SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 10 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

I. Wahlpflichtächergruppe I 3

1. Potenzfunktionen 4
2. Exponential- und Logarithmusfunktion 6
3. Trigonometrische Funktionen 10
4. Abbildungen im Koordinatensystem 27
5. Zusammenfassende Aufgaben 28

II. Wahlpflichtfächergruppe II/III 30

6. Quadratische Funktionen 31
7. Quadratische Funktionen und Gleichungen 43
8. Trigonometrie 50
9. Berechnungen am Kreis 65
10. Raumgeometrie 85

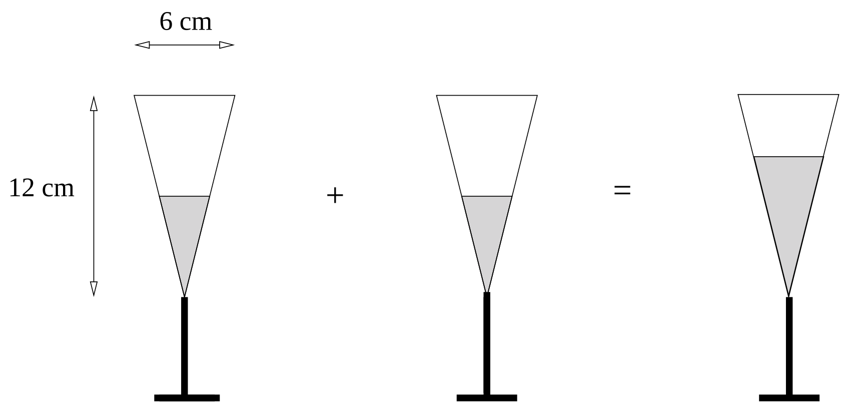
Teil I.

Wahlpflichtächergruppe I

1. Potenzfunktionen

1. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = \frac{3}{x-1} + 2$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).
   (a) Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge von f sowie die Gleichung der Asymptoten des Graphen von f an.
   (b) Tabellarisieren Sie f für $x \in \{1,5; 2; 3; 5; 7\}$. Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f in ein Koordinatensystem ein. Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \leqq x \leqq 9$ und $-5 \leqq y \leqq 9$
   (c) Berechnen Sie die nach y aufgelöste Gleichung der Umkehrfunktion f^{-1} von f. Zeichnen Sie sodann den Graphen von f^{-1} in das Koordinatensystem zu (b) ein und geben Sie die Gleichung der Asymptoten an.
   (d) Auf dem im I.Quadranten liegenden Teil des Graphen zu f wandern Punkte Q, auf der Geraden g mit $y = -1$ Punkte P. Die Punkte P und Q besitzen jeweils die gleiche Abszisse x und sind Eckpunkte von Dreiecken OPQ mit $O(0 \mid 0)$. Zeichnen Sie das Dreieck OP_0Q_0 für $x_0 = 5$ in das Koordinatensystem zu (b) ein und berechnen Sie den Flächeninhalt $A(x)$ der Dreiecke OPQ in Abhängigkeit von x. Vereinfachen Sie dabei den Flächenterm so weit wie möglich.
   (e) Berechnen Sie den $x-$Wert, für den die Länge der Strecke $[PQ]$ genauso groß wie ihr Abstand von der $y-$Achse ist.

2. Zwei gleiche Sektkelche sind jeweils bis auf die halbe Höhe gefüllt. Der Inhalt des einen Kelches wird in den anderen gegossen.
   Berechne die Füllhöhe!



2. Exponential- und Logarithmusfunktion

1. Gegeben sind die Funktionen $f_1 : y = -0,5 \cdot log_3(x+2) - 1$ und $f_2 : y = 0,5 \cdot log_3(x-1) - 1$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   (a) Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f_2 an.

   (b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph der Funktion f_1 durch orthogonale Affinität an der x-Achse mit $k = -1$ und anschließender Verschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet werden kann.

   (c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen von f_1 und f_2.

2. In einem Trockengebiet Afrikas wird ein Tiefbrunnen gebaut und Grundwasser gefördert. Messungen ergeben, dass die Grundwasservorräte dadurch von anfangs $0,08\,\text{km}^3$ jedes Jahr um 2% im Vergleich zum Vorjahr sinken.

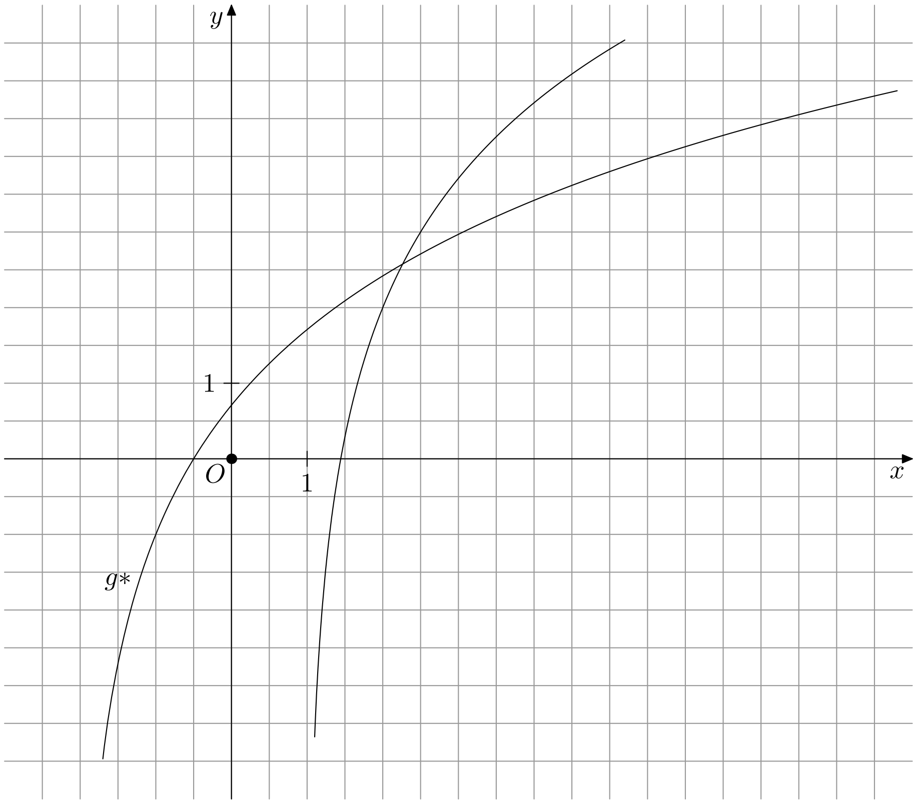
   (a) Erklären Sie kurz, warum für die Berechnung der restlichen Grundwassermenge $y\,\text{km}^3$ nach x Jahren folgende Gleichung gilt: $y = 0,08 \cdot 0,98^x$ $(G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$

   (b) Wie viele Kubikmeter Wasser wurden im ersten Jahr gefördert?

   (c) Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren der Grundwasservorrat auf die Hälfte der Anfangsmenge gesunken ist.

   (d) Durch einen zweiten Tiefenbrunnen verdoppelt sich die Abnahme des Grundwasservorrates auf 4% jeweils im Vergleich zum Vorjahr. Ermitteln Sie rechnerisch, wie viel Prozent der ursprünglichen Grundwassermenge in diesem Fall nach 50 Jahren noch vorhanden sind.

3.



Gegeben sind die beiden Funktionen f_1 mit der Gleichung $y = \log_{1,5}(x - 1) + 2$ und f_2 mit der Gleichung $y = \log_{1,5}(x + 2) - 1$. Ausschnitte aus den Graphen der beiden Funktionen sind dargestellt.

(a) Begründe: Der Graph $g*$ stellt die Funktion f_2 dar.

(b) Punkte A_n liegen auf dem Graphen zu f_1. Die Punkte B_n mit dem gleichen Abszissenwert x wie die Punkte A_n liegen auf dem Graphen zu f_2.
Zeichne für $x = 1,2$ die Strecke $[A_1B_1]$ ein.

(c) Zeige: Für die Streckenlängen $\overline{A_nB_n}$ gilt in Abhängigkeit von x:

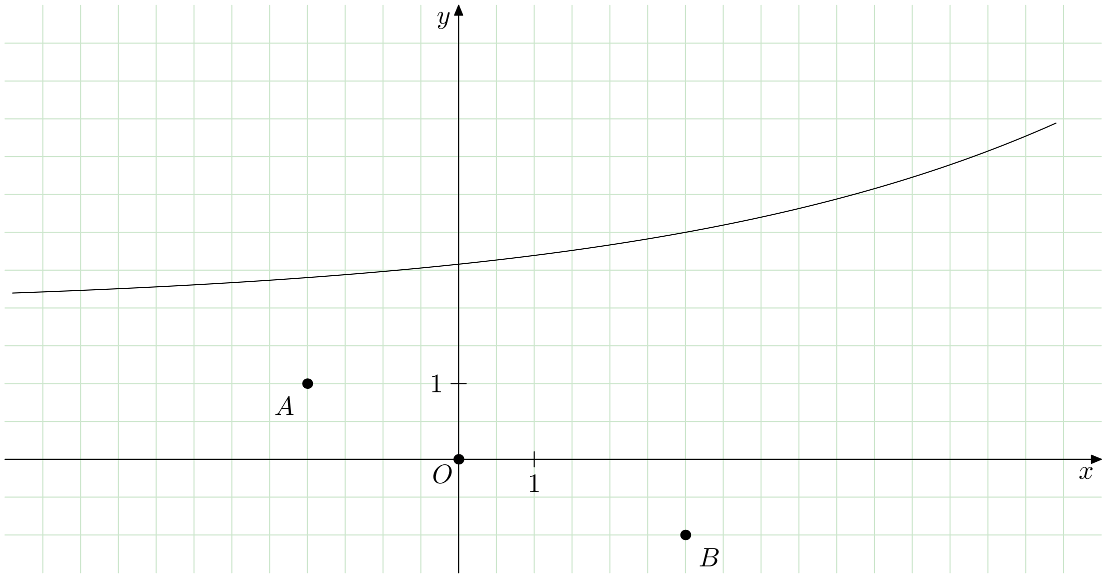
$$\overline{A_nB_n}(x) = \left(\log_{1,5}\frac{x+2}{x-1} - 3\right) LE$$

(d) Mit Hilfe des Ergebnisses der Aufgabe (c) lässt sich der Abszissenwert des Schnittpunktes der beiden Graphen berechnen.
Zeige, dass sich daraus die Gleichung

$$\frac{x+2}{x-1} = 3,375$$

ableiten lässt. Berechne x.

4.



Gegeben sind die Punkte $A(-2 \mid 1)$ und $B(3 \mid -1)$ sowie die Funktion f mit der Gleichung $y = 1,2^{\,x-3} + 2$ auf $G = \mathbb{R}X\mathbb{R}$. Ein Ausschnitt des Graphen der Funktion f ist zusammen mit den Punkten A und B oben dargestellt.
Auf dem Graphen von f wandern Punkte $D_n(x \mid 1,2^{\,x-3}+2)$, so dass Parallelogramme ABC_nD_n entstehen.

(a) Gib die Gleichung der Asymptoten a des Funktionsgraphen an.

(b) Zeichne für $x = -1$ und $x = 2$ die Parallelogramme ABC_1D_1 und ABC_2D_2 ein.

(c) Untersuche, ob sich der Graph der Funktion f und der Trägergraph der Punkte C_n außerhalb des I. Quadrantens schneiden.

(d) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Parallelogramme ABC_nD_n gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = (5 \cdot 1,2^{x-3} + 2x + 9) \text{ FE}.$$

(e) Unter allen Parallelogrammen ABC_nD_n gibt es die Raute ABC_3D_3.

- Konstruiere diese Raute. Konstruktionslinien müssen sichtbar bleiben.
- Berechne den Flächeninhalt der Raute, indem du die erforderlichen Größen der Zeichnung entnimmst.
- Bestätige mit Hilfe des Ergebnisses der Aufgabe (d) dein Ergebnis für die Rautenfläche.

(f) Stelle in deiner Zeichnung die Menge aller Belegungen von x dar, für die es Parallelogramme ABC_nD_n gibt.

5. Die größte Zahl die man aus drei Ziffern bilden kann, ist 9^{9^9}.
Wohlgemerkt: $9^{9^9} = 9^{(9^9)}$. Dagegen ist nämlich $(9^9)^9 = 9^{9 \cdot 9} = 9^{81}$.

(a) Berechne die letzte Ziffer des Potenzwertes.

(b) Berechne möglichst genau, aus wie vielen Ziffern der Wert dieser Potenz besteht.

(c) Stelle dir vor, eine Klasse aus 30 Schülerinnen und Schülern bekäme den Auftrag, den Wert dieser Potenz Ziffer für Ziffer aufzuschreiben, wobei jede/jeder gleich viele Ziffern übernimmt.
Wie lange hätten alle zu tun, wenn pro Sekunde eine Ziffer notiert wird?

3. Trigonometrische Funktionen

1. Ermittle die Koordinate x des Punktes $C(x \mid 1)$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC mit $A(2 \mid -2)$, $B(2 \mid 5)$ und $\gamma = 90°$
   (a) durch eine Zeichnung,
   (b) durch drei verschiedene Rechenwege.

2. Die Ecken C_n von Dreiecken ABC_n mit $A(1 \mid 1)$, $B(6 \mid 4)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 5$.

   Konstruiere die beiden möglichen rechtwinkligen Dreiecke ABC_1 und ABC_2 mit jeweils $\gamma = 90°$ und berechne die $x-$Koordinate der Eckpunkte C_1 und C_2.

3. Vom Viereck $ABCD$ sind die Punkte $A(-2 \mid 0)$, $C(4 \mid 4,5)$, $D(-2 \mid 3)$, sowie $a = 5\,\text{LE}$, $f = 7\,\text{LE}$, und $\sphericalangle BDC = 65,83°$ gegeben.
   (a) Konstruieren Sie das Viereck $ABCD$. Für die Zeichnung: $-3 \leqq x \leqq 5$ und $-3 \leqq y \leqq 5$
   (b) Berechnen Sie die Maße der Winkel α und δ, sowie die Länge der Seite b.
   (c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ACD mit drei verschiedenen Formeln.

4. Ein Segelflieger wollte von A-Dorf über B-Stadt nach C-Berg und wieder zurück nach A-Dorf fliegen. Aus flugtechnischen Gründen tritt er jedoch am Punkt D den sofortigen Rückflug an.
   (a) Berechnen Sie die Länge der Strecke, die der Flieger zurücklegt.
   (b) Berechne Sie, um wie viele Kilometer der geplante Flug länger gewesen wäre als die tatsächlich zurückgelegte Strecke.

5. Ein Flugzeug fliegt auf geradlinigem Kurs und in gleichbleibender Höhe von $500\,\text{m}$ mit einer Geschwindigkeit von $150\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ genau über einen Beobachter hinweg.

   Wie weit ist das Flugzeug nach $20\,\text{s}$ vom Beobachter entfernt und unter welchem Winkel gegen die Horizontale beobachet er es dann?

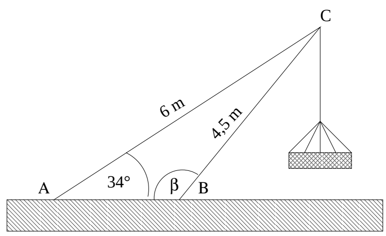
6. Die Plattform eines Leuchtturms befindet sich in $23,8\,\mathrm{m}$ Höhe. Mit einem Fernrohr sieht man ein vor Anker liegendes Schiff unter einem Winkel von $12,9°$.

   Wie weit ist das Schiff horizontal vom Fuß des Leuchtturms entfernt, wenn sich das Fernrohr $1,60\,\mathrm{m}$ über der Plattform befindet?

7. aednern Der Giebel eines Hauses soll mit einer symmetrischen Fachwerkkonstruktion verziert werden. Alle eingezeichneten Srecken stellen Balken dar.

   Wie viel Meter Balken braucht man insgesamt, wenn die Giebelbreite $\overline{AB} = 6,40\,\mathrm{m}$ und der Neigungswinkel $\alpha = 50°$ beträgt?

8. Auf einem Kinderspielplatz ist an der Spitze eines Stahlgestells ABC ein Autoreifen zum Schaukeln aufgehängt. (Siehe Skizze)



   (a) Berechnen Sie das Maß des Winkels β.

   (b) Wie hoch befindet sich die Spitze C über dem Erdboden?

   (c) Zur Verstärkung der Konstruktion soll von B aus eine Stütze s senkrecht zur Strebe $[AC]$ eingebaut werden. Berechnen Sie die Länge dieser Stütze s.

9. **Hinweis:** Gegebenenfalls sind alle Ergenbisse auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.
   Die Figur enthält im Zentrum ein Quadrat mit der Seitenlänge $2\,\mathrm{cm}$, das von vier kongruenten Trapezen umgeben ist.
   Es gilt $\overline{AB} = 4\,\mathrm{cm}$ und $\varphi \in [26,57°; 90°]$.

(a) Zeichnen Sie diese Figur für $\varphi = 35°$.

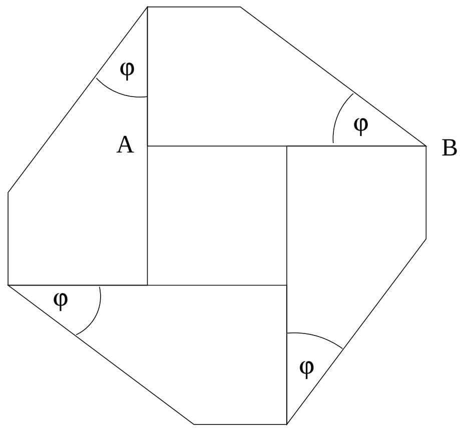
(b) Zeigen Sie: Nur für diejenigen Winkelmaße φ, für die $\tan\varphi > 0,5$ gilt, gibt es Trapeze.

(c) Berechnen Sie φ so, dass der Umriss der Figur zum Quadrat wird.

(d)
- Berechnen Sie φ so, dass der achteckige Umriss der Figur lauter gleich lange Seiten hat.
- Ist dieses Achteck aus lauter gleich langen Seiten regelmäßig? Begründen Sie Ihre Ansicht.

(e) Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Figur in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $A(\varphi) = \left(36 - \dfrac{2}{\tan\varphi}\right)\ \mathrm{cm}^2$]

(f) Unter allen Achtecken gibt es eines, in dem am Rand 2 cm lange Seiten auftauchen. Bestimmen Sie die zugehörige Belegung von φ.

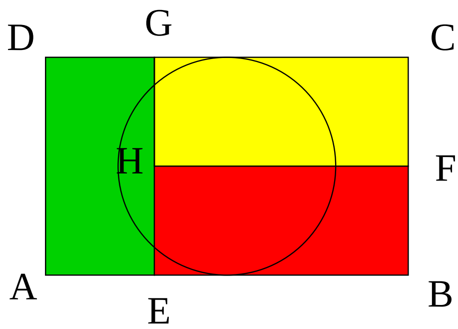


10. Das Parallelogramm $ABCD$ besitzt die Seitenlängen $\overline{AB} = 3a$ und $\overline{AD} = 2a$. Der Winkel BAD hat das Maß ϵ.

(a) Ermitteln Sie durch Rechnung diejenigen Beleguge von ϵ, für die sich Parallelogramme mit dem Flächeninhalt von $5a^2$ ergeben.

(b) Zeigen Sie, dass man die Länge f der Diagonalen $[BD]$ wie folgt in Ahängigkeit von a und ϵ darstellen kann:
$f = \overline{BD} = \sqrt{13 - 12\cos\epsilon} \cdot a$
Berechnen Sie sodann, für welche Belegung von ϵ die Strecke $[BD]$ $1,5\,a$ lang ist.

11.

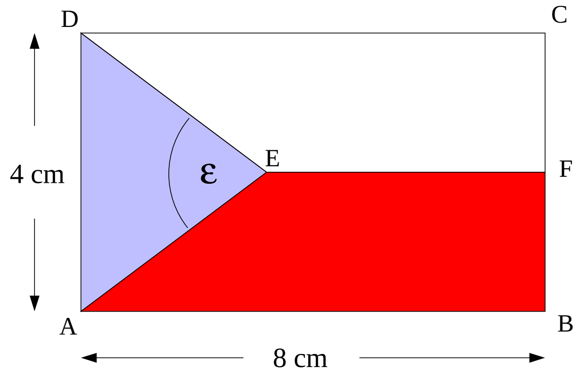


Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet. Alle drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Außerdem gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.
Zusätzlich ist noch ein Kreis eingezeichnet, dessen Mittelpunkt M der Mittelpunkt des Rechtecks $ABCD$ ist.

(a) Begründe: Es muss $\overline{AD} = 4\,\text{cm}$ gelten. Zeichne dann die obige Figur.

(b) Berechne jeweils den Anteil der drei Rechtecke im Inneren an der Kreisfläche in Prozent. Runde auf zwei Stellen nach dem Komma.

12. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = 4\,\text{cm}$. Zusätzlich ist noch das Winkelmaß ε eingezeichnet.
Hinweis: Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichnen Sie die Figur für $\varepsilon = 68°$.

(b) Welche Werte kann ε annehmen, wenn der Punkt E auf der Mittelparallelen des Rechtecks $ABCD$ wandert und wenn dabei das Dreieck AED nicht verschwinden soll?

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt A_D des Dreiecks AED in Abhängigkeit von ε.

$$[\text{ Ergebnis: } A_D = \left(\frac{4}{\tan\frac{\varepsilon}{2}}\right)\,\text{cm}^2\ ]$$

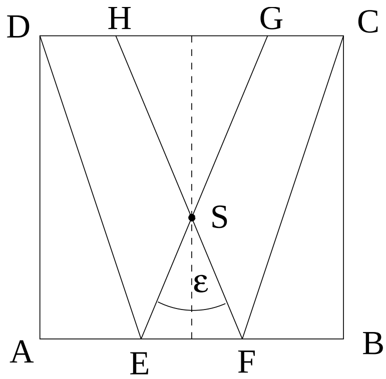
(d) Berechnen Sie ε so, dass die Inhalte aller drei Teilflächen im Inneren des Rechtecks $ABCD$ gleich groß sind. Verwenden Sie dabei das Ergebnis der Aufgabe (e) noch nicht.

(e) Berechnen Sie den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABFE$ in Abhängigkeit von ε.

$$[\text{ Ergebnis: } A_T = \left(16 - \frac{4}{\tan\frac{\varepsilon}{2}}\right)\ \mathrm{cm}^2\ ]$$

(f) Bestätigen Sie nun das Ergebnis der Aufgabe (d) mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgaben (c) und (e).

13.



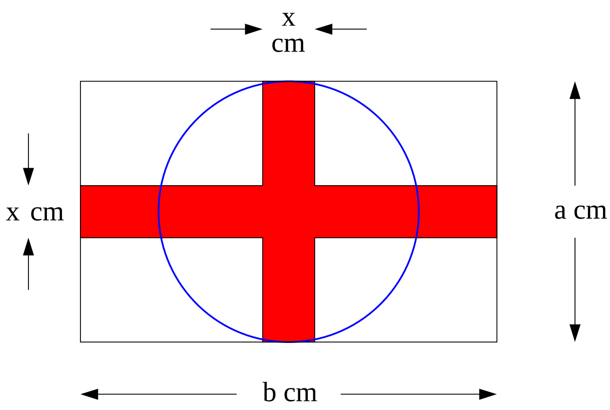
In der obigen Figur ist $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm. Es gilt: $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ und $\sphericalangle ESF = \varepsilon$.
Die Punkte G und H sind auf $[CD]$ beweglich und es gilt $\overline{DH} = \overline{GC} = x\,\mathrm{cm}$.
Hinweis: Gegebenenfalls sind Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a)
- Zeichne die Figur für $x = 1,2$.
- Berechne das zugehörige Winkelmaß ε.
  Hinweis: Zeichne vom Punkt G aus eine Hilfsline so ein, dass du die Aufgabe mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken lösen kannst.

(b) Berechne x so, dass das Dreieck EFS gleichseitig wird.

(c) Untersuche elementargeometrisch (d.h. ohne die Verwendung trigonometrischer Funktionen), ob es unter den Dreiecken EFS ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck gibt.

14. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England. Zusätzlich wurde noch der Kreis eingezeichnet, dessen Mittelpunkt im „Flaggenmittelpunkt“ liegt.

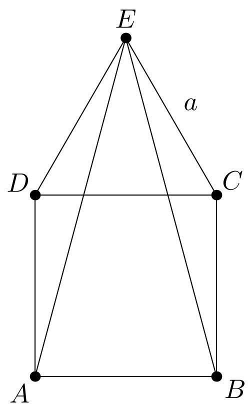


Hinweis: Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne die Figur für $a = 8$, $b = 12$ und $x = 2$.

(b) Wie viel Prozent der Kreuzfläche liegen außerhalb der Kreislinie?

15. An das Quadrat $ABCD$ ist das gleichseitige Dreieck DCE mit der Seitenlänge a angefügt worden.



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Zeige elementargeometrisch, also ohne Verwendung von Winkelfunktionen, dass $\sphericalangle AEB = 30°$ gilt.

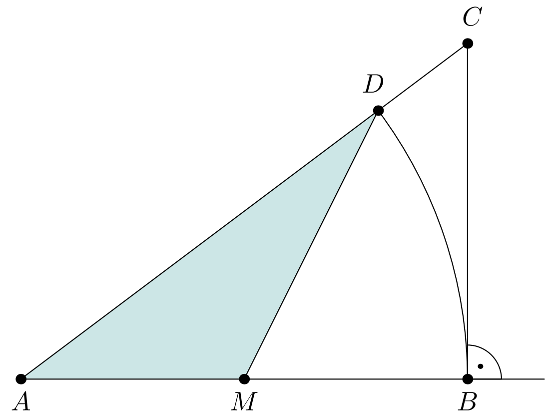
(c) Begründe anhand der Zeichnung, dass $\tan 75° = 2 + \sqrt{3}$ gilt.

(d) Bestätige das Ergebnis der Aufgabe (c) mit Hilfe des folgenden Additionstheorems für die Tangens-Funktion, das in der Formelsammlung steht:

$$\tan(\psi + \zeta) = \frac{\tan \psi + \tan \zeta}{1 - \tan \psi \cdot \tan \zeta}$$

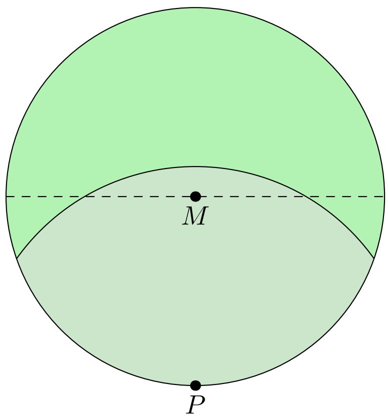
Tipp: Zerlege das Winkelmaß 75° so in zwei besondere Winkelmaße, dass sich jeweils deren Tangens-Werte aus der Formelsammlung entnehmen lassen.

16.



Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $\overline{AC} = 11,20\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6,72\,\text{cm}$.
Der Mittelpunkt der Kathete $[AB]$ ist M. Der Punkt A ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von B nach D.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks AMD.

17. **Ziegen gehen sich aus dem Weg**

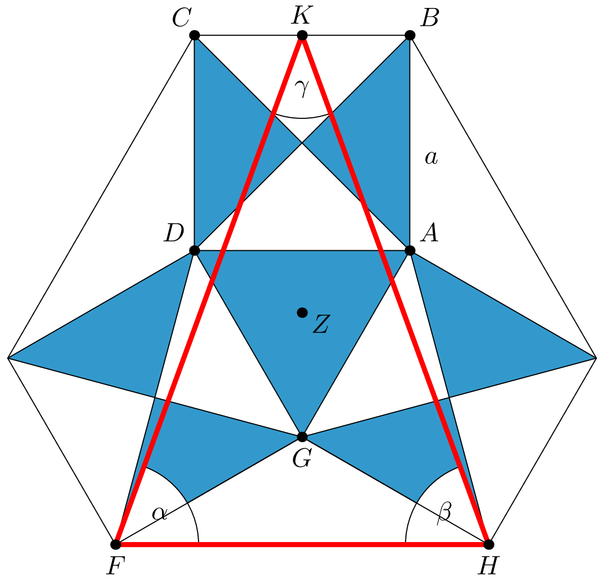


Auf einer kreisförmigen Weide sollen die Ziege „Elsa“ und gleichzeitig ihr angriffslustiger Ziegenbock „Lohengrin“ grasen. Damit er dabei Elsa in Ruhe lässt, wird Lohengrin mit einer Leine an einen Pfahl P, der am Rande der Weide eingeschlagen ist, so angebunden, dass den beiden Tieren gleichgroße Flächen zum Abweiden zur Verfügung stehen.

(a) Zeichne die Figur für $r = 4\,\text{m}$ in einem geeigneten Maßstab.

(b) Wie lang ist die Leine? **Tipp:** Zerlege die Fläche, die „Lohengrin“ beansprucht, in geeignete Teilflächen.

18.

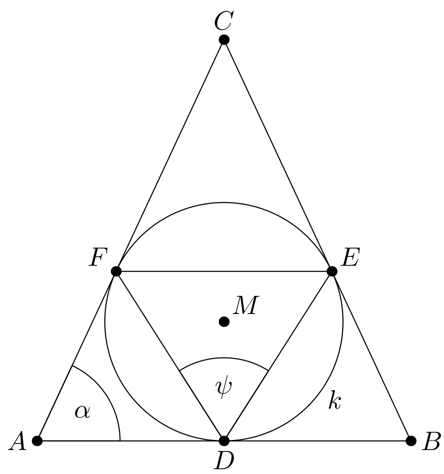


Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Im Zentrum befindet sich das gleichseitige Dreieck ADG mit dem Mittelpunkt Z. Auf den Seiten dieses Dreiecks wurden drei Quadrate errrichtet. Es gilt: $\overline{AB} = a$. Zusätzlich wurde noch das Dreieck FHK eingezeichnet.

(a) Zeichne die Figur für $a = 3\,\text{cm}$.

(b) Berechne α, β und γ.

19.



Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit der Basis $[AB]$. Der Inkreis k mit dem Mittelpunkt M berührt die Dreiecksseiten in den Punkten D, E und F.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 9\,\text{cm}$ und $\alpha = 65°$.

(b)
- Zeichne das Viereck $ADMF$ ein.
- Zeige: $\psi = \alpha$.

(c)
- Zeige: Für das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke DEF und ABC gilt:
$$\frac{A_{\Delta DEF}}{A_{\Delta ABC}} = \cos\alpha(1 - \cos\alpha).$$
- Welche besondere Form hätten die Dreiecke ABC und DEF, wenn der Flächenanteil des Dreiecks DEF an dem des Dreiecks ABC maximal sein soll?

20. Ein Viereck $ABCD$ ist durch folgende Bestimmungsstücke festgelegt:
$\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\beta = \sphericalangle CBA = 65°$,$\overline{BC} = 5\,\text{cm}$ und $\overline{DC} = \overline{AD} = 7\,\text{cm}$.

(a) Zeichne dieses Viereck.
$[AB]$ ziemlich weit rechts, Platzbedarf über $[AB]$: 8 cm

(b) Begründe: Es handelt sich nicht um einen achsensymmetrischen Drachen.

(c) Berechne die Länge der Diagonalen $[AC]$.

(d) Berechne die Länge der Diagonalen $[BD]$.

(e) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$.

21. Ein Dreieck ABC ist durch folgende Bestimmungsstücke festgelegt:
$\overline{AB} = 10\,\text{cm}$, $\alpha = \sphericalangle BAC = 50°$ und $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(a)
- Zeichne dieses Dreieck. Platzbedarf über $[AB]$: 8cm
- Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

(b) Man erhält neue Dreiecke AB_nC_n dadurch, dass die Seite $[AC]$ über C hinaus um x cm verlängert und gleichzeitig die Seite $[AB]$ von B aus um $2x$ cm verkürzt wird.
- Zeichne farbig für $x = 1,5$ das Dreieck AB_1C_1 ein.
- Berechne den Flächeninhalt des Dreeicks AB_1C_1.
- Berechne den Abstand d des Punktes C_1 von der Seite $[AB]$.
- Berechne die Länge der Strecke $[B_1C_1]$.

(c) Notiere alle Belegungen von x, für die es neue Dreiecke AB_nC_n gibt.

(d) Zeige: Für den Flächeninhalt A der neuen Dreiecke AB_nC_n gilt in Abhängigkeit von x (gerundet):
$$A(x) = (-0,77x^2 - 0,77x + 23,1)\,\text{cm}^2.$$

(e)
- Berechne diejenige Belegung von x, die den Extremwert des Terms $T(x) = -0,77x^2 - 0,77x + 23,1$ liefert.
- Begründe: Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es keines, dessen Flächeninhalt A so groß wie der Extremwert des zugehörigen Terms $T(x)$ ist.

(f) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das Dreieck AB_2C_2, das einen Flächeninhalt von $7,7\,\text{cm}^2$ aufweist. Berechne den zugehörigen x-Wert.

(g) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das gleichschenklige Dreieck AB_3C_3, mit der Basis $[B_3C_3]$. Berechne den zugehörigen x-Wert.

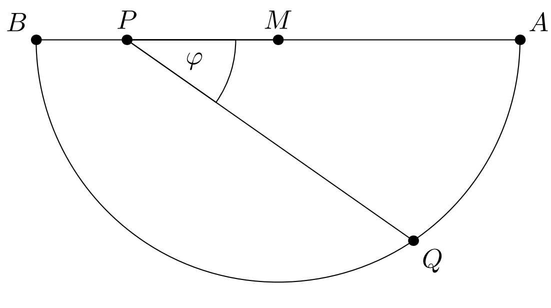
(h) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das rechtwinklige Dreieck AB_4C_4 mit der Hypotenuse $[AC_4]$.
- Berechne den zugehörigen x-Wert.

  [Ergebnis: $x \approx 2,32$]
- Zeichne dieses Dreieck ein.

(i)
- Zeige: Für die Längen der Strecken $[B_nC_n]$ gilt in Abhängigkeit von x:
$$\overline{B_nC_n}(x) = \sqrt{7,56x^2 - 25,44x + 59,2}\,\text{cm}^2 \text{ (gerundet).}$$
- Bestätige mit diesem Ergebnis das Ergebnis der Aufgabe (b) 4. Punkt.

(j) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das Dreieck AB_5C_5, in dem der Winkel C_5B_5A das Maß $62°$ hat. Berechne den zugehörigen X-Wert.

22.

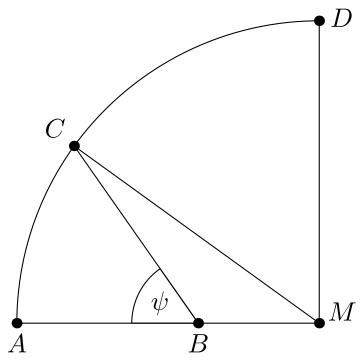


Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M. Weiter gilt:
$\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{PM} = 2,5\,\text{cm}$ und $\varphi = 35°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[AP]$ und $[PQ]$, sowie von dem Kreisbogen von Q nach A begrenzt wird. Tipp: Zeichne eine geeignete Hilfslinie ein.

23.

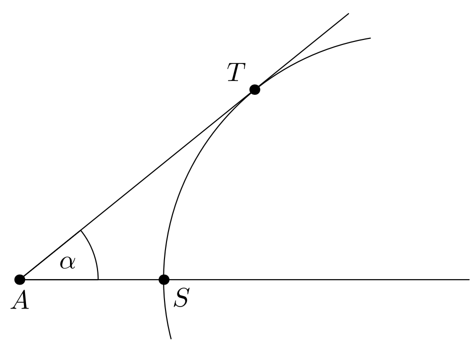


Der Mittelpunkt des Viertelkreises ist M.
Weiter gilt: $\overline{AM} = 5\,\text{cm}$, $\overline{AB} = 3\,\text{cm}$ und $\psi = 55°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[AB]$ und $[BC]$ sowie von dem Kreisbogen von C nach A begrenzt wird.
Tipp: Zeichne eine geeignete Hilfslinie ein.

24.



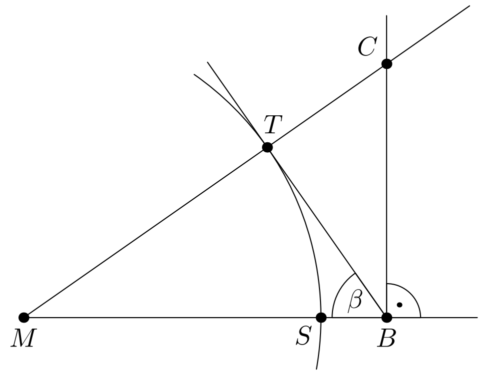
Der Kreisbogen mit dem zunächst nicht sichtbaren Mittelpunkt $M \in [AS$ berührt den einen Schenkel von α im Punkt T und schneidet den anderen Schenkel von α im Punkt S.
Weiter gilt: $\overline{AT} = 5\,\text{cm}$ und $\alpha = 39°$.

(a) Zeichne die Figur ohne den Punkt S und den Kreisbogen.

(b) Konstruiere den Mittelpunkt M des Kreisbogens. Zeichne den Kreisbogen und den Punkt S ein.

(c) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[AT]$ und $[AS]$ sowie von dem Kreisbogen von T nach S begrenzt wird.

25.

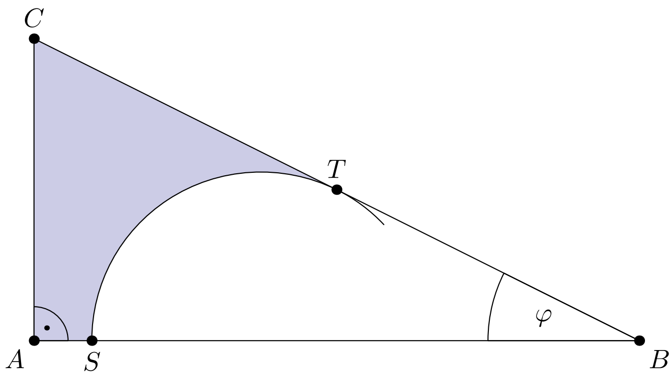


Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist M. Weiter gilt: $\overline{MB} = 6\,\text{cm}$ und $\beta = 55°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[SB]$, $[BC]$ und $[CT]$ sowie von dem Kreisbogen von T nach S begrenzt wird.

26.



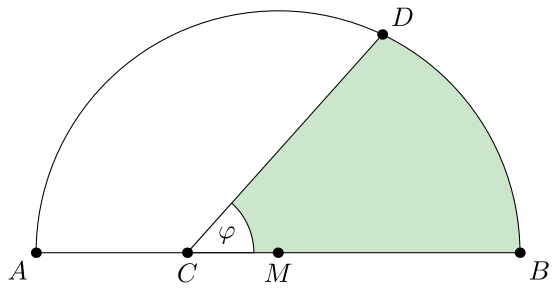
Der Kreisbogen berührt die Hypotenuse $[BC]$ im Hypotenusenmittelpunkt T. Der Mittelpunkt dieses Kreisbogens ist der noch verborgene Punkt M, der auf $[AB]$ liegt. Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 4\,\text{cm}$.

(a) Zeichne den Punkt M ein.

(b) Berechne den Inhalt des eingefärbten Flächenstückes.

[Teilergebnis: Radius des Kreisbogens $\approx 2,24\,\text{cm}$]

27.



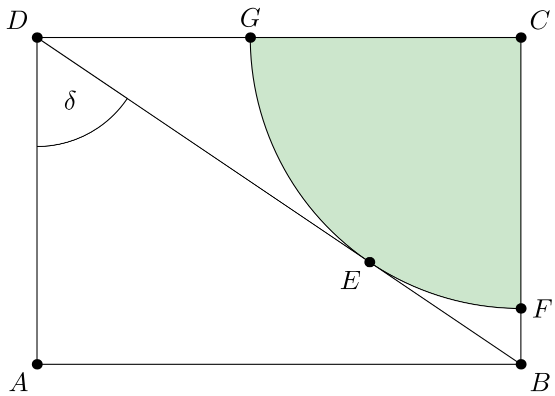
Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M.
Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{AC} = 2,5\,\text{cm}$ und $\varphi = 49°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Die eingefärbte Fläche ist kein Kreissektor. Zeichne dazu an einer geeigneten Stelle eine Hilfslinie ein.

(c) Berechne den Inhalt A der eingefärbten Fläche.

28.

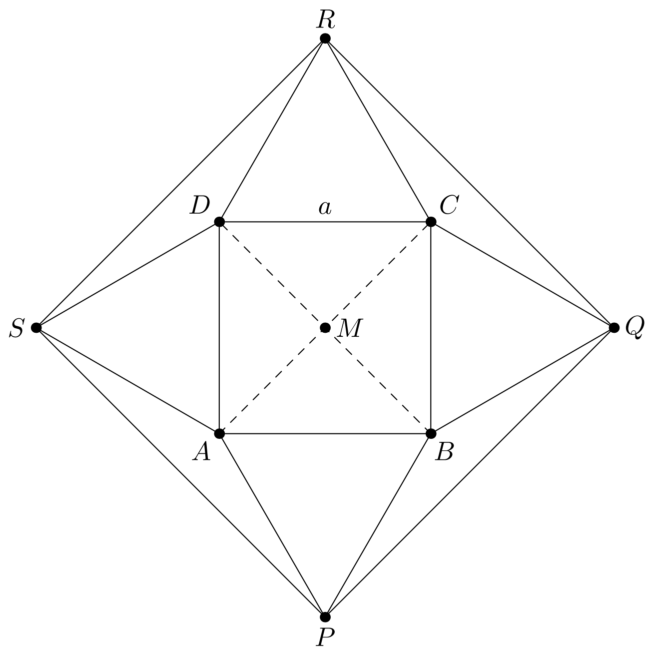


Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\delta = 56°$.
Der Mittelpunkt des Kreisbogens, der die Diagonale $[BD]$ im Punkt E berührt, ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Flächeninhalt des eingefärbten Kreissektors.
[Teilergebnis: Radius des Kreisbogens $\approx 3,64\,\text{cm}$]

29.



Das Viereck $PQRS$ ist dadurch entstanden, dass man über den vier Seiten des Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a jeweils gleichseitige Dreiecke errichtet hat.

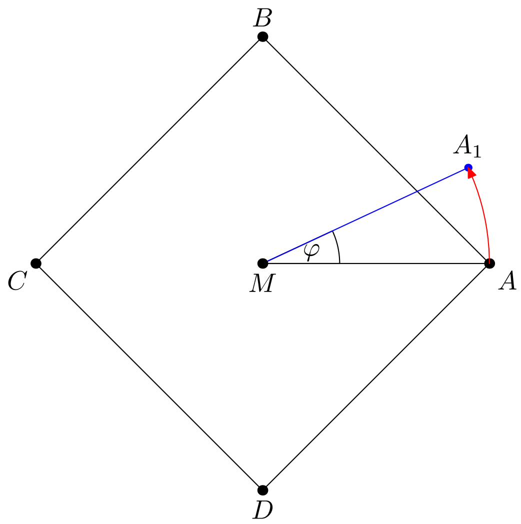
(a) Zeichne die Fgur für $a = 4\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat.
Hinweis: Zeige, dass z.B. $\sphericalangle APS = 15°$ gilt.

(c) Zeige auf verschiedene Weise: Für den Flächeninhalt A des Vierecks $PQRS$ gilt:
$$A_{PQRS} = a^2(2 + \sqrt{3})$$
.

(d) Berechne den prozentualen Flächenanteil des Quadrates $ABCD$ am Viereck $PQRS$.

30.



Gegeben ist das Quadrat $ABCD$ mit dem Mittelpunkt M und der Diagonalenlänge $d = 10\,\text{cm}$.
Dieses Quadrat wird nun um den Mittelpunkt M mit dem Winkel φ gedreht, wobei $\varphi \in]0°; 90°[_{\mathbb{R}}$ gilt.
Dadurch entstehen zum einen Quadrate $A_nB_nC_nD_n$ und zum anderen Achtecke $AA_nBB_nCC_nDD_n$.

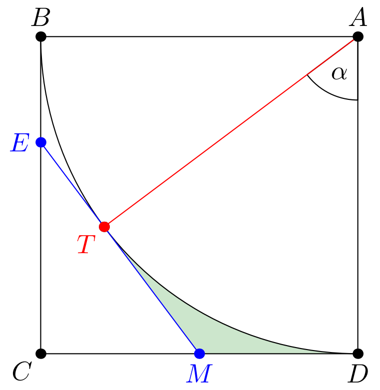
(a)
- Zeichne das Quadrat $ABCD$ und seinen Umkreis.
- Zeichne für $\varphi = 25°$ das Quadrat $A_1B_1C_1D_1$ farbig ein.
- Zeichne dazu das Achteck $AA_1BB_1CC_1DD_1$ in einer anderen Farbe.

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Achtecke $AA_nBB_nCC_nDD_n$ gilt in Anbhängigkeit von φ:

$$A(\varphi) = 50 \cdot (\sin\varphi + \cos\varphi)\,\text{cm}^2$$

(c)
- Begründe rechnerisch: Es gilt ebenfalls
$$A(\varphi) = \frac{50}{\cos 45°}(\sin\varphi \sin 45° + \sin 45° \cos\varphi)\,\text{cm}^2$$
- Vereinfache den in der obigen Zeile dargestellten Term für $A(\varphi)$ so weit wie möglich. Der Nenner vor der Klammer soll dabei rational werden.
- Unter allen Achtecken $AA_nBB_nCC_nDD_n$ gibt es das Achteck $AA_2BB_2CC_2DD_2$, dessen Flächeninhalt maximal wird.
Berechne dieses Maximum und die zugehörige Belegung von φ.
- Berechne den Umfang u des flächengrößten Achtecks ohne zu runden.
Zeige: $u = 40 \cdot \sqrt{\ldots}\,\text{cm}$

31.



Dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 6\,\text{cm}$ ist ein Viertelkreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius a einbeschreiben worden. Der Mittelpunkt der Seite $[CD]$ ist M .
Weiter gilt: $\overline{BE} = 2\,\text{cm}$.
Hinweis: Alle Rechenergebnisse sind auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne das Quadrat $ABCD$, den Viertelkreis und die Strecke $[EM]$.

(b)
- Zeige durch Rechnung: $\overline{EM} = 5\,\text{cm}$.
- Begründe: Die Strecke $[ME]$ berührt den Kreisbogen in einem Punkt T .
  Tipp: Wenn der Punkt T Berührpunkt sein soll, dann müssen gleichzeitig die beiden Vierecke $MDAT$ und $BETA$ besondere Vierecke sein.
- Zeichne die Strecke $[AT]$ ein.

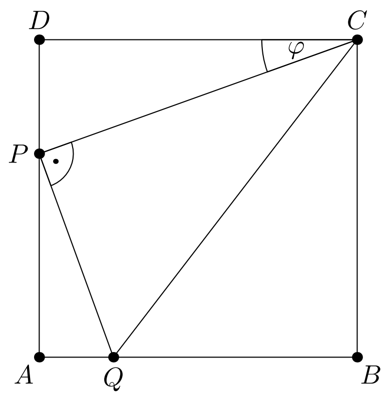
(c) Berechne das Maß α des Winkels TAD.

[Teilergebnis: $\dfrac{\alpha}{2} \approx 26,57°$]

- Zeichne den Diagonalenschnittpunkt F des Vierecks $MDAT$ ein .
- Berechne den Inhalt der in der Eingangsfigur getönten Fläche.

[Teilergebnis: $\overline{FD} \approx 2,68\,\text{cm}$]

32.



Dem Quadrat $ABCD$ ist das rechtwinklige Dreieck QCP einbeschrieben worden. Dabei gilt: $\sphericalangle\, DCP = \varphi$.
Hinweis: Gegebenenfalls sind alle Ergebnissse auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne das Quadrat für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und für $\varphi = 20°$ das Dreieck QCP .

(b) Begründe: Die Dreiecke AQP und PCD sind zueinander ähnlich.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks QCP .

4. Abbildungen im Koordinatensystem

1. Gegeben sind die Funktionen $f_1 : y = -0,5 \cdot log_3(x+2) - 1$ und $f_2 : y = 0,5 \cdot log_3(x-1) - 1$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

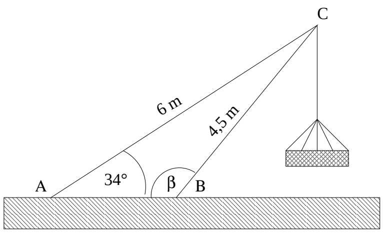
   (a) Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f_2 an.

   (b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph der Funktion f_1 durch orthogonale Affinität an der x-Achse mit $k = -1$ und anschließender Verschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet werden kann.

   (c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen von f_1 und f_2.

5. Zusammenfassende Aufgaben

1. Auf einem Kinderspielplatz ist an der Spitze eines Stahlgestells ABC ein Autoreifen zum Schaukeln aufgehängt. (Siehe Skizze)

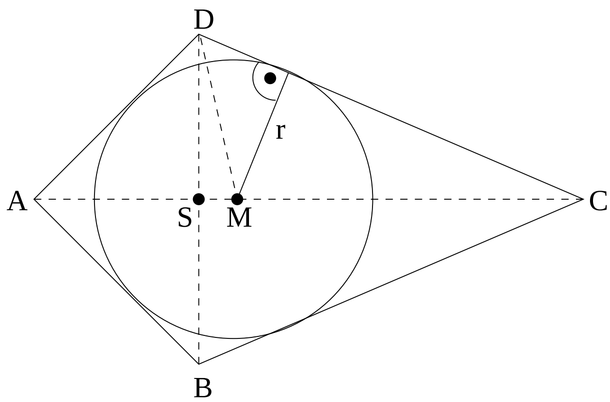


   (a) Berechnen Sie das Maß des Winkels β.

   (b) Wie hoch befindet sich die Spitze C über dem Erdboden?

   (c) Zur Verstärkung der Konstruktion soll von B aus eine Stütze s senkrecht zur Strebe $[AC]$ eingebaut werden. Berechnen Sie die Länge dieser Stütze s.

2. Aus einem Blechstück in Form eines symmetrischen Drachenvierecks soll ein möglichst großer Kreis ausgestanzt werden. In der Zeichnung gilt: $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$, $\overline{BD} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{AS} = 3\,\text{cm}$.

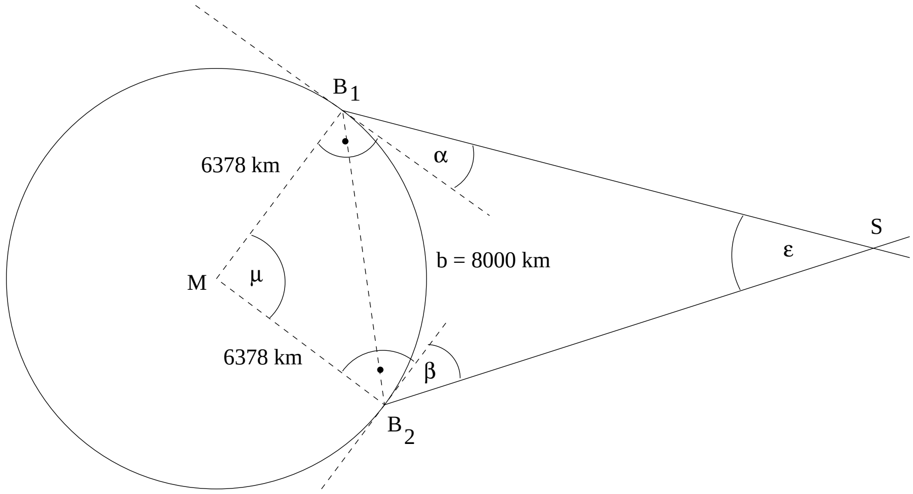


   (a) Berechnen Sie die Maße der Innenwinkel des Drachenvierecks und seine Seitenlängen. [Teilergebnis: $\beta = 111,80°$]

   (b) Berechnen Sie den Radius des ausgestanzten Kreises. [Ergebnis: $r = 2,53\,\text{cm}$]

   (c) Wie viel Prozent der Vielecksfläche $ABCD$ beträgt die Kreisfläche?

3. Ein Satellit S wird von der Bodenstation B_1 mit dem Winkel $\alpha = 30\frac{1}{3}^\circ$, von der Bodenstation B_2 mit dem Winkel $\beta = 40^\circ\,15'$ angepeilt, als der Satellit sich gerade senkrecht über der Verbindungslinie B_1B_2 befindet. Beide Bodenstationen liegen an der Küste und befinden sich in gleicher Höhe über dem Meeresspiegel. Der Erdradius wird mit 6378 km gerechnet und die Bogenlänge b über der Strecke $[B_2B_1]$ beträgt 8000 km.



Hinweis: Die Ergebnisse sind jeweils auf 3 Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $[B_1B_2]$. Ergebnis: $\overline{B_1B_2} = 7485{,}806\,\text{km}$

(b) Berechnen Sie das Maß ϵ des Winkels B_1SB_2. Ergebnis: $\epsilon = 37{,}550^\circ$

(c) Wie weit ist der Satellit S von der Bodenstation B_2 entfernt?

(d) In welcher Höhe über dem Meeresspiegel befindet sich der Satellit S?

4. Ein halbkugelförmiges Glasgefäß mit einer Wandstärke von 5 mm hat ein Fassungsvermögen von 10 l.
Berechne den Außendurchmesser des Gefäßes in mm.

Teil II.

Wahlpflichtfächergruppe II/III

6. Quadratische Funktionen

1. (a) Gegeben sind die Parabel $p_1 : y = -0,25x^2 - x + 5$ und die Gerade $g : y = -0,5x + 3$ auf $G = R \times R$.
   Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt.

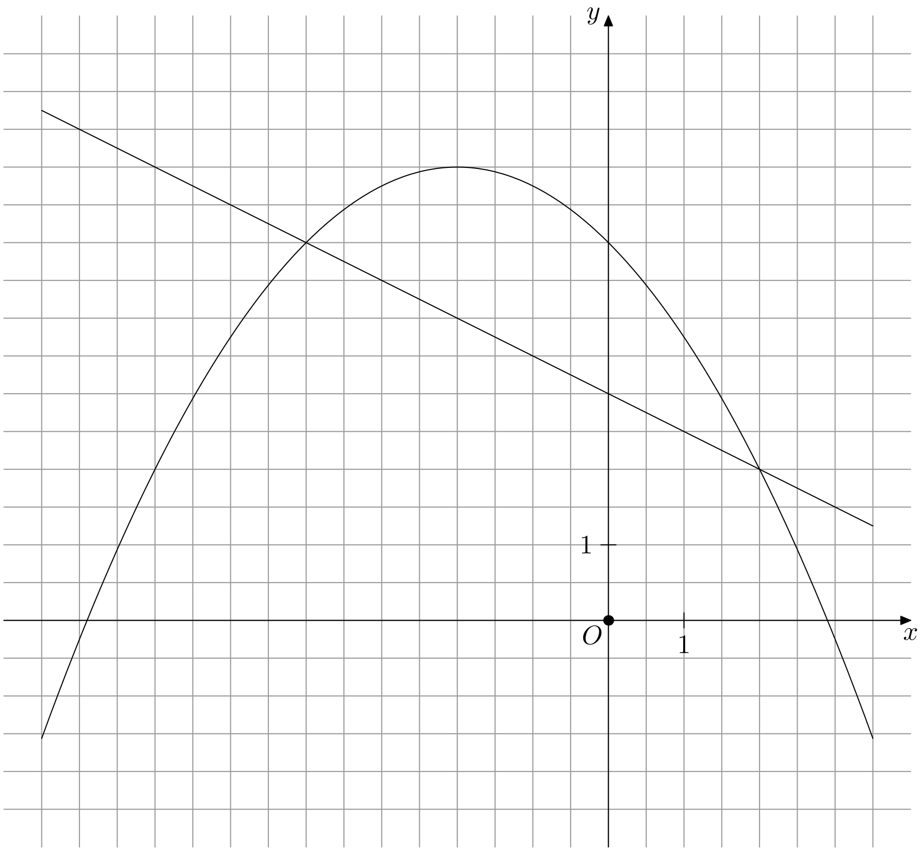
   (b) Die Gerade g schneidet die Parabel p_1 in den Punkten A und B, wobei der Schnittpunkt B nicht im II. Quadranten liegt.
   Zeichnen Sie die Schnittpunkte ein und berechnen Sie deren Koordinaten.

   (c) Es sind jetzt zusätzlich zwei Parabeln gegeben:
   $p_2 : y = 0,25x^2 - 2x + 5$ und $p_3 : y = -0,25x^2 + 2x$.
   Begründen Sie: Die Parabel p_1 lässt sich nur auf eine der beiden Parabeln p_2 oder p_3 verschieben. Berechnen Sie den zugehörigen Vektor.

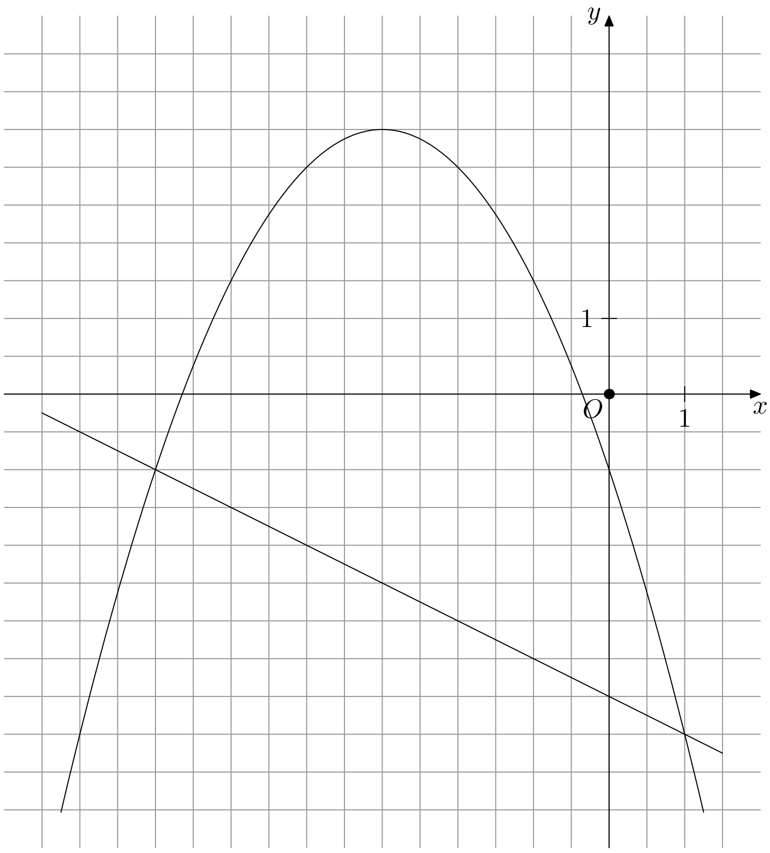
   (d) Geben Sie die möglichst kurze Summenform der Gleichung einer weiteren Parabel p_4 an, die zur Parabel p_2 kongruent ist und die nur durch drei Quadranten des Koordinatensystems verläuft.

   (e) Auf der Parabel p_1 wandern Punkte C_n und auf der Geraden g wandern Punkte D_n. Der Abszissenwert der Punkte D_n ist stets um 1,5 größer als der Abszissenwert x der Punkte C_n.

   - Zeichnen Sie für $x = -3$ die Strecke $[C_1D_1]$ ein.
   - Es gibt unter den Strecken $[C_nD_n]$ zwei Strecken $[C_2D_2]$ und $[C_3D_3]$, die ganz auf der Geraden g liegen. Zeichnen Sie diese beiden Strecken ein und ermitteln Sie die zugehörigen x-Werte.



2. Gegeben sind die Parabel p durch die Gleichung $y = -0,5x^2 - 3x - 1$ und die Gerade g durch die Gleichung $y = -0,5x - 4$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Der Punkt B $(-4| -2)$ liegt auf der Geraden g.
   Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



(a) Auf der Parabel p wandern sowohl Punkte A_n mit dem Abszissenwert x als auch Punkte C_n, wobei der Abszissenwert der Punkte C_n stets um 3 größer als der Abszissenwert x der Punkte A_n ist.
Dabei werden laufend Dreiecke A_nBC_n erzeugt. Im Dreieck A_1BC_1 besitzt der Abszissenwert des Punktes C_1 den Wert -2. Zeichne dieses Dreieck ein.

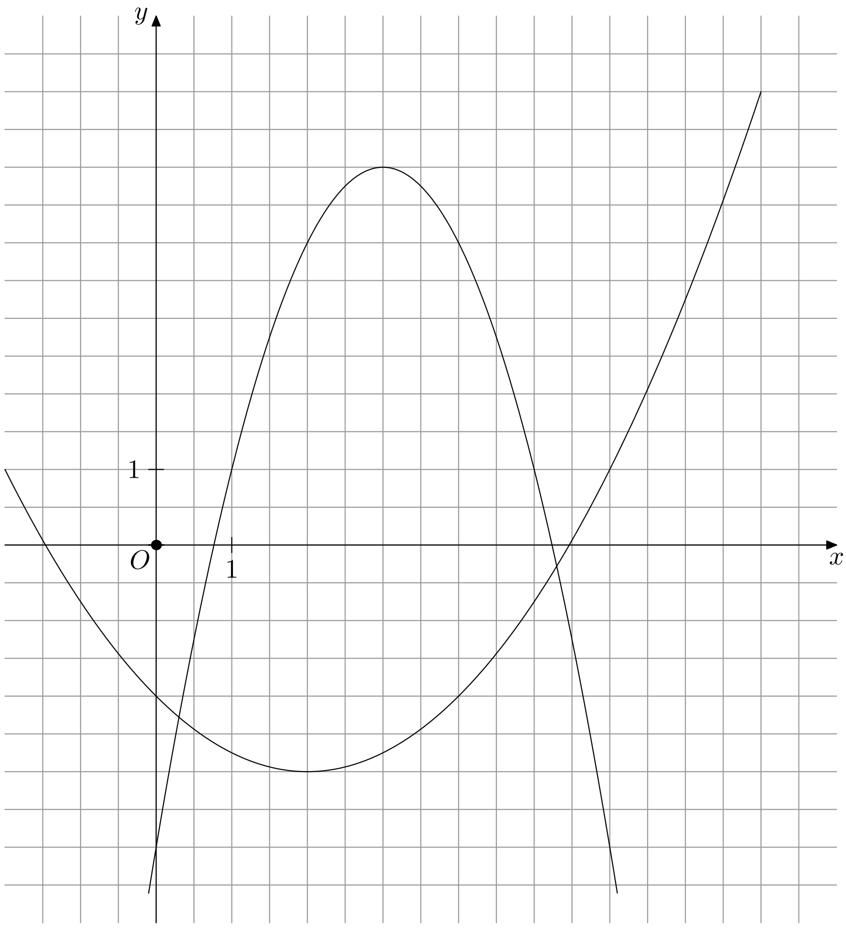
(b) Berechne die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit vom x-Wert der Punkte A_n.
[Ergebnis: $C_n(x+3|-0,5x^2-6x-14,5)$]

(c) Für den Flächeninhalt A der Dreiecke A_nBC_n ergibt sich in Abhängigkeit von x:
$$A(x) = (0,75x^2 + 8,25x + 28,5)\,\mathrm{cm}^2$$
Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es die beiden Dreiecke A_2BC_2 und A_3BC_3, deren Punkte C_2 und C_3 auf der Geraden g liegen.
Berechne den Flächeninhalt dieser beiden Dreiecke.

(d) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es das Dreieck A_4BC_4, dessen Seite $[A_4C_4]$ parallel zur x-Achse liegt.
Berechne die zugehörige Belegung von x.

(e) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es das Dreieck A_5BC_5, dessen Seite $[A_5C_5]$ parallel zur Geraden g liegt.
Berechne das Maß γ des Winkels A_5C_5B dieses Dreiecks.
[Teilergebnis: $x = -4$]

3. Die nach unten geöffnete Normalparabel p_1 besitzt den Scheitel $S_1(3 \mid 5)$.
Die Gleichung einer weiteren Parabel p_2 hat die Form $y = ax^2 - x + c$ und sie verläuft durch die Punkte $P(-0,4 \mid -1,56)$ und $Q(0,8 \mid -2,64)$.
Im Koordinatensystem sind Ausschnitte der beiden Parabeln dargestellt:



(a) Zeige: Die Parabel p_1 hat die Gleichung $y = -x^2 + 6x - 4$.
Zeige: Die Parabel p_2 hat die Gleichung $y = 0,25x^2 - x - 2$.

(b) Auf der Parabel p_1 wandern Punkte $D_n(x \mid -x^2 + 6x - 4)$ und auf der Parabel p_2 wandern Punkte A_n mit jeweils dem gleichen Abszissenwert wie die Punkte D_n. Dadurch werden achsensymmetrische Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ mit den folgenden Eigenschaften erzeugt:

- $[A_nD_n] \parallel [B_nC_n]$
- die Strecken $[B_nC_n]$ liegen stets rechts von den Strecken $[A_nD_n]$
- Die Seiten $[B_nC_n]$ sind jeweils 4 cm lang.
- Der Abstand der beiden jeweils parallelen Trapezseiten beträgt stets 4 cm.

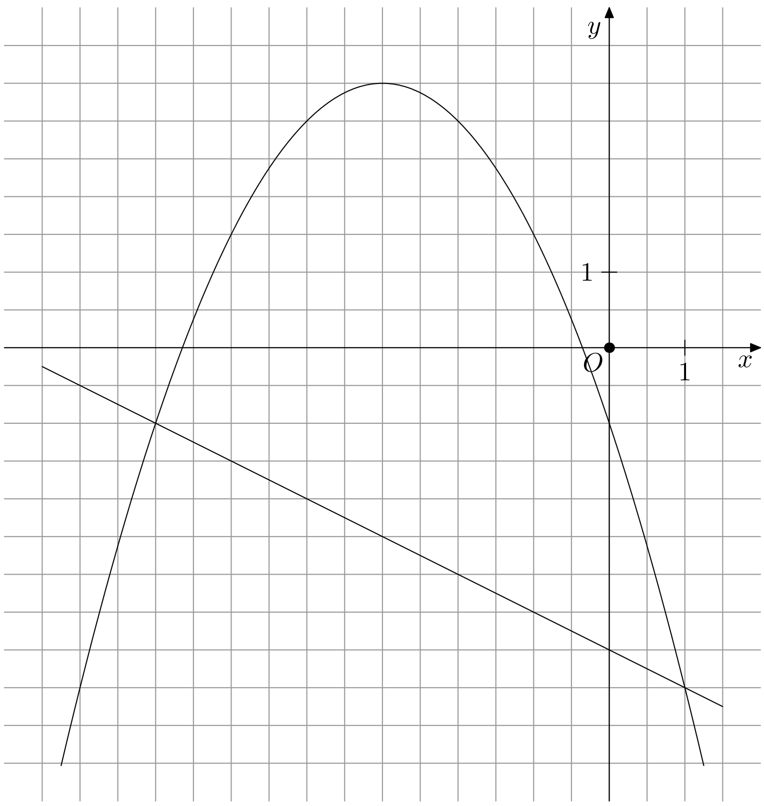
Zeichne für $x = 4$ das Trapez $A_1B_1C_1D_1$ ein.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ gilt in Abhängigkeit von x: $A(x) = (-2,5x^2 + 14x + 4)\,\text{cm}^2$.

(d) Untersuche, ob es unter allen Trapezen $A_nB_nC_nD_n$ eines gibt, das einen Flächeninhalt von $24\,\text{cm}^2$ aufweist.

(e) Wie viele Quadrate gibt es als Sonderfall unter allen Trapezen $A_nB_nC_nD_n$? Begründe deine Antwort.

4. Gegeben sind die Parabel $p : y = -0,5x^2 - 3x - 1$ und die Gerade $g : y = -0,5x - 4$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



Auf der Parabel p wandern sowohl Punkte $A_n(x \mid -0,5x^2-3x-1)$ als auch Punkte C_n. Dabei ist der Abszissenwert der Punkte C_n stets um 3 größer als der Abszissenwert x der Punkte A_n.

(a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der Parabel p mit der Geraden g.

(b) Berechne die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit vom x-Wert der Punkte A_n.

[Ergebnis: $C_n(x+3 \mid -0,5x^2 - 6x - 14,5)$]

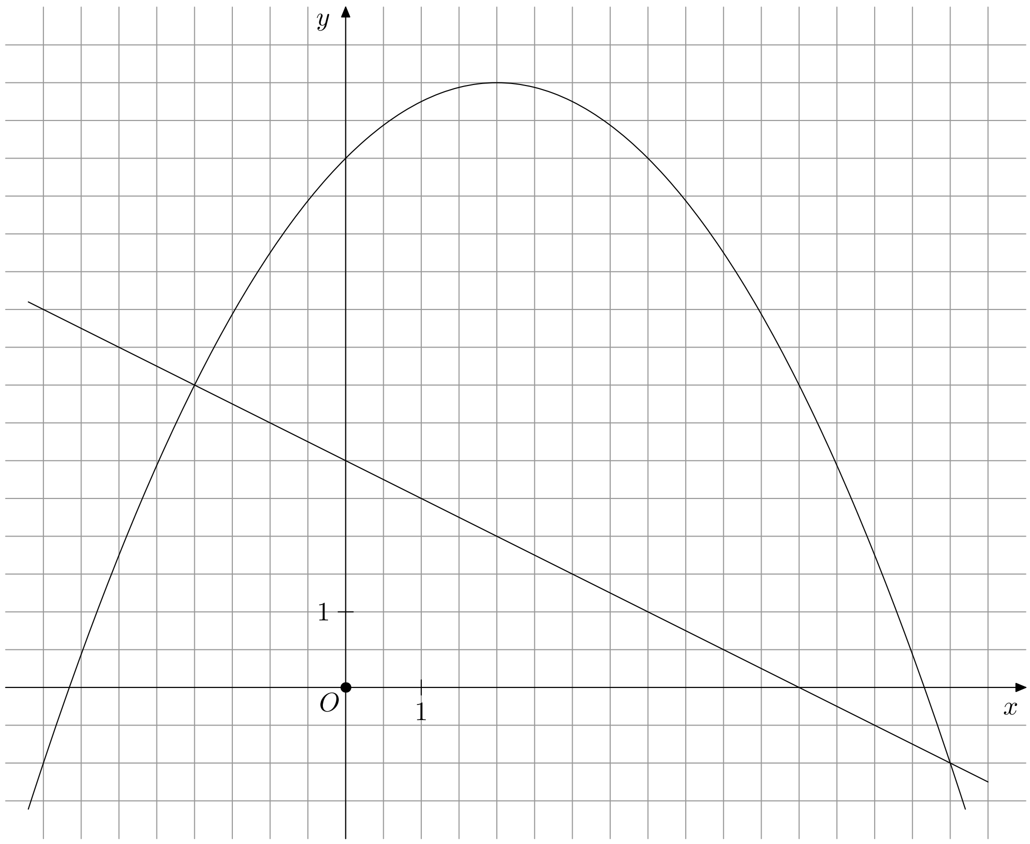
(c) Zusammen mit dem Punkt $B(-4|-2)$ werden zwischen Gerade und Parabel Dreiecke A_nBC_n erzeugt.
Zeichne für $A_1(-5|y_1)$ das Dreieck A_1BC_1 in obiges Koordinatensystem ein.

(d) Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke A_nBC_n in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A(x) = (0,75x^2 + 8,25x + 28,5)\,\text{cm}^2$]

(e) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es eines, das einen minimalen Flächeninhalt aufweist. Berechne dieses Minimum und die zugehörige Belegung von x.

(f) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es das Dreieck A_3BC_3, so dass $\sphericalangle A_3BP = \sphericalangle BA_3C_3$ gilt. Berechne den zugehörigen Abszissenwert x.

5. Gegeben sind die Parabel p und die Gerade g durch die Gleichungen:
$p: y = -0,25x^2 + x + 7$ und $g: y = -0,5x + 3$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



(a) Ermittle die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der Parabel p mit der Geraden g. Der Punkt P soll dabei nicht im IV. Quadranten liegen.

(b) Die Punkte $A_n(x \mid -0,25x^2 + x + 7)$ auf der Parabel p und die Punkte B_n auf der Geraden g besitzen jeweils den gleichen Abszissenwert.
Die Punkte A_n und B_n sind Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken $A_nB_nC_n$

mit den Basen $[A_nB_n]$. Die Höhen auf diese Basen sind stets 4 cm lang. Die Punkte C_n sollen stets rechts von den Basen $[A_nB_n]$ liegen.
Zeichne für $x = -1$ das Dreieck $A_1B_1C_1$ ein.

(c) Zeichne für $C_2(7{,}5 \mid y_2)$ das Dreieck $A_2B_2C_2$ ein.
Berechne die Koordinaten des Punktes A_2.

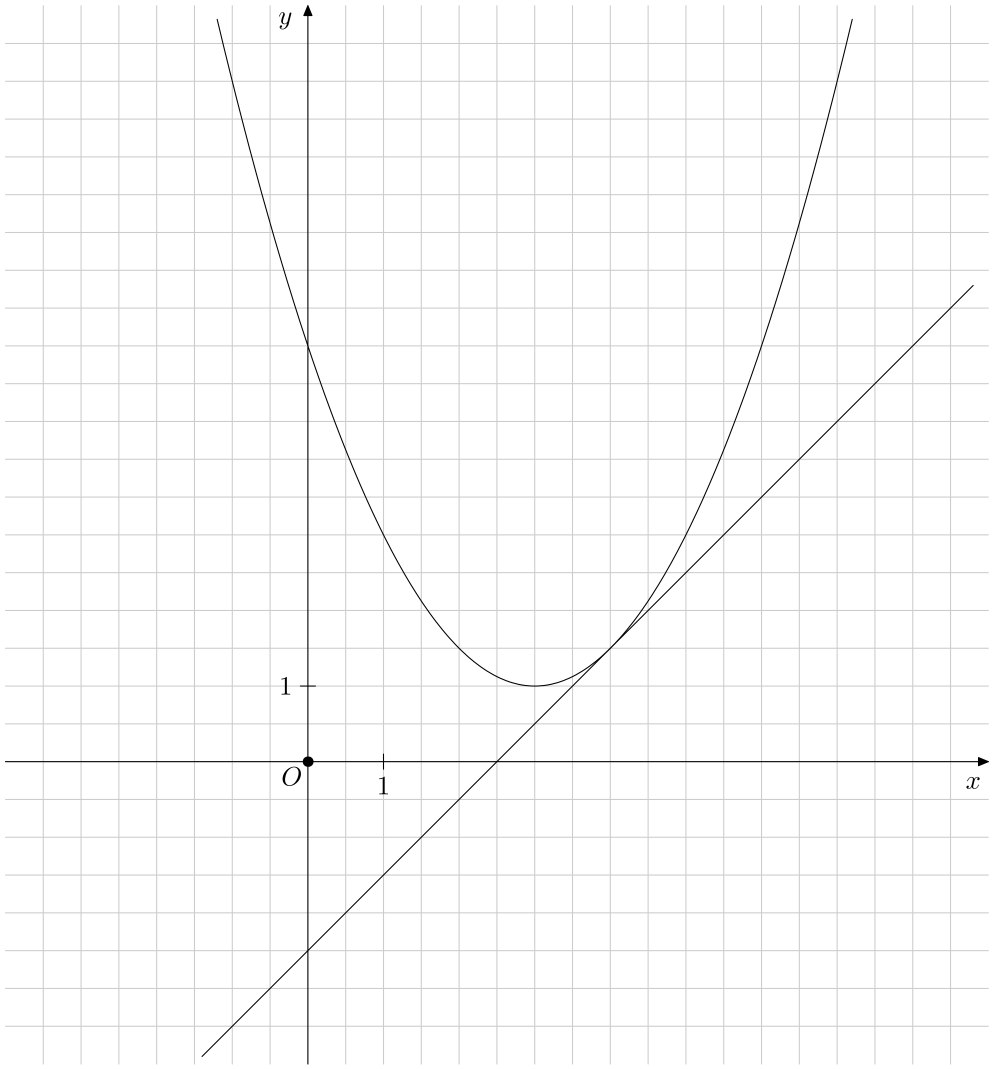
(d) Zeige durch Rechnung: Für den Flächeninhalt A dieser Dreiecke $A_nB_nC_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = (-0{,}5x^2 + 3x + 8)\,\text{cm}^2$$

(e) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es eines, das einen maximalen Flächeninhalt aufweist. Berechne dieses Maximum und die zugehörige Belegung von x.

(f) Gibt es unter allen Dreiecken A_nBC_n ein Dreeick $A_3B_3C_3$, dessen Eckpunkt C_3 auf der y-Achse liegt? Begründe deine Antwort.

6. Die Parabel p besitzt die Scheitelkoordinaten $S(3 \mid 1)$ und sie verläuft durch einen Punkt mit den Koordinaten $(5 \mid 3)$. Außerdem ist eine Gerade g durch die Gleichung $y = x - 2{,}5$ gegeben.
Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt.
Auf der Geraden g liegen Punkte $A_n(x \mid x-2{,}5)$ und auf der Parabel p liegen Punkte C_n, die jeweils denselben Abszissenwert wie die Punkte A_n besitzen.
Damit werden Rauten $A_nB_nC_nD_n$ erzeugt, deren Diagonalen $[B_nD_n]$ stets 4 cm lang sind.



(a) Zeige: Die Parabel p besitzt die Gleichung $y = 0,5x^2 - 3x + 5,5$.

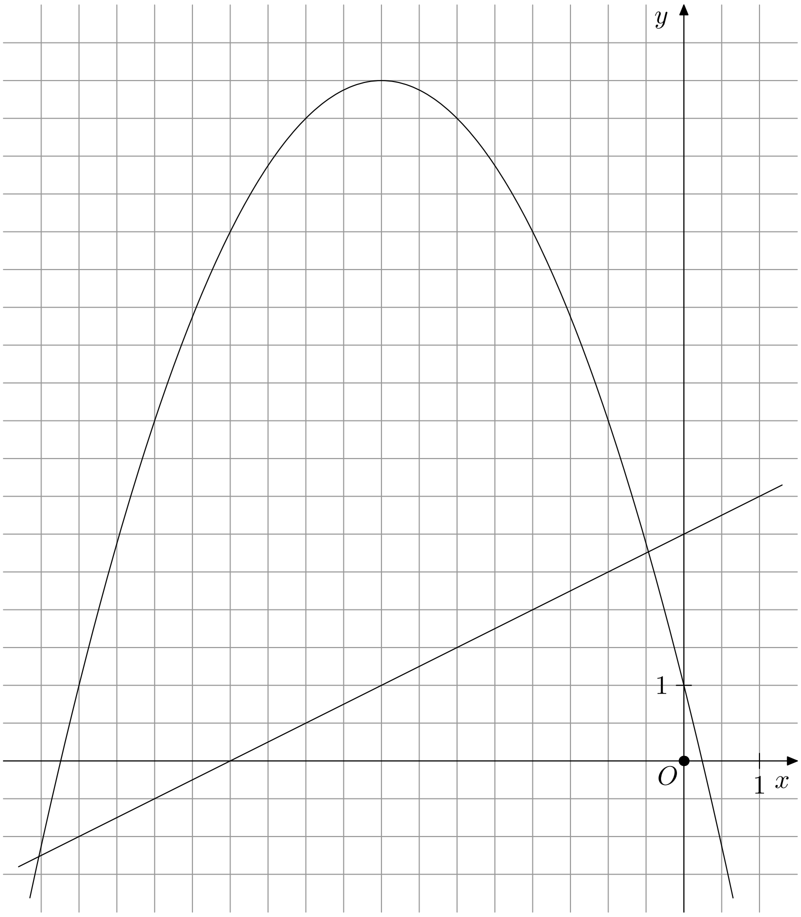
(b) Begründe rechnerisch: Die Gerade g ist eine Tangente an die Parabel p.

(c)
- Zeichne für $x = -1$ die Raute $A_1B_1C_1D_1$ ein.
- Zeichne für $D_2(4 \mid y_{D_2})$ die Raute $A_2B_2C_2D_2$ ein.

(d)
- Für die Diagonalenlängen $\overline{A_nC_n}$ gilt in Abhängigkeit von x:
  $\overline{A_nC_n}(x) = (0,5x^2 - 4x + 8)\,\text{cm}$.
  Ermittle damit alle Belegungen von x, für die es solche Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt.
- Für den Flächeninhalt A der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gilt in Abhängigkeit von x:
  $A(x) = (x^2 - 8x + 16)\,\text{cm}^2$.
  Bestätige damit das Ergebnis der vorherigen Aufgabe.
- Bestätige mit dem Ergebnis der Aufgabe (b) das Ergebnis der vorherigen Aufgabe.

(e) Unter allen Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt es auch Quadrate.
   - Jeweils ein Eckpunkt dieser Quadrate muss auf der Geraden g liegen. Warum?
   - Wie viele solcher Quadrate gibt es? Begründe deine Antwort.

7. Gegeben sind eine Parabel p und eine Gerade g durch die Gleichungen:
$P : y = -0,5x^2 - 4x + 1$ und $g : y = 0,5x + 3$.
Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



Auf der Parabel p liegen dort, wo die Parabel **oberhalb** der Geraden verläuft, Punkte $P_n(x \mid -0,5x^2 - 4x + 1)$.
Auf der Geraden g liegen Punkte Q_n jeweils mit dem gleichen Abszissenwert x wie die Punkte P_n. Zudem liegen auf der Geraden g Punkte R_n, deren Abszissenwert jeweils um 2 größer als der Abszissenwert der Punkte P_n bzw. Q_n ist .
Dadurch werden Dreiecke $P_nQ_nR_n$ erzeugt.

(a) Zeichne für $x = -4,5$ das Dreieck $P_1Q_1R_1$ ein.

(b) Zeige: Die Streckenlängen $\overline{P_nQ_n}$ lassen sich in Abhängigkeit von x wie folgt darstellen:

$$\overline{P_nQ_n}(x) = (-0,5x^2 - 4,5x - 2)\,\text{cm}$$

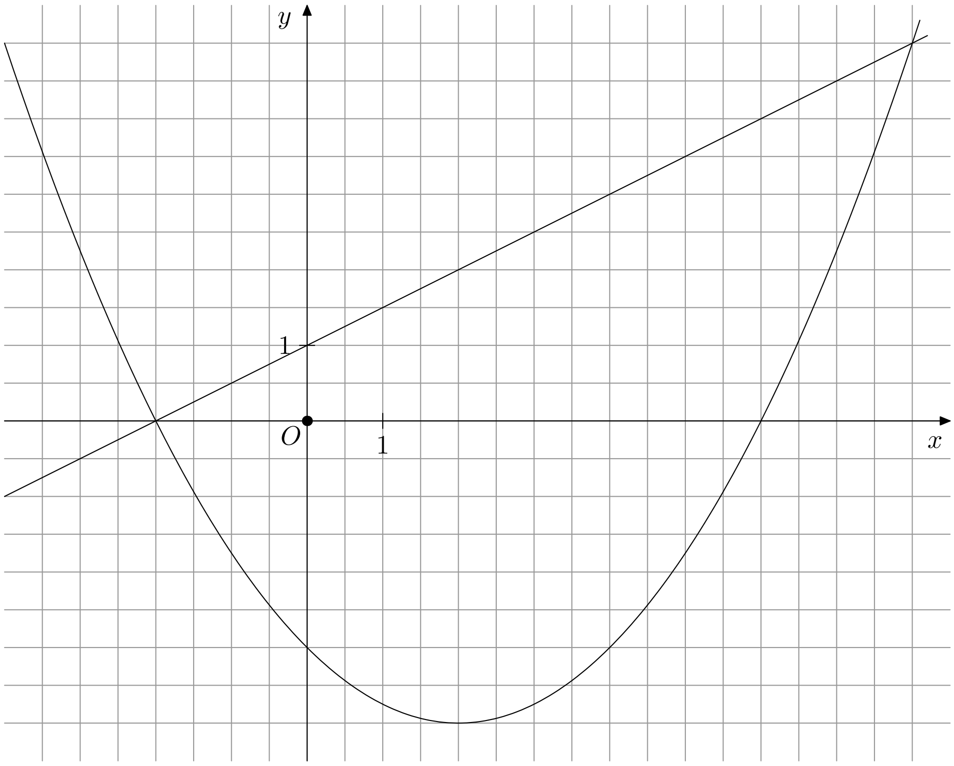
(c) Begründe: Die längste unter allen Streckenlängen $\overline{P_nQ_n}$ erzeugt gleichzeitig das flächengrößte unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$

(d) Untersuche rechnerisch, ob es unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$ gleichschenklige gibt, deren Basis jeweils eine der Strecken $[P_nQ_n]$ ist.

(e)
- Zeichne für $x = -7$ das Dreieck $P_2Q_2R_2$ ein.
  Weise rechnerisch nach, dass dieses Dreieck rechtwinklig ist.
- Berechne das Maß eines der spitzen Innenwinkel dieses Dreiecks.
- Es gibt ein weiteres Dreieck $P_3Q_3R_3$, das zum Dreieck $P_2Q_2R_2$ kongruent ist.
  Konstruiere den Eckpunkt P_3 dieses Dreiecks (die Konstruktionslinie muss deutlich sichtbar sein) und begründe deine Vorgehensweise.
  Zeichne dieses Dreieck $P_3Q_3R_3$ ein.

(f) Unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$ gibt es noch zwei rechtwinklige Dreiecke $P_4Q_4R_4$ und $P_5Q_5R_5$ mit den Hypotenusen $[Q_4R_4]$ bzw. $[Q_5R_5]$. Berechne die zugehörigen x-Werte.

8. Gegeben ist Parabel p mit der Gleichung $p : y = ax^2 - x - 3$, die durch den Punkt $P(-3 \mid 2,25)$ verläuft.
   Außerdem ist eine Gerade g durch die Gleichung $g : y = 0,5x + 1$ gegeben.
   Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



(a) • Berechne die Scheitelkoordinaten der Parabel p.
[Teilergebnis: $p : y = 0,25x^2 - x - 3$]

• Untersuche, ob die Gerade h mit der Gleichung $h : y = 0,5x - 5,26$ die Parabel p berührt.

(b) Auf der Parabel p liegen Punkte $B_n(x \mid 0,25x^2 - x - 3)$. Auf der Geraden g liegen Punkte $C_n(x \mid 0,5x+1)$ mit dem gleichen Abszissenwert x wie die Punkte B_n.
Für $x \in]-2; 8[_{\mathbb{R}}$ erzeugen die Punkte A_n zusammen mit den Punkten B_n und C_n rechtwinklige Dreiecke $A_nB_nC_n$ mit den Hypotenusen $[A_nC_n]$. Dabei sind die Katheten $[A_nB_n]$ stets 4 cm lang.
Zeichne für $x = -1$ und $x = 5$ die beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ ein.

(c) Berechne die Länge der Katheten $[B_nC_n]$ in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $\overline{B_nC_n}(x) = (-0,25x^2 + 1,5x + 4)\,\text{cm}$]

(d) Unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ gibt es eines mit maximalem Flächeninhalt. berechne dieses Maximum und die zugehörige Belegung von x.

(e) Unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ gibt es zwei Dreiecke $A_3B_3C_3$ und $A_4B_4C_4$, so dass der Winkel $A_3C_3B_3$ bzw. $A_4C_4B_4$ das Maß $45°$ besitzt. Berechne die zugehörigen Belegungen von x.

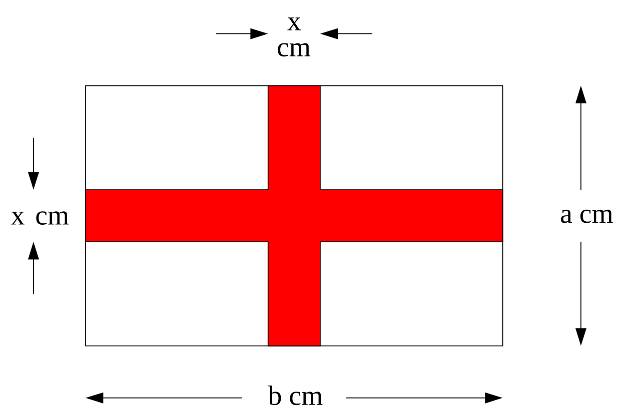
(f) Untersuche rechnerisch, ob es unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ eines gibt, deren Hypotenuse auf der Geraden g liegt.

9. Gegeben ist die Parabel p_0 durch die Gleichung $y = 0,5x^2 + 2x + 1000$.
   (a) Gib die Gleichung einer Parabel p_1 an, welche die gleichen Scheitelkoordinaten wie die Parabel p_0 besitzt, die aber nicht zur Parabel p_0 kongruent ist.
   (b) Gib die Gleichung einer Parabel p_2 an, die zur Parabel p_0 kongruent ist und deren Scheitel gleichzeitig auf der x-Achse liegt.
   (c) Es gibt beliebig viele Parabeln, welche die Parabel p_0 meiden und deren Scheitel im II. Quadranten liegen. Gib die Gleichung einer dieser Parabeln an und führe den Nachweis.
   (d) Es gibt beliebig viele Parabeln, welche mit der Parabel p_0 nur einen Punkt gemeinsam haben. Gib die Gleichung einer dieser Parabeln an und führe den Nachweis.

10. Gegeben ist eine Parabel durch die Gleichung:
$$y = -10x^2 - 19x + 2 \qquad .$$
Untersuche, ob die Parabel durch alle vier Quadranten verläuft.

7. Quadratische Funktionen und Gleichungen

1. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



   (a) Zeichne die Figur für $a = 11$, $b = 16$ und $x = 2$ im Maßstab 1:2.

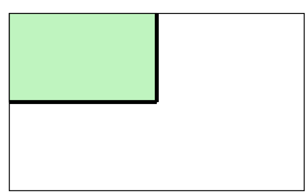
   (b) Zeige rechnerisch:

   - Für den Flächeninhalt A_w des weißen Anteils dieser Flagge gilt in Abhängigkeit von x:
   $$A_w(x) = (x^2 - 27x + 176)\,\mathrm{cm}^2$$
   - Für den Flächeninhalt A_k des Kreuzes in dieser Flagge gilt in Abhängigkeit von x:
   $$A_k(x) = (-x^2 + 27x)\,\mathrm{cm}^2$$

   (c) Berechne x so, dass die Fläche des Kreuzes 30% der Gesamtfläche ausmacht.

   (d) Berechne x so, dass die Inhalte von weißer Fläche und Kreuzfläche gleich sind.

2.



Familie Taerkot hat auf ihrem eingezäunten Grundstück einen $140\,\mathrm{m}^2$ großen Garten angelegt. Er wurde zusätzlich mit einem $25,5\,\mathrm{m}$ langen Maschendrahtzaun abgegrenzt.

(a) Berechne Länge und Breite.

(b) Hätte Familie Taerkot mit $25,5\,\mathrm{m}$ Maschendraht auf die in der Abbildung dargestellte Weise eine noch größere Gartenfläche abgrenzen können?

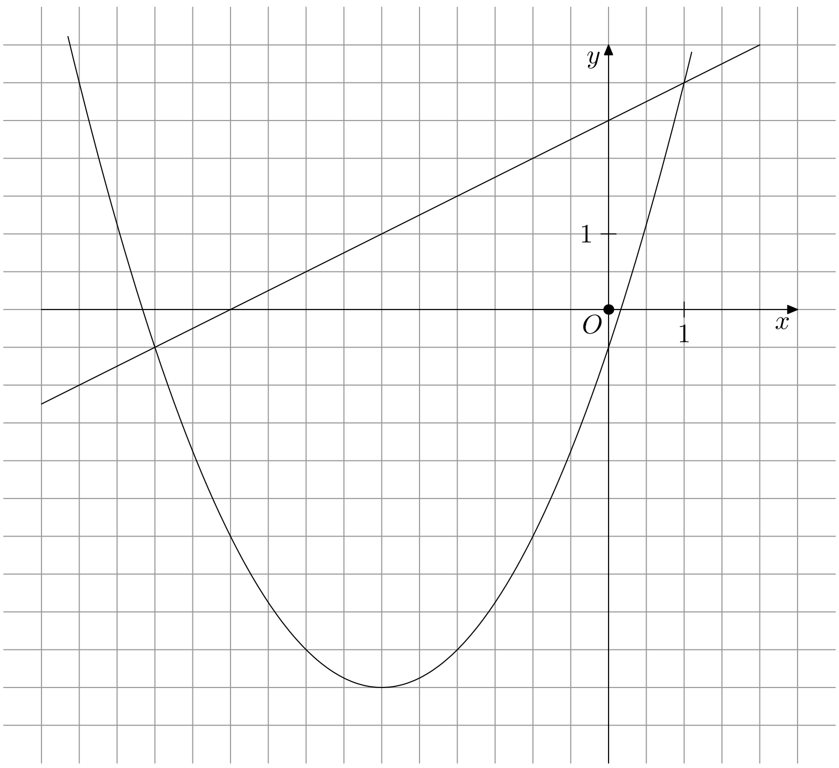
3. Ursula und Hans wollen die folgenden quadratischen Gleichungen lösen:

$$\begin{array}{ccccccccc} x^2 & + & 0,5x & - & 14 & = & 0 & (1) \\ x & + & 2x^2 & - & 28 & = & 0 & (2) \end{array}$$

(a) Hans bekommt für die Gleichung (1) die Lösungsmenge $\{-4;\ 3,6\}$ heraus. Überprüfe das.

(b) Danach schaut sich Ursula die Gleichung (2) genauer an. Sie meint schließlich: „Da brauchen wir die Lösungsformel gar nicht. Die beiden Gleichungen müssen dieselben Lösungen haben.“ Wie hat Ursula das erkannt?

4.



Für die Gleichung einer Parabel p gilt $a = 0,5$. Die Punkte $P(-4 \mid -4,5)$ und $Q(1 \mid 3)$ liegen auf dieser Parabel. Die Parabel p und die Gerade g mit der Gleichung $y = 0,5x + 2$ sind in Ausschnitten dargestellt.

(a) Zeige durch Rechnung: Die Parabel p hat die Gleichung $y = 0,5x^2 + 3x - 0,5$.

(b) Berechne die Scheitelkoordinaten der Parabel.

(c) Es werden nun rechtwinklige Dreiecke $A_nB_nC_n$ mit den folgenden Eigenschaften erzeugt:

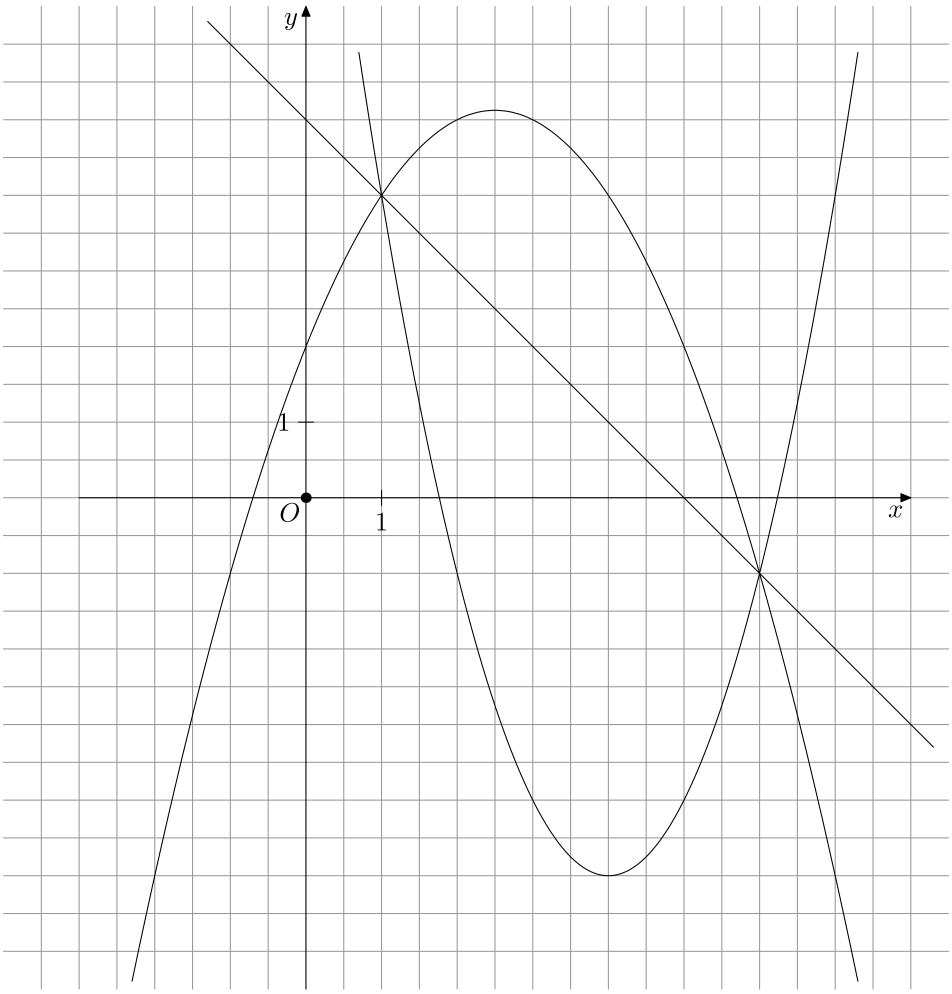
- Die Punkte A_n liegen auf der Geraden g.
- Die Punkte C_n liegen auf der Parabel p.
- Die Punkte A_n sind die Scheitel der rechten Winkel aller Dreiecke $A_nB_nC_n$.
- Die Punkte C_n haben den gleichen Abszissenwert wie die Punkte A_n.
- Der Abszissenwert der Punkte B_n ist stets um 3 kleiner als der Abszissenwert der Punkte C_n.

Zeichne oben für $x = 2$ das Dreieck $A_1B_1C_1$ ein.

(d) Gib zwei x-Werte an, für die es kein Dreieck gibt. Begründe deine Wahl.

(e) Begründe: Unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ gibt es keines, das zu einem Punkt entartet.

5.



Gegeben sind die Parabel $p_1 : y = -0,5x^2 + 2,5x + 2$, die Parabel $p_2 : y = x^2 - 8x + 11$ sowie die Gerade $g : y = -x + 5$. Ausschnitte aus diesen Graphen sind oben dargestellt.

(a) Die Gerade g schneidet die Parabel p_1 in den Punkten A und B. Dabei liegt der Punkt B im IV. Quadranten. Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes B.

(b) Die Punkte $R_n(x \mid -0,5x^2 + 2,5x + 2)$ liegen auf der Parabel p_1, die Punkte $Q_n(x \mid -x + 5)$ liegen auf der Geraden g und die Punkte $P_n(x \mid x^2 - 8x + 11)$ liegen auf der Parabel p_2. Die Punkte P_n und R_n haben stets den gleichen Abszissenwert x. Die Punkte Q_n haben jeweils eine um 1 größere Abszisse als die Punkte P_n und R_n. Dadurch entstehen laufend Dreiecke $P_nQ_nR_n$.
Zeichne für $x = 2$ das Dreieck $P_1Q_1R_1$ ein.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Dreiecke $P_nQ_nR_n$ gilt:

$$A(x) = (-0,75x^2 + 5,25x - 4,5) \text{ FE}$$

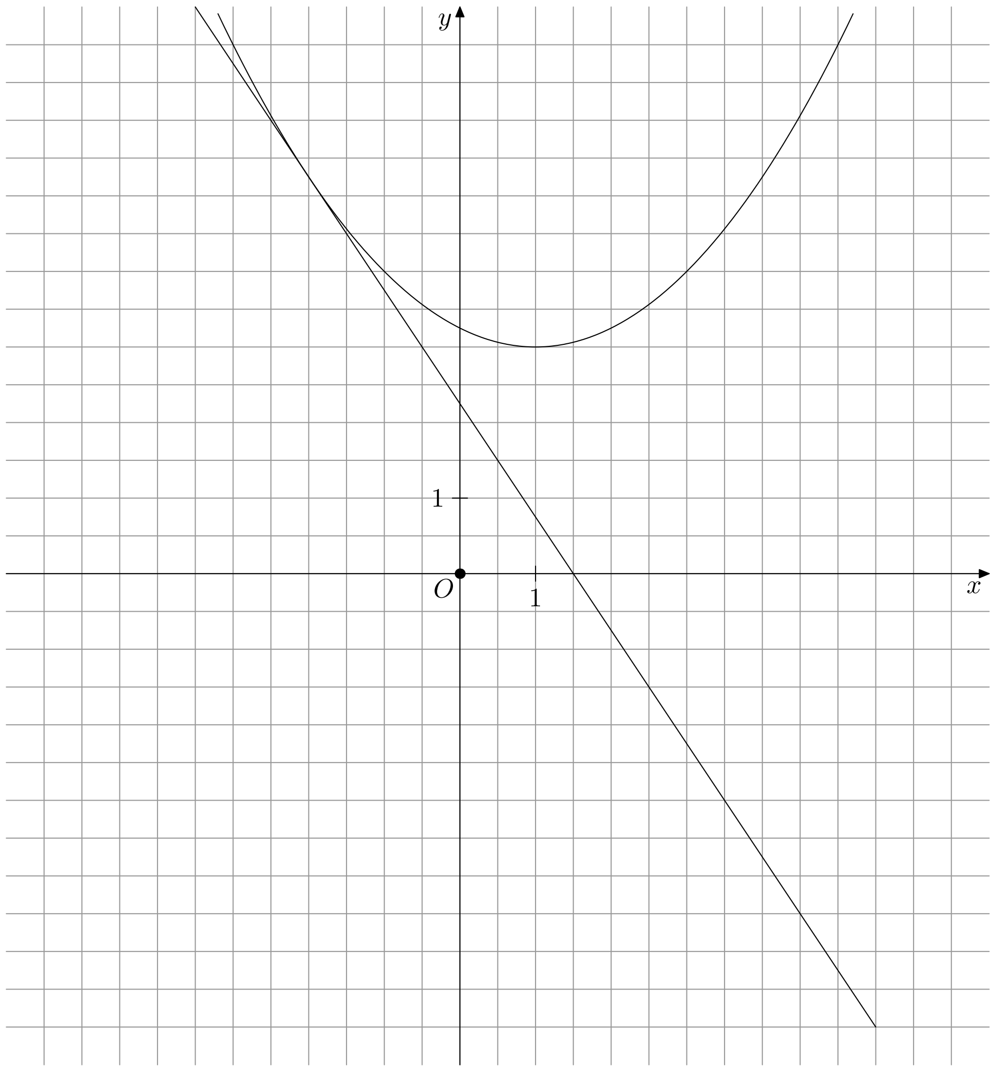
$$[\text{ Teilergebnis:} \overline{R_nP_n}(x) = (-1,5x^2 + 10,5x - 95) \text{ LE }]$$

Unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$ gibt es ein flächengrößtes: das Dreieck $P_0Q_0R_0$. Berechne dieses Maximum und die zugehörigen Koordinaten des Eckpunktes

P_0.

(d) Im Dreieck $P_3Q_3R_3$ hat der Mittelpunkt M_3 der Strecke P_3R_3 den y-Wert 1. Berechne die x-Koordinate von M_3.

6.



Gegeben sind die Parabel $p_1 : y = 0,25x^2 - 0,5x + 3,25$ sowie die Gerade $g : y = -1,5x + 2,25$. Ausschnitte aus diesen Graphen sind oben dargestellt.

(a) Begründe rechnerisch: Die Gerade g berührt die Parabel p.

(b) Die Punkte $M_n(x \mid -1,5x+2,25)$ auf der Geraden g sind die Diagonalenschnittpunkte von Rauten $A_nB_nC_nD_n$. Die Eckpunkte $A_n(x \mid 0,25x^2 - 0,5x + 3,25)$ der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ liegen auf der Parabel p. Die Eckpunkte C_n besitzen

stets den gleichen Abszissenwert x wie die Punkte A_n. Die Länge der Diagonalen $[B_nD_n]$ der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ beträgt stets 4 LE.
Zeichne für $x = 2,5$ die Raute $A_1B_1C_1D_1$ ein.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gilt:

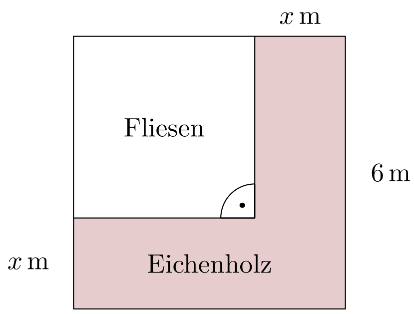
$$A(x) = (x^2 + 4x + 4) \text{ FE}$$

$$[\text{ Teilergebnis:} \overline{A_nM_n}(x) = (0,25x^2 + x + 1) \text{ LE }]$$

(d) Die Raute $A_0B_0C_0D_0$ soll diejenige unter allen Rauten $A_nB_nC_nD_n$ sein, die den minmalen Flächeninhalt besitzt. Berechnen Sie die zugehörige Belegung von x. Es stellt sich heraus, dass der minimale Flächeninhalt 0 FE beträgt. Begründen Sie diesen Sachverhalt in Worten mit Hilfe Ihrer Zeichnung.

(e) Geben Sie die Koordinaten der Rauteneckpunkte D_n in Abhängigkeit von x an.

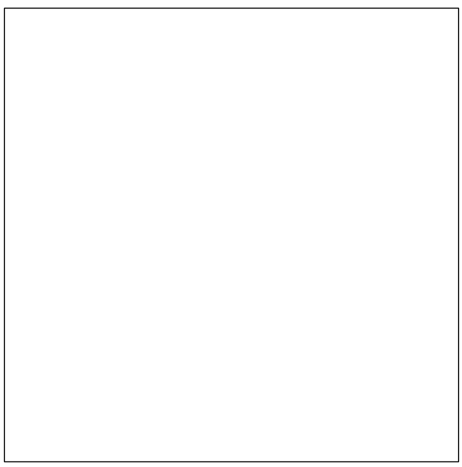
7.



Der quadratische Boden eines Badezimmers mit einer Seitenlänge von 6 m ist einerseits gefliest, anderserseits mit Eichenbrettern L-förmig verlegt worden. Das „L“ hat eine Breite von x m.
Die Fläche aus Holz ist halb so groß wie die gesamte Bodenfläche.

(a) Zeige: $x = 6 - 3\sqrt{2}$.

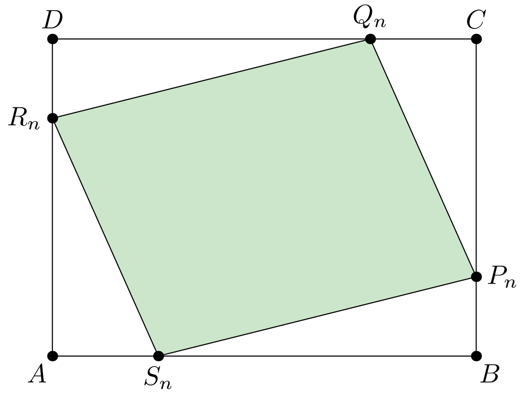
(b) •



In welchem Maßstab ist der Grundriss des Badezimmers in der obigen Figur dargestellt?

- Konstruiere mit Zirkel und Lineal in diesen Grundriss maßstabgerecht die Streckenlänge $x\,\text{m} = (6 - 3\sqrt{2})\,\text{m}$.
  Tipp: $6 - 3\sqrt{2} = 6 - 0,5 \cdot 6\sqrt{2}$.
- Vervollständige damit die Flächenaufteilung des Badezimmers.

8.



In das Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$ werden Parallelogramme $P_nQ_nR_nS_n$ einbeschrieben, wobei gilt: $\overline{BP_n} = \overline{DR_n} = 6k\,\text{cm}$ und $\overline{AS_n} = \overline{CQ_n} = 8k\,\text{cm}$ mit $k \in \,]0;\,1[_{\mathbb{R}}$.

(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ und für $k = 0,25$ das Parallelogramm $P_1Q_1R_1S_1$.

(b) Zeige: Für das Verhältnis q der Flächeninhalte der Parallelogramme $P_nQ_nR_nS_n$ zum Rechteck $ABCD$ gilt in Abhängigkeit von k:

$$q(k) = \frac{A_{P_nQ_nR_nS_n}}{A_{ABCD}} = 1 - 2k(1-k)\,.$$

(c) $k = 0,4$ erzeugt das Parallelogramm $P_2Q_2R_2S_2$. Wie viel Prozent der Fläche des Rechtecks $ABCD$ wird von diesem Parallelogramm eingenommen?

(d) Unter allen Parallelogrammen $P_nQ_nR_nS_n$ gibt es die Parallelogramme $P_3Q_3R_3S_3$ und $P_4Q_4R_4S_4$, die jeweils 58% der Fläche des Rechtecks $ABCD$ einnehmen. Berechne die zugehörigen Belegungen von k.

(e) Für $k = 0,5$ wird das Parallelogramm $P_5Q_5R_5S_5$ erzeugt.

- Zeichne dieses Parallelogramm in einer anderen Farbe ein.
- Um welches besondere Parallelogramm handelt es sich hier? Begründe deine Antwort.
- Zeige: Unter allen Parallelogrammen $P_nQ_nR_nS_n$ besitzt dieses Parallelogramm $P_5Q_5R_5S_5$ den kleinsten Flächeninhalt.

8. Trigonometrie

1. Ein Segelflieger wollte von A-Dorf über B-Stadt nach C-Berg und wieder zurück nach A-Dorf fliegen. Aus flugtechnischen Gründen tritt er jedoch am Punkt D den sofortigen Rückflug an.
   (a) Berechnen Sie die Länge der Strecke, die der Flieger zurücklegt.
   (b) Berechne Sie, um wie viele Kilometer der geplante Flug länger gewesen wäre als die tatsächlich zurückgelegte Strecke.

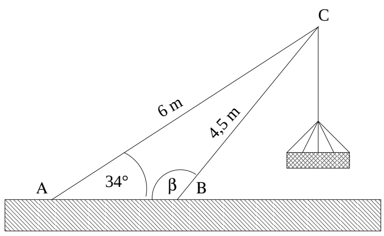
2. Ein Flugzeug fliegt auf geradlinigem Kurs und in gleichbleibender Höhe von 500 m mit einer Geschwindigkeit von $150\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ genau über einen Beobachter hinweg.

   Wie weit ist das Flugzeug nach 20 s vom Beobachter entfernt und unter welchem Winkel gegen die Horizontale beobachet er es dann?

3. Die Plattform eines Leuchtturms befindet sich in $23,8$ m Höhe. Mit einem Fernrohr sieht man ein vor Anker liegendes Schiff unter einem Winkel von $12,9°$.

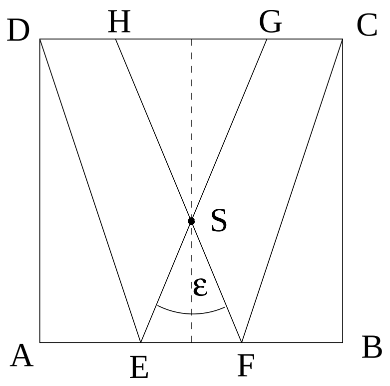
   Wie weit ist das Schiff horizontal vom Fuß des Leuchtturms entfernt, wenn sich das Fernrohr $1,60$ m über der Plattform befindet?

4. Auf einem Kinderspielplatz ist an der Spitze eines Stahlgestells ABC ein Autoreifen zum Schaukeln aufgehängt. (Siehe Skizze)



   (a) Berechnen Sie das Maß des Winkels β.
   (b) Wie hoch befindet sich die Spitze C über dem Erdboden?
   (c) Zur Verstärkung der Konstruktion soll von B aus eine Stütze s senkrecht zur Strebe $[AC]$ eingebaut werden. Berechnen Sie die Länge dieser Stütze s.

5.



In der obigen Figur ist $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm. Es gilt: $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ und $\sphericalangle ESF = \varepsilon$.
Die Punkte G und H sind auf $[CD]$ beweglich und es gilt $\overline{DH} = \overline{GC} = x$ cm.
Hinweis: Gegebenenfalls sind Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a)
- Zeichne die Figur für $x = 1,2$.
- Berechne das zugehörige Winkelmaß ε.
  Hinweis: Zeichne vom Punkt G aus eine Hilfsline so ein, dass du die Aufgabe mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken lösen kannst.

(b) Berechne x so, dass das Dreieck EFS gleichseitig wird.

(c) Untersuche elementargeometrisch (d.h. ohne die Verwendung trigonometrischer Funktionen), ob es unter den Dreiecken EFS ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck gibt.

6. Ermittle die Koordinate x des Punktes $C(x \mid 1)$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC mit $A(2 \mid -2)$, $B(2 \mid 5)$ und $\gamma = 90°$

   (a) durch eine Zeichnung,

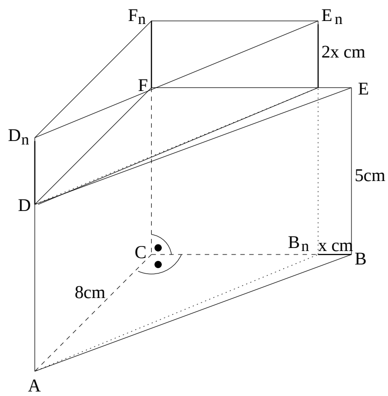
   (b) durch drei verschiedene Rechenwege.

7. Die Ecken C_n von Dreiecken ABC_n mit $A(1 \mid 1)$, $B(6 \mid 4)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 5$.

   Konstruiere die beiden möglichen rechtwinkligen Dreiecke ABC_1 und ABC_2 mit jeweils $\gamma = 90°$ und berechne die $x-$Koordinate der Eckpunkte C_1 und C_2.

8. Vom Viereck $ABCD$ sind die Punkte $A(-2 \mid 0)$, $C(4 \mid 4{,}5)$, $D(-2 \mid 3)$, sowie $a = 5\,\text{LE}$, $f = 7\,\text{LE}$, und $\sphericalangle BDC = 65{,}83°$ gegeben.
   (a) Konstruieren Sie das Viereck $ABCD$. Für die Zeichnung: $-3 \leqq x \leqq 5$ und $-3 \leqq y \leqq 5$
   (b) Berechnen Sie die Maße der Winkel α und δ, sowie die Länge der Seite b.
   (c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ACD mit drei verschiedenen Formeln.

9. Das rechtwinklige Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$, $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$, $\overline{CB} = 6\,\text{cm}$ ist Grundfläche eines geraden Prismas mit der Höhe $5\,\text{cm}$. Verkürzt man die Seite $[BC]$ um $x\,\text{cm}$ und verlängert man die Höhe des Prismas um $2x\,\text{cm}$, so ergeben sich neue Prismen mit der Grundfläche AB_nC. (Siehe Schrägbild)



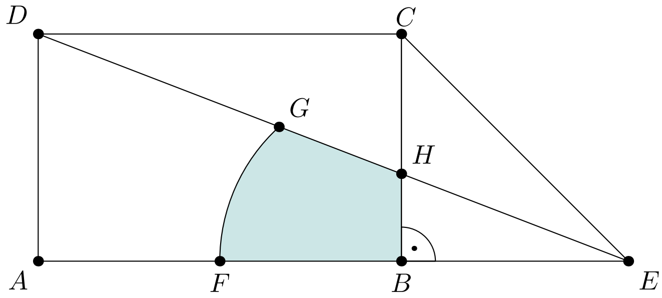
   (a) Berechne das Volumen der Prismen $AB_nCD_nE_nF_n$ in Abhängigkeit von x. [Ergebnis: $V(x) = (-8x^2 + 28x + 120)\,\text{cm}^3$]
   (b) Berechne das maximal mögliche Volumen und gib den zugehörigen $x-$Wert an.
   (c) Berechne die $x-$Werte, bei denen Prismen das Volumen $V = 130\,\text{cm}^3$ besitzen.

10. (a) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge $a = 6\,\text{cm}$.
   (b) In dieses Dreieck wird ein Dreieck PQR mit den folgenden Eigenschaften einbeschrieben:
      - Der Punkt P ist der Mittelpunkt der Seite $[AC]$.
      - $R \in [BC] \wedge \overline{BR} = 2\,\text{cm}$
      - $Q \in [AB] \wedge [PQ] \perp [AB]$

      Zeichne dieses Dreieck PQR in das Dreieck ABC ein.
   (c) Begründe auf verschiedene Weise: $\overline{AQ} = 1{,}5\,\text{cm}$.

(d) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks PQR.

11.



Herr Lieche hat zu seinem rechteckigen Grundstück $ABCD$ mit $\overline{AB} = 80\,\text{m}$ und $\overline{AD} = 50\,\text{m}$ noch einen Teil BEC des Nachbargrundstückes mit $\overline{BE} = 50\,\text{m}$ hinzugekauft (siehe Abbildung oben).

(a) Der Kreisbogen GF besitzt den Mittelpunkt B und einen Radius von $40\,\text{m}$. Zeichne die Figur im Maßstab $1:1000$.

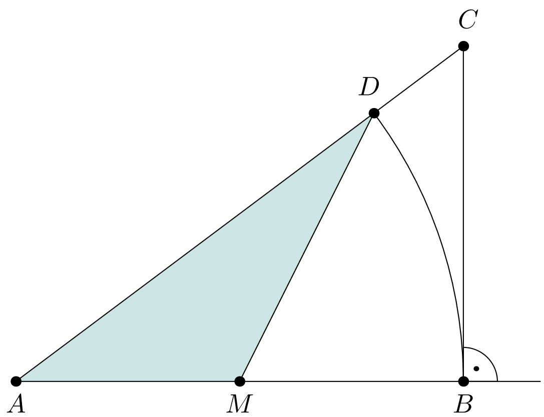
(b) Auf der Strecke $[DE]$ sollen Büsche im Abstand von 1m gepflanzt werden. Wie viele Büsche kann Herr Lieche höchstens darauf unterbringen?

(c) Vom Punkt H aus soll ein möglichst kurzer $1\,\text{m}$ breiter Weg zur Grundstücksgrenze $[CE]$ angelegt werden. Auf dem geplanten Weg wird zunächst das Erdreich bis zu einer Tiefe von $0,4\,\text{m}$ ausgehoben und wegtransportiert. Wie viele m^3 Erdreich sind das ungefähr?

(d) Die grau gefärbte Fläche soll mit eng aneinander liegenden Granitplatten belegt werden. Wie viele € muss Herr Lieche mindestens dafür ausgeben, wenn der Quadratmeterpreis 22 € beträgt?

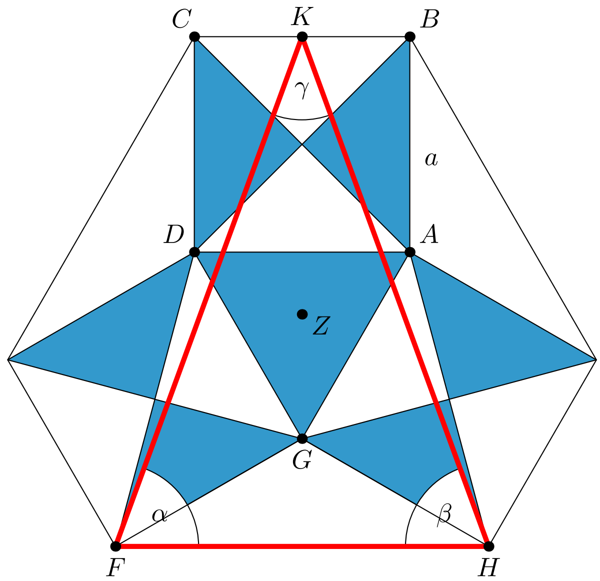
[Teilergebnis: $\overline{HB} \approx 19,2\,\text{m}$]

12.



Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $\overline{AC} = 11,20\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6,72\,\text{cm}$.
Der Mittelpunkt der Kathete $[AB]$ ist M. Der Punkt A ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von B nach D.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks AMD.

13.

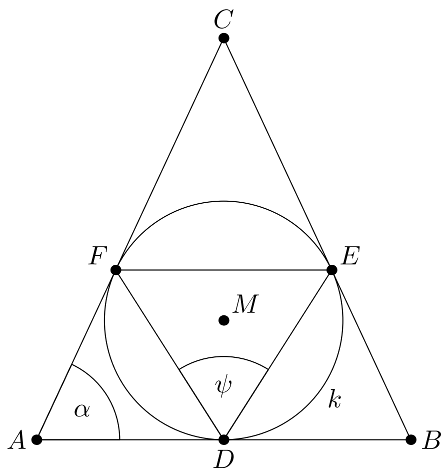


Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Im Zentrum befindet sich das gleichseitige Dreieck ADG mit dem Mittelpunkt Z. Auf den Seiten dieses Dreiecks wurden drei Quadrate errichtet. Es gilt: $\overline{AB} = a$. Zusätzlich wurde noch das Dreieck FHK eingezeichnet.

(a) Zeichne die Figur für $a = 3\,\text{cm}$.

(b) Berechne α, β und γ.

14.



Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit der Basis $[AB]$. Der Inkreis k mit dem Mittelpunkt M berührt die Dreiecksseiten in den Punkten D, E und F.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 9\,\text{cm}$ und $\alpha = 65°$.

(b)
- Zeichne das Viereck $ADMF$ ein.
- Zeige: $\psi = \alpha$.

(c)
- Zeige: Für das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke DEF und ABC gilt:

$$\frac{A_{\Delta DEF}}{A_{\Delta ABC}} = \cos\alpha(1 - \cos\alpha).$$

- Welche besondere Form hätten die Dreiecke ABC und DEF, wenn der Flächenanteil des Dreiecks DEF an dem des Dreiecks ABC maximal sein soll?

15. Ein Viereck $ABCD$ ist durch folgende Bestimmungsstücke festgelegt:
$\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\beta = \sphericalangle CBA = 65°$,$\overline{BC} = 5\,\text{cm}$ und $\overline{DC} = \overline{AD} = 7\,\text{cm}$.

 (a) Zeichne dieses Viereck.
 $[AB]$ ziemlich weit rechts, Platzbedarf über $[AB]$: 8 cm

 (b) Begründe: Es handelt sich nicht um einen achsensymmetrischen Drachen.

 (c) Berechne die Länge der Diagonalen $[AC]$.

 (d) Berechne die Länge der Diagonalen $[BD]$.

 (e) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$.

16. Ein Dreieck ABC ist durch folgende Bestimmungsstücke festgelegt:
$\overline{AB} = 10\,\text{cm}$, $\alpha = \sphericalangle BAC = 50°$ und $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

 (a)
 - Zeichne dieses Dreieck. Platzbedarf über $[AB]$: 8cm

- Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

(b) Man erhält neue Dreiecke AB_nC_n dadurch, dass die Seite $[AC]$ über C hinaus um x cm verlängert und gleichzeitig die Seite $[AB]$ von B aus um $2x$ cm verkürzt wird.

- Zeichne farbig für $x = 1,5$ das Dreieck AB_1C_1 ein.
- Berechne den Flächeninhalt des Dreeicks AB_1C_1.
- Berechne den Abstand d des Punktes C_1 von der Seite $[AB]$.
- Berechne die Länge der Strecke $[B_1C_1]$.

(c) Notiere alle Belegungen von x, für die es neue Dreiecke AB_nC_n gibt.

(d) Zeige: Für den Flächeninhalt A der neuen Dreiecke AB_nC_n gilt in Abhängigkeit von x (gerundet):

$$A(x) = (-0,77x^2 - 0,77x + 23,1)\,\text{cm}^2.$$

(e)
- Berechne diejenige Belegung von x, die den Extremwert des Terms $T(x) = -0,77x^2 - 0,77x + 23,1$ liefert.
- Begründe: Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es keines, dessen Flächeninhalt A so groß wie der Extremwert des zugehörigen Terms $T(x)$ ist.

(f) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das Dreieck AB_2C_2, das einen Flächeninhalt von $7,7\,\text{cm}^2$ aufweist. Berechne den zugehörigen x-Wert.

(g) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das gleichschenklige Dreieck AB_3C_3, mit der Basis $[B_3C_3]$. Berechne den zugehörigen x-Wert.

(h) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das rechtwinklige Dreieck AB_4C_4 mit der Hypotenuse $[AC_4]$.

- Berechne den zugehörigen x-Wert.

  [Ergebnis: $x \approx 2,32$]

- Zeichne dieses Dreieck ein.

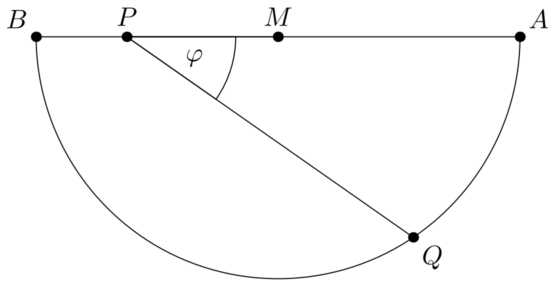
(i)
- Zeige: Für die Längen der Strecken $[B_nC_n]$ gilt in Abhängigkeit von x:

$$\overline{B_nC_n}(x) = \sqrt{7,56x^2 - 25,44x + 59,2}\,\text{cm}^2 \text{ (gerundet)}.$$

- Bestätige mit diesem Ergebnis das Ergebnis der Aufgabe (b) 4. Punkt.

(j) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das Dreieck AB_5C_5, in dem der Winkel C_5B_5A das Maß 62° hat. Berechne den zugehörigen X-Wert.

17.

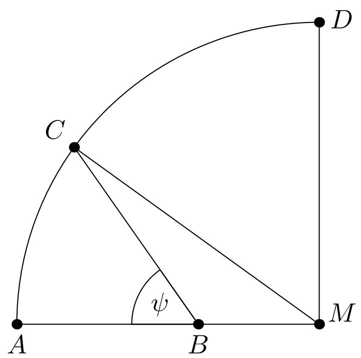


Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M. Weiter gilt:
$\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{PM} = 2,5\,\text{cm}$ und $\varphi = 35°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[AP]$ und $[PQ]$, sowie von dem Kreisbogen von Q nach A begrenzt wird. Tipp: Zeichne eine geeignete Hilfslinie ein.

18.

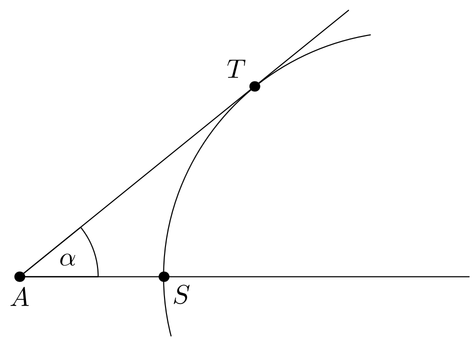


Der Mittelpunkt des Viertelkreises ist M.
Weiter gilt: $\overline{AM} = 5\,\text{cm}$, $\overline{AB} = 3\,\text{cm}$ und $\psi = 55°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[AB]$ und $[BC]$ sowie von dem Kreisbogen von C nach A begrenzt wird.
Tipp: Zeichne eine geeignete Hilfslinie ein.

19.



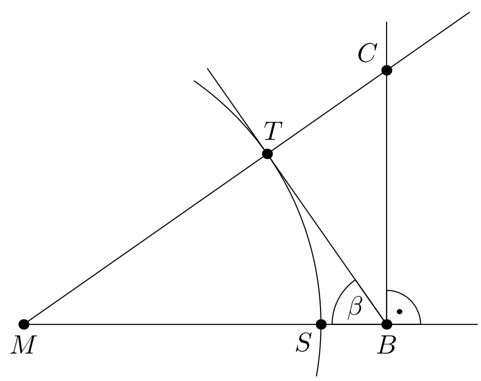
Der Kreisbogen mit dem zunächst nicht sichtbaren Mittelpunkt $M \in [AS$ berührt den einen Schenkel von α im Punkt T und schneidet den anderen Schenkel von α im Punkt S.
Weiter gilt: $\overline{AT} = 5\,\text{cm}$ und $\alpha = 39°$.

(a) Zeichne die Figur ohne den Punkt S und den Kreisbogen.

(b) Konstruiere den Mittelpunkt M des Kreisbogens. Zeichne den Kreisbogen und den Punkt S ein.

(c) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[AT]$ und $[AS]$ sowie von dem Kreisbogen von T nach S begrenzt wird.

20.

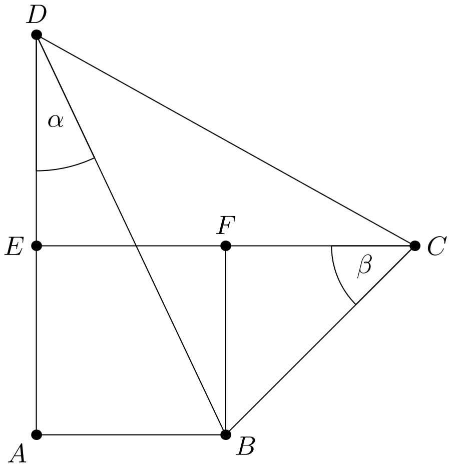


Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist M. Weiter gilt: $\overline{MB} = 6\,\text{cm}$ und $\beta = 55°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[SB]$, $[BC]$ und $[CT]$ sowie von dem Kreisbogen von T nach S begrenzt wird.

21.

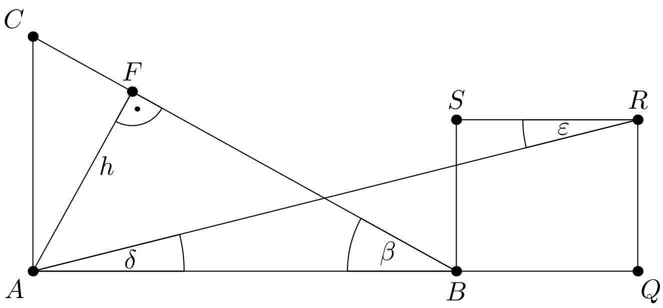


Die nicht maßstabgerechte Figur $ABCD$ setzt sich aus zwei rechtwinkligen Dreiecken und einem Quadrat zusammen. Dabei gilt: $\overline{FC} = 3,5\,\text{cm}$, $\overline{CD} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{FB} = 2,5\,\text{cm}$.
Die Endergebnisse sind auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a)
- $\overline{DB}$
- α
- β

(b) Ein weiterer Winkel in der Figur hat ebenfalls das Maß α Kennzeichen dieses Winkelmaß eindeutig mit „α“. Begründe deine Antwort.

22.



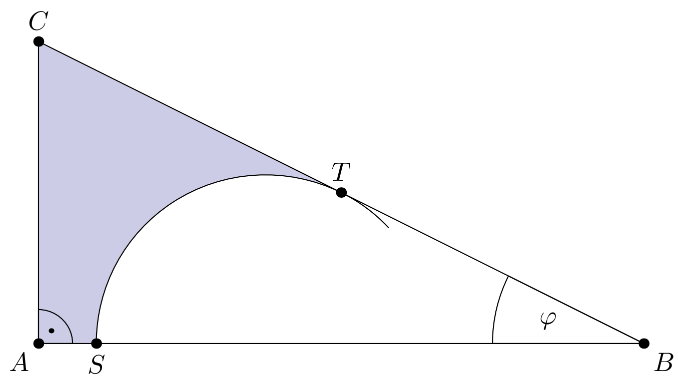
Die nicht maßstabgerechte Figur setzt sich aus einem rechtwinkligen DreieckABC und einem Quadrat $BQRS$ zusammen.
Dabei gilt: $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{QR} = 3\,\text{cm}$.
Die Endergebnisse sind auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Berechne:
- β
- h

- δ

(b) Das Winkelmaß ε stimmt mit einem anderen in der Figur befindlichen Winkelmaß überein. Mit welchem Winkelmaß besteht Übereinstimmung? Begründe deine Antwort.

23.



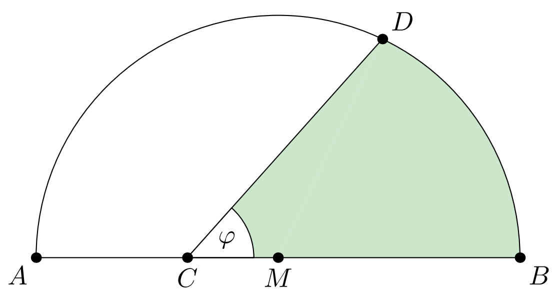
Der Kreisbogen berührt die Hypotenuse $[BC]$ im Hypotenusenmittelpunkt T. Der Mittelpunkt dieses Kreisbogens ist der noch verborgene Punkt M, der auf $[AB]$ liegt. Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 4\,\text{cm}$.

(a) Zeichne den Punkt M ein.

(b) Berechne den Inhalt des eingefärbten Flächenstückes.

[Teilergebnis: Radius des Kreisbogens $\approx 2,24\,\text{cm}$]

24.



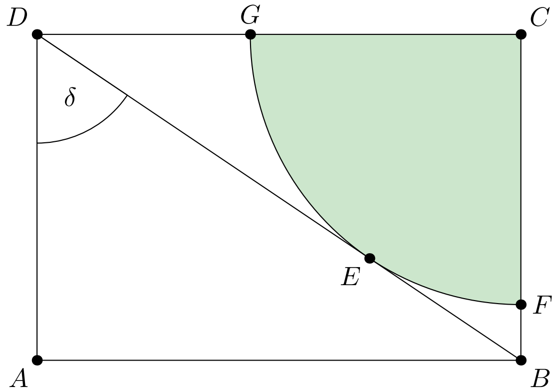
Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M.
Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{AC} = 2,5\,\text{cm}$ und $\varphi = 49°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Die eingefärbte Fläche ist kein Kreissektor. Zeichne dazu an einer geeigneten Stelle eine Hilfslinie ein.

(c) Berechne den Inhalt A der eingefärbten Fläche.

25.



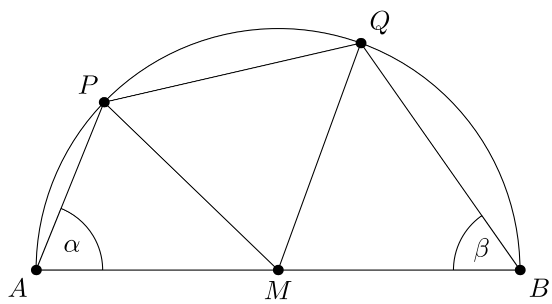
Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\delta = 56°$.
Der Mittelpunkt des Kreisbogens, der die Diagonale $[BD]$ im Punkt E berührt, ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Flächeninhalt des eingefärbten Kreissektors.

[Teilergebnis: Radius des Kreisbogens $\approx 3,64\,\text{cm}$]

26.



Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M. Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 68°$ und $\beta = 55°$.

(a) Zeichne die Figur. Platzbedarf über $[AB]$: 9 cm.

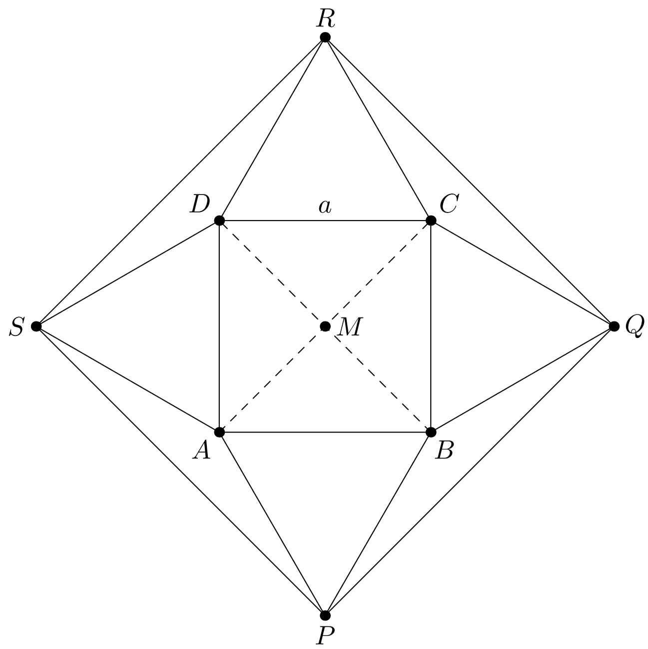
(b)
- Zeige: $\sphericalangle QMP = 66°$.
- Zeige: Die Strecke $[PQ]$ ist (gerundet) $4,36\,\text{cm}$ lang.

(c) Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks MQP.

(d) Der Schnittpunkt der Halbgeraden $[AP$ und $[BQ$ ist der Punkt C.
- Zeichne das Dreieck ABC ein.

- Berechne den Flächeninhalt A^* des Dreiecks ABC.
- Berechne den Abstand d des Punktes C von der Grundseite $[AB]$.

27.



Das Viereck $PQRS$ ist dadurch entstanden, dass man über den vier Seiten des Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a jeweils gleichseitige Dreiecke errichtet hat.

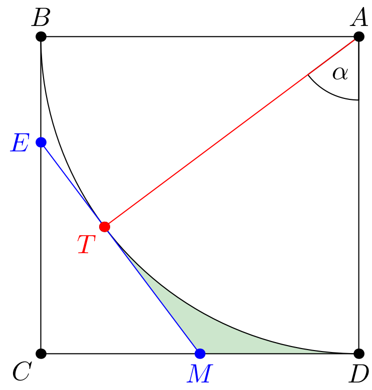
(a) Zeichne die Fgur für $a = 4\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat.
Hinweis: Zeige, dass z.B. $\sphericalangle APS = 15°$ gilt.

(c) Zeige auf verschiedene Weise: Für den Flächeninhalt A des Vierecks $PQRS$ gilt:
$$A_{PQRS} = a^2(2 + \sqrt{3})$$

(d) Berechne den prozentualen Flächenanteil des Quadrates $ABCD$ am Viereck $PQRS$.

28.



Dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 6\,\text{cm}$ ist ein Viertelkreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius a einbeschreiben worden. Der Mittelpunkt der Seite $[CD]$ ist M.
Weiter gilt: $\overline{BE} = 2\,\text{cm}$.
Hinweis: Alle Rechenergebnisse sind auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne das Quadrat $ABCD$, den Viertelkreis und die Strecke $[EM]$.

(b)
- Zeige durch Rechnung: $\overline{EM} = 5\,\text{cm}$.
- Begründe: Die Strecke $[ME]$ berührt den Kreisbogen in einem Punkt T.
  Tipp: Wenn der Punkt T Berührpunkt sein soll, dann müssen gleichzeitig die beiden Vierecke $MDAT$ und $BETA$ besondere Vierecke sein.
- Zeichne die Strecke $[AT]$ ein.

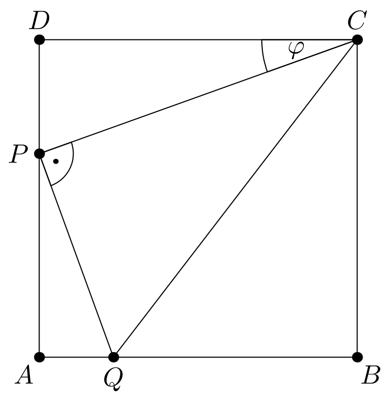
(c) Berechne das Maß α des Winkels TAD.

[Teilergebnis: $\frac{\alpha}{2} \approx 26,57°$]

- Zeichne den Diagonalenschnittpunkt F des Vierecks $MDAT$ ein.
- Berechne den Inhalt der in der Eingangsfigur getönten Fläche.

[Teilergebnis: $\overline{FD} \approx 2,68\,\text{cm}$]

29.



Dem Quadrat $ABCD$ ist das rechtwinklige Dreieck QCP einbeschrieben worden. Dabei gilt: $\sphericalangle\, DCP = \varphi$.
Hinweis: Gegebenenfalls sind alle Ergebnissse auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne das Quadrat für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und für $\varphi = 20^\circ$ das Dreieck QCP.

(b) Begründe: Die Dreiecke AQP und PCD sind zueinander ähnlich.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks QCP.

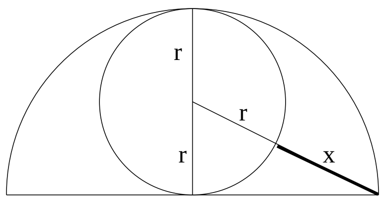
9. Berechnungen am Kreis

1. Der Minutenzeiger einer Kirchturmuhr ist $0,95\,\mathrm{m}$ und der Stundenzeiger $0,45\,\mathrm{m}$ lang.

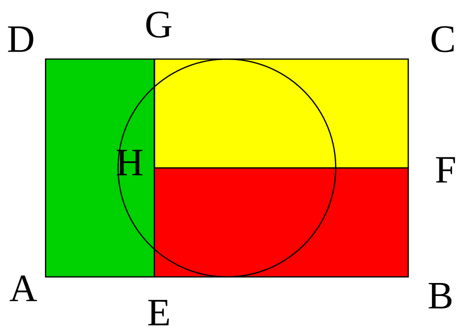
   (a) Berechne den Weg, den die Spitze des Minutenzeigers in 3 Stunden zurücklegt.

   (b) Berechne den Weg, den die Spitze des Stundenzeigers in der selben Zeit zurücklegt.

2. Berechne auf Grund der Skizze die Länge der Strecke x in Abhängigkeit vom Radius r.



3.

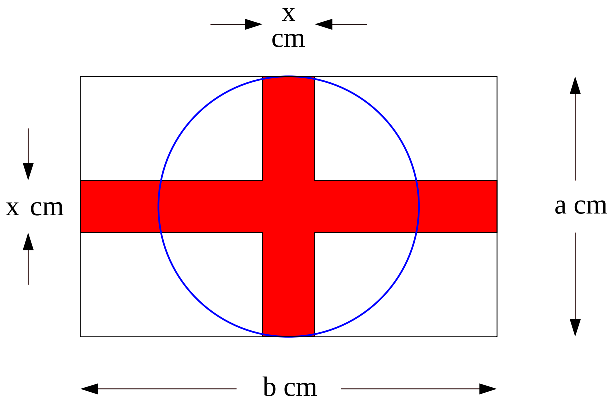


Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet. Alle drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Außerdem gilt: $\overline{AB} = 6\,\mathrm{cm}$.
Zusätzlich ist noch ein Kreis eingezeichnet, dessen Mittelpunkt M der Mittelpunkt des Rechtecks $ABCD$ ist.

   (a) Begründe: Es muss $\overline{AD} = 4\,\mathrm{cm}$ gelten. Zeichne dann die obige Figur.

   (b) Berechne jeweils den Anteil der drei Rechtecke im Inneren an der Kreisfläche in Prozent. Runde auf zwei Stellen nach dem Komma.

4. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England. Zusätzlich wurde noch der Kreis eingezeichnet, dessen Mittelpunkt im „Flaggenmittelpunkt“ liegt.

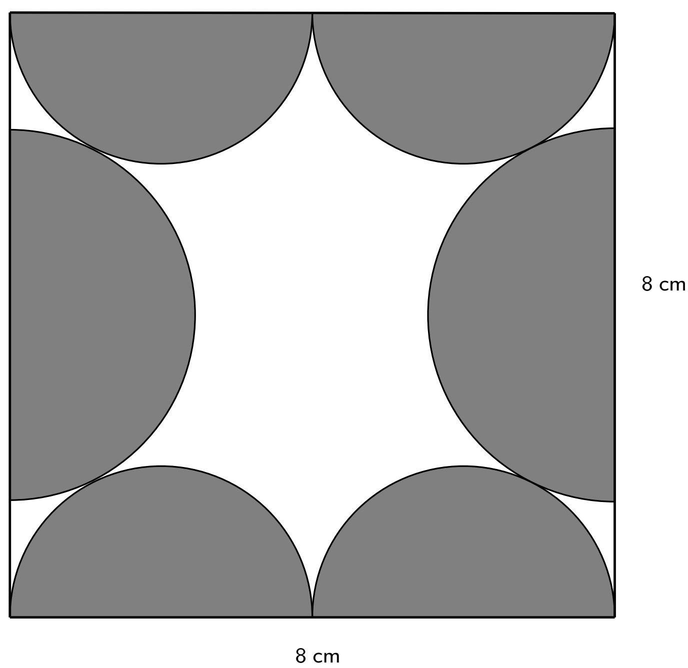


Hinweis: Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne die Figur für $a = 8$, $b = 12$ und $x = 2$.

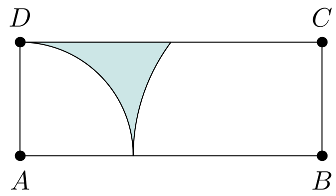
(b) Wie viel Prozent der Kreuzfläche liegen außerhalb der Kreislinie?

5.



Gegeben ist das Quadrat mit 8 cm Seitenlänge und die sechs Halbkreise. Berechne den Flächeninhalt der hellen Fläche.

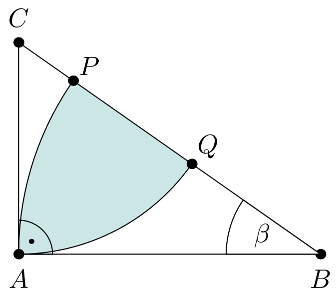
6. Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 3\,\text{cm}$. Die Punkte A und B sind Kreismittelpunkte.



(a) Zeichne die skizzierte Figur gemäß den obigen Angaben.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

7.

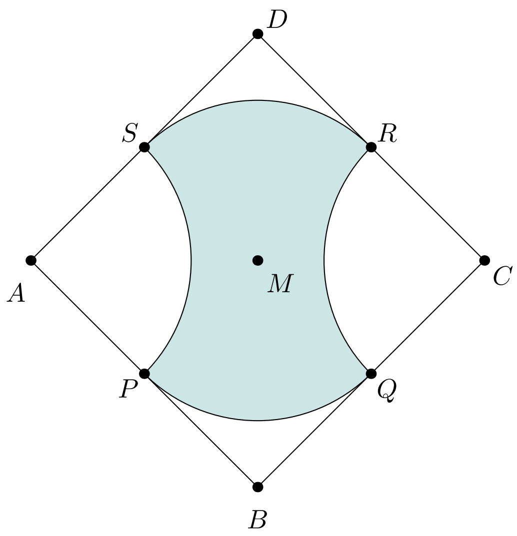


Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 35°$. Die Punkte B und C sind Kreismittelpunkte.

(a) Zeichne die Figur gemäß den obigen Angaben.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

8.

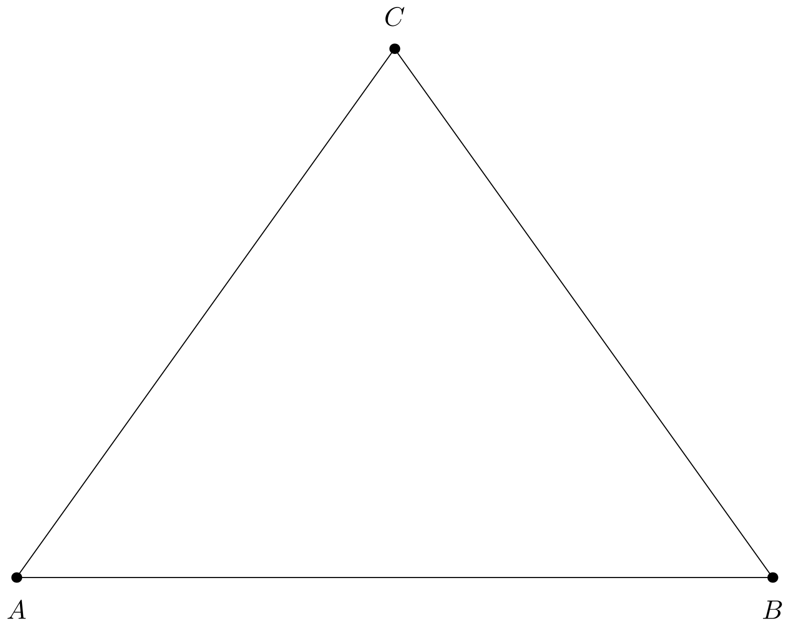


Der Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$ ist der Punkt M. Die Punkte P, Q, R und S sind die Mittelpunkte der jeweiligen Quadratseiten.
Die Mittelpunkte der vier Kreisbögen, welche die grau getönte Figur im Inneren des Quadrates $ABCD$ begrenzen, sind die Punkte A, C und M.

(a) Zeichne die Figur für die Diagonalenlänge $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Fritz behauptet: „Der Inhalt der grauen Fläche ist halb so groß wie der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$.“
Maria meint: „Der Inhalt der grauen Fläche kleiner als die Hälfte des Quadrates. Das sieht man doch!“
Wer hat Recht? Begründe deine Antwort.

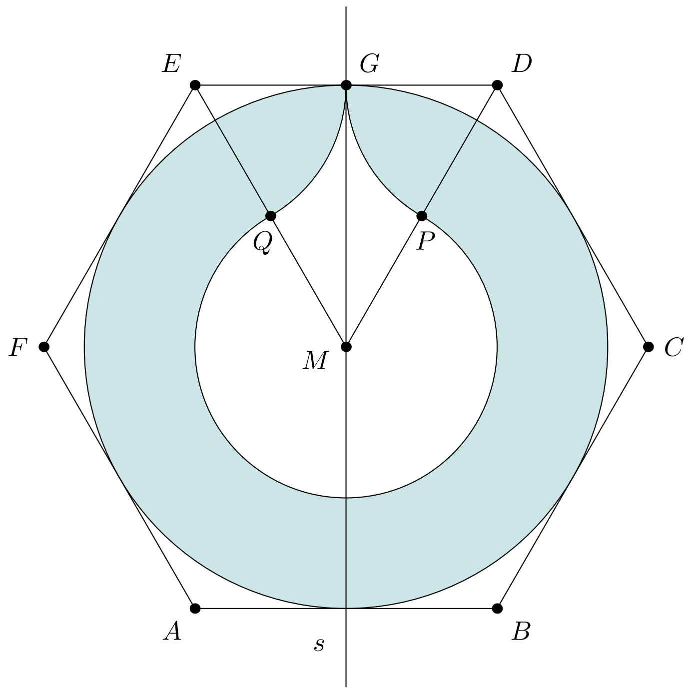
9. Für das dargestellte gleichschenklige Dreieck ABC gilt:
Die Basislänge $\overline{AB}$ beträgt $10\,\text{cm}$. Die Höhe auf die Basis ist $7\,\text{cm}$ lang.
Der Mittelpunkt der Basis $[AB]$ ist M und R ist der Mittelpunkt der Seite $[BC]$.
In dieses Dreieck ist ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt Q auf der Strecke $[AB]$ so einbeschrieben, dass er Seite $[BC]$ im Punkt R berührt.
Der eine Endpunkt D dieses Kreisbogens liegt auf $[AB]$, sein anderer Endpunkt E liegt auf $[AC]$.



(a) Ergänze die Zeichnung mit den obigen Angaben.

(b) Berechne den Flächeninhalt des Kreissektors QRE.

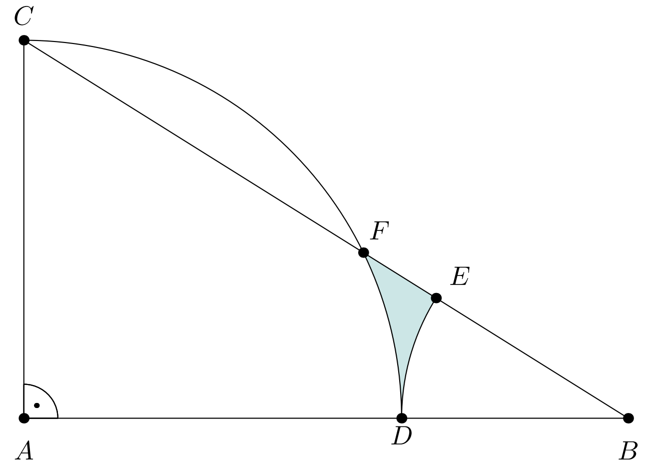
10. Das regelmäßige Sechseck $ABCDEF$ besitzt den Mittelpunkt M und die Symmetrieachse s.
Der Mittelpunkt des Inkreises dieses regelmäßigen Sechsecks ist M. D und E sind die Mittelpunkte der Kreisbögen, die sich in G berühren.



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Berechne für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ den Flächeninhalt des grau eingefärbten Ringes.

11.

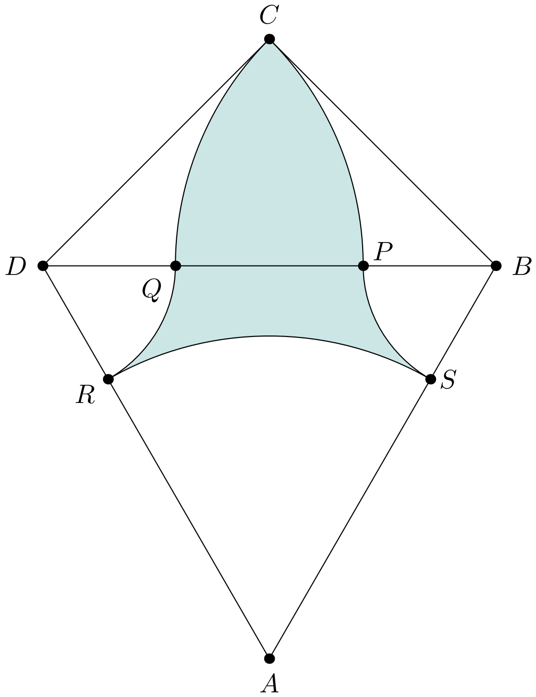


Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 5\,\text{cm}$. Die Punkte A und B sind Kreismittelpunkte.

(a) Zeichne die Figur gemäß den obigen Angaben.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

12.

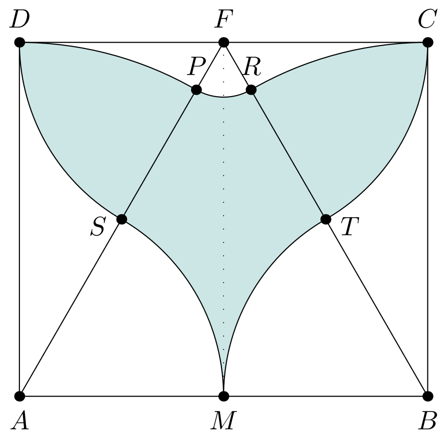


Das Viereck $ABCD$ ist aus einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck und einem gleichseitigen Dreieck zusammengefügt. Die Mittelpunkte der Kreisbögen sind die Punkte B, D und A.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{BD} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

13.

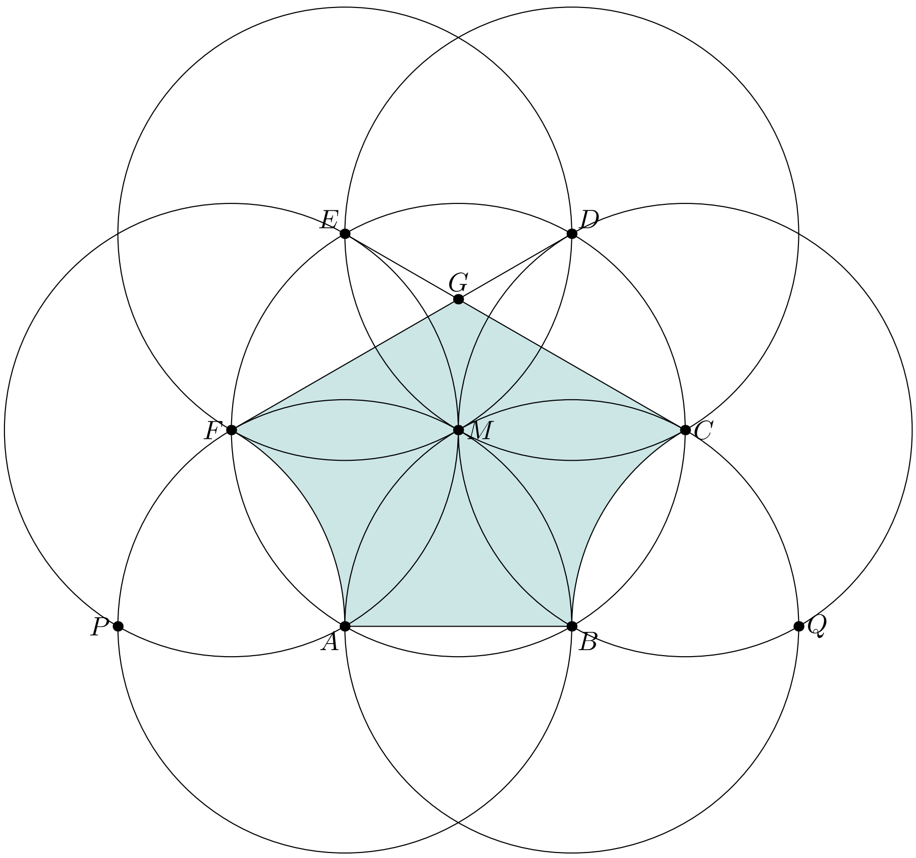


In das Rechteckeck $ABCD$ ist ein gleichseitiges Dreieck ABF einbeschrieben.
Die Mittelpunkte der sieben Kreisbögen sind die Punkte A, B und F.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

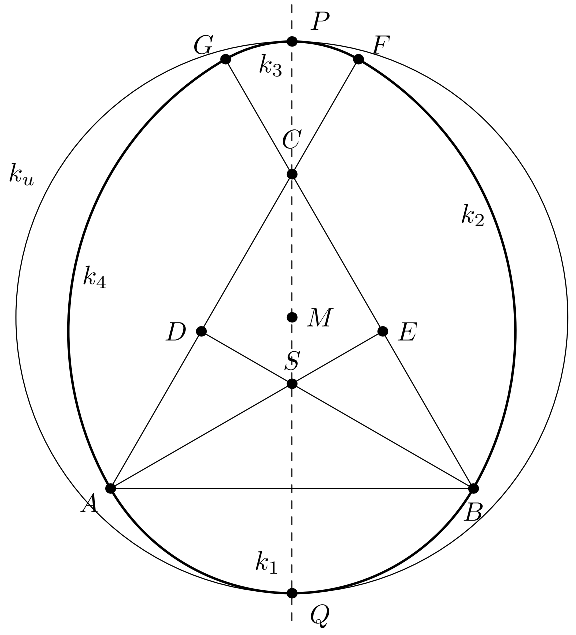
14. In der Abbildung gilt: $\overline{AB} = 3\,\text{cm}$.
Der Punkt M und die Punkte A, B, C, D, E, und F sind Kreismittelpunkte.
Die Punkte P und Q sind die Mittelpunkte der Kreisbögen AF und CB, die sich in das Innere des Kreises mit dem Mittelpunkt M wölben.



(a) Begründe: Das Sechseck $ABCDEF$ ist regelmäßig.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.
Hinweis: Zeichne ausgehend von Punkt M geeignete Hilfslinien ein.

15.



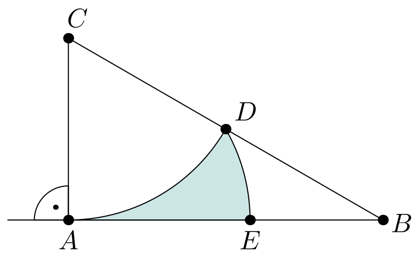
Die Punkte D und E sind zwei Seitenmittelpunkte des gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge a.
Die Punkte S, D, C und E sind die Mittelpunkte der Kreisbögen k_1, k_2, k_3 und k_4, welche die eiförmige Figur bilden. Der Punkt M ist der Mittelpunkt des Umkreises k_u dieser Eilinie.

(a)
- Beschreibe, wie du diese Figur zeichnest.
- Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Neben der Symmetrieachse PQ besitzt die Eilinie keine weitere.

(c) Wie viel Prozent der Fläches des Umkreises k_u bedeckt die eiförmige Fläche?

16.

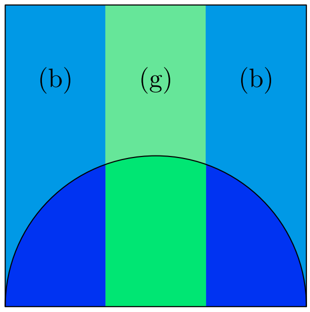


Die Eckpunkte A und C des rechtwinkligen Dreiecks ABC sind die Mittelpunkte der Kreisbögen von E nach D bzw. von A nach D. Die Radien der Kreisbögen sind gleich lang.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt der getönten Fläche.

17.



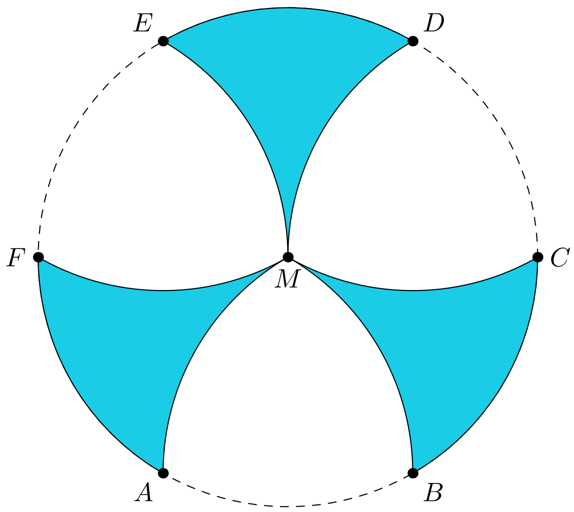
Das ist der Entwurf eines Logos für die Firma „Sun & Brown“. Es besteht aus einem Quadrat, das aus drei kongruenten Streifen blau (b) und grün (g) zusammengesetzt ist. Außerdem ist dem Quadrat ein Halbkreis einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur, so dass die Quadratseite 6 cm lang ist.

(b) Berechne den Inhalt der blauen Fläche im Halbkreis.

(c) Wie viel Prozent der Halbkreisfläche sind grün eingefärbt?

18.

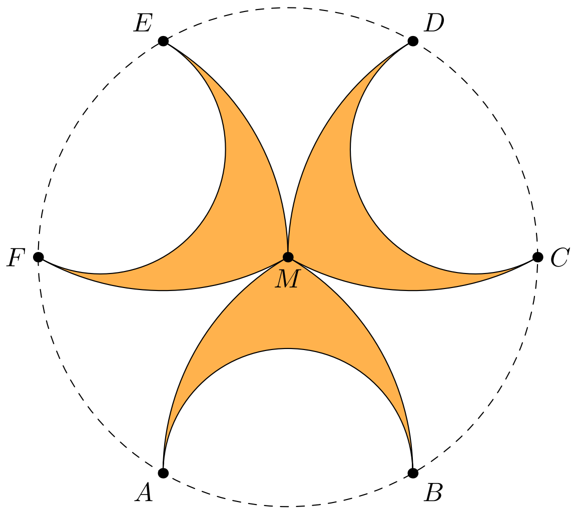


Die Punkte A, B, C, D, E und F sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge a cm. Diese Punkte sind auch die Mittelpunkte der Kreisbögen im Inneren.

(a) Zeichne die Figur für $a = 6$.

(b) Berechne den Flächeninhalt der getönten Figur in deiner Zeichnung.

19.

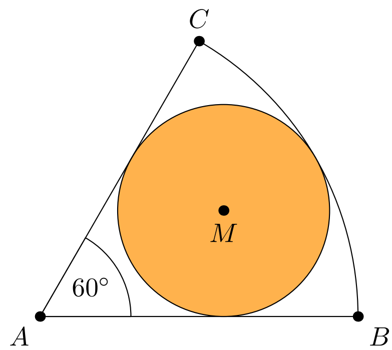


Die Punkte A, B, C, D, E und F sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge a cm. Diese Punkte sind auch die Mittelpunkte der Kreisbögen im Inneren. Die Strecken $[AB]$, $[CD]$ und $[EF]$ sind jeweils die Durchmesser der drei Halbkreise im Inneren.

(a) Zeichne die Figur für $a = 6$.

(b) Berechne den Flächeninhalt der getönten Figur in deiner Zeichnung.

20.

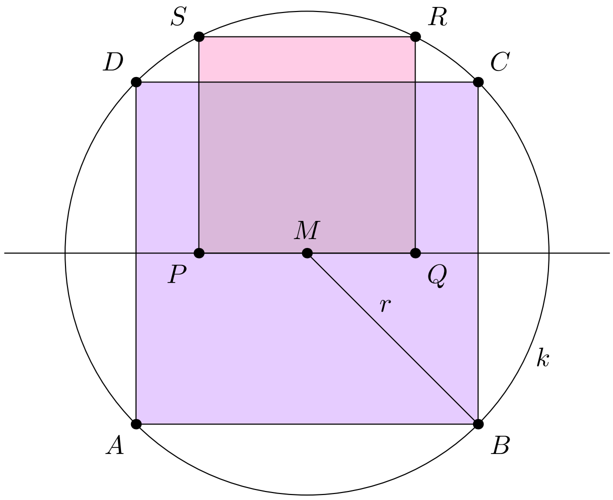


Der gefärbte Kreis mit dem Mittelpunkt M ist dem Kreissektor ABC mit dem Mittelpunkt A und einem Öffnungswinkel von $60°$ einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur für den Sektorradius $\overline{AB} = a = 6\,\text{cm}$.
Tipp: Die beiden Kreislinien berühren sich in einem Punkt T. Durch diesen Punkt verläuft die gemeinsame Tangente an die beiden Kreislinien. Zeichne diesen Punkt T und die Tangente ein.

(b) Welchen Bruchteil der Sektorfläche nimmt der Kreis ein?

21.

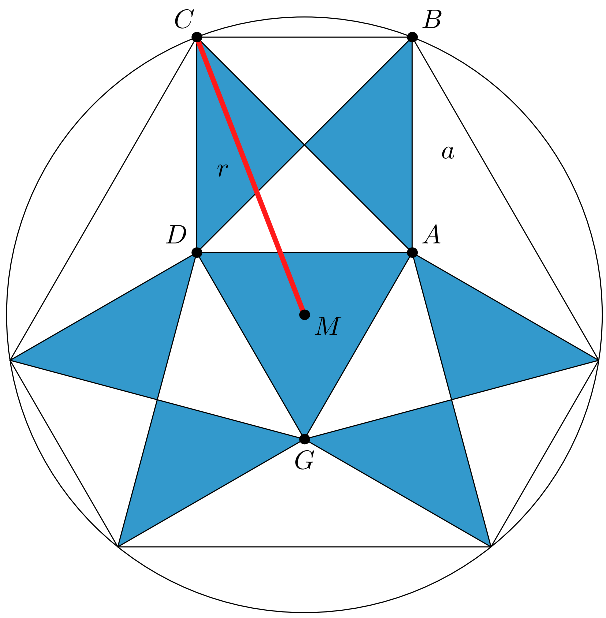


In den Kreis k mit dem Radius r ist das Quadrat $ABCD$ und in seinen Halbkreis ist das Quadrat $PQRS$ einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur für $r = 4\,\text{cm}$.

(b) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Quadrate.

22.

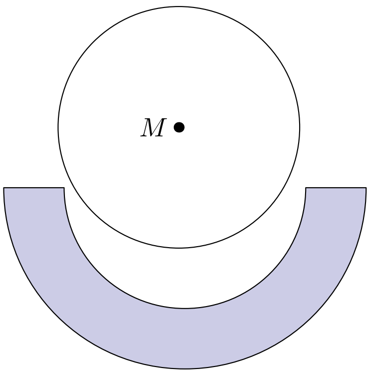


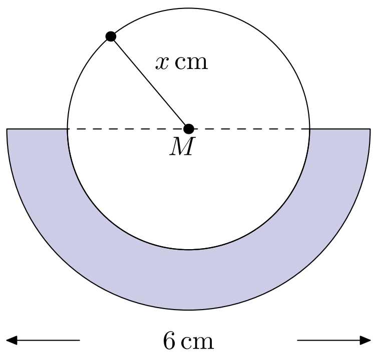
Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Im Zentrum befindet sich das gleichseitige Dreieck ADG. Der Umkreis mit dem Mittelpunkt M wurde zusammen mit dem Umkreisradius r zusätzlich eingezeichnet. Die Länge der Quadratseite $\overline{AB}$ ist a.

(a) Berechne den Umkreisradius r für $a = 4$.

(b) Wie viel Prozent der Umkreisfläche wird von dem sechseckigen Logo bedeckt?

23.





In dem Bild eines Firmenlogos wird der Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius x cm ($x < 3$) in einen dunkel gefärbten Halbkreisring eingebettet, dessen äußerer Durchmesser 6 cm beträgt (siehe Abbildung oben rechts).

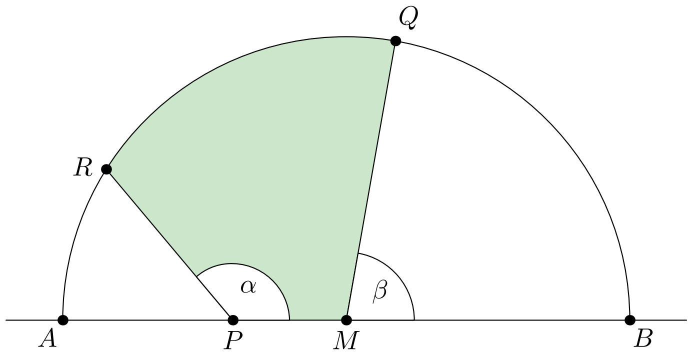
(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

(b) Berechne für $x = 2$ den Flächeninhalt des Halbkreisringes.

(c) Berechne x so, dass der Inhalt der Kreisfläche genauso groß wie der des Halkreisringes ist.

(d) Berechne x so, dass der Halbkreisring den doppelten Umfang wie der Vollkreis besitzt.

24.



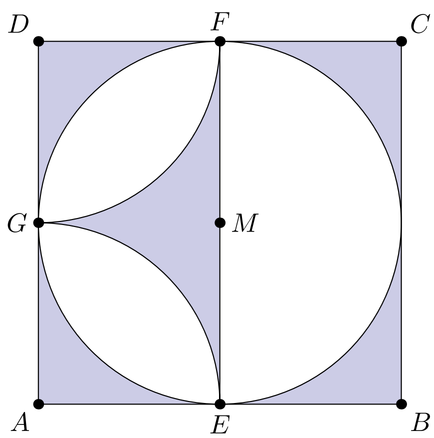
Die Figur stellt den Entwurf einer halbkreisförmigen Bühnenfläche dar. Der Durchmesser $[AB]$ soll $20\,\text{m}$ und die Länge der Strecke $[PM]$ soll $4\,\text{m}$ betragen.
Die von den Strecken $[RP]$, $[PM]$, $[MQ]$ und dem Kreisbogen von Q nach R begrenzte Teilfläche soll farbig von der restlichen Fläche abgesetzt werden.

(a) Zeichne die Bühne im Maßstab $1 : 200$ für $\alpha = 130°$ und $\beta = 80°$.

(b) Berechne den Inhalt der farbig abgesetzten Teilfläche.
[Ergebnis: $A_{Farbe} \approx 69{,}85\,\text{m}^2$]

(c) Berechne den prozentualen Anteil der farbigen Fläche an der Gesamtfläche der Bühne.

25.

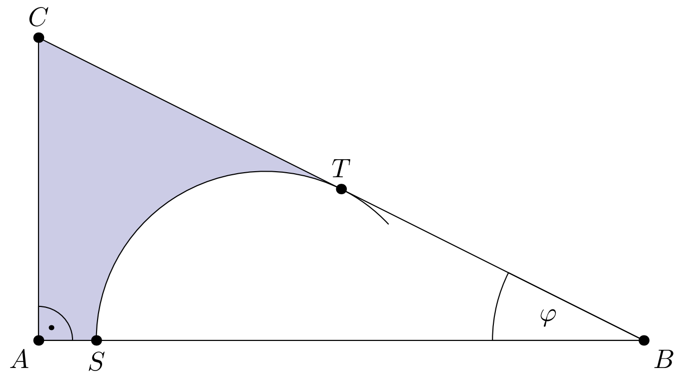


Das ist das Logo einer Firma, die Elektrogeräte herstellt.
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit dem Mittelpunkt M. Die Punkte A und D sind die Mittelpunkte der Kreisbögen von E nach G bzw. von G nach F.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne die Summe der Flächeninhalte der getönten Teilflächen in der Figur.

26.



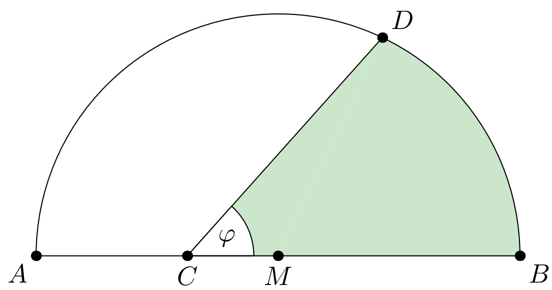
Der Kreisbogen berührt die Hypotenuse $[BC]$ im Hypotenusenmittelpunkt T. Der Mittelpunkt dieses Kreisbogens ist der noch verborgene Punkt M, der auf $[AB]$ liegt. Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 4\,\text{cm}$.

(a) Zeichne den Punkt M ein.

(b) Berechne den Inhalt des eingefärbten Flächenstückes.

[Teilergebnis: Radius des Kreisbogens $\approx 2,24\,\text{cm}$]

27.



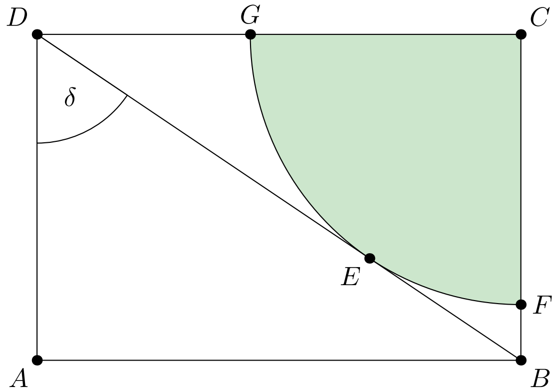
Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M.
Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{AC} = 2,5\,\text{cm}$ und $\varphi = 49°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Die eingefärbte Fläche ist kein Kreissektor. Zeichne dazu an einer geeigneten Stelle eine Hilfslinie ein.

(c) Berechne den Inhalt A der eingefärbten Fläche.

28.

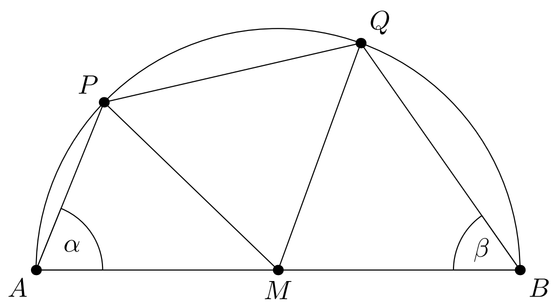


Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\delta = 56°$.
Der Mittelpunkt des Kreisbogens, der die Diagonale $[BD]$ im Punkt E berührt, ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Flächeninhalt des eingefärbten Kreissektors.
[Teilergebnis: Radius des Kreisbogens $\approx 3{,}64\,\text{cm}$]

29.



Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M. Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 68°$ und $\beta = 55°$.

(a) Zeichne die Figur. Platzbedarf über $[AB]$: $9\,\text{cm}$.

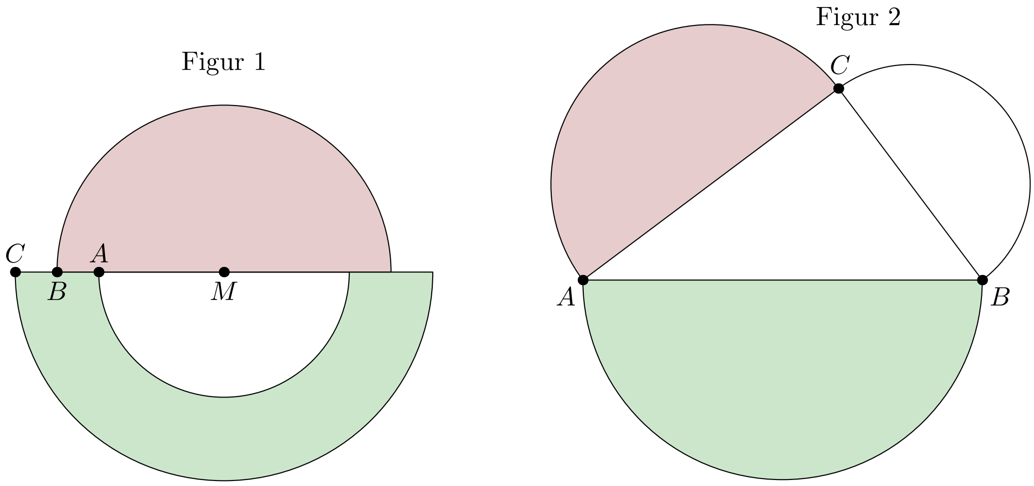
(b)
- Zeige: $\sphericalangle QMP = 66°$.
- Zeige: Die Strecke $[PQ]$ ist (gerundet) $4{,}36\,\text{cm}$ lang.

(c) Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks MQP.

(d) Der Schnittpunkt der Halbgeraden $[AP$ und $[BQ$ ist der Punkt C.
- Zeichne das Dreieck ABC ein.

- Berechne den Flächeninhalt A^* des Dreiecks ABC.
- Berechne den Abstand d des Punktes C von der Grundseite $[AB]$.

30.

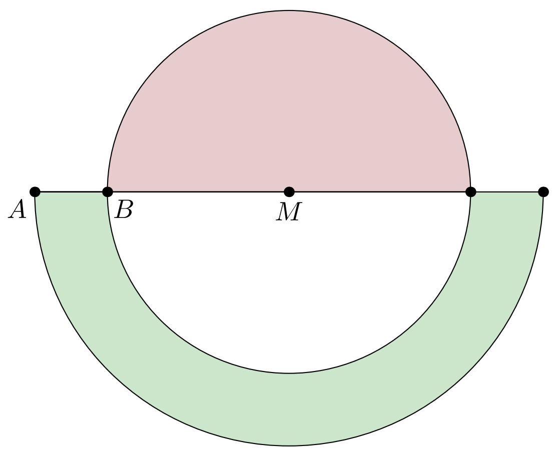


(a) Zeichne die Figur 1 für $\overline{MA} = 3,6\,\text{cm}$, $\overline{MB} = 4,8\,\text{cm}$ und $\overline{MC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Zeige ohne zu runden, dass der untere Kreisring und der obere Halbkreis den gleichen Flächeninhalt besitzen.

(c)
- Zeichne die Figur 2 für $c = \overline{AB} = 12\,\text{cm}$, $a = \overline{BC} = 7,2\,\text{cm}$ und $b = \overline{AC} = 9,6\,\text{cm}$.
- Begründe: Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.
- Notiere den Zusammenhang zwischen den drei Halbkreisflächen in der Figur 2 in Form einer Gleichung.
- Was hat die Figur 2 mit der Figur 1 zu tun? Beschreibe deine Idee.

31.



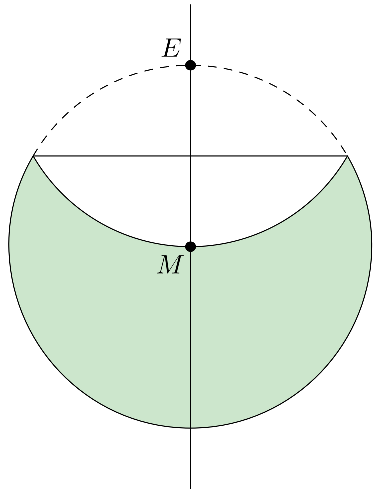
(a) Zeichne die Figur für $R = \overline{MA} = 5{,}6\,\text{cm}$ und $r = \overline{MB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Zeige, dass der untere Kreisring und der obere Halbkreis nicht denselben Flächeninhalt besitzen.

(c) Jetzt sei $r = \sqrt{18}\,\text{cm}$.
Berechne R so, dass der Inhalt der beiden getönten Flächen gleich ist.

(d) Welcher Zusammenhang muss zwischen R und r bestehen, damit die getönten Flächen gleichen Inhalt besitzen?

32.

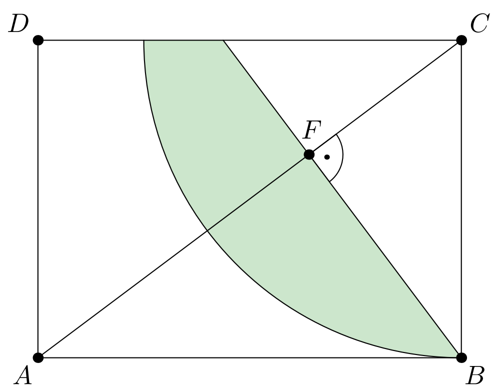


Erwin hat einen Kreis aus Papier ausgeschnitten. Er faltet nun die Kreisscheibe so, dass der Punkt E auf den Kreismittelpunkt M zu liegen kommt.

(a) Zeichne die Figur mit einem Kreisdurchmesser von $6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Anteil der eingefärbten Fläche an der gesamten Kreisfläche in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

33.

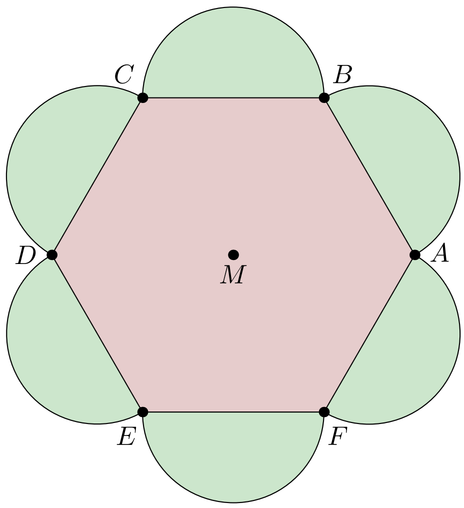


Der Punkt C des Rechtecks $ABCD$ ist der Mittelpunkt des Kreisbogens.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt A der eingefärbten Fläche. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

34.

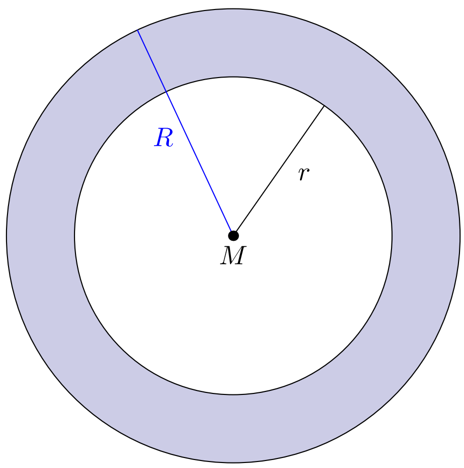


Das Sechseck $ABCDEF$ mit dem Mittelpunkt M ist regelmäßig.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AD} = 8\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A der Figur. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

35.

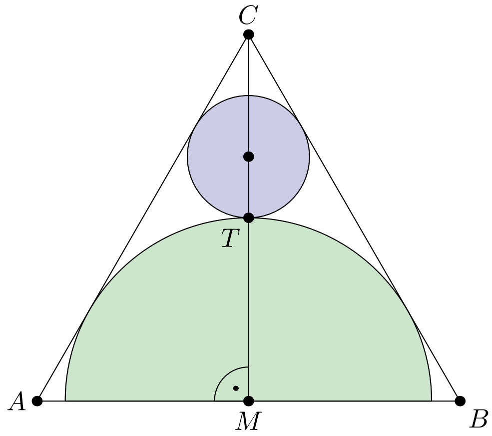


(a) Zeichne die Figur für $R = 5\,\text{cm}$ und $r = 3,5\,\text{cm}$.

(b) Berechne für $R = 5\,\text{cm}$ den Kreisradius r so, dass der Kreisring 19% der großen Kreisfläche einnimmt.

(c) Berechne für $r = 3,5\,\text{cm}$ den Kreisradius R so, dass der Flächeninhalt des Kreisringes genauso groß wird wie der des kleinen Kreises.

36.



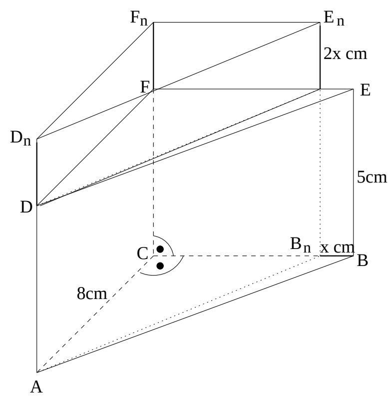
Im gleichseitigen Dreieck ABC ist M der Basismittelpunkt.
Diesem gleichseitigen Dreieck sind ein Halbkreis und ein kleinerer Kreis einbeschrieben worden. Die beiden Kreislinien berühren sich im Punkt T.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$.

(b) Berechne das Verhältnis des Flächeninhaltes des kleinen Kreises zu dem des Halbkreises.

10. Raumgeometrie

1. Das rechtwinklige Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$, $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$, $\overline{CB} = 6\,\text{cm}$ ist Grundfläche eines geraden Prismas mit der Höhe 5 cm. Verkürzt man die Seite $[BC]$ um x cm und verlängert man die Höhe des Prismas um $2x$ cm, so ergeben sich neue Prismen mit der Grundfläche AB_nC. (Siehe Schrägbild)



   (a) Berechne das Volumen der Prismen $AB_nCD_nE_nF_n$ in Abhängigkeit von x. [Ergebnis: $V(x) = (-8x^2 + 28x + 120)\,\text{cm}^3$]

   (b) Berechne das maximal mögliche Volumen und gib den zugehörigen $x-$Wert an.

   (c) Berechne die $x-$Werte, bei denen Prismen das Volumen $V = 130\,\text{cm}^3$ besitzen.

2. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basislänge $\overline{AB} = 12\,\text{cm}$ und dem Basismittelpunkt M. Die Dreieckshöhe $[CM]$ ist 5 cm lang.
   Dieses Dreieck ist die Grundfläche einer $9,5\,\text{cm}$ hohen Pyramide $ABCS$, deren Spitze S senkrecht über dem Mittelpunkt M liegt.

   (a) Zeichne für $q = 0,5$ und $\omega = 30°$ ein Schrägbild dieser Pyramide $ABCS$, so dass $[CM]$ auf der Schrägbildachse liegt.

   (b) Berechne die Länge der Seitenkante $[CS]$ und das Maß α des Winkels MCS:
   [Ergebnisse: $\overline{CS} \approx 10,74\,\text{cm}$ und $\alpha \approx 62,24°$]

   (c) Begründe ohne Rechnung: Die Seitenkante $[AS]$ muss länger als die Seitenkante $[CS]$ sein.

   (d) Auf der Seitenkante $[CS]$ wandern Punkte P_n mit dem Maß φ der Winkel P_nMC. Dabei werden laufend Dreiecke ABP_n erzeugt.

- Zeichne für $\varphi = 40°$ das Dreieck ABP_1 ein.
- Berechne die Innenwinkelmaße dieses Dreiecks ABP_1.

(e) Unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$ gibt es ein rechtwinkliges Dreieck ABP_2 mit der Hypotenuse$[AB]$.
Konstruiere dieses Dreieck ABP_2 in das Schrägbild.

(f) Untersuche, ob es unter allen Dreiecken ABP_n auch gleichseitige gibt.

(g) Das Maß φ der Neigungswinkel der Dreiecke ABP_n zur Grundfläche ABC wächst von $0°$ bis $90°$. Eines der drei unten stehenden Diagramme beschreibt graphisch den Zusammenhang zwischen dem Winkelmaß φ und dem jeweils zugehörigen Maß ε des Innenwinkels AP_nB der Dreiecke ABP_n näherungsweise korrekt. Die beiden anderen stellen diesen Zusammenhang falsch dar.
Welche beiden sind das? Begründe jeweils deine Antwort.

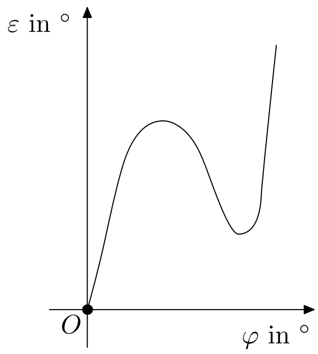


Diagramm I

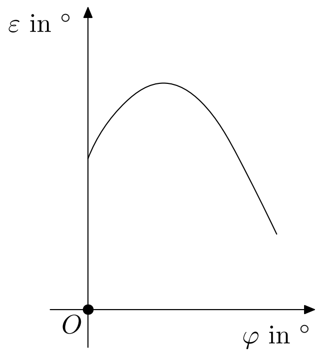


Diagramm II

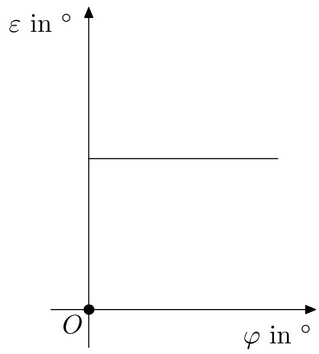
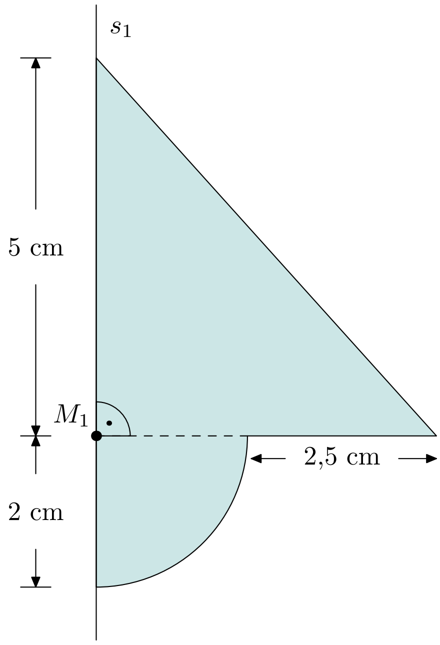
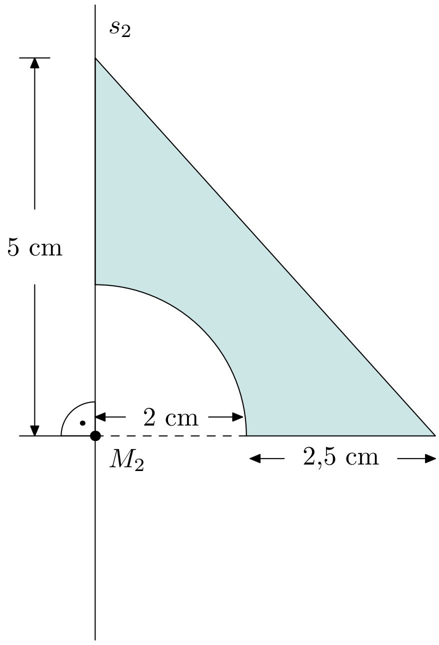


Diagramm III

3. In der Figur 1 und in der Figur 2 sind die Punkte M_1 und M_2 die Mittelpunkte der zugehörigen Kreisbögen.
Jede der beiden grau getönten Flächen rotiert um die betreffende Achse s_1 bzw. s_2.



Figur 1

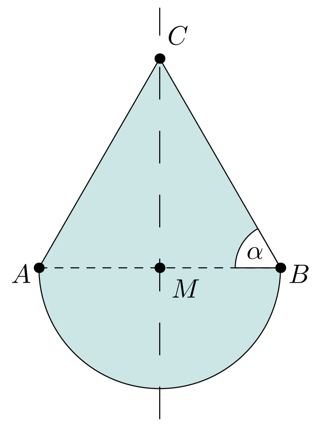


Figur 2

(a) Berechne den Unterschied der Rauminhalte der beiden Rotationskörper.

(b) Maria behauptet: „Die Oberflächen der beiden Rotationskörper sind gleich groß.“ Hat Maria Recht? Begründe deine Antwort.

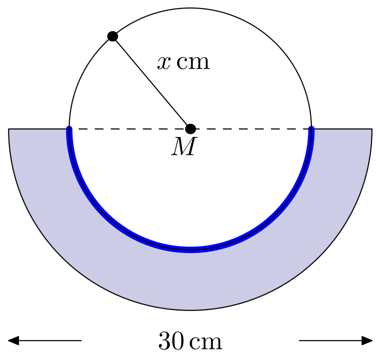
4.



Die Figur stellt den Axialschnitt eines Rotationskörpers dar, der sich aus einer Halbkugel und einem Kreiskegel mit $\alpha = 60°$ zusammensetzt. Das Volumen der Halbkugel beträgt 0,5 Liter.
Berechne die Oberfläche des Rotationskörpers in der Einheit cm^2.

5. Frau Lunde will für ihre Familie $0,5\,\text{kg}$ Spaghetti in einem Topf mit $20\,\text{cm}$ Durchmesser kochen. In der Anleitung steht: „Für $100\,\text{g}$ Spaghetti rechnet man einen Liter Wasser.“
Wie hoch muss das Wasser nach dieser Anleitung im Topf anfangs stehen, wenn 15% der eingefüllten Wassermenge während des Kochvorgangs verdampfen?

6.



Die Darstellung zeigt den Axialschnitt eines Zimmerbrunnens: Eine Kugel aus Marmor mit dem Radius $r = x\,\text{cm}$ ist in eine unbewegliche Halbkugelschale mit einem äußeren Durchmesser von $30\,\text{cm}$ aus dem gleichen Material eingepasst. Ein dünner Wasserfilm in der Berührfläche der beiden Körper bewirkt, dass die Kugel fast reibungsfrei rotieren kann.

(a) Zeichne die Figur für $x = 7,5$ im Maßstab $1 : 5$.

(b) Berechne für $x = 7,5$ die Oberfläche der Halbkugelschale in der Einheit dm^2.

(c) • Zeige: Für die Oberfläche O der Kugelschale gilt in Abhängigkeit von x:

$$O(x) = (x^2 + 475) \cdot \pi\,\text{cm}^2$$

• Bestätige damit dein Ergebnis der Aufgabe (b).

(d) Berechne x so, dass die Oberfläche der Halbkugelschale fünfmal so groß wie die der Vollkugel ist.

(e) Berechne für $x = 7,5$ das Volumen der Halbkugelschale in der Einheit dm^3.

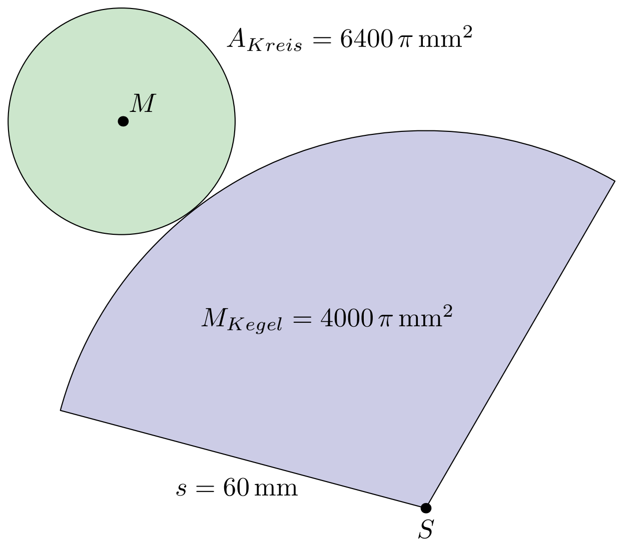
(f) • Zeige: Für das Volumen V der Kugelschale gilt in Abhängigkeit von x:

$$V(x) = (2250 - \frac{2}{3}x^3) \cdot \pi\,\text{cm}^3$$

• Bestätige damit dein Ergebnis der Aufgabe (e).

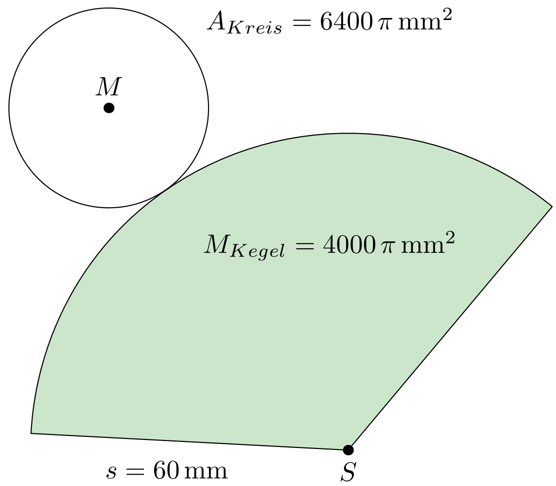
(g) Berechne x so, dass die Halbkugelschale genau so schwer wie die Vollkugel ist.

7.



Egon hat die Mantelfläche eines Kegels und dessen Grundfläche aus Papier ausgeschnitten. Zeige durch Rechnung, dass er die die beiden Teile nicht lückenlos und nicht bündig zu einem Kegel zusammenfügen kann.

8.



Erich hat die Mantelfläche eines Kegels und einen Kreis ausgeschnitten. Zeige rechnerisch, dass die Mantelfläche des Kegels und der Kreis als dessen Grundfläche nicht lückenlos und bündig zusammengefügt werden können.