SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Jahrgangsstufe 10 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Wahlpflichtächergruppe I

1. Potenzfunktionen

1. (a) $D = \mathbb{R}\backslash\{1\} \quad W = \mathbb{R}\backslash\{2\} \quad a_1 : x = 1 \quad a_2 : y = 2$
   (b) -.-
   (c) $f^{-1} :\ y = \frac{3}{x-2} + 1 \quad {a_1}^{-1} : x = 2 \quad {a_2}^{-1} : y = 1$
   (d) $A(x) = \frac{1{,}5x^2}{x-1}\,FE$
   (e) $x = 4$

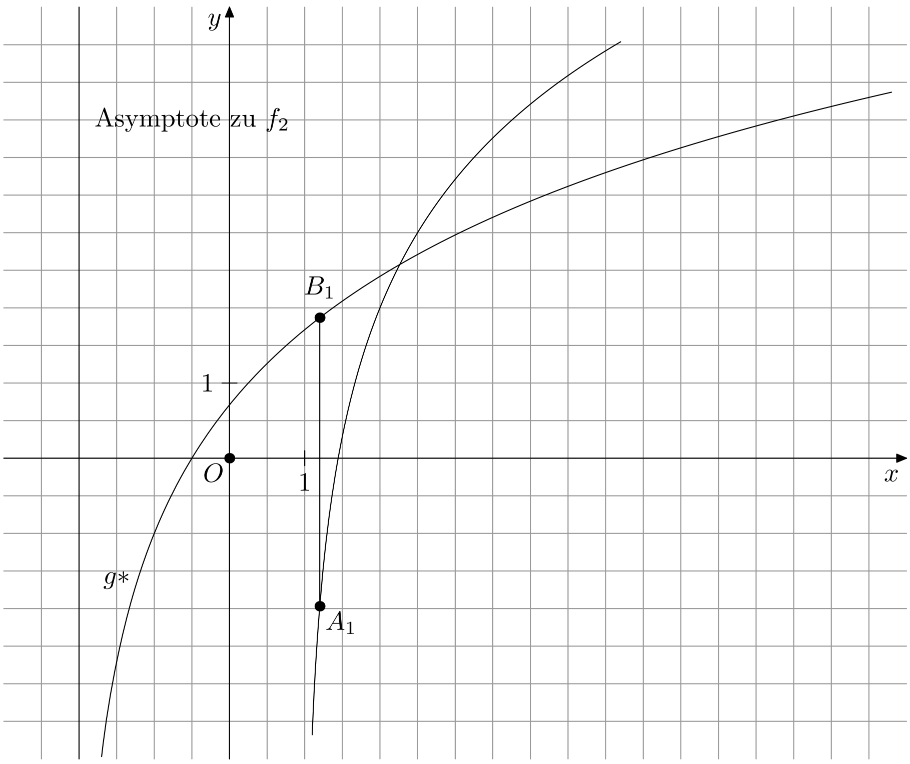
2. Die Füllhöhe betragt $7{,}56\,\text{cm}$.

2. Exponential- und Logarithmusfunktion

1. (a) $D =]1; \infty[\quad W = \mathbb{R}$
   (b) -.-
   (c) $S(1,30 \mid -1,54)$

2. (a) -.-
   (b) $1600000\,\mathrm{m}^3$
   (c) $34,31$ Jahre
   (d) 12%

3. (a)



Die Asymptote der Funktion f_2 hat Die Gleichung $x = -2$. Die Asymptote der Funktion f_1 hat die Gleichung $x = 1$. Also kann nur der Graph $g*$ die Funktion f_2 darstellen.

(b) Siehe Zeichnung.

(c) $\overline{A_nB_n}(x) = y_{B_n} - y_{A_n} = \log_{1,5}(x+2) - 1 - [\log_{1,5}(x-1) + 2]$

$$\overline{A_nB_n}(x) = \log_{1,5}(x+2) - 1 - \log_{1,5}(x-1) - 2$$

$$\overline{A_nB_n}(x) = \left[\log_{1,5}\frac{x+2}{x-1} - 3\right]\text{LE}$$

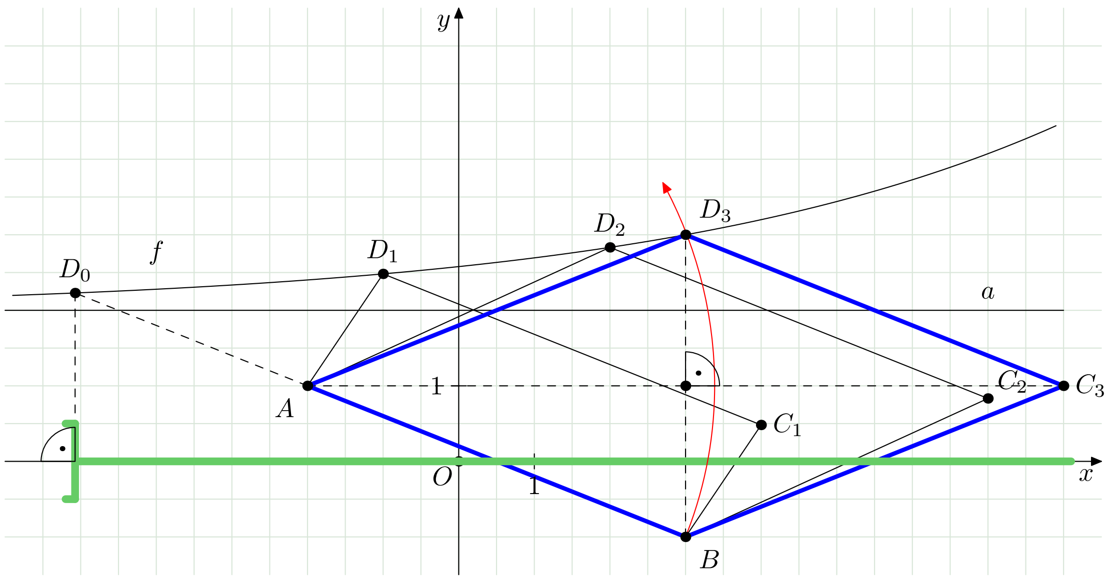
(d) Am Schnittpunkt wird eine der Streckenlängen $\overline{A_nB_n}$ zu Null:

$$\Leftrightarrow \quad \log_{1,5}\frac{x+2}{x-1} = 3 \quad \mid 1,5\uparrow \qquad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{x-1} = 1,5^{\,3} = 3,375$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2\frac{5}{19} \quad x \approx 2,26$$

4. (a) a: $y = 2$.

(b)



(c) Im II. Quadranten liegen alle Punkte C_n unterhalb der Asymptote a und oberhalb der x-Achse, weil in jedem der Parallelogramme ABC_nD_n der Punkt C_n jeweils 2 LE unterhalb seines Punktes D_n liegt. Damit hat der Trägergraph der Punkte C_n die x-Achse als Asymptote. Alle Punkte des Graphen der Funktion f liegen aber oberhalb der Asymptoten a. Also meiden sich die beiden Graphen außerhalb des I. Quadranten. **Hinweis:** Natürlich könntest du auch die Gleichung des Trägergraphen f' der Punkte C_n rechnerisch herleiten: Er ensteht durch Parallelverschiebung des Graphen der

Funktion f mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dann müsstest du die beiden Graphen rechnerisch zum Schnitt bringen. Es stellt sich heraus, dass die Lösungsmenge der zugehörigen Gleichung leer ist.

(d) Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD_n} = \begin{pmatrix} x+2 \\ 1,2^{x-3}+1 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \quad A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & x+2 \\ -2 & 1,2^{x-3}+2 \end{vmatrix} \text{ FE} = [5 \cdot (1,2^{x-3}+1) + 2 \cdot (x+2)] \text{ FE}$$

$$\Rightarrow \quad A(x) = (5 \cdot 1,2^{x-3} + 5 + 2x + 4) \text{ FE} = (5 \cdot 1,2^{x-3} + 2x + 9) \text{ FE}.$$

(e)
- Siehe Zeichnung: Alle Rauten haben vier gleich lange Seiten. Der Kreisbogen um den Punkt A mit dem Radius $\overline{AB}$ schneidet den Graphen der Funktion f im Punkt D_3. Z.B. liefert dann die Spiegelung des Punktes A an der Diagonalen $[BD_3]$ den Punkt C_3.
- $A_{Raute} = 0,5 \cdot \overline{AC_3} \cdot \overline{BD_3} = (0,5 \cdot 10 \cdot 4)\,\text{FE} = 20\,\text{FE}$
- Dem Anschein nach hat also der Abszissenwert x des Punktes D_3 den Wert 3.
  $\Rightarrow \quad A(3) = (5 \cdot 1,2^{3-3} + 2 \cdot 3 + 9)\,\text{FE} = 20\,\text{FE}.$

(f) Der Punkt D_0 ist der Schnittpunkt der Halbgeraden $[BA$ mit dem Graphen von f. An dieser Stelle entartet das betreffende Parallelogramm zur Strecke.
Links von D_0 kehrt sich der Drehsinn der Parallelogramme ABC_nD_n um, was nicht erlaubt ist.
Also stellt die fett markierte Halbgerade auf der x-Achse, die senkrecht unter D_0 anfängt und sich beliebig weit nach rechts fortsetzt, die Menge aller zulässigen x-Werte für Parallelogramme ABC_nD_n dar.
Anmerkungen:
- In der Zeichnung scheint $x = -5$ die linke Grenze zu sein. Genauer: $x = -5,073\,663\,564\ldots$
- Unter dem Dateinamen „10eh038.gxt" sind die Lösungen dynamisch nachzuvollziehen.

5. (a)

x	1	2	3	4	5	...
9^x	9	81	729	6561	59049	...

Bei geradem Exponenten lautet die Endziffer stets 1, bei ungeradem Exponenten 9. Andere Endziffern außer 1 oder 9 gibt es nicht.
$9^{9^9} = 9^{387\,420\,489}$; die letzte Ziffer des Exponenten ist 9, also ungerade. Damit endet der Wert der Potenz 9^{9^9} auf die Ziffer 9.

(b) $9^{9^9} = 9^{(9^9)} = 9^{387\,420\,489}$
Diese Zahl gilt es nun, in eine Potenz mit der Basis 10 zu verwandeln, weil der Exponent jeder Zehnerpotenz die Stellenzahl des Potenzwertes wiedergibt:

$$\begin{array}{rcll} 9^{387\,420\,489} & = & x & \mid \log_{10} \\ 387\,420\,489 \cdot \log_{10} 9 & = & \log_{10} x & \\ 369\,693\,100 & \approx & \log_{10} x & \mid 10\uparrow \\ 10^{369\,693\,100} & \approx & x & \end{array}$$

Das bedeutet: Der Wert der Potenz 9^{9^9} hat etwa 369 693 100 Stellen.

(c) Für die Niederschrift von 369 693 100 Ziffern brauchst du also 369 693 100 s.
$1\,\mathrm{d} = 86\,400\,\mathrm{s}$.
$369\,693\,100\,\mathrm{s} : 86\,400\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \approx 4279\,\mathrm{d}$.

Bei 30 Schülerinnen/Schülern hätte also jede(r) $4279\,\mathrm{d} : 30 \approx 142\,\mathrm{d}$, also ca. viereinhalb Monate **pausenlos** zu tun.

Anmerkung: Neben den vier Grundrechenarten wurde hier das Potenzieren zur Darstellung der größten Zahl „aus drei Ziffern“ (und nicht nur „dreiziffrigen“) herangezogen. Es gibt noch ein Rechenzeichen, mit dem man den Zahlenwert bis ins Unermessliche steigern könnte:
Es ist das Zeichen „!“ (sprich: „Fakultät“), das beispielsweise die folgende Bedeutung hat: $3\,!$ (sprich: „Drei Fakultät“) $= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ oder $5\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.
Damit eröffnen sich enorme Möglichkeiten: $(3\,!)\,!$ oder kurz $3\,!\,! = 6\,! = 720$ usw.
Es wird jetzt klar, dass es unter Einbeziehung des Fakultätszeichens für die größte Zahl aus drei Ziffern nach oben keine Grenze gibt: $9\,!\,!\,!\,\ldots^{9\,!\,!\,!\,\ldots^{9\,!\,!\,!\,\ldots}}$
Das Fakultätszeichen taucht jedoch in der Regel im Stoff der Sekundarstufe I lediglich im Kapitel „Daten und Zufall“ auf.

3. Trigonometrische Funktionen

1. (a) $C(-1,46 \mid 1)$
   (b) $C(-1,46 \mid 1)$

2. $x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

3. (a) -.-
   (b) $\alpha = 120° \quad \delta = 104,04° \quad b = 7,20\,LE$
   (c) $A_{ABC} = 9\,FE$

4. (a) $178,4\,\text{km}$
   (b) $48,6\,\text{km}$

5. ca. $3041\,\text{m}$

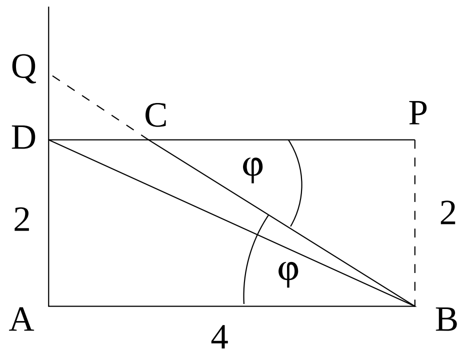
6. ca. $110\,\text{m}$

7.

8. (a) $\beta \approx 131,79°$
   (b) ca. $3,36$m
   (c) ca. $1,11$m

9.

   Wir rechnen nur mit Maßzahlen.
   (a) —
   (b)



Nur für $C \in]DP]$ gibt es Trapeze. Also muss der Punkt Q oberhalb vom Punkt D liegen:
$\tan\varphi = \frac{\overline{QA}}{\overline{AB}} > \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = 0,5.$

(c) Es gibt zwei Lösungen:

1. $C = D$. $\overline{BD}$ ist die Seitenlänge: $\tan\varphi = 0,5 \quad \varphi_1 \approx 26,57°$.
2. $C = P$. $\varphi_2 = 90°$.

(d) • 1. Möglichkeit:

Siehe Zeichnung zur Lösung b).

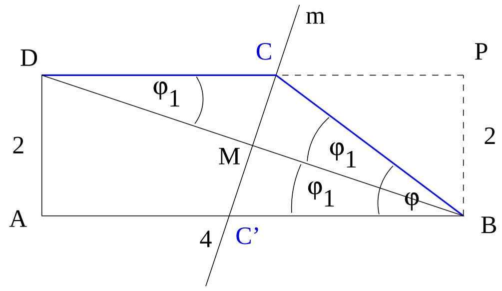
Es muss gelten: $\overline{CB} = \overline{DC}$.
ΔCBP: $\sin\varphi = \frac{2}{\overline{CB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{CB} = \frac{2}{\sin\varphi}$.
Weiter gilt: $\overline{DC} = \overline{DP} - \overline{CP} = 4 - \overline{CP}$.
ΔCBP: $\tan\varphi = \frac{2}{\overline{CP}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{CP} = \frac{2}{\tan\varphi} \quad \Rightarrow \quad \overline{DC} = 4 - \frac{2}{\tan\varphi}$.

$$\begin{aligned}
\text{Also: } \overline{CB} = \overline{DC} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sin\varphi} = 4 - \frac{2}{\tan\varphi} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 + \cos\varphi = 2\sin\varphi \\
&\Leftrightarrow \quad \sin\varphi - 0,5\cos\varphi = 0,5
\end{aligned}$$

Mit $0,5 \approx \tan 26,57°$ ergibt sich:

$$\begin{array}{lll}
\sin\varphi - \frac{\sin 26,57°}{\cos 26,57°}\cos\varphi & \approx & 0,5 \\
\sin\varphi\cos 26,57° - \sin 26,57°\cos\varphi & \approx & 0,5 \cdot \cos 26,57° \\
\sin(\varphi - 26,57°) & \approx & 0,5 \cdot \cos 26,57° \\
\varphi - 26,57° & \approx & 26,56° \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \approx 53,13°
\end{array}$$

2. Möglichkeit: Man erzeugt durch die Mittelsenkrechte m das gleichschenklige Dreieck DBC:



Wegen $\sphericalangle DBA = \varphi_1$ [vgl. Lösung c)] folgt $\sphericalangle BDC = \varphi_1$ (Z-Winkel).
Also muss auch $\sphericalangle CBD = \varphi_1$ sein.
$\Rightarrow \quad \varphi$ ist doppelt so groß wie φ_1: $\varphi \approx 53,14°$.

- Alle Innenwinkel dieses gleichseitigen Achtecks müssten gleiches Maß haben: $180° - \varphi = 90° + \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 45°$ (siehe Figur in der Aufgabenstellung).
  Das Ergebnis steht im Widerspruch zur Lösung in einer der beiden vorhergehenden Möglichkeiten; also sind keine regelmäßigen Achtecke darunter.

(e) Siehe Zeichnung zur Lösung b):

$A(ABCD) = 4 \cdot 2 - \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \overline{CP}$

$\Rightarrow \quad A(ABCD) = 8 - \dfrac{2}{\tan\varphi}$ [vgl. Lösung d) 1. Möglichkeit]

$\Rightarrow \quad A(\varphi) = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (8 - \dfrac{2}{\tan\varphi}) = 36 - \dfrac{8}{\tan\varphi}$.

Man betrachte hier erneut den Grenzfall $\varphi = 90°$.

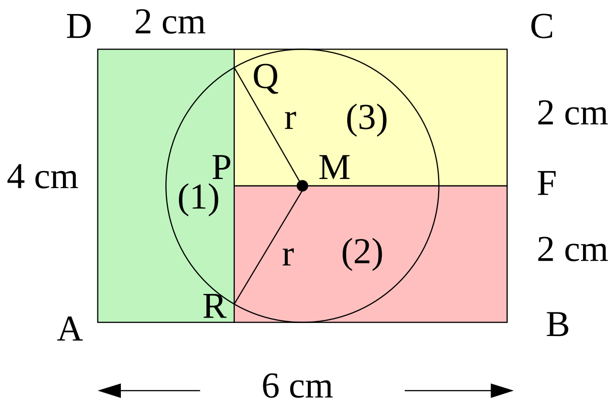
(f) Siehe Abbildung in der Lösung b):
Der Fall $\overline{CB} = 2$ kann nicht eintreten, denn die Hypotenuse $[CB]$ im ΔCBP ist stets länger als die 2 cm lange Kathete $[BP]$.
Also: $\overline{DC} = 2$; damit ist das Dreieck CBP gleichschenklig-rechtwinklig und es gilt $\varphi = 45°$.
$A(45°) = 36 - 8 = 28$.

10. (a) $\epsilon_1 = 56,44°$ und $\epsilon_2 = 123,56°$

(b) $\epsilon = 26,38°$

11.

(a) Weil alle Rechtecke im Inneren kongruent sind, muss $\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{AE} = 2\,\text{cm}$ = Kreisradius r gelten. $\quad\Rightarrow\quad \overline{BC} = \overline{AD} = 4\,\text{cm}$.



(b) Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt $A(1)$ des Kreissegmentes (1): (Der Flächeninhalt des Kreises wird später mit $A_{\odot}$ abgekürzt.)
Wegen $\overline{PM} = 1\,\text{cm}$ und $\overline{MQ} = 2\,\text{cm}$ ist das Dreieck PMQ ein halbes gleichseitiges Dreieck. $\Rightarrow$ $\sphericalangle QMR = 120°$
Das Dreieck RMQ ist dann genauso groß wie ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von $2\,\text{cm}$.

$$A(1) = \left(\frac{120°}{360°} \cdot 2^2\pi - \frac{2^2}{4}\sqrt{3}\right)\,\text{cm}^2 \approx 2,46\,\text{cm}^2$$

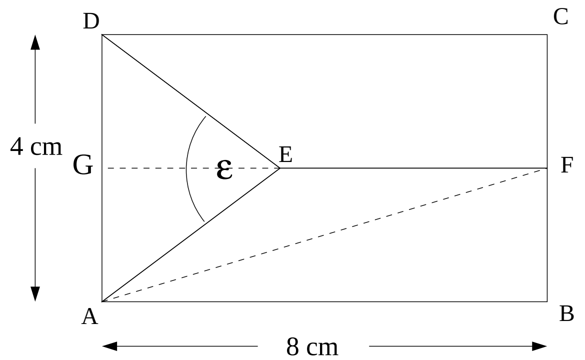
$A_{\odot} = 2^2\pi\,\text{cm}^2 \approx 12,57\,\text{cm}^2$

$$\frac{A(1)}{A_{\odot}} \approx \frac{2,46\,\text{cm}^2}{12,57\,\text{cm}^2} \approx 19,57\%$$

Und weiter gilt: $\frac{A(2)}{A_{\odot}} = \frac{A(3)}{A_{\odot}} \approx (100\% - 19,57\%) : 2 \approx 40,22\%$

12. (a) –

(b)



Das Dreieck AED ist stets gleichschenklig.
Das Winkelmaß ε wird für $E = F$ am kleinsten:

$$\tan\frac{\varepsilon(min)}{2} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GF}} = \frac{2}{8} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\,(\text{min}) \approx 28,07°$$

Andererseits darf der Punkt E nicht auf F liegen; d.h. es gilt stets $\varepsilon < 180°$.
Also gilt insgesamt: $\varepsilon \in [28,07°; 180°[$.
Anmerkung: Es gilt eigentlich $\varepsilon\,(\text{min}) = 28,072\,486\ldots°$, so dass die linke Intervallgrenze nicht exakt angegeben werden kann.

(c) Im Dreieck AEG gilt:

$$\overline{GE} = \frac{2}{\tan\frac{\varepsilon}{2}} \quad .$$

$$A_D = 0,5 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{GE} = 0,5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{\tan\frac{\varepsilon}{2}}\,\text{cm}^2 = \left(\frac{4}{\tan\frac{\varepsilon}{2}}\right)\,\text{cm}^2 \quad .$$

(d) Es muss gelten:

$$A_D = \frac{1}{3} \cdot A(ABCD)$$

$$\text{Also}: \quad \frac{4}{\tan\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{1}{3} \cdot 32 \quad \Leftrightarrow \quad \tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \quad \textbf{(*)} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 41,11°$$

(e) $A_T = 0,5 \cdot (\overline{AB} + \overline{EF}) \cdot \overline{AF}$ und

$$\overline{EF} = 8\,\text{cm} - \overline{GE} = \left(8 - \frac{2}{\tan\frac{\varepsilon}{2}}\right)\,\text{cm}$$

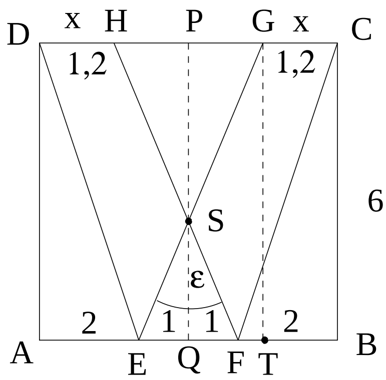
$$A_T = 0,5 \cdot \left(8 + 8 - \frac{2}{\tan\frac{\varepsilon}{2}}\right) \cdot 2\,\text{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad A_T = \left(16 - \frac{4}{\tan\frac{\varepsilon}{2}}\right)\,\text{cm}^2$$

(f) Wir setzen $\tan\frac{\varepsilon}{2} = z$. Dann muss $A_D = A_T$ gelten:

$$\frac{4}{z} = 16 - \frac{2}{z} \quad \Leftrightarrow \quad z = \tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{8}$$

Die Übereinstimmung mit der Gleichung **(*)** in der Lösung der Aufgabe (d) ist damit errreicht.

13. (a)
- –
-



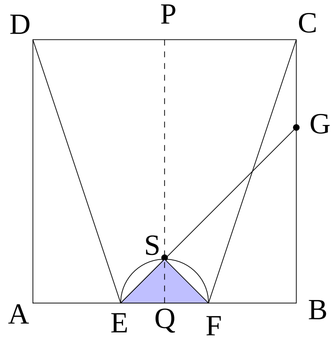
Die gesuchte Hilfslinie ist das Lot $[GT]$ vom Punkt G auf die Seite $[AB]$.
Es gilt $\sphericalangle EGT = \frac{\varepsilon}{2}$ (Z-Winkel) und $\overline{ET} = (4-1,2)\,\text{cm} = 2,8\,\text{cm}$.
Im Dreieck ETG gilt dann
$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{2,8}{6} \quad\Rightarrow\quad \frac{\varepsilon}{2} \approx 25,02° \quad\Rightarrow\quad \varepsilon \approx 50,04°$.

(b) In diesem Fall muss $\varepsilon = 60° = \sphericalangle FEG$ gelten.
Dann gilt im Dreieck EFG: $\overline{ET} = (4-x)\,\text{cm}$.

$$\tan 60° = \frac{\overline{GT}}{\overline{ET}} = \frac{6}{4-x} = \sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad x = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0,54$$

.

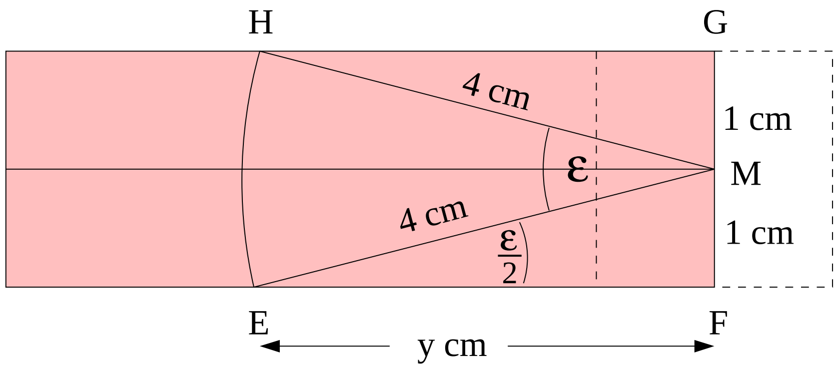
(c)



Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck EFS wird dadurch erzeugt, dass man den THALES-Halbkreis über $[EF]$ mit der Symmetrieachse $[PQ]$ schneidet.
Die Halbgerade $[ES]$ müsste die Seite $[CD]$ im Punkt G schneiden. Das ist offenbar nicht der Fall. Also kann das Dreieck EFS nie gleichschenklig-rechtwinklig werden.

14. (a) –

(b) Wir betrachten die Hälfte des waagrechten Balkens:



$\Delta EFM : y^2 = 4^2 - 1^2 \quad\Rightarrow\quad y = \sqrt{15}$
$A(EFM) + A(HMG) = y \cdot 1\,\text{cm}^2 = \sqrt{15}\,\text{cm}^2 \approx 3,87\,\text{cm}^2$

$\Delta EFM : \sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 28{,}96°$

$$A(Sektor) = \frac{28{,}96°}{360°} \cdot 4^2 \cdot \pi \,\text{cm}^2 \approx 4{,}04\,\text{cm}^2$$

Der Teil des Kreuzes, der waagrecht links herausragt:
$2\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} - (4{,}04 + 3{,}87)\,\text{cm}^2 = 4{,}09\,\text{cm}^2$
Insgesamt ragen $8{,}18\,\text{cm}^2$ des waagrechten Kreuzbalkens aus dem Kreis heraus.

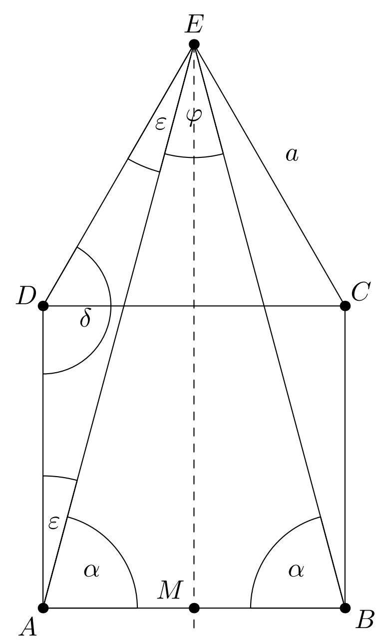
Der Teil des Kreuzes, der senkrecht (z.B. oben) herausragt:
$2\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} - (4{,}04 + 3{,}87)\,\text{cm}^2 = 0{,}09\,\text{cm}^2$
Insgesamt ragen $0{,}18\,\text{cm}^2$ des senkrechten Kreuzbalkens aus dem Kreis heraus.

Also ragen (gerundet) $8{,}36\,\text{cm}^2$ des Kreuzes aus dem Kreis heraus.

Eine Möglichkeit, die Fläche des Kreuzes zu berechnen, besteht darin, dass du die Flächeninhalte beiden überlappenden Rechtecke, die das Kreuz ergeben, berechnest. Danach musst du jedoch am Ende den Inhalt des Quadrates im Zentrum mit der Seitenlänge 2 cm einmal abziehen, weil dieses Quadrat ja **beiden** besagten Rechtecken angehört:
$A(Kreuz) = 2 \cdot 8\,\text{cm}^2 + 2 \cdot 12\,\text{cm}^2 = 36\,\text{cm}^2$
Prozentualer Anteil der herausragenden Fläche:

$$\frac{8{,}36}{36} \approx 23{,}22\%\,.$$

15. (a)



(b) In der Figur ist EM die Symmetrieachse.
Weil die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ mit der des gleichseitigen Dreiecks DCE übereinstimmt, sind die Dreiecke AED und EBC gleichschenklig und wegen der Symmetrie kongruent.
Aus Symmetriegründen ist das Dreieck ABE ebenfalls gleichschenklig.
Weiter gilt: $\delta = 90° + 60° = 150° \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = (180° - 150°) : 2 = 15°$.
$\Rightarrow \quad \alpha = 90° - \varepsilon = 75°$ und $\varphi = 180° - 2 \cdot \alpha = 30°$
Oder am Punkt E: $\varphi = 60° - 2 \cdot \varepsilon = 30°$.

(c) In der Lösung (b) steht: $\alpha = 75°$.

Im Dreieck AME gilt: $\tan 75° = \dfrac{\overline{EM}}{\overline{AM}} = \dfrac{a + \frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \dfrac{\frac{a}{2}\left(2 + \sqrt{3}\right)}{\frac{a}{2}}$

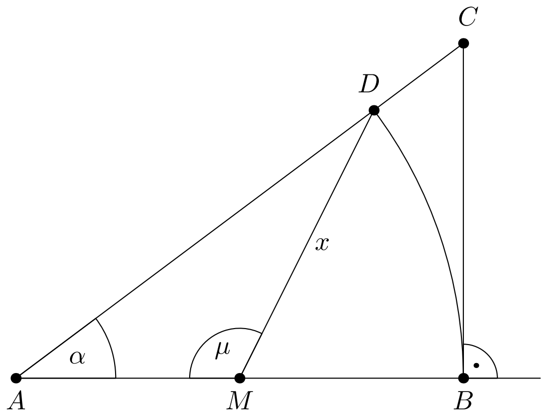
$\Rightarrow \quad \tan 75° = 2 + \sqrt{3}$

(d) Es gilt: $75° = 45° + 30°$. Damit ist $\psi = 45°$ und $\zeta = 30°$
Aus der Formelsammlung: $\tan 45° = 1$ und $\tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad \tan 75° = \tan(45° + 30°) = \frac{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \tan 75° = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = \frac{6 \cdot (2 + \sqrt{3})}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

16.

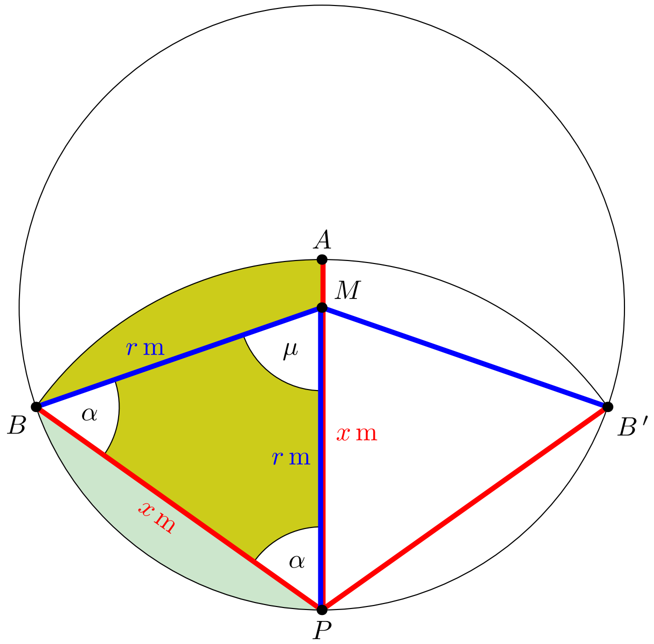


$\Delta ABC : \sin\alpha = \dfrac{6,72}{11,2} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 36,87°$
Weiter gilt: $\overline{AB}^{\,2} = (11,20^{\,2} - 6,72^{\,2})\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 8,96\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad \overline{AM} = 4,48\,\text{cm}$. Wegen $\overline{AD} = 8,96\,\text{cm}$ folgt weiter:
$\Delta AMD : x^{\,2} \approx 4,48^{\,2} + 8,96^{\,2} - 2 \cdot 4,48 \cdot 8,96 \cdot \cos 36,87°$
$\Rightarrow \quad x \approx 6,10\,\text{cm}$.

$$\Delta AMD: \frac{\sin\mu}{8,96} \approx \frac{\sin 36,87^\circ}{6,01} \quad \Rightarrow \quad [\mu \approx 63,45^\circ] \quad \vee \quad \mu \approx 116,55^\circ.$$

$$A_{\Delta AMD} \approx 0,5 \cdot 4,48 \cdot 8,96 \cdot \sin 116,55^\circ \,\text{cm}^2 \approx 17,96\,\text{cm}^2$$

17. (a) Maßstab 1 : 100



(b) $A_{\text{Sektor}\,PAB} = \dfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot x^2 \cdot \pi \quad \textbf{(1)}$

Dreieck PMB: $\mu = 180^\circ - 2\alpha$
Kosinussatz im Dreieck PMB:
$x^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\mu = 2r^2 - 2r^2\cos(180^\circ - 2\alpha)$
$x^2 = 2r^2 + 2r^2\cos\alpha \quad \textbf{(2)}$
$x = r\sqrt{2}\sqrt{1+\cos 2\alpha} \quad \textbf{(3)}$

(2) in **(1)**:
$$A_{\text{Sektor}\,PAB} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot (2r^2 + 2r^2\cos\alpha) \cdot \pi = \frac{\alpha}{180^\circ} r^2\pi + \frac{\alpha}{180^\circ} r^2 \pi \cos 2\alpha \quad \textbf{(4)}$$

Dazu muss die Fläche des Segments unterhalb der Sehne [PB] addiert werden:

$$\begin{aligned}
A_{Segment} &= A_{Sektor\,MBP} - A_{\Delta MBP} \\
&= \frac{\mu}{360^\circ} \cdot r^2\pi - \frac{1}{2} r^2 \sin\mu \\
&= \frac{180^\circ - 2\alpha}{360^\circ} \cdot r^2\pi - \frac{1}{2} r^2 \sin(180^\circ - 2\alpha) \\
A_{Segment} &= \frac{1}{2} r^2\pi - \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot r^2\pi - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha \quad \textbf{(5)}
\end{aligned}$$

Sektor- und Segmentfläche ergeben zusammen [**(4)**+**(5)**] die halbe Weidefläche von „Lohengrin“:

$$\left(\frac{\alpha}{180°}r^2\pi + \frac{\alpha}{180°}r^2\pi\cos 2\alpha\right) + \left(\frac{1}{2}r^2\pi - \frac{\alpha}{180°}\cdot r^2\pi - \frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha\right) = \frac{1}{4}r^2\pi$$

Diese Gleichung lässt sich vereinfachen zu:

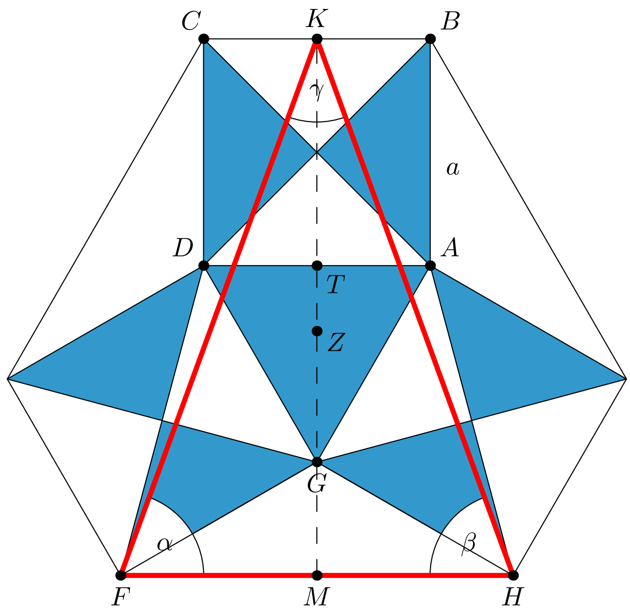
$$2\sin 2\alpha - \frac{\alpha}{45°}\pi\cos 2\alpha = \pi \quad \textbf{(*)}\text{, wobei } \alpha \text{ in Grad angegeben wird.}$$

Natürlich kommt es dabei nicht mehr auf die Länge des Kreisdurchmessers an.
Nun ist die Lösung der Gleichung **(*)** nicht in geschlossener Form darstellbar. Das liegt daran, dass darin sowohl α als auch $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ auftauchen.
Mit dem SOLVER eines Taschenrechners ergibt sich: $\alpha \approx 54,59°$.
In **(3)** eingesetzt erhältst du die Leinenlänge $x \approx r \cdot 1,16$. Das bedeutet: Die Leine ist etwa 16 % länger als der Kreisradius r.

Anmerkungen:

- Weil Lohengrins Leine um seinen Hals liegt, könnte er Elsa mit seinen Hörnern trotzdem noch ärgern.
- Die Frage: „Wie lang müsste die Leine sein, damit Lohengrin p % der Kreisfläche erreichen kann?“ ist durch eine leichte Änderung der Gleichung **(*)** zu beantworten.

18. (a)



(b) Die Gerade MK ist die Symmetrieachse des Dreiecks FHK. Also gilt $\alpha = \beta$.
Im gleichseitigen Dreieck ADG stellt die Strecke $[GT]$ die Dreieckshöhe dar:

$\overline{GT} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3}.$

Der Punkt G ist der gemeinsame Eckpunkt zweier Quadrate und des gleichseitigen Dreiecks ADG. Also gilt: $\sphericalangle HGF = 360° - 2 \cdot 90° - 60° = 120°$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle HFG = \sphericalangle GHF = (180° - 120°) : 2 = 30°$

Das Dreieck FHG wird durch seine Höhe $[GM]$ in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt. $\Rightarrow \quad \sphericalangle FGM = \sphericalangle MGH = (90° - 30°) : 2 = 60°$

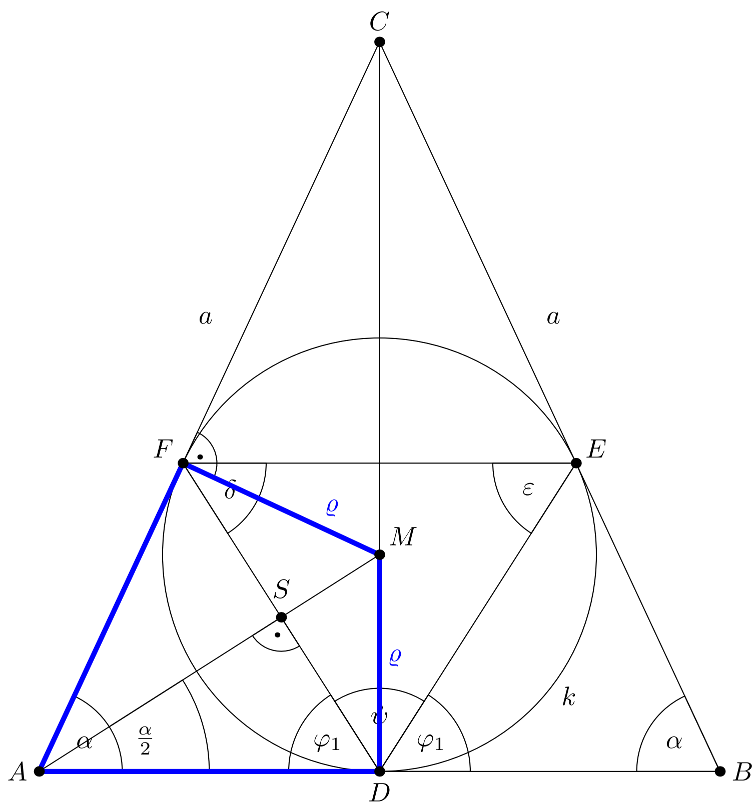
Wegen $\overline{FG} = \overline{AG} = a$ gilt: $\Delta FMG \cong \Delta GMH \cong \Delta GAT$. Es sind alles halbe gleichseitige Dreiecke: $\overline{GM} = \frac{1}{2}a$.

Im rechtwinkligen Dreieck FMK gilt dann:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{KT} + \overline{TG} + \overline{GM}}{\overline{FM}} = \frac{a + \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot a}{\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow \quad \alpha = \beta \approx 69{,}90°$ und $\gamma \approx 180° - 2 \cdot 69{,}90° = 40{,}20°$

19. (a)



(b)
- Siehe obige Zeichnung.
- Das Viereck $ADMF$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, denn die Diagonale $[AM]$ ist die Halbierende des Winkels mit dem Maß α und damit die Symmetrieachse dieses Vierecks.
  Das Dreieck ADS ist rechtwinklig, weil die beiden Diagonalen in jedem Drachenviereck senkrecht aufeinander stehen:
  $\varphi_1 = 90° - \frac{\alpha}{2} = \varphi_2$. Weiter muss gelten: $\varphi_1 + \varphi_2 + \psi = 180°$
  $\Rightarrow \quad \psi = 180° - 2 \cdot \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \psi = \alpha.$

(c)
- Mit $\overline{CA} = \overline{CB} = a$ gilt: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin\gamma.$

  $$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin(180° - 2\alpha) = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2}a^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha$$

  $$\boxed{A_{\Delta ABC} = a^2 \sin\alpha\cos\alpha} \qquad \textbf{(*)}$$

  $$A_{\Delta DEF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FD}^{\,2} \sin\alpha \qquad \textbf{(**)}$$

  Wende im Dreieck ADF den Kosinussatz an:

  $$\overline{FD}^{\,2} = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{c^{\,2}}{4} \cdot (1 - \cos\alpha) \quad \text{in } \textbf{(*)}:$$

  $$\boxed{A_{DEF} = \frac{c^{\,2}}{4} \cdot (1 - \cos\alpha)\sin\alpha}$$

  $$\frac{A_{\Delta DEF}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{c^{\,2}}{4} \cdot (1 - \cos\alpha)\sin\alpha}{a^{\,2}\sin\alpha\cos\alpha} = \left(\frac{\frac{c}{2}}{a}\right)^2 \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}$$

  Im Dreieck ADC gilt: $\dfrac{\frac{c}{2}}{a} = \cos\alpha$

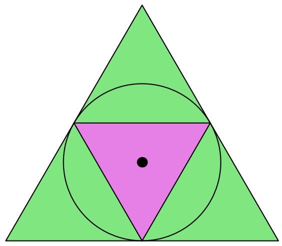
  $$\Rightarrow \quad \frac{A_{\Delta DEF}}{A_{\Delta ABC}} = \cos^2\alpha \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha(1 - \cos\alpha)$$

  Dabei darf aber α nicht $90°$ werden. **(Warum?)**

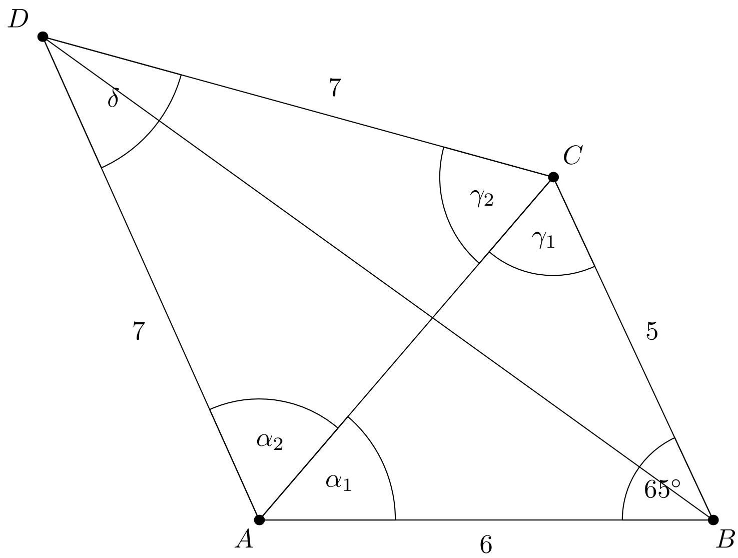
- $T(\alpha) = \cos\alpha(1 - \cos\alpha) = -\cos^2\alpha + \cos\alpha = -\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

  $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ liefert $T_{max} = \frac{1}{4}$

  Dann muss aber $\alpha = 60°$ gelten; d.h. in diesem Fall sind die Dreiecke ABC und DEF jeweils gleichseitig. Das innere Dreieck nimmt 25% der Gesamtfläche ein. Das sieht dann so aus:



20. (a)



(b) Zwar sind die Seiten $[AD]$ und $[CD]$ gleich lang, aber die Seiten $[BA]$ und $[BC]$ sind es nicht.

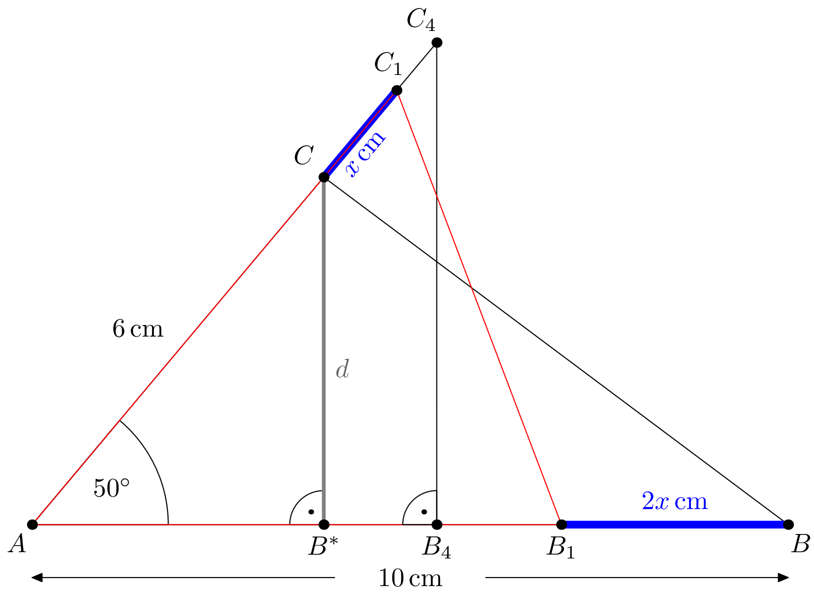
(c) $\Delta\, ABC$: $\overline{AC}^{\,2} = \left(5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 65^\circ\right)\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} \approx 5{,}97\,\text{cm}$

(d) $\Delta\, ABC$: $5^2 = 6^2 + 5{,}97^{\,2} - 2 \cdot 6 \cdot 5{,}97 \cdot \cos\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \approx 49{,}38^\circ$
$\Delta\, ACD$: $5{,}97^{\,2} = 7^{\,2} + 7^{\,2} - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos\delta \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 50{,}48^\circ$
$\Delta\, ACD$: $\alpha_2 = \gamma_2 \approx (180^\circ - 50{,}48^\circ) : 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \gamma_2 \approx 64{,}76^\circ$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle BAD = \alpha_1 + \alpha_2 \approx 114{,}14^\circ$
$\Rightarrow \quad \overline{BD}^{\,2} \approx \left(6^2 + 7^{\,2} - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos 114{,}14^\circ\right)\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} \approx 10{,}92\,\text{cm}$

(e) $A_{ABCD} = A_{\Delta ABC} + A_{\Delta ACD}$:

$$A_{ABCD} \approx \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin 65^\circ + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \sin 50{,}48^\circ\right)\,\text{cm}^2 \approx 32{,}49\,\text{cm}^2$$

21. (a) •



- $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot (10 \cdot 6 \cdot \sin 50°)\,\text{cm}^2 \approx 22{,}98\,\text{cm}^2$

(b)
- Siehe Zeichnung.
- $A_{\Delta AB_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot (7 \cdot 7.5 \cdot \sin 50°)\,\text{cm}^2 \approx 20{,}11\,\text{cm}^2$
- ΔAB^*C: $\quad \sin 50° = \frac{d}{6\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad d \approx 4{,}60\,\text{cm}$ (siehe Zeichnung)
- $\overline{B_1C_1}^{\,2} = 7^2 + 7.5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7{,}5 \cdot \cos 50°$
  $\Rightarrow \quad \overline{B_1C_1} \approx 6{,}14\,\text{cm}$ (siehe Zeichnung)

(c) $x < 0$: Aus „Verlängern“ würde „Verkürzen“ und umgekehrt, das geht nicht.
$x = 0$ liefert kein „neues Dreieck“, vgl. Angabe.
$x = 5$: Das Dreieck entartet zur Strecke.
$x > 5$: Die betreffenden Punkte B_n würden links vom Punkt A auftauchen; die betreffenden Dreiecke hätten dann den falschen Drehsinn.

Also: $x \in]0; 5[_{\mathbb{R}}$.

(d) $A(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot (10 - 2x)(6 + x) \cdot \sin 50°\right)\,\text{cm}^2 \approx 0{,}77 \cdot \left(30 + 5x - 6x - x^2\right)\,\text{cm}^2$

$A(x) \approx 0{,}77 \cdot \left(-x^2 - x + 30\right)\,\text{cm}^2 = (-0{,}77x^2 - 0{,}77x + 23{,}1)\,\text{cm}^2$

(e)
- Quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} T(x) &= -0{,}77x^2 - 0{,}77x + 23{,}1 \\ &= -0{,}77(x^2 - x + 0{,}5^2 - 0{,}25 - 30) \\ &= -0{,}77[(x + 0{,}5)^2 - 30{,}25] \\ T(x) &= -0{,}77(x + 0{,}5)^2 + 23{,}2925 \end{aligned}$$

$x = -0{,}5$ liefert $T_{max} = 23{,}2925$

- Wegen $-1{,}5 \notin]0; 5[_{\mathbb{R}}$ wird dieses Maximum bei keinem der Dreiecke AB_nC_n angenommen.

(f) $-0,77x^2 - 0,77x + 23,1 = 7,7 \quad \Leftrightarrow \quad -0,77x^2 - 0,77x + 15,4 = 0$
Der Solver des GTR liefert die beiden Lösungen $x_1 = 4$ und $x_2 = -5$.
Wegen $-5 \notin]0;5[_{\mathbb{R}}$ kommt nur $x_1 = 4$ als Lösung in Frage.

(g) Es muss gelten: $\overline{AB_n} = \overline{AC_n}$; d.h. $10 - 2x = 6 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\overline{3}$

(h) Fertige am besten eine Skizze dazu an.

- In diesem Fall gilt: $\cos 50° = \dfrac{10-2x}{6+x}$. Der Solver des GTR liefert $x \approx 2,32$.
- Siehe Zeichnung.

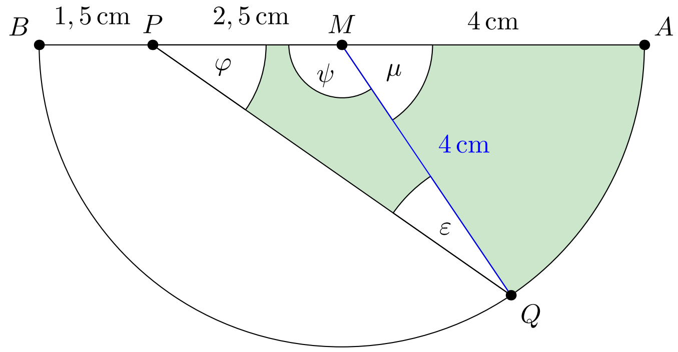
(i)
- Kosinussatz in den Dreiecken AB_nC_n:
$\overline{B_nC_n}(x)^2 = [(10-2x)^2 + (6+x)^2 - 2 \cdot (10-2x) \cdot (6+x) \cdot \cos 50°]\,\text{cm}^2$
$\approx [100 - 40x + 4x^2 + 36 + 12x + x^2 - 2 \cdot (60 + 10x - 12x - 2x^2) \cdot 0,64]\,\text{cm}^2$
$= [5x^2 - 28x + 136 - 1,28 \cdot (-2x^2 - 2x + 60)]\,\text{cm}^2$
$= [5x^2 - 28x + 136 + 2,56x^2 + 2,56x - 76,80]\,\text{cm}^2$
$\overline{B_nC_n}(x) \approx \sqrt{7,56x^2 - 25,44x + 59,2}\,\text{cm}$
- $\overline{B_nC_n}(1,5) = \sqrt{7,56 \cdot 1,5^2 - 25,44 \cdot 1,5 + 59,2}\,\text{cm} \approx 6,17\,\text{cm}$
Anmerkung: Das Ergebnis in der Aufgabe (b) 4. Punkt lautet: $\overline{B_1C_1} \approx 6,14\,\text{cm}$. Die Abweichung ergibt sich daraus, dass hier in der Lösung (i) 1. Punkt viel häufiger gerundet worden ist als in der Aufgabe (b) 4. Punkt. Der Wert 6,14 liegt näher am exakten Ergebnis, das aber nie „genau“ dagestellt werden kann.

(j) Im entsprechenden Dreieck gilt: $\sphericalangle AC_5B_5 = 180° - 50° - 62° = 68°$.

$$\frac{\sin 68°}{10-2x} = \frac{\sin 62°}{6+x}$$

Der Solver des GTR liefert $x \approx 1,21$.

22. (a)



Die Hilfslinie ist der Kreisradius $[MQ]$ mit $\overline{MQ} = \overline{MA} = \overline{MB} = 4\,\text{cm}$.

(b) ΔPQM: $\dfrac{2,5}{\sin\varepsilon} = \dfrac{4}{\sin 35^\circ} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 21,01^\circ$

$\Rightarrow \quad \psi \approx 180^\circ - 35^\circ - 21,01^\circ = 123,99^\circ.$

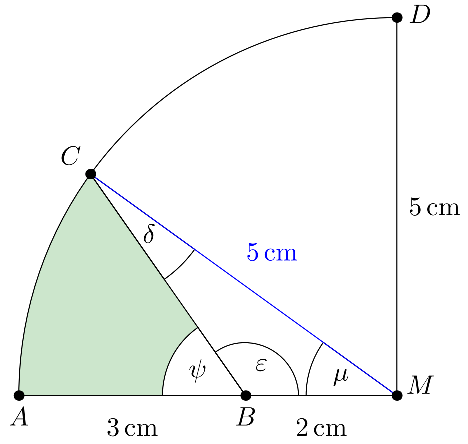
$A_{\Delta PQM} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 4 \cdot \sin 123,99^\circ \approx 4,15\,\text{cm}^2$

$\mu \approx 180^\circ - 123,99^\circ = 56,01^\circ.$

$A_{Sektor\,MQA} \approx \dfrac{56,01^\circ}{360^\circ} \cdot 4^2\pi \approx 7,82\,\text{cm}^2$

$\Rightarrow \quad A_{gesamt} \approx 4,15\,\text{cm}^2 + 7,82\,\text{cm}^2 = 11,97\,\text{cm}^2.$

23. (a)



Die Hilfslinie ist der Kreisradius $[MC]$ mit $\overline{MC} = \overline{MA} = \overline{MD} = 5\,\text{cm}$.

(b) $\varepsilon = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

ΔBMC: $\dfrac{2}{\sin\delta} = \dfrac{5}{\sin 125^\circ} \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 19,13^\circ$

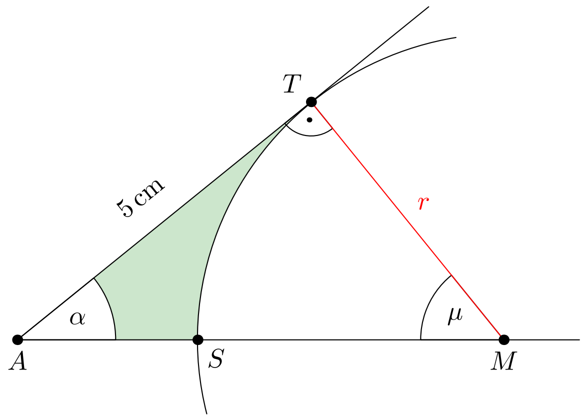
$\Rightarrow \quad \mu \approx 180^\circ - 125^\circ - 19,13^\circ = 35,87^\circ.$

$A_{\Delta BMC} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sin 35,87^\circ \approx 2,93\,\text{cm}^2$

$A_{Sektor\,MCA} \approx \dfrac{35,87^\circ}{360^\circ} \cdot 5^2\pi \approx 7,83\,\text{cm}^2$

$\Rightarrow \quad A_{Rest} = A_{Sektor} - A_{\Delta BMC} \approx 4,90\,\text{cm}^2.$

24. (a)



(b) Der Berührradius $r = \overline{MT}$ steht auf seiner Tangente $[AT$ senkrecht. Die Senkrechte zur Halbgeraden $[AT$ im Punkt T schneidet den waagrechten Schenkel von α im Kreismittelpunkt M. Damit werden der Kreisbogen und der Schnittpunkt S konstruierbar.

(c) ΔAMT: $\tan 39° = \dfrac{r}{5} \quad \Rightarrow \quad r \approx 4,05\,\text{cm}.$

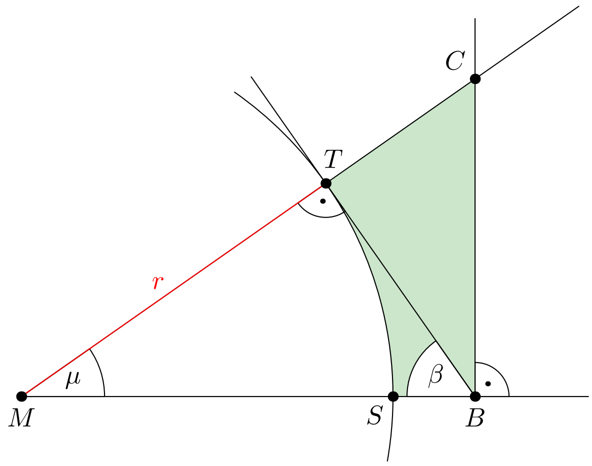
$\mu = 90° - 39° = 51°.$

$A_{\Delta AMT} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 4,05 \cdot 5\,\text{cm}^2 \approx 10,13\,\text{cm}^2\ .$

$A_{Sektor\, MTS} \approx \dfrac{51°}{360°} \cdot 4,05^2 \pi\,\text{cm}^2 \approx 7,30\,\text{cm}^2.$

$\Rightarrow \quad A_{Rest} = A_{\Delta AMC} - A_{Sektor} \approx 2,83\,\text{cm}^2.$

25. (a)



- Zeichne $[MB]$.

- Zeichne die Senkrechte zu $[MB]$ durch den Punkt B.
- Trage in B den Winkel mit dem Maß $\beta = 55°$ an. Jetzt hast du zwei Möglichkeiten, den Punkt T zu konstruieren:
  1.
  Zeichne durch den Punkt M die Senkrechte auf den freien Schenkel von β. Diese Senkrechte schneidet den freien Schenkel von β im Punkt T. Die Halbgerade $[MT$ scheidet die vorher gezeichnete Senkrechte zu MB durch den Punkt B im Punkt C.
  2.
  Der THALES-(Halb-)Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$ scheidet den freien Schenkel von β im Punkt T. Dann wird C wie in 1. konstruiert.
  Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde zur 1. Möglichkeit gegriffen.

(b) Der Berührradius $r = \overline{MT}$ steht auf seiner Tangente BT senkrecht.

Im ΔMBT gilt dann: $\mu = 90° - 55° = 35°$.

$\cos 35° = \dfrac{r}{6\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad r \approx 4,91\,\text{cm}$.

Für den Flächeninhalt des Kreissektors MST gilt dann:

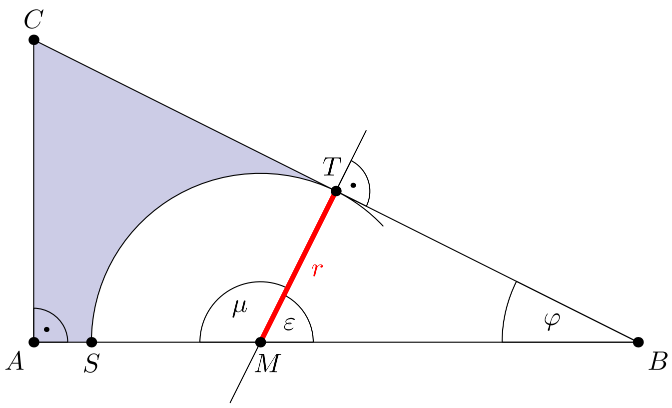
$A_{Sektor\,MST} \approx \dfrac{35°}{360°} \cdot 4,91^2 \pi\,\text{cm}^2 \approx 7,36\,\text{cm}^2$.

Im ΔMBC gilt: $\tan 35° = \dfrac{\overline{BC}}{6} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} \approx 4,20\,\text{cm}$.

$A_{\Delta MBC} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 4,20 \cdot 6\,\text{cm}^2 = 12,60\,\text{cm}^2$

$A_{Rest} = A_{\Delta MBC} - A_{Sektor} \approx 5,24\,\text{cm}^2$.

26. (a)



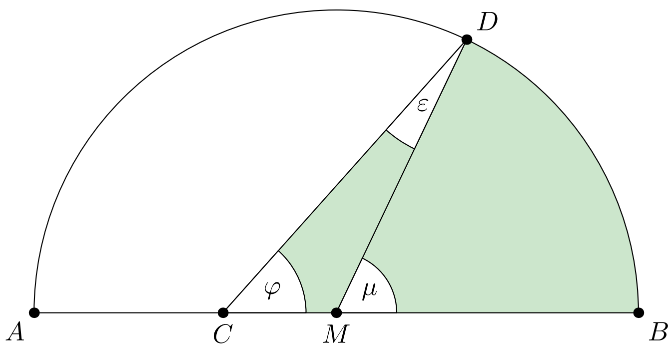
Der Berührradius $r = [MT]$ steht auf seiner Kreistangente BC senkrecht. Zeichne also eine Senkrechte zur Hypotenuse $[BC]$ durch den Punkt T. Diese Senkrechte schneidet dann die Kathete $[AB]$ im Mittelpunkt M des Kreisbogens.

(b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen.
PYTHAGORAS im Dreieck ABC: $\overline{BC}^2 = 8^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} \approx 8,97\,\text{cm}$.
$\Delta\, ABC$: $\tan\varphi = \dfrac{4}{8} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 26,57°$.
$\Delta\, MBT$: $\tan 26,57° \approx \dfrac{r}{4,47} \quad \Rightarrow \quad r \approx 2,24\,\text{cm}$,
und $\varepsilon \approx 90° - 26,57° = 63,43°$.
$\mu \approx 180° - 63,43° \quad \mu \approx 116,57°$.
$A_{\Delta\, ABC} = 0,5 \cdot 4 \cdot 8\,\text{cm}^2 = 16\,\text{cm}^2$
$A_{\Delta\, MBT} \approx 0,5 \cdot 2,24 \cdot 4,47\,\text{cm}^2 \approx 5,01\,\text{cm}^2$

$$A_{Sektor\, MTS} \approx \frac{116,57°}{360°} \cdot 2,24^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 = 5,10\,\text{cm}^2$$

$$A_{Farbe} \approx 16\,\text{cm}^2 - 5,01\,\text{cm}^2 - 5,10\,\text{cm}^2 = 5,89\,\text{cm}^2.$$

27. (a)



(b) Die Hilfslinie ist der Kreisradius $\overline{MD}$. Der Mittelpunkt des Kreisbogens von B nach D ist der Punkt M. Daher ist die Strecke $[CD]$ länger als der Kreisradius $\overline{MD}$. Bei einem Kreissektor müssen aber die begrenzenden Strecken gleich lang sein, weil dies die Kreisradien sind.

(c) $\overline{MD} = 4\,\text{cm}$ und $\overline{MC} = 1,5\,\text{cm}$.

Im Dreieck CMD gilt: $\dfrac{1,5\,\text{cm}}{\sin\varepsilon} = \dfrac{4\,\text{cm}}{\sin 49°} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 16,44°$.

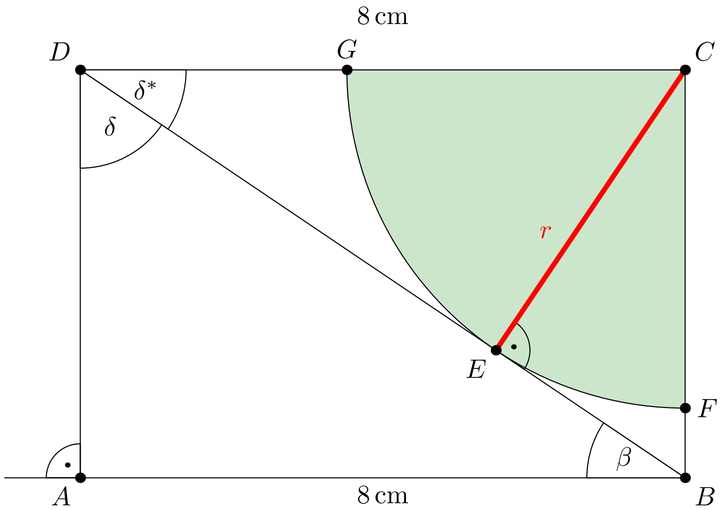
$\Rightarrow \quad \sphericalangle DMC \approx 180° - 49° - 16,44° = 114,56° \Rightarrow \quad \mu \approx 65,44°$.

$A_{\Delta\, CMD} \approx 0,5 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot \sin 114,56°\,\text{cm}^2 \approx 2,73\,\text{cm}^2$.

$$A_{Sektor\, MBD} \approx \frac{65,44°}{360°} \cdot 4^2 \cdot \pi \approx 9,14\,\text{cm}^2.$$

$A_{gesamt} \approx 2,73\,\text{cm}^2 + 9,14\,\text{cm}^2 = 11,87\,\text{cm}^2$.

28. (a)



Im Dreieck ABD gilt: $\beta = 90° - 56° = 34°$.

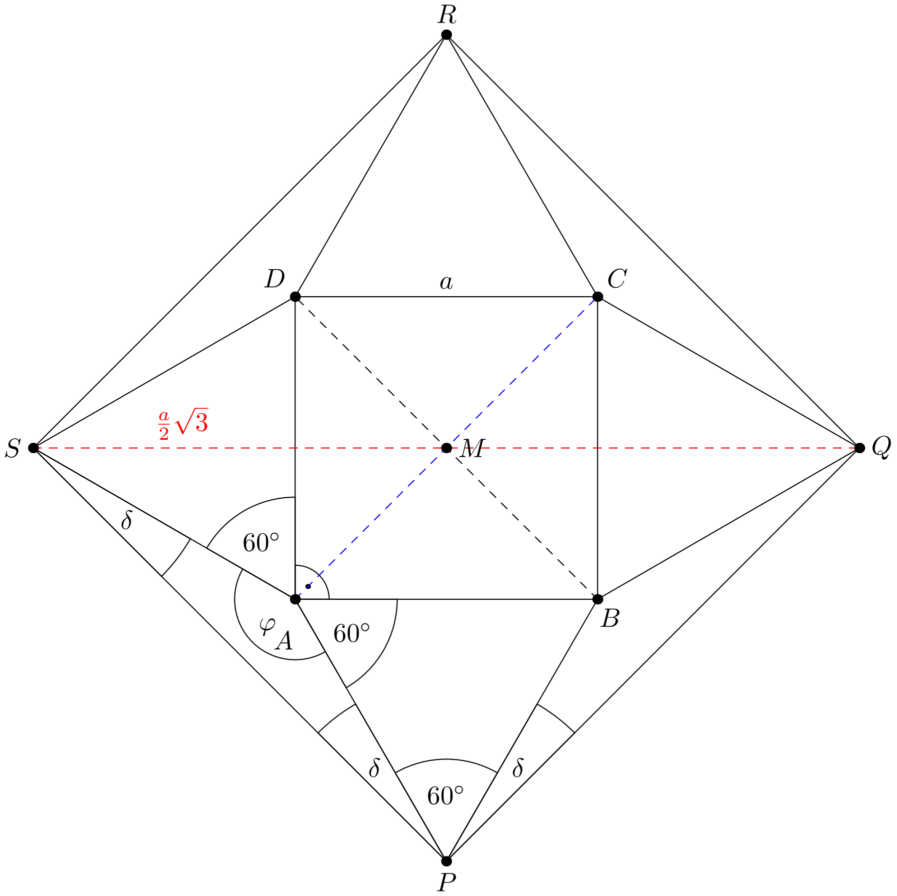
- Zeichne die Strecke $[AB]$.
- Errichte eine Senkrechte zur Strecke $[AB]$ durch den Punkt A.
- Trage am Punkt B den 34°-Winkel an.
- Die Senkrechte und der freie Schenkel des 34°-Winkels schneiden sich im Punkt D.
- Zeichne den Punkt C, die Diagonale $[BD]$ und den Kreisbogen ein.
- Der Berührradius $r = [CE]$ steht auf seiner Kreistangente BD senkrecht. Zeichne also das Lot vom Punkt C auf die Diagonale $[BD]$. Der Lotfußpunkt ist E und $r = [CE]$.

(b) Im Dreieck DEC gilt: $\delta^* = \beta = 34°$ (Z-Winkel).

$$\sin 34° = \frac{r}{8\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad r \approx 4,47\,\text{cm}.$$

$$A_{Sektor} \approx \frac{90°}{360°} \cdot 4,47^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 15,69\,\text{cm}^2$$

29. (a)



(b) Die vier Dreiecke SPA, PQB, QRC und RSD sind aus Symmetriegründen kongruent. Also handelt es sich bei dem Viereck $PQRS$ mindestens um eine Raute.
Am Punkt A gilt: $\varphi = 360° - 90° - 2 \cdot 60° = 150°$.
Aus Symmetriegründen sind die vier Dreiecke SPA, PQB, QRC und RSD gleichschenklig.
$\Rightarrow \quad \delta = (180° - 150°) : 2 = 15°$.
Dann siehst du z.B. am Punkt P: $\sphericalangle QPS = 2 \cdot 15° + 60° = 90°$. Also ist die Raute sogar ein Quadrat.

(c) **1. Möglichkeit:** Die Summe aller Teilflächen
$A_{PQRS} = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 150° = a^2 + a^2\sqrt{3} + a^2 = a^2(2 + \sqrt{3})$.

2. Möglichkeit: Alle Quadrate sind zueinander ähnlich
Wenn du das kleine Quadrat $ABCD$ mit einem Faktor k streckst, erhältst du das große Quadrat. (Erst eine anschließende Drehung des gestreckten Quadrates um 45° brächte dieses Zwischenbild zur Deckung mit dem großen Quadrat $PQRS$. Aber das spielt bei der Ermittlung des Flächeninhaltes des großen Quadrates $PQRS$ keine Rolle, weil ja die Drehung einer Fläche deren Inhalt unverändert lässt.)

Den Streckungsfaktor k ermittelst du über die Diagonalenlängen:. Es gilt z.B.: $k =$

$\dfrac{\overline{SQ}}{\overline{AC}}$.

$\overline{SQ} = 2 \cdot \dfrac{a}{2}\sqrt{3} + a = a \cdot (\sqrt{3}+1)$ und $\overline{AC} = a\sqrt{2}$.

Dann gilt: $k = \dfrac{a \cdot (\sqrt{3}+1)}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$.

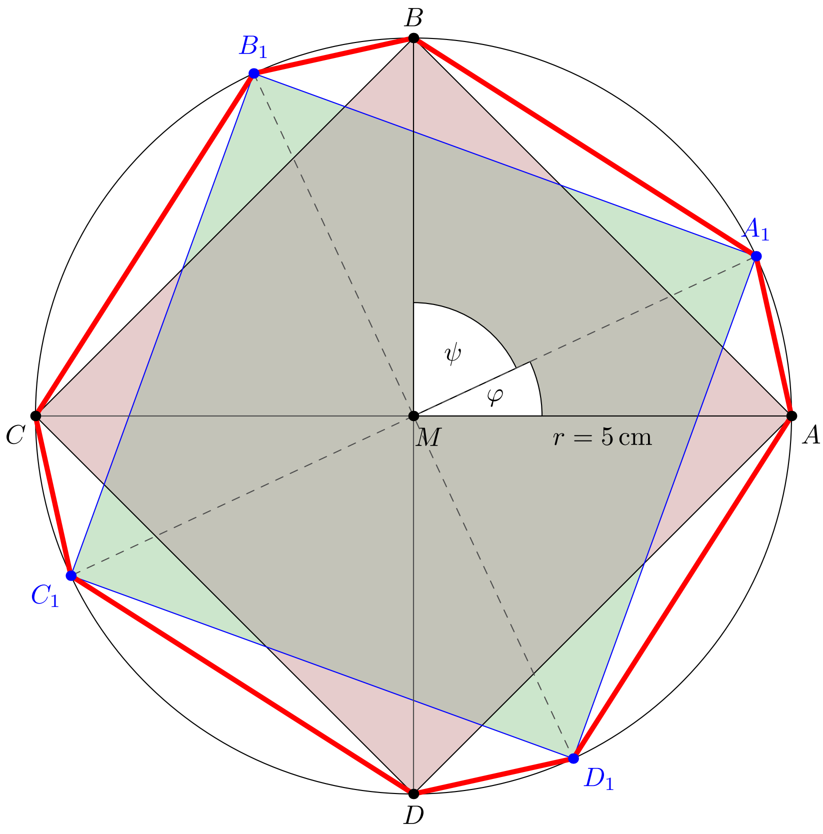
Weiter folgt:

$$A_{PQRS} = k^2 \cdot A_{ABCD} = \left[\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}\right]^2 \cdot a^2 = \frac{2(3+2\sqrt{3}+1)}{4} \cdot a^2 .$$

$\Rightarrow \quad A_{PQRS} = (2+\sqrt{3}) \cdot a^2$.

(d) $\dfrac{A_{ABCD}}{A_{PQRS}} = \dfrac{a^2}{(2+\sqrt{3}) \cdot a^2} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} \approx 0,2679 = 26,79\,\%$.

30. (a) Alle verlangten Zeichnungen:



(b) Die roten Achtecke setzen sich aus je vier kongruenten Dreiecken vom Typ MAA_n

und vom Typ MA_nB zusammen. Weiter gilt: $\psi = 90° - \varphi$.

$$\begin{aligned}
A(\varphi) &= 4 \cdot A_{MAA_n} + 4 \cdot A_{MA_nB} \\
&= \left(4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \sin\varphi + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \sin\psi\right) \text{ cm}^2 \\
&= [50 \cdot \sin\varphi + 50 \cdot \sin(90° - \varphi)] \text{ cm}^2 \\
A(\varphi) &= 50 \cdot (\sin\varphi + \cos\varphi) \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

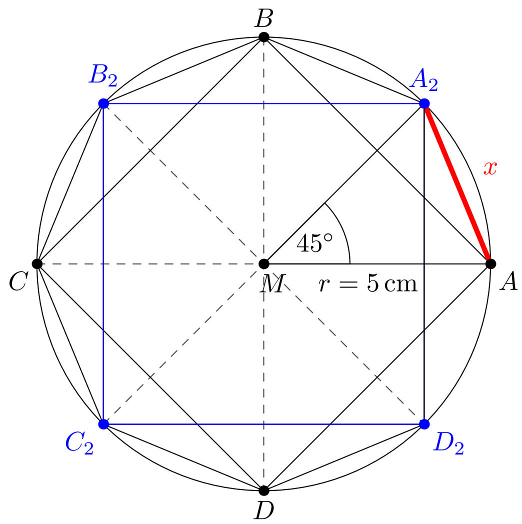
(c)
- $$\begin{aligned}
A(\varphi) = \frac{50}{\cos 45°}(\sin\varphi \sin 45° + \sin 45° \cos\varphi) \,\text{cm}^2 &= \\
50 \cdot \left(\sin\varphi \cdot \frac{\sin 45°}{\cos 45°} + \frac{\sin 45°}{\cos 45°} \cdot \cos\varphi\right) \text{ cm}^2 &= \\
50 \cdot (\sin\varphi \tan 45° + \cos\varphi \tan 45°) \text{ cm}^2 .&
\end{aligned}$$

  Wegen $\tan 45° = 1$ ergibt sich die Lösung von (b).

- $$\begin{aligned}
A(\varphi) &= \frac{50}{\cos 45°} \cdot (\sin\varphi \sin 45° + \sin 45° \cos\varphi) \,\text{cm}^2 \\
&= \frac{50}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \sin(45° + \varphi) \,\text{cm}^2 . \\
\text{Also gilt:} \quad A(\varphi) &= 50 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(45° + \varphi) \,\text{cm}^2 .
\end{aligned}$$

- $A(\varphi)$ wird maximal, wenn $\sin(45° + \varphi)$ maximal wird;
  d.h. wenn $\sin(45° + \varphi)$ den Wert 1 annimmt. Das ist im Definitonsbereich der Fall, wenn $\varphi = 45°$ gilt.
  Der maximale Flächeninhalt beträgt dann $50 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm}^2 \approx 70{,}71\,\text{cm}^2$.

-

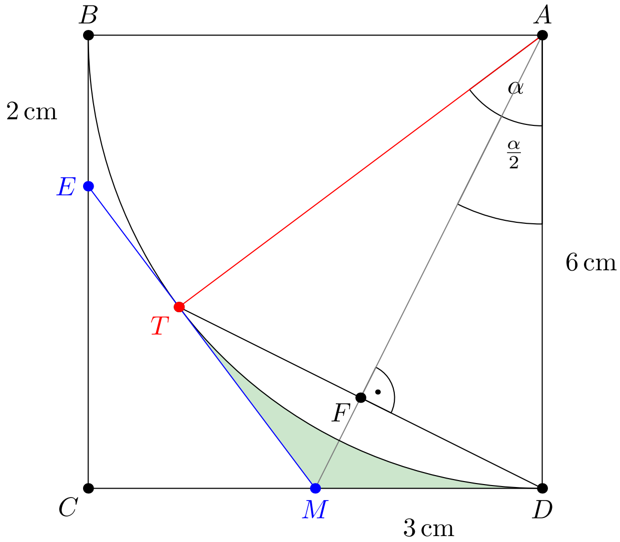


Kosinussatz im Dreieck MAA_2: $x^2 = \left(5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 45°\right)\ \mathrm{cm}^2$.

$\Leftrightarrow \quad x^2 = \left[25 \cdot (2 - \sqrt{2})\right]\ \mathrm{cm} \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}\ \mathrm{cm}$.

Aus Symmetriegründen gilt: $u = 8x = 40 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}\,\mathrm{cm} \quad (\approx 30,61\ \mathrm{cm})$.

31. (a) Die Zeichnung enthält bereits alle Elemente.



(b)
- Im rechtwinkligen Dreieck CME gilt:
  $\overline{EM}^{\,2} = [3^2 + (6-2)^2]\,\mathrm{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{EM} = 5\,\mathrm{cm}$.
- Wenn der Punkt T der Berührpunkt sein soll, dann müssen die beiden Vierecke $MDAT$ und $BETA$ achsensymmetrische Drachenvierecke sein.
  Dann muss aber $\overline{MD} = \overline{MT} = 3\,\mathrm{cm}$ und $\overline{EB} = \overline{ET} = 2\,\mathrm{cm}$ gelten.
  Dann muss also $\overline{MT} + \overline{ET} = 5\,\mathrm{cm}$ gelten. Das hast du aber vorhin gerade mit dem Satz des PYTHAGORAS gezeigt. Also gibt es den Punkt T als Berührpunkt.
- Siehe Zeichnung.

(c) Im Dreieck MDA gilt:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{3\,\mathrm{cm}}{6\,\mathrm{cm}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} \approx 26,57° \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 53,14°\,.$$

- Siehe Zeichnung.
- Im Dreieck FDA gilt:

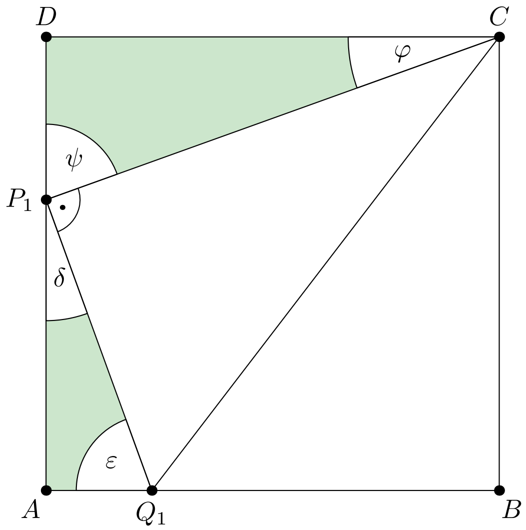
$$\sin 26,57° \approx \frac{\overline{FD}}{6\,\mathrm{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{FD} \approx 2,68\,\mathrm{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{TD} \approx 5,36\,\mathrm{cm}\,.$$

$$\Delta MDA: \quad \overline{AM}^2 = (6^2 + 3^2)\,\mathrm{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AM} \approx 6,71\,\mathrm{cm}\,.$$

$$A_{\text{getönt}} = A_{MDAT} - A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{TD} - A_{\text{Sektor}} \,.$$

$$A_{\text{getönt}} \approx \frac{1}{2} \cdot 6,71 \cdot 5,36\,\text{cm}^2 - \frac{53,14°}{360°} \cdot 6^2\pi\,\text{cm}^2 \approx 1,29\,\text{cm}^2$$

32. (a)



(b) Im rechtwinkligen Dreieck PCD gilt: $\varphi + \psi = 90°$ (*).
Am Punkt P gilt: $\psi + 90° + \delta = 180°$ also: $\delta + \psi = 90°$, und mit (*) folgt: $\varphi = \delta$ (**).
Im rechtwinkligen Dreieck AQP gilt: $\delta + \varepsilon = 90°$. Mit (*) und (**) folgt: $\psi = \varepsilon$.
Damit stimmen die Dreiecke AQP und QCP paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Also sind sie zueinander ähnlich.

(c) $\Delta\, PCD: \quad \cos 20° = \dfrac{6\,\text{cm}}{\overline{PC}} \quad \Rightarrow \quad \overline{PC} \approx 6,39\,\text{cm}\,.$

Und weiter (z.B.): $\overline{PD}^2 = \left(6,39^2 - 6^2\right)\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PD} \approx 2,20\,\text{cm}\,.$
$\Rightarrow \quad \overline{AP} \approx 6\,\text{cm} - 2,20\,\text{cm} = 3,80\,\text{cm}\,.$

$\Delta\, AQP: \quad \cos 20° \approx \dfrac{3,80\,\text{cm}}{\overline{PQ}} \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \approx 4,04\,\text{cm}\,.$

$A_{\Delta\, QCP} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PQ} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 6,39\,\text{cm} \cdot 4,04\,\text{cm} \approx 12,91\,\text{cm}^2\,.$

4. Abbildungen im Koordinatensystem

1. (a) $D =]1; \infty[\quad W = \mathbb{R}$
   (b) -.-
   (c) $S(1,30 \mid -1,54)$

5. Zusammenfassende Aufgaben

1. (a) $\beta \approx 131,79°$
   (b) ca. $3,36$m
   (c) ca. $1,11$m

2. (a) $\beta = 111,80°$
   (b) $r = 2,53\,\mathrm{cm}$
   (c) ca. 67%

3. (a) $\overline{B_1B_2} = 7485,806\,\mathrm{km}$
   (b) $\epsilon = 37,550°$
   (c) $\overline{SB_2} = 11243,984\,\mathrm{km}$
   (d) $h = \overline{SB_0} = 9739,646\,\mathrm{km}$

4. $10\,\mathrm{l} = 10\,\mathrm{dm}^3 = 10^4\,\mathrm{cm}^3 = 10^7\,\mathrm{mm}^3$.
   Für den Innenradius r_i des Gefäßes gilt dann:

   $$\frac{2}{3}r_i^3 = 10^7\,\mathrm{mm}^3 \quad \Rightarrow \quad r_i \approx 168,4\,\mathrm{mm}\,.$$

   $$\Rightarrow \quad d_i \approx 337\,\mathrm{mm} \quad \Rightarrow \quad d_a \approx 347\,\mathrm{mm}\,.$$

Teil II.

Wahlpflichtfächergruppe II/III

6. Quadratische Funktionen

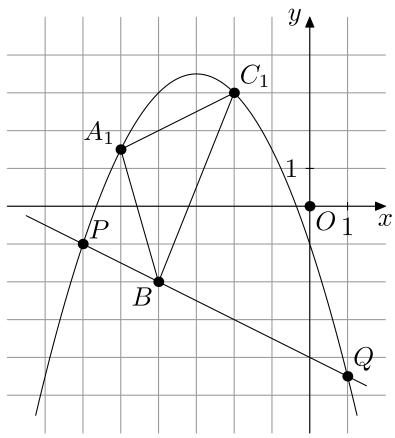
1. (a) $A(-4|5)$ und $B(2|2)$

   (b) Parabeln, die sich aufeinander verschieben lassen, müssen den gleichen Formfaktor haben. Also lässt sich die Parabel p_1 nur auf die Parabel p_3 verschieben.
   Es gilt: $S_1(-2|6)$ und $S_3(4|4)$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

   (c) Die Parabel p_4^* mit der Gleichung $y = 0,25(x+2)^2 - 1$ hat den Scheitel $S_4^*(-2|-1)$ und sie verläuft durch den Ursprung. Den Scheitel dieser Parabel muss man nur ein wenig nach links verschieben und man erhält dann beliebig viele Parabeln, welche den geforderten Verlauf besitzen; z.B. $p_4 : y = 0,25(x+4)^2 - 1 = 0,25x^2 + 2x + 3$.

   (d) Die Punkte C_2 und C_3 müssen mit den Schnittpunkten der Parabel p_1 und der Geraden g zusammenfallen. Also gilt $x = -4$ und $x = 2$.

2. (a) Wenn der Punkt C_1 den x-Wert -2 besitzt, dann muss der Punkt A den x-Wert -5 besitzen:

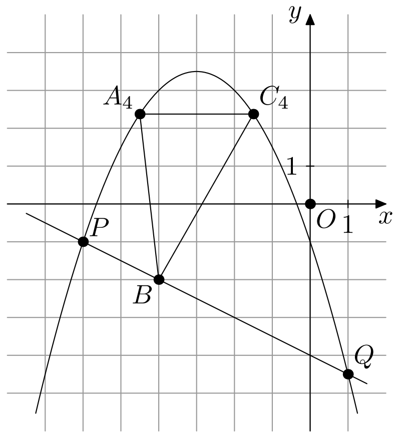


   (b) $x_C = x+3$ wird in den Rechtsterm der Parabelgleichung von p eingesetzt, weil $C_n \in p$ gilt:
   $y_C = -0,5(x+3)^2 - 3(x+3) - 1 = -0,5(x^2+6x+9) - 3x - 9 - 1 = -0,5x^2 - 3x - 4,5 - 3x - 10 = -0,5x^2 - 6x - 14,5.$

   (c) Die Punkte C_2 und C_3 müssen auf den beiden Schnittpunkten P und Q der Parabel p und der Geraden g liegen:
   $p \cap g : -0,5x^2 - 3x - 1 = -0,5x - 4 \quad\Rightarrow\quad D^* = 12,25$
   $\cdots \quad\Rightarrow\quad x_2 = -6 \quad x_3 = 1.$ Eingesetzt in den Flächenterm:
   $A(-6) = (0,75 \cdot (-6)^2 + 8,25 \cdot (-6) + 28,5)\,\mathrm{cm}^2 = 6\,\mathrm{cm}^2$

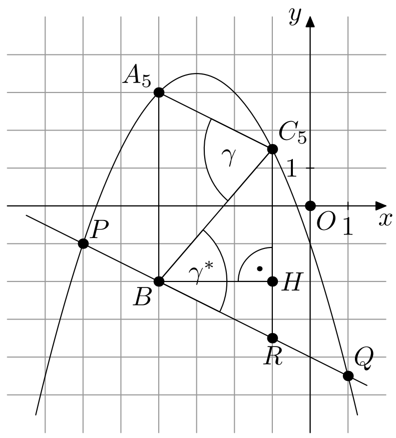
$A(1) = (0,75 \cdot 1^2 + 8,25 \cdot 1 + 28,5)\,\mathrm{cm}^2 = 37,5\,\mathrm{cm}^2$

(d)



Die Punkte A_4 und C_4 haben zur x-Achse den gleichen Abstand. Folglich ist ihr y-Wert der gleiche:
$-0,5x^2 - 3x - 1 = -0,5x^2 - 6x - 14,5 \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad x = -4,5.$

(e)



Der Steigungsfaktor der Strecke $[A_5C_5]$ muss mit dem der Geraden g übereinstimmen:

$$\frac{(-0,5x^2 - 6x - 14,5) - (-0,5x^2 - 3x - 1)}{(x+3) - x} = \frac{-3x - 13,5}{3} = -0,5$$
$\cdots \quad \Rightarrow \quad x = -4.$

Damit sind alle Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks A_5BC_5 bekannt:
$\mathrm{A}_5\,(-4|3)$, $\mathrm{B}\,(-4|-2)$ und $\mathrm{C}_5\,(-1|1,5)$.

1. Möglichkeit: Berechne alle Streckenlängen im Dreieck A_5BC_5 und wende den Kosinussatz an.

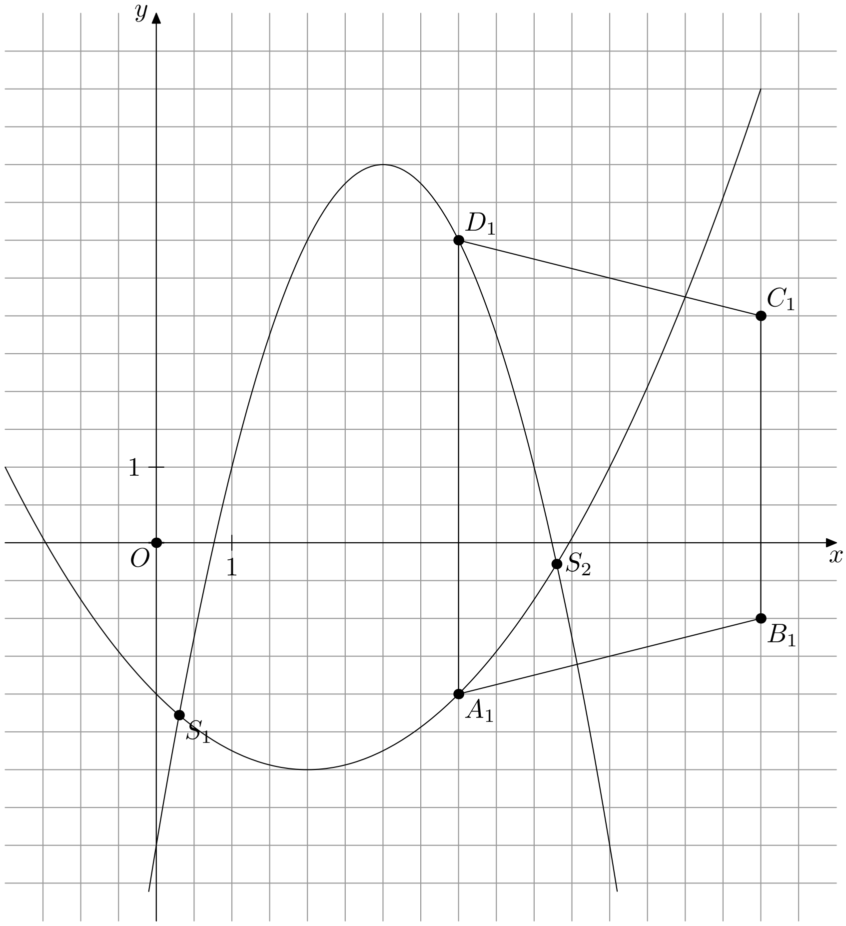
2. Möglichkeit:
Du siehst, dass γ und γ^* gleich groß sind (Z-Winkel).
Die Höhe $[BH]$ zerlegt den Winkel mit dem Maß γ^* in zwei Teilwinkel, deren Maß jeweils in den rechtwinkligen Dreiecken BHC_5 und RHB mit dem Tangens berechnet werden kann.
$\tan \sphericalangle HBC_5 = \dfrac{3,5}{3} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle HBC_5 \approx 49,40°$.
$\tan \sphericalangle RBH = \dfrac{1,5}{3} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle RBH \approx 26,57°$. Also gilt: $\gamma \approx 75,97°$.

3. (a) Jede nach unten geöffnete Normalparabel hat den Formfaktor $a = -1$.
Mit $S_1(3 \mid 5)$ folgt für $p_1 : y = -(x-3)^2 + 5 = -(x^2 - 6x + 9) + 5 = -x^2 + 6x - 4$.

$$\begin{array}{llrcll} A(-0,4 \mid -1,56) & \text{in } p_2: & -1,56 & = & 0,16a + 0,4 + c & (1) \\ B(-0,8 \mid -2,64) & \text{in } p_2: & -2,64 & = & 0,64a - 0,8 + c & (2) \quad \mid \cdot(-1) \\ \hline & & 2,64 & = & -0,64a + 0,8 - c & (2)' \\ & (1) + (2)': & 1,08 & = & -0,48a + 1,2 & \end{array} \Rightarrow \quad a =$$

$0,25$ in (1): $-1,56 = 0,04 + 0,4 + c$
$\Rightarrow \quad c = -2 \quad \Rightarrow \quad p_2 : y = 0,25x^2 - x - 2$

(b)



(c) Für alle Punkte D_n, die jeweils über ihrem zugehörigen Punkt A_n liegen, gilt (Einheiten werden zunächst weggelassen):
$\overline{A_nD_n}(x) = (-x^2 + 6x - 4) - (0,25x^2 - x - 2) = \ldots = -1,25x^2 + 7x - 2$
Für den Flächeninhalt der Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ gilt dann:

$$A(x) = \frac{(-1,25x^2 + 7x - 2) + 4}{2} \cdot 4 = 2 \cdot (-1,25x^2 + 7x - 2)$$

$\Rightarrow \quad A(x) = (-2,5x^2 + 14x + 4)\,\text{cm}^2.$

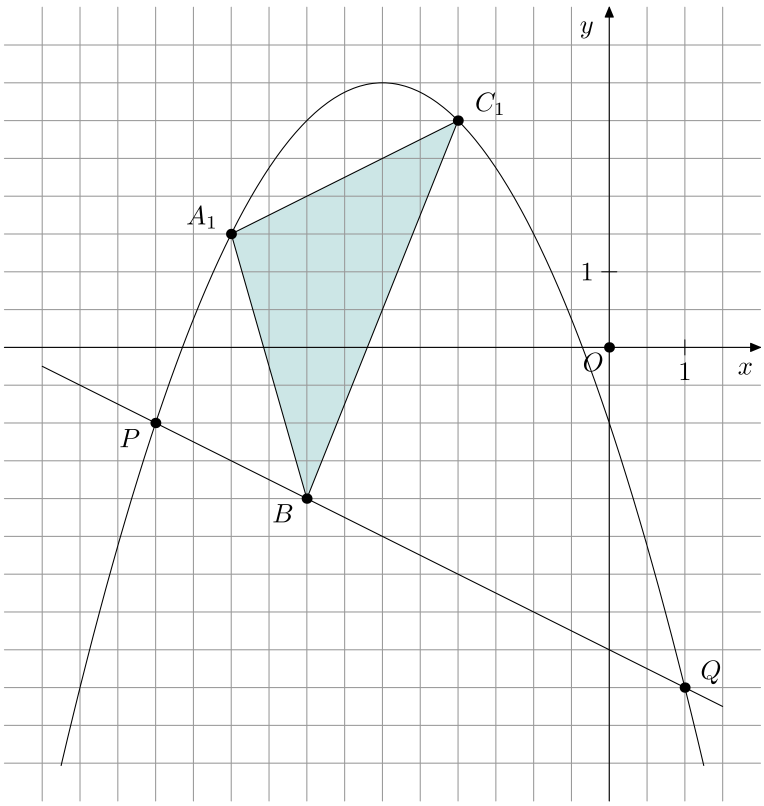
(d) 1. Möglichkeit:
$-2,5x^2 + 14x + 4 = 24 \quad \Leftrightarrow \quad -2,5x^2 + 14x - 20 = 0$
Diskriminante: $D^* = -4 < 0$. Ein solches Trapez gibt es nicht.
2. Möglichkeit:
Zur Lösung der Aufgabe wird der Extremwert des Flächenterms

$$-2,5x^2 + 14x + 4$$

über die Scheitelkoordinaten der zugehörigen Parabel p^* errechnet:
$p^* : \ y = -2,5x^2 + 14x + 4 \quad \Rightarrow \quad S^*(2,8 \mid 23,6)$.
Also lautet der Antwortsatz zum Extremwertproblem „$x = 2,8$ liefert die maximale Trapezläche $23,6\,\text{cm}^2$." Deshalb kann es kein Trapez mit einem noch größeren Flächeninhalt, wie z.B. $24\,\text{cm}^2$ geben.

(e) 1. Möglichkeit (rechnerisch):
In c) wurde schon $\overline{A_nD_n}(x) = (1,25x^2 + 7x - 2)\,\text{cm}$ errechnet.
Soll eines der Trapeze zum Quadrat werden, dann müssen alle Seiten gleich lang sein.
Insbesondere gilt dann: $\overline{A_nD_n} = \overline{B_nC_n} = 4\,\text{cm}$
Also: $1,25x^2 + 7x - 2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1,25x^2 + 7x - 6 = 0$
Diskriminante: $D^* = 79 > 0$. Also gibt es zwei Lösungen und damit zwei Quadrate.
2. Möglichkeit(anschaulich):
Nur dann, wenn die Strecken $[A_nD_n]$ zwischen den beiden Schnittpunkten S_1 und S_2 der Parabeln p_1 und p_2 bleiben, gibt es solche Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ (ansonsten gibt es zwei Dreiecke oder überschlagene Trapeze). Wenn Quadrate dabei sein sollen, dann müssen deren Seiten genau so wie alle Strecken $[B_nC_n]$ 4 cm lang sein.
Am Schnittpunkt S_1 ist eine der Strecken $[A_nD_n]$ zum Punkt entartet, also 0 cm lang. Auf ihrer Wanderbewegung nach rechts werden dann die Strecken $[A_nD_n]$ immer länger, bis sie einen maximalen Wert erreichen. Aus der Zeichnung kann man ablesen, dass dieser Maximalwert länger als 7 cm ist. Also wird dazwischen sicher eine Seitenlänge von 4 cm angenommen.
Nachdem die maximale Streckenlänge von mehr als 7 cm erreicht worden ist, nehmen die Steckenlängen $[A_nD_n]$ bis zum Schnittpunkt S_2 der beiden Parabeln (die dortige Streckenlänge beträgt wieder 0 cm) ständig ab. Also muss auf dem Weg dorthin eine der Strecken $[A_nD_n]$ erneut 4 cm lang geworden sein.
Also gibt es unter den Trapezen $A_nB_nC_nD_n$ zwei Quadrate.

4.



(a) $-0,5x^2 - 3x - 1 = -0,5x - 4 \quad \Rightarrow \quad -0,5x^2 - 2,5x + 3 = 0$
$D^* = 12,25 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{D^*} = 3,5$
$x_{1;2} = \dfrac{2,5 \pm 3,5}{-1}$
$x_1 = -6$ in g: $y_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad P(-6 \mid -1)$
$x_2 = 1$ in g: $y_2 = -4,5 \quad \Rightarrow \quad Q(1 \mid -4,5)$

(b) Das Ergebnis folgt aus: $C_n(x + 3 \mid -0,5(x + 3)^2 - 6(x + 3) - 14,5)$.

(c) Siehe Zeichnung

(d) $\overrightarrow{BC_n} = \begin{pmatrix} x + 7 \\ -0,5x^2 - 6x - 12,5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BA_n} = \begin{pmatrix} x + 4 \\ -0,5x^2 - 3x + 1 \end{pmatrix}$

$$A(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x + 7 & x + 4 \\ -0,5x^2 - 6x - 12,5 & -0,5x^2 - 3x + 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \quad A(x) = (0,75x^2 + 8,25x + 28,5)\,\text{cm}^2$

(e) $x = -5,5$ liefert $A_{\min} = 5,8125\,\text{cm}^2$.

(f) Die Seite $[A_3C_3]$ muss zur Graden g parallel sein:

$$\overrightarrow{A_nC_n} = \begin{pmatrix} x + 3 - x \\ -0,5x^2 - 6x - 14,5 - (-0,5x^2 - 3x - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3x - 13,5 \end{pmatrix}$$

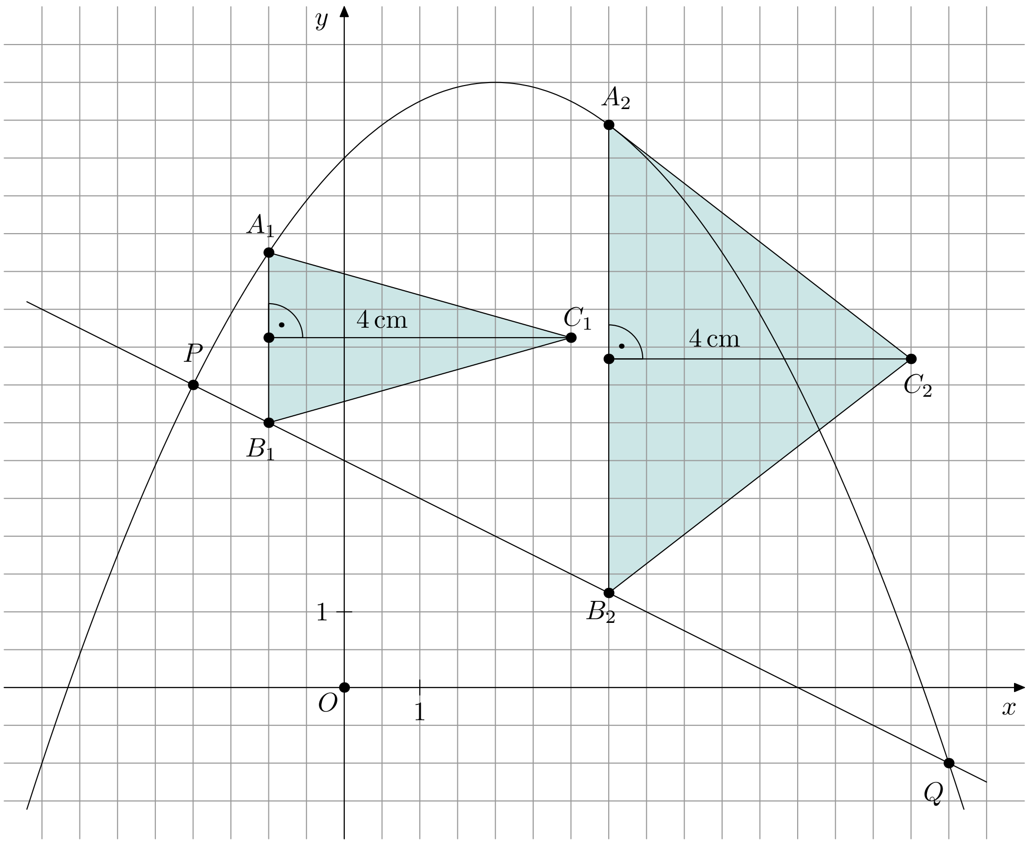
$$\Rightarrow \quad \frac{-3x - 13,5}{3} = -0,5 \quad \Rightarrow \quad x = -4$$

5. (a) Der Schnittpunkt im IV.Quadranten muss Q sein.

1. Möglichkeit:
$-0,25x^2 + x + 7 = -0,5x + 3 \quad \Rightarrow \quad -0,25x^2 + 1,5x + 4 = 0$
$D^* = 6,25 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{D^*} = 2,5$
$x_{1;2} = \dfrac{-1,5 \pm 2,5}{-0,5}$
$x_1 = -2$ in g: $y_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad P(-2 \mid 4)$
$x_2 = 8$ in g: $y_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad Q(8 \mid -1)$

2. Möglichkeit:
Aus der schon vorhandenen Zeichnung kannst du ablesen: $P(-2 \mid 4)$ und $Q(8 \mid -1)$. Wenn du die Koordinaten dieser Punkte in die Gleichung der Parabel **und** die der Geraden einsetzt, ergeben sich insgesamt vier wahre Aussagen. Das bedeutet, dass die Punkte P und Q **sowohl** auf der Geraden g **als auch** auf der Parabel p liegen.
Weil aber eine Gerade eine Parabel höchstens in zwei Punkten schneiden kann, sind P und Q die gesuchten Schnittpunkte.

(b)



(c) Siehe Zeichnung.
$x_C = 7,5 \quad \Rightarrow \quad x = 7,5 - 4 = 3,5$
$\Rightarrow \quad y = -0,25 \cdot 3,5^2 + 3,5 + 7 = 7,4375 \quad \Rightarrow \quad A_2(3,5 \mid 7,4375)$

(d) $y_{A_n} - y_{B_n} = -0,25x^2 + x + 7 - (-0,5x + 3) = -0,25x^2 + 1,5x + 4$
$A(x) = 0,5 \cdot (-0,25x^2 + 1,5x + 4) \cdot 4\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad A(x) = (-0,5x^2 + 3x + 8)\,\text{cm}^2$

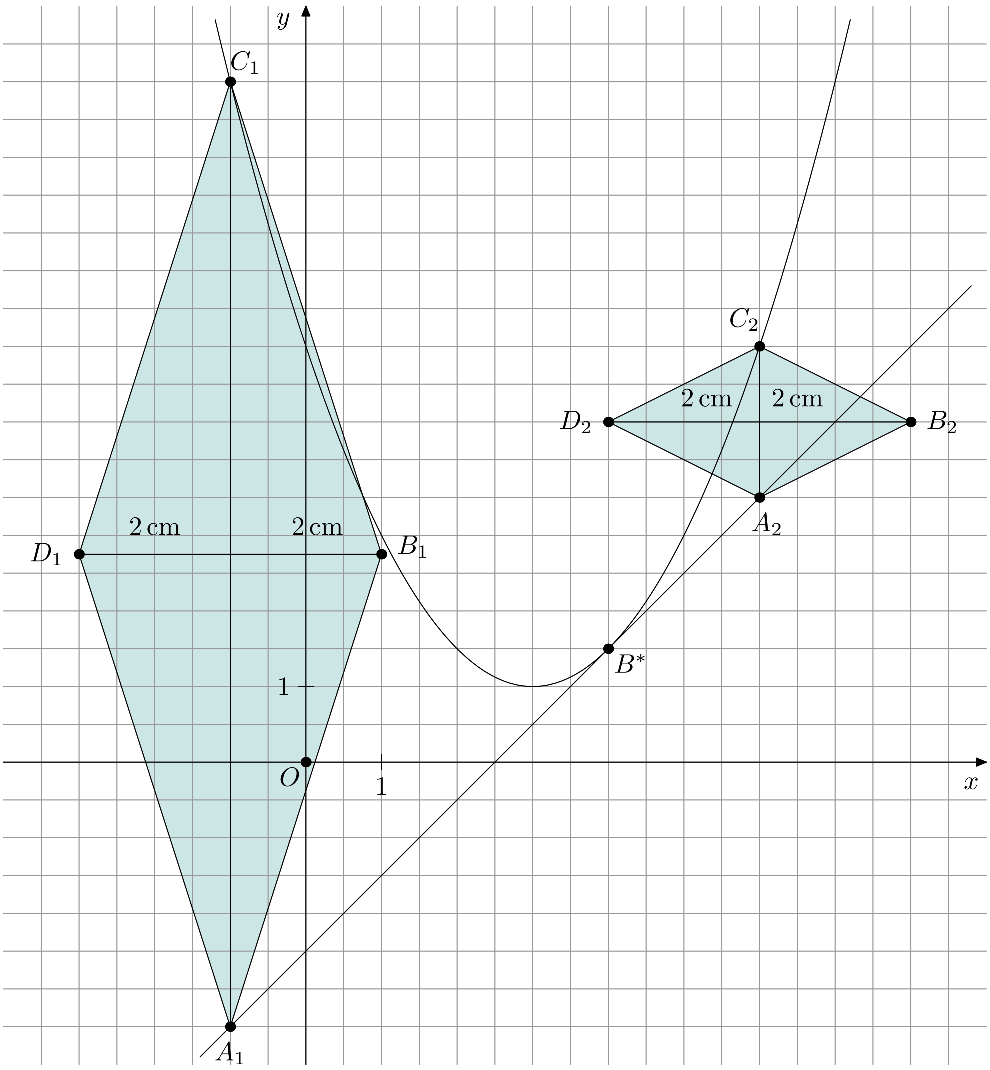
(e) $x = 3$ liefert $A_{\max} = 12,5\,\text{cm}^2$.

(f) Wenn der Punkt C_3 auf der y-Achse liegen soll, dann müssen die Punkte A_3 und B_3 auf einer Parallelen zur y-Achse im Abstand von 4 cm liegen, die durch den II. und III. Quadranten verläuft.
Der Abstand des Punktes P von der y-Achse beträgt 2 cm. Demnach käme der Punkt B_3 auf der Geraden g über den Punkt A_3 auf der Parabel p zu liegen. Dadurch hätte das Dreieck $A_3B_3C_3$ den falschen Drehsinn, weil der Punkt C_3 ja wie alle Punkte C_n rechts von der Basis liegen müsste; d.h. es gibt unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ kein solches Dreieck $A_3B_3C_3$.

6. (a) $S(3 \mid 1)$ und $(5 \mid 3)$ in die Scheitelform:
$p: 3 = a \cdot (5-3)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad a = 0,5$
$p: y = 0,5 \cdot (x-3)^2 + 1 = \ldots = 0,5x^2 - 3x + 5,5$

(b) $p \cap g: 0,5x^2 - 3x + 5,5 = x - 2,5 \quad \Rightarrow \quad 0,5x^2 - 4x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad D^* = 0$
Also ist die Gerade g eine Tangente an die Parabel p.

(c)
- Siehe Zeichnung.
- Wenn der Punkt D_2 den Abszissenwert 4 besitzt, dann muss der Punkt B_2 den Abszissenwert $4 + 4 = 8$ besitzen.
  Somit müssen die Punkte A_2 und C_2 jeweils den x-Wert $\frac{8+4}{2} = 6$ besitzen, denn in jeder Raute halbieren sich die Diagonalen. Das ergibt dann das folgende Bild:



(d)
- $\overline{A_nC_n}(x) = (0,5x^2 - 4x + 8)\,\text{cm} = [0,5(x^2 - 8x + 16)]\,\text{cm} = 0,5(x-4)^2\,\text{cm}$
  Es gilt stets $(x-4)^2 \geqq 0$ und damit $0,5(x-4)^2 \geqq 0$.
  Für $x = 4$ gilt $\overline{A_nC_n}(4) = 0\,\text{cm}$; d.h. die betreffende „Raute“ würde zur Strecke entarten.
  Der Drehsinn sämtlicher Rauten bleibt immer richtig, weil die Punkte C_n auf der Parabel p stets „über“ der Geraden g mit ihren Punkten A_n liegen.
  Also gibt es Rauten $A_nB_nC_nD_n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
- Für den Flächeninhalt A der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gilt in Abhängigkeit von x:
  $A(x) = 0,5 \cdot 4 \cdot (0,5x^2 - 4x + 8)\,\text{cm}^2 = \ldots = (x-4)^2\,\text{cm}^2$
  Nur für $x = 4$ verschwindet der Flächeninhalt der betreffenden (zur Strecke

entarteten) Raute.
Also gibt es Rauten $A_nB_nC_nD_n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

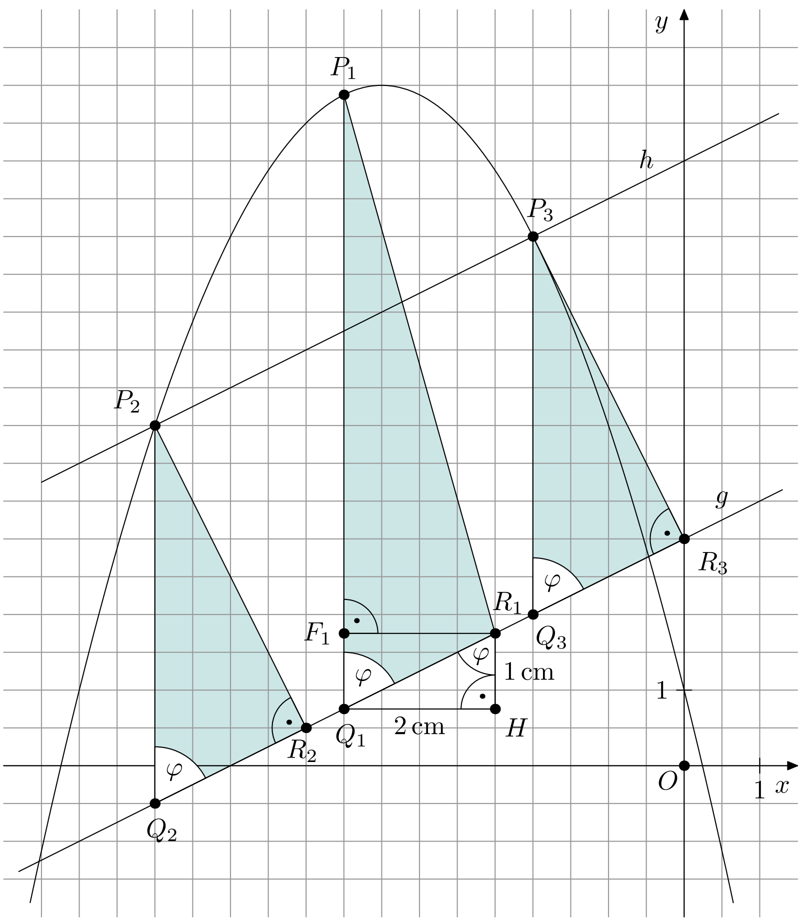
- Die Gerade g ist eine Tangente der Parabel p. Also gibt es keinen Punkt auf der Parabel, der die Gerade g überqueren und damit den Drehsinn auch nur einer der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ umkehren könnte.
  Einzig der Berührpunkt B^* stellt einen kritischen Fall dar.
  Wie in der Lösung (b) schon gezeigt, gilt $0,5x^2-4x+8=0 \quad \Rightarrow \quad 0,5(x-4)^2=0$ und damit folgt $B^*(4 \mid 1,5)$ (siehe Zeichnung). Nur dort gibt es eine (zu Strecke entartete) „Raute".
  Also gibt es Rauten $A_nB_nC_nD_n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

(e)

- Die Quadratdiagonalen liegen wie alle Rautendiagonalen $\overline{A_nC_n}$ zur y-Achse parallel und sie halbieren jeweils zwei rechte Innenwinkel der betreffenden Quadrate. Die Gerade g besitzt den Steigungsfaktor m=1; d.h. sie schneidet die x-Achse unter einem 45°-Winkel. Folglich müssen die Quadratdiagonalen einen 45°-Winkel mit der Geraden g einschließen. Also müssen die Quadrateckpunkte unter den Rauteneckpunkten B_n auf der Geraden g liegen.
- 1. Möglichkeit:
  $0,5x^2-4x+8=4 \quad \Rightarrow \quad 0,5x^2-4x+4=0 \quad \Rightarrow \quad D^*=8.$
  Die quadratische Gleichung besitzt zwei Lösungen und damit gibt es zwei Quadrate.
  2. Möglichkeit:
  Der Eckpunkt B_1 der Raute $A_1B_1C_1D_1$ liegt „über" der Geraden g, der Eckpunkt B_2 der Raute $A_2B_2C_2D_2$ liegt dagegen „unter" der Geraden g.
  Also muss einer der Punkte B_n – wir nennen ihn B_3 – während der Wanderung von der Position 1 zur Position 2 **auf** der Geraden g liegen.
  Die Gerade g besitzt den Steigungsfaktor m=1; d.h. sie schneidet die x-Achse unter einem 45°-Winkel. Das bedeutet, dass auch in der betreffenden Raute $A_3B_3C_3D_3 \quad \sphericalangle B_3A_3C_3 = 45°$ gilt. Aus Symmetriegründen muss dann $\sphericalangle B_3A_3D_3 = 90°$ gelten. Wenn jedoch in der Raute $A_3B_3C_3D_3$ ein Innenwinkel das Maß 90° besitzt, dann muss diese Raute (wie jede andere auch) ein Quadrat sein.
  Wenn nun Punkte B_n über den Punkt B_2 der Raute $A_2B_2C_2D_2$ hinaus nach rechts wandern, nehmen die Diagonalenlängen $\overline{A_nC_n}$ wieder zu. Sie „heben" dann die Punkte B_n über die Gerade g hinweg. Also muss es einen weiteren Punkt B_4 geben der auf der Geraden g liegt. Aus den vorherigen Überlegungen muss dieser Punkt B_4 zu einem weiteren Quadrat $A_4B_4C_4D_4$ gehören.
  Links von der Position des Quadrates $A_3B_3C_3D_3$ und rechts von der Position des Quadrates $A_4B_4C_4D_4$ überquert keiner der Punkte B_n mehr die Gerade g. Also bleibt es bei den beiden Quadraten.

Anmerkung:
Die veränderlichen Rauten lassen sich sehr anschaulich in einer Datei, die mit Hilfe des dem dynamischen Mathematikprogrammes „GEONExT" erzeugt wurde („10eh116.gxt"), darstellen.

7. (a) Siehe Zeichnung.



(b) Es gilt: $\overline{P_nQ_n}^{\,2} = (x-x)^2\,\text{cm}^2 + [(-0,5x^2-4x+1)-(0,5x+3)]\,\text{cm}^2$
$= (-0,5x^2-4,5x-2)^2\,\text{cm}^2$.
$\Rightarrow \quad \overline{P_nQ_n} = \mid -0,5x^2-4,5x-2 \mid$ cm.
Weil die y-Werte der Punkte P_n stets größer als die y-Werte der Punkte Q_n sind, kannst du die Betragstriche weglassen.
Also folgt: $\overline{P_nQ_n}(x) = (-0,5x^2-4,5x-2)\,\text{cm}$

(c) 1. Möglichkeit: anschaulich
Die Höhen $[R_nF_n]$ der Dreiecke $P_nQ_nR_n$ sind konstant 2 cm lang (vgl. $[R_1F_1]$ in der Zeichnung). Nur die Längen der zugehörigen Grundlinien $[P_nQ_n]$ sind veränderlich. Wegen der Formelgleichung für Dreiecksflächen $A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}$ hängt der Flächeninhalt dieser Dreiecke $P_nQ_nR_n$ nur von den Längen der Grundlinien $[P_nQ_n]$ ab. Wenn dort die maximale Länge erreicht ist, dann ist auch die zugehörige Dreiecksfläche am größten.
2. Möglichkeit: rechnerisch
Für den Flächeninhalt A der Dreiecke $P_nQ_nR_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_nQ_n} \cdot \overline{R_nF_n} =$$
$$\frac{1}{2} \cdot (-0,5x^2-4,5x-2) \cdot 2\,\text{cm}^2 = (-0,5x^2-4,5x-2)\,\text{cm}^2.$$

Damit stimmen für jeden zulässigen x-Wert die Maßzahlen von Flächeninhalt und Grundlinienlänge überein.
Wenn also eine der Grundlinien $[P_nQ_n]$ am längsten wird, dann ist auch der Inhalt der zugehörigen Dreiecksfläche maximal.

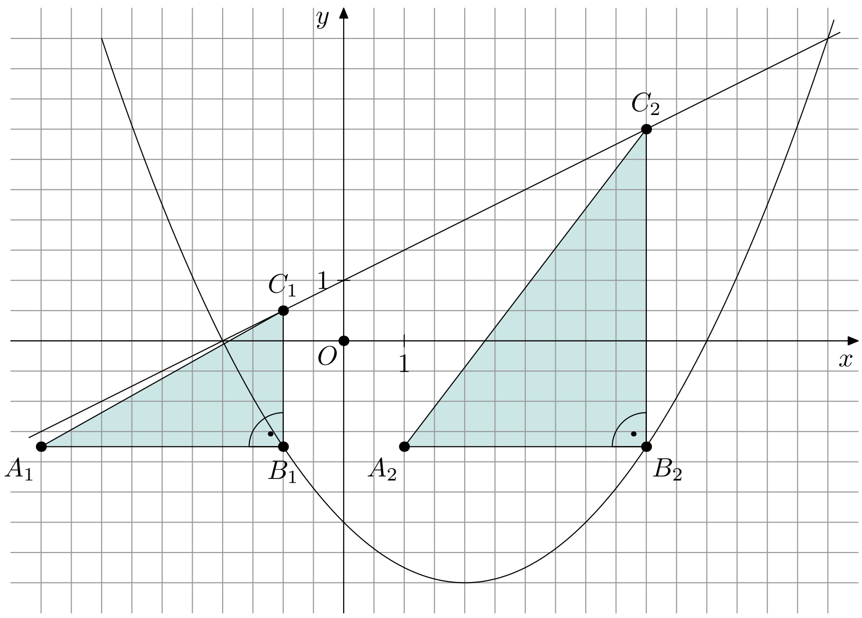
(d) Es gilt $Q_n(x \mid 0,5x+3)$ und $R_n(x+2 \mid 0,5(x+2)+3) = (x+2 \mid 0,5x+4)$.
Betrachte das Steigungsdreieck Q_1HR_1, das an der Geraden g unveränderlich ist.
Dem kannst du entnehmen, dass stes $\overline{Q_nR_n} = \sqrt{1^2+2^2}\,\text{cm} = \sqrt{5}\,\text{cm}$ gilt.
Von Aufgabe (b) ist $\overline{P_nQ_n}(x) = (-0,5x^2-4,5x-2)\,\text{cm}$ schon bekannt.
Es muss $-0,5x^2-4,5x-2 = \sqrt{5}$ gelten.
$\Leftrightarrow \quad 0,5x^2+4,5x+(2+\sqrt{5}) = 0 \quad \Rightarrow \quad D^* = 16,25-2\sqrt{5}\,(\approx 11,78) > 0$
Also gibt es zwei solche gleichschenklige Dreiecke.

(e)
- Siehe Zeichnung.
- $x=-7$ liefert: $P_2(-7 \mid 4,5)$, $Q_2(-7 \mid -0,5)$ und $R_2(-5 \mid 0,5)$.
  $\overline{P_2Q_2} = 5\,\text{cm}$, $\overline{Q_2R_2}(x) = \sqrt{5}\,\text{cm}$ (siehe Lösung der Aufgabe (d)) und $\overline{P_2R_2} = \sqrt{(-5+7)^2+(4,5-0,5)^2}\,\text{cm} = \sqrt{20}\,\text{cm}$
  In diesem Dreieck $P_2Q_2R_2$ gilt der Satz des PYTHAGORAS:
  $5^2 = \sqrt{5}^{\,2} + \sqrt{20}^{\,2}$. Also ist das Dreieck $P_2Q_2R_2$ rechtwinklig.
- Jeder Eckpunkt Q_n der Dreiecke $P_nQ_nR_n$ ist Scheitel eines Winkels mit dem Maß φ (Stufen- oder F-Winkel). Im Steigungsdreieck Q_1HR_1 ist der Punkt R_1 ebenfalls Scheitel eines Winkels mit dem Maß φ (Wechsel- oder Z-Winkel).
  Dort gilt: $\tan\varphi = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 63,43°$.
- Die Parallele h zur Geraden g durch den Punkt P_2 schneidet die Parabel p im gesuchten Punkt P_3 (Siehe Zeichnung).
  Begründung:
  Der Punkt P_2 besitzt den Abstand $\overline{P_2R_2}$ zur Geraden g. Alle Punkte P_n aber, die den Abstand $\overline{P_2R_2}$ von der Geraden g haben, liegen auf einer Parallelen (in der Zeichnung: h) zur Geraden g die den Abstand $\overline{P_2R_2}$ besitzt.
- Weil alle Strecken $[Q_nR_n]$ $\sqrt{5}\,\text{cm}$ lang sind, müssen die gesuchten Dreiecke z.B. zum Steigungsdreieck Q_1HR_1 kongruent sein; d.h. es muss gelten:
  $\overline{P_nQ_n}(x) = (-0,5x^2-4,5x-2)\,\text{cm} = 1\,\text{cm} \quad \Leftrightarrow \quad -0,5x^2-4,5x-3 = 0$

  $$D^* = 14,25 \;\Rightarrow\quad x_{1;2} = \frac{4,5 \pm \sqrt{14,25}}{-1} \Rightarrow x_1 \approx -8,27 \text{ und } x_1 \approx -0,72$$

8. (a)
- $P(-3 \mid 3,25)$ in p: $2,25 = a\cdot(-3)^2-(-3)-3 \quad \Rightarrow \quad 2,25 = 9a \quad \Rightarrow \quad a = 0,25$ und $p: y = 0,25x^2-x-3$.
  $$\text{S}\left(-\frac{-1}{2\cdot 0,25}\,\middle|\, -3-\frac{(-1)^2}{4\cdot 0,25}\right) = (2 \mid -4)$$
- $0,25x^2-x-3 = 0,5x-5,26 \quad \Rightarrow \quad D^* = -0,01 < 0$: Die Gerade g meidet die Parabel p.

(b)



(c)

$$\begin{aligned}
\overline{B_nC_n}(x) &= y_{C_n} - y_{B_n} \\
\overline{B_nC_n}(x) &= 0,5x + 1 - (0,25x^2 - x - 3) \\
&= 0,5x + 1 - 0,25x^2 + x + 3 \\
\overline{B_nC_n}(x) &= (-0,25x^2 + 1,5x + 4)\,\mathrm{cm}^2
\end{aligned}$$

(d) Für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_nB_nC_n$ gilt in Abhängigkeit von x:
$A(x) = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-0,25x^2 + 1,5x + 4)\,\mathrm{cm}^2$.
$A(x) = 2 \cdot (-0,25x^2 + 1,5x + 4)\,\mathrm{cm}^2$.
$A(x) = (-0,5x^2 + 3x + 8)\,\mathrm{cm}^2$.
$x = 3$ liefert $A_{max} = 12,5\,\mathrm{cm}^2$.

(e) Die beiden Dreiecke $A_3B_3C_3$ und $A_4B_4C_4$ müssen gleichschenklig sein:
$\overline{B_nC_n}(x) = 4\,\mathrm{cm}: \quad \Rightarrow \quad -0,25x^2 + 1,5x + 4 = 4$
$\Leftrightarrow \quad x(-0,25x + 1,5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 6$

(f) Die Dreiecke $A_nB_nC_n$ können als Steigungsdreiecke zu den Hypotenusen $[A_nC_n]$ aufgefasst werden:
Wenn eine dieser Hypotenusen $[A_nC_n]$ auf der Geraden g liegen soll, dann müssen beide Steigungsfaktoren übereinstimmen; d.h.

$$\frac{-0,25x^2 + 1,5x + 4}{4} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -0,5x^2 + 3x + 8 = 4$$

$\Leftrightarrow \quad -0,5x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow \quad D^* = 17 > 0.$
Also gibt es zwei solche Dreiecke.

9. (a) $y = 0,5x^2 + 2x + 1000 = \ldots = 0,5 \cdot (x+2)^2 + 998 \quad \Rightarrow \quad S_0(-2 \mid 998)$
Skizziere die Parabel p_0.

Z.B. $p_1 : y = -0,17296 \cdot (x+2)^2 + 998$

(b) Z.B. $p_2 : y = -0,5 \cdot (x - \frac{22}{7})^2$

(c) Wähle unter den beliebig vielen Parabeln, die in Frage kommen, am besten eine Parabel (nenne sie p_3) aus, die zur Parabel p_0 kongruent ist, die aber nach unten geöffnet ist: Der Formfaktor hat dann den Wert $-0,5$.
Wähle dann am besten deren Scheitel so aus, dass dieser genau unterhalb des Scheitels $S_0(-2 \mid 998)$ liegt, also z.B. $S_3(-2 \mid 997)$.
Diese Parabel p_3 hat dann die Gleichung $y = -0,5 \cdot (x+2)^2 + 997$.

(d) „$\cdots$ nur einen Punkt gemeinsam hat" eröffnet zweierlei Lösungsmöglichkeiten:

(α) Die gesuchte Parabel schneidet die Parabel p_0 nur in einem Punkt

(β) Die gesuchte Parabel berührt die Parabel p_0

Die einfachste Möglichkeit der Auswahl besteht in der Möglichkeit (α):
Die Parabel p_0 wird nach rechts oder nach links verschoben. Damit behält der Formfaktor den Wert $0,5$ und die beiden Symmetrieachsen liegen parallel. Damit verlaufen auch die Parabeläste so, dass sie sich nur einmal überkreuzen.
Also z.B.: $p_4 : y = 0,5 \cdot (x+1)^2 + 998$.
Rechnerisch würde sich dann mit der Parabel p_4 die folgende Gleichung ergeben:
$0,5 \cdot (x+2)^2 + 998 = 0,5 \cdot (x+1)^2 + 998 \ldots \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -3x = -1,5$.
Egal, wie weit du die Parabel p_0 nach rechts oder links verschiebst: Rechnerisch hebt sich stets nach dem Gleichsetzen der Summand mit dem Faktor x^2 weg.
In der Möglichkeit (β) müsstest du nach einer Parabel p_5 suchen, welche die Parabel p_0 berührt. Eine entsprechende Parabelgleichung ist nicht so schnell und auch nicht so leicht zu finden, wie in der Möglichkeit (α).

10. Berechne zunächst den Parabelscheitel: $S(x_S \mid y_S)$ mit
$a = -10$, $b = -19$ und $c = 2$.

$$x_S = -\frac{-19}{2 \cdot (-10)} < 0 \text{ und } y_S = 2 - \frac{(-19)^2}{4 \cdot (-10)} > 0$$

Der Scheitel liegt also im II. Quadranten.

Wegen $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet, also verläuft ihr linker Ast auch durch den III. Quadranten.
Weil sich die Äste der Parabel nach unten beliebig weit voneinander entfernen, muss ihr rechter Ast „irgendwann" die y-Achse überqueren. Also verläuft der Graph auch durch den IV. Quadranten.
Nun musst du noch untersuchen, ob es Punkte auf der Parabel gibt, die im I. Quadranten liegen.
Ermittle dazu die Nullstellen der Funktionsgleichung: $10x^2 - 19x + 2 = 0$.
$D^* = (-19)^2 - 4 \cdot (-10) \cdot 2 = 441$ und $\sqrt{D^*} = 21$

$$x_{1;2} = \frac{19 \pm 21}{-20} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 0,1.$$

$x_2 = 0,1$ liegt rechts vom Ursprung auf der x-Achse; also verläuft die Parabel auch durch den I. Quadranten und damit durch alle vier Quadranten.

7. Quadratische Funktionen und Gleichungen

1. (a) –

   (b)
   - Eine Möglichkeit der Lösung besteht darin, vom Flächeninhalt der Flagge denjenigen der beiden überlappenden Rechtecke, die das Kreuz ergeben, zu subtrahieren. Um den Flächeninhalt des Kreuzes zu erhalten, musst du jedoch am Ende den Inhalt des Quadrates im Zentrum einmal abziehen, weil das Quadrat ja **beiden** besagten Rechtecken angehört.
     Also: $A_w(x) = 11 \cdot 16\,\text{cm}^2 - (11x + 16x - x^2)\,\text{cm}^2 = (x^2 - 27x + 176)\,\text{cm}^2$
   - Wie oben schon dargelegt, ergibt sich:
     $A_k(x) = (11x + 16x - x^2)\,\text{cm}^2 = (-x^2 + 27x)\,\text{cm}^2$

   (c) Der Flächeninhalt des umlaufenden Rechtecks beträgt $176\,\text{cm}^2$.
   30% von $176\,\text{cm}^2 = 52,8\,\text{cm}^2$.
   $52,8 = -x^2 + 27x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 27x + 52,8 = 0$

   $$x_{1;2} = \frac{27 \pm \sqrt{517,8}}{2}$$

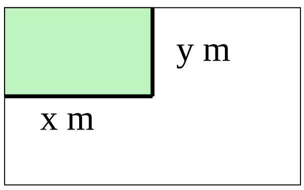
   $x_1 = 0,5 \cdot (27 + \sqrt{517,8}) \approx 24,88 \quad (\dagger) \quad$, wegen $G =]0;\,11[_{\mathbb{R}}$.
   $x_2 = 0,5 \cdot (27 - \sqrt{517,8}) \approx 2,12 \in G =]0;\,11[_{\mathbb{R}}$.
   Also: $L = \{13,5 - 0,5\sqrt{517,8}\}$.

   (d) $x^2 - 27x + 176 = -x^2 + 27x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 54x + 176 = 0$ mit $G =]0;\,11[_{\mathbb{R}}$

   $$x_{1;2} = \frac{54 \pm 2\sqrt{377}}{4}$$

   $x_1 = 13,5 + 0,5\sqrt{377} \approx 23,21 \quad (\dagger) \quad$, wegen $G =]0;\,11[_{\mathbb{R}}$.
   $x_2 = 13,5 - 0,5\sqrt{377} \approx 3,79 \in G =]0;\,11[_{\mathbb{R}}$.
   Also: $L = \{13,5 - 0,5\sqrt{377}\}$

2. (a)



Es gilt:
$$\begin{array}{rrcll} & x+y & = & 25,5 & (1) \quad \Leftrightarrow \quad y = 25,5-x \quad (1)' \\ \wedge & x \cdot y & = & 140 & (2) \\ \hline \end{array}$$

$(1)'$) in (2): $x \cdot (25,5 - x) = 140 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 25,5x - 140 = 0$
$\Rightarrow \quad L = \{17,5\ ;\ 8\}$. Wegen $(1)'$ folgt: $y = 8 \vee y = 17,5$.
Das Gartengrundstück ist 17,5 m lang und 8 m breit (oder umgekehrt).

(b) Für den Flächeninhalt A gilt: $A = x \cdot y\,\mathrm{m}^2$.
Mit $(1)'$ folgt $A(x) = x(25,5 - x)\,\mathrm{m}^2 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = (-x^2 + 25,5x)\,\mathrm{m}^2$.
Der Extremwert muss wegen des negativen Vorzeichens von x^2 ein Maximum sein. Die Berechnung erfolgt z.B. so, als ob du die Scheitelkoordinaten der zugehörigen (nach unten geöffneten) Parabel ermittelst:
$a = -1 \quad b = 25,5$ und $c = 0$:
$x_S = -\dfrac{25,5}{-2} = 12,75$ und $y_S = 0 - \dfrac{25,5^2}{-4} = 162,5625$ (Maximum).

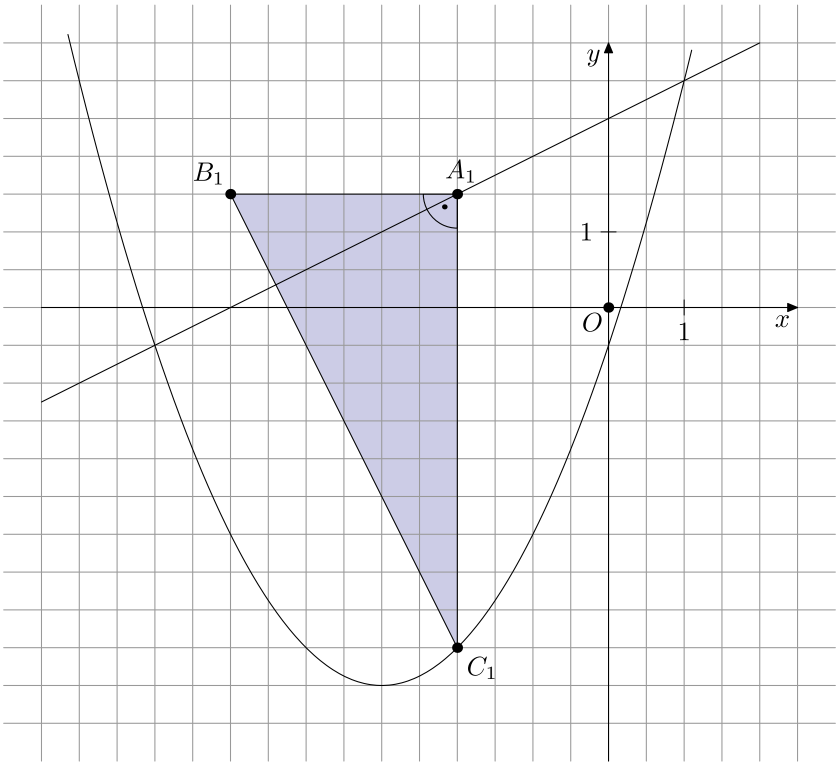
Mit dem 25,5 m langen Maschendraht hätte Familie Taerkot auf diese Weise sogar etwas mehr als $162\,\mathrm{m}^2$ einzäunen können.

Die Länge $x = 12,75\,\mathrm{m}$ liefert mit $(1)'$ die Breite $y = (25,5 - 12,75)\,\mathrm{m} = 12,75\,\mathrm{m}$. Das bedeutet, dass der flächengrößte Garten eine quadratische Form hätte.

3. (a) Du kannst das durch z.B. Einsetzen überprüfen:
-4 in (1): $(-4)^2 + 0,5 \cdot (-4) - 14 = 0$ ergibt eine wahre Aussage.
$3,6$ in (1): $3,6^2 + 0,5 \cdot 3,6 - 14 = 0,76 \neq 0$; d.h. 3,6 ist keine Lösung.

(b) $x^2 + 0,5 - 14 = 0 \mid \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + x - 28 = 0$. Wenn du jetzt noch die Summanden x und $2x^2$ vertauschst, erhältst du die Gleichung (2). Beide Gleichungen sind äquivalent. Also haben sie die gleiche Lösungsmenge.

4.



(a)

$P(-4 \mid -4,5)$:	-4,5	$=$	$0,5 \cdot (-4,5)^2 + b \cdot (-4,5) + c$	
$Q(1 \mid 3)$:	3	$=$	$0,5 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$	
	$-4,5$	$=$	$8 - 4b + c$	(1)
	3	$=$	$0,5 + b + c$	(2)
(2) − (1) :	$7,5$	$=$	$-7,5 + 5b$	

$\Rightarrow \quad b = 3$ und z.B. in (2): $c = -0,5$.
Also gilt für p: $y = 0,5x^2 + 3x - 0,5$.

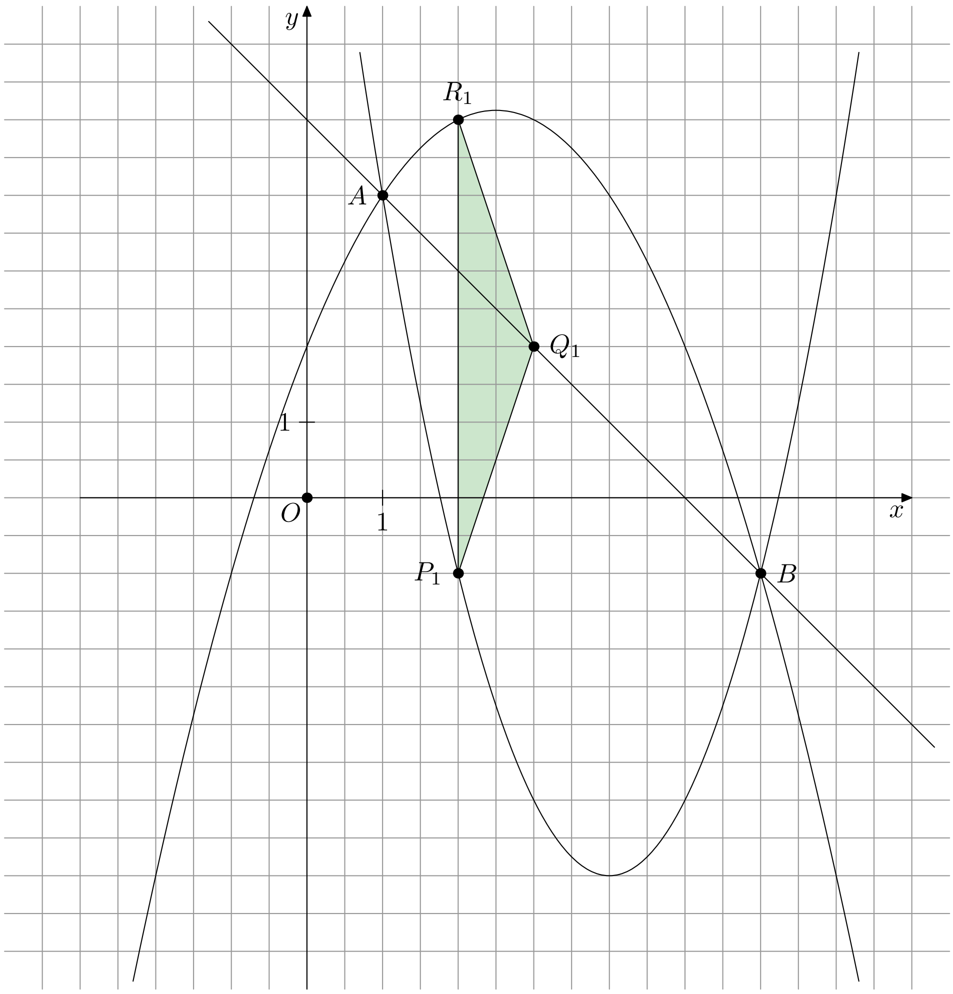
(b) $x_S = -\dfrac{-3}{2 \cdot 0,5} = -3$ und $y_S = -0,5 - \dfrac{3^2}{4 \cdot 0,5} = -5 \Rightarrow \quad S(-3 \mid -5)$.

(c) Siehe Zeichnung oben.

(d) An den Schnittpunkten der Parabel mit der Geraden gilt: $x = -6$ bzw. $x = 1$. Dort liegen die betreffenden Punkte A_n und C_n aufeinander. Also gibt es jeweils kein Dreieck.

(e) Weil die Punkte B_n niemals mit den Punkten A_n zur Deckung kommen, kann das betreffende Dreieck höchstens zur Strecke entarten.

5.



(a) $p_1 \cap g$: $-0,5x^2 + 2,5x + 2 = -x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad -0,5x^2 + 3,5x - 3 = 0.$
$[x_1 = 1] \quad x_2 = 6$ in g: $y = -6 + 5 = -1 \quad \Rightarrow B(6 \mid -1).$

(b) Siehe Zeichnung.

(c) $\overline{R_nP_n}(x) = y_{R_n} - y_{P_n} =$
$[-0,5x^2 + 2,5x + 2 - (x^2 - 8x - 11)]$ LE $= (-1,5x^2 + 10,5x - 9)$ LE.
$A(x) = 0,5 \cdot 1 \cdot (-1,5x^2 + 10,5x - 9)$ FE $= (-0,75x^2 + 5,25x - 4,5)$ FE.

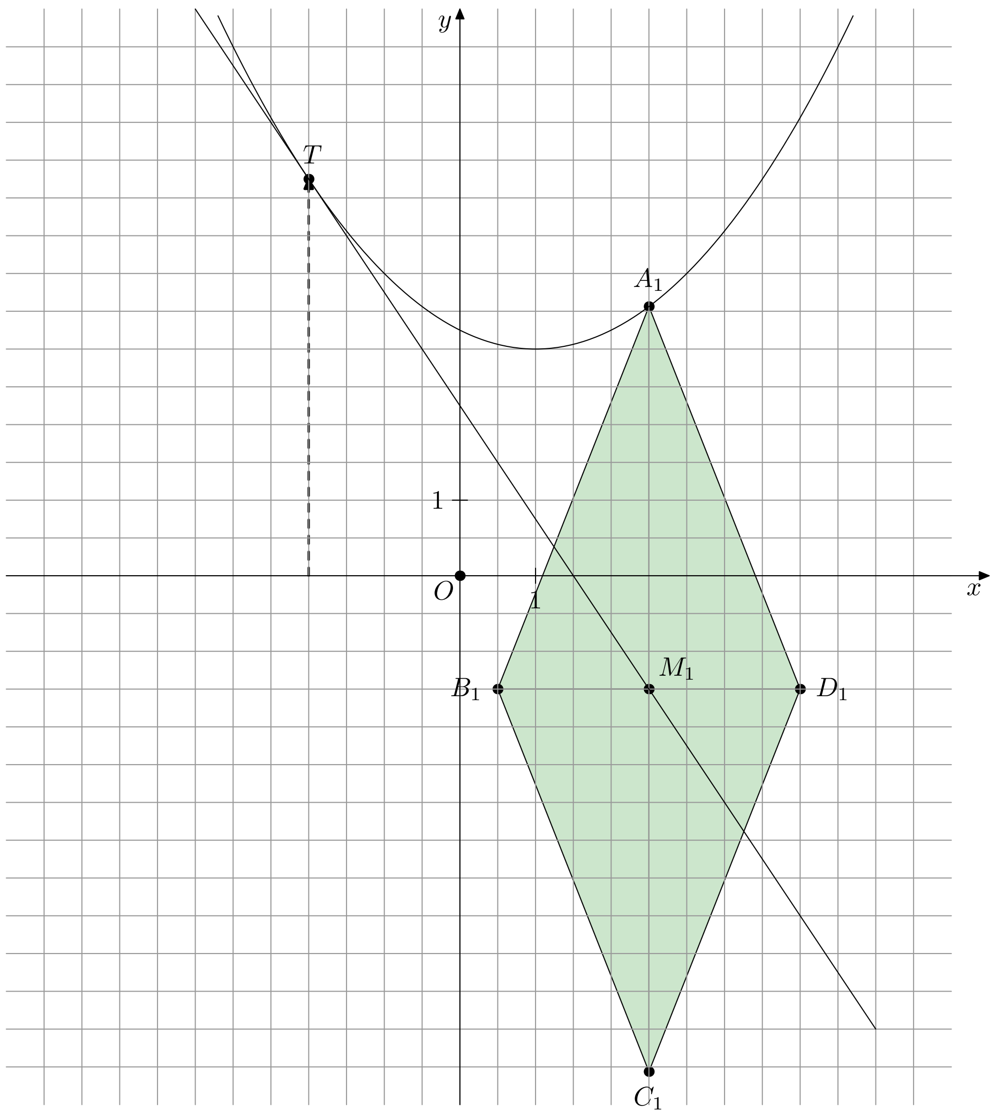
$$A_{max} = -4,5 - \frac{5,25^2}{4 \cdot (-0,75)} \text{ FE} \approx 4,69 \text{ FE}.$$

$$x = \frac{-5,25}{2 \cdot (-0,75)} = 3,5 \text{ liefert dieses Maximum.}$$

$P_0(3,5 \mid 3,5^2 - 8 \cdot 3,5 + 11) = (3,5 \mid -4,75)$

(d) $y_{M_n}(x) = \dfrac{(x^2 - 8x + 11) + (-0,5x^2 + 2,5x + 2)}{2}$
$= 0,25x^2 - 2,75x + 6,5 = 1. \qquad [x_1 \approx 8,37] \quad x_2 \approx 2,63.$

6.



(a) $p \cap g$: $0,25x^2 - 0,5x + 3,25 = -1,5x + 2,25 \quad \Leftrightarrow \quad 0,25x^2 + x + 1 = 0$
$D = 1^2 - 4 \cdot 0,25 \cdot 1 = 0$; also berührt die Gerade g die Parabel p.

(b) Siehe Zeichnung.

(c) $A_{A_nB_nC_nD_n} = \frac{1}{2}\overline{A_nM_n} \cdot \overline{B_nD_n}$:

$\overline{A_nM_n} = \left[(0,25x^2 - 0,5x + 3,25) - (-1,5x + 2,25)\right]$ LE
$\Rightarrow \quad \overline{A_nM_n}(x) = 0,25x^2 + x + 1)$ LE.

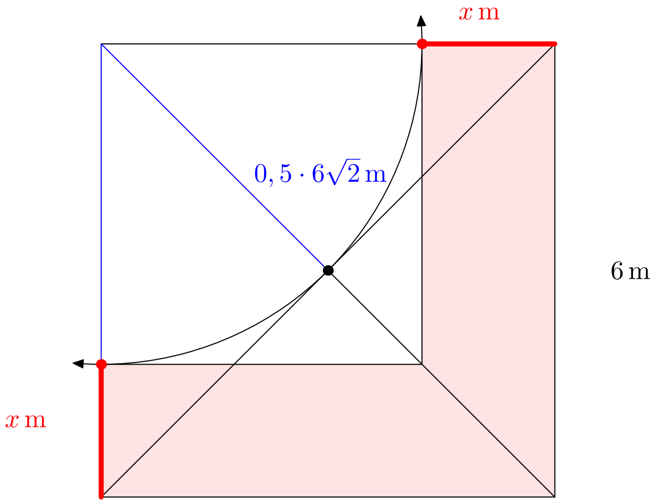
$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (0,25x^2 + x + 1) \cdot 4$ FE $= (x^2 + 4x + 4)$ FE

(d) $x = -\dfrac{4}{2 \cdot 1} = -2$. Dieser x-Wert liefert das Minimum.

Für $x = -2$ entartet die Raute zur Strecke, denn $x = -2$ ist der Abszissenwert des Berührpunktes T der Geraden g mit der Parabel p (siehe Zeichnung).

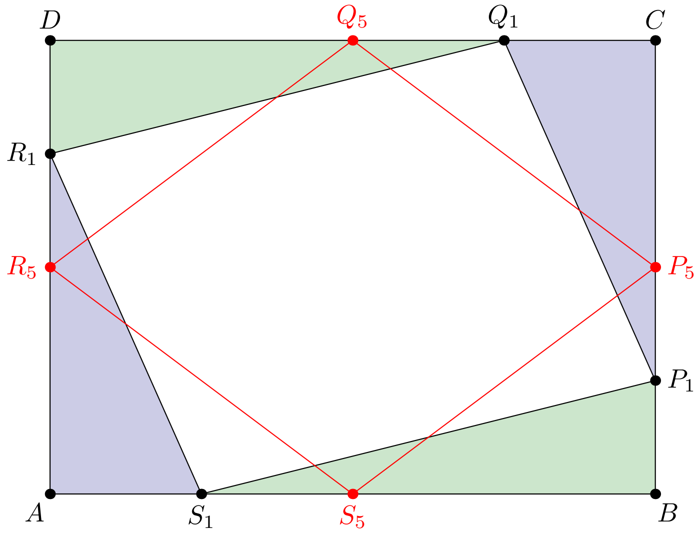
(e) $D_n(x \mid -1,5x + 2,25)$.

7. (a) Wenn das „L“ überall x m dick ist, dann ist die geflieste Fläche ein Quadrat mit der Seitenlänge $(6 - x)$ m .
Wenn das „L“ die Hälfte der Gesamtfläche ausmacht, dann muss die quadratische geflieste Fläche die andere Hälfte einnehmen. Als Maßzahlengleichung ergibt sich dann:
$(6 - x)^2 = 0.5 \cdot (6 \cdot 6) = 18$, mit $x \in \,]0,\, 6[_{\mathbb{R}}$.
$\Leftrightarrow \quad \mid 6 - x \mid = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$.
$\Leftrightarrow \quad 6 - x = 3\sqrt{2} \quad \vee \quad 6 - x = -3\sqrt{2}$.
$\Leftrightarrow \quad x = 6 - 3\sqrt{2} \quad \vee \quad x = 6 + 3\sqrt{2}$.
Wegen $x \in \,]0,\, 6[_{\mathbb{R}}$ folgt $x = 6 - 3\sqrt{2}$.

(b)
- Der Grundriss ist im Maßstab 1 : 100 dargestellt. (1 m = 100 cm) .
- 

  Ein Quadrat, dessen Seitenlänge 6 cm beträgt, hat eine Diagonalenlänge von $6\sqrt{2}$ cm.
  $0,5 \cdot 6\sqrt{2}$ cm ist dann gerade die halbe Diagonalenlänge dieses Quadrates.
  Du erhältst x, wenn du mit Hilfe des Kreisbogens die Differenz aus der Seitenlänge des großen Quadrates und seiner halben Diagonalenlänge abträgst.
- Der Rest ist klar.

8. (a)



(b) Es gilt $\Delta\, S_nBP_n \cong \Delta\, R_nQ_nD$ und $\Delta\, P_nCQ_n \cong \Delta\, AS_nR_n$.
$A_{ABCD} = 48\,\text{cm}^2$
$A_{P_nQ_nR_nS_n} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta\, S_nBP_n} - 2 \cdot A_{\Delta\, P_nCQ_n}$.
$2 \cdot A_{\Delta\, S_nBP_n} = 2 \cdot 0,5 \cdot \overline{S_nB} \cdot \overline{BP_n} = (1-k) \cdot 8\,\text{cm} \cdot 6k\,\text{cm} = 48\,\text{cm}^2 \cdot (1-k) \cdot k$.
$2 \cdot A_{\Delta\, P_nCQ_n} = 2 \cdot 0,5 \cdot \overline{P_nC} \cdot \overline{CQ_n} = (1-k) \cdot 6\,\text{cm} \cdot 8k\,\text{cm} = 48\,\text{cm}^2 \cdot (1-k) \cdot k$.

$$\begin{aligned} A_{P_nQ_nR_nS_n} &= 48\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 48\,\text{cm}^2 \cdot (1-k) \cdot k \\ A_{P_nQ_nR_nS_n} &= 48\,\text{cm}^2 \cdot [1 - 2k(1-k)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad q(k) = \frac{A_{P_nQ_nR_nS_n}}{A_{ABCD}} = \frac{48\,\text{cm}^2 \cdot [1-2k(1-k)]}{48\,\text{cm}^2} = 1 - 2k(1-k)\,.$$

(c) $q(0,4) = 1 - 2 \cdot 0,4 \cdot (1 - 0,4) = 0,52 = 52\%$

(d)

$$\begin{aligned} 1 - 2k(1-k) &= 0,58 \\ 2k^2 - 2k + 1 &= 0,58 \\ 2k^2 - 2k + 0,42 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad k_1 = 0,3 \quad \text{und} \quad k_2 = 0,7$

(e)
- Siehe Zeichnung.
- Es handelt sich um eine Raute.
  Begründung: Die vier rechtwinkligen Dreiecke S_5BP_5, P_5CQ_5, R_5Q_5D und AS_5R_5 sind kongruent, denn die besitzen jeweils Katheten, die jeweils 3 cm bzw. 4 cm lang sind. Also sind auch ihre Hypotenusen, die die Seiten des Parallelogramms $P_5Q_5R_5S_5$ bilden, gleich lang. Also ist dieses Viereck eine Raute.
- $q(k) = 1 - 2k(1-k) = 2k^2 - 2k + 1 = 2(k^2 - k + 0,5^2 - 0,25) + 1 = 2[(k-0,5)^2 - 0,25) + 1] = 2(k-0,5)^2 + 0,5$
  $k = 0,5$ liefert den minimalen Flächenanteil von $0,5 = 50\%$.

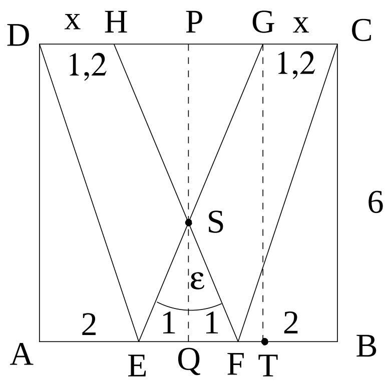
8. Trigonometrie

1. (a) $178,4\,\text{km}$
   (b) $48,6\,\text{km}$

2. ca. $3041\,\text{m}$

3. ca. $110\,\text{m}$

4. (a) $\beta \approx 131,79°$
   (b) ca. $3,36\text{m}$
   (c) ca. $1,11\text{m}$

5. (a)
   - –
   - 

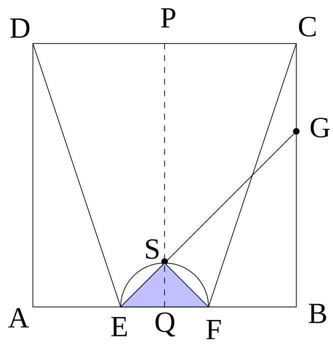
     Die gesuchte Hilfslinie ist das Lot $[GT]$ vom Punkt G auf die Seite $[AB]$.
     Es gilt$\sphericalangle EGT = \frac{\varepsilon}{2}$ (Z-Winkel) und $\overline{ET} = (4 - 1,2)\,\text{cm} = 2,8\,\text{cm}$.
     Im Dreieck ETG gilt dann
     $\tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{2,8}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{2} \approx 25,02° \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 50,04°$.

   (b) In diesem Fall muss $\varepsilon = 60° = \sphericalangle FEG$ gelten.
   Dann gilt im Dreieck EFG: $\overline{ET} = (4 - x)\,\text{cm}$.

$$\tan 60° = \frac{\overline{GT}}{\overline{ET}} = \frac{6}{4-x} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0,54$$

.

(c)



Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck EFS wird dadurch erzeugt, dass man den THALES-Halbkreis über $[EF]$ mit der Symmetrieachse $[PQ]$ schneidet.
Die Halbgerade $[ES]$ müsste die Seite $[CD]$ im Punkt G schneiden. Das ist offenbar nicht der Fall. Also kann das Dreieck EFS nie gleichschenklig-rechtwinklig werden.

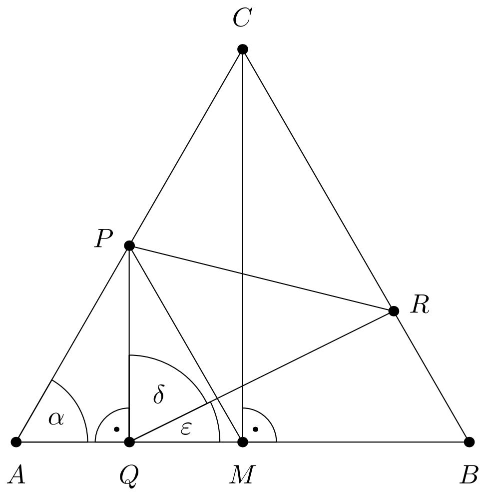
6. (a) $C(-1,46 \mid 1)$
   (b) $C(-1,46 \mid 1)$

7. $x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

8. (a) -.-
   (b) $\alpha = 120° \quad \delta = 104,04° \quad b = 7,20\,LE$
   (c) $A_{ABC} = 9\,FE$

9. (a) $V(x) = (-8x^2 + 28x + 120)\text{cm}^3$
   (b) $V_{max} = 144,5\,\text{cm}^3$ für $x = 1,75$
   (c) $x_1 = 3,10 \quad x_2 = 0,40$

10. (a) —
    (b)



Wir rechnen teilweise nur mit Maßzahlen.

(c) 1. Möglichkeit: mit einer Winkelfunktion

$\Delta AQP : \alpha = 60°; \quad \cos 60° = \dfrac{\overline{AQ}}{3\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AQ} = 1,5\,\text{cm}$

2. Möglichkeit: mit ähnlichen Dreiecken

$\Delta AQP \sim \Delta AMC : \quad \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$

$\dfrac{\overline{AQ}}{3\,\text{cm}} = \dfrac{3\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AQ} = 1,5\,\text{cm}$

3. Möglichkeit: Zeichne die Hilfslinie $[PM]$ ein.

ΔAMP: $\overline{AM} = \overline{AP} = 3\,\text{cm} \quad \wedge \alpha = 60°$
Daher ist das Dreieck AMP ist gleichseitig. Der Punkt Q ist also der Mittelpunkt der 3 cm langen Basis $[AM]$ in diesem Dreieck. $\Rightarrow \quad \overline{AQ} = 1,5\,\text{cm}$

(d) $\Delta AQP : \overline{PQ}^{\,2} = 3^2 - 1,5^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \approx 2,60\,\text{cm}$

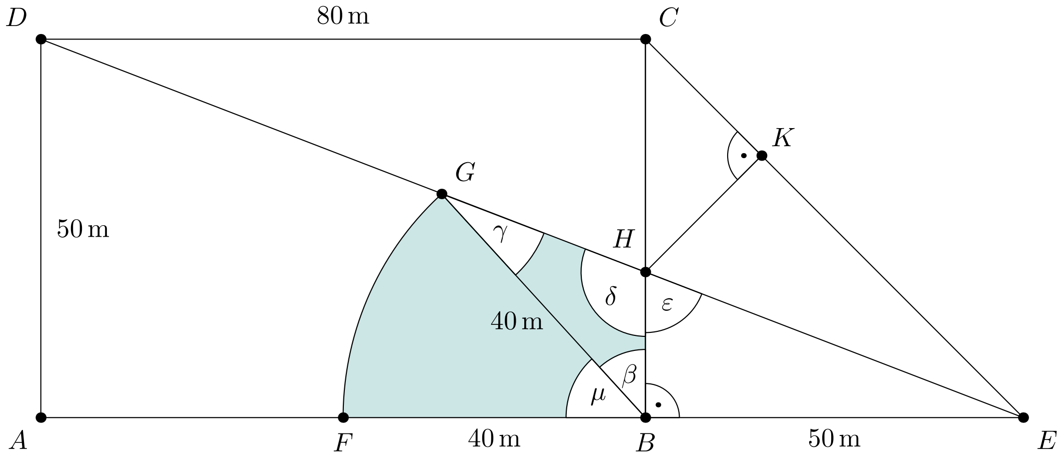
$\Delta QBR : \overline{QR}^{\,2} = 2^2 + 4,5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4,5 \cdot \cos 60° \quad \Rightarrow \quad \overline{QR} \approx 3,91\,\text{cm}$

$\dfrac{\sin\varepsilon}{2} \approx \dfrac{\sin 60°}{3,91} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 26,29°$

$\Delta QRP : \delta \approx 180° - 90° - 26,29° \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 63,71°$

$A_{\Delta PQR} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 2,60 \cdot 3,91 \cdot \sin 63,71° \quad \Rightarrow \quad A_{\Delta PQR} \approx 4,56\,\text{cm}^2$

11. (a)



(b) $\overline{DE}^2 = 130\,\mathrm{m}^2 + 50\,\mathrm{m}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{DE} \approx 139{,}3\,\mathrm{m}$
Wenn Herr Lieche den ersten Busch auf den Punkt D oder auf den Punkt E setzt, dann braucht er 140 Büsche, denn der 1. Busch steht dann nach 0 m da, der 2. Busch nach 1 m und schließlich der 140. Busch nach 139 m.
Wenn er genügend weit innen mit dem ersten Busch beginnt, dann braucht er weniger Büsche. Also braucht er höchstens 140 Büsche.

(c) Weil hier nur nach dem ungefähren Erdaushub gefragt ist, genügt es, die kürzeste Weglänge, nämlich die Strecke $[HK]$ aus der Zeichnung herauszumessen: $\overline{HK} \approx 2{,}2\,\mathrm{cm}$. Das entspricht einer tatsächlichen Wegstrecke von ca. 22 m.
Also errechnet sich der Erdaushub aus: $1\,\mathrm{m} \cdot 0{,}4\,\mathrm{m} \cdot 22\,\mathrm{m} \approx 8{,}8\,\mathrm{m}^3$
Anmerkung:
Es gibt natürlich auch einen rechnerischen Weg zur Lösung, der hier jedoch in der Aufgabenstellung nicht zwingend vorgeschrieben ist:
Die beiden Dreiecke BEC und CHK sind gleichschenklig-rechtwinklig und damit ist z.B. das Dreieck CHK ein halbes Quadrat. Wenn die Streckenlänge $\overline{CH}$ bekannt ist, dann ergibt sich: $\overline{HK} = \dfrac{\overline{CH}}{\sqrt{2}}$.
In der Lösung zur Aufgabe (d) wird die Streckenlänge $\overline{HB}$ berechnet. Damit wäre mit $\overline{CH} = 50\,\mathrm{m} - \overline{HB}$ alles erledigt.

(d) Die beiden Dreiecke AED und BEH sind zueinander ähnlich. Wende z.B. den Vierstreckensatz an:

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{HB}}{50\,\mathrm{m}} = \frac{50}{130} \quad \Rightarrow \quad \overline{HB} \approx 19{,}2\,\mathrm{m}$$

[**Anmerkung:**
Du kannst auch vom Dreieck AED mit $\tan \sphericalangle DEA = \frac{50}{130} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle DEA = \sphericalangle HEB \approx 21{,}04°$ in das Dreieck HBE wandern:
$\tan 21{,}04° \approx \frac{\overline{CH}}{50}$
Auch daraus ergibt sich (näherungsweise) der Wert für die Streckenlänge $\overline{HB}$.

Dieser Rechenweg stellt aber nur eine etwas umständlichere Form des Vierstreckensatzes dar.]

$\Delta HBE : \tan\varepsilon \approx \dfrac{50}{19,2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 68,99^\circ$ und $\delta = 180^\circ - \varepsilon \approx 111,01^\circ$

$\Delta GBH : \dfrac{\sin\gamma}{19,2} \approx \dfrac{\sin 111,01^\circ}{40} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 26,62^\circ$

und $\beta \approx 180^\circ - 111,01^\circ - 26,62^\circ \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 42,37^\circ$

$A_{\Delta GBH} \approx 0,5 \cdot 40 \cdot 19,2 \cdot \sin 42,37^\circ \mathrm{m}^2 \quad \Rightarrow \quad A_{\Delta GBH} \approx 258,8\mathrm{m}^2$

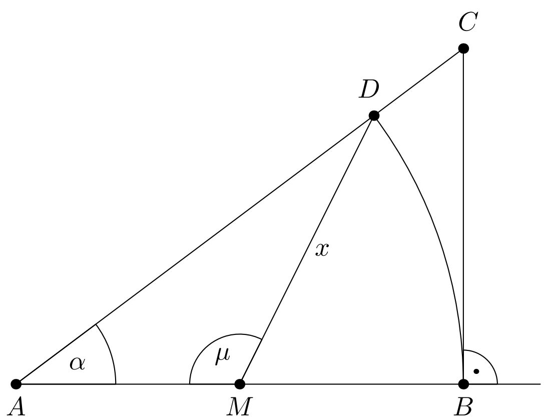
$\mu = 90^\circ - \beta \approx 47,63^\circ$

$A_{SektorBGF} \approx \dfrac{47,63^\circ}{360^\circ} \cdot 40^2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad A_{SektorBGF} \approx 665,0\,\mathrm{m}^2$

Zu pflasternde Fläche: $A_{ges} \approx 923,8\,\mathrm{m}^2$

Bei einem Quadratmeterpreis von 22 € muss Herr Lieche mindestens 20324 € für die Platten ausgeben.

12.

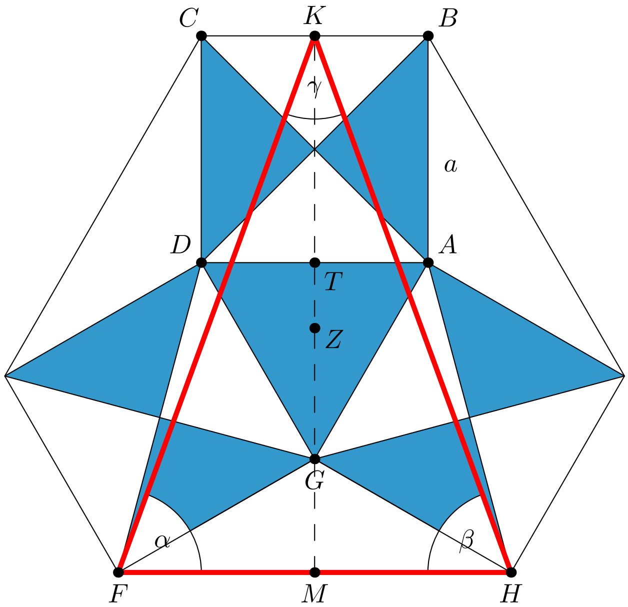


$\Delta ABC : \sin\alpha = \dfrac{6,72}{11,2} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 36,87^\circ$
Weiter gilt: $\overline{AB}^{\,2} = (11,20^{\,2} - 6,72^{\,2})\,\mathrm{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 8,96\,\mathrm{cm}$
$\Rightarrow \quad \overline{AM} = 4,48\,\mathrm{cm}$. Wegen $\overline{AD} = 8,96\,\mathrm{cm}$ folgt weiter:
$\Delta AMD : x^{\,2} \approx 4,48^{\,2} + 8,96^{\,2} - 2 \cdot 4,48 \cdot 8,96 \cdot \cos 36,87^\circ$
$\Rightarrow \quad x \approx 6,10\,\mathrm{cm}$.

$$\Delta AMD : \frac{\sin\mu}{8{,}96} \approx \frac{\sin 36{,}87^\circ}{6{,}01} \quad \Rightarrow \quad [\mu \approx 63{,}45^\circ] \quad \vee \quad \mu \approx 116{,}55^\circ.$$

$$A_{\Delta AMD} \approx 0{,}5 \cdot 4{,}48 \cdot 8{,}96 \cdot \sin 116{,}55^\circ\ \text{cm}^2 \approx 17{,}96\,\text{cm}^2$$

13. (a)



(b) Die Gerade MK ist die Symmetrieachse des Dreiecks FHK. Also gilt $\alpha = \beta$.
Im gleichseitigen Dreieck ADG stellt die Strecke $[GT]$ die Dreieckshöhe dar:
$\overline{GT} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3}$.

Der Punkt G ist der gemeinsame Eckpunkt zweier Quadrate und des gleichseitigen Dreiecks ADG. Also gilt: $\sphericalangle HGF = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle HFG = \sphericalangle GHF = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$

Das Dreieck FHG wird durch seine Höhe $[GM]$ in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt. $\Rightarrow \quad \sphericalangle FGM = \sphericalangle MGH = (90^\circ - 30^\circ) : 2 = 60^\circ$

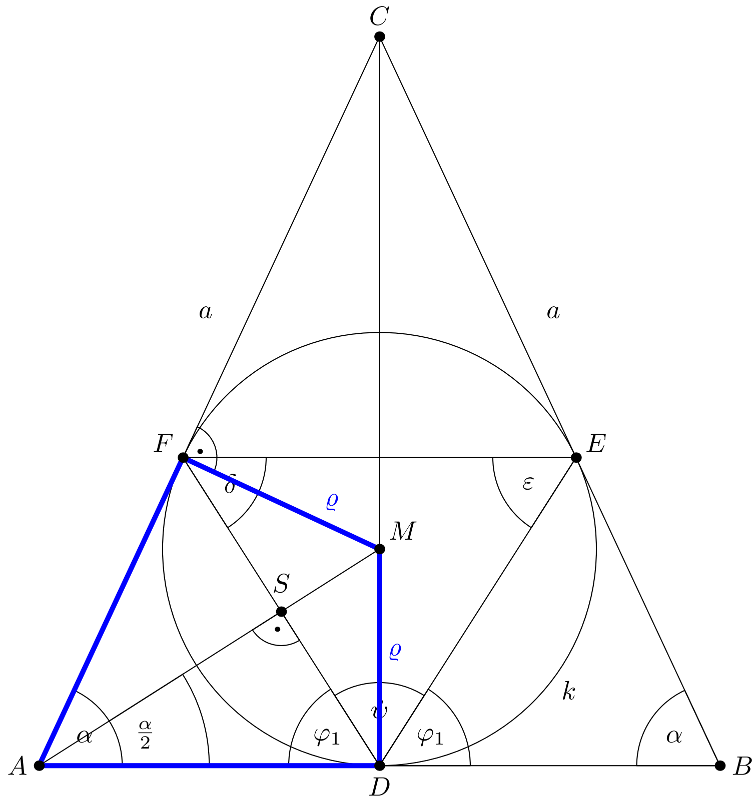
Wegen $\overline{FG} = \overline{AG} = a$ gilt: $\Delta FMG \cong \Delta GMH \cong \Delta GAT$. Es sind alles halbe gleichseitige Dreiecke: $\overline{GM} = \frac{1}{2}\,a$.

Im rechtwinkligen Dreieck FMK gilt dann:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{KT} + \overline{TG} + \overline{GM}}{\overline{FM}} = \frac{a + \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot a}{\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow \quad \alpha = \beta \approx 69{,}90^\circ$ und $\gamma \approx 180^\circ - 2 \cdot 69{,}90^\circ = 40{,}20^\circ$

14. (a)



(b)
- Siehe obige Zeichnung.
- Das Viereck $ADMF$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, denn die Diagonale $[AM]$ ist die Halbierende des Winkels mit dem Maß α und damit die Symmetrieachse dieses Vierecks.
  Das Dreieck ADS ist rechtwinklig, weil die beiden Diagonalen in jedem Drachenviereck senkrecht aufeinander stehen:
  $\varphi_1 = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2} = \varphi_2$. Weiter muss gelten: $\varphi_1 + \varphi_2 + \psi = 180^\circ$
  $\Rightarrow \quad \psi = 180^\circ - 2 \cdot \left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \psi = \alpha.$

(c)
- Mit $\overline{CA} = \overline{CB} = a$ gilt: $A_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin\gamma$.

  $$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2}a^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha$$

  $$\boxed{A_{\Delta ABC} = a^2 \sin\alpha\cos\alpha} \qquad \textbf{(*)}$$

  $$A_{\Delta DEF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FD}^{\,2} \sin\alpha \qquad \textbf{(**)}$$

  Wende im Dreieck ADF den Kosinussatz an:

$\overline{FD}^{\,2} = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{c^{\,2}}{4} \cdot (1 - \cos\alpha)$ in **(*)**:

$$\boxed{A_{DEF} = \frac{c^{\,2}}{4} \cdot (1 - \cos\alpha)\sin\alpha}$$

$$\frac{A_{\Delta DEF}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{c^{\,2}}{4} \cdot (1 - \cos\alpha)\sin\alpha}{a^{\,2}\sin\alpha\cos\alpha} = \left(\frac{\frac{c}{2}}{a}\right)^2 \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}$$

Im Dreieck ADC gilt: $\frac{\frac{c}{2}}{a} = \cos\alpha$

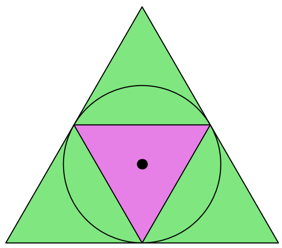
$$\Rightarrow \quad \frac{A_{\Delta DEF}}{A_{\Delta ABC}} = \cos^2\alpha \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha(1 - \cos\alpha)$$

Dabei darf aber α nicht $90°$ werden. **(Warum?)**

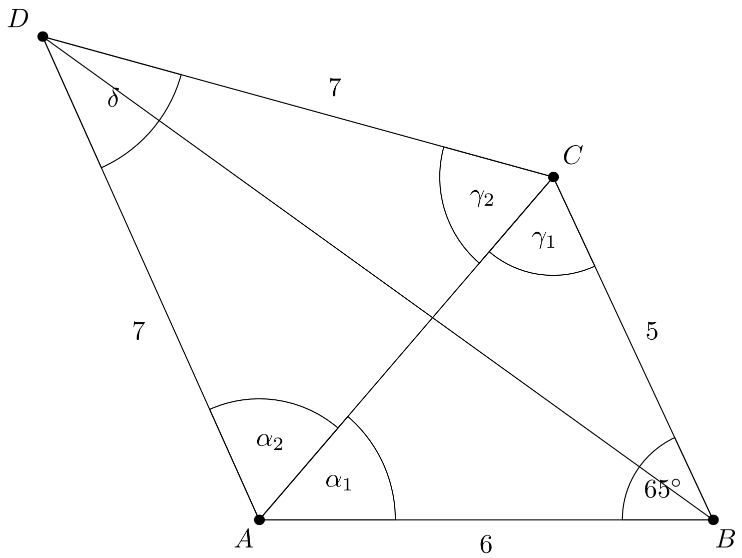
- $T(\alpha) = \cos\alpha(1 - \cos\alpha) = -\cos^2\alpha + \cos\alpha = -\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

  $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ liefert $T_{max} = \frac{1}{4}$

  Dann muss aber $\alpha = 60°$ gelten; d.h. in diesem Fall sind die Dreiecke ABC und DEF jeweils gleichseitig. Das innere Dreieck nimmt 25% der Gesamtfläche ein. Das sieht dann so aus:



15. (a)



(b) Zwar sind die Seiten $[AD]$ und $[CD]$ gleich lang, aber die Seiten $[BA]$ und $[BC]$ sind es nicht.

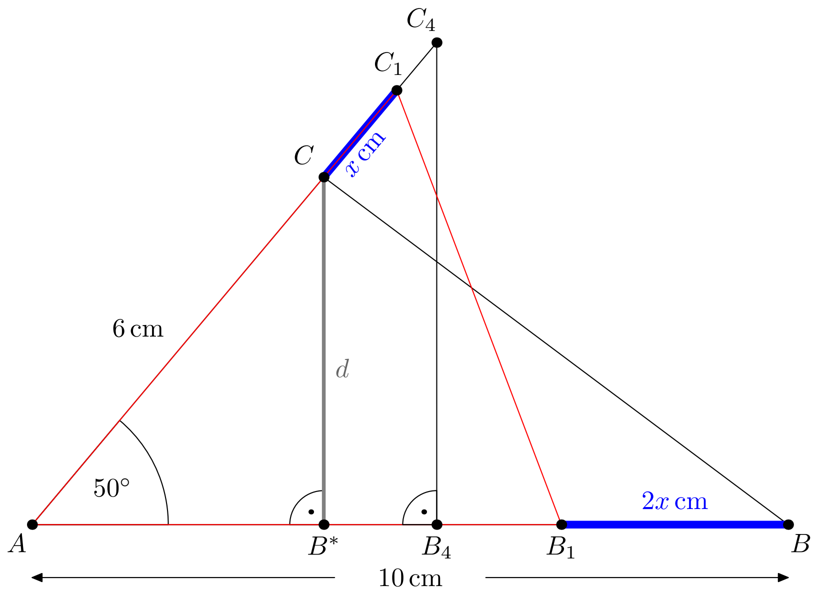
(c) $\Delta\, ABC$: $\overline{AC}^{\,2} = \left(5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 65°\right)\ \mathrm{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} \approx 5{,}97\,\mathrm{cm}$

(d) $\Delta\, ABC$: $5^2 = 6^2 + 5{,}97^{\,2} - 2 \cdot 6 \cdot 5{,}97 \cdot \cos\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \approx 49{,}38°$
$\Delta\, ACD$: $5{,}97^{\,2} = 7^{\,2} + 7^{\,2} - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos\delta \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 50{,}48°$
$\Delta\, ACD$: $\alpha_2 = \gamma_2 \approx (180° - 50{,}48°) : 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \gamma_2 \approx 64{,}76°$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle BAD = \alpha_1 + \alpha_2 \approx 114{,}14°$
$\Rightarrow \quad \overline{BD}^{\,2} \approx \left(6^2 + 7^{\,2} - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos 114{,}14°\right)\ \mathrm{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} \approx 10{,}92\,\mathrm{cm}$

(e) $A_{ABCD} = A_{\Delta ABC} + A_{\Delta ACD}$:

$$A_{ABCD} \approx \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin 65° + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \sin 50{,}48°\right)\ \mathrm{cm}^2 \approx 32{,}49\,\mathrm{cm}^2$$

16. (a) •



- $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot (10 \cdot 6 \cdot \sin 50°)\,\text{cm}^2 \approx 22,98\,\text{cm}^2$

(b)
- Siehe Zeichnung.
- $A_{\Delta AB_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot (7 \cdot 7.5 \cdot \sin 50°)\,\text{cm}^2 \approx 20,11\,\text{cm}^2$
- ΔAB^*C: $\quad \sin 50° = \frac{d}{6\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad d \approx 4,60\,\text{cm}$ (siehe Zeichnung)
- $\overline{B_1C_1}^{\,2} = 7^2 + 7.5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7,5 \cdot \cos 50°$
  $\Rightarrow \quad \overline{B_1C_1} \approx 6,14\,\text{cm}$ (siehe Zeichnung)

(c) $x < 0$: Aus „Verlängern“ würde „Verkürzen“ und umgekehrt, das geht nicht.
$x = 0$ liefert kein „neues Dreieck“, vgl. Angabe.
$x = 5$: Das Dreieck entartet zur Strecke.
$x > 5$: Die betreffenden Punkte B_n würden links vom Punkt A auftauchen; die betreffenden Dreiecke hätten dann den falschen Drehsinn.
Also: $x \in]0;5[_{\mathbb{R}}$.

(d) $A(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot (10 - 2x)(6 + x) \cdot \sin 50°\right)\,\text{cm}^2 \approx 0,77 \cdot \left(30 + 5x - 6x - x^2\right)\,\text{cm}^2$

$A(x) \approx 0,77 \cdot \left(-x^2 - x + 30\right)\,\text{cm}^2 = (-0,77x^2 - 0,77x + 23,1)\,\text{cm}^2$

(e)
- Quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} T(x) &= -0,77x^2 - 0,77x + 23,1 \\ &= -0,77(x^2 - x + 0,5^2 - 0,25 - 30) \\ &= -0,77[(x + 0,5)^2 - 30,25] \\ T(x) &= -0,77(x + 0,5)^2 + 23,2925 \end{aligned}$$

  $x = -0,5$ liefert $T_{max} = 23,2925$

- Wegen $-1,5 \notin]0;5[_{\mathbb{R}}$ wird dieses Maximum bei keinem der Dreiecke AB_nC_n angenommen.

(f) $-0,77x^2 - 0,77x + 23,1 = 7,7 \quad \Leftrightarrow \quad -0,77x^2 - 0,77x + 15,4 = 0$
Der Solver des GTR liefert die beiden Lösungen $x_1 = 4$ und $x_2 = -5$.
Wegen $-5 \notin]0; 5[_{\mathbb{R}}$ kommt nur $x_1 = 4$ als Lösung in Frage.

(g) Es muss gelten: $\overline{AB_n} = \overline{AC_n}$; d.h. $10 - 2x = 6 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\overline{3}$

(h) Fertige am besten eine Skizze dazu an.

- In diesem Fall gilt: $\cos 50° = \dfrac{10-2x}{6+x}$. Der Solver des GTR liefert $x \approx 2,32$.
- Siehe Zeichnung.

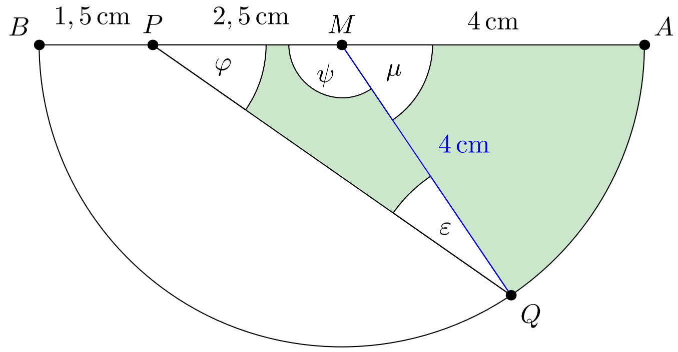
(i)
- Kosinussatz in den Dreiecken AB_nC_n:
$\overline{B_nC_n}(x)^2 = [(10-2x)^2 + (6+x)^2 - 2 \cdot (10-2x) \cdot (6+x) \cdot \cos 50°]\,\text{cm}^2$
$\approx [100 - 40x + 4x^2 + 36 + 12x + x^2 - 2 \cdot (60 + 10x - 12x - 2x^2) \cdot 0,64]\,\text{cm}^2$
$= [5x^2 - 28x + 136 - 1,28 \cdot (-2x^2 - 2x + 60)]\,\text{cm}^2$
$= [5x^2 - 28x + 136 + 2,56x^2 + 2,56x - 76,80]\,\text{cm}^2$
$\overline{B_nC_n}(x) \approx \sqrt{7,56x^2 - 25,44x + 59,2}\,\text{cm}$
- $\overline{B_nC_n}(1,5) = \sqrt{7,56 \cdot 1,5^2 - 25,44 \cdot 1,5 + 59,2}\,\text{cm} \approx 6,17\,\text{cm}$
Anmerkung: Das Ergebnis in der Aufgabe (b) 4. Punkt lautet: $\overline{B_1C_1} \approx 6,14\,\text{cm}$. Die Abweichung ergibt sich daraus, dass hier in der Lösung (i) 1. Punkt viel häufiger gerundet worden ist als in der Aufgabe (b) 4. Punkt. Der Wert 6,14 liegt näher am exakten Ergebnis, das aber nie „genau" dagestellt werden kann.

(j) Im entsprechenden Dreieck gilt: $\sphericalangle AC_5B_5 = 180° - 50° - 62° = 68°$.

$$\frac{\sin 68°}{10-2x} = \frac{\sin 62°}{6+x}$$

Der Solver des GTR liefert $x \approx 1,21$.

17. (a)



Die Hilfslinie ist der Kreisradius $[MQ]$ mit $\overline{MQ} = \overline{MA} = \overline{MB} = 4\,\text{cm}$.

(b) ΔPQM: $\dfrac{2,5}{\sin\varepsilon} = \dfrac{4}{\sin 35^\circ} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 21,01^\circ$

$\Rightarrow \quad \psi \approx 180^\circ - 35^\circ - 21,01^\circ = 123,99^\circ.$

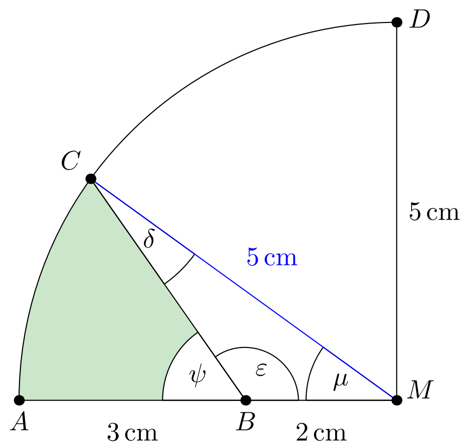
$A_{\Delta PQM} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 4 \cdot \sin 123,99^\circ \approx 4,15\,\text{cm}^2$

$\mu \approx 180^\circ - 123,99^\circ = 56,01^\circ.$

$A_{Sektor\,MQA} \approx \dfrac{56,01^\circ}{360^\circ} \cdot 4^2\pi \approx 7,82\,\text{cm}^2$

$\Rightarrow \quad A_{gesamt} \approx 4,15\,\text{cm}^2 + 7,82\,\text{cm}^2 = 11,97\,\text{cm}^2.$

18. (a)



Die Hilfslinie ist der Kreisradius $[MC]$ mit $\overline{MC} = \overline{MA} = \overline{MD} = 5\,\text{cm}$.

(b) $\varepsilon = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

ΔBMC: $\dfrac{2}{\sin\delta} = \dfrac{5}{\sin 125^\circ} \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 19,13^\circ$

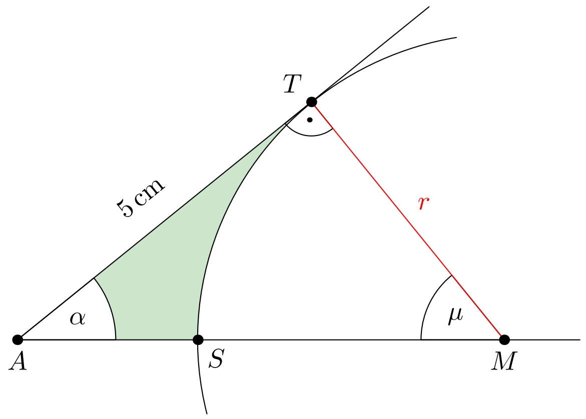
$\Rightarrow \quad \mu \approx 180^\circ - 125^\circ - 19,13^\circ = 35,87^\circ.$

$A_{\Delta BMC} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sin 35,87^\circ \approx 2,93\,\text{cm}^2$

$A_{Sektor\,MCA} \approx \dfrac{35,87^\circ}{360^\circ} \cdot 5^2\pi \approx 7,83\,\text{cm}^2$

$\Rightarrow \quad A_{Rest} = A_{Sektor} - A_{\Delta BMC} \approx 4,90\,\text{cm}^2.$

19. (a)



(b) Der Berührradius $r = \overline{MT}$ steht auf seiner Tangente $[AT$ senkrecht. Die Senkrechte zur Halbgeraden $[AT$ im Punkt T schneidet den waagrechten Schenkel von α im Kreismittelpunkt M. Damit werden der Kreisbogen und der Schnittpunkt S konstruierbar.

(c) ΔAMT: $\tan 39° = \dfrac{r}{5} \quad \Rightarrow \quad r \approx 4,05\,\text{cm}$.

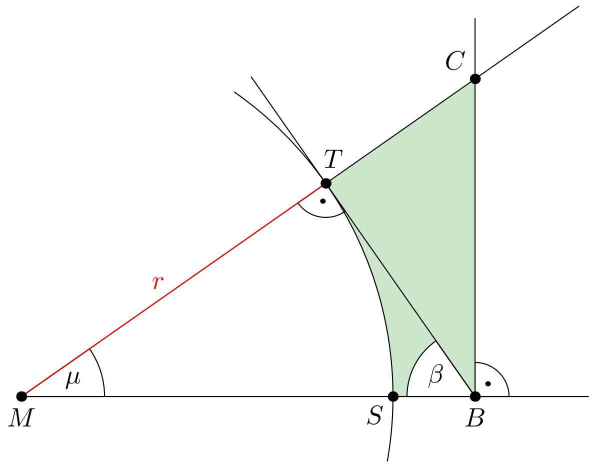
$\mu = 90° - 39° = 51°$.

$A_{\Delta AMT} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 4,05 \cdot 5\,\text{cm}^2 \approx 10,13\,\text{cm}^2$.

$A_{Sektor\ MTS} \approx \dfrac{51°}{360°} \cdot 4,05^2\pi\,\text{cm}^2 \approx 7,30\,\text{cm}^2$.

$\Rightarrow \quad A_{Rest} = A_{\Delta AMC} - A_{Sektor} \approx 2,83\,\text{cm}^2$.

20. (a)



- Zeichne $[MB]$.

- Zeichne die Senkrechte zu $[MB]$ durch den Punkt B.
- Trage in B den Winkel mit dem Maß $\beta = 55°$ an. Jetzt hast du zwei Möglichkeiten, den Punkt T zu konstruieren:
  1.
  Zeichne durch den Punkt M die Senkrechte auf den freien Schenkel von β. Diese Senkrechte schneidet den freien Schenkel von β im Punkt T. Die Halbgerade $[MT$ scheidet die vorher gezeichnete Senkrechte zu MB durch den Punkt B im Punkt C.
  2.
  Der THALES-(Halb-)Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$ scheidet den freien Schenkel von β im Punkt T. Dann wird C wie in 1. konstruiert.
  Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde zur 1. Möglichkeit gegriffen.

(b) Der Berührradius $r = \overline{MT}$ steht auf seiner Tangente BT senkrecht.

Im ΔMBT gilt dann: $\mu = 90° - 55° = 35°$.

$$\cos 35° = \frac{r}{6\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad r \approx 4,91\,\text{cm}.$$

Für den Flächeninhalt des Kreissektors MST gilt dann:

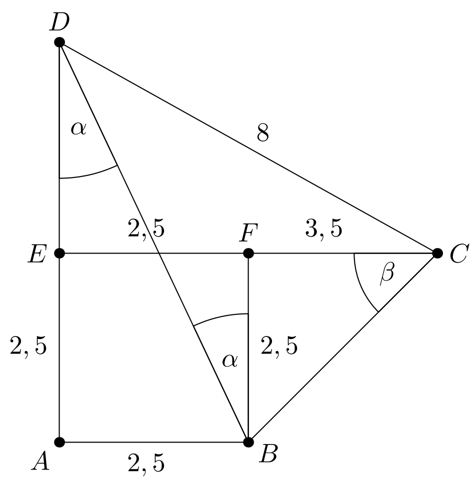
$$A_{Sektor\,MST} \approx \frac{35°}{360°} \cdot 4,91^2\pi\,\text{cm}^2 \approx 7,36\,\text{cm}^2.$$

Im ΔMBC gilt: $\tan 35° = \dfrac{\overline{BC}}{6} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} \approx 4,20\,\text{cm}.$

$$A_{\Delta MBC} \approx \frac{1}{2} \cdot 4,20 \cdot 6\,\text{cm}^2 = 12,60\,\text{cm}^2$$

$$A_{Rest} = A_{\Delta MBC} - A_{Sektor} \approx 5,24\,\text{cm}^2.$$

21.

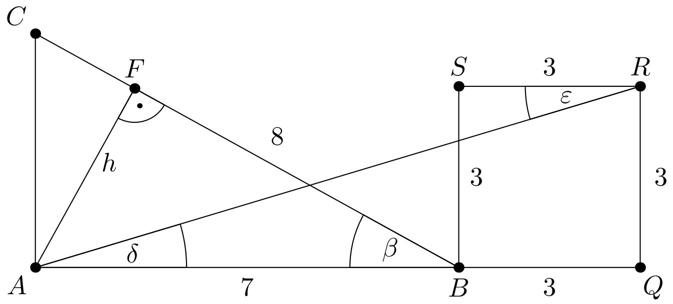


Die Zeichnung wurde mit den gegebenen Maßzahlen beschriftet.

(a)
- Dazu musst du erst $\overline{DE}$ berechnen:
  $\Delta\, ECD$: $\overline{DE}^2 + \overline{EC}^2 = \overline{DC}^2$
  $\overline{DE}^2 + 6^2\,\text{cm}^2 = 8^2\,\text{cm}^2 \quad\Rightarrow\quad \overline{DE} \approx 5,29\,\text{cm}$ $\Delta\, ABD$: $\overline{DB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2$
  $\overline{DB}^2 = 7,79^2\,\text{cm}^2 + 2,5^2\,\text{cm}^2 \quad\Rightarrow\quad \overline{DB} \approx 8,18\,\text{cm}$
- $\overline{AD} = 2,5\,\text{cm} + 5,29\,\text{cm} = 7,79\,\text{cm}$
  $\Delta\, ABD$: $\tan\alpha = \dfrac{2,5}{7,79} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 17,79°$
- $\Delta\, BCF$: $\tan\beta = \dfrac{2,5}{3,5} \quad\Rightarrow\quad \beta \approx 35,54°$

(b) Es ist der Winkel FBD (Z-Winkel, siehe Zeichnung).

22.

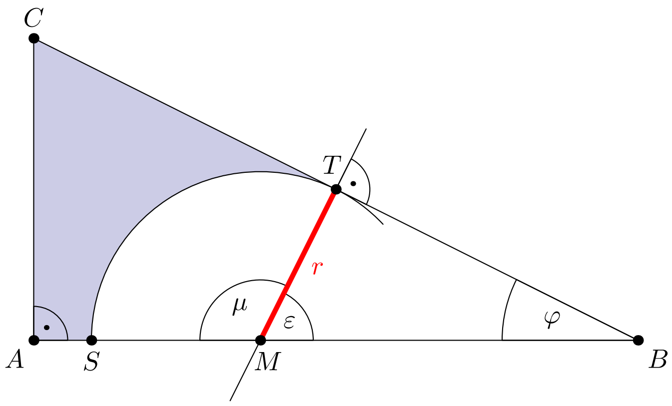


Die Zeichnung wurde mit den gegebenen Maßzahlen beschriftet.

(a)
- $\Delta\, ABC$: $\cos\beta = \dfrac{7}{8} \quad\Rightarrow\quad \beta \approx 28,96°$.
- $\Delta\, ABF$: $\sin\beta = \dfrac{h}{7} \quad\Leftrightarrow\quad h \approx 7 \cdot \sin 28,96° \quad\Rightarrow\quad h \approx 3,39\,\text{cm}$.
- $\Delta\, AQR$: $\tan\delta = \dfrac{3}{10} \quad\Rightarrow\quad \delta \approx 16,70°$.

(b) $\varepsilon = \delta$ (Z-Winkel).

23. (a)



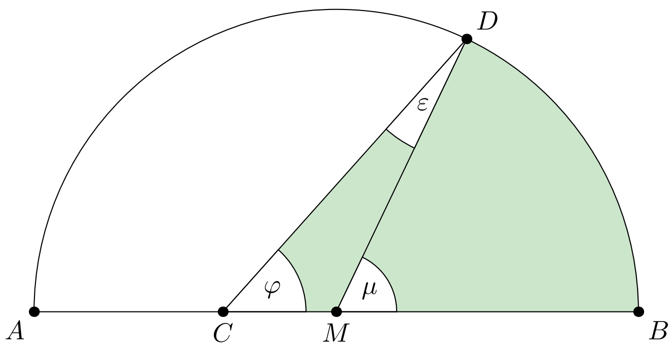
Der Berührradius $r = [MT]$ steht auf seiner Kreistangente BC senkrecht. Zeichne also eine Senkrechte zur Hypotenuse $[BC]$ durch den Punkt T. Diese Senkrechte schneidet dann die Kathete $[AB]$ im Mittelpunkt M des Kreisbogens.

(b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen.
PYTHAGORAS im Dreieck ABC: $\overline{BC}^2 = 8^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} \approx 8,97\,\text{cm}$.
$\Delta\, ABC$: $\tan\varphi = \dfrac{4}{8} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 26,57°$.
$\Delta\, MBT$: $\tan 26,57° \approx \dfrac{r}{4,47} \quad \Rightarrow \quad r \approx 2,24\,\text{cm}$,
und $\varepsilon \approx 90° - 26,57° = 63,43°$.
$\mu \approx 180° - 63,43° \quad \mu \approx 116,57°$.
$A_{\Delta\, ABC} = 0,5 \cdot 4 \cdot 8\,\text{cm}^2 = 16\,\text{cm}^2$
$A_{\Delta\, MBT} \approx 0,5 \cdot 2,24 \cdot 4,47\,\text{cm}^2 \approx 5,01\,\text{cm}^2$

$$A_{Sektor\; MTS} \approx \frac{116,57°}{360°} \cdot 2,24^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 = 5,10\,\text{cm}^2$$

$$A_{Farbe} \approx 16\,\text{cm}^2 - 5,01\,\text{cm}^2 - 5,10\,\text{cm}^2 = 5,89\,\text{cm}^2.$$

24. (a)



(b) Die Hilfslinie ist der Kreisradius $\overline{MD}$. Der Mittelpunkt des Kreisbogens von B nach D ist der Punkt M. Daher ist die Strecke $[CD]$ länger als der Kreisradius $\overline{MD}$. Bei einem Kreissektor müssen aber die begrenzenden Strecken gleich lang sein, weil dies die Kreisradien sind.

(c) $\overline{MD} = 4\,\text{cm}$ und $\overline{MC} = 1,5\,\text{cm}$.

Im Dreieck CMD gilt: $\dfrac{1,5\,\text{cm}}{\sin\varepsilon} = \dfrac{4\,\text{cm}}{\sin 49^\circ} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 16,44^\circ$.

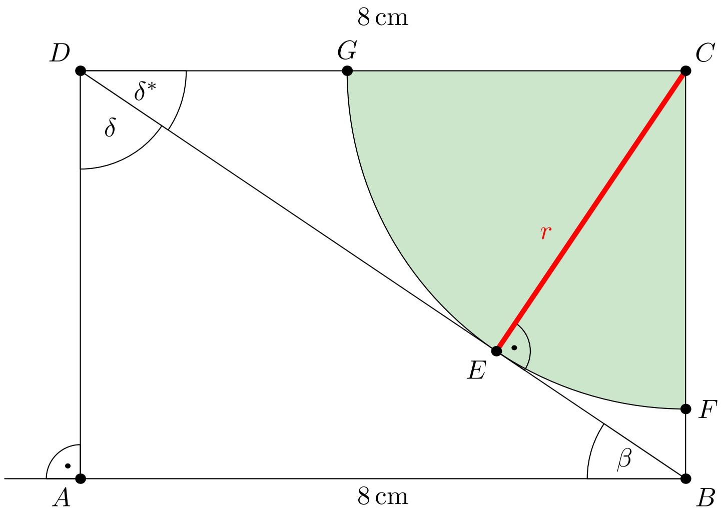
$\Rightarrow \quad \sphericalangle DMC \approx 180^\circ - 49^\circ - 16,44^\circ = 114,56^\circ \Rightarrow \quad \mu \approx 65,44^\circ$.

$A_{\Delta\,CMD} \approx 0,5 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot \sin 114,56^\circ\,\text{cm}^2 \approx 2,73\,\text{cm}^2$.

$A_{Sektor\,MBD} \approx \dfrac{65,44^\circ}{360^\circ} \cdot 4^2 \cdot \pi \approx 9,14\,\text{cm}^2$.

$A_{gesamt} \approx 2,73\,\text{cm}^2 + 9,14\,\text{cm}^2 = 11,87\,\text{cm}^2$.

25. (a)



Im Dreieck ABD gilt: $\beta = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$.

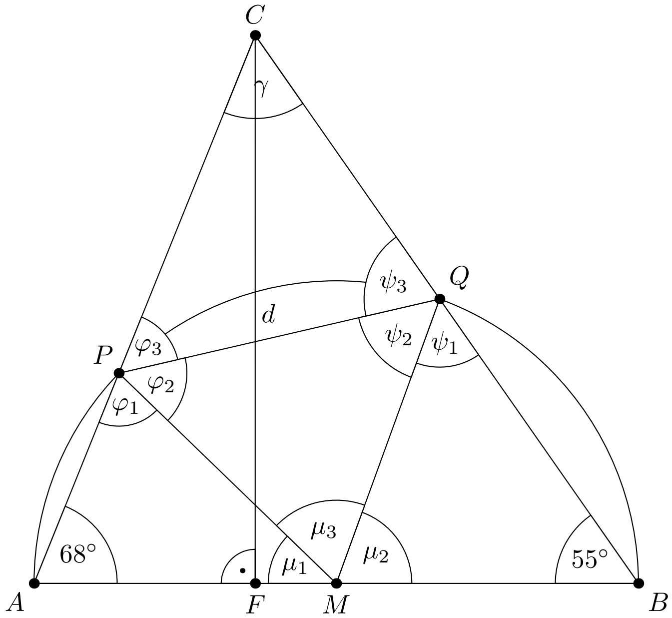
- Zeichne die Strecke $[AB]$.
- Errichte eine Senkrechte zur Strecke $[AB]$ durch den Punkt A.
- Trage am Punkt B den 34°-Winkel an.
- Die Senkrechte und der freie Schenkel des 34°-Winkels schneiden sich im Punkt D.
- Zeichne den Punkt C, die Diagonale $[BD]$ und den Kreisbogen ein.
- Der Berührradius $r = [CE]$ steht auf seiner Kreistangente BD senkrecht. Zeichne also das Lot vom Punkt C auf die Diagonale $[BD]$. Der Lotfußpunkt ist E und $r = [CE]$.

(b) Im Dreieck DEC gilt: $\delta^* = \beta = 34^\circ$ (Z-Winkel).

$$\sin 34^\circ = \frac{r}{8\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad r \approx 4,47\,\text{cm}.$$

$$A_{Sektor} \approx \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 4,47^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 15,69\,\text{cm}^2$$

26. (a)



(b)
- Das Dreieck AMP ist gleichschenklig; d.h. $\overline{MA} = \overline{MP} = 4\,\text{cm}$.
  $\Rightarrow \quad \varphi_1 = 68^\circ \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = 180^\circ - 2 \cdot 68^\circ = 44^\circ$.
  Ebenso ist das Dreieck MBQ gleichschenklig: $\overline{MB} = \overline{MQ} = 4\,\text{cm}$.
  $\Rightarrow \quad \psi_1 = 55^\circ \quad \Rightarrow \quad \mu_2 = 180^\circ - 2 \cdot 55^\circ = 70^\circ$.
  [**Exkurs:** Auf analoge Weise am Punkt P bzw. Q erhältst du:
  $\varphi_3 = 55^\circ = \beta$ und $\psi_3 = 68^\circ = \alpha$].
  Am Punkt M gilt also: $\mu_3 = \sphericalangle QMP = 180^\circ - 44^\circ - 70^\circ = 66^\circ$.
- Kosinussatz im Dreieck PMQ:
  $\overline{PQ}^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 66^\circ \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \approx 4,36\,\text{cm}$.

(c) Das Dreieck PMQ ist ebenfalls gleichschenklig; d.h. $\overline{MQ} = \overline{MP} = 4\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad \varphi_2 = \psi_2 = 57^\circ$.

$$A_{\Delta\,PMQ} = \frac{1}{2} \cdot \; 4^2 \cdot \sin 66^\circ \approx 7,31\,\text{cm}^2.$$

(d) Der Schnittpunkt der Halbgeraden $[AP$ und $[BQ$ ist der Punkt C.
- Siehe Zeichnung.
- Es gilt: $\gamma = 180^\circ - 55^\circ - 68^\circ = 57^\circ$.
  Sinussatz im Dreieck ABC:

$$\frac{\sin 55^\circ}{\overline{AC}} = \frac{\sin 57^\circ}{8\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} \approx 7,81\,\text{cm}.$$

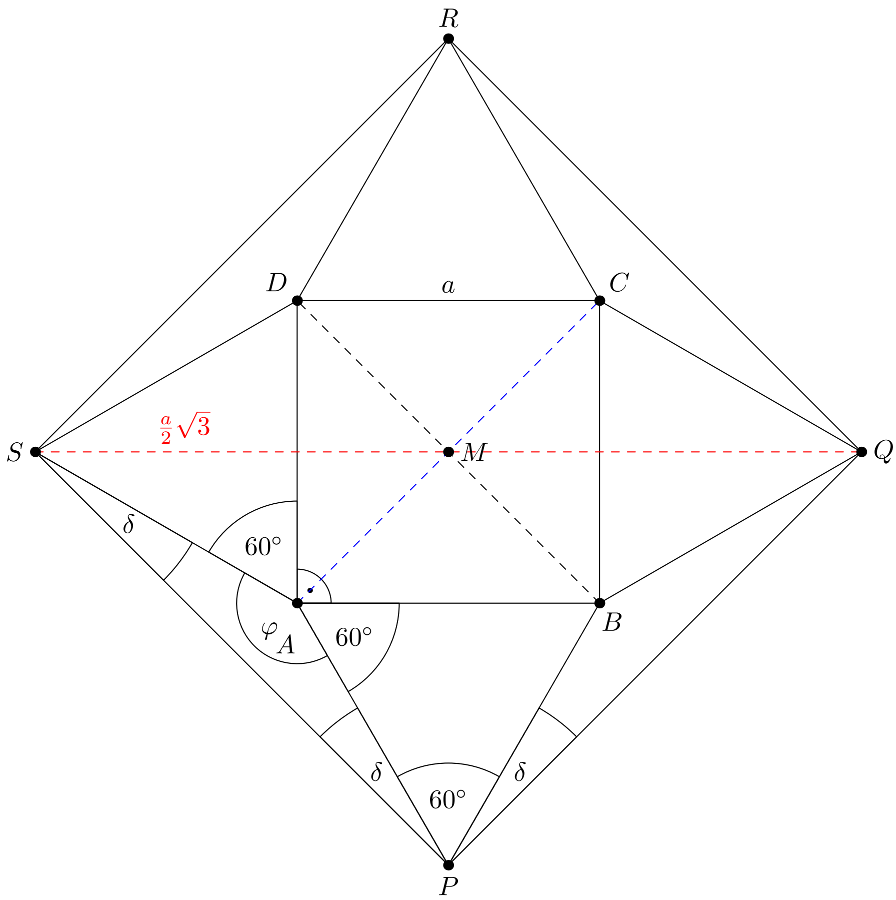
$$\Rightarrow \quad A^*_{\Delta\, ABC} \approx \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7{,}81 \cdot \sin 68^\circ \,\mathrm{cm}^2 \approx 28{,}97\,\mathrm{cm}^2.$$

- Siehe Zeichnung: Der gesuchte Abstand d ist die Länge der Dreieckshöhe $[CF]$. Für den Flächeninhalt A^* des Dreiecks ABC gilt:

$$A^* = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d.$$

$$\Rightarrow \quad 28{,}97\,\mathrm{cm}^2 \approx \frac{1}{2} \cdot 8\,\mathrm{cm} \cdot d \quad \Rightarrow \quad d \approx 7{,}24\,\mathrm{cm}.$$

27. (a)



(b) Die vier Dreiecke SPA, PQB, QRC und RSD sind aus Symmetriegründen kongruent. Also handelt es sich bei dem Viereck $PQRS$ mindestens um eine Raute.
Am Punkt A gilt: $\varphi = 360^\circ - 90^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 150^\circ$.
Aus Symmetriegründen sind die vier Dreiecke SPA, PQB, QRC und RSD gleichschenklig.
$\Rightarrow \quad \delta = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ$.
Dann siehst du z.B. am Punkt P: $\sphericalangle QPS = 2 \cdot 15^\circ + 60^\circ = 90^\circ$. Also ist die Raute sogar ein Quadrat.

(c) **1. Möglichkeit:** Die Summe aller Teilflächen
$A_{PQRS} = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 150° = a^2 + a^2\sqrt{3} + a^2 = a^2(2+\sqrt{3})$.

2. Möglichkeit: Alle Quadrate sind zueinander ähnlich
Wenn du das kleine Quadrat $ABCD$ mit einem Faktor k streckst, erhältst du das große Quadrat. (Erst eine anschließende Drehung des gestreckten Quadrates um 45° brächte dieses Zwischenbild zur Deckung mit dem großen Quadrat $PQRS$. Aber das spielt bei der Ermittlung des Flächeninhaltes des großen Quadrates $PQRS$ keine Rolle, weil ja die Drehung einer Fläche deren Inhalt unverändert lässt.)

Den Streckungsfaktor k ermittelst du über die Diagonalenlängen:. Es gilt z.B.: $k = \frac{\overline{SQ}}{\overline{AC}}$.

$\overline{SQ} = 2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} + a = a \cdot (\sqrt{3}+1)$ und $\overline{AC} = a\sqrt{2}$.

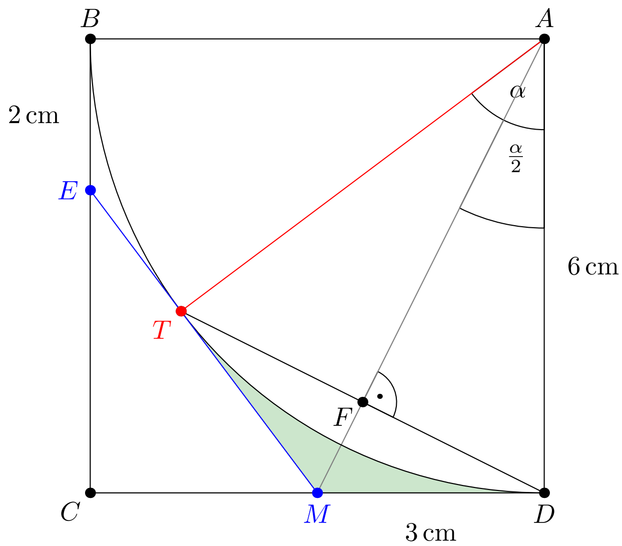
Dann gilt: $k = \frac{a \cdot (\sqrt{3}+1)}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$.

Weiter folgt:

$$A_{PQRS} = k^2 \cdot A_{ABCD} = \left[\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}\right]^2 \cdot a^2 = \frac{2(3+2\sqrt{3}+1)}{4} \cdot a^2 .$$
$$\Rightarrow \quad A_{PQRS} = (2+\sqrt{3}) \cdot a^2 .$$

(d) $\frac{A_{ABCD}}{A_{PQRS}} = \frac{a^2}{(2+\sqrt{3}) \cdot a^2} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \approx 0{,}2679 = 26{,}79\,\%$.

28. (a) Die Zeichnung enthält bereits alle Elemente.



(b)
- Im rechtwinkligen Dreieck CME gilt:
  $\overline{EM}^{\,2} = [3^2 + (6-2)^2]\,\mathrm{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{EM} = 5\,\mathrm{cm}\,.$
- Wenn der Punkt T der Berührpunkt sein soll, dann müssen die beiden Vierecke $MDAT$ und $BETA$ achsensymmetrische Drachenvierecke sein.
  Dann muss aber $\overline{MD} = \overline{MT} = 3\,\mathrm{cm}$ und $\overline{EB} = \overline{ET} = 2\,\mathrm{cm}$ gelten.
  Dann muss also $\overline{MT} + \overline{ET} = 5\,\mathrm{cm}$ gelten. Das hast du aber vorhin gerade mit dem Satz des PYTHAGORAS gezeigt. Also gibt es den Punkt T als Berührpunkt.
- Siehe Zeichnung.

(c) Im Dreieck MDA gilt:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{3\,\mathrm{cm}}{6\,\mathrm{cm}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} \approx 26,57^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 53,14^\circ\,.$$

- Siehe Zeichnung.
- Im Dreieck FDA gilt:

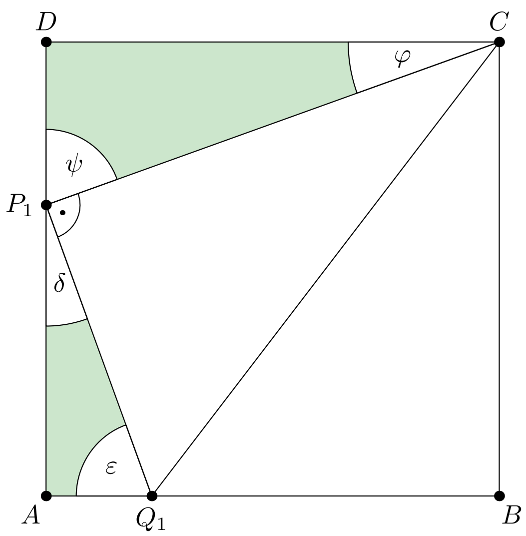
$$\sin 26,57^\circ \approx \frac{\overline{FD}}{6\,\mathrm{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{FD} \approx 2,68\,\mathrm{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{TD} \approx 5,36\,\mathrm{cm}\,.$$

$$\Delta MDA: \quad \overline{AM}^2 = (6^2 + 3^2)\,\mathrm{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AM} \approx 6,71\,\mathrm{cm}\,.$$

$$A_{\text{getönt}} = A_{MDAT} - A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AM}\cdot\overline{TD} - A_{\text{Sektor}}\,.$$

$$A_{\text{getönt}} \approx \frac{1}{2}\cdot 6,71\cdot 5,36\,\mathrm{cm}^2 - \frac{53,14^\circ}{360^\circ}\cdot 6^2\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 1,29\,\mathrm{cm}^2$$

29. (a)



(b) Im rechtwinkligen Dreieck PCD gilt: $\varphi + \psi = 90°$ (*).
Am Punkt P gilt: $\psi + 90° + \delta = 180°$ also: $\delta + \psi = 90°$, und mit (*) folgt: $\varphi = \delta$ (**).
Im rechtwinkligen Dreieck AQP gilt: $\delta + \varepsilon = 90°$. Mit (*) und (**) folgt: $\psi = \varepsilon$.
Damit stimmen die Dreiecke AQP und QCP paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Also sind sie zueinander ähnlich.

(c) $\Delta\, PCD: \quad \cos 20° = \dfrac{6\,\text{cm}}{\overline{PC}} \quad \Rightarrow \quad \overline{PC} \approx 6{,}39\,\text{cm}$.

Und weiter (z.B.): $\overline{PD}^2 = \left(6{,}39^2 - 6^2\right)\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PD} \approx 2{,}20\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad \overline{AP} \approx 6\,\text{cm} - 2{,}20\,\text{cm} = 3{,}80\,\text{cm}$.

$\Delta\, AQP: \quad \cos 20° \approx \dfrac{3{,}80\,\text{cm}}{\overline{PQ}} \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \approx 4{,}04\,\text{cm}$.

$A_{\Delta\, QCP} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PQ} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 6{,}39\,\text{cm} \cdot 4{,}04\,\text{cm} \approx 12{,}91\,\text{cm}^2$.

9. Berechnungen am Kreis

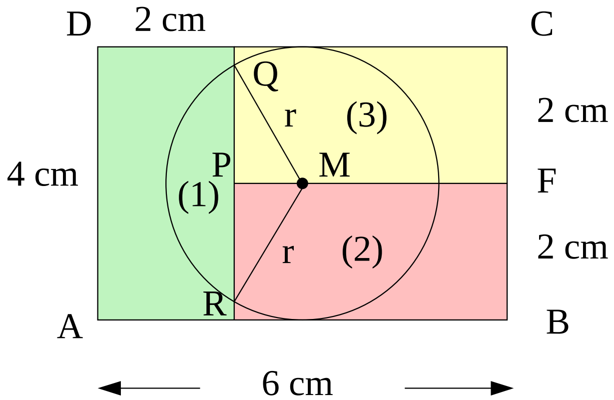
1. (a) ca. $17,91\,\mathrm{m}$

   (b) ca. $0,71\,\mathrm{m}$

2. $x = 1,24\,r$

3.

   (a) Weil alle Rechtecke im Inneren kongruent sind, muss $\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{AE} = 2\,\mathrm{cm} =$ Kreisradius r gelten. $\Rightarrow$ $\overline{BC} = \overline{AD} = 4\,\mathrm{cm}$.



   (b) Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt $A(1)$ des Kreissegmentes (1): (Der Flächeninhalt des Kreises wird später mit $A_\odot$ abgekürzt.)
   Wegen $\overline{PM} = 1\,\mathrm{cm}$ und $\overline{MQ} = 2\,\mathrm{cm}$ ist das Dreieck PMQ ein halbes gleichseitiges Dreieck. $\Rightarrow$ $\sphericalangle QMR = 120°$
   Das Dreieck RMQ ist dann genauso groß wie ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von $2\,\mathrm{cm}$.

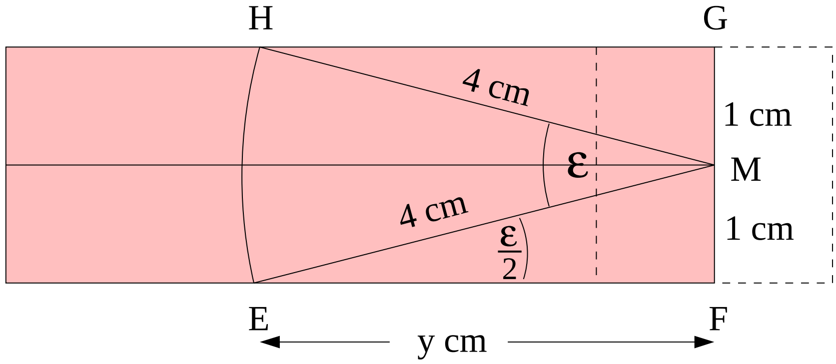
$$A(1) = \left(\frac{120°}{360°} \cdot 2^2\pi - \frac{2^2}{4}\sqrt{3}\right)\,\mathrm{cm}^2 \approx 2,46\,\mathrm{cm}^2$$

   $A_\odot = 2^2\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 12,57\,\mathrm{cm}^2$

$$\frac{A(1)}{A_\odot} \approx \frac{2,46\,\mathrm{cm}^2}{12,57\,\mathrm{cm}^2} \approx 19,57\%$$

   Und weiter gilt: $\frac{A(2)}{A_\odot} = \frac{A(3)}{A_\odot} \approx (100\% - 19,57\%) : 2 \approx 40,22\%$

4. (a) –
   (b) Wir betrachten die Hälfte des waagrechten Balkens:



$\Delta EFM: y^2 = 4^2 - 1^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{15}$
$A(EFM) + A(HMG) = y \cdot 1\,\text{cm}^2 = \sqrt{15}\,\text{cm}^2 \approx 3,87\,\text{cm}^2$
$\Delta EFM: \sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 28,96°$

$$A(Sektor) = \frac{28,96°}{360°} \cdot 4^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 4,04\,\text{cm}^2$$

Der Teil des Kreuzes, der waagrecht links herausragt:
$2\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} - (4,04 + 3,87)\,\text{cm}^2 = 4,09\,\text{cm}^2$
Insgesamt ragen $8,18\,\text{cm}^2$ des waagrechten Kreuzbalkens aus dem Kreis heraus.

Der Teil des Kreuzes, der senkrecht (z.B. oben) herausragt:
$2\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} - (4,04 + 3,87)\,\text{cm}^2 = 0,09\,\text{cm}^2$
Insgesamt ragen $0,18\,\text{cm}^2$ des senkrechten Kreuzbalkens aus dem Kreis heraus.

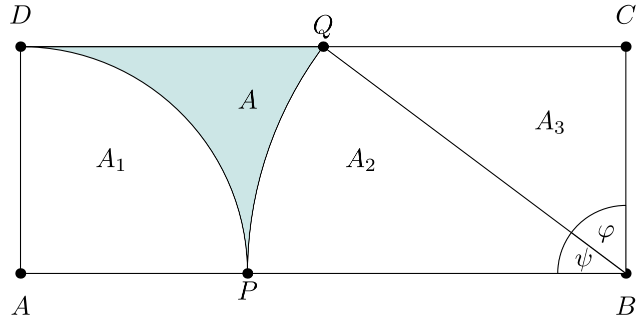
Also ragen (gerundet) $8,36\,\text{cm}^2$ des Kreuzes aus dem Kreis heraus.

Eine Möglichkeit, die Fläche des Kreuzes zu berechnen, besteht darin, dass du die Flächeninhalte beiden überlappenden Rechtecke, die das Kreuz ergeben, berechnest. Danach musst du jedoch am Ende den Inhalt des Quadrates im Zentrum mit der Seitenlänge 2 cm einmal abziehen, weil dieses Quadrat ja **beiden** besagten Rechtecken angehört:
$A(Kreuz) = 2 \cdot 8\,\text{cm}^2 + 2 \cdot 12\,\text{cm}^2 = 36\,\text{cm}^2$
Prozentualer Anteil der herausragenden Fläche:

$$\frac{8,36}{36} \approx 23,22\%\,.$$

5. Der Flächeninhalt beträgt $44,33\,\text{cm}^2$.

6. (a) Zeichne zuerst den Kreisbogen um den Punkt A mit dem Radius 3 cm. Dadurch erhältst du den Punkt P.
Zeichne dann den zweiten Kreisbogen um den Punkt B mit dem Radius $\overline{BP}$. So erhältst du den Punkt Q.



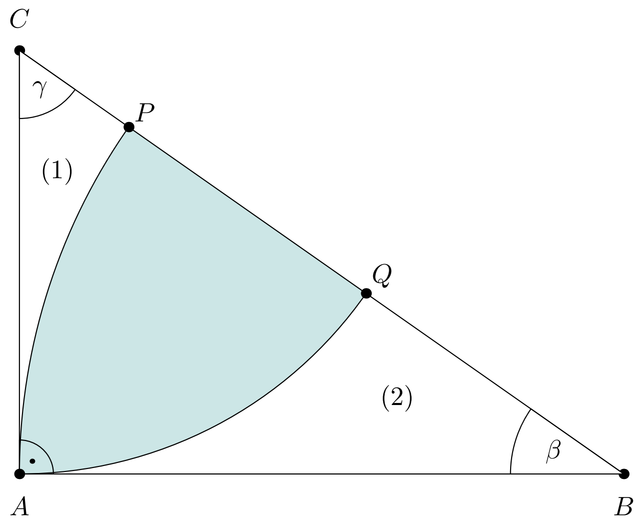
(b) Neben dem Kreissektor APD mit dem Flächeninhalt A_1 erzeugt die Hilfslinie $[BQ]$ den Kreissektor BQP mit dem Flächeninhalt A_2 und dazu das Dreieck QBC mit dem Flächeninhalt A_3.
Es muss gelten: $\overline{AP} = 3\,\text{cm}$ und damit $\overline{BP} = \overline{BQ} = 5\,\text{cm}$.
$A_1 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 7{,}07\,\text{cm}^2$

$\Delta BCQ : \cos\varphi = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 53{,}13^\circ \quad \Rightarrow \quad \psi \approx 36{,}87^\circ$
$A_2 = \frac{36{,}87^\circ}{360^\circ} \cdot 5^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 8{,}04\,\text{cm}^2$

Z.B. PYTHAGORAS im ΔQBC: $\overline{QC}^{\,2} + 3^2\,\text{cm}^2 = 5^2\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \overline{QC} = 4\,\text{cm}$.
$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 6\,\text{cm}^2$
Das Rechteck $ABCD$ hat einen Flächeninhalt von $24\,\text{cm}^2$.
Für den gesuchten Flächeninhalt A gilt dann: $A = A_{ABCD} - A_1 - A_2 - A_3$
$A \approx (24 - 7{,}07 - 8{,}04 - 6)\,\text{cm}^2 \quad A \approx 2{,}89\,\text{cm}^2$.

7. (a)
- Zeichne die Strecke $[AB]$.
- Trage den rechten Winkel in A, und den Winkel mit dem Maß 35° in B an.
- Der Schnittpunkt der freien Schenkel der beiden Winkel ist C.

(b)



Es gilt: $\gamma = 90° - 35° = 55°$ und $\tan 35° = \dfrac{\overline{CA}}{8\,\text{cm}}$.
$\Rightarrow \quad \overline{CA} \approx 5,60\,\text{cm}$.
Für den Inhalt A der grauen Fläche AQP ergibt sich:
$A_{AQP} = A_{\Delta ABC} - A_{(1)} - A_{(2)}$. (*)
Weiter gilt: $A_{(1)} = A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(35°)}$ und $A_{(2)} = A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(55°)}$
Mit (*) ergibt sich:
$A_{\Delta ABC} - \left(A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(35°)}\right) - \left(A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(55°)}\right)$
$A_{AQP} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta ABC} + A_{Sektor(35°)} - A_{\Delta ABC} + A_{Sektor(55°)}$
$A_{AQP} = A_{Sektor(35°)} + A_{Sektor(55°)} - A_{\Delta ABC}$ (**)
Hinweise:

- Natürlich kann man auch die Inhalte der Teilflächen $A_{(1)}$ und $A_{(2)}$ gleich ausrechnen und diese dann vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC subtrahieren.
- Wie könntest du die obige Gleichung (**) geometrisch deuten?

$$A_{Sektor(35°)} = \frac{35°}{360°} \cdot 8^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 19,55\,\text{cm}^2$$

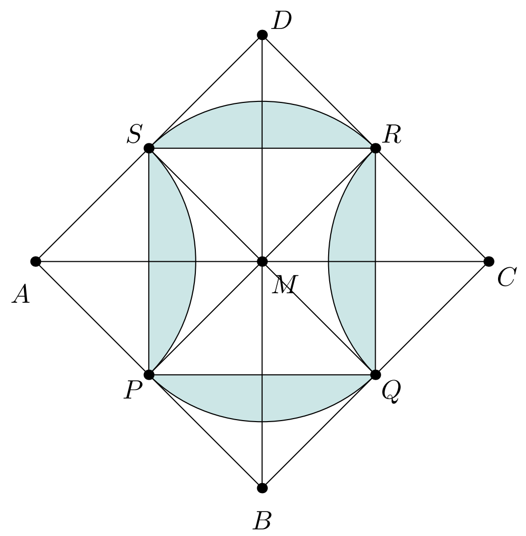
$$A_{Sektor(55°)} \approx \frac{55°}{360°} \cdot 5,60^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 15,05\,\text{cm}^2$$

$$A_{ABC} \approx \frac{1}{2} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 5,60\,\text{cm} = 22,40\,\text{cm}^2$$

Schließlich ergibt sich: $A_{AQP} \approx (19,55 + 15,05 - 22,40)\,\text{cm}^2$
$\Rightarrow \quad A_{AQP} \approx 12,20\,\text{cm}^2$

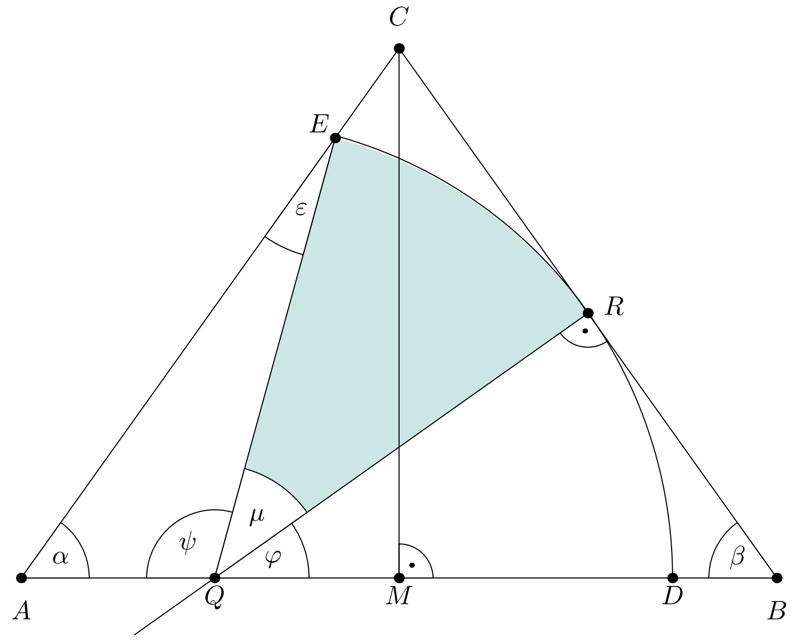
8. (a)
   - In jedem Quadrat stehen die beiden Diagonalen aufeinander senkrecht und sie halbieren sich.
     Damit kann man das Quadrat $ABCD$ zeichnen.
   - Der Punkt M erzeugt die beiden Kreisbögen oben und unten; die Punkte A und C erzeugen die beiden Kreisbögen links und rechts.

(b)



Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat. Mit Hilfe seiner Diagonalen erkennst du, dass das Quadrat $PQRS$ halb so groß wie das Quadrat $ABCD$ ist. Die vier grauen Kreissegmente sind alle kongruent, da sie von kongruenten Kreissektoren mit gleichem Radius und gleichem Öffnungswinkel (90°) stammen.
Zwei dieser Segmente wurden links und rechts aus dem Quadrat $PQRS$ herausgeschnitten, zwei wurden oben und unten an dieses Quadrat angefügt. Somit hat die grau eingefärbte Figur in der Aufgabe den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat $PQRS$; die Figur ist also halb so groß wie das Quadrat $ABCD$. Fritz hat Recht.

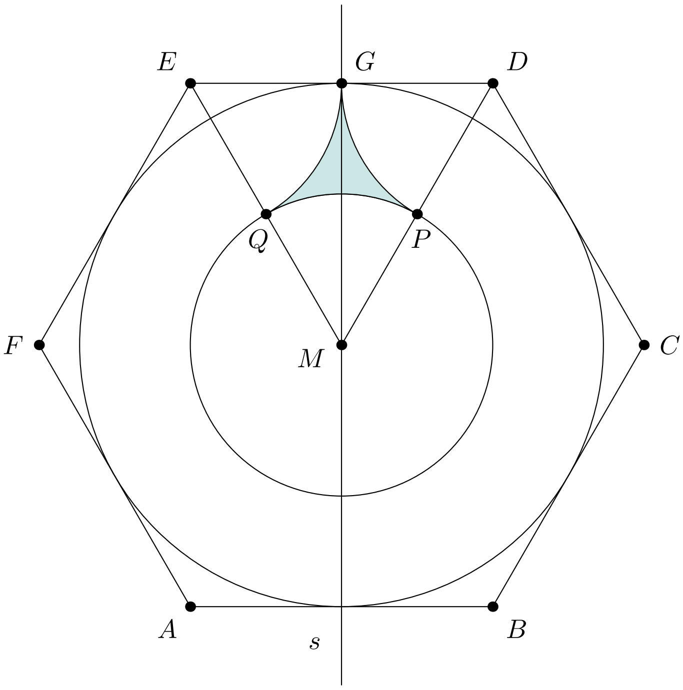
9. (a) Die Senkrechte zur Strecke $[BC]$ durch den Punkt R schneidet die Strecke $[AB]$ im Kreismittelpunkt Q.



(b) ΔBCM:
$\tan\beta = \frac{7}{5} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 54{,}46° \quad$ und $\varphi = 90° - \beta \approx 35{,}54°$
nur Maßzahlen: $\overline{BC}^2 = 7^2 + 5^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} \approx 8{,}60\,\text{cm}$
$\Rightarrow \overline{BR} \approx 4{,}30\,\text{cm}$
ΔQBR:
$\cos 54{,}46° \approx \dfrac{4{,}30\,\text{cm}}{\overline{QB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{QB} \approx 7{,}40\,\text{cm}$
$\tan 54{,}46° \approx \dfrac{\overline{QR}}{4{,}30\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{QR} \approx 6{,}02\,\text{cm}$
$\overline{AQ} \approx (10 - 7{,}40)\,\text{cm} \quad \overline{AQ} \approx 2{,}60\,\text{cm}$
$\overline{QE} = \overline{QR} \approx 6{,}02\,\text{cm}$ und $\alpha = \beta \approx 54{,}46°$
ΔAQE:
$\dfrac{\sin\varepsilon}{2{,}60} \approx \dfrac{\sin 54{,}46°}{6{,}02} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 20{,}58°$
$\psi \approx 180° - 54{,}46° - 20{,}58° \quad \psi \approx 104{,}96°$
$\mu \approx 180° - 104{,}96° - 35{,}54° \quad \mu \approx 39{,}50°$
$A_{Sektor\,QRE} \approx \dfrac{39{,}5°}{360°} \cdot 6{,}02^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad A_{Sektor\,QRE} \approx 15{,}91\,\text{cm}^2$.

10. (a) Am einfachsten erhältst du ein regelmäßiges Sechseck mit einer Seitenlänge von 4 cm, indem du auf einer Kreislinie k den Radius von 4 cm sechsmal abträgst. Damit dieses Sechseck aber mit zwei gegenüber liegenden Seiten (hier: $[ED]$ und $[AB]$) waagrecht liegt, zeichnest du erst die Symmetrieachse s ein und dann wieder durch den Punkt M eine zweite Symmetrieachse, die auf s senkrecht steht. Diese schneidet die Kreislinie k in den Punkten F und C.
Zwei weitere Kreise Radius von 4 cm um F und C schneiden die Kreislinie k in den Punkten E und A bzw. B und D.

(b)



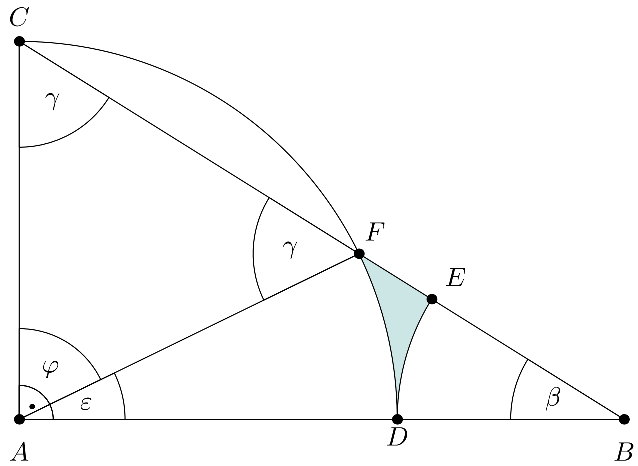
Der direkteste Weg der Flächenberechnung führt über den Kreisbogen PQ, so dass ein geschlossener Kreisring entsteht, dem lediglich noch das (grau eingefärbte) Kreisbogendreieck QPG entnommen werden muss.
Jedes regelmäßige Sechseck lässt sich in 6 kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegen.
Der große Radius R des Ringes ist so lang wie eine Höhe $[MG]$ des gleichseitigen Dreiecks MDE: $R = \frac{4}{2}\sqrt{3}\,\text{cm} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.
Der kleine Radius r des Ringes ist halb so lang wie die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks MDE: $r = 2\,\text{cm}$.
Damit ergibt sich für den Flächeninhalt A_{Ring} des geschlossenen Kreisrings:
$A_{Ring} = \left[(2\sqrt{3})^2 - 2^2 \cdot \pi\right]\ \text{cm}^2$
Der Flächeninhalt $A_{Kreisdreieck}$ des Kreisbogendreiecks QPG bleibt übrig, wenn man aus dem gleichseitigen Dreieck MDE die drei kongruenten Sektoren EQG, MPQ und DGP mit einem Mittelpunktswinkel von jeweils 60° entfernt:
$A_{Kreisdreieck} = \left(\frac{4^2}{4} \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot \pi\right)\ \text{cm}^2 = \left(4\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{cm}^2$

Damit ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt:
$A = \left(8\pi - 4\sqrt{3} + \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{cm}^2 = \frac{17\pi - 8\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 \approx 19,78\,\text{cm}^2$

Hinweis:
Eine weitere Möglichkeit besteht darin, den Flächeninhalt des offenen Kreisrings außerhalb des Dreiecks MDE zu berechnen und dann die beiden „Enden“, die im gleichseitigen Dreieck MDE liegen, anzufügen. Doch dies ist offensichtlich wesentlich mühsamer auszurechnen.

11. (a)
- Zeichne das Dreieck ABC.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{AC} = 5\,\text{cm}$ schneidet die Hypotenuse $[BC]$ im Punkt F und die Kathete $[AB]$ im Punkt D.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BD} = 3\,\text{cm}$ schneidet die Hypotenuse $[BC]$ im Punkt E.

(b) Die Strecke $[AF]$ zerlegt das Dreieck ABC in die beiden Teildreiecke AFC und ABF. Das Dreieck AFC ist gleichschenklig.



Im Dreieck ABC gilt: $\tan\gamma = \dfrac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 57{,}99°$.
$\Rightarrow \quad \beta = 90° - \gamma \approx 32{,}01° \Rightarrow \quad \varphi = 180° - 2\cdot\gamma \approx 64{,}02°$
$\Rightarrow \quad \varepsilon = 90° - \varphi \approx 25{,}98°$.

Damit kann man den Flächeninhalt des Dreiecks ABF und den der beiden Kreissektoren ADF und BED berechnen:
$A_{\Delta ABF} \approx \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot \sin 25{,}98°\,\text{cm}^2 \approx 8{,}76\,\text{cm}^2$

$$A_{Sektor ADF} \approx \frac{25{,}98°}{360°}\cdot 5^2\cdot\pi \approx 5{,}67\,\text{cm}^2$$

$$A_{Sektor BED} \approx \frac{32{,}01°}{360°}\cdot 3^2\cdot\pi \approx 2{,}51\,\text{cm}^2$$

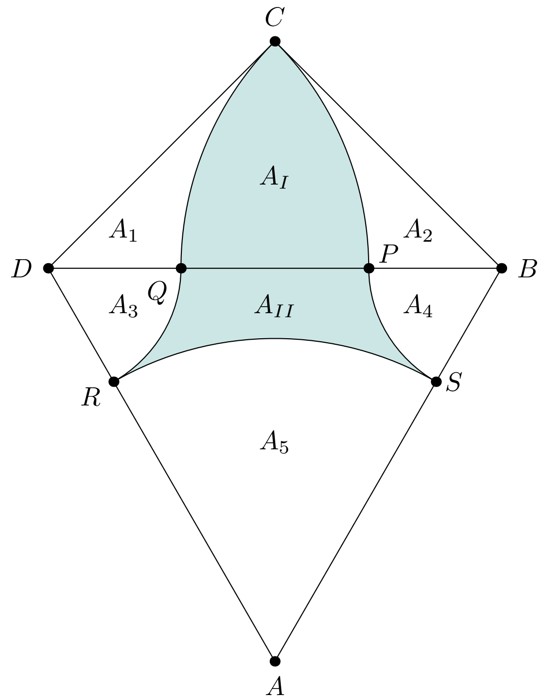
Für den Inhalt A des grauen Flächenstückes ergibt sich damit:
$A \approx 8{,}76\,\text{cm}^2 - (5{,}67 + 2{,}51)\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad A \approx 0{,}58\,\text{cm}^2$

Anmerkungen:
- Den Flächeninhalt des Dreiecks ABF kannst du auch aus der Differenz der Flächeninhalte der beiden Dreiecke ABC und AFC ermitteln.
- Zur Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ABF gibt es noch andere Möglichkeiten, die aber umständlicher sind.

12. (a)
- Zeichne die Dreiecke DBC und ABD.

- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ schneidet die Seite $[BD]$ im Punkt Q und der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt D und dem Radius $\overline{DC}$ schneidet die Seite $[BD]$ im Punkt P.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt D und dem Radius $\overline{DQ}$ schneidet die Seite $[AD]$ im Punkt R und der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BP}$ schneidet die Seite $[AB]$ im Punkt S.

(b)



$A_1 = A_{\Delta DBC} - A_{Sektor BCQ} = A_2$
$A_I = A_{\Delta DBC} - (A_1 + A_2) = A_{\Delta DBC} - 2 \cdot (A_{\Delta DBC} - A_{Sektor BCQ})$
$A_I = 2 \cdot A_{Sektor BCQ} - A_{\Delta DBC}$
Wie kannst du dieses Ergebnis geometrisch deuten?
Es wird zunächst nur mit Maßzahlen gerechnet: $\overline{BC} = 3\sqrt{2}$

$$A_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9\ ; \quad A_{Sektor BCQ} = \frac{45°}{360°} \cdot (3\sqrt{2})^2\pi = 2.25\pi$$

$$\text{Also: } A_I = 4.5\pi - 9 \quad \Rightarrow \quad A_I = \left(\frac{9\pi}{2} - 9\right) \text{cm}^2 \quad (\approx 5,14\,\text{cm}^2)$$

Was spielt sich nun unterhalb der Strecke $[DB]$ ab?
$\overline{DQ} = \overline{BP} = 6 - 3\sqrt{2}$

$$A_3 = A_4 = \frac{60°}{360°}(6 - 3\sqrt{2})^2 \cdot \pi = \frac{1}{6}(36 - 36\sqrt{2} + 18) \cdot \pi$$

$A_3 = A_4 = (9 - 6\sqrt{2}) \cdot \pi \quad (\approx 1,62\,\text{cm}^2)$
$\overline{AR} = \overline{AS} = 6 - (6 - 3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$

$$A_5 = \frac{60°}{360°} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot \pi = \frac{18}{6} \cdot \pi = 3\pi \quad (\approx 9,42\,\text{cm}^2)$$

$$A_{II} = \frac{6^2}{4}\sqrt{3} - [2 \cdot (9 - 6\sqrt{2})\pi + 3\pi]$$

$A_{II} = 9\sqrt{3} - (18\pi - 12\sqrt{2}\pi + 3\pi)$
$A_{II} = 9\sqrt{3} - (21 - 12\sqrt{2})\pi \quad (\approx 2{,}93\,\text{cm}^2)$

Für die Gesamtfläche A des „Fisches“ ergibt sich:

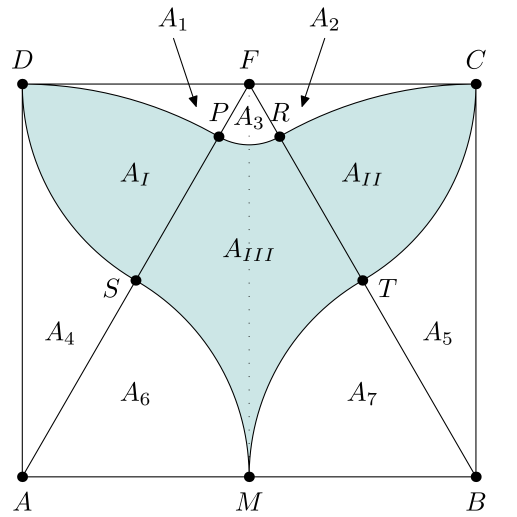
$$A = A_I + A_{II} = \left[\left(\frac{9\pi}{2} - 9\right) + 9\sqrt{3} - (21 - 12\sqrt{2})\pi\right]\,\text{cm}^2$$

$$A = \left[9(\sqrt{3} - 1) - \pi \cdot \left(21 - 12\sqrt{2} - \frac{9}{2}\right)\right]\,\text{cm}^2$$

$$A = \left[9(\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2}\pi(8\sqrt{2} - 11)\right]\,\text{cm}^2 \quad (\approx 8{,}07\,\text{cm}^2)$$

13. (a)
- Zeichne das gleichseitige Dreieck ABF. Die Höhe $[FM]$ dieses Dreiecks ist genau so lang wie die Rechtecksseiten $[AD]$ und$[BC]$.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{AD}$ schneidet die Seite $[AF]$ im Punkt P und der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ schneidet die Seite $[BF]$ im Punkt R.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt F und dem Radius $\overline{FP}$ schneidet die Seite $[BF]$ im Punkt R.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt F und dem Radius $\overline{FD} = 3\,\text{cm}$ schneidet die Seite $[AF]$ im Punkt S, wobei ebenfalls $\overline{FS} = 3\,\text{cm}$ gilt.
- Nun musst du noch den Kreisbogen um den Punkt A mit dem Radius $\overline{AS}$ zeichnen. Dieser Kreisbogen trifft auf den Punkt M.
  Weil die Mittelpunkte F und A der beiden Kreisbögen, die sich im Punkt S treffen, zusammen mit dem Punkt S auf einer Geraden liegen, gehen sie ohne Knick ineinander über.
- Die entsprechenden Schritte führen rechts der Symmetrieachse MF vom Punkt C über den Punkt T zum Punkt M.

(b)



Wir rechnen meist nur mit Maßzahlen:

$$A_{ABCD} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \quad (\approx 31{,}18\,\mathrm{cm}^2)$$

$$A_{\Delta AFD} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCD} = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{3} \quad (\approx 7{,}79\,\mathrm{cm}^2)$$

$$A_{Sektor APD} = A_{Sektor BCR} = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot (3\sqrt{3})^2\pi = \frac{9}{4}\,\pi \quad (\approx 7{,}07\,\mathrm{cm}^2)$$

$$A_1 = A_2 = A_{\Delta AFD} - A_{Sektor APD} = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{4}\pi \quad (\approx 0{,}73\,\mathrm{cm}^2)$$

Weiter gilt: $\overline{FP} = 6 - 3\sqrt{3}$.

$$A_3 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot (6 - 3\sqrt{3})^2 \cdot \pi = \frac{36 - 36\sqrt{3} + 27}{6}\pi = \frac{21 - 12\sqrt{3}}{2}\pi$$

$$A_3 = \frac{21}{2}\,\pi - 6\sqrt{3}\pi \quad (\approx 0{,}34\,\mathrm{cm}^2)$$

$$A_4 = A_5 = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2 \cdot \pi = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\,\pi \quad (\approx 3{,}08\,\mathrm{cm}^2)$$

$$A_6 = A_7 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2 \cdot \pi = \frac{3}{2}\pi \quad (\approx 4{,}71\,\mathrm{cm}^2)$$

$$A_I = A_{II} = A_{\Delta AFD} - A_1 - A_4$$

$$A_I = \frac{9}{2}\,\sqrt{3} - \left(\frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{4}\pi\right) - \left(\frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\,\pi\right)$$

$$A_I = A_{II} = \frac{15}{4}\,\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3} \quad (\approx 3{,}99\,\mathrm{cm}^2)$$

$A_{III} = A_{\Delta ABF} - A_3 - (A_6 + A_7)$, wobei $A_6 = A_7$ gilt.

$$A_{III} = 9\sqrt{3} - \left(\frac{21}{2}\,\pi - 6\sqrt{3}\,\pi\right) - 2\cdot\frac{3}{2}\,\pi = 9\sqrt{3} - \frac{27}{2}\,\pi + 6\sqrt{3}\,\pi \quad (\approx 5{,}83\,\mathrm{cm}^2)$$

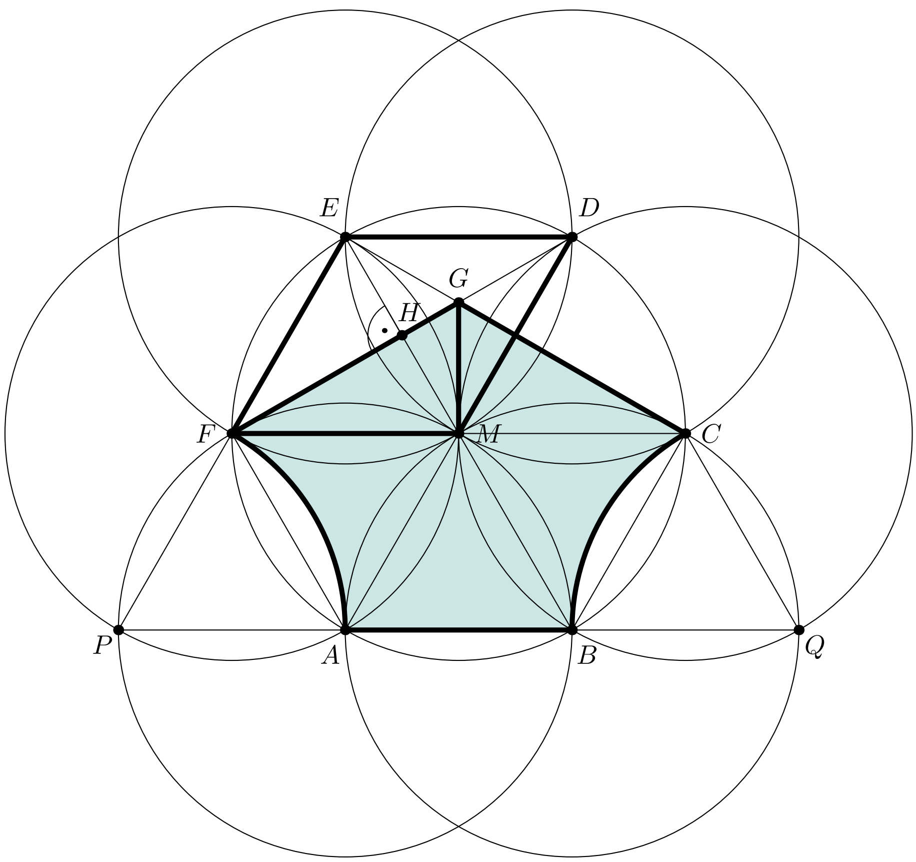
Damit ergibt sich als Flächeninhalt A der grau getönten Figur:

$$A = 2\cdot A_I + A_{III} = 2\cdot\left(\frac{15}{4}\cdot\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3}\right) + \left(9\sqrt{3} - \frac{27}{2}\,\pi + 6\sqrt{3}\,\pi\right)$$

$$A = 6\pi(\sqrt{3}-1)\,\mathrm{cm}^2 \approx 13{,}80\,\mathrm{cm}^2$$

14. (a) Die Strecken $[AB]$, $[BC]$, ... , $[FA]$ sind jeweils 3 cm lang. Also sind die Dreiecke ABM, BCM, ... , FAM gleichseitig und kongruent. Daher haben die Winkel BAF, CBA,... , EFA alle das Maß 120°. Also ist das Sechseck $ABCDEF$ regelmäßig.

(b)



Das Viereck $FMDE$ ist aus den beiden kongruenten gleichseitigen Dreiecken FME und MDE zusammengefügt. Also ist das Viereck $FMDE$ eine Raute, deren Diagonalen $[FD]$ und $[EM]$ im Punkt H aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck MDE liegt die Strecke $[MG]$ auf einer Winkelhalbierenden. Der Punkt G

ist gleichzeitig der Schwerpunkt in diesem Dreieck, der alle Seitenhalbierenden (hier: $[EC]$ und $[DF]$) und damit alle Höhen im Verhältnis 2:1 teilt.

Also gilt : $\overline{MG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\text{cm} = \sqrt{3}\,\text{cm} \quad (\approx 1,73\,\text{cm})$.

Wegen $\overline{FC} = 6\,\text{cm}$ gilt: $A_{\Delta FCG} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 3\sqrt{3}\,\text{cm}^2 (\approx 5,20\,\text{cm}^2)$

Die Dreiecke FAM, ABM und BCM sind gleichseitig und kongruent:
$A_{\Delta ABM} = \frac{3^2}{4}\sqrt{3}\,\text{cm}^2 = \frac{9}{4}\sqrt{3}\text{cm}^2 (\approx 3,90\,\text{cm}^2)$.

Von den beiden Dreiecken FAM und BCM musst du jeweils noch das nach innen gewölbte Kreissegment unter der Sehne $[AF]$ bzw. $[BC]$ subtrahieren.
Diese beiden Segmente sind aus Symmetriegründen zu ihrem jeweils darüber liegenden Kreissegment kongruent.
Somit ergibt sich z.B: $A_{Segment[AF]} = A_{Sektor MFA} - A_{\Delta MFA}$.

Alle folgenden Berechnungen erfolgen in der Einheit cm^2.
$A_{Segment(AF)} = \frac{60°}{360°} \cdot 3^2\pi - \frac{3^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\pi - \frac{9}{4}\sqrt{3} \quad (\approx 0,82\,\text{cm}^2)$

Für das Flächenstück A^*, das durch die Strecken $[MF]$ und $[MA]$ sowie durch den nach innen gewölbten Kreisbogen AF begrenzt wird, ergibt sich:

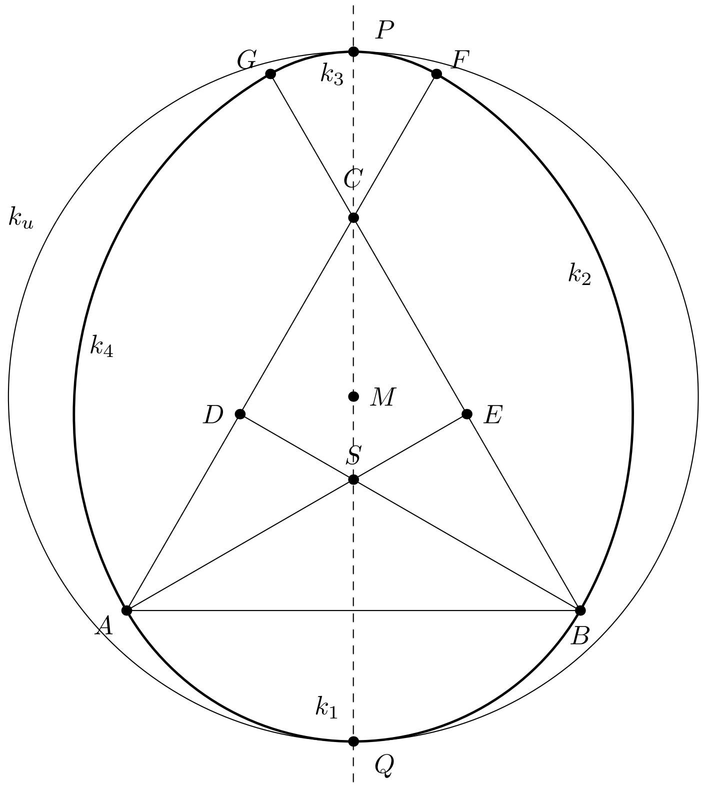
$$A^* = \frac{3^2}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi + \frac{9}{4}\sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi \quad (\approx 3,08\,\text{cm}^2)$$

Für den Inhalt A des grauen Flächenstückes ergibt sich damit:

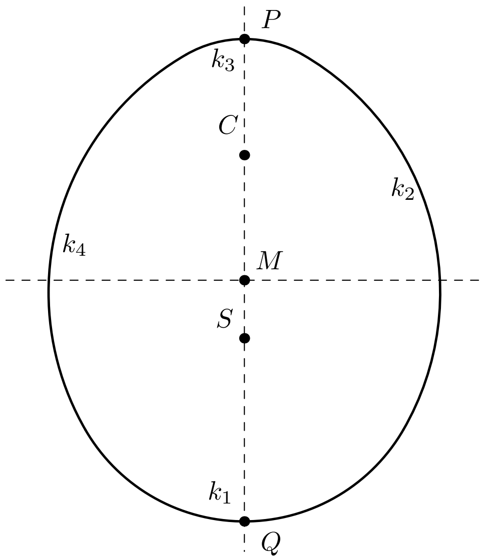
$$A = 3\sqrt{3} + \frac{9}{4}\sqrt{3} + 2 \cdot \left(\frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi\right) = \left(3 + \frac{9}{4} + 9\right)\sqrt{3} - 3\pi.$$

$$A = \left(\frac{57}{4}\sqrt{3} - 3\pi\right)\,\text{cm}^2 \quad (\approx 15,26\,\text{cm}^2)$$

15. (a)
- Zeichne das gleichseitige Dreieck ABC. Verlängere dabei die Strecken $[AC]$ und $[BC]$ jeweils über C hinaus.
  $[AE] \cap [BD] = \{S\}$
  Zeichne den Kreisbogen $k_1(S\,; r_1 = \overline{SA})$.
  $k_2(D\,; r_2 = \overline{DB}) \cap [AC = \{F\}$ und $k_3(E\,; r_3 = \overline{EA}) \cap [BC = \{G\}$.
  Zeichne den Kreisbogen $k_4(C\,; r_4 = \overline{CF})$.
  Die Gerade PQ ist die Symmetrieachse der Figur.
  Der Mittelpunkt der Strecke $[PQ]$ ist M.
-



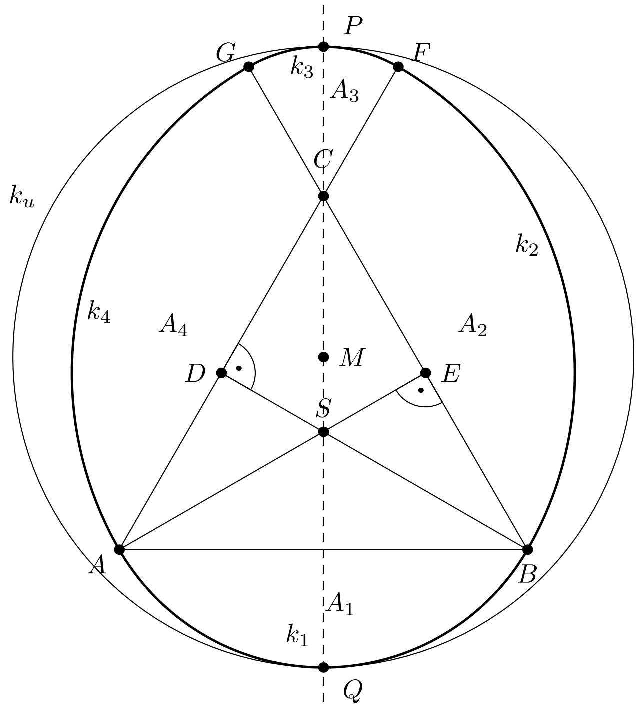
(b)



Zwar sind die beiden Kreisbögen k_2 und k_4 kongruent, aber die beiden Kreisbögen k_1 (Radius $\overline{SQ}$) und k_3 (Radius $\overline{CP}$) sind es nicht. Also ist die Senkrechte zur Geraden PQ durch den Punkt M keine Symmetrieachse der Figur. Andere Geraden, die ebenfalls durch M verlaufen, kommen aus dem gleichen Grund nicht als Symmetrieachsen in Betracht.

(c) Der Schnittpunkt S ist auch der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, der die Schwerlinien im Verhältnis $2:1$ teilt.

Es seien $r_1 = \overline{SA}$, $r_2 = \overline{DB}$ und $r_3 = \overline{CF}$.
Die drei Kreisbögen k_1, k_2 und k_3 schließen die Kreisteile A_1, A_2, A_3 und A_4 außerhalb des gleichseitigen Dreiecks ABC ein, dessen Flächeninhalt kurz A_Δ heißen soll.



$$r_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3}\sqrt{3} \quad ; \qquad r_2 = \frac{a}{2}\sqrt{3} = r_4$$

$$A_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{3}A_\Delta = \frac{1}{9}a^2\pi - \frac{1}{3}A_\Delta$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2}A_\Delta = \frac{3}{16}a^2\pi - \frac{1}{2}A_\Delta = A_4$$

$$r_3 = \frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

$$A_3 = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)\right]^2 \cdot \pi = \ldots = \frac{1}{6}a^2\pi - \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}\pi$$

$$\begin{aligned}
A_{Ei} &= \frac{1}{9}a^2\pi - \frac{1}{3}A_\Delta + \frac{3}{8}a^2\pi - A_\Delta + \frac{1}{6}a^2\pi - \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}\pi + A_\Delta \\
&= a^2\pi\left(\frac{1}{9}+\frac{3}{8}+\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\pi \\
&= a^2\pi\frac{8+27+12}{72} - a^2\sqrt{3}\cdot\frac{1+\pi}{12} \\
&= \frac{47}{12}a^2\pi - \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\cdot(1+\pi) \\
A_{Ei} &= \frac{a^2}{72}\cdot(47\pi - 6\sqrt{3} - 6\pi\sqrt{3}) \quad \approx 52{,}31\,\text{cm}^2 \qquad \text{für } a = 6\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Für den Durchmesser d_u des Umkreises k_u gilt: $d_u = 2\cdot r_1 + r_3$.

$$\Rightarrow \quad r_u = \frac{1}{2}\cdot(2r_1 + r_3) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}a\sqrt{3} + \frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{1}{2}a)$$

$$\begin{aligned}
r_u &= \frac{1}{3}a\sqrt{3} + \frac{1}{4}a\sqrt{3} - \frac{1}{4}a \\
&= a\left(\frac{7}{12}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right) \\
r_u &= \frac{1}{12}a(7\sqrt{3} - 3) \quad \approx 4{,}56\,\text{cm} \qquad \text{für } a = 6\,\text{cm} \\
r_u^2 &= \frac{a^2}{144}(156 - 42\sqrt{3})
\end{aligned}$$

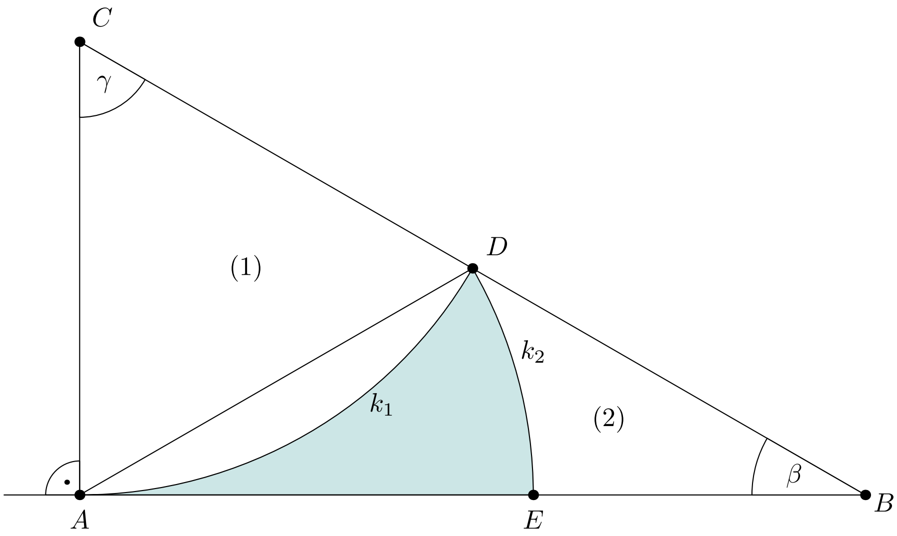
Für den Flächeninhalt A_u des Unkreises ergibt sich dann:

$$A_u = \frac{a^2}{144}(156 - 42\sqrt{3})\cdot\pi$$

$$\frac{A_{Ei}}{A_u} = \frac{\frac{a^2}{72}\cdot(47\pi - 6\sqrt{3} - 6\pi\sqrt{3})}{\frac{a^2}{144}(156 - 42\sqrt{3})\cdot\pi} = 0{,}7999561666\ldots \approx 0{,}8 = 80\%$$

Der Verdacht liegt nahe, dass es genau 80% sind. Aber Zähler und Nenner stehen leider im irrationalen Verhältnis (man sagt, „Zähler und Nenner sind inkommensurabel.“). Das liegt z.B. daran, dass sich die Zahl π nicht herauskürzt.

16. (a)



- Zeichne die Strecke $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$. Trage am Punkt A einen rechten Winkel an.
- Zeichne um den Punkt C einen Kreisbogen k_1 mit Radius 6 cm. Zeichne um den Punkt A einen Kreisbogen k_2 mit Radius 6 cm.
- $k_1 \cap k_2 = \{D\}$. Das Dreieck ADC ist somit gleichseitig mit der Seitenlänge 6 cm. $k_2 \cap \{\text{freier Schenkel des rechten Winkels mit dem Scheitel } A\} = \{E\}$.
- $[CD \cap [AE = \{B\}$.

(b) Weil das Dreieck ADC gleichseitig ist, folgt $\gamma = 60°$. Weil das Dreieck ABC rechtwinklig ist, folgt $\beta = 30°$.

Der Flächeninhalt A des Dreiecks ABC beträgt somit
$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 18\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \quad (\approx 31{,}18\,\text{cm}^2)$.

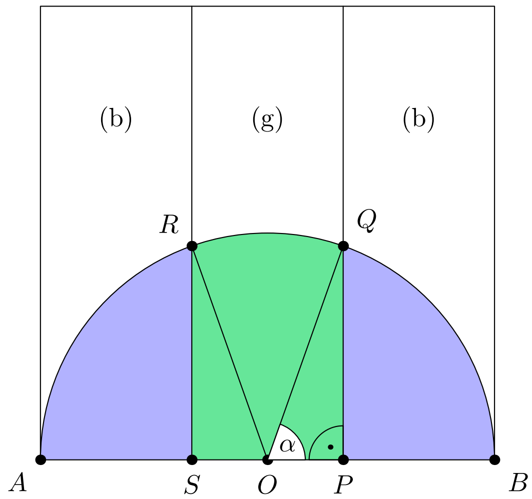
Berechne dann den Flächeninhalt des Kreissektors (1) mit dem Mittelpunkt C und dem Kreisbogen von A nach D:
$A_{(1)} = \frac{60°}{360°} \cdot 6^2\pi\,\text{cm}^2 = 6\pi\,\text{cm}^2 \quad (\approx 18{,}85\,\text{cm}^2)$

Den Inhalt $A_{(2)}$ der Fläche (2), die durch die Strecken $[EB]$ und $[BD]$ sowie durch den Keisbogen von E nach D begrenzt wird, berechnest du, indem du den Inhalt des Kreissektors mit dem Mittelpunkt A und dem Radius 6 cm vom Flächeninhalt des Dreiecks ABD subtrahierst.
Das Dreieck ABC ist ein halbes gleichseitiges Dreieck. Weil $\overline{CD} = 6\,\text{cm}$ gilt, ist der Punkt D damit der Mittelpunkt der Hypotenuse $[BC]$, die ja 12 cm lang sein muss. Deshalb ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABD halb so groß wie der des Dreiecks ABC:
$A_{\Delta ABD} = 0{,}5 \cdot 18\sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \quad (\approx 15{,}59\,\text{cm}^2)$.

$$\Rightarrow \quad A_{(2)} = \left(9\sqrt{3} - \frac{30°}{360°} \cdot 6^2\pi\right)\,\text{cm}^2 = (9\sqrt{3} - 3\pi)\,\text{cm}^2 \quad (\approx 6{,}16\,\text{cm}^2).$$

Den Inhalt A der getönten Fläche erhältst du, indem du die beiden Flächeninhalte $A_{(1)}$ und $A_{(2)}$ vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC subtrahierst:
$A = 18\sqrt{3} - [6\pi + (9\sqrt{3} - 3\pi)]\,\text{cm}^2 = (9\sqrt{3} - 3\pi)\,\text{cm}^2 = A_{(2)}$ **!**
Das bedeutet z.B. auch, dass der Kreisbogen von E nach D die Fläche halbiert, die von den Strecken $[AB]$ und$[BD]$ sowie vom Kreisbogen von A nach D begrenzt wird.

17. (a)



(b) Um den Inhalt der blauen Teilfläche $PBQP$ zu berechnen, musst du von der Fläche des Sektors OBQ die des Dreiecks OPQ subtrahieren:

Im rechtwinkligen Dreieck OPQ gilt: $\overline{OP} = 1\,\text{cm}$ und $\overline{OQ} = 3\,\text{cm}$.

Also: $\cos\alpha = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70,53°$.

$A_{Sektor} \approx \frac{70,53°}{360°} \cdot 3^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 5,54\,\text{cm}^2$

$A_{\Delta OPQ} \approx 0,5 \cdot 1 \cdot 3\,\text{cm}^2 \approx 1,41\,\text{cm}^2$
$A_{PBQP} \approx 5,54\,\text{cm}^2 - 1,41\,\text{cm}^2 = 4,13\,\text{cm}^2$
Geamte blaue Fläche: $A \approx 2 \cdot 4,13\,\text{cm}^2 = 8,26\,\text{cm}^2$.

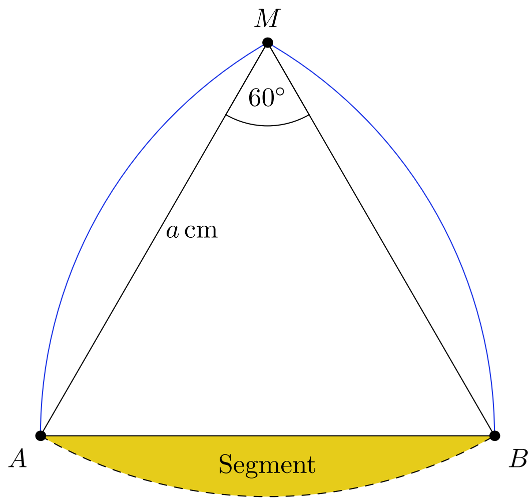
(c) Halbkreis: $A_{HK} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \pi \approx 14,14\,\text{cm}^2$

$$\frac{A_{grün}}{A_{HK}} \approx \frac{14,14\,\text{cm}^2 - 8,26\,\text{cm}^2}{14,14\,\text{cm}^2} \approx 0,4158 = 41,58\%$$

Knapp 42% der Halbkreisfläche sind grün eingefärbt.

18. (a) Zeichne zunächst den Umkreis der Figur mit dem Radiua $a = 6\,\text{cm}$. Trage dann den Radius 6-mal auf der Kreislinie ab. Beginne dabei mit einem der „waagrechten“ Punkte C oder F. Zeichne dann die 6 Kreisbögen ein.

(b)



Die Ausgangsfigur (AF) enthält drei Kreisbogendreiecke (KBD). Eines davon ist jetzt herausgezeichnet.
Es setzt sich aus einem gleichseitigen Dreieck (D) und drei kongruenten Segmenten (Sg) zusammen.
Den Flächeninhalt der Ausgangsfigur (AF) kannst du berechnen, indem du vom Flächeninhalt des Umkreises (k) der Ausgangsfigur den der drei Kreisbogendreiecke (KBD) subtrahiertst:
$A_{AF} = A_k - 3 \cdot A_{KBD}$.
Weiter gilt also: $A_{KBD} = A_D + 3 \cdot A_{Sg}$ und $A_{Sg} = A_{SektorMAB} - A_D$.
$\Rightarrow \quad A_{KBD} = A_D + 3 \cdot (A_{SektorMAB} - A_D)$.

$$\Rightarrow \quad A_{KBD} = 3 \cdot A_{SektorMAB} - 2 \cdot A_D = \left[3 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot a^2\pi - 2 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right] \text{cm}^2$$

$$\Rightarrow \quad A_{KBD} = \left[\frac{1}{2}a^2\pi - \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}\right] \text{cm}^2$$

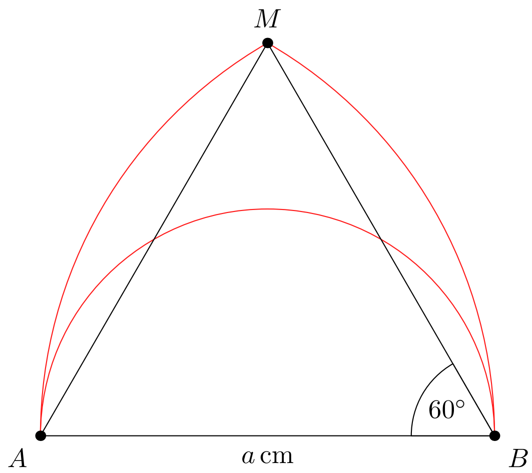
$$A_{AF} = a^2\pi\,\text{cm}^2 - 3 \cdot \left[\frac{1}{2}a^2\pi - \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}\right] \text{cm}^2$$

$$A_{AF} = \left[a^2\pi - \frac{3}{2}a^2\pi + \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\right] \text{cm}^2 = \frac{a^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)\,\text{cm}^2$$

Für $a = 6$ ergibt sich: $A_{AF} \approx 36,98\,\text{cm}^2$.

19. (a) Zeichne zunächst den Umkreis der Figur mit dem Radiua $a = 6\,\text{cm}$. Trage dann den Radius 6-mal auf der Kreislinie ab. Beginne dabei mit einem der „waagrechten“ Punkte C oder F. Zeichne dann die 6 Kreisbögen und die 3 Halbkreise ein.

(b)



Die Figur stellt eines der drei kongruenten Elemente der Ausgangsfigur (AF) dar: An den Schenkeln $[MA]$ und $[MB]$ des gleichseitigen Dreiecks ABC liegen zwei kongruente Segmente (Seg), die zum Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks addiert werden. Davon wird dann der Flächeninhalt des Halbkreises (Hk) subtrahiert. Das Ergebnis wird schließlich noch mit 3 multipliziert.

$A_{AF} = 3 \cdot (A_{ABC} + 2 \cdot A_{Seg} - A_{Hk}) = 3 \cdot [A_{ABC} + 2 \cdot (A_{Sektor} - A_{ABC}) - A_{Hk}]$
$A_{AF} = 6 \cdot A_{Sektor} - 3 \cdot A_{ABC} - 3 \cdot A_{Hk})$

$$A_{AF} = \left[6 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot a^2\pi - 3 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi\right] \text{ cm}^2$$

$$A_{AF} = \left[a^2\pi - \frac{3}{4}a^2\sqrt{3} - \frac{3}{8}\,a^2\pi\right] \text{ cm}^2$$

$$A_{AF} = \left[\frac{5}{8}\,a^2\pi - \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}\right] \text{ cm}^2 = \left[\frac{a^2}{8} \cdot \left(5\pi - 6\sqrt{3}\right)\right] \text{ cm}^2$$

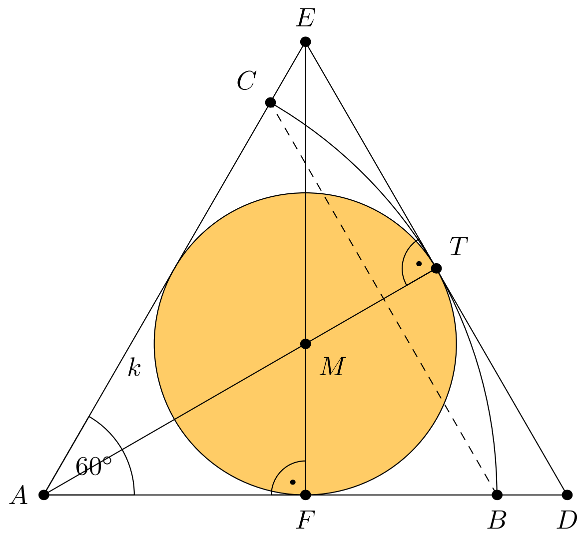
Für $a = 6$ ergibt sich: $A_{AF} \approx 23{,}92\,\text{cm}^2$

Anmerkung:

Es gilt $A_{AF} = \left[\frac{5}{8}\,a^2\pi - \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}\right] \text{ cm}^2 = \left[\frac{225^\circ}{360^\circ} \cdot a^2\pi - 3 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right] \text{ cm}^2$.

Das bedeutet: Die Ausgangsfigur hat den gleichen Flächeninhalt wie ein Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel 225° und dem Radius a cm, dem man 3 gleichseitige Dreiecke mit einer Seitenlänge von jeweils a cm entnommen hat.

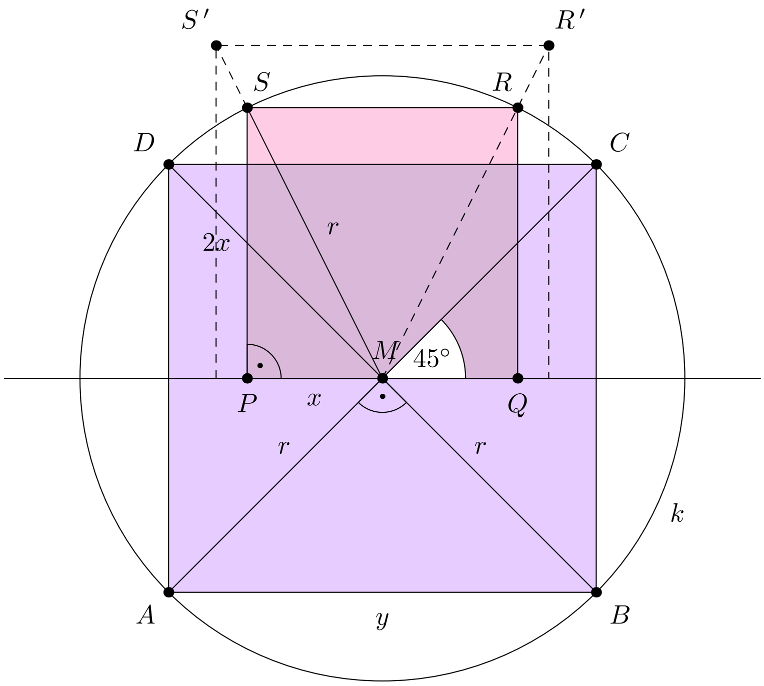
20. (a)



(b) Die Gerade $[AT]$ ist eine Symmetrieachse des gleichseitigen Dreiecks ABC und des Dreiecks ADE. Also ist dieses Dreieck ADE ebenfalls gleichseitig. Die Strecke $[MT]$ stellt den Radius des Kreises k dar.
Die $a = 6\,\text{cm}$ lange Strecke $[AT]$ ist eine Höhe im gleichseitigen Dreieck ADE. Der Kreis k ist der Inkreis des Dreiecks ADE. $\Rightarrow \quad [AT] \cap [EF] = M$. Somit stellt die Strecke $[MT]$ den Radius des Kreises k dar.
Weil im gleichseitigen Dreieck die Winkelhalbierenden gleichzeitig die Schwerlinien sind, teilt der Mittelpunkt M die Strecke $[MT]$ im Verhältnis $2 : 1$.

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1}{3}\,a \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{Kreis}}{A_{Sektor}} = \frac{\left(\frac{1}{3} \cdot a\right)^2 \pi}{\frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot a^2\,\pi} = \frac{1}{9} : \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

21. (a)



Zeichne zunächst den Kreis mit dem Mittelpunkt M und seinem waagrecht liegenden Durchmesser. Zeichne dann zwei Geraden ein, die jeweils einen 45°-Winkel mit dieser Waagrechten bilden und sich im Punkt M schneiden. Die Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit der Kreislinie k sind die Eckpunkte des Quadrates $ABCD$.
Um das Quadrat $PQRS$ zu erhalten, zeichnest du am besten erst ein (hier gestrichelt eingezeichnetes) Probequadrat mit den Eckpunkten R' und S' ein. Dann folgt: $[MR'] \cap k = \{R\}$ und $[MS'] \cap k = \{S\}$.
Die Lote der Eckpunkte R und S auf die Waagrechte liefern die restlichen Quadrat-Eckpunkte Q und P.

(b) Für die Berechnung kannst du den Radius r verwenden. Es geht jedoch auch, wenn du für r 4 cm einsetzt.
Es gilt: $\overline{AB} = y$ und $\overline{MP} = x$, dann ist $\overline{PS} = 2x$ (siehe Zeichnung).
Das Dreieck ABM ist gleichschenklig-rechtwinklig und damit ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $y = r\sqrt{2}$. $\quad\Rightarrow\quad A_{ABCD} = y^2 = 2r^2$.

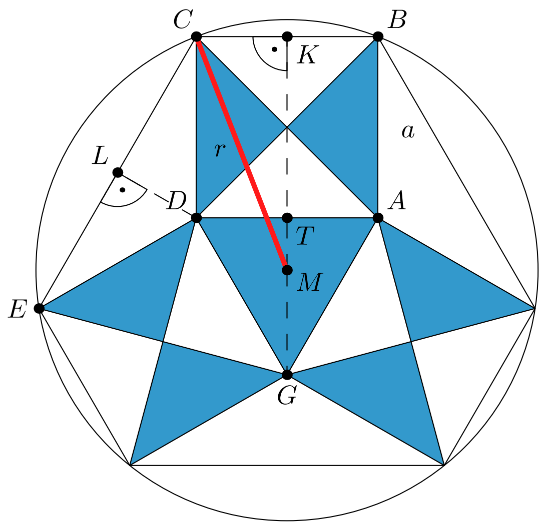
PYTHAGORAS im Dreieck PMS: $x^2 + (2x)^2 = r^2$

$$\Leftrightarrow \quad 5x^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{2r}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad A_{PQRS} = (2x)^2 = \frac{4}{5}r^2$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{4}{5}r^2}{2r^2} = 2:5 = \frac{4}{10} = 40\%$$

Das Quadrat $ABCD$ ist um 60% größer als das Quadrat $PQRS$.

22. (a)



Das Logo ist mit seinem Umkreis verkleinert dargestellt.
Im gleichseitigen Dreieck ADG stellt die Strecke $[GT]$ die Dreieckshöhe dar. Dann gilt:

$$\overline{MT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow \quad \overline{MK} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3} + a = a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + 1\right).$$ Weiter gilt: $\overline{CK} = \frac{1}{2} \cdot a.$

Im rechtwinkligen Dreieck MKC gilt:

$$r^2 = \left[a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + 1\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^2 = a^2 \cdot \left(\frac{3}{36} + \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 + \frac{1}{4}\right).$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = \frac{a^2}{3}\left(4 + \sqrt{3}\right) \qquad \textbf{(*)}$$

$$\Rightarrow \quad r = a \cdot \sqrt{\frac{4+\sqrt{3}}{3}} \qquad a = 4\,\text{cm}: r \approx 5,53\,\text{cm}.$$

(b) Für die Fläche $A_{\odot}$ des Umkreises gilt dann mit **(*)**:

$$A_{\odot} = \frac{\pi}{3} \cdot a^2 \cdot (4 + \sqrt{3}).$$

Das gleichschenklige Dreieck EDC hat die Schenkellänge a. Es wird durch die Höhe $[LD]$ in die beiden kongruenten rechtwinkligen Dreiecke EDL und LDC zerlegt.
Es gilt: $\sphericalangle CDE = 360° - 2 \cdot 90° - 60° = 120°$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle LED = \sphericalangle CLD = (180° - 120°) : 2 = 30°$. Somit lassen sich die beiden Hälften des Dreiecks EDC zu einem gleichseitigen Dreieck zusammenfügen, das mit dem gleichseitigen Dreieck ADG kongruent ist.
Um den Flächeninhalt des Logos zu berechnen, musst du also zu dem der drei Quadrate den vierfachen des gleichseitigen Dreiecks ADG im Zentrum addieren. Für A_{Logo}

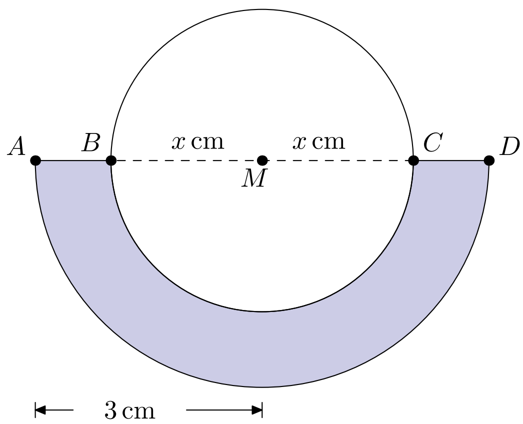
ergibt sich dann:

$$A_{Logo} = 3 \cdot a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 3a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(3+\sqrt{3}).$$

$$\frac{A_{Logo}}{A_{\odot}} = \frac{a^2(3+\sqrt{3})}{\frac{\pi}{3} \cdot a^2 \cdot (4+\sqrt{3})} \approx 0,7883 = 78,83\%$$

Knapp 79% des Umkreises werden vom TDK-Logo bedeckt.

23. (a)



Beginne am besten mit dem Vollkreis.

(b) $A_{HR} = \left(\frac{1}{2} \cdot 3^2\pi - \frac{1}{2} \cdot 2^2\pi\right) \text{cm}^2 = 2,5\pi \text{ cm}^2 \approx 7,85 \text{ cm}^2$

(c) Die Maßzahlengleichung für $x \in \mathbb{Q}^+$ heißt:

$$x^2\pi = \frac{1}{2} \cdot 3^2\pi - \frac{1}{2} \cdot x^2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}x^2 = \frac{9}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{3} \approx 1,73$$

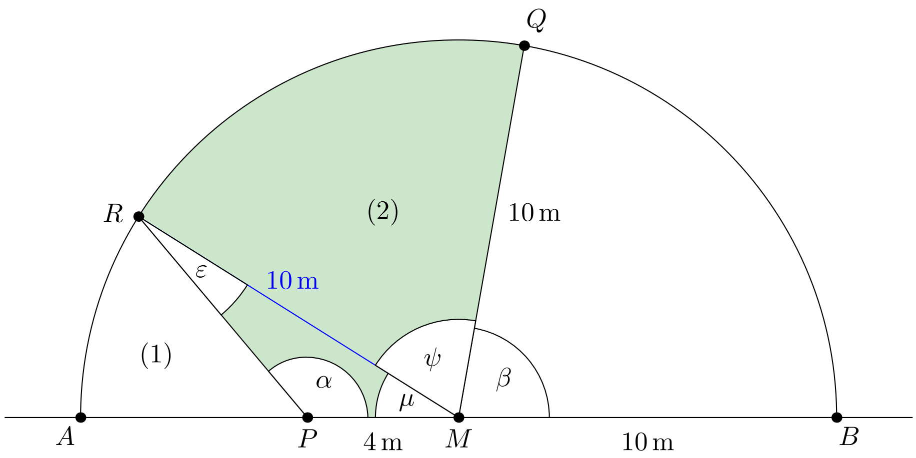
(d) Es gilt $\overline{AB} = \overline{CD} = (3-x)$ cm.

$$2 \cdot u_{Vollkreis} = 2 \cdot 2x\pi \text{ cm} \quad u_{HK} = \left[\frac{1}{2} \cdot 6\pi + 2 \cdot (3-x) + \frac{1}{2} \cdot 2x\pi\right] \text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad 4x\pi = 3\pi + 6 - 2x + x\pi \quad \Leftrightarrow \quad x(2+3\pi) = 6 + 3\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{6+3\pi}{2+3\pi} \approx 1,35$$

24. (a)



Für deine Zeichnung gilt:
$20\,\text{m} = 2000\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 2000\,\text{cm} : 200 = 10\,\text{cm}$
$4\,\text{m} = 400\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{PM} = 400\,\text{cm} : 200 = 2\,\text{cm}$

(b) Strategie: Addiere den Flächeninhalt des Dreiecks PMR zum Kreissektor (2) mit dem Mittelpunktswinkel ψ. Halbkreisfläche. Die „weiße“ Teilfläche (1) ist **kein Kreissektor**.
Die Hilfslinie $[MR]$ ist die Schlüsselstelle auf dem Lösungsweg.

$$A_{Halbkreis} = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \pi \,\text{m}^2 = 50\pi \,\text{m}^2 \approx 157,08\,\text{m}^2$$

$$A_1 = A_{Sektor\,MRA} - A_{\Delta PMR}$$

Sinussatz im Dreieck PMR: $\dfrac{\sin\varepsilon}{4} = \dfrac{\sin 130°}{10}$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon \approx 17,84° \quad \Rightarrow \quad \mu \approx 180° - 130° - 17,84° = 32,16°$$

$$A_{\Delta PMR} \approx \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \cdot \sin 32,16° \approx 10,65\,\text{m}^2$$

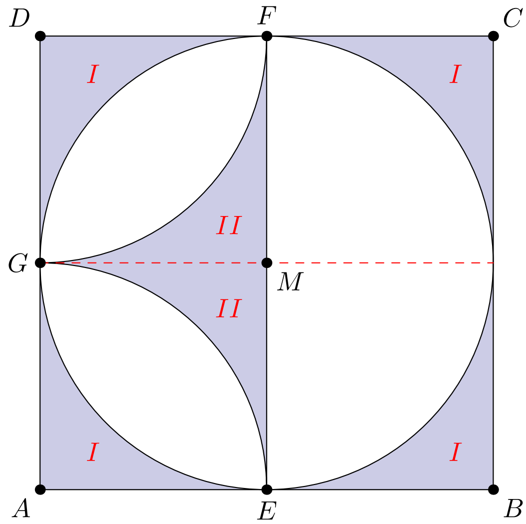
$$\psi \approx 180° - 80° - 32,16° = 67,84°$$

$$A_{(2)} = \left(\frac{67,84°}{360°} \cdot 10^2 \cdot \pi \right) \text{m}^2 \approx 59,20\,\text{m}^2$$

$$A_{Farbe} \approx (10,65 + 59,20)\,\text{m}^2 = 69,85\,\text{m}^2$$

(c) $\dfrac{A_{Farbe}}{A_{Halbkreis}} \approx \dfrac{69,85\,\text{m}^2}{157,08\,\text{m}^2} \approx 0,44 = \%$

25. (a)

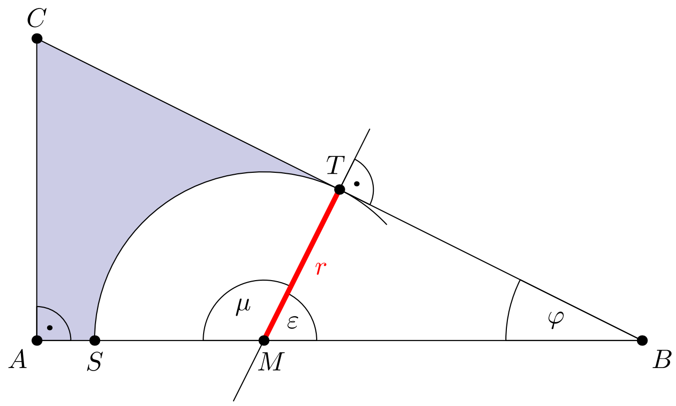


(b) Aus Symmetriegründen gilt: $A_I = A_{II}$.

$$A_I = (3^2 - \frac{1}{4} \cdot 3^2 \cdot \pi)\,\text{cm}^2 \approx 1,93\,\text{cm}^2.$$

$$A_{gesamt} = 4 \cdot A_I + 2 \cdot A_{II} = 6 \cdot A_I \approx 11,58\,\text{cm}^2.$$

26. (a)



Der Berührradius $r = [MT]$ steht auf seiner Kreistangente BC senkrecht. Zeichne also eine Senkrechte zur Hypotenuse $[BC]$ durch den Punkt T. Diese Senkrechte schneidet dann die Kathete $[AB]$ im Mittelpunkt M des Kreisbogens.

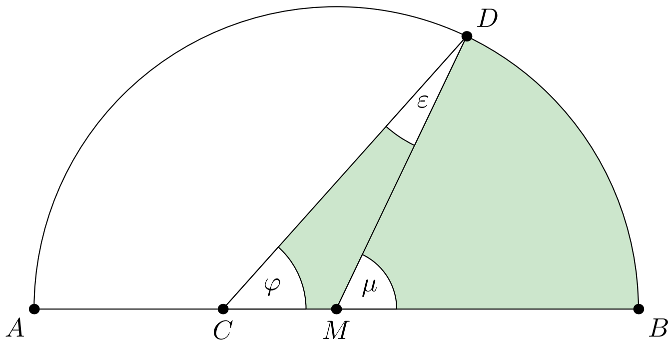
(b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen.
PYTHAGORAS im Dreieck ABC: $\overline{BC}^2 = 8^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} \approx 8,97\,\text{cm}$.
$\Delta\, ABC$: $\tan\varphi = \frac{4}{8} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 26,57°$.
$\Delta\, MBT$: $\tan 26,57° \approx \frac{r}{4,47} \quad \Rightarrow \quad r \approx 2,24\,\text{cm}$,
und $\varepsilon \approx 90° - 26,57° = 63,43°$.
$\mu \approx 180° - 63,43° \quad \mu \approx 116,57°$.

$A_{\Delta\,ABC} = 0,5 \cdot 4 \cdot 8\,\text{cm}^2 = 16\,\text{cm}^2$
$A_{\Delta\,MBT} \approx 0,5 \cdot 2,24 \cdot 4,47\,\text{cm}^2 \approx 5,01\,\text{cm}^2$

$$A_{Sektor\,MTS} \approx \frac{116,57^\circ}{360^\circ} \cdot 2,24^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 = 5,10\,\text{cm}^2$$

$A_{Farbe} \approx 16\,\text{cm}^2 - 5,01\,\text{cm}^2 - 5,10\,\text{cm}^2 = 5,89\,\text{cm}^2$.

27. (a)



(b) Die Hilfslinie ist der Kreisradius $\overline{MD}$. Der Mittelpunkt des Kreisbogens von B nach D ist der Punkt M. Daher ist die Strecke $[CD]$ länger als der Kreisradius $\overline{MD}$. Bei einem Kreissektor müssen aber die begrenzenden Strecken gleich lang sein, weil dies die Kreisradien sind.

(c) $\overline{MD} = 4\,\text{cm}$ und $\overline{MC} = 1,5\,\text{cm}$.

Im Dreieck CMD gilt: $\dfrac{1,5\,\text{cm}}{\sin\varepsilon} = \dfrac{4\,\text{cm}}{\sin 49^\circ} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 16,44^\circ$.

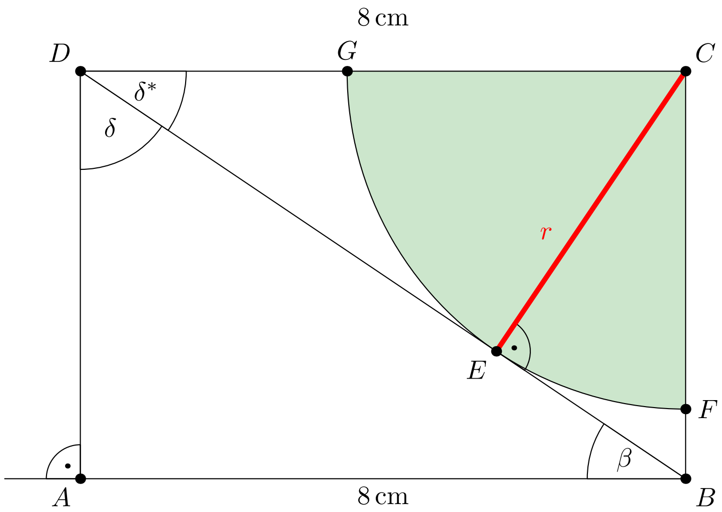
$\Rightarrow \quad \sphericalangle DMC \approx 180^\circ - 49^\circ - 16,44^\circ = 114,56^\circ \Rightarrow \quad \mu \approx 65,44^\circ$.

$A_{\Delta\,CMD} \approx 0,5 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot \sin 114,56^\circ\,\text{cm}^2 \approx 2,73\,\text{cm}^2$.

$$A_{Sektor\,MBD} \approx \frac{65,44^\circ}{360^\circ} \cdot 4^2 \cdot \pi \approx 9,14\,\text{cm}^2.$$

$A_{gesamt} \approx 2,73\,\text{cm}^2 + 9,14\,\text{cm}^2 = 11,87\,\text{cm}^2$.

28. (a)



Im Dreieck ABD gilt: $\beta = 90° - 56° = 34°$.

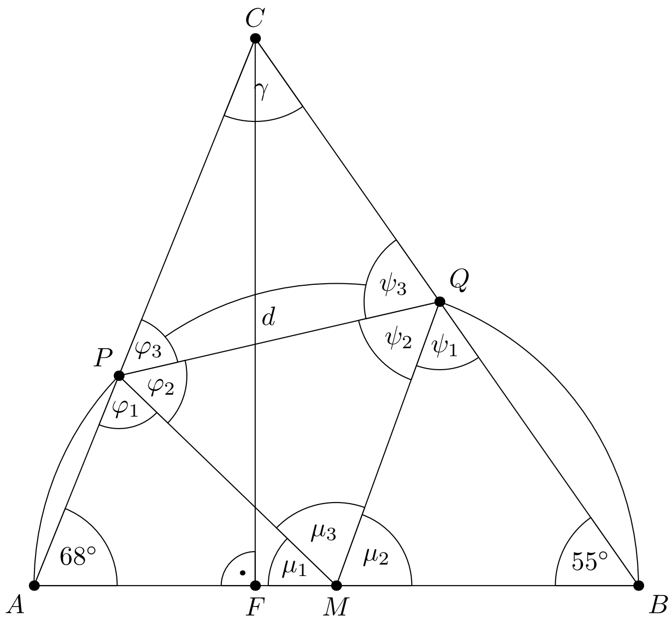
- Zeichne die Strecke $[AB]$.
- Errichte eine Senkrechte zur Strecke $[AB]$ durch den Punkt A.
- Trage am Punkt B den 34°-Winkel an.
- Die Senkrechte und der freie Schenkel des 34°-Winkels schneiden sich im Punkt D.
- Zeichne den Punkt C, die Diagonale $[BD]$ und den Kreisbogen ein.
- Der Berührradius $r = [CE]$ steht auf seiner Kreistangente BD senkrecht. Zeichne also das Lot vom Punkt C auf die Diagonale $[BD]$. Der Lotfußpunkt ist E und $r = [CE]$.

(b) Im Dreieck DEC gilt: $\delta^* = \beta = 34°$ (Z-Winkel).

$$\sin 34° = \frac{r}{8\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad r \approx 4,47\,\text{cm}.$$

$$A_{Sektor} \approx \frac{90°}{360°} \cdot 4,47^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 15,69\,\text{cm}^2$$

29. (a)



(b)
- Das Dreieck AMP ist gleichschenklig; d.h. $\overline{MA} = \overline{MP} = 4\,\text{cm}$.
  $\Rightarrow \quad \varphi_1 = 68° \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = 180° - 2 \cdot 68° = 44°$.
  Ebenso ist das Dreieck MBQ gleichschenklig: $\overline{MB} = \overline{MQ} = 4\,\text{cm}$.
  $\Rightarrow \quad \psi_1 = 55° \quad \Rightarrow \quad \mu_2 = 180° - 2 \cdot 55° = 70°$.
  [**Exkurs:** Auf analoge Weise am Punkt P bzw. Q erhältst du:
  $\varphi_3 = 55° = \beta$ und $\psi_3 = 68° = \alpha$].
  Am Punkt M gilt also: $\mu_3 = \sphericalangle QMP = 180° - 44° - 70° = 66°$.
- Kosinussatz im Dreieck PMQ:
  $\overline{PQ}^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 66° \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \approx 4{,}36\,\text{cm}$.

(c) Das Dreieck PMQ ist ebenfalls gleichschenklig; d.h. $\overline{MQ} = \overline{MP} = 4\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad \varphi_2 = \psi_2 = 57°$.

$$A_{\Delta\,PMQ} = \frac{1}{2} \cdot\ 4^2 \cdot \sin 66° \approx 7{,}31\,\text{cm}^2.$$

(d) Der Schnittpunkt der Halbgeraden $[AP$ und $[BQ$ ist der Punkt C.
- Siehe Zeichnung.
- Es gilt: $\gamma = 180° - 55° - 68° = 57°$.
  Sinussatz im Dreieck ABC:

  $$\frac{\sin 55°}{\overline{AC}} = \frac{\sin 57°}{8\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} \approx 7{,}81\,\text{cm}.$$

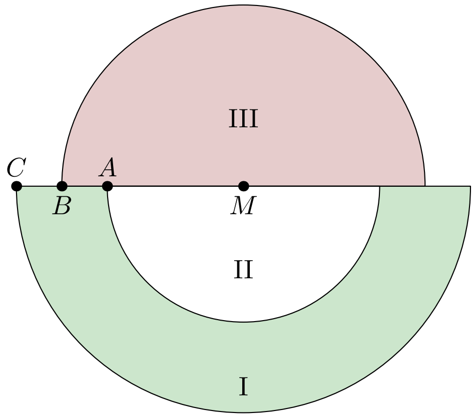
  $$\Rightarrow \quad A^*_{\Delta\,ABC} \approx \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7{,}81 \cdot \sin 68°\,\text{cm}^2 \approx 28{,}97\,\text{cm}^2.$$
- Siehe Zeichnung: Der gesuchte Abstand d ist die Länge der Dreieckshöhe $[CF]$.
  Für den Flächeninhalt A^* des Dreiecks ABC gilt:

  $$A^* = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d.$$

$$\Rightarrow \quad 28{,}97\,\text{cm}^2 \approx \frac{1}{2} \cdot 8\,\text{cm} \cdot d \quad \Rightarrow \quad d \approx 7{,}24\,\text{cm}.$$

30. (a) Die Figur 1 ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

Figur 1



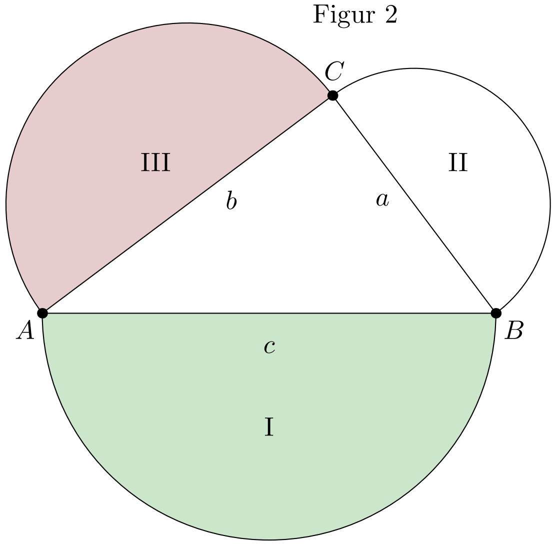
(b) Du hast die drei Halbkreise I, II und III vor dir.
Es müsste gelten: $A_{III} = A_I - A_{II}$. Es wird in der Einheit cm^2 gerechnet.

Also: $\frac{1}{2} \cdot 4{,}8^2\pi = \frac{1}{2} \cdot 6^2\pi - \frac{1}{2} \cdot 3{,}6^2\pi \;\Big|\; : \frac{1}{2}\pi$

$4{,}8^2 = 6^2 - 3{,}6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 23{,}04 = 36 - 12{,}96$. Das stimmt, also ist die Behauptung bewiesen.

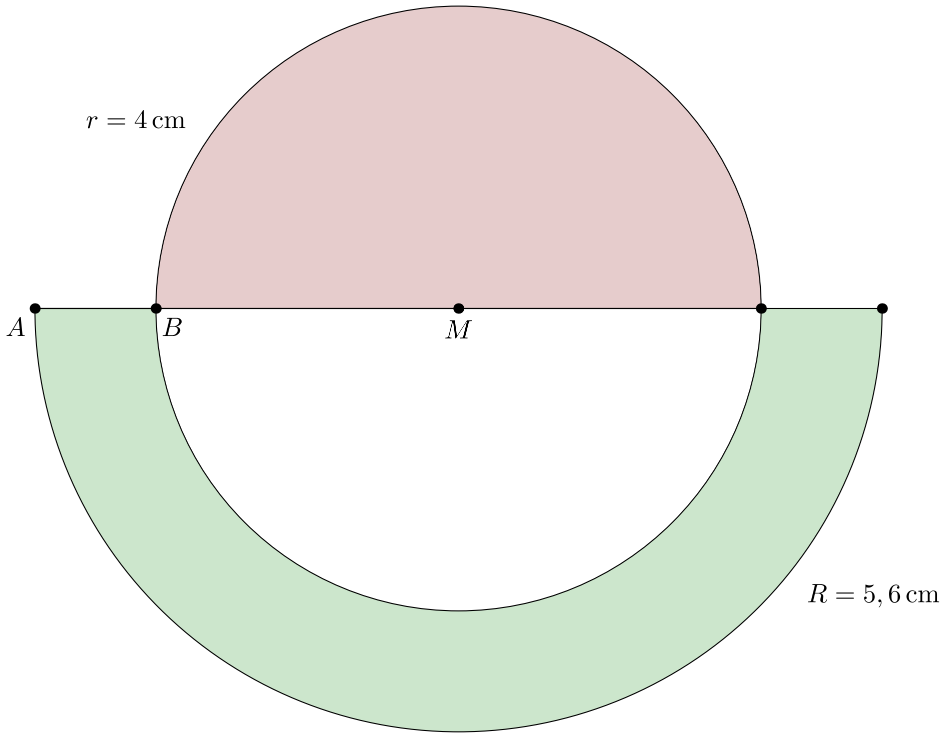
(c) • Die Figur 2 ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

Figur 2



- Für die Maßzahlen müsste gelten:
  $12^2 = 7,2^2 + 9,6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 144 = 51,84 + 92,16$. Das stimmt, also ist das Dreieck ABC rechtwinklig.
- Es gilt: $c^2 = a^2 + b^2 \;\Big|\; \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi$
  $$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \pi\,.$$
  Das bedeutet: Der Halbreis I hat den gleichen Flächeninhalt wie die beiden Halbkreise II und III zusammen.
- In der Figur 1 siehst du einen gleich gelagerten Fall: Wenn du den Halbkreis II aus dem Halbkreis I entfernst, ergibt sich: Der Halbkreis I muss genauso groß sein wie die beiden Halbkreise II und III zusammen.
  In der Figur 1 und der Figur 2 haben gleich nummerierte Halbkreise den gleichen Durchmesser; d.h. sie sind kongruent.

31. (a)



(b) **Anmerkung: Zu allen Flächenmaßzahlen gehört die Einheit „cm^2“.** Es gilt:
$A_{\text{Halbkreis(klein)}} = \dfrac{1}{2} \cdot 4^2\pi$ und $A_{\text{Kreisring}} = \dfrac{1}{2} \cdot 5,6^2\pi - A_{\text{Halbkreis(klein)}}$.

Es muss also gelten: $A_{\text{Halbkreis(groß)}} = 2 \cdot A_{\text{Halbkreis(klein)}}$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 5,6^2\pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2\pi \quad \Big| : \pi \quad \Leftrightarrow \quad 15,68 \neq 16\,.$$

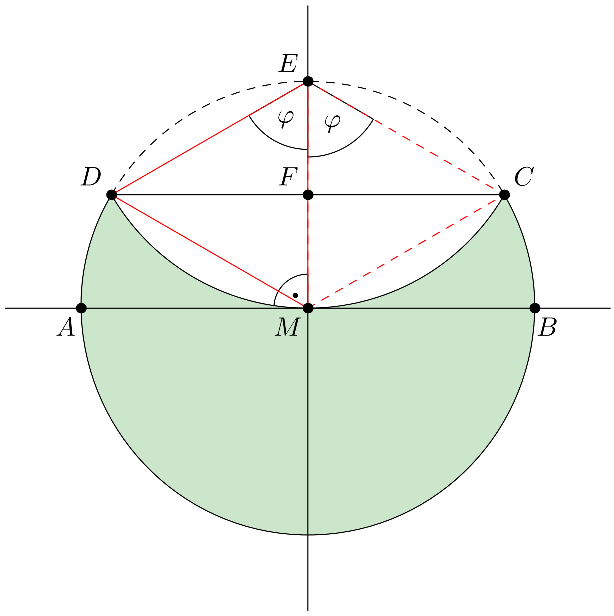
(c) $\frac{1}{2} \cdot R^2 \pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{18}^{\,2} \pi \,\mathrm{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 = 36\,\mathrm{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad R = 6\,\mathrm{cm}\,.$

(d) Es muss gelten: $\frac{1}{2} \cdot R^2 \pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^{\,2} \pi \quad \Rightarrow \quad R = r\sqrt{2}\,.$

Du könntest das auch mit Hilfe der Eigenschaften der zentrischen Streckung begründen:

- Alle Kreise sind zueinander ähnlich.
- Wenn du eine Kreisfläche verdoppelst, dann gilt für den Streckungsfaktor k: $k^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{2}\,.$

32. (a)



(b) Von der Kreisscheibe hat Erwin das Kreissegment $CDMC$ heruntergeklappt.
Den Flächeninhalt dieses Kreissegmentes erhältst du, indem du vom Flächeninhalt des Kreissektors $EDMCE$ den Flächeninhalt des Dreiecks DCE subtrahierst.
Im Dreieck DME gilt: $\overline{ME} = \overline{MD} = \overline{DE} = 3\,\mathrm{cm}\,.$
Also ist das Dreieck DME gleichseitig, und es gilt: $\varphi = 60°\,.$
Das Dreieck DCE hat den gkeichen Flächeninhalt wie dieses Dreieck $DME\,.$

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{120°}{360°} \cdot 3^2 \cdot \pi \,\mathrm{cm}^2 \approx 9,42\,\mathrm{cm}^2\,.$$

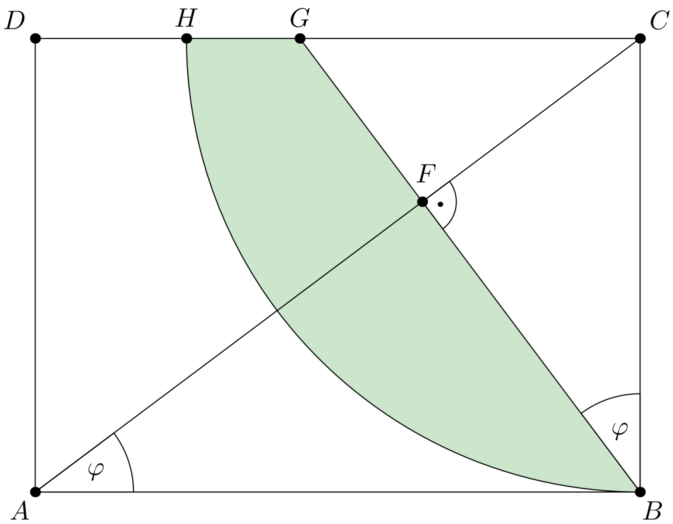
$$A_{\Delta\,DCE} = \frac{3^2}{4}\,\mathrm{cm}^2 \cdot \sqrt{3} \approx 3,90\,\mathrm{cm}^2\,.$$

$$A_{\text{Segment}} \approx 9,42\,\mathrm{cm}^2 - 3,90\,\mathrm{cm}^2 = 5,52\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Diese Segmentfläche musst du zwei Mal von der Fläche der Kreisscheibe subtrahieren:
$A_{\text{gefärbt}} \approx 3^2\pi\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 5{,}52\,\text{cm}^2 \approx 17{,}23\,\text{cm}^2$.

$$\frac{A_{\text{gefärbt}}}{A_{\bigcirc}} = \frac{17{,}23\,\text{cm}^2}{28{,}27\,\text{cm}^2} \approx 0{,}6945 = 69{,}54\,\% \,.$$

33. (a)



(b) Strategie: Subtrahiere den Flächeninhalt des Dreiecks BCG vom Flächeninhalt des Viertelkreises mit dem Mittelpunkt C und dem Radius $r = 6\,\text{cm}$.

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{4} \cdot 6^2\pi\,\text{cm}^2 = 9\pi\,\text{cm}^2 \,.$$

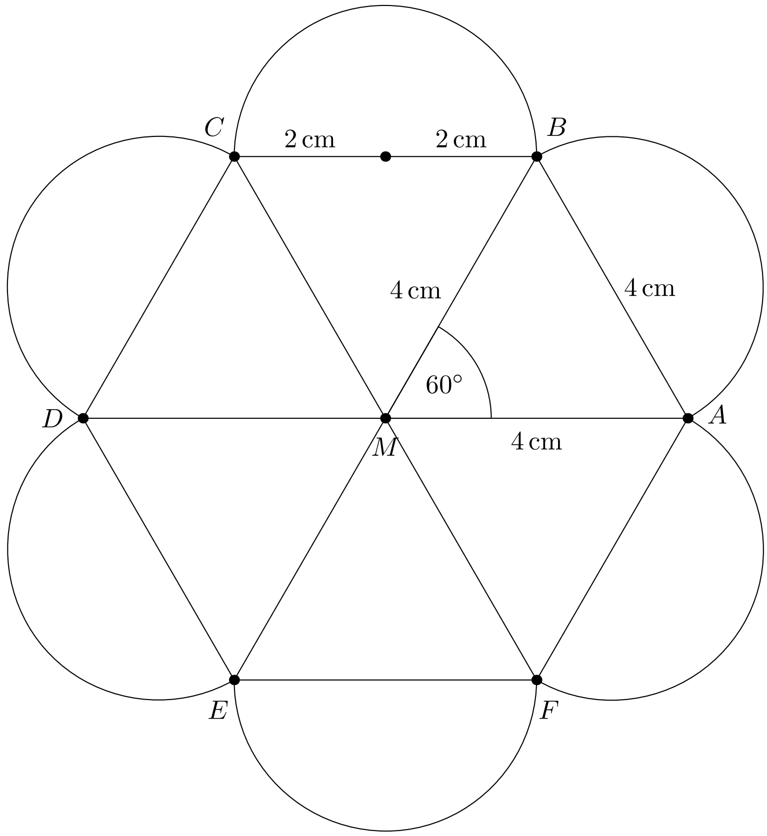
Weil sie z.B. im Winkelmaß φ übereinstimmen, sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABC und BCG zueinander ähnlich:

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{CG} = \frac{36\,\text{cm}^2}{8\,\text{cm}} = 4{,}5\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\,BCG} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 4{,}5\,\text{cm} = 13{,}5\,\text{cm}^2 \,.$$

$$\Rightarrow \quad A = (9\pi - 13{,}5)\,\text{cm}^2 \approx 14{,}77\,\text{cm}^2 \,.$$

34. (a)



(b) Die drei Diagonalen zerlegen jedes regelmäßige Sechseck in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke. In unserem Fall hat jedes dieser gleichseitigen Dreiecke eine Seitenlänge von 4 cm .
Die sechs kongruenten Halbkreise lassen sich paarweise zu drei Vollkreisen mit dem Radius $r = 2\,\text{cm}$ zusammenfügen .

Also: $A = \left(6 \cdot \dfrac{4^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2^2 \cdot \pi\right)\ \text{cm}^2 \approx 79{,}27\,\text{cm}^2$.

35. (a) Klar.

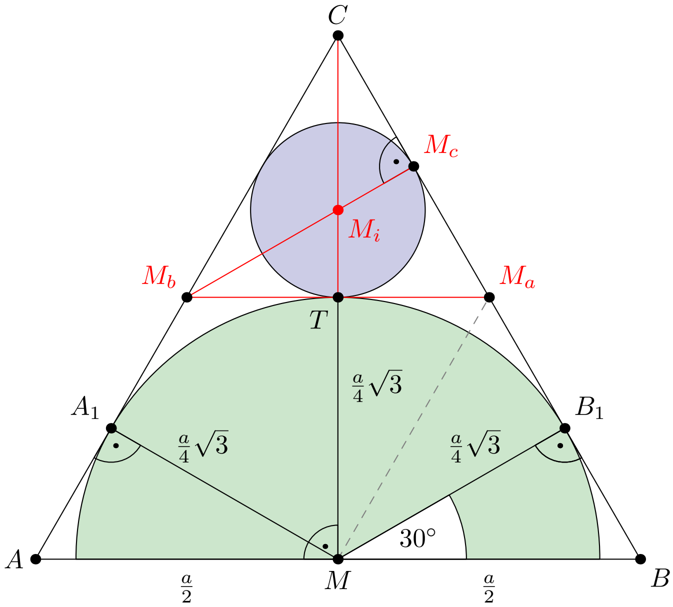
(b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned} 5^2\pi - r^2\pi &= 0{,}19 \cdot 5^2\pi \\ r^2\pi &= 0{,}81 \cdot 5^2\pi \\ r &= 0{,}9 \cdot 5\,\text{cm} = 4{,}5\,\text{cm} \end{aligned}$$

(c) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned} 3{,}5^2\pi &= (R^2 - 3{,}5^2)\pi \\ R^2\pi &= 2 \cdot 3{,}5^2\pi \\ R &= 3{,}5 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \approx 4{,}95\,\text{cm} \end{aligned}$$

36. (a)



Wir bezeichenen die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ABC mit a.

(b) Die Dreiecke AMA_1 und MBB_1 sind halbe gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}$. Aus Symmetriegründen sind diese beiden Dreiecke zudem kongruent.
Das Dreieck MBB_1 ist (ebenso wie das Dreieck AMA_1) ein halbes gleichseitiges Dreieck mit der Dreieckshöhe $\overline{MB_1}(=\overline{MA_1}) = \frac{a}{4}\sqrt{3}$.
Weil der Punkt T auf der Halbkreislinie liegt, gilt ebenso $\overline{MT} = \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MC}$.
M_a und M_b sind also zwei Seitenmittelpunkte des gleichseitigen Dreiecks ABC.
Dann gilt $[M_aM_b] \parallel [AB]$.
Demnach beträgt der Inkreisradius ρ_i des Dreiecks M_bM_aC ein Viertel von dem des Dreiecks ABC.
Für den Inkreisradius ρ_g des gleichseitigen Dreiecks gilt: $\rho_g = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
$\Rightarrow \quad \rho_i = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{24}\sqrt{3}$.
Für den Flächeninhalt A_k des kleinen Kreises gilt dann:

$$A_k = \left(\frac{a}{24}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi = \frac{a^2}{96} \cdot \pi .$$

Für den Flächeninhalt A_{HK} des Halbkreises gilt dann:

$$A_{HK} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{4}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi = \frac{3a^2}{32} \cdot \pi .$$

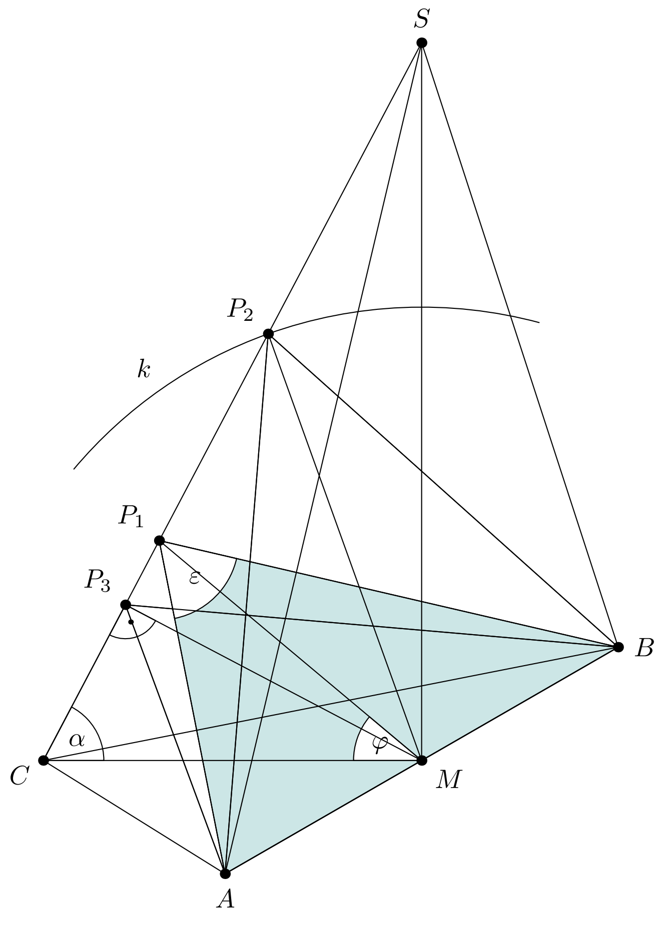
Für das fragliche Flächenverhältnis ergibt sich dann:

$$\frac{A_k}{A_{HK}} = \left[\frac{a^2}{96} \cdot \pi\right] : \left[\frac{a^2}{32} \cdot \pi\right] = \frac{32}{96} = \frac{1}{3} .$$

10. Raumgeometrie

1. (a) $V(x) = (-8x^2 + 28x + 120)\text{cm}^3$
   (b) $V_{max} = 144,5\,\text{cm}^3$ für $x = 1,75$
   (c) $x_1 = 3,10 \quad x_2 = 0,40$

2. (a) Siehe Zeichnung.



   (b) Es gilt: $\overline{CS}^{\,2} = (5^2 + 9,5^2)\,\text{cm}^2 \quad\Rightarrow\quad \overline{CS} \approx 10,74\,\text{cm}$
   Weiter gilt: $\tan\alpha = \dfrac{9,5}{5} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 62,24°$
   (c) 1. Möglichkeit:
   Die beiden in M rechtwinkligen Dreiecke CMS und AMS besitzen die gemeinsame Kathete $[MS]$. Die Kathete $[AM]$ ist länger als die Kathete $[CM]$. Also ist auch die

Hypotenuse $[AS]$ länger als die Hypotenuse $[CS]$.
2. Möglichkeit:
Das Dreieck CMS steht aufrecht in wahrer Größe da.
Zeichene das Dreieck AMS in wahrer Größe und vergleiche die Hypotenusenlängen $[CS]$ und $[AS]$: $\overline{AS}$ ist länger als $\overline{CS}$.

(d)
- Siehe Zeichnung.
- $\sphericalangle CP_1M \approx 180^\circ - 40^\circ - 62,24^\circ \approx 77,76^\circ$
  Sinussatz im ΔCMP_1: $\dfrac{\overline{P_1M}}{\sin 62,24^\circ} \approx \dfrac{5\,\text{cm}}{\sin 77,76^\circ} \quad \Rightarrow \quad \overline{P_1M} \approx 4,53\,\text{cm}$

  Das Dreieck ABP_1 ist gleichschenklig. Die Höhe $[P_1M]$ liegt auf der Symmetrieachse des Dreiecks:

  $$\tan \sphericalangle MAP_1 \approx \frac{4,53}{6} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle MAP_1 = \sphericalangle P_1BM \approx 37,05^\circ$$
  $$\sphericalangle AP_1B \approx 180^\circ - 2 \cdot 37,05^\circ \approx 105,90^\circ$$
  $$\sphericalangle CP_1M \approx 180^\circ - 40^\circ - 62,24^\circ \quad \sphericalangle CP_1M \approx 77,76^\circ$$

  $$\frac{\overline{P_1M}}{\sin 62,24^\circ} \approx \frac{5\,\text{cm}}{\sin 77,76^\circ} \quad \Rightarrow \quad \overline{P_1M} \approx 4,53\,\text{cm}$$

  Das Dreieck ABP_1 ist gleichschenklig: $\overline{P_1A} = \overline{P_1B}$. Die Höhe auf die Basis $[AB]$ liegt auf der Symmetrieachse des Dreiecks:

  $$\tan \sphericalangle MAP_1 = \frac{\overline{MP_1}}{\overline{AM}} \approx \frac{5\,\text{cm}}{\sin 77,76^\circ}$$

  $$\Rightarrow \quad \sphericalangle MAP_1 = \sphericalangle P_1BM \approx 37,05^\circ \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle AP_1B \approx 105,9^\circ.$$

(e) Alle Dreiecke ABP_n sind gleichschenklig mit der gemeinsamen Basis $[AB]$. Das rechtwinklige Dreieck ABP_2 besitzt den Durchmesser des THALES-Kreises als Hypotenuse $[AB]$. Folglich muss die Höhe $[MP_2]$ dieses Dreiecks halb so lang wie die Hypotenuse, nämlich 6 cm sein.
Weil das Dreieck CMS in wahrer Größe erscheint, schneidet die Kreislinie k mit Radius 6 cm die Seitenkante $[CS]$ im Punkt P_2.

(f) Alle Dreiecke ABP_n sind gleichschenklig mit der gemeinsamen Basis $[AB]$, die 12 cm lang ist. Wenn darunter ein gleichseitiges Dreieck sein soll, dann muss einer von dessen Innenwinkeln, z.B. $\sphericalangle BAP_n$, das Maß 60° besitzen.
Je näher die Punkte P_n an die Sitze S der Pyramide heranrücken, desto höher werden die Dreiecke ABP_n mit ihren Höhen $[MP_n]$ und desto größer werden die Maße der Innenwinkel BAP_n. Falls einer der Punkte P_n auf der Spitze S landet, werden die betreffenden Maßzahlen jeweils maximal.

1. Möglichkeit:

Im ΔABS gilt: $\tan \sphericalangle BAS = \dfrac{9,5}{6} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle BAS < 57,8^\circ < 60^\circ$.

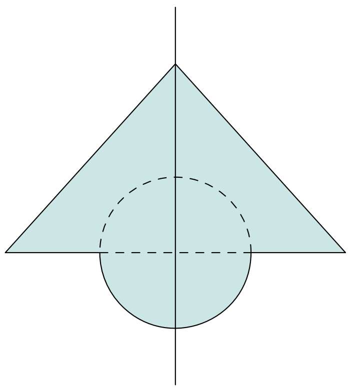
Die Maße der Innenwinkel der Dreiecke ABP_n erreichen also für keinen der Punkte P_n das Maß $60°$. Damit existiert unter allen Dreiecken ABP_n kein gleichseitiges.

2. Möglichkeit:

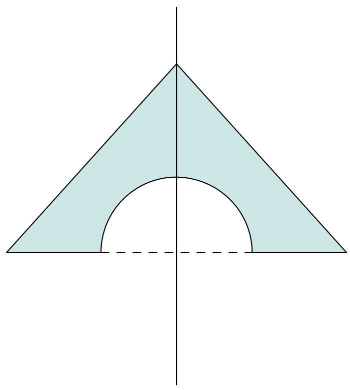
Wenn eines der Dreiecke ABP_n gleichseitig sein soll, dann gilt für dessen Höhe $h = \frac{12}{2}\sqrt{3} > 10{,}39\,\text{cm} > 9{,}5\,\text{cm} = \overline{MS}$.
Also gibt es unter allen Dreiecken ABP_n kein gleichseitiges.

(g) Im Diagramm I beginnt der Graph im Ursprung. Das würde bedeuten:
Dem Winkelmaß $\varphi = 0°$ ist das Winkelmaß $\varepsilon = 0°$ zugeordnet.
Folglich müsste das Dreieck ABC wegen $\varphi = 0°$ zur Strecke entarten. Das ist offensichtlich nicht der Fall. Also stellt das Diagramm I den Sachverhalt falsch dar.
Aus dem Diagramm III kannst du ablesen, dass sich das Winkelmaß ε nicht ändert, also vom Winkelmaß φ unabhängig ist. Der Punkt P_3 jedoch (vgl. Zeichnung) besitzt unter allen Punkten P_n die kürzeste Entfernung zur Basis $[AB]$. Also muss dort das Winkelmaß ε am größten ausfallen. Daher muss dieses Winkelmaß veränderlich sein: Die Darstellung im Diagramm III ist auch falsch.
Anmerkungen:
Im Aufgabentext wird ausgesagt, dass eines dieser drei Diagramme den Sachverhalt (näherungsweise) richtig darstellt. Das kann dann nur das Diagramm II sein. Es gibt zu dieser Teilaufgabe eine dynamische Konstruktion mit GEONExT (Dateiname: 10bm001_1.gxt), welche diesen Graphen bei der Bewegung des Punktes P auf der Kante $[CS]$ korrekt wiedergibt.

3. (a) Am besten zeichnest du dir erst einmal die Axialschnitte der beiden Rotationskörper hin:



Zur Figur 1



Zur Figur 2

(b) Der zur Figur 1 gehörende Rotationskörper R_1 besteht aus einem Kegel, an dessen Grundfläche eine Halbkugel hängt. Aus dem Kegel des Rotationskörpers R_2 ist eine Halbkugel mit dem gleichen Radius herausgebohrt worden. Beide Kegel von R_1 und R_2 sind kongruent.
Also unterscheiden sich die entsprechenden Rauminhalte V_1 und V_2 der beiden Rotationskörper lediglich um das Volumen einer Kugel mit Radius 2 cm:

$$V_1 - V_2 = \Delta V = \frac{4}{3} \cdot 2^3 \cdot \pi \, \text{cm}^3 = \frac{32}{3} \cdot \pi \, \text{cm}^3 \approx 33,51 \, \text{cm}^3.$$

(c) Die Oberflächen O_1 und O_2 der Rotationskörper R_1 und R_2 bestehen aus paarweise kongruenten Teilflächen:

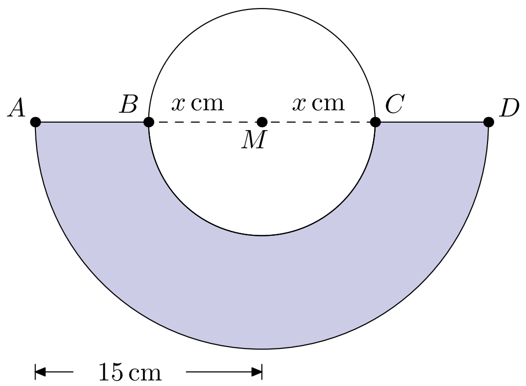
- Zwei Kreisringe mit dem Durchmesser 9cm, die jeweils 2,5cm breit sind
- Zwei Kegelmäntel
- Zwei Halbkugeln mit dem Durchmesser 4 cm

Folglich hat Maria Recht: $O_1 = O_2$.
Anmerkung: Natürlich kannst du die Oberflächen auch jeweils berechnen, aber dadurch verzögerst du nur die Entscheidung, ob Maria Recht hat.

4. Es sei r der Radius der Halbkugel.
Für das Volumen der Halbkugel gilt dann: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3\pi = 500 \, \text{cm}^3$.
$\Rightarrow \quad r \approx 6,20 \, \text{cm}$.
Für die Oberfläche O_1 der Halbkugel ergibt sich:
$O_1 \approx 2 \cdot 6,20^2 \cdot \pi \, \text{cm}^2 \approx 241,53 \, \text{cm}^2$.
Das Dreieck ABC ist aus Symmetriegründen gleichschenklig. Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck ein Innenwinkel das Maß 60° hat, dann muss dieses Dreieck gleichseitig sein. Für die Länge s der Mantellinie gilt dann: $s = 2 \cdot r \approx 12,40 \, \text{cm}$. Damit ergibt sich für die Mantelfläche O_2 des Kegels: $O_2 \approx 6,20 \cdot \pi \cdot 12,40 \, \text{cm}^2 \approx 241,53 \, \text{cm}^2$.
Anmerkung: Auch wenn du mit exakten Werten rechnen würdest, hätten die Mantelfläche des Kegels und die Oberfläche der Halbkugel gleiches Maß.
$O_{ges} = O_1 + O_2 \approx 483,06 \, \text{cm}^2$.

5. $0,5 \, \text{kg} = 500 \, \text{g}$. Wenn für 100 g Spaghetti ein Liter Wasser benötigt wird, müssen also zunächst 5 Liter $= 5000 \, \text{cm}^3$ Wasser in den Topf.
Zusätzlich muss noch diejenige Wassermenge berücksichtigt werden, die während des Kochvorgangs verdampft.
Insgesamt müssen sich dann $5000 \, \text{cm}^3 \cdot 1,15 = 5750 \, \text{cm}^3$ Wasser im Topf sein.
Die Wassermenge im Topf hat eine zylindrische Form mit einem Radius von 10 cm und der Einfüllhöhe h: $5750 \, \text{cm}^3 = (10 \, \text{cm})^2 \cdot \pi \cdot h \quad \Rightarrow \quad h \approx 18,3 \, \text{cm}$
Das Wasser im Topf muss knapp 20 cm hoch stehen.

6. (a)



Für die Zeichnung gilt: Kugelradius $r = (7,5 : 5)\,\text{cm} = 1,5\,\text{cm}$ und äußerer Radius der Halbkugelschale $R = (15 : 5)\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$.
Beginne am besten mit dem Vollkreis.

(b) Äußere Halbkugel: $O_a = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15^2 \pi\,\text{cm}^2 = 250\pi\,\text{cm}^2$

Innere Halbkugel: $O_i = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7,5^2 \pi\,\text{cm}^2 = 112,5\pi\,\text{cm}^2$

Kreisring aus $[AB]$ bzw. $[CD]$: $A_{KR} = (15^2\pi - 7,5^2\pi)\,\text{cm}^2 = 168,25\,\text{cm}^2$

Somit ergibt sich für die Oberfläche der Halbkugelschale in diesem Fall:
$O_{HKS} = 531,25\pi\,\text{cm}^2 \approx 1668,97\,\text{cm}^2 \approx 1669\,\text{cm}^2 \approx 16,7\,\text{dm}^2$.

(c)
- Äußere Halbkugel: $O_a = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15^2 \pi\,\text{cm}^2 = 250\pi\,\text{cm}^2$

  Innere Halbkugel: $O_i = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x^2 \pi\,\text{cm}^2 = 2x^2\pi\,\text{cm}^2$

  Kreisring aus $[AB]$ bzw. $[CD]$: $A_{KR} = (15^2\pi - x^2\pi)\,\text{cm}^2 =$
  $= (225\pi - x^2\pi)\,\text{cm}^2$

  Somit ergibt sich: $O(x) = (250 + 2x^2 + 225 - x^2)\pi\,\text{cm}^2 = (x^2 + 475)\pi\,\text{cm}^2$.

- $O(7,5) = (7,5^2 + 475)\pi\,\text{cm}^2 = 531,25\pi\,\text{cm}^2$, siehe Lösung (b).

(d) Die Maßzahlengleichung für $x \in \mathbb{R}^+$ heißt:
$5 \cdot 4x^2\pi = (x^2 + 475)\pi \quad \Leftrightarrow \quad 19x^2 = 475 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$

(e) $V = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 15^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 7.5^3\right)\,\text{cm}^3 = 1968,75\pi\,\text{cm}^3 \approx 6185\,\text{cm}^3 \approx 6,2\,\text{dm}^3$

(f)
- $V(x) = \frac{2}{3}\pi\left(15^3 - x^3\right)\,\text{cm}^3 = \left(2250 - \frac{2}{3}x^3\right)\pi\,\text{cm}^3$

- $V(7,5) = \left(2250 - \frac{2}{3} \cdot 7,5^3\right)\pi = 1968,75\pi\,\text{cm}^3$, siehe Lösung (e).

(g) In der Angabe steht, dass die Halbkugelschale und die Vollkugel aus dem gleichen Material sind. Wenn das Volumen der beiden Körer identisch ist, dann müssen auch die zugehörigen Massen gleich sein. Daraus ergibt sich die zugehörige Maßzahlengleichung mit $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\left(2250 - \frac{2}{3}x^3\right)\pi = \frac{4}{3}x^3\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2250 = 2 \cdot x^3 \qquad \Rightarrow \quad x \approx 10,40$$

7. Aus $A_{Kreis} = 6400\,\pi\,\text{mm}^2$ folgt $r = 80\,\text{mm}$.
   Wegen $M_{Kegel} = r \cdot \pi \cdot s$ folgt dann $M_{Kegel} = 80 \cdot \pi \cdot 60\,\text{mm}^2 = 4800\,\pi\,\text{mm}^2$ und nicht wie angegeben $4000\,\pi\,\text{mm}^2$. Also passen Grundkreis und Mantelfläche des Kegels nicht zusammen.

8. Für den Kreisradius r gilt: $r^2\pi = 6400 \cdot \pi\,\text{mm}^2 \quad \Rightarrow \quad r = 80\,\text{mm}$.
   Nach der Formelgleichung für den Kegelmantel muss gelten:
   $80\,\text{mm} \cdot \pi \cdot 60\,\text{mm} = 4000 \cdot \pi\,\text{mm}^2$, was falsch ist.
   Also passen die beiden Flächenstücke nicht zusammen.