SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Algebra (SINUS-Transfer)

herausgegeben vom

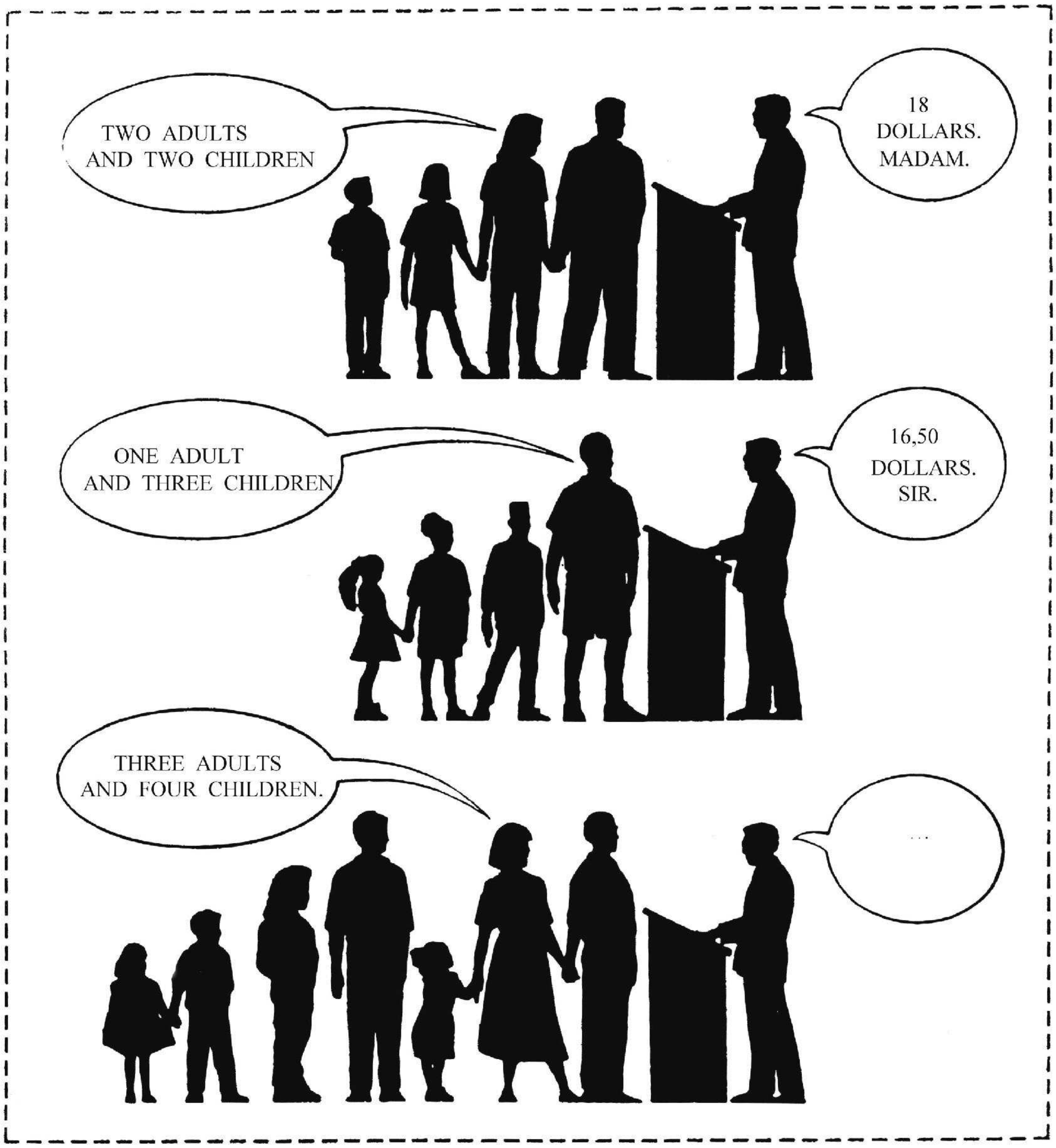
Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. Mai 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Gleichungssysteme

1. **An der Kinokasse**



An der Kinokasse irgendwo in Amerika ...

Variationen:

(a) Schüler sollen die Fragestellung selbst entwickeln

(b) Ändert den Comic so ab, dass die Informationen nicht ausreichen für eine eindeutige Bestimmung der Preise.

Lösung: Erwachsene: $\$ 5,25$
Kinder: $\$ 3,75$

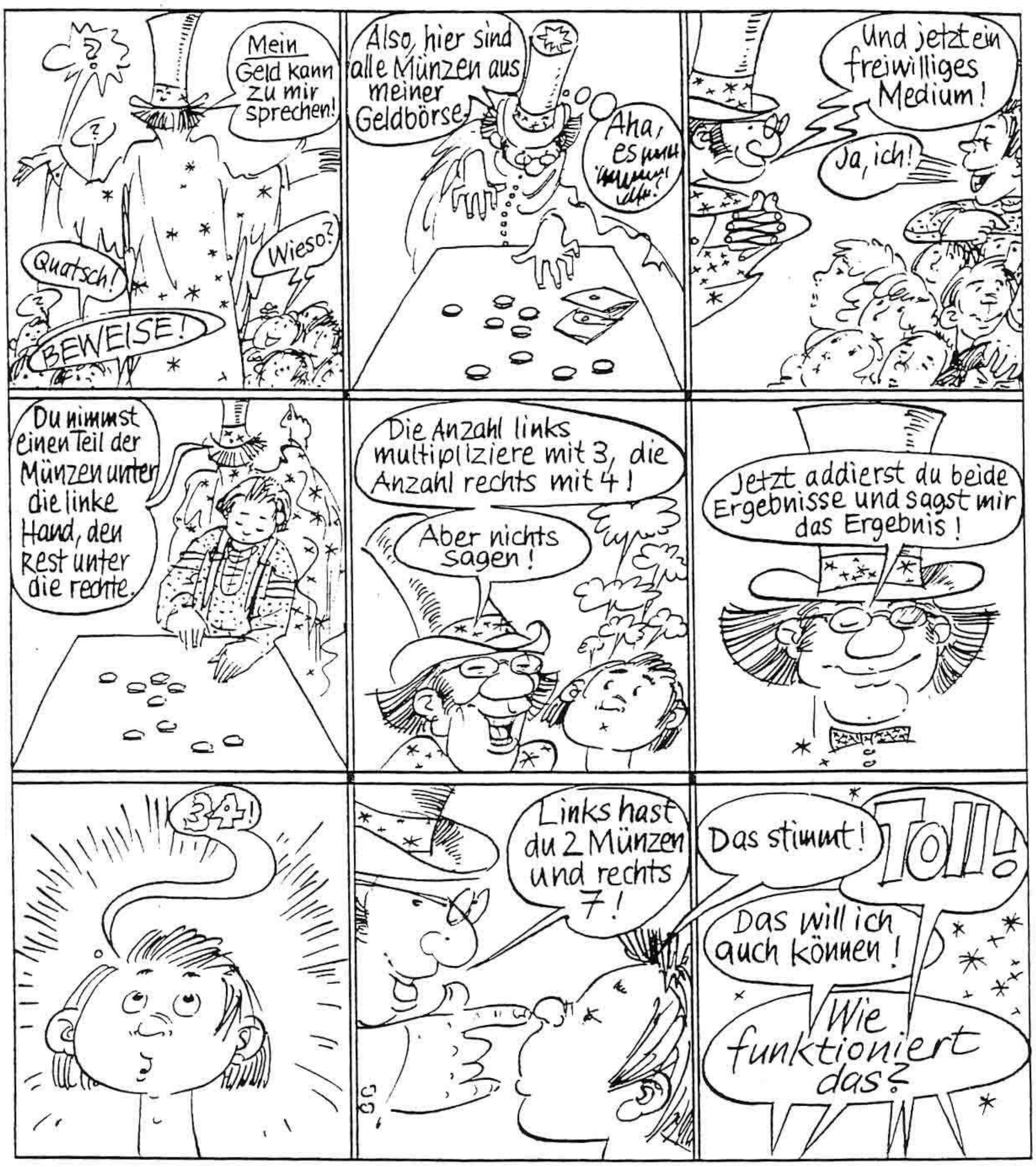
2. **In der Kneipe**

Variationen:

(a) nur erste Situation vorgeben
(b) unmögliche Zahlen vorgeben
(c) eine Sprechblase leer lassen

Lösung: Erdnüsse: $3,90$ €
Bier: $4,20$ €

3. **Magie der Münzen**



Quelle: Schröder/Wurl: Mat(h)erialien 7-10 Algebra, Schroedel 1996, S. 150

(a) Versuche herauszufinden, wie der Zaubertrick des Magiers funktioniert.

(b) Erfinde selber einen (ähnlichen) „mathematischen Zaubertrick" und teste ihn an deinem Nachbar.

Variationen der Aufgabe:

Verwenden der Original-Fragestellungen:

(a) 34 wird als Rechenergebnis genannt. Welche Gleichung gilt für $x =$ Anzahl der Münzen links und $y =$ Anzahl der Münzen rechts?

(b) Es gibt noch eine zweite Gleichung für x und y. An sie denkt der Zauberer im zweiten Bild bei einem schnellen Blick auf die Münzen. Welche ist es?

(c) Könnte der Zauberer auch mit anderen Zahlen als 3 und 4 multiplizieren lassen?

Lösung: Das Ergebnis liegt zwischen 27, falls alle Münzen in der linken Hand sind und 36, falls alle Münzen in der rechten Hand sind. Zieht man als Zauberer das genannte Ergebnis von 36 ab, so erhält man die Anzahl der Münzen in der rechten Hand. Dahinter steckt, dass sich der Zauberer irgendwann einmal die beiden linearen Gleichungen $3x + 4y = 34$ und $x + y = 9$ gedacht, für $y = 9 - x$ eingesetzt und so die Gesetzmäßigkeit erkannt hat.

4. **Wanderung im Odenwald**

Familie Müller wandert 12 km im Odenwald auf einem Rundweg und plant, da sie mit Freunden und mehreren Kindern unterwegs sind, dafür 4 Stunden ein. Sie starten nach dem Mittagessen um 14 Uhr.
Eine Stunde später tropft es bei ihrem Untermieter Herrn Muffig durch die Decke. Müllers Waschmaschine ist defekt!
Herr Muffig ist wütend und macht sich auf den Weg, um Familie Müller zu benachrichtigen. Er läuft mit einem Tempo von $5\,\frac{km}{h}$.

Variationen:

(a) Schüler entwickeln eigene Fragestellung

(b) graphische Lösung

(c) Graphen durch Gleichung beschreiben

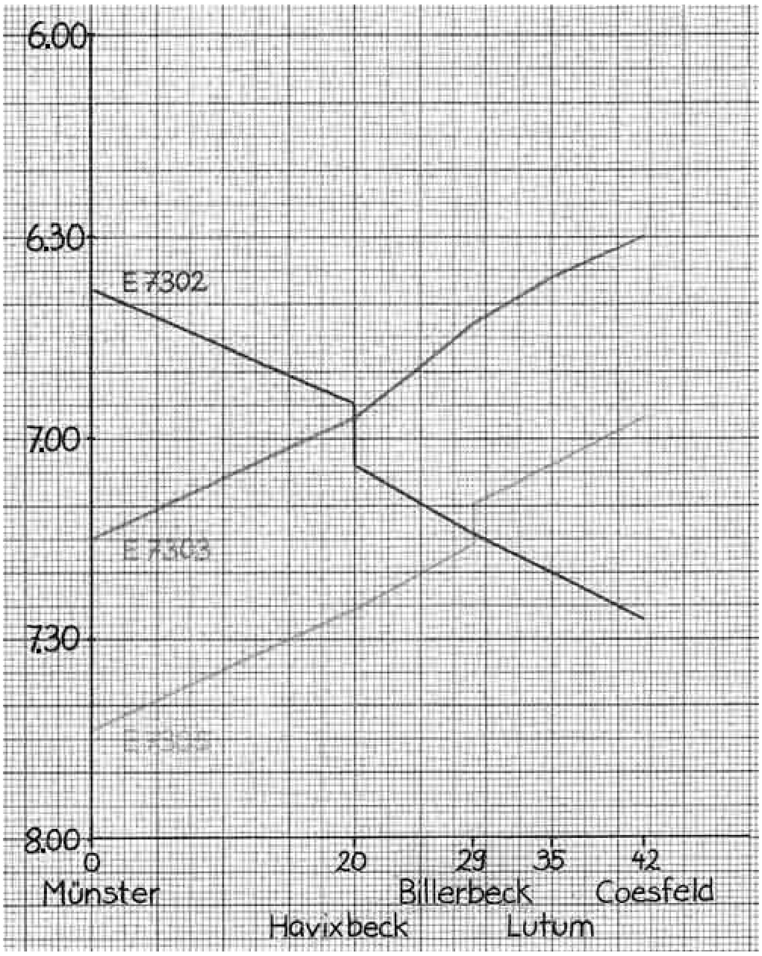
(d) Lösung mit linearem Gleichungssystem

Lösung: Wenn Herr Muffig hinter der Familie herläuft: nach $2,5$ Stunden. Er kann ihnen aber auch entgegen laufen.

5. **Fahrpläne**

Die Bewegungen der Züge im Schienennetz der Bundesbahn werden in Bildfahrplänen dargestellt (siehe nebenstehende Grafik).
Im Gegensatz zu der üblichen Darstellung mit horizontaler Zeitachse, sind hier die Strecken waagrecht und die Zeit senkrecht abgetragen.

(a) Was könnten die Vorteile eines solchen Bildfahrplans im Gegensatz zu herkömmlichen Fahrplänen sein?



Für die normalen Passagiere werden jedoch lediglich herkömliche Fahrpläne erstellt, in denen man die An- und Abfahrtszeiten eines einzelnen Zuges von bestimmten Bahnhöfen nachlesen kann. Die nächste Grafik zeigt einen Fahrplanausschnitt der Züge 8025/$E$3665/$D$319/$E$3020/8020/$D$248 für die Strecke Aachen - Düren - Köln:

440 Aachen – Düren – Köln

Paris Nord G 1							
Bruxelles Midi G 2						11.48	
Liège (Lüttich)–Guill						13.00	
Aachen Hbf	○					13.43	
BD Köln	Zug	①	8025	E 3665 ⑭	99	D 319	E 3665 ⑭
Aachen Hbf H 1. 450. 451.		⚒	13.18	**13.46**		**13.54**	
Aachen Rothe Erde			13.22	**13.50**		von Oostende	
Eilendorf			13.26				
Stolberg (Rheinl.) Hbf			13.30	**13.55**			
Eschweiler Hbf			13.34	**13.59**			14.06
Nothberg			13.37	→			
Langerwehe			13.42				14.11
Düren 443. 444. 461	○		13.49			**14.13**	14.18
Düren	3		13.51			**14.14**	14.19
Buir			13.58				
Sindorf			14.04				
Horrem 441	4 ○		14.07				14.30
Horrem	4		14.09				14.31
Groß Königsdorf			14.14				
Lövenich			14.18				
Köln-Ehrenfeld	80 3		14.24				14.40
Köln Hbf	80 8 ○	⚒	14.30			14.38	14.46
Köln Hbf 600		H	*14.40*		22	*14.51*	*14.58*
Köln Hbf	○	H	*15.01*		22	*15.09*	*15.17*
Köln-Deutz	○	⚒	14.37			14.46	14.54

440 Köln – Düren – Aachen

km	*BD Köln*	Zug	E.3020	8020 ⑰	99	D.248	8020 ⑰
0	Köln-Deutz		12.40	12.56			
	Bonn Hbf 600		*12.01*	*12.34*	23	*12.47*	
	Köln Hbf	○	*12.25*	*12.54*	23	*13.07*	
1	Köln Hbf	80 8	12.50	13.05		13.20	
5	Köln-Ehrenfeld	80 3	12.54	13.09			
11	Lövenich		von Dortmund	13.14			
15	Groß Königsdorf			13.18			
20	Horrem 441	4 ○	13.02	13.22			
	Horrem	4	13.03	13.23			
24	Sindorf			13.27			
31	Buir			13.32			13.40
40	Düren 443. 444. 461	3 ○	13.14	→		13.41	13.46
	Düren	3	13.15			13.42	13.47
50	Langerwehe		13.21				13.54
55	Nothberg						13.59
58	Eschweiler Hbf		13.27				14.02
62	Stolberg (Rheinl.) Hbf		13.31				14.06
66	Eilendorf						14.11
69	Aachen Rothe Erde		13.37				14.15
71	Aachen Hbf	○	13.41			14.01	14.19
	Aachen Hbf ■					**14.04**	
	Liège (Lüttich)–Guill	○				**14.49**	
	Bruxelles Midi G2	○				**15.56**	
	Paris Nord G1	○				**18.57**	

(b) Erstelle für vier Züge deiner Wahl einen Bildfahrplan der Strecke (Hin- oder Rückfahrt) Aachen - Düren - Köln. Bestimme die Zeitpunkte und Orte, wann und wo sich die verschiedenen Züge treffen. Wann und wo finden Überholvorgänge statt?

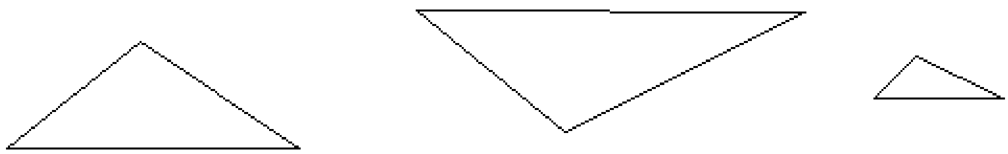
In der Realität werden Computer für die Erstellung von Fahrplänen benötigt, da eine riesige Anzahl an (linearen) Gleichungen zu lösen ist.

(c) Versuche in einem kurzen Text zu beschreiben, welche Bedeutung lineare Gleichungen bei der Erstellung von Fahrplänen haben könnten.

Quelle: Schnittpunkte 9, 1995

Lösung: (a) An den Unterbrechungen der Linien erkennt man die Haltestationen der Züge. Die verschiedenen Richtungen der Strecken lassen Rückschlüsse auf die Geschwindigkeit und die Fahrtrichtung der Züge zu. Die Überschneidungen zweier Linien markieren die Anschlussmöglichkeit von einem zum anderen Zug.

6. **Dreiecke mit verschlüsselten Maßangaben**



Acht Dreiecke verraten so viel von ihren Maßen, dass man sie konstruieren kann. Allerdings haben sie ihre Angaben ein wenig verschlüsselt. - Berechne die Maße und konstruiere dann die Dreiecke.
Übrigens: Eins der Dreiecke hat sich wohl geirrt. Mit seinen Maßen ist beim besten Willen kein Dreieck zu konstruieren. Welches Dreieck ist es?

Dreieck 1:
Die Seite c ist 8 cm lang. a und b sind zusammen 10 cm lang, b ist 3 cm größer als a.

Dreieck 2:
Die Höhe h_c und die Seite a sind gleich lang, und zwar 4 cm. Die vierfache Länge von b ist gleich der siebenfachen Länge von a.

Dreieck 3:
Es gilt: $a < b < c$. Je zwei Seiten unterscheiden sich jeweils um 3 cm oder um 6 cm. a ist halb so groß wie c.

Dreieck 4:
Der Umfang beträgt 20 cm. c ist 4 cm länger als b. Die dreifache Länge von b ist um 2 cm länger als die doppelte Länge von c.

Dreieck 5:
Die Winkel α und β sind gleich groß. Die doppelte Länge von a ist die dreifache Länge von c. Der Umfang des Dreiecks beträgt 16 cm.

Dreieck 6:
Der Winkel α beträgt 60°. Die sechsfache Länge von h_c ist die dreifache Länge von c. Die Differenz von h_c und c beträgt 4 cm.

Dreieck 7:
a und b sind zusammen 21 cm lang. Die Länge von b beträgt 75% der Länge von a. c^2 ist um 1 größer als das Vierfache von a.

Dreieck 8:
Der Umfang des Dreiecks beträgt 12 cm. Die Länge von c beträgt 80% der Länge von b. a und b zusammen sind doppelt so lang wie c.

Quelle: www.a-paulitsch.de/website/rundumsdreieck.doc

Lösung: **Dreieck 1:**
Es wird angegeben: $I : c = 8 \quad II : a + b = 10 \quad III : b = a + 3$
Lösung: $a = 3,5 \quad b = 6,5 \quad c = 8$

Dreieck 2:
Es wird angegeben: $I : \beta = 90° \, (da \; h_c = a) \quad II : a = 4 \quad III : 4b = 7a$
Lösung: $a = 4 \quad b = 7 \quad ? = 90°$

Dreieck 3:
Es wird angegeben: $I : a + 3 = b \quad II : a + 6 = c \quad III : 2a = c$
Lösung: $a = 6 \quad b = 9 \quad c = 12$

Dreieck 4:
Es wird angegeben: $I : a + b + c = 20 \quad II : c = b + 4 \quad III : 3b = 2c + 2$
Lösung: $a = -4 \quad b = 10 \quad c = 14$
Dieses Dreieck kann nicht konstruiert werden!

Dreieck 5:
Es wird angegeben: $I : a = b \, (da \; \alpha = \beta) \quad II : 2a = 3c \quad III : a + b + c = 16$
Lösung: $a = 6b = 6 \quad c = 4$

Dreieck 6:
Es wird angegeben: $I : \alpha = 60° \quad II : 6h_c = 3c \quad III : c - h_c = 4$
Lösung: $? = 60° \quad h_c = 4 \quad c = 8$

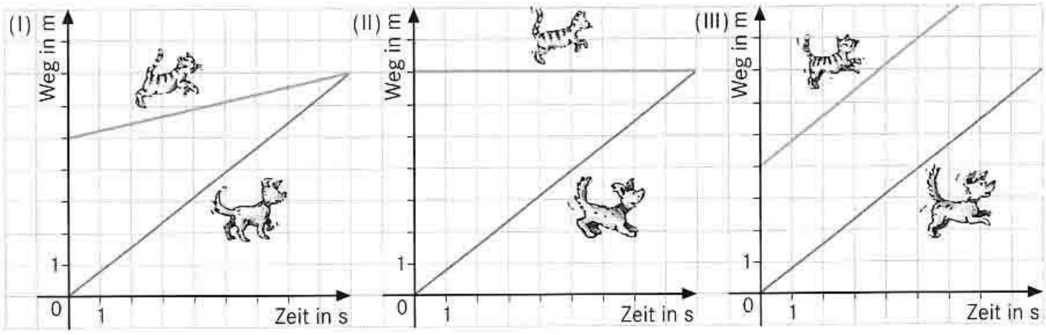
Dreieck 7:
Es wird angegeben: $I : a + b = 21 \quad II : b = 0,75a \quad III : c^2 = 4a + 1$
Lösung: $a = 12 \quad b = 9 \quad c = 7$

Dreieck 8:
Es wird angegeben: $I : a + b + c = 12 \quad II : c = 0,80b \quad III : a + b = 2c$
Lösung: $a = 3 \quad b = 5 \quad c = 4$

7. **Katz und Hund**

Die Nachbarshündin Senta jagt oft unsere Katze Minka.

(a) Erfinde sinnvolle Geschichten zu den folgenden Graphen (sie sollen Teile von Geraden darstellen):



(b) Stelle zu den drei Abbildungen passende Geradengleichungen auf.

(c) Versuche jeweils die Geschwindigkeit von der Hündin und der Katze zu bestimmen. Wo findest du diese in der jeweiligen Geradengleichung wieder?

Quelle: MatheNetz 9, Westermann

Variationen:

eigene Graphen und Geschichten finden lassen

Lösung: $(I)K : y = \frac{1}{4}x + 5$ $(II)K : y = 7$ $(III)K : y = \frac{3}{4}x + 4$
$(I)H : y = \frac{3}{4}x$ $(II)H : y = \frac{3}{4}x$ $(III)H : y = \frac{3}{4}x$

8. **Zahnbürstenmüll**

Griff behalten, Köpfe wechseln = weniger Müll?

(a) Durch die vollständige Umstellung auf Wechselkopfzahnbürsten kann viel Abfall vermieden werden. Stimmt die Angabe zur Müllreduzierung? Bitte einen vollständigen Satz notieren!

(b) Mit welchem Gewicht für eine Zahnbürste wurde gerechnet?

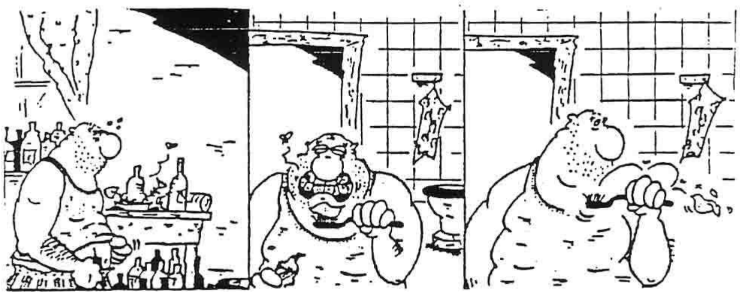
(c) Mit welchem Gewicht für einen Wechselkopf wurde gerechnet, wenn der Griff „ewig“ hält?

(d) Mit welchem Gewicht für einen Wechselkopf und für den Griff wurde gerechnet, wenn jedes Jahr ein neuer Griff fällig ist?
Tipp: Benenne 2 Variablen und stelle zwei Gleichungen auf!

(e) Was stimmt denn das Wechselkopfgewicht aus (c) oder das aus (d)? Bitte recherchieren

Wybert Lörrach elmex Forschung
Durch Wegfall der üblichen Metallverankerungen besteht der Wechselkopf aus

nur einem Material und ist damit recyclebar. Griff behalten, Köpfe wechseln = weniger Abfall.
Für die BRD, mit ca. 80 *Millionen Einwohnern, würde z.B. die vollständige Umstellung auf Wechselzahnbürsten bedeuten, dass bei einem durchschnittlichen Verbrauch von* 3 *Zahnbürsten pro Person jährlich, bei denen* 3360 *Tonnen Abfall entsteht, dieser auf* 1440 *Tonnen reduziert würde. D.h.* 192 *Tonnen weniger Abfall!*



(f) Wenn du der „Forderung der Zahnmedizin“ folgst und etwa jeden Monat den Wechselkopf wechselst, wie viel Gramm Müll sparst du dann gegenüber der monatlich ganz neuen Zahnbürste? - Nimm an, der Griff hält ein Jahr.

(g) Wie viele Tonnen wären das im Jahr für die BRD?

(h) Wechselkopfzahnbürste -„umweltfreundlich, weil abfallvermeidend und entsorgungsfreundlich“ (Diedenhof) Nimm Stellung dazu!

Diedenhofen Gesundheitspflege
Abfallvermeidend.
3 *Zahnbürsten,* 1 *Stiel - einfaches Wechseln des Bürstenkopfes.*
Alle $4-6$ *Wochen die Zahnbürste zu wechseln ist die Forderung der Zahnmedizin*

Quelle: MUED

Lösung: (a) 3360 Tonnen - 1440 Tonnen = 1920 Tonnen - Werden in der BRD Wechselköpfe statt normaler Zahnbürsten benutzt, so fallen 1920 t weniger Müll an.

(b) Beim durchschnittlichen Verbrauch von drei Zahnbürsten pro Person im Jahr ergeben sich bei 80 Millionen Einwohnern 3360 Tonnen Abfall. Pro Person: 3360 Tonnen/80 Mio. = 33360000000 g/80000000 = 42 g für 3 Zahnbürsten. Gewicht einer Zahnbürste (Griff + Kopf) = 42 g : 3 = 14 g.

(c) 3.1440 t/80 Mio. = 18 g pro Person und Jahr für 3 Wechselköpfe. Ein Wechselkopf wiegt 6 g.

(d) Werden pro Person im Jahr durchschnittlich ein Griff und drei Köpfe verbraucht, so entsteht der Müll aus (c), nämlich 18 g dafür. Sei G das Gewicht des Griffes, K das Gewicht des Kopfes dann gilt:
$(I): G+K=14$
$(II): G+3K=18$

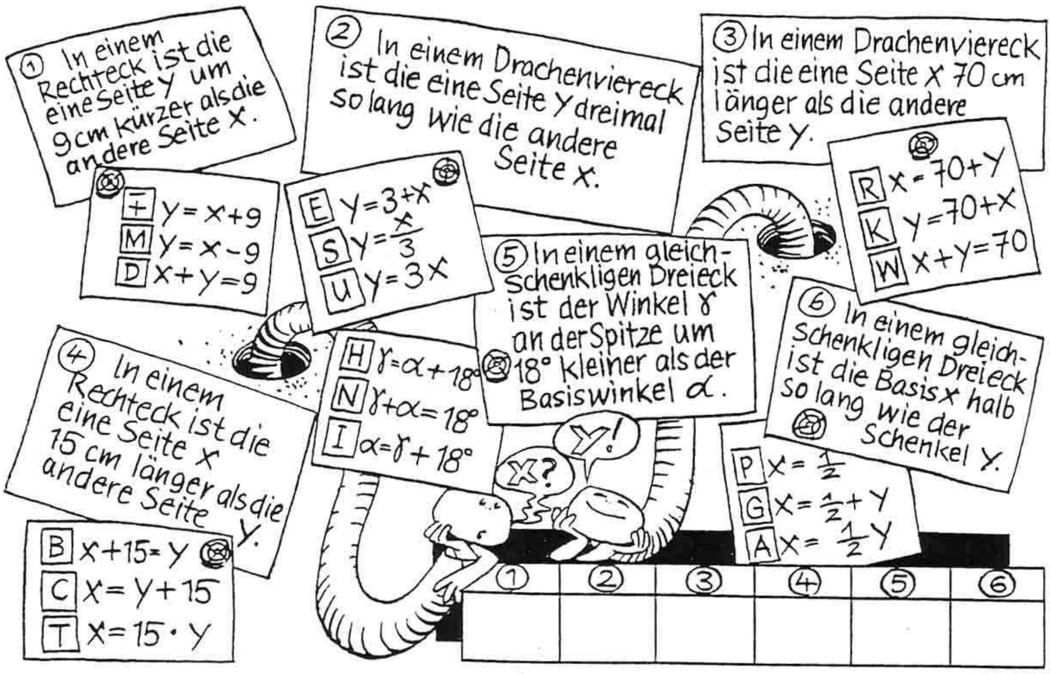
$\Rightarrow K = 2$ und $G = 12$
Der Griff wiegt 12 g. Ein Wechselkopf wiegt 2 g.

(e) Auswiegen liefert: Ein Wechselkopf wiegt 2 g. Da immer 1 Griff und 3 Wechselköpfe in einer Packung sind, ist wohl auch gemeint, dass ein Griff ein Jahr lang hält und in der Zeit 3 Wechselköpfe gebraucht werden (sollten) - also alle 4 Monate ein neuer.

(f) 12 vollständige Zahnbürsten *à* 14 g macht 168 g Müll. 1 Griff von 12 g und 12 Wechselköpfe *à* 2 g (die können auch ohne Griff gekauft werden) ergeben pro Person 36 g Müll im Jahr und somit eine Ersparnis von 132 g.

(g) Wenn alle Einwohner vollständige Zahnbürsten verwenden würden wären das 13440 Tonnen Müll für die BRD pro Jahr. Bei Wechselköpfen würde der Zahnbürstenmüllberg jedoch nur 2880 Tonnen wiegen, also 10560 Tonnen Ersparnis.

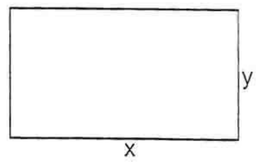
9. **Geometrie**



1. Welche Gleichung stimmt? Trage die Buchstaben ein für das Lösungswort.

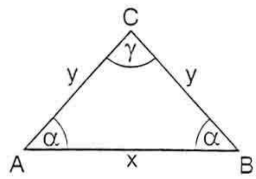
Schreibe jeweils mit zwei Gleichungen und bestimme ihre gemeinsame Lösung.

2. Der Umfang eines Rechtecks beträgt 98 cm. Die eine Seite ist 15 cm länger als die andere.



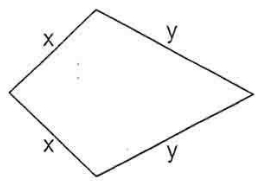
3. Der Umfang eines Rechtecks beträgt 102 cm. Die eine Seite ist 9 cm kürzer als die andere.

4. In einem gleichschenkligen Dreieck ist der Winkel γ um 18° kleiner als ein Basiswinkel. Die Winkelsumme kennst du auch.



5. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 600 cm. Die Basis ist halb so lang wie ein Schenkel.

6. Der Umfang eines Drachenvierecks beträgt 340 cm. Die eine Seite ist 70 cm länger als die andere.



7. Der Umfang eines Drachenvierecks beträgt 56 cm. Die eine Seite ist dreimal so lang wie die andere.

Quelle: Schröder/Wurf: Mat(h)erialien 7-10, Schroedel 1996, S. 152

Lösung: 1. M - U - R - C - I - A (Stadt im Südosten Spaniens, Hauptstadt der Provinz und der autonomen Region Murcia (11.317 Quadratkilometer, 1, 1 Millionen Einwohner) am Ufer des Segura.

2. $x = 17 \quad y = 32$
3. $x = 21 \quad y = 30$
4. $\alpha = 66 \quad \gamma = 48$
5. $x = 120 \quad y = 240$
6. $x = 50 \quad y = 120$
7. $x = 7 \quad y = 21$

10. **Unterwegs mit der Bahn**

Ein Interregio wird um 6 Uhr in Arbeitsstedt eingesetzt und fährt dann mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km pro Stunde über Freital nach Schlafhausen. Ein Vorortszug startet um 6 Uhr in Freital auf einem Gleis, das neben dem des Interregio verläuft. Sein Ziel ist ebenfalls Schlafhausen, seine Durchschnittsgeschwindigkeit $100\,\frac{km}{h}$. Arbeitsstedt und Freital sind $10\,\mathrm{km}(20\,\mathrm{km}, 30\,\mathrm{km}, ?)$ voneinander entfernt, Arbeitsstedt und Schlafhausen 500 km.

(a) Versuche möglichst einfach - ggf. auf verschiedenen Wegen - herauszufinden, wann der Interregio den Vorortszug einholt. Du darfst hierbei auch sinnvoll probieren.

(b) Bei welcher Entfernung zwischen Arbeitsstedt und Freital treffen sich die Züge vor (in, nach) Schlafhausen?

(c) Versucht selbst Probleme zu entwerfen und zu lösen, in denen es um die Frage geht, wann ein schnelleres Fahrzeug (oder eine schnellere Person) ein langsameres (eine langsamere) einholt bzw. sich deren Wege kreuzen(Raumschiff Enterprise; Wettlauf beim Sport; ?).

(d) Denkt euch passende Aufgaben aus, bei denen die zugehörigen Geraden im Koordinatensystem zusammenfallen oder sich nicht schneiden. Was bedeutet das jeweils für die Lösung des entsprechenden Problems? Begründe deine Vermutung.

(e) Fasst zusammen, welche Methoden ihr bislang entwickelt habt, um Probleme mit zwei Unbekannten zu lösen. Diskutiere Vor- und Nachteile.

Variation: Schüler selbst Fragestellungen finden lassen

Lösung: (a)

$$\left| \begin{array}{l} 120x = y \\ 100x - 30 = y \end{array} \right|$$

$\Rightarrow x = 1,5;\ y = 180$
(bei einer Entfernung von 30 km zwischen Arbeitsstedt und Freital)

(b) Die Züge treffen sich bei weniger (genau, mehr) als 100 km Entfernung zwischen Arbeitsstedt und Freital vor (in, nach) Schlafhausen. (individuell)

11. **Jonglieren mit den Tarifen**

Die Deutsche Telekom bietet ihren Kunden verschiedene Tarife für ihre Telefonanschlüsse an. Die unten abgebildete Tabelle zeigt die beiden Tarife der Anschlüsse T-Net und T-Net 100 in den Zeiten von 7 – 18 Uhr (Stand: März 2002).

Deutsche Telekom	T-NET (Mo.-Fr. 7 – 18 Uhr)	T-NET 100
City (Orts- und Nahbereich)	4 Cent pro Minute	3, 1 Cent pro Minute
Deutschland	12, 3 Cent pro Minute	4,6 Cent pro Minute
Monatliche Grundgebühr	13, 33€	15, 93€

(a) Wie viel muss man telefonieren, wenn sich der T-Net 100 Tarif für einen lohnen soll, vorausgesetzt man ruft nur im Citybereich (nur im Deutschlandbereich) an?

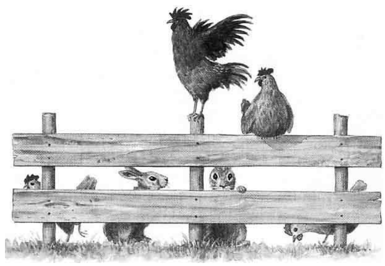
(b) Angenommen bei dir sind 80% aller Gespräche Ortsgespräche und 20% Ferngespräche innerhalb Deutschlands, ab wie viel Minuten lohnt sich dann für dich der T-Net 100 Tarif?

(c) Die Telekom wirbt mit der neben stehenden Anzeige für den neuen T-Net 100 Tarif. Nimm in einem kurzen Aufsatz (ca. 10 Zeilen) Stellung dazu!

Lösung: (a) 289 Minuten (34 Minuten)
(b) 115

12. **Hasenfüße**

In einem Stall sind Hasen und Hennen und zwar 9 Tiere mit insgesamt 24 Füßen. Wie viele Hasen und Hennen sind es jeweils?



Lösung: Es sind 6 Hennen und 6 Hasen.

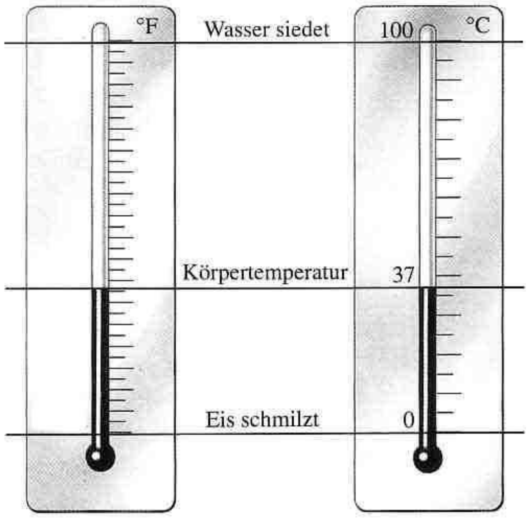
13. **Zahlenrätsel**

Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 15, die Differenz der Ziffern ist 3. Welche beiden Zahlen können das sein?

Lösung: Es kann entweder die Zahl 69 oder die Zahl 96 sein.

14. **Fahrenheit**

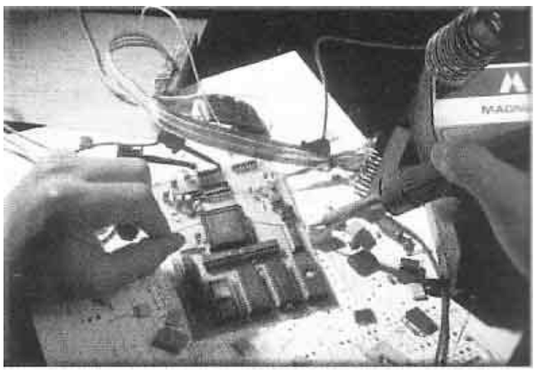
In den Vereinigten Staaten von Amerika wird die Temperatur in Grad Fahrenheit gemessen. Bei der Umrechnung von Celsius in Fahrenheit muss zu einem bestimmten Betrag jeweils ein Vielfaches der Celsius-Zahl addiert werden.
Wie lautet die Umrechnungsformel, wenn $68°F = 20°C$ und $104°F = 40°C$ ist?
Bei welcher Fahrenheittemperatur schmilzt also Eis? Trage die fehlenden Werte in die Grafik ein.



Lösung: Laut Rechnung bei > 31 Fahrenheit.

15. **Legierung**

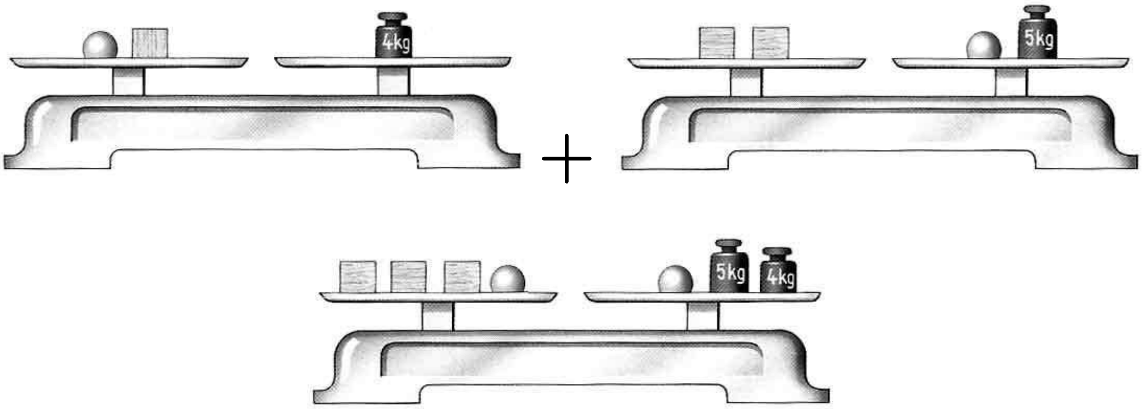
Lötzinn ist eine Legierung aus Zinn und Blei. Aus zwei Sorten mit 30% bzw. 40% Zinngehalt sollen 80 kg einer neuen Sorte Lötzinn mit 33% Zinngehalt hergestellt werden. Berechne, wie viel kg man von jeder Sorte braucht!



Lösung: Man benötigt 53,33 kg der Sorte A (30%) und 26,66 kg der Sorte B (40%)

16. **Gleichgewicht**

    Begründe anhand der unten abgebildeten Zeichnungen, warum Addieren (entsprechender Seiten) zweier Gleichungen I und II eine neue, richtige Gleichung liefert! Zeichne eine analoge Figur für die Subtraktion zweier Gleichungen und erkläre!



17. **Eulers Aufgabe**

    Aus dem Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra“ von Leonhard Euler (1707 – 1783):
    „Zwei Personen sind 29 *Rubel schuldig; nun hat zwar jeder Geld, doch nicht so viel, dass er diese gemeinschaftliche Schuld allein bezahlen könnte; drum sagt der Erste zum anderen: Gibst du mir zwei Drittel deines Geldes, so kann ich die Schuld sogleich allein bezahlen. Der andere antwortet dagegen: Gibst du mir drei Viertel deines Geldes, so kann ich die Schuld allein bezahlen.“*
    Wie viel Geld hat jeder?

Leonhard Euler

Lösung: Der eine hat $14,5$ Rubel; der andere hat $19\frac{1}{3}$ Rubel.

18. **Gleichungssysteme aufstellen**

    Bilde aus den vorgegebenen Gleichungen jeweils zwei Gleichungssysteme mit einer Lösung, mit keiner Lösung und unendlich vielen Lösungen. Zeichne.

    $y = \frac{1}{2}x + 5$ $\quad 4x - 2y - 10 = 0 \quad$ $y = \frac{1}{5}x + 3$

    $2y = x + 10 \quad$ $y = -\frac{1}{2}x + 5 \quad$ $2x - y = 0$

    $y = -2x - 5 \quad$ $2x + 4y - 20 = 0$

    $5x - 2 = y \quad$ $y = -5x + 2$

    $5y - 2 = x \quad$ $x - y - 5 = 0$

19. **Schifffahrt**

Ein Schiff fährt stromabwärts mit $23\frac{km}{h}$, stromaufwärts mit $9\frac{km}{h}$. Berechne die Eigengeschwindigkeit des Schiffes und die Fließgeschwindigkeit des Wassers?
Bemerkung: Es wird angenommen, dass das Schiff stromaufwärts und stromabwärts die gleiche Eigengeschwindigkeit hat.

Lösung: Die Flussgeschwindigkeit beträgt $7\frac{km}{h}$ und das Schiff fährt mit $16\frac{km}{h}$.

20. **Geradenschnittpunkte (1)**
Kleine Ursache - große Wirkung. Löse beide Gleichungssysteme rechnerisch.

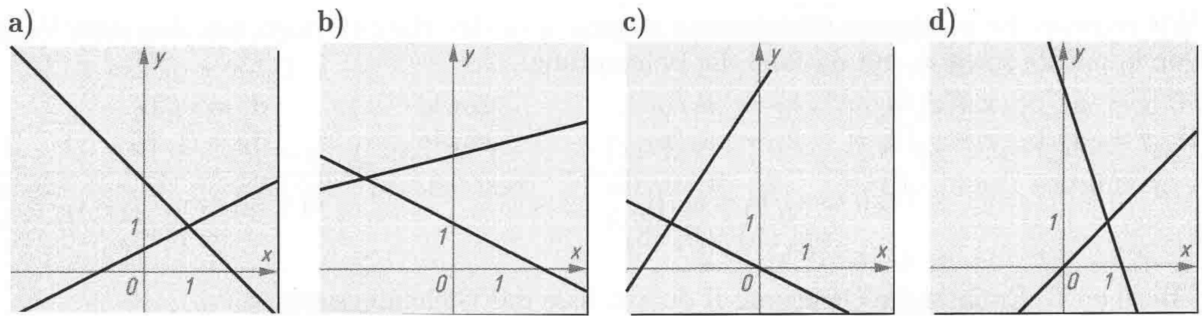
(a)
$$\left| \begin{array}{l} 123x - 124y = 61 \\ 248x - 250y = 123 \end{array} \right|$$

(b)
$$\left| \begin{array}{l} 123,01x - 124y = 61 \\ 248x - 250y = 123 \end{array} \right|$$

In welchen Quadranten liegen die Schnittpunkte? Vergleiche die Ergebnisse und versuche zu erklären!

Lösung: (a) $x = 1$ und $y = 0,5$
(b) $x = -4$ und $y = -4,46$
Die Ursache dafür liegt darin, dass die beiden Geraden fast die gleiche Steigung haben und folglich eine geringfügige Änderung der Steigung einer Geraden den Schnittpunkt beider Geraden erheblich verschiebt.

21. **Geradenschnittpunkte (2)**
Welches Gleichungssystem wird in den Grafiken jeweils graphisch gelöst?



Lösung: (a)

$$\left| \begin{array}{l} y = 0,5x + 0,5 \\ y = -x + 2 \end{array} \right|$$

(b)

$$\left| \begin{array}{l} y = 0,25x + 0,25 \\ y = -0,5x + 1 \end{array} \right|$$

(c)

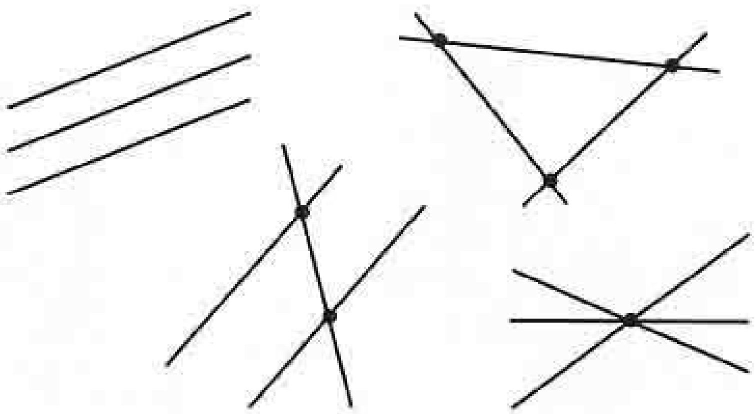
$$\left| \begin{array}{l} y = 2x + 4 \\ y = -0,5x \end{array} \right|$$

(d)

$$\left| \begin{array}{l} y = -3x + 4 \\ y = x \end{array} \right|$$

22. **Geradenschnittpunkte (3)**

Drei verschiedene Geraden können unterschiedlich viele Schnittpunkte miteinander haben. Erstelle für alle vier Fälle ein Gleichungssystem.



23. **Obst**
Das *Alte Land* ist ein wichtiges Obstanbaugebiet in Norddeutschland. Hier befindet sich eine kleine Fabrik, die aus dort angebautem Obst drei Sorten von Produkten herstellt: Obstsalat, Multivitaminsaft und Marmelade.
In der Hauptsaison sollen aus Äpfeln, Birnen und Kirschen pro Monat 100 kg Obstsalat, 500 l Saft (1 l $\cong$ 1 kg) und 200 kg Marmelade hergestellt werden. Für den Obstsalat werden zu gleichen Anteilen Äpfel, Birnen und Kirschen verwendet. Pro Liter Multivitaminsaft werden an Gewicht dreimal so viele Äpfel wie Kirschen und doppelt so viele Birnen wie Kirschen verwendet. Für die Herstellung der Marmelade kommen auf ein Kilogramm jeweils gleich viele Äpfel und Birnen.
Welche Fruchtmengen sind für die Herstellung dieser Produkte erforderlich?

Lösung: Man benötigt $383{,}33$ kg Äpfel, $300{,}33$ kg Birnen und $216{,}33$ kg Kirschen.

24. **Lösungswege**
Denk dir selbst ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen aus, das die Lösungsmenge $L = \{-2; 5\}$ hat und sich besonders gut

(a) mit dem Einsetzungsverfahren;
(b) mit dem Gleichsetzungsverfahren;
(c) mit dem Additionsverfahren

lösen lässt.

25. Lineare Gleichungssysteme
Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Gleichsetzungsverfahren.

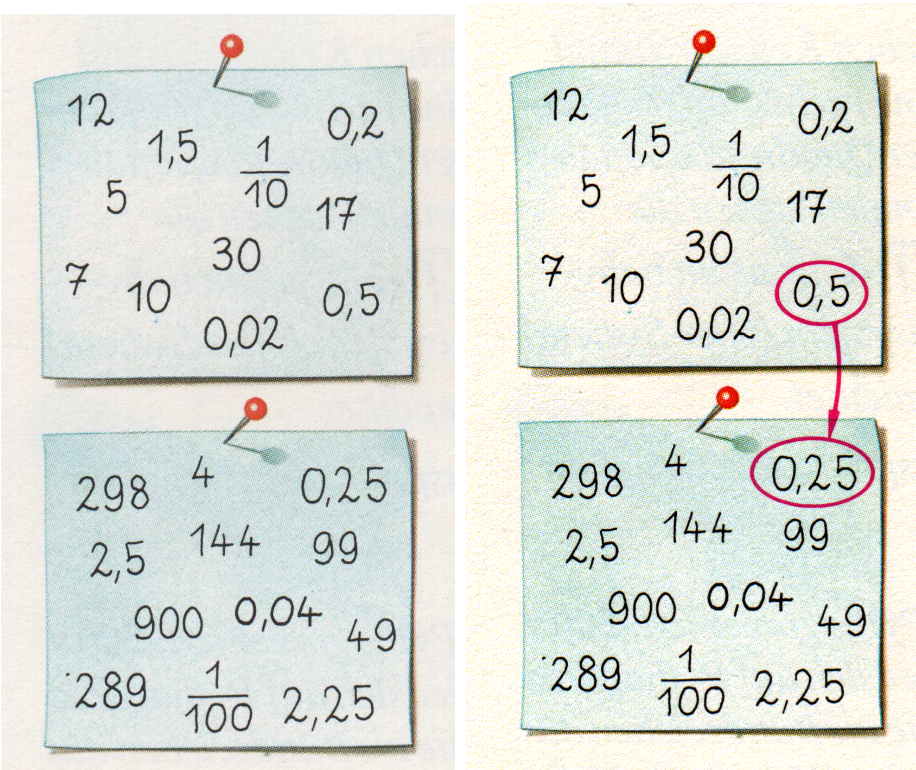
$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & 2\,(x+3)+4\,y & = & 3\,(x-2)+7 \\ \text{(II)} & 5\,x-2\,(y+3) & = & 4\,x+8\,(y-2{,}5) \end{array}$$

Lösung:

2 Wurzeln, Potenzen, reelle Zahlen

1. **Zahlenpartner**

   Wie lassen sich die Zahlen auf dem oberen und unteren Notizzettel einander sinnvoll zuordnen?



   Quelle: Schnittpunkt 9 (1995)

   Variationen:

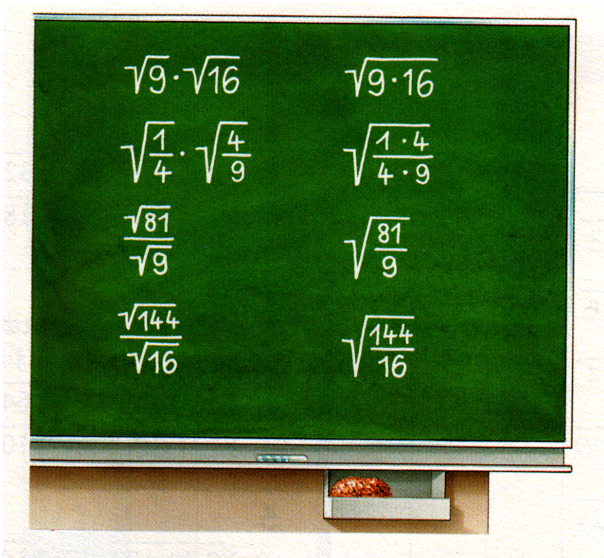
   (a) einfachere Zahlen
   (b) ein weiteres offensichtliches Beispiel einfügen
   (c) weiteren Pfeil einzeichnen
   (d) Pfeile ganz weglassen
   (e) Zahlen betrachten, die keinen Partner haben
   (f) Zuordnungstabelle

Lösung:

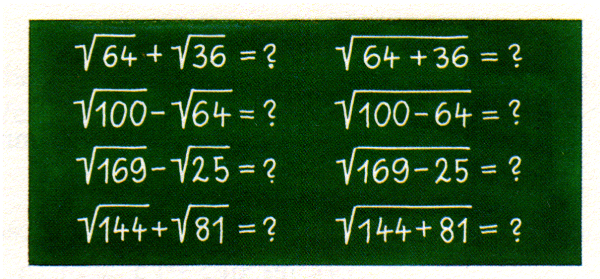
- $12 \rightarrow 144$; $0,2 \rightarrow 0,04$; $1,5 \rightarrow 2,25$; $\frac{1}{10} \rightarrow \frac{1}{100}$; $12 \rightarrow 144$; $17 \rightarrow 289$; $7 \rightarrow 49$; $30 \rightarrow 900$
- Zahlen, die keinen (rationalen) Partner haben: 298; 2, 5; 99
- Fehlende Zahlenpartner: $5 \rightarrow 25$; $0,02 \rightarrow 0,0004$; $2 \rightarrow 4$; $10 \rightarrow 100$

2. **Wurzelregeln**

   Vergleiche die Terme der linken und rechten Tafelhälfte miteinander.
   Was vermutest du?

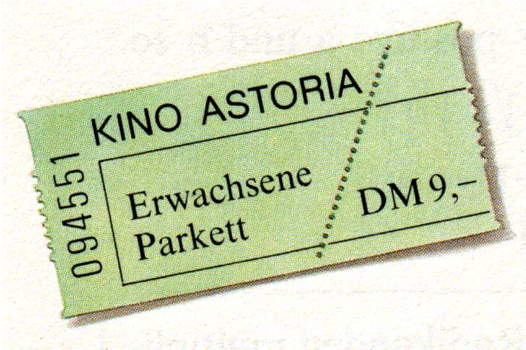


   Vergleiche die Terme der linken und rechten Tafelhälfte miteinander.
   Was vermutest du?



   Quelle: Schnittpunkt 9 (1995)

3. **Übungen zur Multiplikation und Division von Wurzeln**



Welcher Film läuft im Kino?

(a) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{126} = \square$

(b) $\sqrt{396} : \sqrt{11} = \square$

(c) $\square \cdot \sqrt{289} = 34$

(d) $\sqrt{675} : \sqrt{\square} = 15$

(e) $\sqrt{117} \cdot \sqrt{\square} = 39$

(f) $\sqrt{\square 80} : \sqrt{5} = 14$

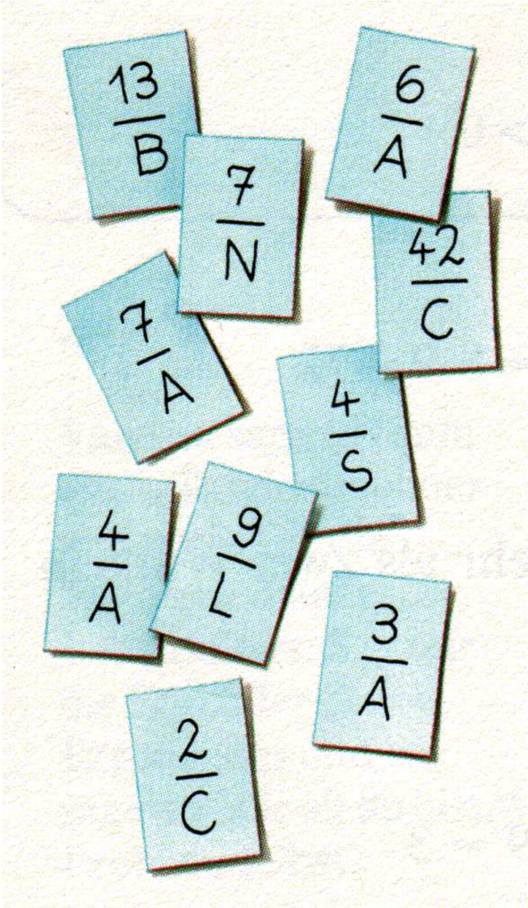
(g) $\sqrt{14\square} \cdot \sqrt{3} = 21$

(h) $\sqrt{50\square} : \sqrt{3} = 13$

(i) $\sqrt{92} \cdot \sqrt{\square 3} = 46$

(j) $\sqrt{396} : \sqrt{\square 4} = 3$

Wenn du richtig gerechnet hast, verraten es dir die Lösungsbuchstaben!



Quelle: Schnittpunkt 9 (1995)

Lösung: CASABLANCA

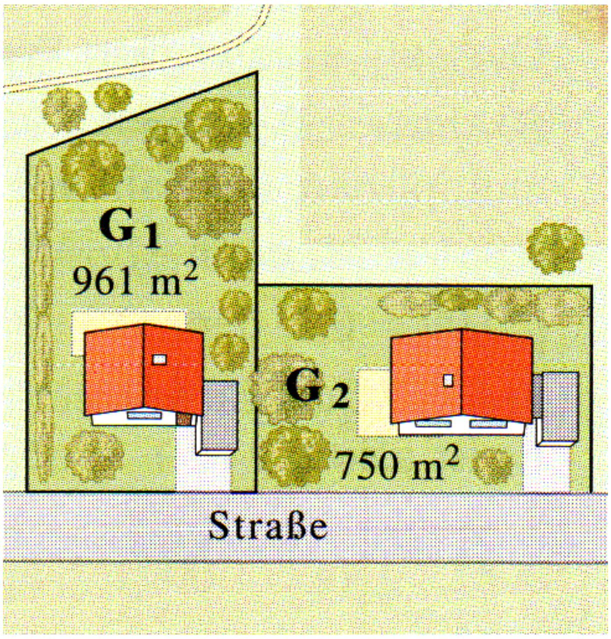
4. **Straßenreinigungsgebühr**

   Denke dir die beiden Grundstücke G_1 und G_2 aus dem nebenstehenden Beispiel jeweils in ein flächeninhaltsgleiches Quadrat mit den Seitenlängen a_1 bzw. a_2 verwandelt.

   (a) Gib die Seitenlänge a_1 an.

   (b) Zwischen welchen Werten (in vollen Metern) liegt die Seitenlänge a_2?

   (c) Gib die Seitenlänge a_2 auf volle Meter gerundet an. Ermittle dazu zunächst eine Dezimalstelle mehr.



Quelle: Elemente der Mathematik 9 (1995)

Zur Öffnung bieten sich insbesondere die folgenden Artikel aus der Lokalpresse an:

Von Gerechtigkeit keine Rede

„Straßenreinigung - ‚Wollen keine Gebühren schinden'" (18.2.)

Der erschreckende Bericht über die Stellungnahme des Herrn Bürgermeisters Gehb zu der Berechnung der Straßenreinigungsgebühren - nach der Quadratmeter-Wurzel - kann nicht unwidersprochen bleiben. Ist doch schon die Quadratwurzel unzutreffend; Grundstücke sind keine Quadrate.

Von Gerechtigkeit kann keine Rede sein. Wieso wurde eine Ungerechtigkeit beseitigt, wo 20 000 mehr und 12 000 weniger bezahlen müssen. Bei den Frontmetern seien nie die Grundstücksgrößen berücksichtigt worden. Was hat die Grundstücksgröße mit dem Dreck auf der Straße zu tun? Übersehen ist doch ihre Wichtigkeit zur Frischluftbildung. Die Quadratmeter-Wurzel bringt erneut Ungerechtigkeit. Ist es gerecht, die großen unbebauten Grundstücke für die kleinen bebauten - und von vielen bewohnt - (Dreckverursacher) zahlen zu lassen?

Das 900 Quadratmeter Grundstück als Beispiel bestätigt doch eingehend die Ungerechtigkeit. Wenn das Fehlen der Grundstücksgröße bei den Frontmetern Anlaß einer Beanstandung war, müßte diese Größe umsomehr bei Anwendung der Quadratmeterwurzel beachtet werden. Die Größe darf doch an keiner Stelle verdoppelt werden, auch nicht bei Eckgrundstücken. Selbst bei verschiedenen Reinigungsstufen der beiden Straßen muß dies entfallen. Bei dem 900 Quadratmeter Grundstück - 90.10 m - sind die Quadratmeter den Seiten entsprechend aufzuteilen 9:1 (= 0,9 x 900 = 810 Quadratmeter und 0,1 x 900 = 90 Quadratmeter) und zu verrechnen.

Die Beanstandungen von SPD, CDU und FDP sind berechtigt. Grundstücke werden nur von einer Seite erschlossen; es gibt nur einen Zugang! Diese Regelung gehört abgeschafft. Falsche Veranlagungen haben Geldschinden als Folge! 500 statt 2 500 Widersprüche sind doch kein Sturm im Wasserglas aber ein Beweis, daß viele den Widerspruch unterlassen haben. Ein Widerspruch ist längst keine Kuriosität, wenn der Einlegende weniger zu zahlen hat. Als gerecht Denkender - dem es nicht nur um das Geld geht - hält er solches für notwenig, wenn die Gerechtigkeit auf der Strecke geblieben ist.

Es sind nicht die Grundstücke, sondern die Menschen zur Zahlung heranzuziehen; diese veranlassen die Verschmutzungen. Da bei der Stadt das Geld knapp ist und noch lange bleien wird, ist die Reinigung zu privatisieren. Ein Weg wäre, die Eigentümer übernehmen die Arbeiten selbst (wie bei Streupflicht, Schneebeseitigung). Wer sie nicht ausführen kann oder will, schließt mit Firmen Verträge ab. Beträge bleiben umlagepflichtig.

Sollte die Reinigung bei der Stadt bleiben, müßten die Kosten auf alle Bürger umgelegt werden; Kinder ab Forderung auf Kindergartenplatz. Ständig Bettlägerige wären befreit! Einzug der Gebühren über die Hauswirte, wie die Telekom ihre Kabelgebühren einzieht.

Karl Liese
Mittelbing 12 A
Kassel

HNA 1.3.97

ExtraTip

ales

22 August 1999

0561 7070-0

Wurzel des Übels

Straßenreinigungsgebühr läßt Kasseler Rentner keine Ruhe

Von CHRISTIAN WOLTERS

■ KASSEL – Gleiches Recht für alle. Daran liegt dem Kasseler Rentner Karl Burghardt (78) so viel, daß er sich schon seit 13 Jahren freiwillig mit Quadratwurzeln, Hinterliegern, Eckgrundstücken und der Straßenreinigungs-Gebührensatzung herumschlägt. Noch immer sagt er: „In Kassel wird nicht jeder Grundstückseigner gleich behandelt."

Jaja, diese Satzung ist schon kompliziert. Und doch erklärt Karl Burghard gern noch einmal, wie „das mit der Straßenreinigungsgebühr" funktioniert: „Die Quadratwurzel aus der Grundstücksfläche mal Zahl der Seiten, an denen ihr Grundstück erschlossen ist. Und das mal 6,36 Mark."

Just die sogenannten mehrfach erschlossenen Grundstücke sind es, die dem streitbaren Rentner keine Ruhe lassen: „Die einen werden dreifach veranlagt, weil ein Fahrradweg ihr Grundstuck umschließt, die anderen liegen zwischen zwei Straßen und zahlen nur den einfachen Betrag." Willkur sieht der Rentner hier am Werk. Er will von Hunderten von Kasseler Grundstücken wissen, die nicht satzungsgemäß veranlagt werden.

Sein einziges Problem: aufgrund des Steuergeheimnisses erhält er keine Auskünfte seitens der Stadt. Nur die Grundstückseigner selbst konnten Auskünfte einholen und sich zu einer Klage entschließen.

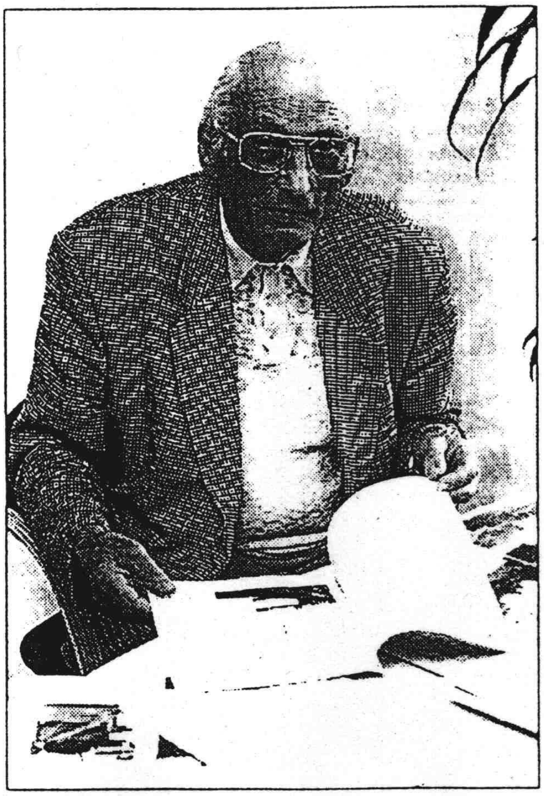
Daß nach der Beschwerdewelle 1994 kein Kasseler diese Möglichkeit wahrnimmt, hat fur Rolf Hedderich, Amtsleiter Kämmerei und Steuern bei der Stadt Kassel, einen guten Grund: „Wir wenden unsere Satzung ordnungsgemäß an", versicherte er auf Anfrage des EXTRA TIP. Bisher habe man in keinem einzigen Fall einen Veranschlagungsfehler festgestellt. „Die Bürger haben die neue Satzung akzeptiert."

Nur die Wurzel

Rentner Burghardt will Hedderich da nicht folgen: „Manche haben doch noch gar nicht begriffen, daß sie seit 1994 doppelt oder dreifach zahlen", sagt er und rät allen Kasselern: „Schauen sie sich ruhig mal ihren Festsetzungsbescheid genauer an."

Bei Kassels Kommunalpolitikern will Burghardt nun dafür sorgen, daß die ungeliebte Satzung doch noch geändert wird. „Gerecht wäre es, wenn nur noch die Quadratwurzel zur Berechnung der Gebühren herangezogen würde", sagt er. Sein Traum: „Schluß mit der Mehrfach-Veranlagung."

Amtsleiter Hedderich macht ihm allerdings wenig Hoffnung. Zur Zeit sei die Straßenreinigungssatzung kein Thema bei den politischen Entscheidungsträgern. Und obendrein Folge die Kämmerei Burghardts Vorschlagen, führte dies zu erheblichen Steuerausfällen. „Und das wird das Regierungspräsidium kaum genehmigen."



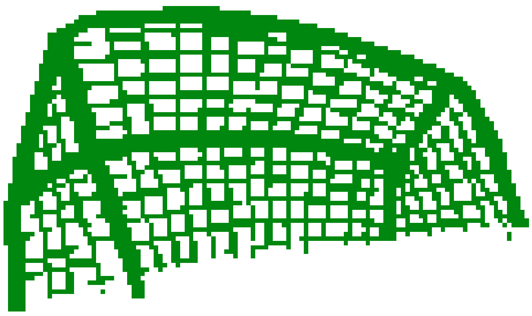
Karl Burghardt scheut keine noch so komplizierte Rechnung: Er will gerechte Gebühren.

Foto: Schachtschneider

5. **Torpfosten**

$$\sqrt{ROT} \cdot \sqrt{ORT} = TOR$$

Warum braucht das Tor keine Pfosten in Form von Betragsstrichen?



Quelle: Lambacher Schweizer 9 (1997)

6. **Vermischtes zum Thema Wurzeln**

Ziehe die Wurzeln:

(a) $\sqrt{8100}$

(b) $\sqrt{81}$

(c) $\sqrt{0,81}$

(d) $\sqrt{0,0081}$

(e) $\sqrt{\frac{25}{16}}$

(f) $\sqrt{0,000009}$

(g) $\sqrt{x^2}$ für $x = -3$

(h) $\sqrt{\frac{125}{245}}$

Quelle: mathematik lehren 70 (1995)

7. **Europa größtes Kaffeelager**

Die Krönung für Berlin: Europas größtes Kaffeelager

Rainer Hildebrands ist zufrieden, und er zeigt es auch: „Nichts steht hier verloren rum. Jedes Ding hat seinen Platz.“ Das ist mehr als erstaunlich bei bis zu 24 800 gestapelten Paletten, wovon jede 60 Kartons à zwölf Päckchen zu je einem Pfund trägt. In Europas größtem Kaffeedepot, das vor wenigen Tagen in Tempelhof offiziell eingeweiht wurde und in dem die Firma Jacobs Suchard 80 Prozent ihres braunen Geschmackstoffs bunkert, kommt nichts abhanden – noch jedes Pfund erhält elektronisch sein Plätzchen zugewiesen.

Projektleiter Hildebrands arbeitet für das Bremer Logistikunternehmen SGL, das für den Kaffeeröster dieses Lager eingerichtet hat. Sein Blick fällt auf Regal 32, Platz 47, Ebene 1 – eine angebrochene Kiste der bewährten „Krönung“. „Selbst Bestellungen über wenige Pfund werden bearbeitet. Kein Gramm entgeht der Datei.“ 16 Stunden täglich wird auf den zusammen 52 000 Quadratmetern und teilweise fünf Ebenen umgeschichtet, dauernd kommt Ware von der nur acht Kilometer entfernten Jacobs-Rösterei herein, geht für ganz Deutschland und Europa bestimmte Ware hinaus.

Maximal 5000 Paletten können pro Tag bewegt werden, „dann wird's langsam brenzlig“, erklärt Hildebrands.

1995 zieht das von der Rewe angemietete Lager nach Großbeeren am südlichen Stadtrand um. Dann wird alles noch größer, noch perfekter. Nur eines vermißt man inmitten der Trillionen gemahlener Kaffeebohnen doch schmerzlich: deren gerühmten Duft. „Wunderbar“ ist hier allein die Logistik.

k.r.

Berliner Morgenpost vom 28.6.1993

Der Verfasser behauptet im letzten Abschnitt, „Trillionen gemahlener Kaffeebohnen“ würden im Depot lagern. Schreibe einen Leserbrief.

(a) Schätze das Volumen einer Kaffeebohne ab und berechne mit diesem Wert das Volumen von einer Trillion gemahlener Kaffeebohnen.

(b) Wie könnte eine quaderförmige Lagerhalle aussehen, in der eine Trillion gemahlene Kaffeebohnen gelagert werden?

(c) Schätze ab, welche Masse eine Kaffeebohne besitzt und berechne aus den Angaben im ersten Absatz die Anzahl der Kaffeebohnen, die in dem Depot tatsächlich gelagert werden.

(d) Um welchen Faktor hat sich der Autor des Artikels verschätzt?

(e) Wie könnte der Autor des Artikels zu der Angabe „Trillionen“ gekommen sein?

Quelle: Herget/Scholz: Die etwas andere Aufgabe, S. 76

Lösung: (a) Kaffeebohne: Länge: ca. 10 mm; Breite: ca. 7 mm; Höhe: ca. 4 mm. Dies entspricht einem rechnerischen Volumen von 280 mm^3. Abschätzung durch 100 mm^3. Also gilt für das Volumen V von einer Trillion gemahlener Kaffeebohnen: $V \approx 1 Trillion 100\,\text{mm}^3 = 10^{18} \cdot 10^{-6}\,\text{km}^3 = 100\,\text{km}^3$

(b) Beispiel einer Lagerhalle: Länge = Breite = 10 km, Höhe = 1 km. Eine Halle dieses Volumens gibt es auf der Erde sicher nicht.

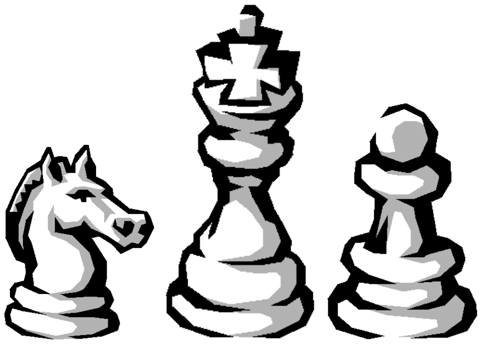
(c) Masse einer Kaffeebohne: ca. $0,1$ g. Also enthält ein Pfund (500 g) ca. 5000 Kaffeebohnen. Bei 24.800 Paletten *à* 60 Kartons *à* 12 Päckchen zu 500 g können maximal $24800 \cdot 60 \cdot 12.5000 = 8,928 \cdot 101^0 \approx 10^{11}$, also 100 Milliarden Kaffeebohnen gelagert werden.

(d) Für den Faktor f, der das Verhältnis von angeblicher Anzahl und maximaler Anzahl von Kaffeebohnen in der Lagerhalle angibt, gilt ungefähr: $f \approx \frac{10^{18}}{10^{11}} = 10^7 = 10\,Millionen.$
Im Depot lagert also nur der zehnmillionste Teil.

(e) Der Verfasser wollte wohl ausdrucken, dass eine sehr große (unvorstellbar große) Anzahl von Kaffeebohnen im Depot lagert, hat aber den Realitätsgehalt seiner Aussage nicht geprüft.

8. **Die indische Schachlegende**

Vor langer Zeit hatte ein weiser Brahmane in Indien das Schachspiel erfunden und es seinem König zum Geschenk gemacht. Der König war so begeistert von dem Spiel, dass er dem Brahmanen einen freien Wunsch gestattete. Dieser erbat sich für das erste Feld des Schachspiels ein Weizenkorn und für die restlichen 63 Felder jeweils doppelt so viele Körner wie auf den vorherigen. Der König, erfreut über den bescheidennen Wunsch des Weisen, ließ ihm aus einer Schüssel ein Feld nach dem anderen mit der gewünschten Anzahl Körner belegen. Bald. . .



Quelle: MUED

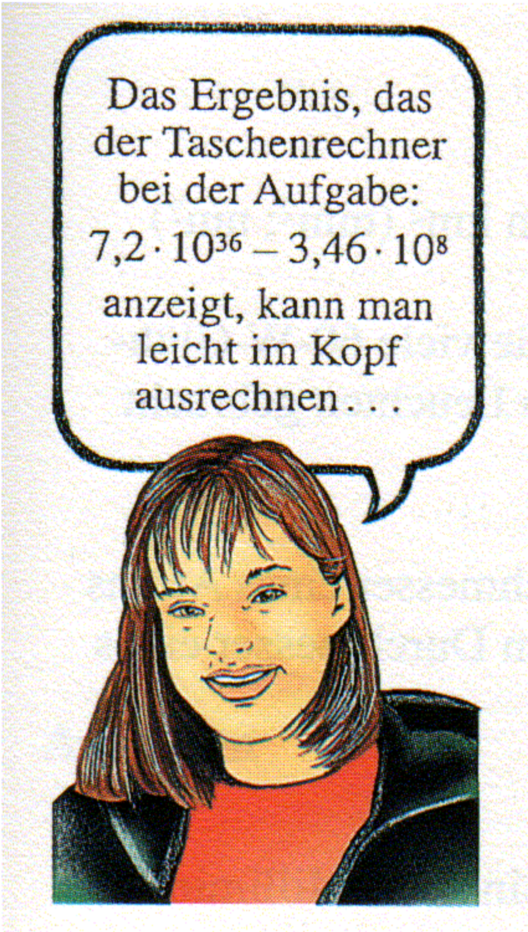
Lösung: Auf dem 64. Feld müssten $2^{63}(2^{63} = 2^3 \cdot (2^{10})^6 \approx 8\,Trillionen)$ Weizenkörner liegen. Nach Vester entspricht dies der tausendfachen Weltjahresproduktion.

9. **Lebensalter**

„Berechne mit dem Taschenrechner die 5. Potenz deines Lebensalters. Sag mir die Endziffer deines Ergebnisses und ich sage dir, wie alt du bist.“ Quelle: Schnittpunkt 9 (1995)

Lösung: Endziffer bleibt in der fünften Potenz erhalten. Allerdings muss das Jahrzehnt geschätzt werden.

10. **Taschenrechneranzeige**



Quelle: Lambacher Schweizer 10 (1997)

Lösung: Die Taschenrechneranzeige verändert sich durch die Substraktion nicht. Der Substrahend ist im Vergleich zum Minuend viel zu klein als dass der Taschenrechner dies anzeigen könnte. Welche Zahl müsste er anzeigen?
Für Fachleute: Auslöschungseffekt durch die beschränkte Mantissenlänge der TR-Gleitpunkt-Zahlensystems (meist 10 bis 13; in der Anzeige wird oft weniger dargestellt).

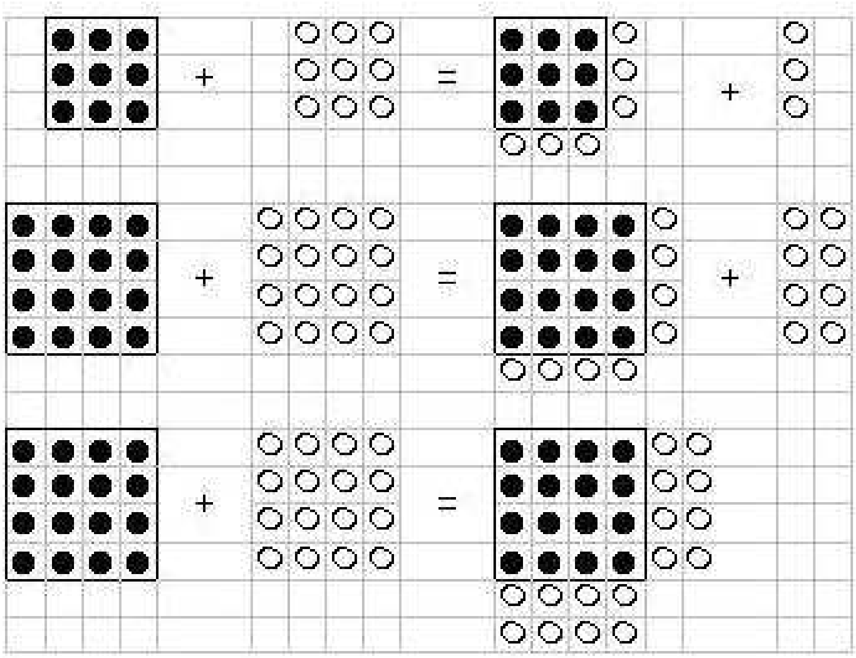
11. **Lebensalter**

„Berechne mit dem Taschenrechner die 5. Potenz deines Lebensalters. Sag mir die Endziffer deines Ergebnisses und ich sage dir, wie alt du bist.“ Quelle: Schnittpunkt 9 (1995)

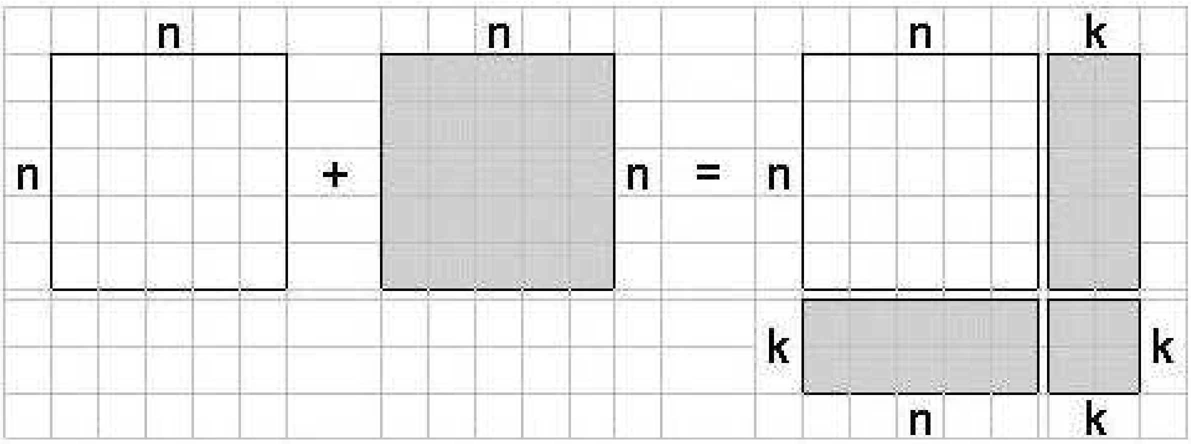
Lösung: Endziffer bleibt in der fünften Potenz erhalten. Allerdings muss das Jahrzehnt geschätzt werden.

12. **Wir suchen eine Quadratzahl, deren Doppeltes wieder eine Quadratzahl ist**

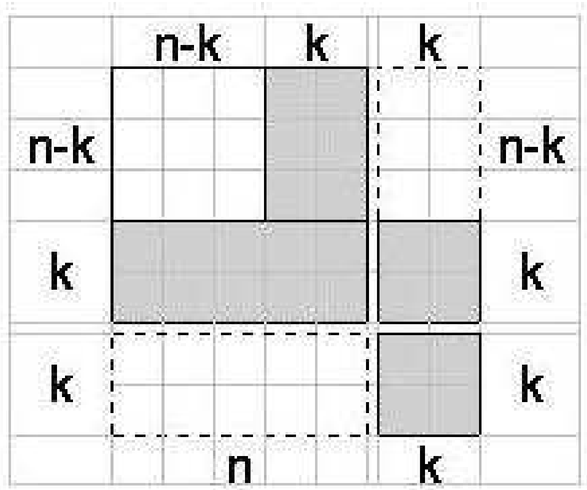
Wir gehen aus von $2 \cdot n^2 = z^2$. Demnach soll $n^2 + n^2$ eine Quadratzahl sein. Beispiele:



Für $n = 3$ und für $n = 4$ ist das Doppelte offenbar keine Quadratzahl. Für welche n klappt es? Es muss sein:



Die schraffierten Teile haben zusammen den Flächeninhalt des unschraffierten Quadrats. Hauptidee: Die schraffierten Teile werden in das unschraffierte Quadrat gelegt:



Die beiden kleinen grauen Quadrate müssen zusammen so groß sein wie das große weiße Quadrat.
Das ist aber die Ausgangssituation. Also: Wenn $2 \cdot n^2$ eine Quadratzahl ist, so ist auch $2 \cdot k^2$ eine Quadratzahl mit $k < n$.
Daher ist $2 \cdot n^2$ für kein n eine Quadratzahl. Hier lässt sich die Irrationalität von $\sqrt{2}$ anschließen.

Quelle: Jahnke, T. in JMD (1983), S. 163-170

13. **Konstruktion irrationaler Zahlen**

Konstruiere eine Zahl, die nicht abbricht und nicht periodisch ist.

Lösung:
- $1,112123123412345123456\ldots$
- $1,101001000100010000010000001\ldots$

14. **Intervallschachtelung mit Telefonnummern**

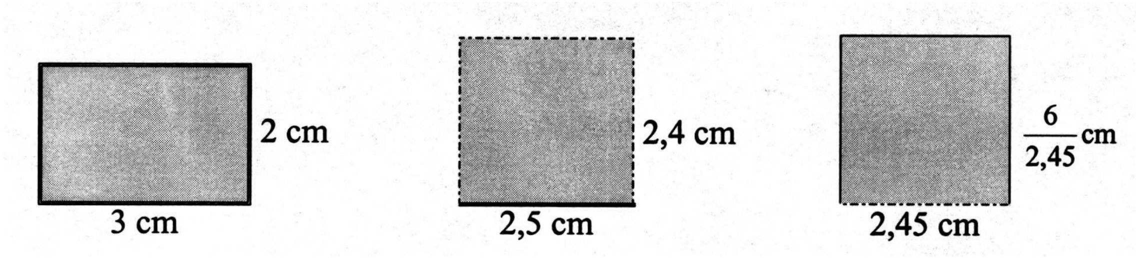
Wie kann die (sechsstellige) Telefonnummer von Sabine 'erraten' werden, wenn Sabine nur mit 'Höher' oder 'Niedriger' antwortet?

Variationen:

(a) Tel-Nr. eines Schülers verwenden

(b) Wie oft muss man bei einer sechsstelligen Zahl höchstens nachfragen? Antwort: Zwanzig Mal

15. **Heron-Algorithmus**



Bestimme die Seitenlängen des nächsten Rechtecks in der Reihe.
Was fällt dir auf?

Quelle: Lambacher Schweizer (1997)

3 Prozentrechnung

1. **Verkehrsmittel**

   Folgende Statistik ist bei der Befragung der Schüler der Albert-Schweitzer-Schule entstanden. Dabei wurden die Schüler gefragt, mit welchem Verkehrsmittel sie in der Regel zur Schule fahren.

Bus	Fahrrad	Mofa	Zu Fuß
130	169169	5252	299299

   (a) Wie viele Schüler nahmen an der Befragung teil?

   (b) Wie viel Prozent fahren mit dem Fahrrad, Bus . . . ?

   (c) Stelle die Daten in einem Diagramm dar.

   Anregung zum Öffnen dieser Aufgabe:

   Die Schüler führen selbst Befragungen durch (z. B. Lieblingsmusikgruppe).

2. **Fischbestand**

Walart	Blauwal	Finnwal	Zwergwal	Glattwal	Seiwal	Buckelwal	Pottwal
Heutiger Bestand	5000	45000	760000	4000	55000	19000	510000
% des urspr. Best.	2%	8%	88%	4%	21%	23%	81%

   Rekonstruiere anhand der gegebenen Angaben für jeden Wal den ursprünglichen Bestand.

   Anregungen zur Öffnung der Aufgabe:

   (a) Vergleiche!

   (b) Finde selbst möglichst viele sinnvolle Fragestellungen.

   (c) Arbeitsblatt zu interessanten Informationen aus dem Tierreich (Traglast, Sprungweite/-höhe, Gewicht von Neugeborenen)

   (d) Informationen über vom Aussterben bedrohte Tiere

   (e) Ab- und Zunahme als Bruch berechnen (um die Hälfte,...)

3. **Sparbuch**

   Eine Schulklasse möchte die Klassenkasse bei einer Bank auf ein Sparbuch einzahlen. Dafür informieren sie sich bei verschiedenen Geldinstituten.

   Zinssätze für Spareinlagen

   - Gesetzliche Kündigungsfrist: $2,0\%$
   - Vereinbarte Kündigungsfrist von 1 Jahr: $3,0\%$
   - Vereinbarte Kündigungsfrist von $2,5$ Jahren: $3,5\%$
   - Vereinbarte Kündigungsfrist von 4 Jahren: $4,0\%$
   - Führerscheinsparen mit 6% Bonus: $2,0\%$
   - Zuwachssparen: 1.Jahr 4%, 2. Jahr 5%, 3.Jahr $5,5\%$, 4. Jahr 6%, 5.Jahr 7%

   (a) Welche Informationen kann man den Daten entnehmen?

   (b) Für welche Sparform sollte sich die Klasse entscheiden?

   Anregungen zum Öffnen der Aufgabe:

   (a) Vergleich verschiedener Bankangebote, die von den Schülern eingeholt wurden.

   (b) Vergleich vorgegebener Bankangebote: 4% Zinsen pro Jahr bei Bankhaus Kies, bei Spk. Schotter 1% Zinsen im ersten und 7% Zinsen im zweiten Jahr.

4. **Teppiche**

   Millionenschwere kostbare echte Teppiche mit radikalen Preisreduzierungen bis zu 72%

   - Persien-Maschad, 300×400 cm, bisher €6.280, –
     jetzt extrem reduziert auf €1.880, –
   - Persien-Keschan, 352×246 cm, bisher €6.580, –
     jetzt extrem reduziert auf €1.950, –
   - Persian-Nain, 250×350 cm, bisher €9.850, –
     jetzt extrem reduziert auf €2.950, –
   - Persien-Moud, 201×304 cm, bisher €5.980, –
     jetzt extrem reduziert auf €1.790, –
   - Persien-Täbriz(Königsmuster), 290×212 cm, bisher €9.800, –
     jetzt extrem reduziert auf €2.940, –
   - Persien-Sarough, 219×138 cm, bisher €4.850, –
     jetzt extrem reduziert auf €1.450, –

Aufgaben:

(a) Berechne jeweils die prozentuale Ersparnis auf zwei Nachkommastellen genau.

(b) Gibt es zur Lösung des Aufgabenteils (a) mehrere Möglichkeiten?

(c) Äußere dich zur Richtigkeit des Prospekttextes.

Anregung zur weiteren Öffnung:

Nur Aufg. (c) stellen oder nur Prospekt aushändigen.

Lösung: (a) $70,06; 70,35; 70,05; 70,07; 70; 70,10$; (Angaben jeweils in %, gerundet auf 2 Stellen nach dem Komma genau)

(b) z.B.: 1. $6280\,€ \times \frac{p}{100} = 1880\,€ \ldots p = 29,94$ also Preissenkung um etwa $70,06\%$ 2. $6280\,€ - 1880\,€ = 4400\,€ \ldots 6280\,€ \times \frac{p}{100} = 4400\,€ \ldots p = 70,06$

(c) Der Text wirbt mit falschen Versprechungen (vgl. Aufgabenteil (a)).

5. **Möbel**

50% ... 30%			
Schlafsofa, schwarz	statt 858, – nur 599, –	Beistelltisch, blau	statt 259, – nur 159, –
Kommode, schwarz	statt 375, – nur 298, –	Sessel, Bu./schwarz	statt 498, – nur 298, –
Wohnwand, Erle	statt 823, – nur 599, –	Sessel, Buche/blau	statt 498, – nur 298, –
Couchtisch, Kiefer	statt 299, – nur 199, –	Fernsehsessel	statt 998, – nur 798, –
Couchtisch, Kiefer	statt 298, – nur 198, –	Falttürenschrank	statt 898, – nur 598, –
Schreibtisch	statt 199, – nur 129, –	Kleiderschrank	statt 998, – nur 698, –
Stuhl, schwarz/blau	statt 249, – nur 198, –	Kleiderschrank	statt 798, – nur 598, –
Schreibtisch, Kiefer	statt 633, – nur 498, –	Kleiderschrank	statt 898, – nur 598, –
Bürosessel, blau	statt 229, – nur 189, –	Einzelbett,90x200cm	statt 279, – nur 198, –
Regal, Astkiefer	statt 139, – nur 99, –	Bett, Kiefer massiv	statt 259, – nur 179, –
Regal, Astkiefer	statt 129, – nur 89, –	Schlafsofa, blau	statt 858, – nur 599, –
Büroschrank, Astk.	statt 229, – nur 179, –	Garderobe	statt 698, – nur 498, –
Bücherregal, Met/Bu	statt 199, – nur 129, –	Garderobe, Esche	statt 518, – nur 379, –
Regal, Metall/Naturl.	statt 549, – nur 398, –	TV-Eckschrank	statt 697, – nur 498, –
Tisch, Buche	statt 358, – nur 249, –	Kommode, Kiefer	statt 575, – nur 298, –
Stuhl, Buche	statt 149, – nur 98, –	Computertisch, Bu.	statt 598, – nur 399, –

Aufgaben:

(a) Was erwartest du bei einer solchen Anzeige?

(b) Überprüfe deine Erwartung, indem du nachrechnest.

(c) Äußere dich zum Wahrheitsgehalt der Anzeige.

(d) Formuliere einen Brief an die Geschäftsleitung des Möbelhauses.

Die Aufgabe lässt sich arbeitsteilig am schnellsten bearbeiten.

Lösung: (a) Man erwartet Reduzierungen um exakt 30 bzw. 50%.

(b) 30, 19; 20, 53; 27, 22; 33, 44; 33, 56; 35, 18; 20, 48; 21, 33; 17, 47; 28, 78; 31, 01; 21, 83; 35, 18; 27, 50; 30, 45; 34, 23; 38, 61; 40, 16; 40, 16; 20, 04; 33, 41; 30, 06; 25, 06; 33, 41; 29, 03; 30, 89; 30, 19; 28, 65; 26, 83; 28, 55; 48, 17; 33, 28 (Angaben jeweils in %, gerundet auf 2 Stellen nach dem Komma).

(c) Die Anzeige verspricht Falsches. Nirgends wird exakt um die angegebenen Prozentsätze reduziert. In 14 Fällen liegt die Reduzierung unter 30%, in 15 Fällen zwischen 30 und 40%, in 3 Fällen zwischen 40 und 50%. Die Maximale Reduzierung beträgt 48, 17%, die minimale 17, 47%.

(d) Die Briefe sollten die Ergebnisse des Aufgabenteils (c) beinhalten.

6. **Schnellfahrer**

Eine Meldung aus der Norderney Badezeitung:
Fuhr vor einigen Jahren noch jeder zehnte Autofahrer zu schnell, so ist es mittlerweile heute nur noch jeder fünfte. Doch auch fünf Prozent sind zu viele, und so wird weiterhin kontrolliert, und die Schnellfahrer haben zu zahlen.

Aufgabe: Nimm Stellung zu den Angaben in der Zeitungsmeldung!

7. **Sprungweiten**

Tierart	Sprungweite (SW)	Körperlänge (KL)	SW/KL
Tiger	5 m	3 m	
Floh	0,6 m	3 mm	
Heuschrecke	2 m	6,5 m	
Känguru	13,5 m	1,2 m	
Springfrosch	2 m	6 cm	
Fuchs	2,8 m	1,2 m	
Löwe	5 m	1,90 m	
Hirsch		2,40 m	4,5
Waldmaus	0,7 m	1/8 der SW	

(a) Ergänze die Werte in der letzten Spalte.

(b) Um einen Überblick zu gewinnen ist es günstiger, das Verhältnis in Abhängigkeit von der Körpergröße graphisch darzustellen. Trage auf der waagrechten Achse die Körpergröße und auf der senkrechten Achse das Verhältnis ein. Was kannst du ablesen?

(c) Welches Tier würdest du als den besten Springer bezeichnen und warum?

(d) Wie weit könnte ein Mensch von 1,80 m Körpergröße mit dem Sprungvermögen einer Heuschrecke springen?

(e) Gulliver ist auf die Größe einer Heuschrecke geschrumpft, hat sein Sprungvermögen aber beibehalten. Wie weit kann er springen?

(f) Wie weit kann ein Hirsch springen?

(g) Wie groß ist die Waldmaus?

Lösung:

(a) 1,5 / 200 / 31 / 11 / 33 / 2,5 / 2,5 / 4,5 / 8

(b) Tiere mit kleinerer Körperlänge haben das bessere Sprungvermögen.

(c) Floh (vgl.a)

(d) 55,80 m

(e) So weit wie als Riese.

(f) 10,80 m

(g) etwa 8,75 cm

8. **Gärtnerei**
In einer Gärtnerei werden kleine, quaderförmige Schalen bepflanzt. Sie haben folgende Abmessungen: Höhe 7,5 cm, Breite 9 cm, Länge 17 cm.

(a) Wie viele cm^3 Blumenerde sind für eine Schale erforderlich, wenn sie bis auf 1 cm unter dem Rand gefüllt werden soll?

(b) Ein 50 Liter-Sack Blumenerde kostet 6,40 Euro. Wie hoch sind die Kosten für das Füllen des Blumenkastens?

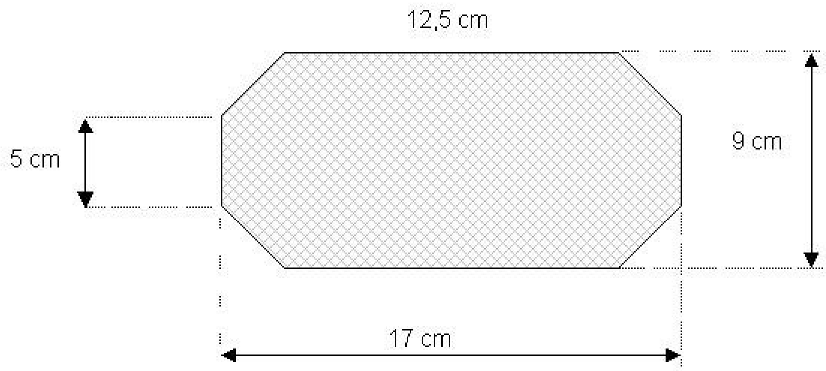
(c) Wie viel % weniger Blumenerde werden benötigt, wenn man die Grundfläche gemäß der Skizze (s. unten) verkleinert?

(d) In der Gärtnerei wird eine bepflanzte Schale für 6,60 Euro zum Verkauf angeboten. Die Kosten lagen bei 0,08 Euro für die Blumenerde, 1,40 Euro für die Pflanzen und 0,95 Euro für die Schale. Vergleiche den Verkaufspreis mit der Summe der Kosten!

(e) Ein großes Restaurant kauft zur Dekoration der Tische 35 dieser Pflanzschalen und erhält einen Rabatt von 5 %. Wie hoch ist der Rechnungsbetrag?

(f) Wie viele Schalen aus (a) und (b) passen maximal auf eine Transportpalette von 36cm x 61cm Größe? Skizziere die optimale Anordnung!

(g) Wie verändern sich die Kosten für Blumenerde und Pflanzen, wenn alle Maße einschließlich Rand verdoppelt werden?



Lösung:
(a) 994,5 cm^3
(b) rd. 0,13 Euro
(c) Es wird 5,9 % weniger Blumenerde benötigt.
(d) Summe der Kosten: 2,43 Euro / Verkaufspreis: 6,60 Euro / Differenz: 4,17 Euro (171,6 %)
(e) 219,45 Euro
(f) Es passen maximal 14 Schalen auf die Transportplatte.
(g) Die Kosten für die Blumenerde sind 8-mal so groß, für die Pflanzen 4-mal.

9. **Bremsweg**

Der Bremsweg eines Autos ist abhängig von der Geschwindigkeit. Je größer die Geschwindigkeit, desto größer ist natürlich der Bremsweg. Der Bremsweg wächst aber quadratisch mit der Geschwindigkeit des Autos an. In Tests wird die Güte von Bremsanlagen getestet. Dazu wird eine Vollbremsung aus einer Geschwindigkeit von 100 km/h durchgeführt. Sehr gute Bremsanlagen bringen das Auto auf trockener Straße nach 36 m zum Stillstand. Bei ungünstigen Straßenverhältnissen beträgt der Bremsweg 60 m.

(a) Um wieviel % ist der Bremsweg bei ungünstigen Verhältnissen länger als der auf einer trockenen Straße?
(b) Wie verändert sich der Bremsweg allgemein, wenn die Geschwindigkeit eines Autos verdoppelt bzw. halbiert wird?
(c) Wie lang wären die Bremswege auf trockener bzw. ungünstiger Straße, wenn die Experimente mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h durchgeführt würden? Wie groß ist jetzt der prozentuale Unterschied zwischen den Bremsweglängen? Vergleiche mit Aufgabenteil (a).

(d) Die Länge des Bremsweges kann in Abhängigkeit von der gefahrenen Geschwindigkeit durch eine Funktionsgleichung der Form $s(v) = k \cdot v^2$ beschrieben werden. Bestimme die Konstante k für beide Straßenverhältnisse.

(e) In Wohngebieten gibt es oft eine Geschwindigkeitsbegrenzung auf 30 km/h. Wie lang sind die Bremswege bei dieser Geschwindigkeit? Vergleiche mit den Bremswegen bei 50 km/h. Beurteile den Sinn von Geschwindigkeitsbegrenzungen in Wohngebieten.

(f) Im vorangegangenen Aufgabenteil wurde nicht berücksichtigt, dass der Fahrer erst noch reagieren muss, bevor er auf die Bremse tritt. In dieser Reaktionszeit rollt das Auto ungebremst weiter. Die Reaktionszeit beträgt etwa 0,8 s. Welchen Weg legt das Auto in dieser Zeit bei einer Geschwindigkeit von 30 km/h bzw. bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h zurück? Vergleiche nun die Anhaltewege (Summe aus Reaktionsweg und Bremsweg) bei den beiden Geschwindigkeiten miteinander.

10. **Freier Fall**

Wenn ein Gegenstand fällt, kann die Bewegung durch die Funktion mit der Gleichung $h = 5 \cdot t^2$ beschrieben werden. Dabei gibt h die Fallhöhe in m und t die Fallzeit in s an.
Monika möchte die Tiefe eines Brunnens ermitteln. Dazu wirft sie einen Stein in den Brunnen. 5 s später erfolgt der Aufprall. Wie tief ist der Brunnen?
Sie ist nicht ganz sicher, ob es wirklich 5 s waren. Vielleicht hat sie sich etwas vermessen. Sie schätzt, dass sie höchstens 0,1 s zu viel oder zu wenig gemessen hat.

(a) Wie viel Prozent beträgt ihre Messungenauigkeit bei der Zeitmessung?

(b) Wie tief wäre der Brunnen bei einer Fallzeit des Steines von 4,9 s? Wie tief bei einer Fallzeit von 5,1 s?

(c) Um wie viel Prozent könnte die Tiefe des Brunnen durch den Messfehler bei der Zeit abweichen?

(d) Bei einer anderen Uhr beträgt die Messungenauigkeit $\pm 0,2s$. Wieviel Prozent sind das? Wieviel Prozent beträgt dann die Messungenauigkeit bei der Tiefe?

(e) Stelle eine Tabelle auf, in der du zu verschiedenen Messungenauigkeiten bei der Zeitmessung die Messungenauigkeiten bei der Tiefenmessung aufschreibst. Kannst du einen Zusammenhang feststellen?

(f) Wenn der Stein auf dem Boden des Brunnens aufschlägt, muss der Schall erst noch nach oben laufen. Die Bewegung des Schalls wird durch die Funktionsgleichung $h(t) = 330t$ beschrieben. t ist dabei in Sekunden, h in Metern gemessen. Muss Monika das bei der Bestimmung der Brunnentiefe berücksichtigen? Bestimme ggf. die Brunnentiefe bei einer Messung von 5 s unter Berücksichtigung der Laufzeit des Schalls.

11. **Vergrößern und Verkleinern auf dem Kopierer**

    (a) Klaus hat ein Foto der Größe 10 cm x 15 cm. Er stellt auf dem Kopierer eine Vergrößerung von 120 % ein. Das bedeutet, dass die vergrößerten Seitenlängen 120 % der Länge der ursprünglichen Seitenlängen haben. Wie lang sind die Seiten des Fotos auf der Vergrößerung? Wie groß ist die Fläche des vergrößerten Fotos? Um wie viel Prozent ist die Fläche bei der Vergrößerung gewachsen?

    (b) Auf dem Foto ist ein gleichseitiges Dreieck zu sehen. Nach der Vergrößerung beträgt die Seitenlänge 4 cm. Wie groß ist die Fläche des vergrößerten Dreiecks? Wie groß waren Seitenlänge und Fläche vor der Vergrößerung?

    (c) Klaus möchte nun die Fläche des Fotos verdoppeln. Auf welche Vergrößerung muss er den Kopierer einstellen?

    (d) Ein DIN-A-3 Blatt soll auf DIN-A-4 verkleinert werden. Welche Einstellung muss auf dem Kopierer gewählt werden?

    (e) Bei einem DIN-A-4 Blatt beträgt das Verhältnis der Seitenlängen $\sqrt{2} : 1$. Legt man zwei solche Blätter nebeneinander, erhält man ein DIN-A-3 Blatt. Untersuche das Verhältnis der Seitenlängen bei einem DIN-A-3 Blatt und bei einem DIN-A-5 Blatt.

    (f) Wenn Klaus zwei seiner Fotos nebeneinander legt, bekommt er auch eine Fläche, die doppelt so groß ist. Was stellst du fest, wenn du die Verhältnisse der Seitenlängen untersuchst? Was ist das Besondere der DIN-A-Blätter?

12. Mit Stühlen kann man handeln...
    Ein Möbelhersteller hat einen Bestand von 512 gleichen Schreibtischstühlen. Der Herstellungspreis für einen Stuhl liegt bei 117,30 €. Der Verkaufspreis für einen Stuhl beträgt 72 % mehr als der Herstellungspreis.

    a) Berechne den Verkaufspreis für alle Stühle.

    b) Firma B möchte 100 Stühle erwerben, wenn sie auf die gesamte Menge einen Rabatt von 20 % erhält. Wie hoch wäre jetzt der Verkaufspreis pro Stuhl?

    c) Herr Z. kauft für seine Kinder drei Stühle. Er hat 600 € bei sich. Reicht das Geld?

Lösung:

a) 201,76 € kostet ein Stuhl im Verkauf; 512 Stühle kosten 103 299,07 €.

b) 100 Stühle kosten 20 176,00 €; davon 80 % sind 16 140,80 €. Ein Stuhl kostet jetzt nur noch 161,41 €.

c) Das Geld reicht nicht, es fehlen ihm 5,28 €.

13. Zinsen
 Berechne die Zinsen.
 a) 13 678 € zu 7 % für 6 Monate
 b) 67 432 € zu 5,25 % für 122 Tage

Lösung: a) 478,73 €
b) 1 199,73 €

14. Rollerreparaturen
 Weil Martina ihren Motorroller reparieren lassen muss, überzieht sie ihr Konto bei der Bank um 548 €. Es werden 12,75 % Zinsen berechnet. Nach 25 Tagen kann Martina diesen Kredit zurückzahlen. Wie viele Zinsen muss sie zahlen?

Lösung: 4,85 €

15. Von den Zinsen leben...
 Welches Kapital muss angelegt werden, um bei einem Zinssatz von 8 % in einer Woche 105 € Zinsen zu erhalten?

Lösung: 67 500 € müssen angelegt werden.

16. Erst anmelden, dann einschalten...
 Ein Händler bietet an: Für eine Stereoanlage für 980 € erhält der Kunde bei Barzahlung 2,5 % Rabatt (Preisnachlass). Wie hoch ist der Barzahlungspreis?

Lösung: 955,50 € kostet die Stereoanlage.

17. Augen auf beim Autokauf!
 Herr Frisch kauft ein neues Auto für 27 850 €. Nach 6 Jahren Gebrauch nimmt es eine Autohandlung mit 10 640 € Zahlung. Mit welchem jährlich gleichbleibenden Abschreibungsfaktor hatte man gerechnet? Wie viel Prozent Verlust hat er jährlich?

Lösung: Abschreibungsfaktor 0,85; 14,8 % beträgt die Abschreibung jährlich.

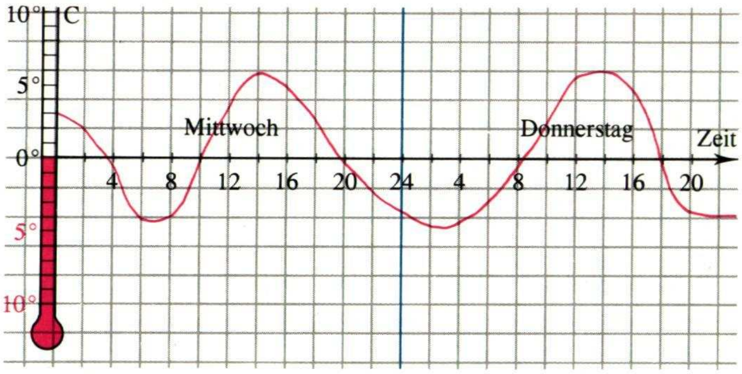
18. Kapitalanlage
    Bei einer Sparkasse, die $4\frac{1}{4}\,\%$ Zinsen gewährt, hat jemand 3 500 € angelegt. Nach 2 Jahren zahlt er weitere 1 500 € ein und hebt nach weiteren 3 Jahren 2 000 € ab. Welches Guthaben hat er nach weiteren 4 Jahren angespart?

Lösung: 4735,47 €

4 Rationale Zahlen

1. **Wetterkarte**

   In einer Wetterstation wird die Temperatur mit Hilfe eines Temperaturschreibers festgehalten:

   (a) Was bedeuten die Zahlen auf dem Thermometer?

   (b) Lies die höchste und die niedrigste Temperatur ab.

   (c) Lege eine Tabelle für verschiedene Zeitpunkte an und notiere die zugehörigen Temperaturen.

   Anregung zur Öffnung der Aufgabe: Ersetzen der Fragestellungen durch:

   Welche Information kann man der Karte entnehmen?

2. **Umkehraufgaben**

   Was ist gleichwertig mit -20?
   $-20 = (-12) + (-8)$;
   $-\ 20 = (+80) : (-4); \ldots$

3. **Terme**

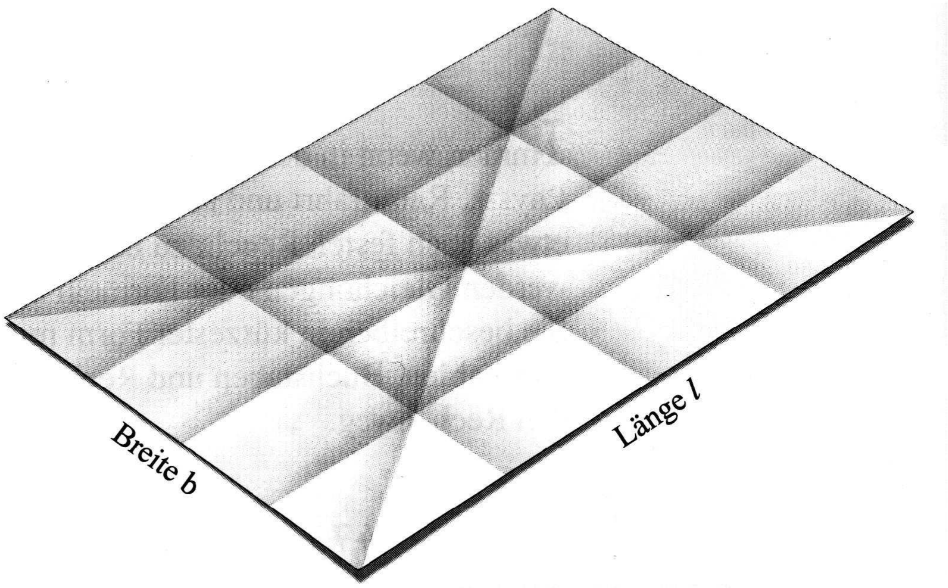
   Versuche bei dem Term $(+19) - (-11) - (+13) - (-17)$ durch das Setzen von zusätzlichen Klammern möglichst verschiedene Ergebnisse zu erreichen.

   Oder: Entwirf eigene Terme, die durch zusätzliche Klammern verschiedene Ergebnisse erreichen.

5 Terme und Gleichungen

1. **Immer wieder gleiche Seiten und Flächen**

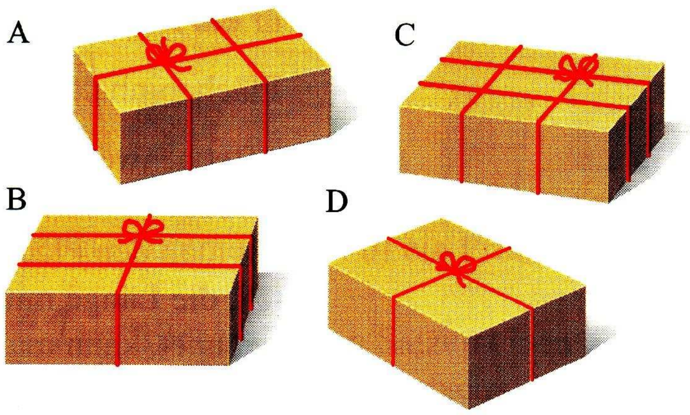
   Faltet ein DIN A4 großes Blatt Papier 2-mal quer, danach 2-mal längs und nach dem Auffalten 2-mal diagonal von Ecke zu Ecke.
   Wie viele Faltlinien mit der Länge l gibt es? Wie viele Faltlinien mit der Breite b gibt es? Messt aus wie lang sie jeweils sind.
   Wie lang sind alle Faltlinien zusammen? Beschreibt euren Rechenweg!
   Welche sind die längsten Faltlinien? Wie viele gibt es davon? Gebt ihnen einen Namen.



Lösung: 3 Faltlinien der Länge l (29,7 cm) und 3 Faltlinien der Länge b (21 cm)
$l + l + l + b + b + b + d + d = 3l + 3b + 2d$; Gesamtlänge: 224,9 cm
2 Diagonalen d (36,4 cm)

2. **Päckchen schnüren**

   (a) Ein Paket hat die Länge $l = 35$ cm, die Breite $b = 25$ cm und die Höhe $h = 12$ cm. Je nach Gewicht des Inhaltes soll es unterschiedlich verschnürt werden. Schätzt, für welches Paket ihr am meisten Schnur benötigt. Gebt noch 20 cm (insgesamt) für die Knoten hinzu und berechnet die jeweils benötigte Schnurlänge. Versucht, einen Schuhkarton wie in der Grafik dargestellt zu schnüren, die Kordel soll nirgends doppelt verlaufen.



(b) Gebt die Schnurlängen auch allgemein für solche Pakete mit der Länge l, der Breite b und der Höhe h an.

(c) Wie sieht eine Paket-Schnürung aus zu $4l+4b+4h+15$ bzw. zu $3l+2b+4h+10$?

(d) Überlege dir weitere Terme und lass deinen Nachbarn die Pakete aufzeichnen.

Lösung: (a) $2l + 4b + 6h + 20 = 2(l + 2b + 3h) + 20 = 262\,\text{cm}$

(b) $4l + 2b + 6h + 20 = 2(2l + b + 3h) + 20 = 282\,\text{cm}$

(c) $4l + 4b + 8h + 20 = 2(2l + 2b + 4h) + 20 = 356\,\text{cm}$

(d) $2l + 2b + 4h + 20 = 2(l + b + 2h) + 20 = 188\,\text{cm}$

Teil 2 bei b nicht möglich!

3. **Streichholzquadrate**

(a) Für diese Aufgabe benötigt ihr eine Schachtel Streichhölzer. Legt vier Quadrate wie in a). Wie viele Streichhölzer benötigt ihr dafür?

(b) Legt nun vier Quadrate wie in b). Wieso benötigt ihr jetzt ein Streichholz mehr? Wie viele Streichhölzer benötigt ihr für die Lösung in c) mehr?

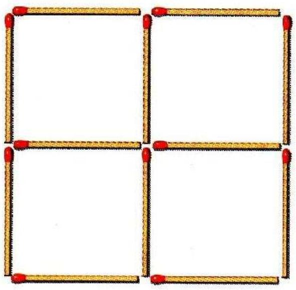
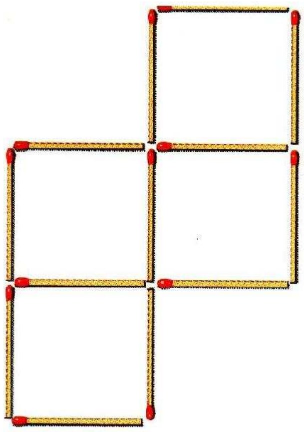
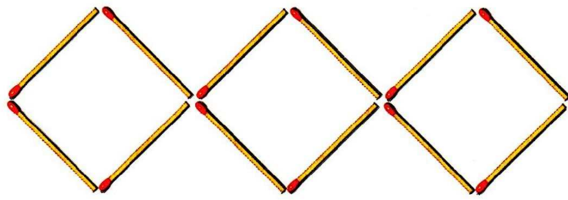
(c) Könnt ihr eine Regel bilden, mit der man die benötigte Anzahl der Streichhölzer für die Legebeispiele in a), b), c) berechnen kann?

(d) Findet heraus, wie man fünf, sechs, sieben, acht,... Quadrate mit möglichst wenig Streichhölzern legen kann. Zeichnet euch auch eine Skizze in eure Hefte.

(e) Wie viele Streichhölzer benötigt ihr mindestens um 100, 1000, ... Quadrate zu legen? Wie viele höchstens?

(f) Wie viele Quadrate könnt ihr mit 100, 1000, ... Streichhölzern legen?

(g) Zu guter Letzt: Legt drei gleichseitige Dreiecke mit möglichst wenigen Streichhölzern.

a)  b)  c) 

Lösung: (a) 12 Streichhölzer

(b) b): 13, da die Möglichkeit zum SZweierquadratnicht genutzt wird
c): 16 Streichhölzer: 4 mehr als in a)

(c) Q: Anzahl der Quadrate, V: Anzahl der Viererquadrate, D: Anzahl der Dreierquadrate, Z: Anzahl der Zweierquadrate, S: Anzahl der Streichhölzer.

i. $4 \cdot D = S | 2 \cdot V + 2 \cdot Z = S$

ii. $2 \cdot V + 1 \cdot D + 1 \cdot Z = S | 1 \cdot V + 3 \cdot D = S$

iii. $4 \cdot V = S$

(d)

$Q = 5$	$Q = 6$	$Q = 7$	$Q = 8$	$Q = 9$
$S = 15$	$S = 17$	$S = 20$	$S = 22$	$S = 24$
$3 \cdot 5 = 15$	$3 \cdot 5 + 2 = 17$	$6 \cdot 3 + 2 = 20$	$6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 22$	$6 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 24$

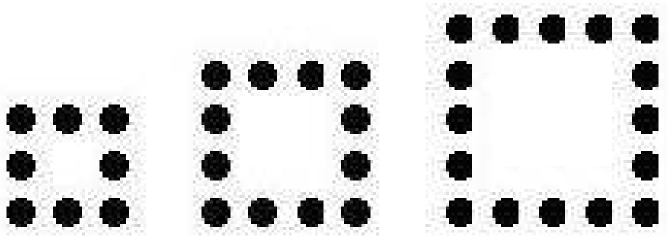
(e) 100 Quadrate: mindestens 220 Streichhölzer (z.B. $20 \cdot D + 80 \cdot Z$), höchstens 400 ($100 \cdot V$)
1000 Quadrate: mindestens 2064 Streichhölzer (z.B. $64 \cdot D + 936 \cdot Z$), höchstens 4000 ($1000 \cdot V$)

(f) 100 Streichhölzer: 43 Quadrate ($14 \cdot D + 29 \cdot Z$)
1000 Streichhölzer: 478 Quadrate ($44 \cdot D + 434 \cdot Z$)

(g) mit 7 Streichhölzern

4. **Plättchenmuster**

(a) Schau dir die folgende Reihe aus regelmäßig wachsenden Plättchenmustern genau an und versuche, sie fortzusetzen. Wie viele Plättchen sind in einer Grundseite, wenn die gesamte Figur aus 28 (68) Plättchen besteht?

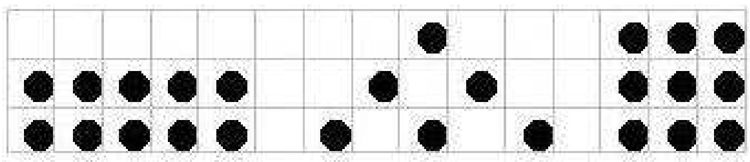


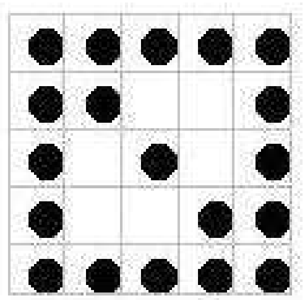
(b) Gegeben sind die Terme $2 \cdot n; 3 \cdot n - 3; n \cdot n$, wobei n für irgendeine natürliche Zahl steht. Lege Figuren, bei denen sich die Gesamtzahl der Plättchen durch den vorgegebenen Term bestimmen lässt.

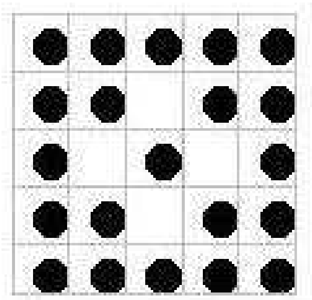
(c) Denkt euch andere Muster aus, bei denen ihr die Gesamtzahl der Plättchen gut mit einem Rechenausdruck bestimmen könnt. Notiert den Rechenausdruck und lasst die Nachbargruppe das Muster dazu raten.

Lösung: (a) n: Anzahl der Plättchen auf der Grundseite. N: Anzahl der Gesamtplättchen. Dann gilt: $N = 4n - 4 = 4(n-1)$. Für $N = 28$ gilt: $n = 8$. Für $N = 68$ gilt: $n = 18$.

(b) jeweils fortgesetzt...(Dreieck innen leer)







$2n + 3(n-2) = 5n - 6$ $\qquad$ $2n + 3(n-2) + n - 3 = 6n - 9$

(c) z.B. siehe rechts oben

5. **Das Tischtennisturnier**

Bei einem Tischtennisturnier soll jeder Teilnehmer gegen jeden anderen ein Hin- und ein Rückspiel austragen.

(a) Lege eine Tabelle an, in der die Spielergebnisse eingetragen werden können, falls sich 4 Spieler beteiligen!

(b) Wie viele Spiele sind insgesamt bei 4 [5;10] Teilnehmern auszutragen? Begründe deine Antwort!

(c) Bestimme einen Term, mit dem man die Zahl der Spiele bei n Teilnehmern berechnen kann.

(d) Bei einem solchen Turnier gab es 72 [110] Spiele. Wie viele Spieler haben teilgenommen?

Variationen:

Bundesliga-Spiele, Händeschütteln

Lösung: (a)

(b) 12 [20; 90]

(c) $n(n-1) = n^2 - n$

(d) 9 [11]

6. **Die Backstreet Boys**

Die Backstreet Boys waren 1998 zusammen 107 Jahre alt. Kevin war ein Jahr älter als Brian und Howie. Nick war sechs Jahre jünger und A.J. fünf Jahre jünger als Kevin. Wie alt war jeder?

Lösung: Kevin war 24.

7. **Max der Vergessliche**

Max will wissen, wie viel sein Kuli gekostet hat, den er zusammen mit einigen anderen Sachen gekauft hat. Doch er weiß nur noch, dass dieser halb so teuer war wie der Füller. Und der Füller, erinnert er sich, hat 2 € mehr gekostet als der Stift. Der Stift, das weiß er noch, war so teuer wie das Heft. Das Heft, das Buch und die Mappe haben zusammen 20 € gekostet. Das Buch war um 4 € teurer als das Heft. Die Mappe hat 4 € gekostet.

Lösung: Heft: 6 €; Stift: 6 €; Buch: 10 €; Füller: 8 €; Kuli: 4 €.

8. **Gut wer einen Opa hat**

Detlef hat Geburtstag. Sein Opa Dieter kauft ihm eine Mütze, eine Hose, die drei mal so viel kostet wie die Mütze und ein T-Shirt, das halb so viel wie die Hose kostet. Auf Wunsch seines Enkels kauft er ihm noch ein Kickboard, das so viel kostet wie die Hose, die Mütze und das T-Shirt zusammen. Für alles zusammen zahlt er das 9?-fache der Mütze und 30 €.

(a) Wie viel haben die Sachen zusammen gekostet?

(b) Wie viel haben die einzelnen Sachen gekostet?

Lösung: Mütze: 20 €; Hose: 60 €; T-Shirt: 30 €; Kickboard: 110 €.

9. **Der Weihnachtsmann**

Der Weihnachtsmann hat an Weihnachten viel zu tun, also hat er einen Helfer. Weihnachtsmann A ist grad in Finnland und will zurück zum Nordpol. Um 19 Uhr startet er seine 1120 km lange Reise mit 25 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zum Nordpol. Weihnachtsmann B ist am Nordpol und will in Finnland weiter machen. Er startet auch um 19 Uhr und fährt mit 35 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wann treffen sie sich?

Lösung: 8 h 40 min bis Treff. Also um 13.40 Uhr.

10. **Der Marathon-Lauf**

Vor einer Woche hat in Berlin ein großer Marathon-Lauf von 500 Menschen stattgefunden. Der Startschuss fiel um 16.00 Uhr. Um diese Uhrzeit mussten alle Läufer an der Startfläche stehen. Obwohl ein Läufer noch nicht da war, hat der Lauf

ohne ihn begonnen. Alle Läufer liefen 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Am Ziel erwartete den Gewinner eine Summe von 5000 €. Doch plötzlich, nach einer viertel Stunde, kam der fehlende Läufer. Ihm wurde in letzter Sekunde noch erlaubt mit zu laufen, nämlich 7 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wie lange dauerte es, bis er die anderen 499 eingeholt hatte?

Lösung: Einholen nach $0,875\,\text{h} = 52,5\,\text{min}$.

11. **Termdomino**

$5z-1+14x-2$	$r+s-1r+1s$	$9x^2-5x^2$	$3xz+4xz-xz$
1	$2a-4a$	$-2a$	$4x^2$
$-\frac{9}{16}$	$3\cdot(a-2b)$	$6xz$	$14x+5z-3$
$4\cdot(x+y)$	$2\cdot(a+2b)$	$a-b+c$	$5y^2\cdot x$
$-6x$	$c-b-3a+4a$	$2a+4b$	$(x+y)+y$
$5xy^2$	$4x+4y$	$3a-6b$	$A_{Rechteck}$
-11	$-7\cdot(-\frac{1}{2})$	$x+2y$	$(r+s)-(r+s)$
$a\cdot b$	$196:14^2$	a^3	$x\cdot y\cdot y\cdot x$
x^2y^2	$-15-17+21$	0	$a\cdot a\cdot a$
$\frac{35}{10}$	$-(\frac{5}{4})^2+1$	$2s$	$-4x+3y-2x-3y$

Schneidet die Dominosteine entlang der Doppellinien auseinander. Teilt die Dominosteine in eurer Gruppe auf und bestimmt, wer anfängt. Jetzt versucht jeder Spieler nacheinander, einen seiner Steine anzulegen. Dazu müssen die Terme allerdings wertgleich sein. Wer nicht anlegen kann, muss eine Runde aussetzen.

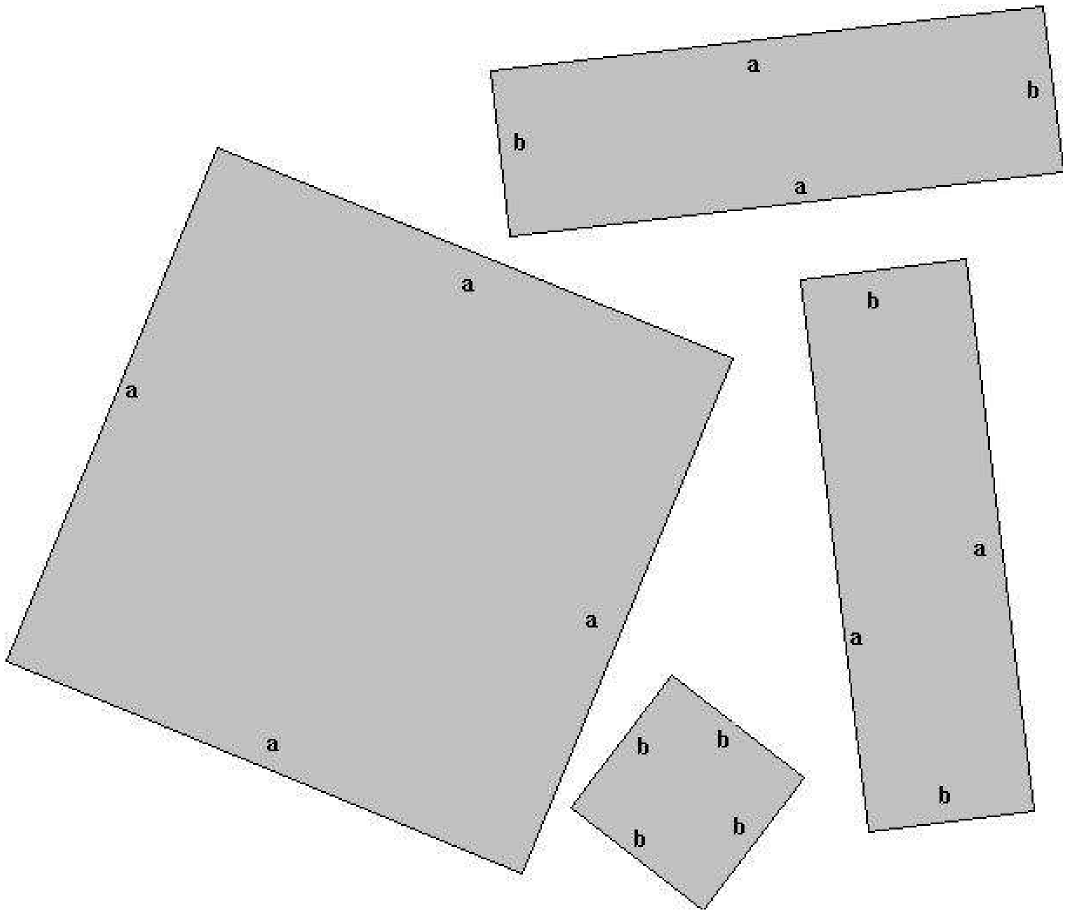
12. **Binomische Formeln**

    (a) Schneide die unten abgebildeten Vierecke aus!

    (b) Bestimme einen Term für den Flächeninhalt der grauen Gesamtfläche A der vier Rechtecke in Abhängigkeit von den Seitenlängen a und b:

$A =$

Überlege, ob es noch andere Terme gibt, mit denen man den Flächeninhalt A darstellen kann.



Lösung: $b^2 + ab + a^2 + ab = (b + 2a) \cdot b + a^2 = (a + 2b) \cdot a + b^2 = (a + b)^2$

13. **Babylonische Multiplikation**

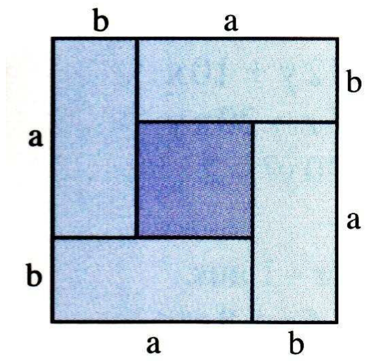
Die Babylonier nutzten Tafeln mit Quadratzahlen, um beliebige Zahlen miteinander zu multiplizieren.
Sollten die Zahlen a und b miteinander multipliziert werden, bildeten sie zunächst die Summe $(a + b)$ und die Differenz $(a - b)$, ermittelten dann die Quadrate der Summe und der Differenz mit Hilfe der Tafeln und subtrahierten anschließend die beiden Zahlen voneinander. Schließlich teilten sie das Ergebnis durch 4 und heraus kam das Produkt der beiden Zahlen a und b.

(a) Berechne mit diesem Verfahren $53 \cdot 47$.

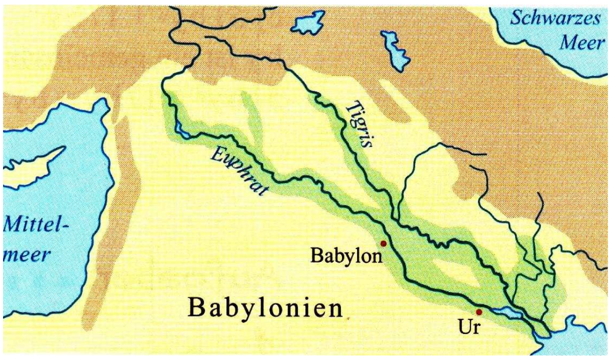
(b) Erstelle einen Term für das Rechenverfahren der Babylonier und zeige, dass dieser Term tatsächlich gleich dem Produkt $a \cdot b$ ist.

(c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem beschriebenen Rechenverfahren und der Grafik?

(d) Beurteile dieses Verfahren?



Die Babylonier lebten in Mesopotamien, einer fruchtbaren Ebene zwischen den Flüssen Euphrat und Tigris, im heutigen Irak. Sie entwickelten eine Schrift, die aus keilförmigen Symbolen bestand und mit Stiften in Tonplatten gedrückt wurde. Anschließend wurden die Platten in der Sonne getrocknet. Viele Tausende dieser Tafeln existieren noch heute, unter ihnen auch die im Text erwähnten Tafeln mit Quadratzahlen.



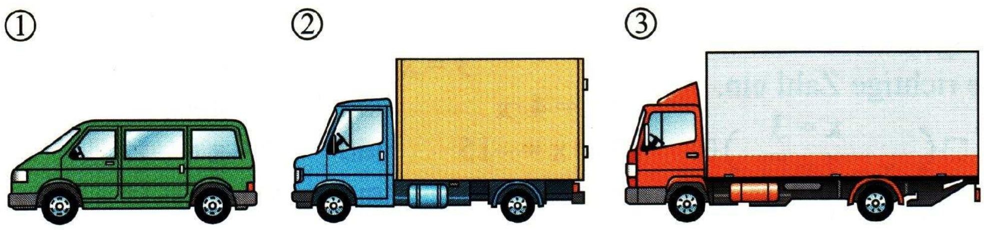
Lösung: (a) $\frac{100^2-6^2}{4} = 2491$

(b) $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} = \frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{4} = ab$

14. **Umzug mit dem Mietwagen**

Für den Transport größerer Gegenstände, z.B. Möbel bei einem Umzug, kann man sich für Stunden oder auch Tage einen Lkw mieten. Meistens kann man bei den Vermietern unter verschiedenen Lkw-Größen und unter verschiedenen Angeboten wählen. Der Gesamtpreis errechnet sich aus der Tagesmiete und einem Pauschalpreis für jeden gefahrenen Kilometer.
Manchmal gibt es Mietangebote mit einer bestimmten Anzahl von Freikilometern. Nach der abgelaufenen Mietzeit muss man das Fahrzeug vollgetankt wieder zurückbringen.

STANDARD-ANGEBOT		
Wagentyp	**Tagesmiete**	**Pauschale pro Kilometer**
Transporter	65 €	0,36 €
Klein-Lkw	75 €	0,39 €
Lkw	99 €	0,54 €



An Wochenenden macht der gleiche Vermieter ein Spar-Angebot, bei dem 100 Kilometer schon in der Tagesmiete eingeschlossen sind

SPAR-ANGEBOT		
Wagentyp	**Tagesmiete incl.** 100 km	**Mehr-**km
Transporter	73 €	0,18 €
Klein-Lkw	87 €	0,22 €
Lkw	125 €	0,30 €

Inges Eltern wollen am Wochenende in eine 65 km entfernte Stadt umziehen. Sie wollen das Sparpaket nutzen und überlegen, ob sie zum Sparangebot den kleineren Wagentyp 2 nehmen. Dann müssen sie allerdings 2-mal fahren. Mit dem größeren Typ müssten sie nur 1-mal fahren.

(a) Berechne für die Wagentypen 1 bis 3, wie teuer es ist, sie für einen Tag zu mieten.

(b) Wie groß sind die Preisunterschiede?

(c) Bilde für jeden Wagentyp eine Gleichung mit Variablen, mit der man den Gesamtpreis für beliebig viele gefahrene Kilometer berechnen kann.

(d) Lege für den Wagentyp 2 eine Preistabelle für 25; 50; 100; 150 und 200 gefahrene Kilometer an. Wie viele Kilometer kann man für einen Gesamtpreis von 200 € fahren ?

(e) Bilde für alle drei Wagentypen Gleichungen mit Variablen, mit denen man für beliebig viel gefahrene Kilometer über 100 km (Mehr-km) den Gesamtpreis errechnen kann.

(f) Verdoppelt sich mit den gefahrenen Kilometern auch der Gesamtpreis?

(g) Was kosten jetzt im Sparangebot 150; 200; 250 und 300 gefahrene Kilometer für die Wagentypen 1 bis 3?

(h) Wie viel Kilometer kann man mit Wagentyp 1 für 200 € fahren?

(i) Welche Lösung ist für Inges Eltern sinnvoller?

Lösung:
(a) bei 120 km: Transporter: 108, 2 €; Klein-Lkw: 121, 8 €; Lkw: 163, 8 €

(b) 13, 6 €; 42 €

(c) $T = 0,36x + 65; K = 0,39x + 75; L = 0,54x \cdot 99$

(d) 84, 75 €, 94, 5 €, 114 €, 133, 5 €; 153 €; ca. 320, 5 km

(e) $T = 73 + 0,18x; K = 87 + 0,22x; L = 125 + 0,3x;$

(f) Nein, weil die Tagesmiete konstant ist.

(g) Transporter 82 €; 91 €; 100 €; 109 €;
Klein LKW 98 €; 109 €; 120 €; 131 €;
LKW 140 €; 155 €; 170 €; 180 €.

(h) ca. 805, 5 km

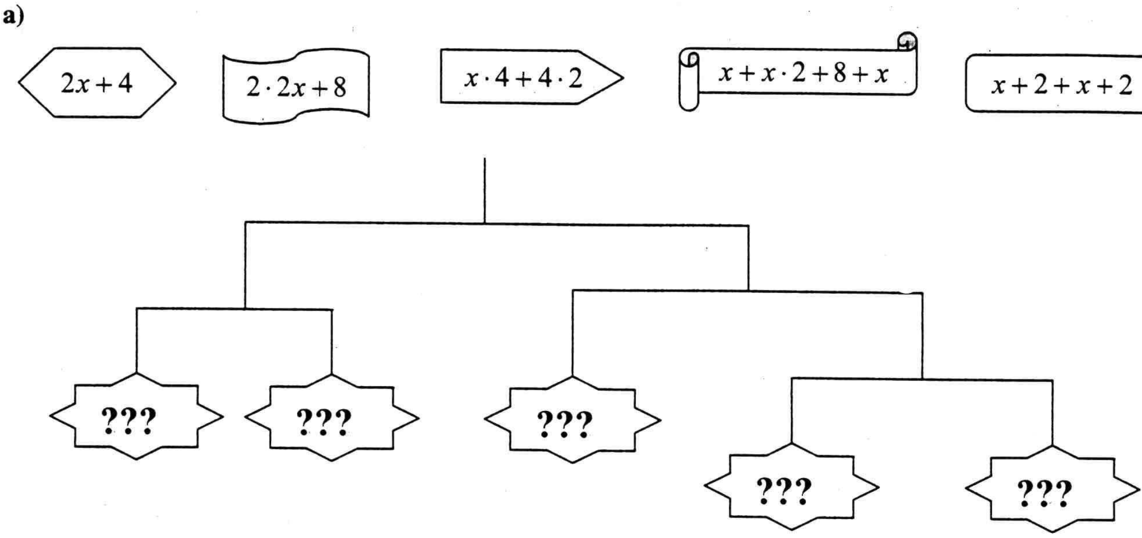
(i) An die Autovermietung sind jeweils zu zahlen:
$4 \cdot 65\,\text{km} = 260\,\text{km} \Rightarrow 87 + 0,22 \cdot 160 = 122,2$
$2 \cdot 65\,\text{km} = 130\,\text{km} \Rightarrow 125 + 0,3 \cdot 30 = 134$

Welche Lösung insgesamt günstiger wäre, ist gar nicht so leicht zu entscheiden: Beim Sparangebot fallen wahrscheinlich höhere Benzinkosten an. Und vielleicht sind ja andere Faktoren entscheidender als die Kosten.

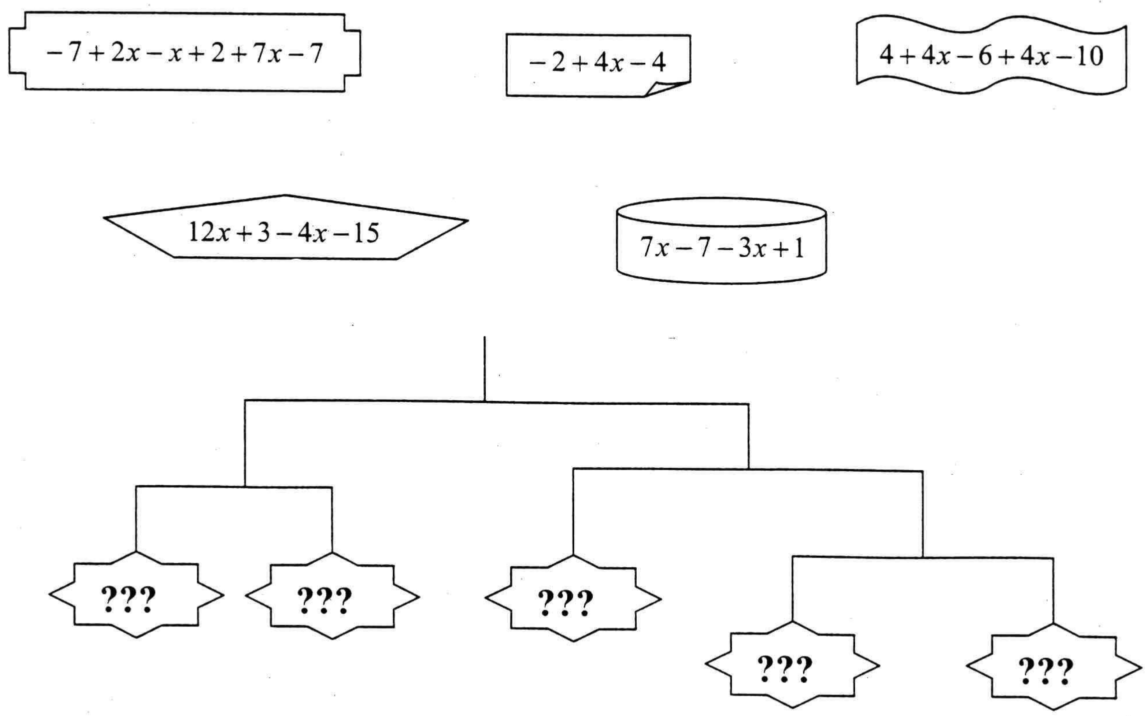
15. **Term-Mobile**

Das Term-Mobile ist im Gleichgewicht, wenn an beiden Enden eines Balkens insgesamt wertgleiche Terme vorhanden sind. Bringe die Mobiles mit den jeweils vorhandenen Elementen ins Gleichgewicht. Färbe dazu die entsprechenden Felder in gleicher Farbe.

a)



b)



Stelle selbst ein Term-Mobile her. Verwende dabei u.a. die folgenden Terme:

(a) $3(x+4)+x$

(b) $2x+6$

(c) $8(x+1)+4(1-x)$

16. **Aquamaxx**

Frau S. aus K. ist es leid, jede Woche ein- oder zweimal zum Getränkemarkt zu fahren, um den entsprechenden Vorrat an Mineralwasser für ihre fünfköpfige Familie zu besorgen. Sie denkt über die Anschaffung eines Wasseraufbereitungsgerätes nach.

Die Firma Aquamaxx bietet ein solches Gerät zum Preis von 120 € an. Die entsprechenden CO_2-Patronen kosten 16 € und reichen für $40l$. $1m^3$ Leitungswasser kostet $8,50$ € (einschließlich Abwassergebühren).
Die Hersteller des Aquamaxx behaupten: Bei Verwendung des Gerätes Aquamaxx sind die Kosten für ihr Mineralwasser bereits vor Ablauf eines Jahres geringer, als wenn Sie das Wasser im Getränkemarkt kaufen.

(a) Wie viel kostet ein Kasten Mineralwasser?

(b) Schätze den Tages- bzw. den Wochenbedarf der Familie S.

(c) Stelle die Kosten in einer Tabelle gegenüber ($100l, 200l, 300l$)

(d) Stelle für beide Möglichkeiten einen Term auf.

(e) Überprüfe die Aussage von Aquamaxx.

(f) Setze die beiden Gleichungen gleich und interpretiere das Ergebnis.

Lösung: (a) 12 Flaschen *à* $0,7\,l$ kosten $7,60$ € (ohne Pfand)

(b) Jedes Kind eine Flasche, Eltern zusammen 3 bis 4 am Tag: ca. 6 Flaschen. $3-4$ Kisten pro Woche, fast $30\,l$

(c)

	$100\,l$	$200\,l$	$300\,l$
Aquamaxx	$48,5$ € + 120 €	$81,70$ € + 120 €	$130,55$ € + 120 €
Kasten	$91,20$ €	$182,40$ €	240 €

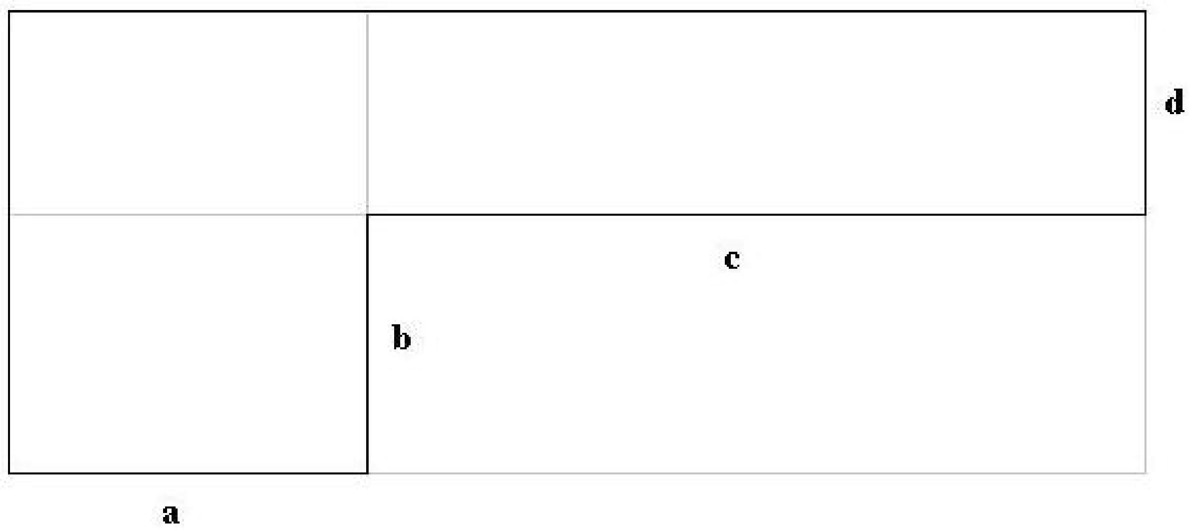
(d) Kasten: $K = 91,2$ x. Aquamaxx: $A = 16,34x + 120$ (in €; x in $40l$-Einheiten)

(e) A: $100l$ Leitungswasser kosten $0,85$ €, also kosten $40l$ $0,34$ €. Dazu kommen 16 € für die Patrone. Also kosten $40l$ Mineralwasser $16,34$ €.
K: In einem Kasten sind $8,4l$, also braucht man für $40l$ ca. $4,8$ Kisten und die kosten ca. $36,48$ €. Differenz also $20,14$ €. Damit macht sich die Anschaffung nach 6 Patronen bezahlt und das sind $240l$ Mineralwasser, d.h. die Aussage stimmt.

(f) $91,20x = 36,48x \Leftrightarrow x = 5,96$ also nach der 6. Patrone.

17. **Aufstellen von Formeln für Umfang und Flächeninhalt**

Stelle eine Formel für den Umfang und eine Formel für den Flächeninhalt der folgenden Figur auf:



Lösung: $U = a + b + c + d + (a + c) + (d + b) = 2a + 2b + 2c + 2d = 2(a + b + c + d)$
$A = a \cdot (b + d) + c \cdot d = (a + c) \cdot d + a \cdot b = (a + c) \cdot (b + d) - b \cdot c = ab + ad + cd$

18. **Wortform von Termen**

(a) Gib einen Term mit einer Variablen an, der zu jeder Zahl, die man für die Variable einsetzt,

i. das Doppelte der Zahl;
ii. die Hälfte der Zahl, vermindert um 3;
iii. die Hälfte der um drei verminderten Zahl;
iv. das Quadrat der Zahl;
v. den Kehrwert der Zahl;
vi. den Vorgänger der Zahl;
vii. das Dreifache des Kehrwerts;
viii. den Kehrwert des Dreifachen der Zahl liefert.

(b) Der Term $2 \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$ beschreibt eine beliebige gerade Zahl. Beschreibe durch einen Term

i. eine beliebige durch 3 teilbare Zahl;
ii. eine beliebige ungerade Zahl;
iii. eine beliebige Quadratzahl.
iv. Finde weitere Beschreibungen und den dazugehörigen Term.

(c) Ein Paket wiegt a kg, ein anderes b kg. Was bedeuten die folgenden Aussagen?

i. $a + b = 10$

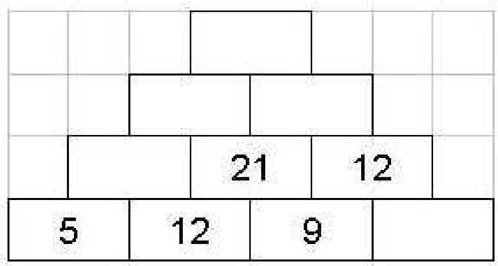
ii. $a = b + 10$
iii. $b = \frac{1}{2} \cdot a$
iv. $a = 1,5 \cdot b - 2$

(d) Es seien a, b und c natürliche Zahlen, wobei $a > b + c$ ist.

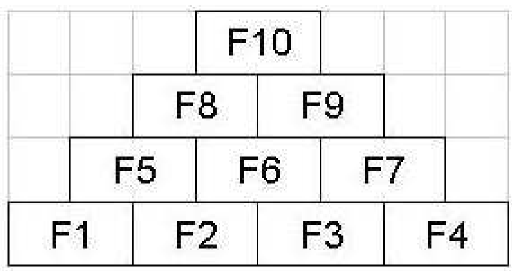
i. Beschreibe die Aussage $a - (b + c) = (a - b) - c$.
ii. Stelle die Aussage mit Hilfe von Strecken dar.
iii. Erfinde eine Geschichte zu dieser Aussage, z.B.: „In einem Reisebus befinden sich a Personen...“.

19. **Algebra mit Zahlenmauern**

Du kennst vielleicht schon sogenannte Zahlenmauern. In der untersten Reihe können beliebige Zahlen geschrieben werden. In die übrigen Felder wird nun jeweils die Summe aus den Zahlen in den beiden darunter liegenden Steinen geschrieben.



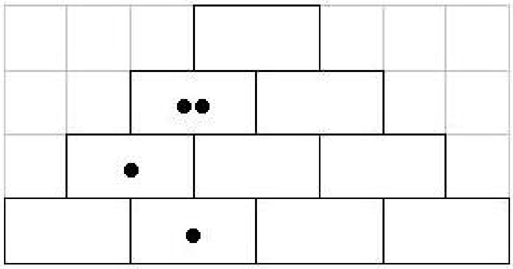
(a) Kannst du die oben stehende Zahlenmauer vervollständigen? Welche Zahl steht ganz oben? Wie viele Zahlen müssen mindestens vorgegeben werden, damit jeder die gleiche Zahlenmauer erhält?



Vielleicht wolltet ihr euch bei der Beantwortung der ersten Frage schon auf bestimmte Felder beziehen. Aus diesem Grund führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

Was passiert nun beispielsweise mit der Zahl im Feld $F10$, wenn wir die Zahl in $F2$ um eins erhöhen? Zur Beantwortung ist es hilfreich, einen Punkt zu betrachten, der die zusätzliche Eins darstellt:

(b) Fülle die Zahlenmauer vollständig aus. Erkläre damit, wie sich $F10$ verändert, wenn man die Zahl in $F2[F1; F3]$ um eins erhöht.

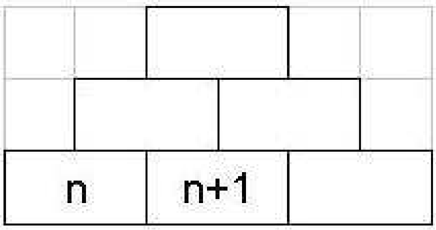


(c) Wie wirken sich die Veränderungen aus Aufgabe 2 auf fünfreihige Zahlenmauern aus?

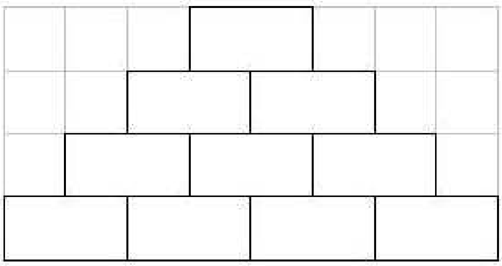
(d) Wie verändert sich die Zahl in $F10$ in vierreihigen Zahlenmauern, wenn man die Zahl in $F2$ um 2 erhöht? Untersuche dies auch für die anderen Felder.

Im Folgenden untersuchen wir ganz spezielle Zahlenmauern. Bei diesen stehen in der untersten Reihe aufeinander folgende natürliche Zahlen (Also zum Beispiel $5, 6, 7$). Für die Zahl im ersten Feld schreiben wir ganz allgemein „n“, wobei dieses n für irgendeine natürliche Zahl steht. Wir starten mit dreireihigen Mauern:

(e) Fülle die Tabelle allgemein aus. Welche Zahl steht im ersten Feld, wenn im obersten Feld die 128[176] steht? Denke dir selbst eine Zahl aus, die im obersten Feld stehen könnte und lass deinen Nachbarn die erste Zahl angeben.



(f) Untersuche nun vierreihige Zahlenmauern. Welche Zahl steht im ersten Feld, wenn im obersten Feld die 124[188] steht? Denke dir selbst eine Zahl aus, die im obersten Feld stehen könnte und lass deinen Nachbarn die erste Zahl angeben.



Lösung:
(a) Oben steht die 71
(b) $F2, F3$ um 1 erhöhen: Erhöhung tritt dreimal auf. Damit erhöht sich $F10$ um 3
$F1$ um 1 erhöhen: Erhöhung tritt einmal auf. Damit erhöht sich $F10$ um 1
(c) $F1$ um 1 erhöhen: Erhöhung tritt einmal auf. Damit erhöht sich $F10$ um 1
$F2$ um 1 erhöhen: Erhöhung tritt viermal auf. Damit erhöht sich $F10$ um 4
$F3$ um 1 erhöhen: Erhöhung tritt sechsmal auf. Damit erhöht sich $F10$ um 6
(d) $F1$: Erhöhung um 2; $F2, F3$: Erhöhung um 6; $F4$: Erhöhung um 2;
(e) Oberstes Feld: 128 → erstes Feld: 31; Oberstes Feld: 176 → erstes Feld: 43
(f) Oberstes Feld: 124 → erstes Feld: 14; Oberstes Feld: 188 → erstes Feld: 22

20. **Zahlentheoretische Anwendungen der binomischen Formeln**

(a) 5-Quadrate
Berechne 15^2, 25^2, 35^2, 45^2, ... Finde eine Regel, wie man diese 5-Quadrate im Kopf berechnen kann.

(b) Spiegelzahlen
$18 \times 22 = 20^2 - 2^2 = 400 - 4 = 396$
$29 \times 31 = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899$
Berechne im Kopf so wie in den Beispielen: 19×21, 53×47 und 152×148.
Formuliere eine allgemeine Regel zu den Beispielen und versuche diese zu beweisen.

(c) Nimm zwei aufeinander folgende gerade natürliche Zahlen (oder zwei aufeinander folgende ungerade natürliche Zahlen), multipliziere sie und addiere die Zahl 1. Probiere mehrere Beispiele. Erkennst du eine Regel? Formuliere und beweise diese.

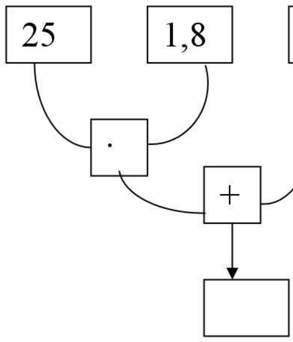
(d) Jede ungerade ganze Zahl lässt sich als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben. Formuliere eine Regel, wie das geht, und beweise den Satz.

(e) Wenn eine natürliche ganze Zahl n als Summe zweier Quadrate geschrieben werden kann, dann kann das Doppelte dieser Zahl, nämlich 2n, auch als Summe zweier Quadrate geschrieben werden. Formuliere eine Regel, wie das geht, und beweise den Satz.

Lösung:

(a) $(a \cdot 10 + 5)^2 = a^2 \cdot 100 + a \cdot 100 + 25 = (a^2 + a) \cdot 100 + 25 = a \cdot (a + 1)100 + 25$
(b) $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$
(c) $x \cdot (x + 2) + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$
(d) $(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$, also $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$
(e) $x^2 + y^2 = n \Rightarrow (x + y)^2 + (x - y)^2 = 2n$

21. Ganz schön heiß: Celsius und Fahrenheit



a) Berechne und schreibe als Term gemäß obiger Abbildung.

b) Das Ergebnis zeigt, wie viel 25 °C in Grad Fahrenheit sind. Verändere Rechenbaum und Term so, dass damit jede beliebige in Grad Celsius angegebene Temperatur in Grad Fahrenheit umgerechnet werden kann.

c) Schreibe den Term für die Umkehrung, so dass Temperaturen, die in Grad Fahrenheit angegeben sind, in Grad Celsius umgerechnet werden.

Lösung: 77 Grad Fahrenheit. Umkehrung: Erst 32 subtrahieren, dann durch 1,8 dividieren.

22. Ich schwärme für die Terme...
Fasse die Terme zusammen.

a) $5{,}2\,a - 6\,b + 14\,c - 66\,a - 42\,a + 20\,c - 5{,}8\,b =$

b) $17\,a - (43\,b + 17{,}8\,a - 22\,c) - 66{,}2\,b =$

c) $2{,}5\,a + 3\,(7\,a - 5{,}2\,b) - 66{,}8\,b + 12,8\,a =$

d) 44 cm – 2 mm + 0,8 m + 0,005 km – 33 cm – 0,04 m =

e) $0{,}65\,\alpha + 7{,}8\,\lambda - 3\,\varrho + (13\,\alpha - 10\,\lambda - 670\,\varrho) =$

Lösung:
a) $-102{,}8\,a - 11{,}8\,b + 34\,c$
b) $-0{,}8\,a - 109{,}2\,b + 22\,c$
c) $36{,}3\,a - 82{,}4\,b$
d) 586,8 cm
e) $13{,}65\,\alpha - 2{,}2\,\lambda - 673\,\varrho$

23. Herr Binomi lässt grüßen...
Wende die binomischen Formeln an.

a) $(3\,a + 2\,b)^2 =$

b) $(6\,r - 7\,s)^2 =$

c) $(1{,}3\,p + 3\,t)(1{,}3\,p - 3\,t) =$

Lösung: a) $9\,a^2 + 12\,ab + 4\,b^2$

b) $36\,r^2 - 84\,rs + 49\,s^2$

c) $1{,}69\,p^2 - 9\,t^2$