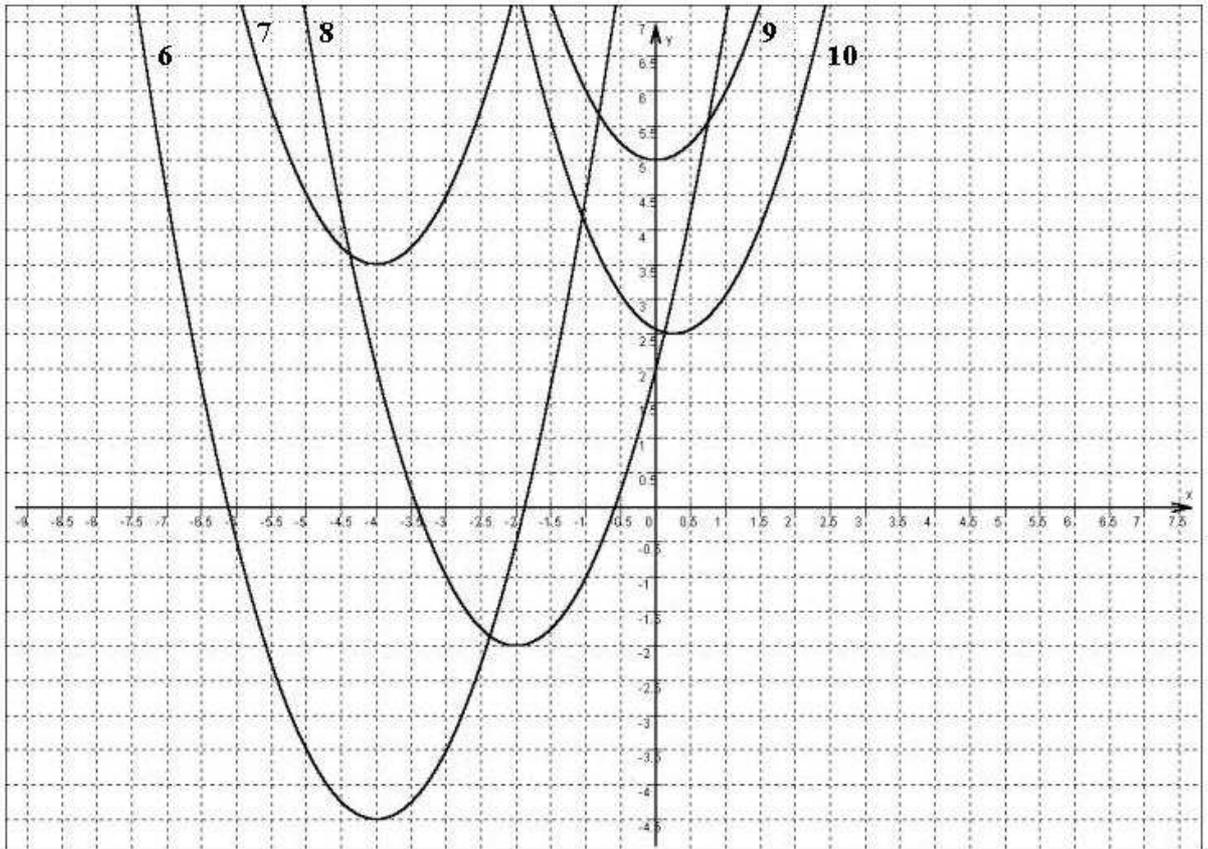
6. **Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph (2)**

Finde die Funktionsgleichungen  $f_1(x)$ ;  $f_2(x)$ ;  $\dots$ ;  $f_{10}(x)$  zu den gezeichneten Parabeln 1 – 10.

### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen



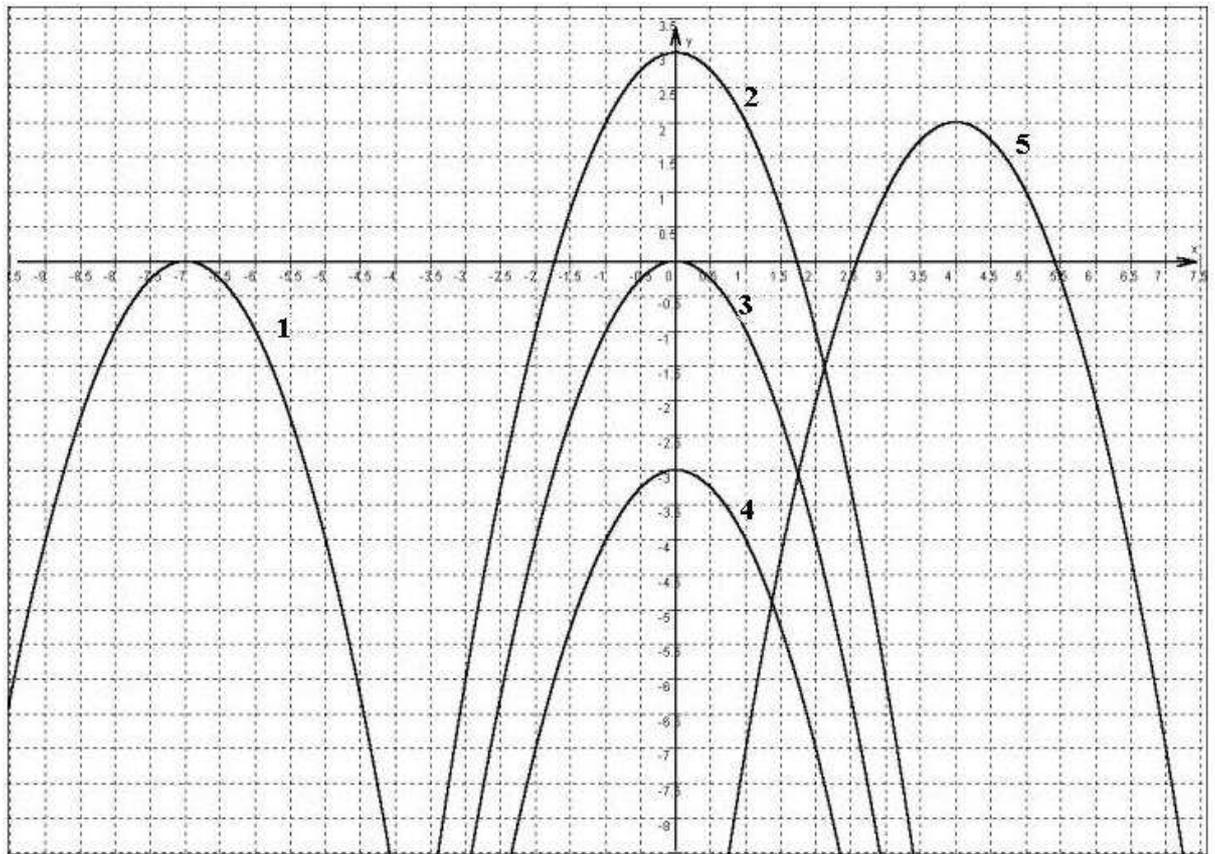
### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen



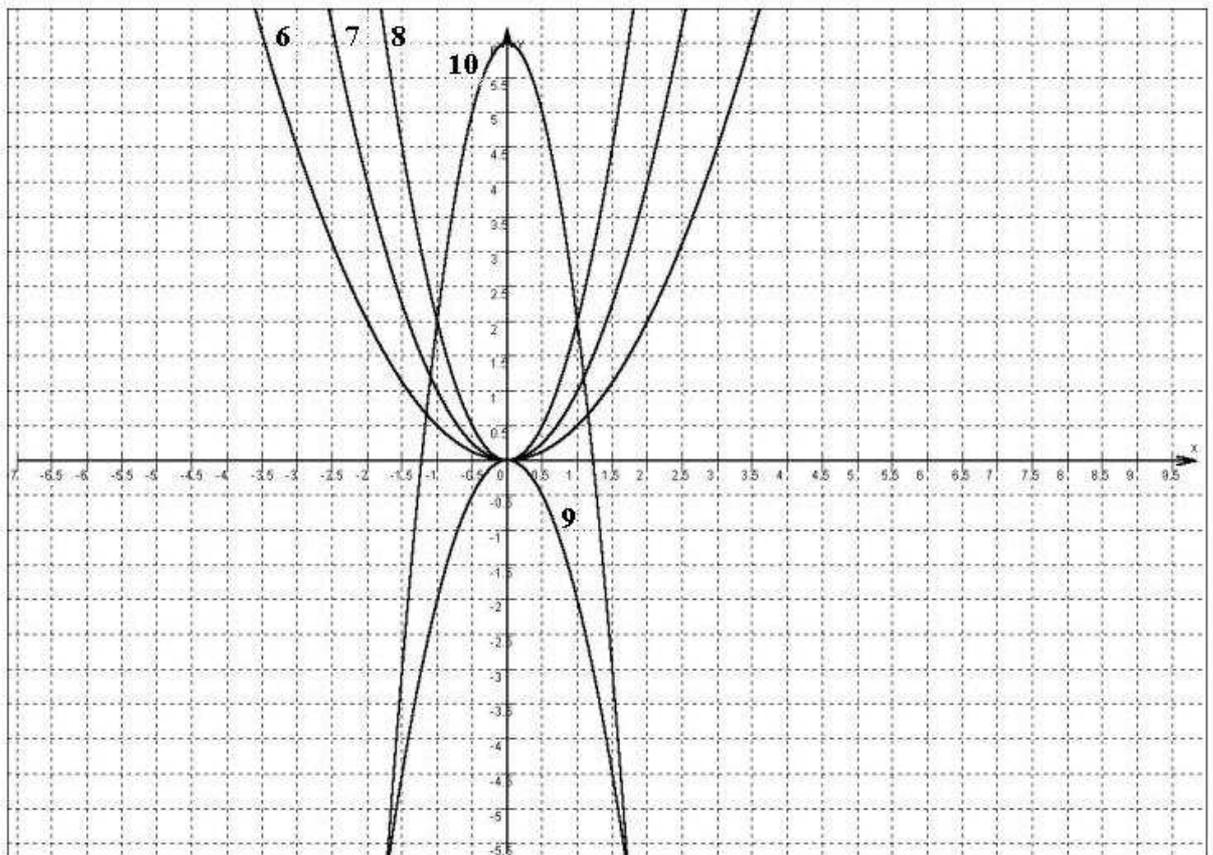
#### 7. Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph (3)

Finde die Funktionsgleichungen  $f_1(x); f_2(x); \dots; f_{10}(x)$  zu den gezeichneten Parabeln 1 – 10.

### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen



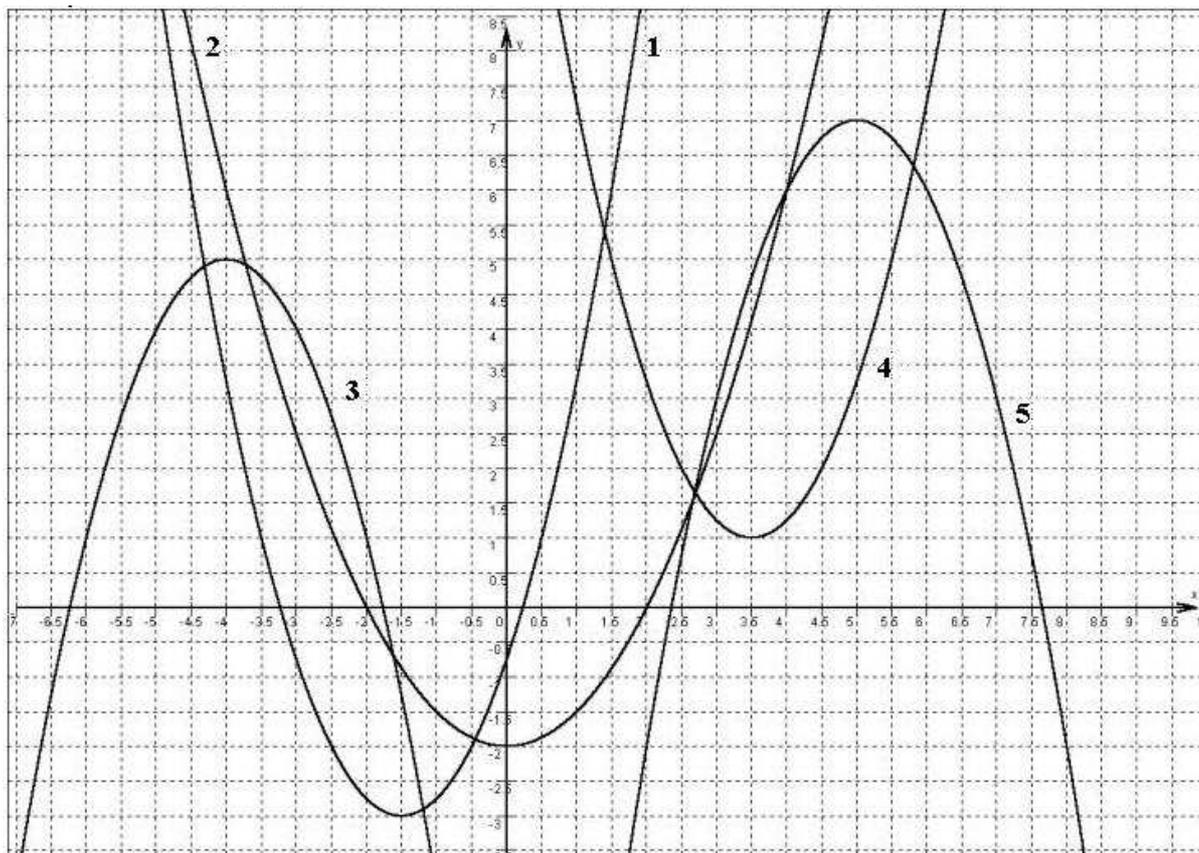
### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen



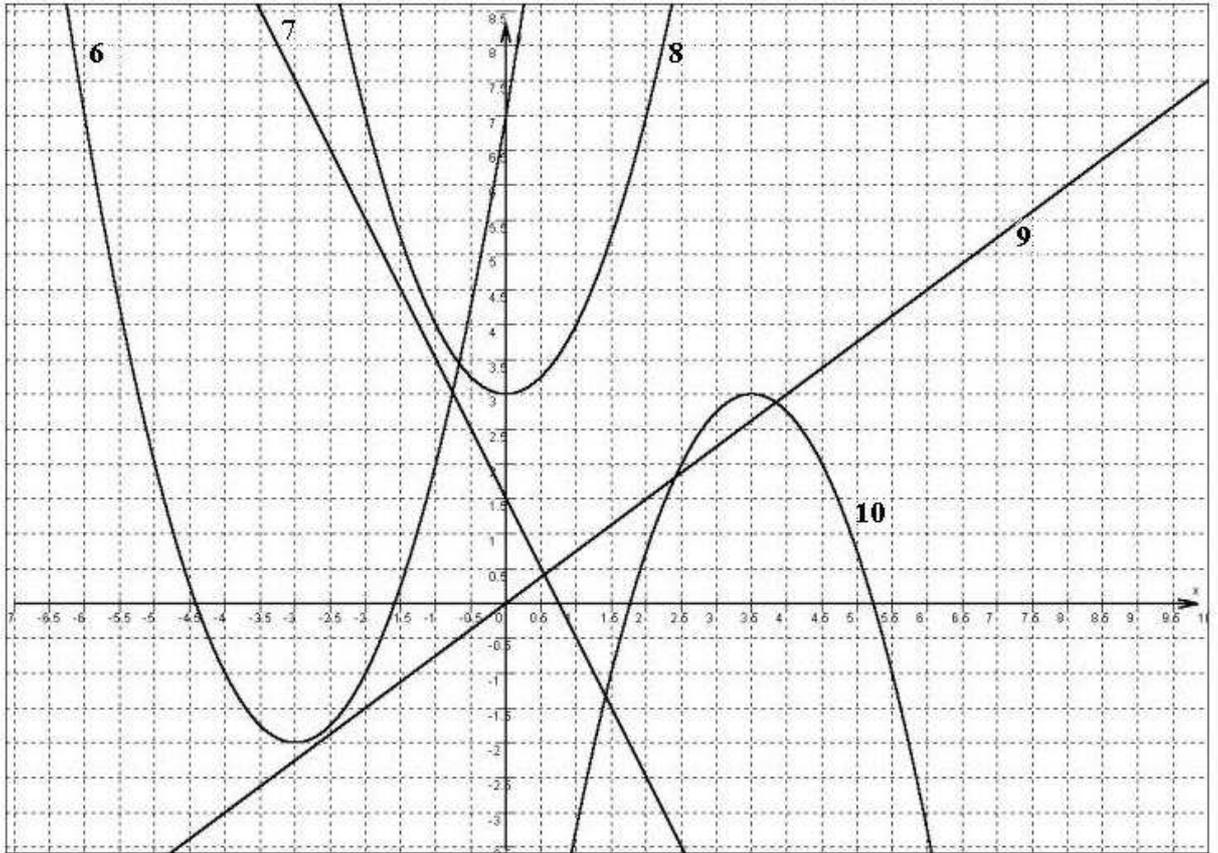
#### 8. Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph (4)

Finde die Funktionsgleichungen  $f_1(x); f_2(x); \dots; f_{10}(x)$  zu den gezeichneten Parabeln 1 – 10.

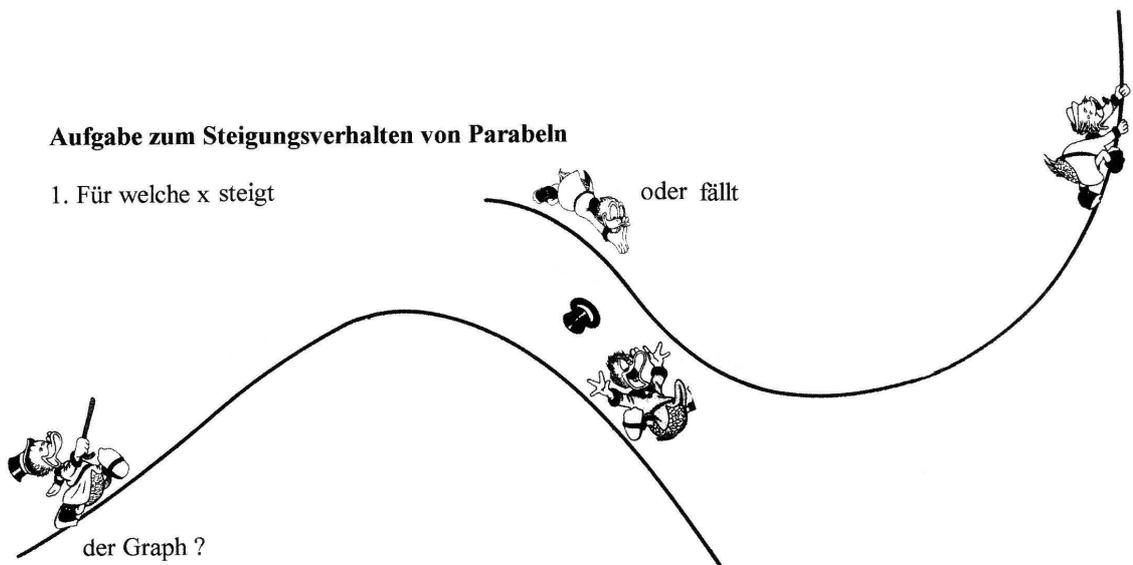
### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen



### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen



### 9. Steigungsverhalten quadratischer Funktionen



(a) siehe Tabelle

Beschreibung der Funktion	fällt	steigt
(a) $f(x) = x^2$		
(a) $f(x) = x^2$		
(b) $f(x) = x^2 + 2$		
(c) $f(x) = (x - 3)^2$		
(d) $f(x) = (x - 3)^2 + 1$		
(e) $f(x) = x^2 + 2x - 8$		
(f) Hochpunkt der Parabel: $H(7 4, 5)$		
(g) Tiefpunkt der Parabel: $T(-2, 5 3)$		
(h) Schnittpunkte mit der 1.Achse: $S_1(-2 0)$ und $S_2(10 0)$		
(i)		
(j)		

(b) Gib mehrere Funktionsgleichungen an, für die folgende Aussagen zutreffen:

Steigungsverhalten	Funktionsgleichungen
(a) Der Graph fällt für $x < -4$ und steigt für $x > -4$	
(b) Der Graph steigt für $x < 2$ und fällt für $x > 2$	
(c)	

## 10. Quadratische Funktionen und deren Graphen (Parabeln)

### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen

Funktionsgleichung	Lage des Scheitelpunktes	Steigungsverhalten: Die Parabel...		Verschiebung der Normalparabel
		... fällt	... steigt	
$f(x) = x^2$	$T(0 0)$	für $x < 0$	für $x > 0$	keine
$f(x) = x^2 + 1$				
$f(x) = x^2 - 2$				
$f(x) = (x + 2)^2$				
$f(x) = (x - 3)^2$				
$f(x) = (x - 2)^2 + 1$				
$f(x) = (x - 3)^2 - 2$				
$f(x) = (x + 4)^2 + 3$				
	$T(1 3)$			
	$T(-2 -5)$			
		$x < 2$	$x > 2$	
				um 2 nach links und um 3 nach unten
$f(x) = x^2 + 6x + 9$				
$f(x) = x^2 - 3x + 2,25$				
$f(x) = x^2 - 4x - 5$				
$f(x) = x^2 + 6x + 5$				
	$H(0 0)$			
		$x > 1$	$x < 1$	

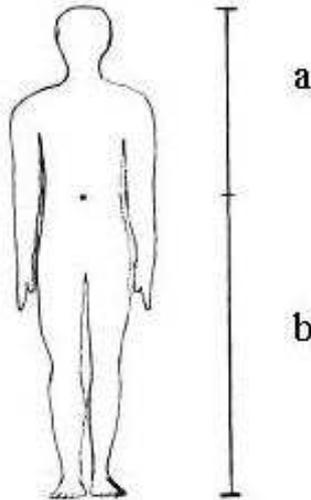
#### 11. Quadratische Funktionen und deren Graphen (Parabeln)

### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen

Funktionsgleichung	Lage des Scheitelpunktes	Steigungsverhalten: Die Parabel...		Verschiebung der Normalparabel
		... fällt	... steigt	
$f(x) = -x^2$	$H(0 0)$	für $x > 0$	für $x < 0$	Spiegelung an der 1.Achse
$f(x) = -(x^2 + 1)$				
$f(x) = -x^2 + 1$				
$f(x) = -(x - 2)^2$				
$f(x) = -(x + 3)^2$				
$f(x) = -(x - 2)^2 + 1$				
$f(x) = -((x - 3)^2 - 2)$				
	$H(1 -2)$			
	$T(1 -2)$			
	$T(-2 -5)$			
		$x > 2$	$x < 2$	
				an der 1.Achse gespiegelt, um 4 nach rechts verschoben
				um 2 nach links verschoben, an der 1.Achse gespiegelt
				an der 1. Achse gespiegelt, um 3 nach unten verschoben
				um 2,5 nach unten verschoben, an der 1. Achse gespiegelt

#### 12. Der Goldene Schnitt - ein Gesetz der Ästhetik

Beim Menschen stehen die Länge des Oberkörpers und die Länge des Unterkörpers angenähert stets in einem bestimmten Verhältnis. Dieses Verhältnis bezeichnet man als Goldenen Schnitt:



$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$  (Goldener Schnitt),  
oder in Worten:

$$\frac{\text{kürzerer Abschnitt}}{\text{längerer Abschnitt}} = \frac{\text{längerer Abschnitt}}{\text{Gesamtlänge}}.$$

Der Goldene Schnitt wird oft als besonders wohlgefällig empfundenes Längenverhältnis angesehen. Er ist nicht nur an Menschen und Statuen, sondern auch in vielen Gemälden und Gebäuden wiederzufinden. Gerade in der Antike und Renaissance wurde der Goldene Schnitt immer wieder als Stilmittel eingesetzt.

### Das Apollo-Projekt



Der Kasseler Apollo, der im Museum des Schlosses Wilhelmshöhe zu bewundern ist, soll als 10 m hohe Statue auf dem Universitätsgelände Kassel errichtet werden. Zur Errichtung des Apollos genügt den Bildhauern die Gesamtgröße allein natürlich nicht.





### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen

nor - null - o - pa - pa - po - punkt - qua - ra - ra - ra - re - recht - sche - schei - si -  
 stei - stei - stel - tan - te - tel - ten - ti - tiv - tiv - un - waa

**Bei den folgenden Sätzen geht es stets um eine Funktion  $f$  mit**

$$f(x) = mx + b.$$

- (a) Eine solche Funktion heißt eine ..... Funktion.
- (b) Der Graph einer solchen Funktion ersten Grades ist eine .....
- (c) Den  $x$ -Wert des Schnittpunktes eines Graphen mit der  $x$ -Achse nennt man .....
- (d) Die Konstante  $m$  in der Funktionsgleichung  $f(x) = mx + b$  gibt die ..... des Graphen an.
- (e) Wenn der Funktionsgraph von links nach rechts fallend verläuft, dann ist  $m$  .....
- (f) Je größer der Betrag von  $m$  ist, desto ..... verläuft der Funktionsgraph.
- (g) Wenn  $m = 0$  ist, dann verläuft der Funktionsgraph .....

**Bei den folgenden Sätzen geht es stets um eine Funktion  $g$  mit**

$$g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

- (h) Eine solche Funktion heißt eine ..... Funktion.
- (i) Der Graph einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades ist eine .....  
 Der höchste bzw. tiefste Punkt eines solchen Funktionsgraphen heißt .....
- (j) Wenn  $a_2 < 0$  ist, ist der Funktionsgraph nach ..... geöffnet.
- (k) Wenn  $a_2 > 0$  ist, ist der Funktionsgraph nach ..... geöffnet.
- (l) Wenn  $a_2 = 1$  und  $a_1 = a_0 = 0$  sind, nennt man den Graphen dieser Funktion eine .....
- (m) Eine quadratische Funktion besitzt keine Nullstelle, wenn der Scheitelpunkt oberhalb der  $x$ -Achse liegt und  $a_2$  ..... ist.
- (n) Erhält man bei der Berechnung der Schnittpunkte einer linearen Funktion und einer Parabel nur einen einzigen Schnittpunkt, so ist die Gerade in diesem Punkt eine ..... der Parabel.

#### 15. Vergleich von Funktionseigenschaften

*Proportionale Funktion*

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$3x$									

### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen

Lineare Funktion

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$3x + 2$									

Quadratische Funktion

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$3x^2$									

Fülle die Wertetabellen aus. Finde Eigenschaften der Funktionen in der Wertetabelle.

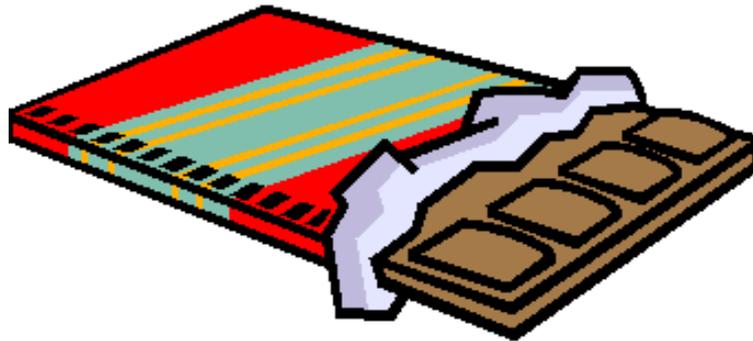
#### 16. Milkschokolade

**Die neue Milkia ist da!!!**

Noch sahniger, noch nussiger und jetzt noch günstiger. Wir haben unser Format geändert:

Milkia ist jetzt 10% Länger und 10% breiter.

Das ist 100% besser!!!



Die Schokolade hat vorher 1,49 gekostet und jetzt 1,79€. Beurteile die Anzeige der Firma.

#### 17. Diskussion der Busfahrpreise im Verkehrsausschuss

Im Verkehrsausschuss diskutieren die Ratsvertreterinnen und Ratsvertreter über die Verkehrspolitik einer Gemeinde. Sie machen Vorschläge für den Bau oder die Sperrung von Straßen. Sie legen fest, welche öffentlichen Verkehrsmittel in der Gemeinde bevorzugt werden sollen. Sie bestimmen mit über die Fahrpreise der Busse und Bahnen, die von der Gemeinde im öffentlichen Personenverkehr eingesetzt werden. Aus der Stadt Aachen benutzen täglich 200 Mitarbeiter der Forschungsanlage Jülich die direkte Busverbindung zwischen Stadt und Arbeitsstelle. Sie zahlen dafür bisher umgerechnet 5€ am Tag. Mit der Tageseinnahme von 1000€ können die Kosten

dieser Busverbindung gerade gedeckt werden. Zwei der politischen Parteien, die im Verkehrsausschuss vertreten sind, haben dem Ausschuss Anträge zur Änderung des Fahrpreises vorgelegt. Diese Anträge sind unten abgedruckt.

**Antrag der Fraktion A**

Die Einnahmen aus der Direktverbindung zwischen Stadt und Forschungsanlage decken die Kosten dieser Busverbindung. Da jedoch die Verkehrsbetriebe der Stadt insgesamt mit hohen Verlusten arbeiten, beantragen wir eine Fahrpreiserhöhung auch für die genannte Strecke.

Durch die Anhebung der Tarife werden einige Benutzer auf das private Auto ausweichen. Die Gesamteinnahmen aus der Strecke werden voraussichtlich steigen, und das Defizit der Städtischen Verkehrsbetriebe verringern helfen. Unsere Fraktion rechnet damit, dass bei einer Preissteigerung um jeweils 0,50€ pro Tag nur jeweils 10 Personen auf das eigene Fahrzeug ausweichen.

Gemäß unserem Antrag möge der Ausschuss so beschließen, dass die Linie möglichst hohe Einnahmen für unsere Städtischen Verkehrsbetriebe erzielt.

**Antrag der Fraktion B**

Ziel der Verkehrspolitik unserer Partei ist es, den öffentlichen Personen-Nahverkehr besonders zu fördern. Wir wollen daher, dass möglichst viele Menschen vom privaten Auto auf die Benutzung von Bussen und Bahnen umsteigen.

Nur durch eine Senkung des Fahrpreises auf der Strecke Aachen-Jülich kann es gelingen, die eingesetzten Busse besser auszulasten.

Unsere Fraktion rechnet damit, dass bei einer Preissenkung um jeweils 0,50€ pro Tag jeweils 40 Personen auf die Benutzung des eigenen Pkws verzichten und den Bus für den Weg zur Arbeit nutzen werden.

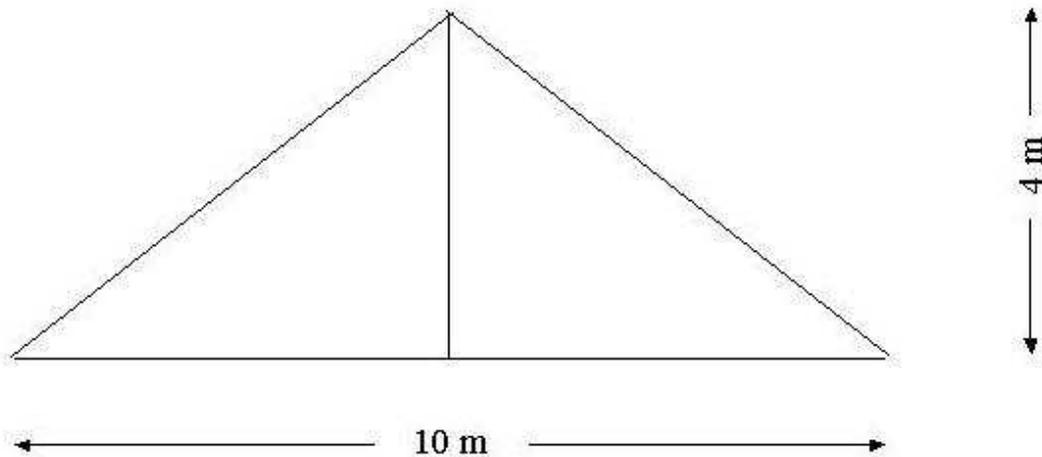
Unserem Antrag folgend möge der Ausschuss beschließen, dass möglichst viele Personen zur Nutzung des Busses angereizt werden. Die Einnahmen der Linie Aachen-Jülich sollen kostendeckend bleiben.

Welchem Antrag würdest du zustimmen?

**18. Das flächeninhaltsgrößte Fenster**

Im Dachgeschoss eines Hauses soll ein Malstudio eingerichtet werden. Das Studio soll möglichst viel Tageslicht durch eine rechteckige Glaswand im Hausgiebel erhalten.

Welche Länge und Breite muss der Architekt dieser Glaswand geben, wenn das Haus 10 m breit und der Giebel 4 m hoch ist?



### 19. Anwendungen der quadratischen Funktionen und Gleichungen

Quellen der nachfolgenden Aufgaben: Welt der Mathematik 9 (1990), Mathematik heute 9 (1996), Lambacher Schweizer 9 (1997), Schnittpunkt 10 (1995), MUED

#### Brücken

Viele moderne Brücken haben die Form von Parabeln. Die Abbildung rechts zeigt die Müngstener Brücke bei Solingen aus den fünfziger Jahren. Legt man ein Koordinatensystem in den Scheitel des Bogens, so hat die Parabel die Gleichung  $y = -\frac{1}{9}x^2$ . Die Bogenhöhe beträgt 69 m. Berechne die Spannweite.



20. **Fuldabrücke**

Der Brückenbogen der Fuldabrücke bei Guntershausen (Fig. 2) hat ebenfalls die Form einer Parabel mit der Gleichung  $y = ax^2$ .

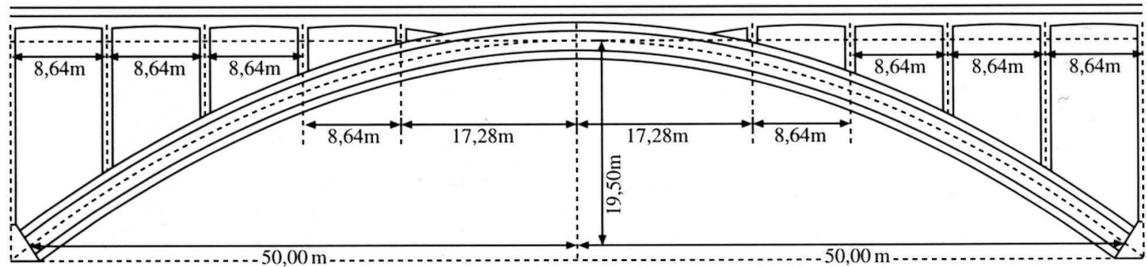


Fig. 2

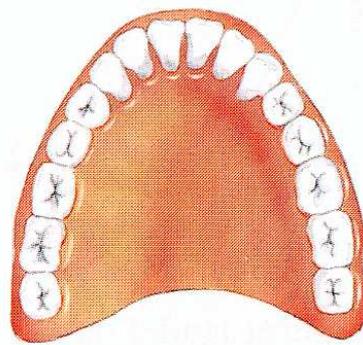
Bestimme  $a$  und berechne die fehlenden Pfeilerhöhen.

21. **Parabeln verschieben**

Eine Normalparabel wird um 1 nach links, um 4 nach oben verschoben, dann an der 1. Achse gespiegelt und schließlich parallel zur 2. Achse mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  gestreckt. Zeichne schrittweise den Graphen, gib Lage und Art des Scheitels an.

22. **Gebissform**

Ein regelmäßiges Gebiss hat näherungsweise die Form einer Parabel. Versuche für das rechts abgebildete eine Funktion zu finden, die die ungefähre Lage der Zähne beschreibt.



### 23. Weitsprung

Bob Beamon sprang bei seinem Weltrekord bei den Olympischen Spielen 1968 in Mexiko-City 8,90 m weit. Sein Körperschwerpunkt legte dabei in etwa die Bahn einer Parabel zurück, die angenähert durch die Gleichung  $y = -0,0571x^2 + 0,3838x + 1,14$  beschrieben wird ( $y$  gibt die jeweilige Höhe des Körperschwerpunktes über der Sprunggrube (in  $m$ ) und  $x$  die horizontale Entfernung von der Ausgangslage beim Absprung (in  $m$ ) an.

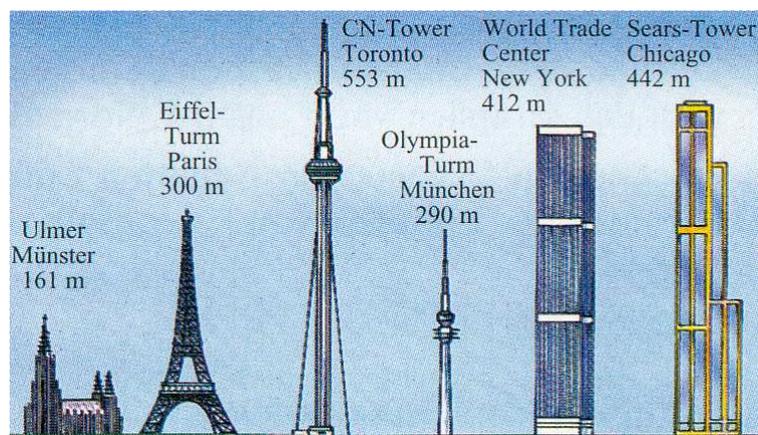
Hätte Bob Beamon bei seinem Weltrekord einen VW-Golf übersprungen?



### 24. Fallversuche

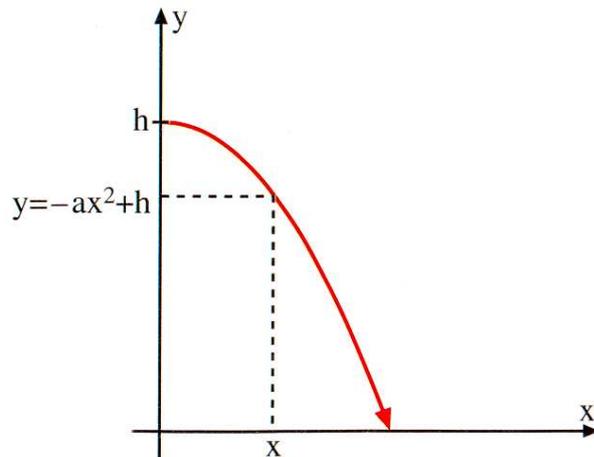
Beim senkrechten Fall einer Kugel von einem hohen Gebäude gilt für die Funktion Fallzeit (in  $s$ )  $\rightarrow$  Fallweg (in  $m$ ) angenähert  $t \rightarrow 5t^2$ .

Wie lange würde ein Stein fallen, wenn man ihn jeweils von der Spitze der Gebäude nach unten fallen lassen würde?



25. Flugversuche

Wirft man einen Gegenstand parallel zur Erde, so hat seine Flugbahn die Form einer halben Parabel. Die Gleichung dieser Parabel

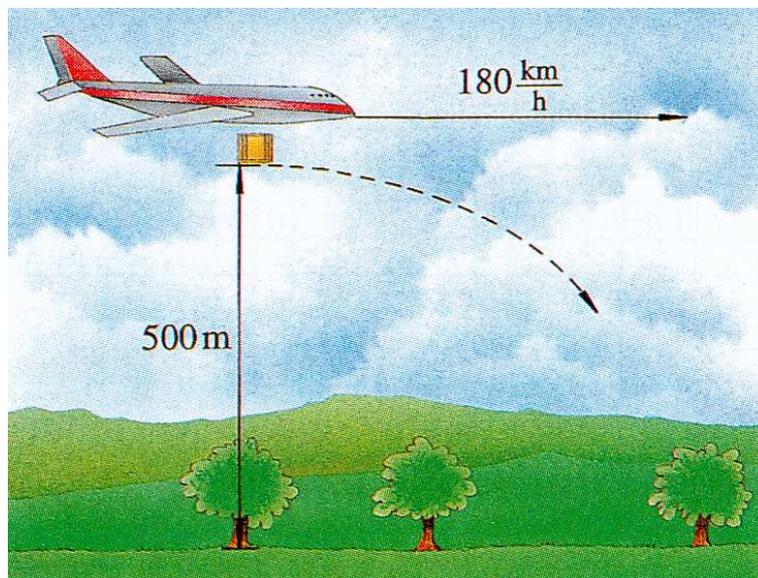


hat die Form  $y = -ax^2 + h$ .

Für den Wert von  $a$  gilt:  $a \approx \frac{5}{v^2}$ .

Dabei ist  $v$  die Abwurfgeschwindigkeit (in  $\frac{m}{s}$ ),  $x$  die Entfernung vom Abwurfpunkt in vertikaler Richtung (in  $m$ ) und  $y$  die Höhe (in  $m$ ),  $h$  ist die Abwurfhöhe (in  $m$ ).

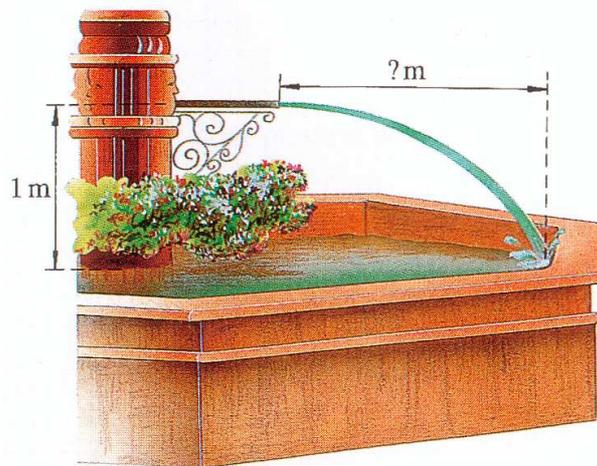
- (a) Ein Flugzeug, das mit der Geschwindigkeit von  $180 \frac{km}{h}$  (relativ zur Erde) fliegt, wirft ein Versorgungspaket ab. Wie weit von dem linken Baum entfernt landet das Paket?



- (b) Bei dem Springbrunnen tritt das Wasser aus dem Rohr mit der Geschwindigkeit  $3,5 \frac{m}{s}$  aus.

### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen

Wie weit muss der Rand des Wasserbeckens mindestens von der Rohröffnung entfernt sein?



#### 26. Schussversuche

Beim Schießen einer Kugel senkrecht nach oben wird die Zuordnung Zeit  $t$  nach Abschuss (in  $s$ )  $\rightarrow$  Höhe  $h$  über der Abschussstelle (in  $m$ ) durch die Gleichung  $h = 51,2t - 5t^2$  beschrieben.

- In welcher Höhe befindet sich die Kugel nach 4 Sekunden? Wann erreicht sie die gleiche Höhe beim Zurückfallen?
- Nach welcher Zeit erreicht die Kugel ihren höchsten Punkt? In welcher Höhe befindet sie sich dann?
- Zu welchen Zeiten beträgt die Höhe 50 m?

#### 27. Beschleunigung

Beschleunigt ein Motorrad aus dem Stand (bzw. bei  $30 \frac{km}{h}$ ), so legt es in den ersten  $x$  Sekunden etwa  $2x^2$  (bzw.  $2x^2 - 8x + 64$ ) Meter zurück. Zeichne für beide Fälle den Graphen der Funktion: Fahrzeit  $\rightarrow$  zurückgelegte Strecke in dasselbe Koordinatensystem und vergleiche sie.

#### 28. Säule

Für eine quadratische Säule mit der Höhe 5 cm gilt:

- Die Grundfläche ist um  $14 \text{ cm}^2$  [um  $24 \text{ cm}^2$ ] größer als die Seitenfläche.
- Die gesamte Oberfläche beträgt  $48 \text{ cm}^2$  [ $288 \text{ cm}^2$ ;  $112 \text{ cm}^2$ ].

### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen

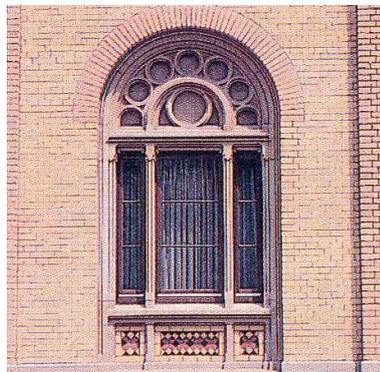
Berechne die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche.

#### 29. Giebelfenster

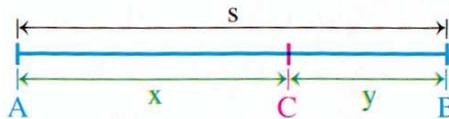
Bei der Herstellung von Giebelfenstern für ein Dachgeschoss ist eine Glasplatte in Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 80 cm und 120 cm übrig geblieben. Bestimme das Rechteck mit dem maximalen Flächeninhalt, das sich aus dem Dreieck ausschneiden lässt.

#### 30. Noch einmal: Goldener Schnitt

Der Goldene Schnitt kam bei Kunstwerken vor allem in der antiken Architektur und in der italienischen Renaissance vor. Prüfe dies an dem Bild:



Goldener Schnitt:  $s : x = x : y$



#### 31. Bild von Robbie

Ute will aus einem Poster ihres Lieblingssängers Robbie Williams ein quadratisches Bild ausschneiden und auf einen Karton aufkleben, der auf allen Seiten 0,5 dm überstehen soll.

- Wie viel  $dm^2$  Karton braucht sie bei der Bildbreite von 2,5 dm?
- Gib die Funktion Seitenlänge des Bildes in  $dm$ ? Flächeninhalt des Karton in  $dm^2$  an und zeichne den Graphen dieser Funktion.
- Wie groß kann Ute das Bild höchstens machen, wenn sie  $9 dm^2$  Karton hat?

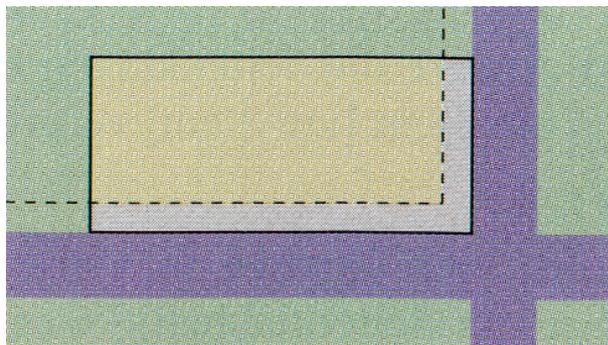


**32. Geradengewirr**

Auf einem Blatt sind  $n$  Geraden gezeichnet. Dabei schneidet jede Gerade jede andere. Es gibt 78 Schnittpunkte; durch keinen von ihnen gehen mehr als zwei der gezeichneten Geraden. Bestimme die Anzahl  $n$  der Geraden.

**33. Grundstücksverkleinerung**

Von einem rechteckigen Grundstück an einer Straßenecke soll für einen Radweg ein 2 m breiter Streifen längs der gesamten Straßenfront abgetreten werden. Dadurch gehen  $130 \text{ m}^2$  des ursprünglich  $990 \text{ m}^2$  großen Grundstücks verloren. Bestimme Länge und Breite des rechteckigen Grundstücks.



**34. Quadraträtsel**

Welche Seitenlänge hat ein Quadrat, dessen Flächeninhalt sich verdreifacht, wenn man die Seitenlänge um 1 m vergrößert?

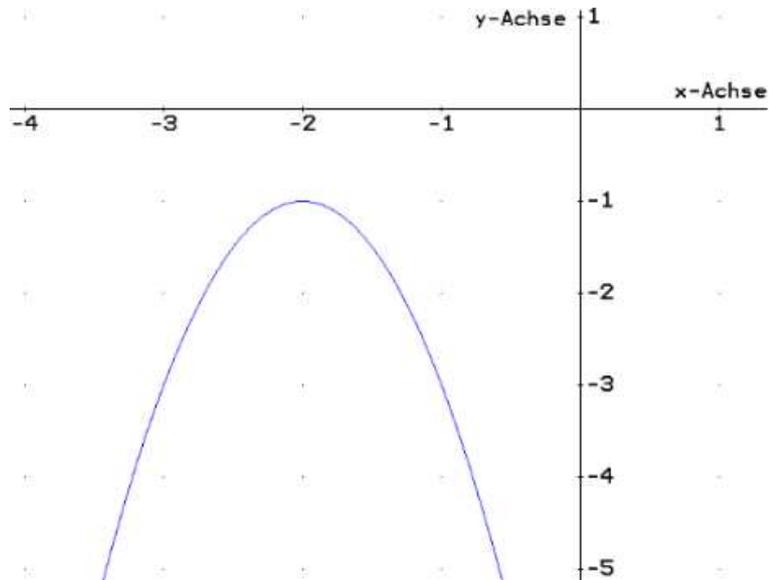
**35. Flächenverwandlung**

Ein Rechteck hat die Seitenlängen 18 cm und 16 cm. An seinen vier Ecken sollen kongruente gleichschenklige Dreiecke so abgeschnitten werden, dass sich der Flächeninhalt des Rechtecks um ein Viertel verkleinert. Wie lang sind die Katheten der abgeschnittenen Dreiecke?

36. **Parabelverwandlung**

Die rechts abgebildete Parabel ist durch Verschiebung und Streckung aus der Normalparabel entstanden.

Beschreibe zunächst die verschiedenen Veränderungen gegenüber der Normalparabel und versuche dann die Funktionsgleichung zu finden.



37. **Im Krankenhaus**

In einer Klinik wird einem Kranken gleichmäßig aus einer Infusionsflasche eine Kochsalzlösung zugeführt. Nach einer halben Stunde sind noch 0,8 l in der Flasche, nach 2 Stunden sind es nur noch 0,2 l.

- (a) Wie viel  $l$  waren bei Infusionsbeginn in der Flasche?
- (b) Wann war die Infusionsflasche leer?

38. **Zahlenrätsel**

- (a) Löse das Zahlenrätsel und kommentiere deinen Lösungsweg ausführlich:  
Für welche Zahl ist das Produkt aus der um 6 verkleinerten Zahl und dem dreifachen der ursprünglichen Zahl am kleinsten?
- (b) Gib ein selbst ausgedachtes Zahlenrätsel dieser Art an und löse es.

39. **Bakterienvermehrung**

Auf einem Nährboden vermehrt sich eine Anzahl von Bakterien in einem Tag um einen bestimmten Prozentsatz. Durch Erhöhung der Temperatur vergrößert sich dieser Prozentsatz am folgenden Tag um 5%. Insgesamt hat sich die Anzahl in beiden Tagen um die Hälfte erhöht. Wie groß war das ursprüngliche Wachstum?

40. **Gehgeschwindigkeit**

Ein Rollband, wie man es z.B. auf dem Weg vom Bahnhof zur EXPO sehen konnte, sei 100 m lang und bewege sich mit einem Meter pro Sekunde.

Jemand geht innerhalb von 2 Minuten gleichmäßig einmal hin und einmal zurück. Bestimme die reine Gehgeschwindigkeit.

Wie groß wäre die Gehgeschwindigkeit, wenn man zwei Stunden (oder zwei Tage) bräuchte?



41. **Bremsweg**

Welchen Weg braucht ein Auto, um zu bremsen? Das hängt einmal von der Geschwindigkeit ab, dann von der Straßenbeschaffenheit, Reifen und einigem mehr. Außerdem muss der Fahrer erst einmal reagieren und auf die Bremse treten, bis der Bremsweg beginnen kann. Zum Schätzen des Bremsweges gibt es eine „Daumenregel“, ein Rezept, das man manchmal in der Fahrschule hört: Man teilt die Tachoanzeige durch 10 und multipliziert das Ergebnis mit sich selbst. Das Ergebnis ist der Bremsweg in Metern.



### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen

- (a) Welche Funktion beschreibt die „Daumenregel“? Zeichne den Graphen.
- (b) Mannis Vater sagt: „Wenn ich jetzt 10km pro Stunde schneller fahre, erhöht sich der Bremsweg gerade auch um 10 Meter.“ Beurteile diese Aussage.
- (c) Kannst du eine allgemeinere Aussage machen, die trotzdem wahr ist?

#### 42. Gleichungen bestimmen

Von drei verschiedenen quadratischen Gleichungen der Form  $x^2 + px + q$  ist jeweils eine besondere Eigenschaft bekannt:

- (a) Gleichung 1: Die Lösungen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.
- (b) Gleichung 2: Eine Lösung ist der Kehrwert der anderen.
- (c) Gleichung 3: Genau eine der beiden Lösungen ist 0.

Mache jeweils begründete Aussagen über die Koeffizienten  $p$  und  $q$ .

#### 43. Multiple-Choice-Test zu quadratischen Gleichungen und Funktionen

Kreuze alle richtigen Aussagen an. Je Teilaufgabe können keine bis alle Aussagen richtig sein.

- (a) Eine Gleichung der Form  $x^2 = e$  hat
  - i. keine Lösung für  $e < 0$
  - ii. keine Lösung für  $e = 0$
  - iii. zwei Lösungen für  $e > 0$
  - iv. eine einzige Lösung für  $e \neq 0$
  - v. mindestens eine Lösung
  - vi. nie die Lösung 0
- (b) Der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 4x - 1$ 
  - i. ist nach oben geöffnet
  - ii. geht durch den Ursprung
  - iii. schneidet die erste Achse zwei Mal
  - iv. ist symmetrisch zur 2. Achse
  - v. hat seinen Scheitel bei  $(11 | -6)$
  - vi. hat ein Maximum
- (c) Der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = (x - 2)^2 - 3$ 
  - i. ist eine verschobene Normalparabel
  - ii. hat seinen Scheitel bei  $(2 | -3)$
  - iii. geht durch den Punkt  $(-10 | -15)$
  - iv. geht nicht durch den Ursprung

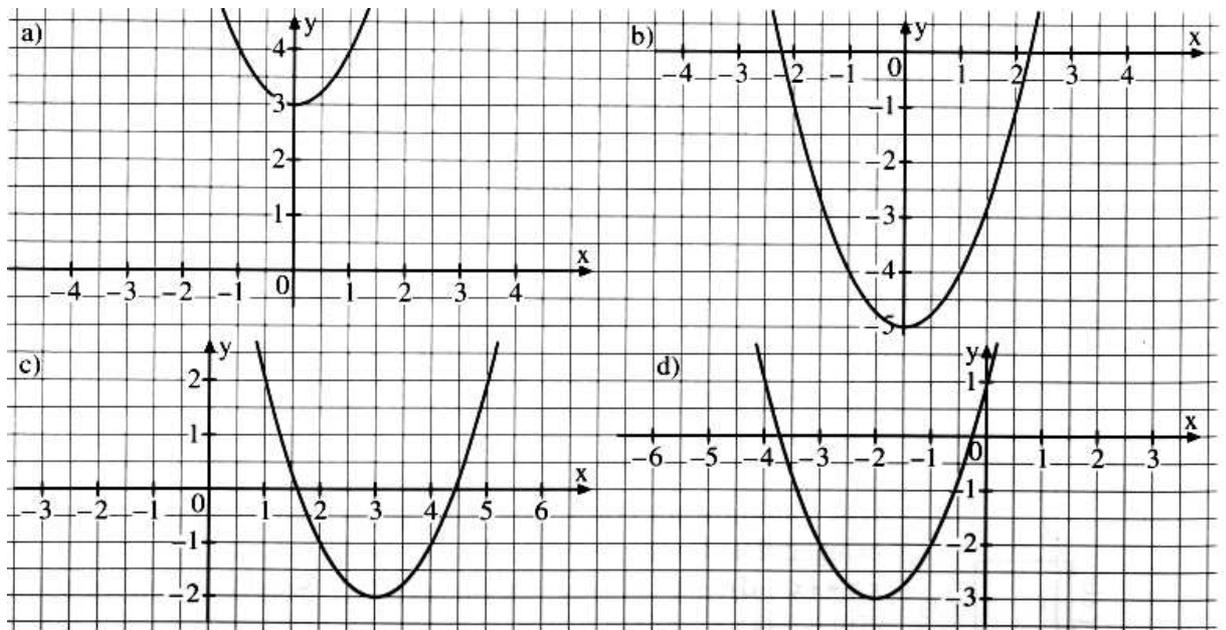
### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen

- v. ist identisch mit  $g(x) = x^2 + 4x - 1$
  - vi. hat kein Maximum
- (d) Die Nullstellen jeder quadratischen Funktion mit zwei Nullstellen
- i. sind symmetrisch zur ersten Achse
  - ii. sind symmetrisch zur zweiten Achse
  - iii. liegen vom Scheitelpunkt gleich weit entfernt
  - iv. lassen sich durch zwei Bruchzahlen angeben
  - v. lassen sich durch zwei reelle Zahlen angeben
- (e) Die verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt  $S(-2|1)$
- i. hat den Funktionsterm  $(x - 2)^2 - 1$
  - ii. hat den Funktionsterm  $(x + 2)^2 - 1$
  - iii. hat den Funktionsterm  $(x + 2)^2 + 1$
  - iv. hat den Funktionsterm  $x^2 + 4x + 5$
  - v. hat den Funktionsterm  $-x^2 + x + 5 + 3x + 2x^2$
  - vi. hat den Funktionsterm  $2x^2 + 8x + 10$
- (f) Der Scheitel einer verschobenen Normalparabel liegt auf der Parallelen zur  $y$ -Achse, die durch den Punkt  $P(3|0)$  geht. Der Punkt  $Q(7|18)$  liegt auch auf dieser Parabel. Welche der unten angegebenen Punkte liegen noch auf dieser Parabel?
- i.  $A(2|3)$
  - ii.  $B(3|2)$
  - iii.  $C(4|3)$
  - iv.  $D(7|7)$
  - v.  $F(-1|18)$
  - vi.  $G(0|0)$
- (g) Für jede quadratische Funktion  $f$  mit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  und  $a \neq 0$  gilt
- i. ihr Graph ist nach unten geöffnet für alle  $a < 1$
  - ii. ihr Graph ist nach oben geöffnet für alle  $a > 1$
  - iii. ihr Graph ist eine Parabel
  - iv. sie hat genau einen Schnittpunkt mit der 2. Achse
  - v. ihre Symmetrieachse ist eine Parallele zur 1. Achse
  - vi. sie schneidet die 2. Achse bei  $c$
- (h) Welcher Funktionsterm gehört *nicht* zu einem der untenstehenden Graphen
- i.  $x^2 - 5$
  - ii.  $(x + 2)^2 - 3$
  - iii.  $x^2 + 3$
  - iv.  $x^2 - 6x + 7$
  - v.  $x^2 - 5$

### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen

vi.  $(x - 3)^2 - 2$

vii.  $x^2 + 4x + 1$



#### 44. Quadratische Ergänzung

Löse nacheinander die folgenden Gleichungen:

(a)  $x^2 = 20, 25$

(b)  $x^2 - 729 = 0$

(c)  $52 - 13x^2 = 0$

(d)  $5(x + 3)^2 + (x - 15)^2 = 996$

(e)  $12(x - 7)^2 = 600 - 168x$

(f)  $36 = (x - 8)^2$

(g)  $16x = x^2 + 28$

(h)  $14x + x^2 = 15$

Kannst du daraus eine Strategie ableiten, wie man allgemein solche Gleichungen lösen kann?

Quelle: Herget/Jahnke/Kroll: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sek. I, Cornelsen (2001)

45. Mit Graphen zeichnen

Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen im angegebenen Definitionsbereich:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 4 & -4 \leq x \leq 6 \\ f_2(x) &= 6 - \frac{2}{5}|x - 1| & -4 \leq x \leq 6 \\ f_3(x) &= -\frac{1}{2}x + 5 & 3 \leq x \leq 5 \\ f_4(x) &= \frac{1}{2}x + 3,5 & -3 \leq x \leq -1 \\ f_5(x) &= \frac{1}{25}(4x^2 - 8x - 6) & -1,5 \leq x \leq 3,5 \\ f_6(x) &= \frac{1}{25}(8x^2 - 6x - 92) & -4 \leq x \leq 6 \\ f_7(x) &= \frac{1}{9}(14x^2 - 28x + 5) & -0,5 \leq x \leq 2,5 \end{aligned}$$

46. Spritverbrauch

Seit kurzem fährt Andrea täglich mit ihrem Motorrad „Blitz“ zur Schule. Von einem Freund hat sie erfahren, dass der Treibstoffverbrauch abhängig ist von der gefahrenen Geschwindigkeit und dass sich der Treibstoffverbrauch für ihr Motorrad im Bereich von  $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  bis  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  nach der Formel  $y = 0,0002x^2 + 0,009x + 3,4$  errechnen lässt.

- a) Zeichne einen Graphen zum Ablesen des Treibstoffverbrauchs zwischen diesen Geschwindigkeiten.
- b) Ihr Schulweg beträgt  $15,2 \text{ km}$ . Der Tank des Motorrades fasst ca.  $7 \ell$ . Wie viele Tage kommt sie mit einer Tankfüllung aus, wenn sie mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von  $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  fährt und das Motorrad nur für Hin- und Rückfahrten zur Schule und nach Hause nutzt?

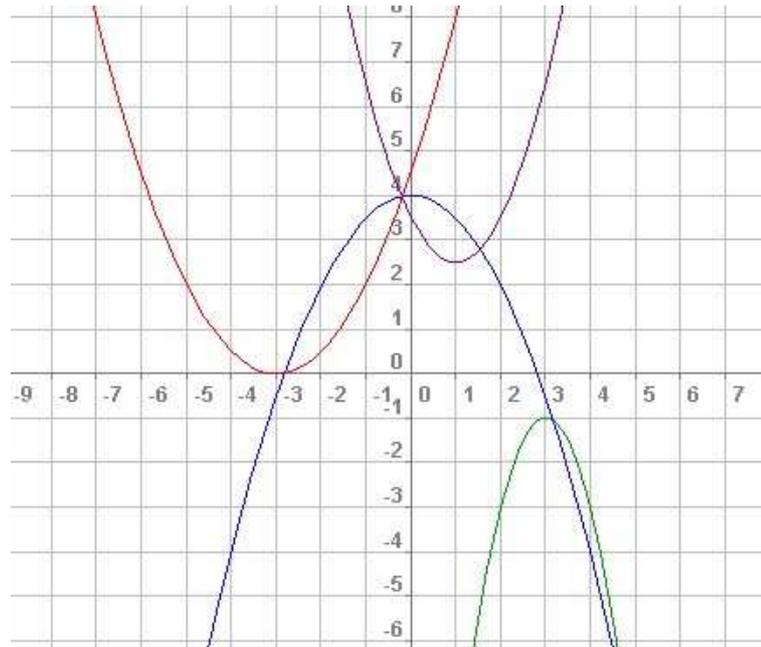
47. Quadratische Gleichungen

Bestimme die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

- a)  $(x + 7)(2x - 4) - 20 = (x - 3)^2$
- b)  $18 + 8(x - 3) - 2x(x - 1) = 2x$

48. Quadratische Funktionen

### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen

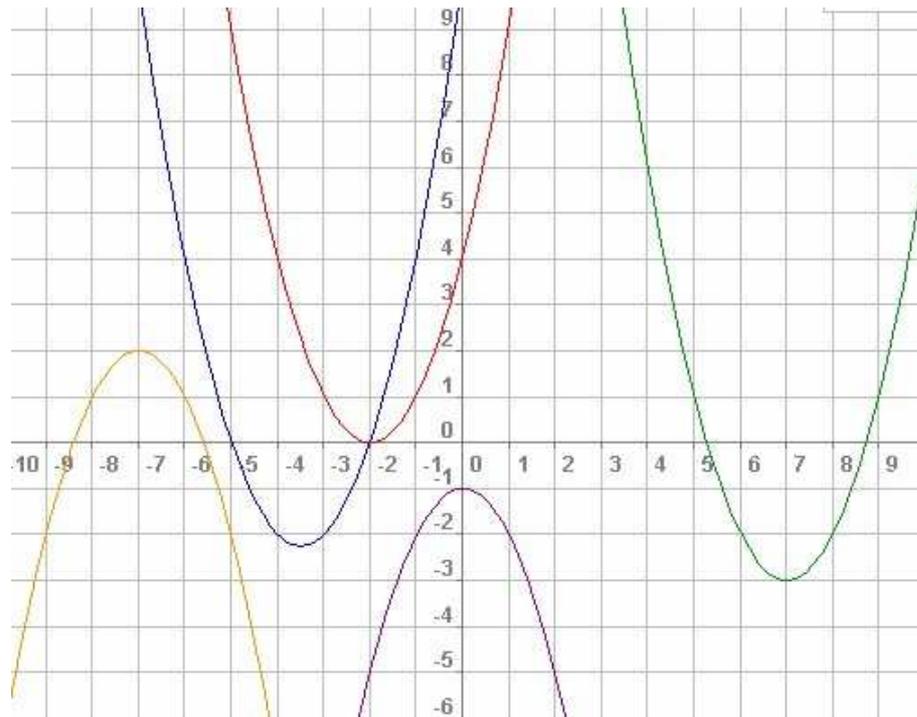


Es sind Funktionsgleichungen und Graphen quadratischer Funktionen gegeben. Welcher Graph gehört zu welcher Funktionsgleichung?

- a)  $y = (x - 1)^2 + 2,5$
- b)  $y = -0,5x^2 + 4$
- c)  $y = -2(x + 3)^2 + 1$
- d)  $y = 0,5(x + 3)^2$

49. Quadratische Funktionen

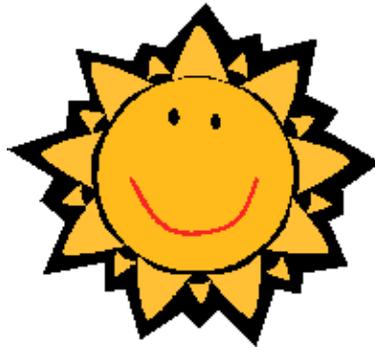
### 3 Quadratische Funktionen, quadratische Gleichungen



- Bestimme aus der Zeichnung die Koordinaten der Scheitelpunkte.
- Gib die Funktionsgleichungen der verschobenen Normalparabeln an.

# 4 Trigonometrische Funktionen

## 1. Tageslänge



Im Verlauf eines Jahres ändert sich aufgrund der geneigten Erdoberfläche die astronomische Sonnenscheindauer, d.h. die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und -untergang. In unseren Breiten ist die Sonne am 21.6. mit ca. 16,5 Stunden am längsten und am 21.12. mit ca. 8 Stunden am kürzesten zu sehen.

- (a) Wähle aus den folgenden drei allgemeinen trigonometrischen Funktionen eine aus und stelle mit ihr eine Funktionsgleichung auf, die die Tageslänge im Verlauf eines Jahres angibt ( $x$ -Achse: Anzahl der Tage /  $y$ -Achse: Tageslänge).
1.  $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$
  2.  $g(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$
  3.  $h(x) = a \cdot \tan(b \cdot (x - c)) + d$
- (b) Bestimme mithilfe der Gleichung aus Aufgabe (a) die Tageslängen am 10. Juli.
- (c) In der folgenden Tabelle siehst du exemplarisch für jeden Monat die astronomische Sonnenscheindauer für jeweils einen Tag angegeben. Überprüfe, in welchen Monaten deine Funktion besonders große bzw. besonders kleine Abweichungen von der tatsächlichen astronomischen Sonnenscheindauer hat, und versuche, deine Funktion zu optimieren.

Datum	21.01	21.02	21.03	21.04	21.05	21.06	21.07	21.09	21.10	21.11
Taglänge [h]	8,65	10,40	12,24	14,24	15,86	16,60	15,71	12,27	10,35	8,61

- (d) Wann ändert sich von einem auf den anderen Tag die Tageslänge am meisten? Versuche herauszufinden, ob sich dies astronomisch erklären lässt!

Quelle: Elemente der Mathematik 11 (2000)

## 2. Periodische Vorgänge



Der Thermostat eines Kühlschranks schaltet das Kühlaggregat ein sobald die Temperatur auf  $4^{\circ}\text{C}$  steigt. Innerhalb von 5 Minuten wird der Kühlschrank auf  $3^{\circ}\text{C}$  abgekühlt. Nach 30 Minuten ist die Temperatur wieder auf  $4^{\circ}\text{C}$  gestiegen und das Kühlaggregat springt wieder an.

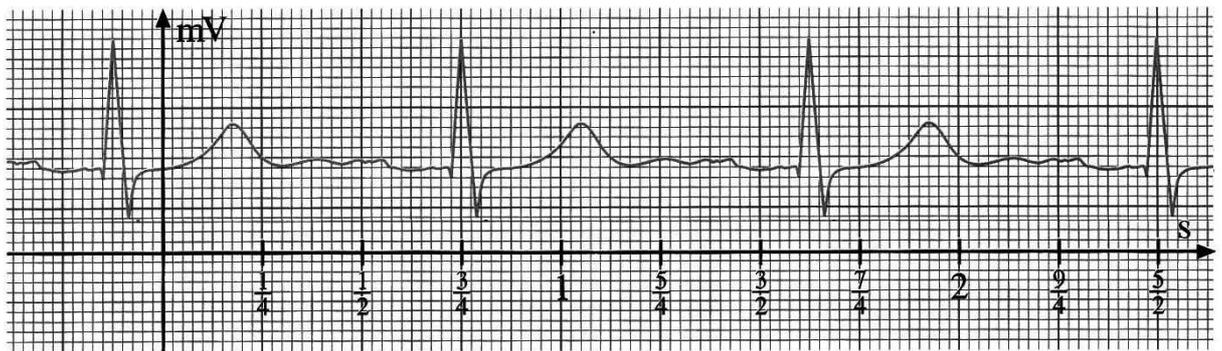
- (a) Zeichne einen möglichen Graphen der Funktion, die diesen Vorgang für einen längeren Zeitraum beschreibt.
- (b) Solch einen Vorgang nennt man einen *periodischen* Vorgang. Periodisch bedeutet dabei „in regelmäßigen Abständen wiederkehrend“. Erläutere, was damit gemeint sein kann, und entwickle eine Definition für „periodische Vorgänge“.
- (c) Untersuche die folgenden Zuordnungen und drei möglichst unterschiedliche weitere reale Beispiele deiner Wahl darauf, ob es sich um periodische Funktionen handelt. Begründe deine Entscheidung. Gib ggf. einschränkende Bedingungen und die Periodenlänge an.
  - i. Drehwinkel  $\rightarrow$  Höhe der Kabine eines Riesenrades über dem Boden
  - ii. Zeit  $\rightarrow$  Wasserstand der Fulda
  - iii. Weg  $\rightarrow$  Höhe des Ventils über der Straße am Hinterrad eines rollenden Fahrrads
- (d) Finde jeweils einen weiteren periodischen Vorgang in der Natur und in technischen Geräten und beschreibe diese Vorgänge möglichst genau mit deinen eigenen Worten.

Quelle: Jahnke et al.: Analysis (2002), Cornelsen

### 3. EKG

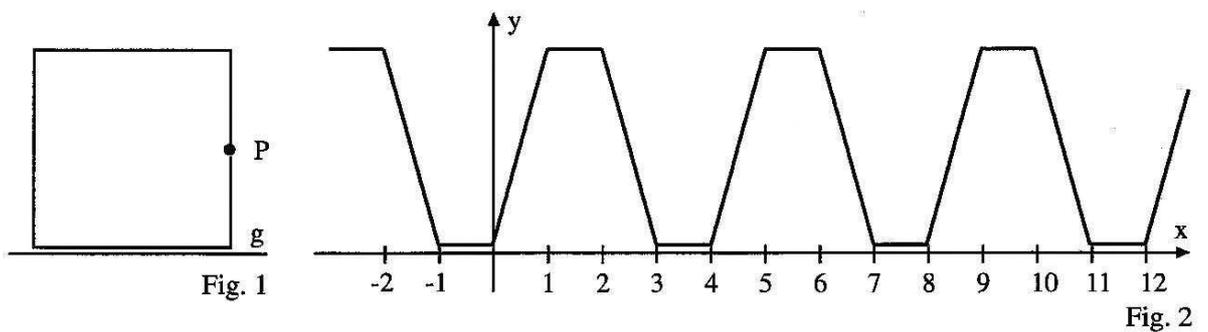
Durch die Bewegungen des Herzmuskels entstehen elektrische Spannungen (in  $mV$ ). Man misst diese und zeichnet den zeitlichen Verlauf auf. So entsteht, vereinfacht ausgedrückt, ein Elektrokardiogramm (EKG), wie unten abgebildet.

Was deutet darauf hin, dass der Patient, bei dem dieses EKG gemacht wurde, keine Probleme mit dem Herzen hat?



### 4. Rund um das Quadrat

Ein Punkt  $P$  bewegt sich mit gleich bleibender Geschwindigkeit um das Quadrat in Fig. 1 herum. Fig. 2 zeigt den Graphen der Funktion  $f: \text{Zeit} \rightarrow \text{Abstand des Punktes von der Geraden } g$ .

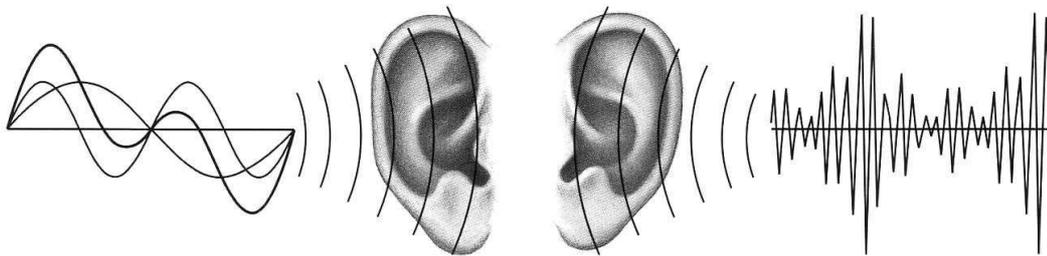


(a) Erläutere den Verlauf des Graphen in Fig. 2.

- (b) Gib eine Verschiebung an, die den Graphen auf sich abbildet.
- (c) Wie ändert sich die Periode, wenn sich der Punkt mit dreifacher Geschwindigkeit um das Quadrat herumbewegt?

### 5. Schall

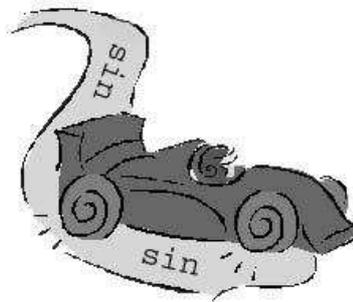
Schallschwingungen können durch Sinuskurven beschrieben werden. Bei der Überlagerung mehrerer solcher Sinuskurven entstehen teilweise sehr komplizierte Schwingungsbilder. Der Mensch hört dann keinen Zusammenhang von Tönen (linkes Ohr) mehr, sondern nur noch ein Geräusch (rechtes Ohr). Zeichne die „Geräusch-Kurven“  
 $y = \sin \alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{y} = 2 \cdot \sin \alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{y} = 3 \cdot \sin \alpha + \sin(3\alpha)$ .



### 6. Sinus und Kosinus

Wenn du dir vorstellst, auf der Sinuskurve  $f(x) = \sin \alpha$  von links nach rechts zu fahren, folgen abwechselnd Rechts- und Linkskurven aufeinander.

- (a) Skizziere die Sinuskurve und die Kosinuskurve für  $0^\circ \leq \alpha \leq 720^\circ$  und teile sie in Rechts- und Linkskurven ein.
- (b) Gib die Teilintervalle an, in denen beide Kurven Linkskurven sind.
- (c) Gib die Teilintervalle an, in denen die Sinuskurve eine Linkskurve und die Kosinuskurve eine Rechtskurve ist.



### 7. Riesenrad

Das nebenstehende Riesenrad hat einen Radius von 10 m und die Höhe des Drehpunktes beträgt 12 m.

- Durch welche Funktion wird die Höhe  $h$  der Gondel in Abhängigkeit vom Winkel beschrieben?
- Zeichne den Graphen dieser Funktion im Maßstab 1 : 500 (10 m entsprechen also 2 m). Beachte die Verschiebung in positiver  $y$ -Richtung.
- Suche ein  $30^\circ$ -Intervall, in dem sich die Höhe besonders stark ändert. Wo ist also bei gleichmäßiger Drehgeschwindigkeit die Geschwindigkeit in senkrechter Richtung am größten?



### 8. Motoren

Die Konstruktionsabteilung eines Automobilherstellers hat ein neues Modell entwickelt. Für dieses Fahrzeug lässt sich der Zusammenhang zwischen der Motorleistung  $P$  (in Watt) und der Fahrgeschwindigkeit  $v$  (in  $\frac{m}{s}$ ) durch die Vorschrift  $v \rightarrow P(v) = \frac{1}{2} \cdot v^3 + (50 \cdot \cos \alpha + 2000 \cdot \sin \alpha) \cdot v$  beschreiben, wobei  $\alpha$  den Steigungswinkel der Straße angibt.

- Wie viele Kilowatt ( $kW$ ) leistet der Motor bei  $100 \frac{km}{h}$  auf ebener Fahrbahn?
- Bei einem Versuch auf ansteigender Fahrbahn wurden eine Geschwindigkeit von  $10 \frac{m}{s}$  und eine Motorleistung von 6,2 kW gemessen. Berechne die Steigung der Fahrbahn.  
Hinweis: Ermittle zunächst  $\sin \alpha$ .



## 4 *Trigonometrische Funktionen*

# 5 Zuordnungen, Graphen

## 1. Temperaturschreiber

Aufgaben dieser Art findet man in den Lehrbüchern:

Zu bestimmten Tageszeiten notiert der Temperaturschreiber einer Schule die Temperatur auf dem Schulhof. Du liest z.B. ab: 12 Uhr  $\rightarrow$   $18^{\circ}\text{C}$ .

- Stelle anhand der Aufzeichnungen des Vortages eine Wertetabelle auf.
- Wann wurde die höchste bzw. niedrigste Temperatur gemessen und wie hoch war sie?
- Lies alle Zeitpunkte ab, an denen die Temperatur  $9^{\circ}\text{C}$  betrug.

Anregungen zur Öffnung der Aufgabe:

- Schüler erstellen selbst Temperaturkurven, z. B. zu Hause.
- Die Daten werden im Unterricht in eine geeignete Darstellung überführt (Diskussion verschiedener Darstellungsarten).
- Schüler formulieren sinnvolle Fragen zu den graphischen Darstellungen (höchste Temperatur, stärkster Temperaturanstieg).
- Graph ohne Achsenbeschriftungen vorgeben. Was könnte hier dargestellt sein?

## 2. Körpergröße

Seit dem Tag seiner Geburt hat Timos Mutter an jedem seiner Geburtstage seine Körpergröße notiert. Am 5. Geburtstag hat sie das Notieren jedoch vergessen.

Alter (in Jahren)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Körpergröße (in <i>cm</i> )	52	74	89	99	105		117	125	132	137	140

Betrachte die Zuordnung Alter  $\rightarrow$  Körpergröße (von Timo).

- Was lässt sich mit Sicherheit über Timos Größe im Alter von 5 Jahren und von 11 Jahren aussagen? Begründe deine Antwort.
- Zeige, indem du Beispiele dafür anführst, dass für die Zuordnung Alter  $\rightarrow$  Körpergröße (von Timo) nicht die Regeln für Proportionalität gelten.

Anregungen zur Öffnung dieser Aufgabe:

- Schüler erstellen einen eigenen Alters-Graphen und diskutieren über Verlauf.

- (b) Schüler formulieren selbst sinnvolle Fragen (Gibt es einen höchsten Wert? Wann ist das Wachstum am größten?).
- (c) Schüler berechnen jährliche Anstiege (um die Hälfte, um ein Viertel,...) und vergleichen.

### 3. Zylinder-Füll-Graphen

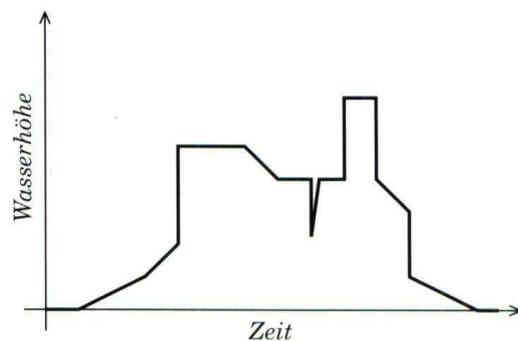
In Glaszylinder, die verschiedene Durchmesser besitzen, wird immer 1 Liter Wasser gefüllt. Für die Zuordnung Durchmesser  $\rightarrow$  Höhe gilt dann die Eigenschaft „je mehr  $\rightarrow$  desto weniger“. Ist diese Zuordnung antiproportional?

*Anleitung:* Begründe, dass bei Verdoppelung des Durchmessers sich nicht die Grundfläche verdoppelt. Begründe dann, dass beim doppelten Durchmesser das Wasser weniger als halb so hoch steht.

Anregungen zur Öffnung dieser Aufgabe:

- (a) Frage ersetzen durch: Betrachte die Zuordnung Durchmesser  $\rightarrow$  Höhe. Was fällt dir auf?
- (b) Alternative: Erstellt selbst Graphen durch Füll-Versuche.
- (c) Umkehraufgabe: Gegeben sind verschiedene Graphen, Schüler zeichnen die dazu passenden Gefäße.

### 4. Badewanne

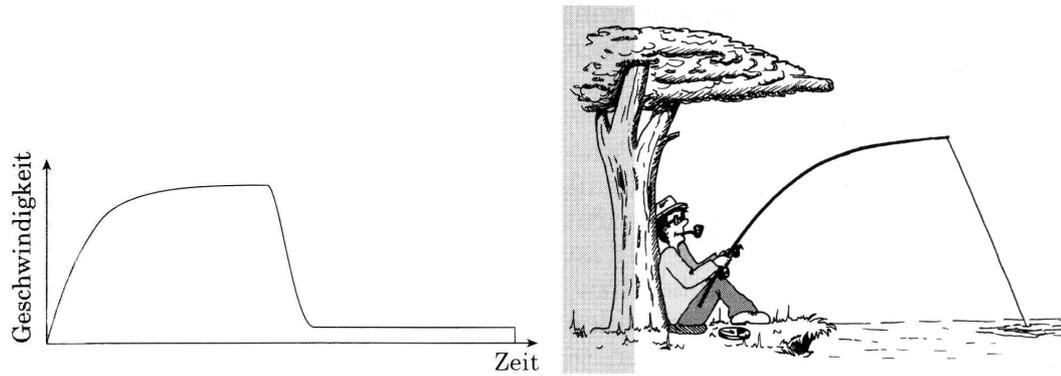


Dieser Graph beschreibt den Wasserstand in einer Badewanne. Erzähle eine Geschichte dazu.

Umkehraufgabe: Schüler erfinden eine Geschichte und stellen dann den Graph dazu auf.

### 5. Sportarten

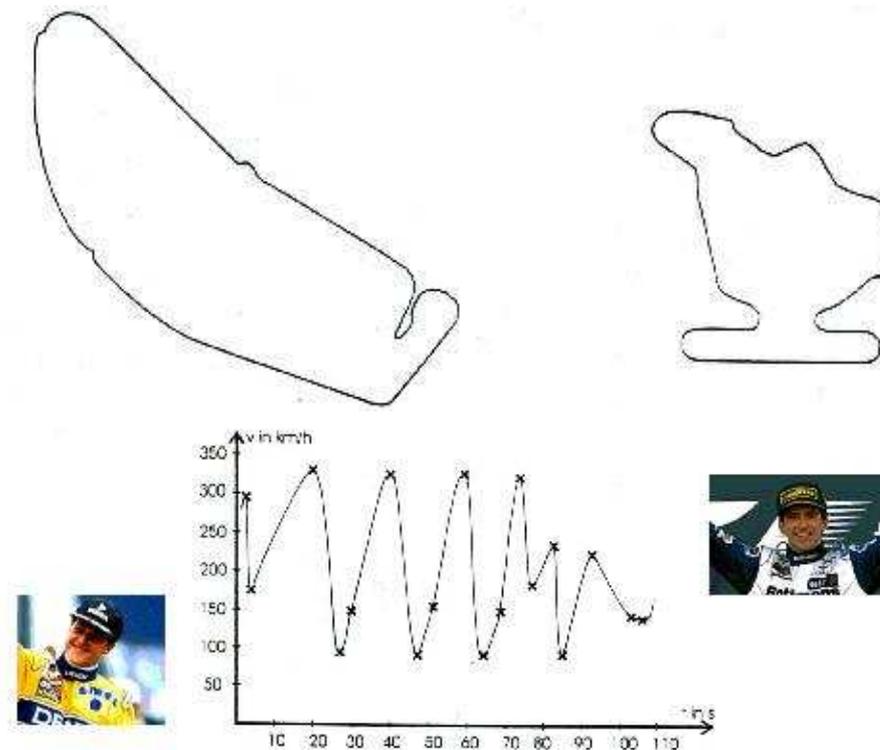
## 5 Zuordnungen, Graphen



Welche Sportart passt zu diesem Graphen?

Umkehrtaufgabe: Die Schüler erfinden eigene Geschichten und stellen den Graph dazu auf.

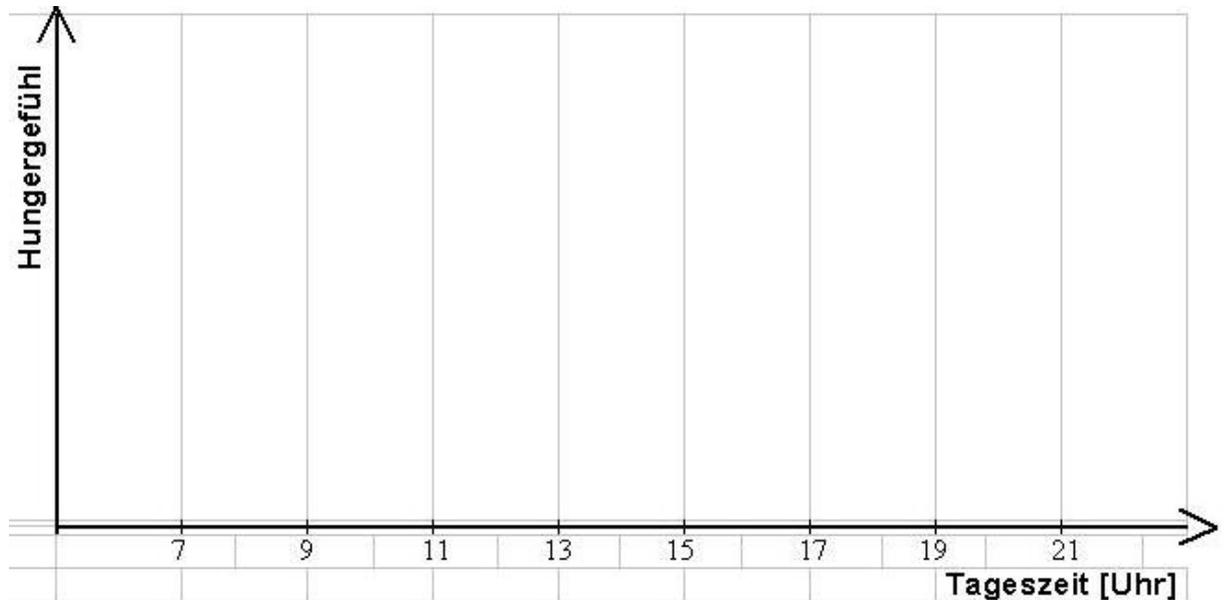
6. (a) Zu welcher Rennstrecke gehört der Graph?
- (b) Wo liegt die Start-Ziel-Linie?
- (c) Zeichne zu der anderen Rennstrecke einen Graphen!



Anregung zum Öffnen dieser Aufgabe: Beziehe weitere Sportarten deiner Wahl ein!

## 7. Hungergefühlgraph

- (a) Zeichne einen Graphen, der **dein** Hungergefühl am Vortag beschreibt.



- (b) Tausche nun deinen Graphen mit dem deines Nachbarn / deiner Nachbarin und beantworte die folgenden Fragen im Heft. Begründe deine Antworten sorgfältig.
- i. Wie viele Mahlzeiten aß sie / er während des Tages?
  - ii. Um wie viel Uhr gab es Frühstück, Mittagessen, Abendbrot?
  - iii. Ist dein Nachbar / deine Nachbarin ein SSchlingeröder ein „Genießer“?
  - iv. Von wann bis wann lag der längste Zeitraum zwischen zwei Mahlzeiten?  
Wie lang war er?
  - v. Um wie viel Uhr war das Hungergefühl am größten?
  - vi. Welche Mahlzeit war die größte? (schwierig !!)
  - vii. Hat dein Partner / deine Partnerin ein vernünftiges Essverhalten?
- (c) Wenn ihr alle Fragen beantwortet habt, tauscht ihr eure Graphen wieder zurück. Lest euch die Antworten gegenseitig vor und besprecht sie. Falls ihr dadurch Fehler in euren Graphen entdeckt, müsst ihr sie verbessern.

Quelle: Rosi Heinrich (Wiss. Einrichtung Laborschule)

Variation der Aufgabe:

Angst vor/während der Mathearbeit

## 8. Ackerfläche

Dies ist wieder eine klassische Schulbuchaufgabe:

Ein Acker mit rechteckiger Fläche ist 90 m lang und 28,5 m breit. Der Bauer möchte

## 5 Zuordnungen, Graphen

ihn mit seinem Nachbarn tauschen, der ihm einen Acker von gleichem Flächeninhalt mit 45 m [30 m; 120 m] Länge anbietet.

- (a) Bestimme die zugehörige Breite im Kopf.
- (b) Bestimme entsprechend für die Länge 135 m [150 m; 60 m] die zugehörige Breite.
- (c) Bestimme die Länge, der die Breite 38 m [51 m; 3 m] zugeordnet ist.

Anregungen zur Öffnung dieser Aufgabe:

- (a) Die Schüler finden selbst Rechtecke mit identischem Flächeninhalt.
- (b) enaktiv mit ausgeschnittenen Rechtecken arbeiten.

### 9. Sprungweiten

Tierart	Sprungweite (SW)	Körperlänge (KL)	SW/KL
Tiger	5 m	3 m	
Floh	0,6 m	3 mm	
Heuschrecke	2 m	6,5 m	
Känguru	13,5 m	1,2 m	
Springfrosch	2 m	6 cm	
Fuchs	2,8	1,2 m	
Löwe	5 m	1,90 m	
Hirsch		2,40 m	4,5
Waldmaus	0,7 m	1/8 der SW	

- (a) Ergänze die Werte in der letzten Spalte.
- (b) Um einen Überblick zu gewinnen ist es günstiger, das Verhältnis in Abhängigkeit von der Körpergröße graphisch darzustellen. Trage auf der waagrechten Achse die Körpergröße und auf der senkrechten Achse das Verhältnis ein. Was kannst du ablesen?
- (c) Welches Tier würdest du als den besten Springer bezeichnen und warum?
- (d) Wie weit könnte ein Mensch von 1,80 m Körpergröße mit dem Sprungvermögen einer Heuschrecke springen?
- (e) Gulliver ist auf die Größe einer Heuschrecke geschrumpft, hat sein Sprungvermögen aber beibehalten. Wie weit kann er springen?
- (f) Wie weit kann ein Hirsch springen?
- (g) Wie groß ist die Waldmaus?

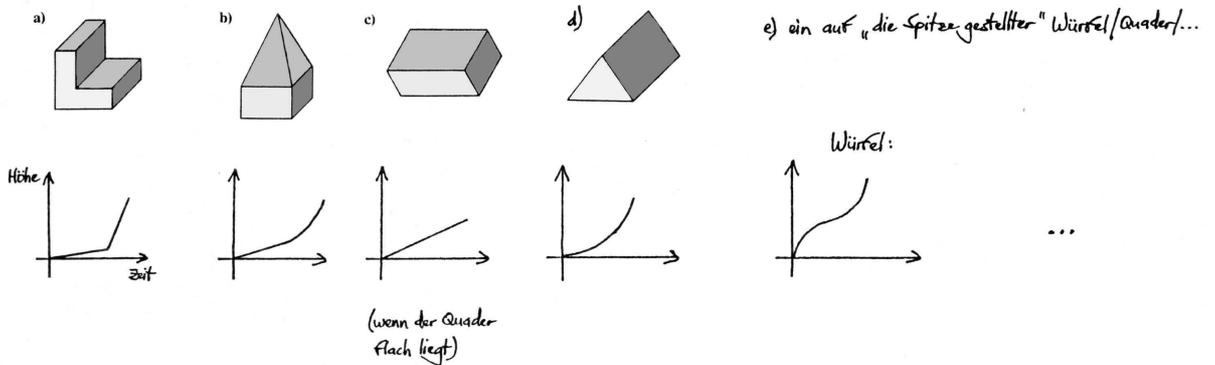
*Lösung:*

- (a) 1,5 / 200 / 31 / 11 / 33 / 2,5 / 2,5 / 4,5 / 8

- (b) Tiere mit kleinerer Körperlänge haben das bessere Sprungvermögen.
- (c) Floh (vgl.a)
- (d) 55,80 m
- (e) So weit wie als Riese.
- (f) 10,80 m
- (g) etwa 8,75 cm

10. Füll-Graphen

Gegeben sind folgende Gefäße. Finde jeweils den zugehörigen Graphen, der die Wasserhöhe beim Befüllen des Gefäßes angibt.



Umkehraufgabe: Gegeben ist ein Graph, wie könnte ein zugehöriges Gefäß aussehen?

Begründungen: Warum/wann tritt ein Knick auf usw.

11. Somatogramm

Bei Untersuchungen von Kindern in den ersten 30 Lebensmonaten wird bei jeder Untersuchung die Körpergröße eines Kindes in Bezug gesetzt zu seinem Lebensalter und mit medizinischen Richtwerten verglichen. Um die Entwicklung beurteilen zu können, werden die Werte in ein Koordinatensystem eingetragen.

In Abbildung 1 siehst du ein derartiges Koordinatensystem, in das die Wachstumskoordinaten eines Kindes als Punkte eingetragen sind. Tabelle 1 zeigt die Zuordnung „Lebensalter (Monate) → Körpergewicht“.

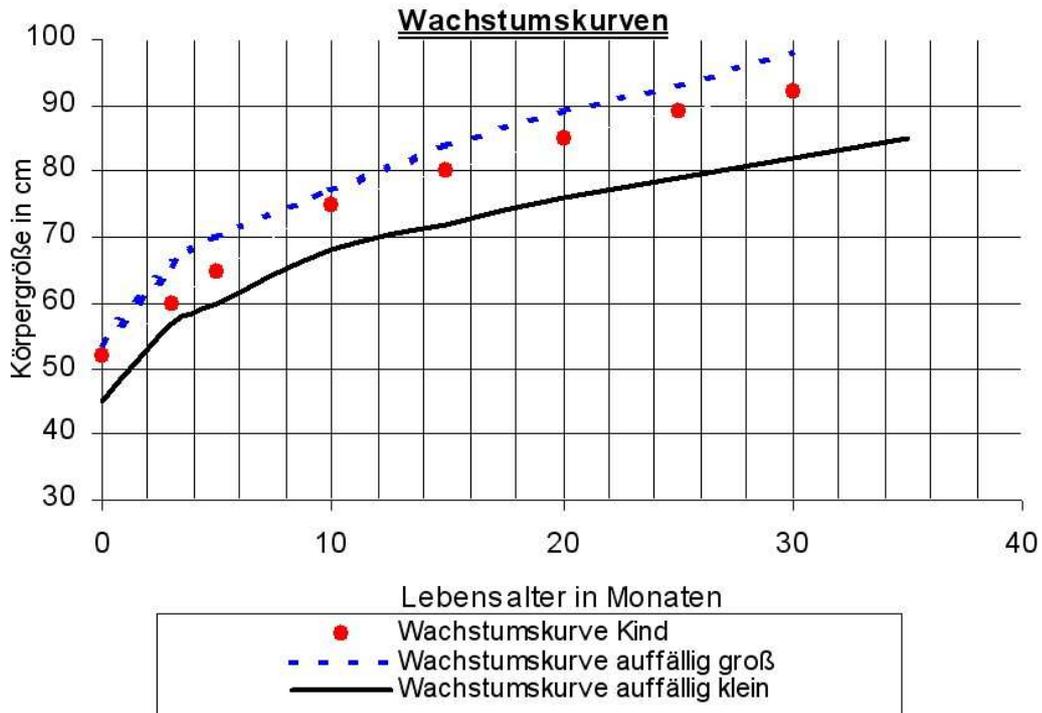


Abb. 1: Körpergröße eines Kindes in Abhängigkeit von seinem Lebensalter

Lebensalter / Monate	Körpergewicht / g
0	3 600
1	3 800
2	4 200
3	4 900
5	7 000
7	8 400
22	12 000

Tab. 1: Körpergewicht eines Kindes in Abhängigkeit von seinem Lebensalter (nach Westermann, Mathematik 7, 1988, S. 27)

- a) Fertige zu Abb. 1 eine Tabelle an.
- b) Was bedeutet es, wenn Ulrike mit 5 Monaten 80 cm groß ist ?
- c) Schätze ihre Größe mit 18 Jahren und mit 60 Jahren.
- d) Überlege, warum Kinderärzte solche Kurven anlegen.
- e) Trage die in Tab. 1 angegebenen Zahlenpaare als Punkte in ein Koordinatensystem ein. Überlege dir für die Achsen eine geeignete Einteilung.

## 5 Zuordnungen, Graphen

- f) Übertrage die Werte aus dem Untersuchungsbogen (Abb. 2) ebenfalls in Tabellen und Koordinatensysteme.

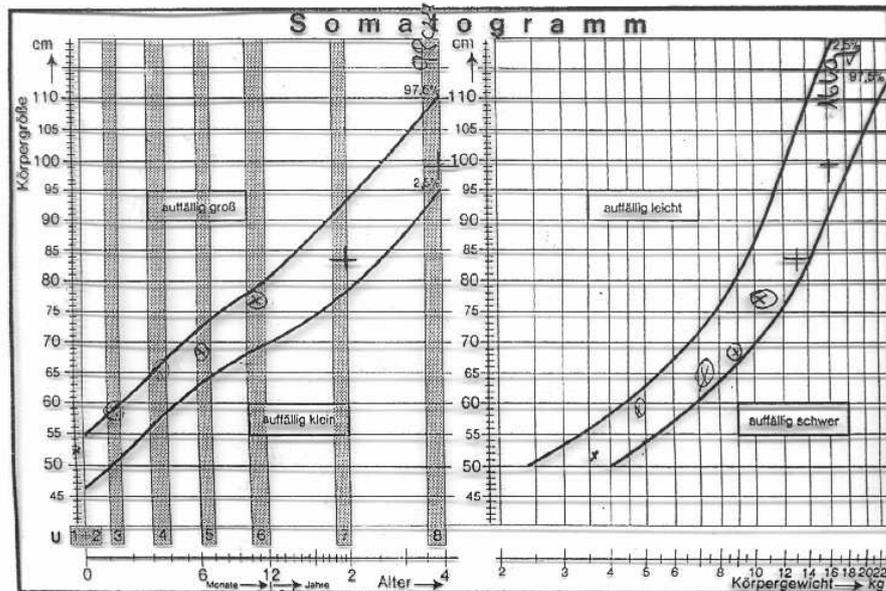
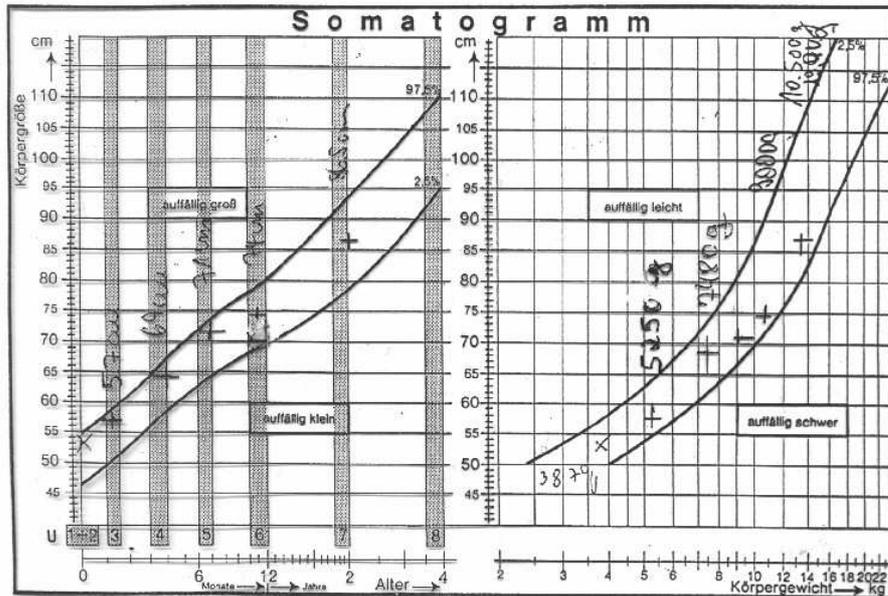


Abb. 2: Original-Somatogramme eines Kinderarztes

### 12. Anmalen

Fünf Maler streichen in sechs Tagen eine Fläche von  $1980 \text{ m}^2$ . Wie viele Arbeiter werden für eine Fläche von  $792 \text{ m}^2$  in vier Tagen benötigt?