SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Jahrgangsstufe 10 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Wahlpflichtächergruppe I

1. Potenzfunktionen

1. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = \frac{3}{x-1} + 2$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

   (a) Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge von f sowie die Gleichung der Asymptoten des Graphen von f an.

   (b) Tabellarisieren Sie f für $x \in \{1,5; 2; 3; 5; 7\}$. Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f in ein Koordinatensystem ein. Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \leqq x \leqq 9$ und $-5 \leqq y \leqq 9$

   (c) Berechnen Sie die nach y aufgelöste Gleichung der Umkehrfunktion f^{-1} von f. Zeichnen Sie sodann den Graphen von f^{-1} in das Koordinatensystem zu (b) ein und geben Sie die Gleichung der Asymptoten an.

   (d) Auf dem im I.Quadranten liegenden Teil des Graphen zu f wandern Punkte Q, auf der Geraden g mit $y = -1$ Punkte P. Die Punkte P und Q besitzen jeweils die gleiche Abszisse x und sind Eckpunkte von Dreiecken OPQ mit $O(0 \mid 0)$. Zeichnen Sie das Dreieck OP_0Q_0 für $x_0 = 5$ in das Koordinatensystem zu (b) ein und berechnen Sie den Flächeninhalt $A(x)$ der Dreiecke OPQ in Abhängigkeit von x. Vereinfachen Sie dabei den Flächenterm so weit wie möglich.

   (e) Berechnen Sie den $x-$Wert, für den die Länge der Strecke $[PQ]$ genauso groß wie ihr Abstand von der $y-$Achse ist.

Lösung: (a) $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ $\quad W = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ $\quad a_1 : x = 1$ $\quad a_2 : y = 2$

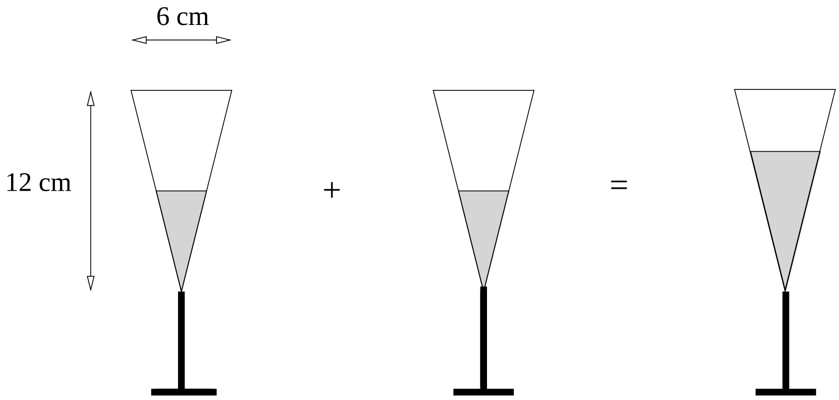
(b) -.-

(c) $f^{-1} : y = \frac{3}{x-2} + 1$ $\quad {a_1}^{-1} : x = 2$ $\quad {a_2}^{-1} : y = 1$

(d) $A(x) = \frac{1{,}5x^2}{x-1}\, FE$

(e) $x = 4$

2. Zwei gleiche Sektkelche sind jeweils bis auf die halbe Höhe gefüllt. Der Inhalt des einen Kelches wird in den anderen gegossen.
   Berechne die Füllhöhe!



Lösung: Die Füllhöhe betragt $7,56\,\mathrm{cm}$.

2. Exponential- und Logarithmusfunktion

1. Gegeben sind die Funktionen $f_1 : y = -0,5 \cdot log_3(x+2) - 1$ und $f_2 : y = 0,5 \cdot log_3(x - 1) - 1$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   (a) Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f_2 an.

   (b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph der Funktion f_1 durch orthogonale Affinität an der x-Achse mit $k = -1$ und anschließender Verschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet werden kann.

   (c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen von f_1 und f_2.

Lösung: (a) $D =]1; \infty[\quad W = \mathbb{R}$

(b) -.-

(c) $S(1,30 \mid -1,54)$

2. In einem Trockengebiet Afrikas wird ein Tiefbrunnen gebaut und Grundwasser gefördert. Messungen ergeben, dass die Grundwasservorräte dadurch von anfangs $0,08\,\text{km}^3$ jedes Jahr um 2% im Vergleich zum Vorjahr sinken.

   (a) Erklären Sie kurz, warum für die Berechnung der restlichen Grundwassermenge $y\,\text{km}^3$ nach x Jahren folgende Gleichung gilt: $y = 0,08 \cdot 0,98^x$ $(G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$

   (b) Wie viele Kubikmeter Wasser wurden im ersten Jahr gefördert?

   (c) Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren der Grundwasservorrat auf die Hälfte der Anfangsmenge gesunken ist.

   (d) Durch einen zweiten Tiefenbrunnen verdoppelt sich die Abnahme des Grundwasservorrates auf 4% jeweils im Vergleich zum Vorjahr. Ermitteln Sie rechnerisch, wie viel Prozent der ursprünglichen Grundwassermenge in diesem Fall nach 50 Jahren noch vorhanden sind.

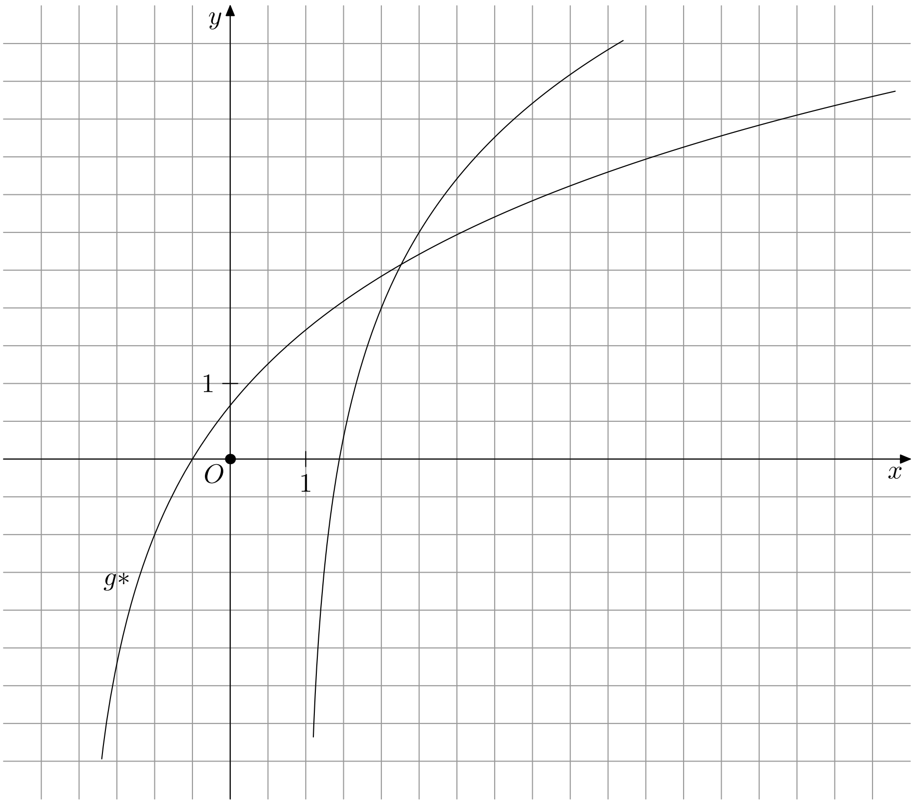
Lösung: (a) -.-

(b) $1600000\,\text{m}^3$

(c) $34,31$ Jahre

(d) 12%

3.



Gegeben sind die beiden Funktionen f_1 mit der Gleichung $y = \log_{1,5}(x-1) + 2$ und f_2 mit der Gleichung $y = \log_{1,5}(x+2) - 1$. Ausschnitte aus den Graphen der beiden Funktionen sind dargestellt.

(a) Begründe: Der Graph $g*$ stellt die Funktion f_2 dar.

(b) Punkte A_n liegen auf dem Graphen zu f_1. Die Punkte B_n mit dem gleichen Abszissenwert x wie die Punkte A_n liegen auf dem Graphen zu f_2.
Zeichne für $x = 1,2$ die Strecke $[A_1B_1]$ ein.

(c) Zeige: Für die Streckenlängen $\overline{A_nB_n}$ gilt in Abhängigkeit von x:

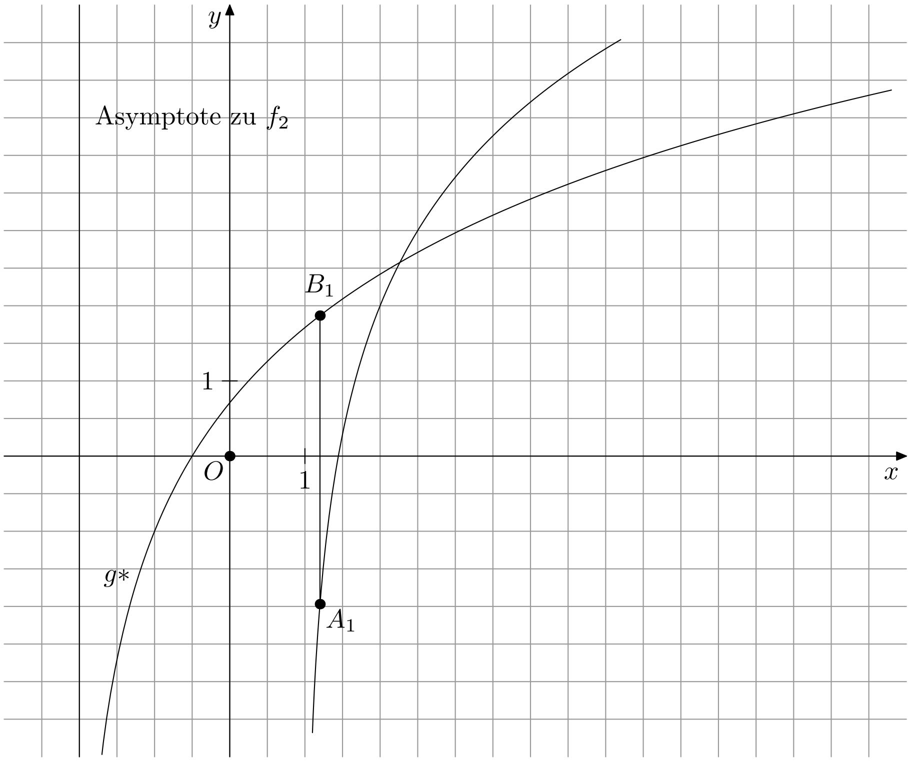
$$\overline{A_nB_n}(x) = \left(\log_{1,5} \frac{x+2}{x-1} - 3\right) LE$$

(d) Mit Hilfe des Ergebnisses der Aufgabe (c) lässt sich der Abszissenwert des Schnittpunktes der beiden Graphen berechnen.
Zeige, dass sich daraus die Gleichung

$$\frac{x+2}{x-1} = 3,375$$

ableiten lässt. Berechne x.

Lösung: (a)



Die Asymptote der Funktion f_2 hat Die Gleichung $x = -2$. Die Asymptote der Funktion f_1 hat die Gleichung $x = 1$. Also kann nur der Graph $g*$ die Funktion f_2 darstellen.

(b) Siehe Zeichnung.

(c) $\overline{A_nB_n}(x) = y_{B_n} - y_{A_n} = \log_{1,5}(x+2) - 1 - [\log_{1,5}(x-1) + 2]$

$\overline{A_nB_n}(x) = \log_{1,5}(x+2) - 1 - \log_{1,5}(x-1) - 2$

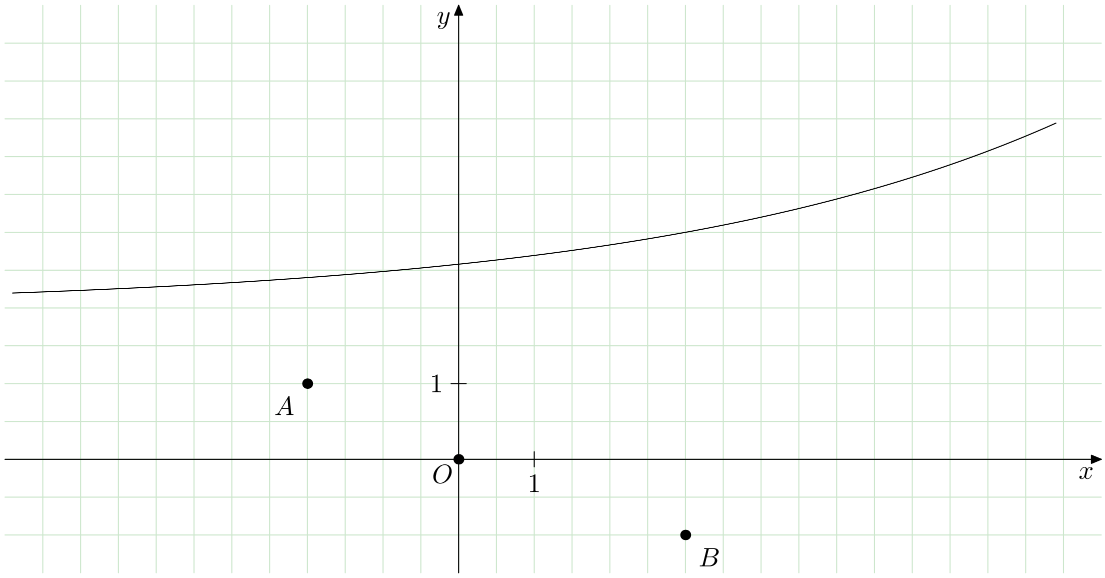
$\overline{A_nB_n}(x) = \left[\log_{1,5}\frac{x+2}{x-1} - 3\right]\text{LE}$

(d) Am Schnittpunkt wird eine der Streckenlängen $\overline{A_nB_n}$ zu Null:

$\Leftrightarrow \quad \log_{1,5}\frac{x+2}{x-1} = 3 \quad | \; 1,5 \uparrow \qquad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{x-1} = 1,5^{\,3} = 3,375$

$\Leftrightarrow \quad x = 2\frac{5}{19} \quad x \approx 2,26$

4.



Gegeben sind die Punkte $A(-2 \mid 1)$ und $B(3 \mid -1)$ sowie die Funktion f mit der Gleichung $y = 1{,}2^{\,x-3} + 2$ auf $G = \mathbb{R}\mathrm{X}\mathbb{R}$. Ein Ausschnitt des Graphen der Funktion f ist zusammen mit den Punkten A und B oben dargestellt.
Auf dem Graphen von f wandern Punkte $D_n(x \mid 1{,}2^{\,x-3}{+}2)$, so dass Parallelogramme ABC_nD_n entstehen.

(a) Gib die Gleichung der Asymptoten a des Funktionsgraphen an.

(b) Zeichne für $x = -1$ und $x = 2$ die Parallelogramme ABC_1D_1 und ABC_2D_2 ein.

(c) Untersuche, ob sich der Graph der Funktion f und der Trägergraph der Punkte C_n außerhalb des I. Quadrantens schneiden.

(d) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Parallelogramme ABC_nD_n gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = (5 \cdot 1{,}2^{x-3} + 2x + 9) \text{ FE}.$$

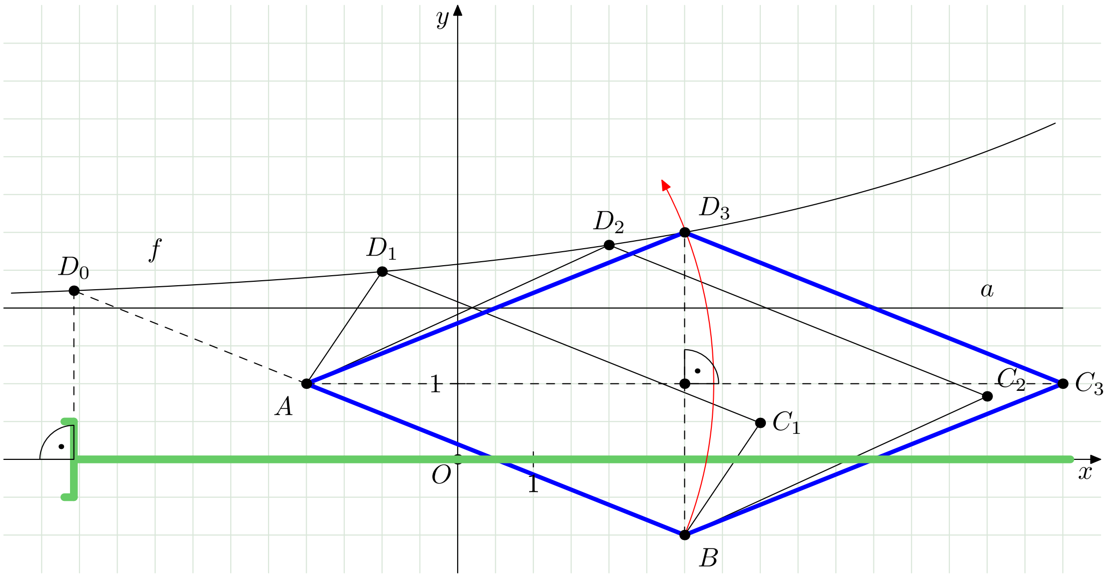
(e) Unter allen Parallelogrammen ABC_nD_n gibt es die Raute ABC_3D_3.

- Konstruiere diese Raute. Konstruktionslinien müssen sichtbar bleiben.
- Berechne den Flächeninhalt der Raute, indem du die erforderlichen Größen der Zeichnung entnimmst.
- Bestätige mit Hilfe des Ergebnisses der Aufgabe (d) dein Ergebnis für die Rautenfläche.

(f) Stelle in deiner Zeichnung die Menge aller Belegungen von x dar, für die es Parallelogramme ABC_nD_n gibt.

Lösung: (a) a: $y = 2$.

(b)



(c) Im II. Quadranten liegen alle Punkte C_n unterhalb der Asymptote a und oberhalb der x-Achse, weil in jedem der Parallelogramme ABC_nD_n der Punkt C_n jeweils 2 LE unterhalb seines Punktes D_n liegt. Damit hat der Trägergraph der Punkte C_n die x-Achse als Asymptote. Alle Punkte des Graphen der Funktion f liegen aber oberhalb der Asymptoten a. Also meiden sich die beiden Graphen außerhalb des I. Quadranten. **Hinweis:** Natürlich könntest du auch die Gleichung des Trägergraphen f' der Punkte C_n rechnerisch herleiten: Er ensteht durch Parallelverschiebung des Graphen der Funktion f mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dann müsstest du die beiden Graphen rechnerisch zum Schnitt bringen. Es stellt sich heraus, dass die Lösungsmenge der zugehörigen Gleichung leer ist.

(d) Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD_n} = \begin{pmatrix} x+2 \\ 1,2^{x-3}+1 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \quad A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & x+2 \\ -2 & 1,2^{x-3}+2 \end{vmatrix} \text{ FE} = [5 \cdot (1,2^{x-3}+1) + 2 \cdot (x+2)] \text{ FE}$$

$$\Rightarrow \quad A(x) = (5 \cdot 1,2^{x-3} + 5 + 2x + 4) \text{ FE} = (5 \cdot 1,2^{x-3} + 2x + 9) \text{ FE}.$$

(e)
- Siehe Zeichnung: Alle Rauten haben vier gleich lange Seiten. Der Kreisbogen um den Punkt A mit dem Radius $\overline{AB}$ schneidet den Graphen der Funktion f im Punkt D_3. Z.B. liefert dann die Spiegelung des Punktes A an der Diagonalen $[BD_3]$ den Punkt C_3.
- $A_{Raute} = 0,5 \cdot \overline{AC_3} \cdot \overline{BD_3} = (0,5 \cdot 10 \cdot 4)\,\text{FE} = 20\,\text{FE}$
- Dem Anschein nach hat also der Abszissenwert x des Punktes D_3 den Wert 3.
  $\Rightarrow \quad A(3) = (5 \cdot 1,2^{3-3} + 2 \cdot 3 + 9)\,\text{FE} = 20\,\text{FE}.$

(f) Der Punkt D_0 ist der Schnittpunkt der Halbgeraden $[BA$ mit dem Graphen von f. An dieser Stelle entartet das betreffende Parallelogramm zur Strecke.

Links von D_0 kehrt sich der Drehsinn der Parallelogramme ABC_nD_n um, was nicht erlaubt ist.
Also stellt die fett markierte Halbgerade auf der x-Achse, die senkrecht unter D_0 anfängt und sich beliebig weit nach rechts fortsetzt, die Menge aller zulässigen x-Werte für Parallelogramme ABC_nD_n dar.
Anmerkungen:

- In der Zeichnung scheint $x = -5$ die linke Grenze zu sein. Genauer: $x = -5{,}073\,663\,564\ \ldots$
- Unter dem Dateinamen „10eh038.gxt“ sind die Lösungen dynamisch nachzuvollziehen.

5. Die größte Zahl die man aus drei Ziffern bilden kann, ist 9^{9^9}.
Wohlgemerkt: $9^{9^9} = 9^{(9^9)}$. Dagegen ist nämlich $(9^9)^9 = 9^{9\cdot 9} = 9^{81}$.
   (a) Berechne die letzte Ziffer des Potenzwertes.
   (b) Berechne möglichst genau, aus wie vielen Ziffern der Wert dieser Potenz besteht.
   (c) Stelle dir vor, eine Klasse aus 30 Schülerinnen und Schülern bekäme den Auftrag, den Wert dieser Potenz Ziffer für Ziffer aufzuschreiben, wobei jede/jeder gleich viele Ziffern übernimmt.
   Wie lange hätten alle zu tun, wenn pro Sekunde eine Ziffer notiert wird?

Lösung: (a)

x	1	2	3	4	5	...
9^x	9	81	729	6561	59049	...

Bei geradem Exponenten lautet die Endziffer stets 1, bei ungeradem Exponenten 9. Andere Endziffern außer 1 oder 9 gibt es nicht.
$9^{9^9} = 9^{387\,420\,489}$; die letzte Ziffer des Exponenten ist 9, also ungerade. Damit endet der Wert der Potenz 9^{9^9} auf die Ziffer 9.

(b) $9^{9^9} = 9^{(9^9)} = 9^{387\,420\,489}$
Diese Zahl gilt es nun, in eine Potenz mit der Basis 10 zu verwandeln, weil der Exponent jeder Zehnerpotenz die Stellenzahl des Potenzwertes wiedergibt:

$$\begin{aligned} 9^{387\,420\,489} &= x & &\mid \log_{10} \\ 387\,420\,489 \cdot \log_{10} 9 &= \log_{10} x & & \\ 369\,693\,100 &\approx \log_{10} x & &\mid 10\uparrow \\ 10^{369\,693\,100} &\approx x & & \end{aligned}$$

Das bedeutet: Der Wert der Potenz 9^{9^9} hat etwa 369 693 100 Stellen.

(c) Für die Niederschrift von 369 693 100 Ziffern brauchst du also 369 693 100 s.
$1\,\mathrm{d} = 86\,400\,\mathrm{s}$.
$369\,693\,100\,\mathrm{s} : 86\,400\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \approx 4279\,\mathrm{d}$.

Bei 30 Schülerinnen/Schülern hätte also jede(r) 4279 d : 30 $\approx$ 142 d, also ca. viereinhalb Monate **pausenlos** zu tun.

Anmerkung: Neben den vier Grundrechenarten wurde hier das Potenzieren zur Darstellung der größten Zahl „aus drei Ziffern“ (und nicht nur „dreiziffrigen“) herangezogen. Es gibt noch ein Rechenzeichen, mit dem man den Zahlenwert bis ins Unermessliche steigern könnte:
Es ist das Zeichen „!“ (sprich: „Fakultät“), das beispielsweise die folgende Bedeutung hat: $3\,!$ (sprich: „Drei Fakultät“) $= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ oder $5\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.
Damit eröffnen sich enorme Möglichkeiten: $(3\,!)\,!$ oder kurz $3\,!\,! = 6\,! = 720$ usw.
Es wird jetzt klar, dass es unter Einbeziehung des Fakultätszeichens für die größte Zahl aus drei Ziffern nach oben keine Grenze gibt: $9\,!\,!\,!\ldots^{9\,!\,!\,!\ldots^{9\,!\,!\,!\ldots}}$
Das Fakultätszeichen taucht jedoch in der Regel im Stoff der Sekundarstufe I lediglich im Kapitel „Daten und Zufall“ auf.

3. Trigonometrische Funktionen

1. Ermittle die Koordinate x des Punktes $C(x \mid 1)$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC mit $A(2 \mid -2)$, $B(2 \mid 5)$ und $\gamma = 90°$

   (a) durch eine Zeichnung,

   (b) durch drei verschiedene Rechenwege.

Lösung: (a) $C(-1,46 \mid 1)$

(b) $C(-1,46 \mid 1)$

2. Die Ecken C_n von Dreiecken ABC_n mit $A(1 \mid 1)$, $B(6 \mid 4)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 5$.

   Konstruiere die beiden möglichen rechtwinkligen Dreiecke ABC_1 und ABC_2 mit jeweils $\gamma = 90°$ und berechne die $x-$Koordinate der Eckpunkte C_1 und C_2.

Lösung: $x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

3. Vom Viereck $ABCD$ sind die Punkte $A(-2 \mid 0)$, $C(4 \mid 4{,}5)$, $D(-2 \mid 3)$, sowie $a = 5\,\text{LE}$, $f = 7\,\text{LE}$, und $\sphericalangle BDC = 65{,}83°$ gegeben.

   (a) Konstruieren Sie das Viereck $ABCD$. Für die Zeichnung: $-3 \leqq x \leqq 5$ und $-3 \leqq y \leqq 5$

   (b) Berechnen Sie die Maße der Winkel α und δ, sowie die Länge der Seite b.

   (c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ACD mit drei verschiedenen Formeln.

Lösung: (a) -.-

(b) $\alpha = 120° \quad \delta = 104{,}04° \quad b = 7{,}20\,LE$

(c) $A_{ABC} = 9\,FE$

4. Ein Segelflieger wollte von A-Dorf über B-Stadt nach C-Berg und wieder zurück nach A-Dorf fliegen. Aus flugtechnischen Gründen tritt er jedoch am Punkt D den sofortigen Rückflug an.

   (a) Berechnen Sie die Länge der Strecke, die der Flieger zurücklegt.

(b) Berechne Sie, um wie viele Kilometer der geplante Flug länger gewesen wäre als die tatsächlich zurückgelegte Strecke.

Lösung: (a) $178,4\,\mathrm{km}$

(b) $48,6\,\mathrm{km}$

5. Ein Flugzeug fliegt auf geradlinigem Kurs und in gleichbleibender Höhe von $500\,\mathrm{m}$ mit einer Geschwindigkeit von $150\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ genau über einen Beobachter hinweg.

   Wie weit ist das Flugzeug nach $20\,\mathrm{s}$ vom Beobachter entfernt und unter welchem Winkel gegen die Horizontale beobachet er es dann?

Lösung: ca. $3041\,\mathrm{m}$

6. Die Plattform eines Leuchtturms befindet sich in $23,8\,\mathrm{m}$ Höhe. Mit einem Fernrohr sieht man ein vor Anker liegendes Schiff unter einem Winkel von $12,9°$.

   Wie weit ist das Schiff horizontal vom Fuß des Leuchtturms entfernt, wenn sich das Fernrohr $1,60\,\mathrm{m}$ über der Plattform befindet?

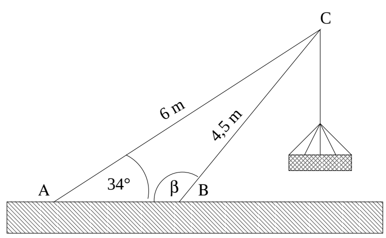
Lösung: ca. $110\,\mathrm{m}$

7. aednern Der Giebel eines Hauses soll mit einer symmetrischen Fachwerkkonstruktion verziert werden. Alle eingezeichneten Srecken stellen Balken dar.

   Wie viel Meter Balken braucht man insgesamt, wenn die Giebelbreite $\overline{AB} = 6,40\,\mathrm{m}$ und der Neigungswinkel $\alpha = 50°$ beträgt?

Lösung:

8. Auf einem Kinderspielplatz ist an der Spitze eines Stahlgestells ABC ein Autoreifen zum Schaukeln aufgehängt. (Siehe Skizze)



(a) Berechnen Sie das Maß des Winkels β.

(b) Wie hoch befindet sich die Spitze C über dem Erdboden?

(c) Zur Verstärkung der Konstruktion soll von B aus eine Stütze s senkrecht zur Strebe $[AC]$ eingebaut werden. Berechnen Sie die Länge dieser Stütze s.

Lösung: (a) $\beta \approx 131,79°$

(b) ca. $3,36$m

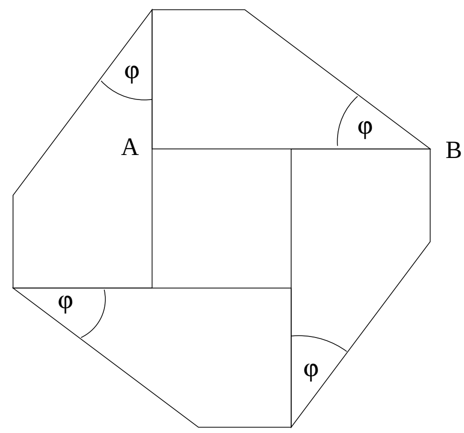
(c) ca. $1,11$m

9. **Hinweis:** Gegebenenfalls sind alle Ergenbisse auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.
Die Figur enthält im Zentrum ein Quadrat mit der Seitenlänge 2 cm, das von vier kongruenten Trapezen umgeben ist.
Es gilt $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ und $\varphi \in [26,57°; 90°]$.

(a) Zeichnen Sie diese Figur für $\varphi = 35°$.

(b) Zeigen Sie: Nur für diejenigen Winkelmaße φ, für die $\tan\varphi > 0,5$ gilt, gibt es Trapeze.

(c) Berechnen Sie φ so, dass der Umriss der Figur zum Quadrat wird.



(d)
- Berechnen Sie φ so, dass der achteckige Umriss der Figur lauter gleich lange Seiten hat.
- Ist dieses Achteck aus lauter gleich langen Seiten regelmäßig? Begründen Sie Ihre Ansicht.

(e) Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Figur in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $A(\varphi) = \left(36 - \dfrac{2}{\tan\varphi}\right)\,\text{cm}^2$]

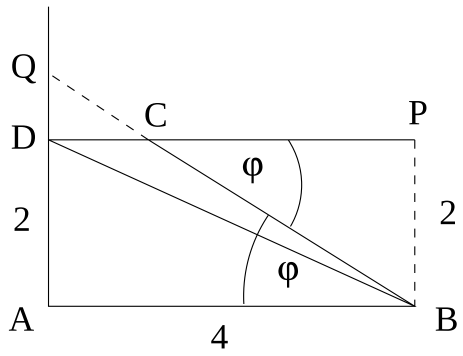
(f) Unter allen Achtecken gibt es eines, in dem am Rand 2 cm lange Seiten auftauchen. Bestimmen Sie die zugehörige Belegung von φ.

Lösung:

Wir rechnen nur mit Maßzahlen.

(a) —

(b)



Nur für $C \in]DP]$ gibt es Trapeze. Also muss der Punkt Q oberhalb vom Punkt D liegen:
$\tan\varphi = \frac{\overline{QA}}{\overline{AB}} > \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = 0,5.$

(c) Es gibt zwei Lösungen:

1. $C = D$. $\overline{BD}$ ist die Seitenlänge: $\tan\varphi = 0,5 \quad \varphi_1 \approx 26,57°$.
2. $C = P$. $\varphi_2 = 90°$.

(d) • 1. Möglichkeit:

Siehe Zeichnung zur Lösung b).

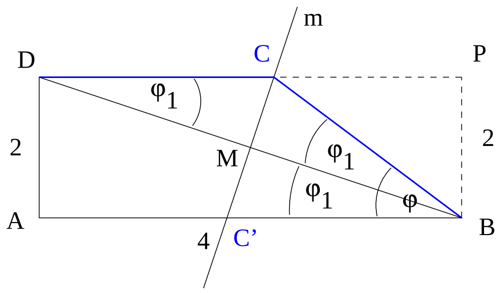
Es muss gelten: $\overline{CB} = \overline{DC}$.
ΔCBP: $\sin\varphi = \frac{2}{\overline{CB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{CB} = \frac{2}{\sin\varphi}$.
Weiter gilt: $\overline{DC} = \overline{DP} - \overline{CP} = 4 - \overline{CP}$.
ΔCBP: $\tan\varphi = \frac{2}{\overline{CP}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{CP} = \frac{2}{\tan\varphi} \quad \Rightarrow \quad \overline{DC} = 4 - \frac{2}{\tan\varphi}$.

$$
\begin{aligned}
\text{Also: } \overline{CB} = \overline{DC} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sin\varphi} = 4 - \frac{2}{\tan\varphi} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 + \cos\varphi = 2\sin\varphi \\
&\Leftrightarrow \quad \sin\varphi - 0,5\cos\varphi = 0,5
\end{aligned}
$$

Mit $0,5 \approx \tan 26,57°$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\sin\varphi - \frac{\sin 26,57°}{\cos 26,57°}\cos\varphi &\approx 0,5 \\
\sin\varphi\cos 26,57° - \sin 26,57°\cos\varphi &\approx 0,5 \cdot \cos 26,57° \\
\sin(\varphi - 26,57°) &\approx 0,5 \cdot \cos 26,57° \\
\varphi - 26,57° &\approx 26,56° \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \approx 53,13°
\end{aligned}
$$

2. Möglichkeit: Man erzeugt durch die Mittelsenkrechte m das gleichschenklige Dreieck DBC:



Wegen $\sphericalangle DBA = \varphi_1$ [vgl. Lösung c)] folgt $\sphericalangle BDC = \varphi_1$ (Z-Winkel).
Also muss auch $\sphericalangle CBD = \varphi_1$ sein.
$\Rightarrow \quad \varphi$ ist doppelt so groß wie φ_1: $\varphi \approx 53,14°$.

- Alle Innenwinkel dieses gleichseitigen Achtecks müssten gleiches Maß haben: $180° - \varphi = 90° + \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 45°$ (siehe Figur in der Aufgabenstellung).
Das Ergebnis steht im Widerspruch zur Lösung in einer der beiden vorhergehenden Möglichkeiten; also sind keine regelmäßigen Achtecke darunter.

(e) Siehe Zeichnung zur Lösung b):
$A(ABCD) = 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \overline{CP}$
$\Rightarrow \quad A(ABCD) = 8 - \frac{2}{\tan\varphi}$ [vgl. Lösung d) 1. Möglichkeit]
$\Rightarrow \quad A(\varphi) = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (8 - \frac{2}{\tan\varphi}) = 36 - \frac{8}{\tan\varphi}$.

Man betrachte hier erneut den Grenzfall $\varphi = 90°$.

(f) Siehe Abbildung in der Lösung b):
Der Fall $\overline{CB} = 2$ kann nicht eintreten, denn die Hypotenuse $[CB]$ im ΔCBP ist stets länger als die 2 cm lange Kathete $[BP]$.
Also: $\overline{DC} = 2$; damit ist das Dreieck CBP gleichschenklig-rechtwinklig und es gilt $\varphi = 45°$.
$A(45°) = 36 - 8 = 28$.

10. Das Parallelogramm $ABCD$ besitzt die Seitenlängen $\overline{AB} = 3a$ und $\overline{AD} = 2a$. Der Winkel BAD hat das Maß ϵ.

(a) Ermitteln Sie durch Rechnung diejenigen Beleguge von ϵ, für die sich Parallelogramme mit dem Flächeninhalt von $5a^2$ ergeben.

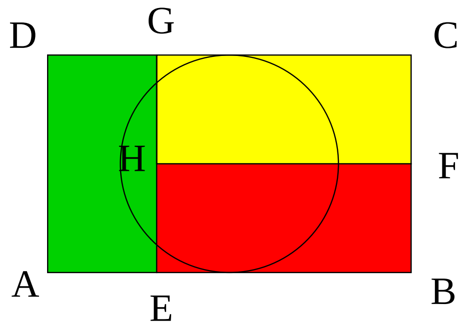
(b) Zeigen Sie, dass man die Länge f der Diagonalen $[BD]$ wie folgt in Ahängigkeit von a und ϵ darstellen kann:
$f = \overline{BD} = \sqrt{13 - 12\cos\epsilon} \cdot a$

Berechnen Sie sodann, für welche Belegung von ϵ die Strecke $[BD]$ $1,5\,a$ lang ist.

Lösung: (a) $\epsilon_1 = 56,44°$ und $\epsilon_2 = 123,56°$

(b) $\epsilon = 26,38°$

11.



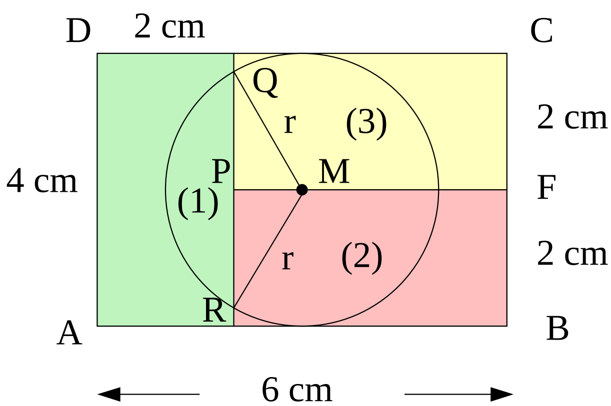
Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet. Alle drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Außerdem gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.
Zusätzlich ist noch ein Kreis eingezeichnet, dessen Mittelpunkt M der Mittelpunkt des Rechtecks $ABCD$ ist.

(a) Begründe: Es muss $\overline{AD} = 4\,\text{cm}$ gelten. Zeichne dann die obige Figur.

(b) Berechne jeweils den Anteil der drei Rechtecke im Inneren an der Kreisfläche in Prozent. Runde auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung:

(a) Weil alle Rechtecke im Inneren kongruent sind, muss $\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{AE} = 2\,\text{cm} =$ Kreisradius r gelten. $\Rightarrow$ $\overline{BC} = \overline{AD} = 4\,\text{cm}$.



(b) Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt $A(1)$ des Kreissegmentes (1): (Der Flächeninhalt des Kreises wird später mit $A_\odot$ abgekürzt.)

Wegen $\overline{PM} = 1\,\text{cm}$ und $\overline{MQ} = 2\,\text{cm}$ ist das Dreieck PMQ ein halbes gleichseitiges Dreieck. $\Rightarrow \quad \sphericalangle QMR = 120°$
Das Dreieck RMQ ist dann genauso groß wie ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von 2 cm.

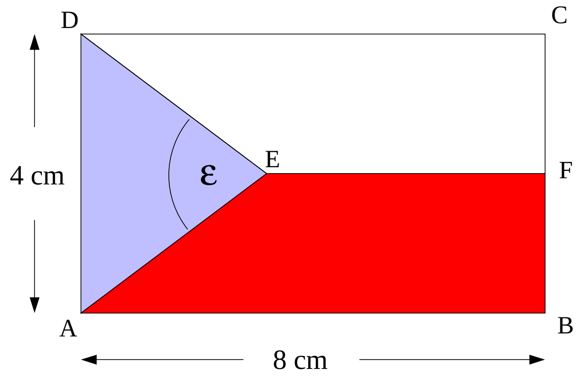
$$A(1) = \left(\frac{120°}{360°} \cdot 2^2\pi - \frac{2^2}{4}\sqrt{3}\right)\,\text{cm}^2 \approx 2,46\,\text{cm}^2$$

$A_\odot = 2^2\pi\,\text{cm}^2 \approx 12,57\,\text{cm}^2$

$$\frac{A(1)}{A_\odot} \approx \frac{2,46\,\text{cm}^2}{12,57\,\text{cm}^2} \approx 19,57\%$$

Und weiter gilt: $\frac{A(2)}{A_\odot} = \frac{A(3)}{A_\odot} \approx (100\% - 19,57\%) : 2 \approx 40,22\%$

12. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = 4\,\text{cm}$. Zusätzlich ist noch das Winkelmaß ε eingezeichnet.
Hinweis: Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichnen Sie die Figur für $\varepsilon = 68°$.

(b) Welche Werte kann ε annehmen, wenn der Punkt E auf der Mittelparallelen des Rechtecks $ABCD$ wandert und wenn dabei das Dreieck AED nicht verschwinden soll?

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt A_D des Dreiecks AED in Abhängigkeit von ε.

$$[\text{ Ergebnis: } A_D = \left(\frac{4}{\tan\frac{\varepsilon}{2}}\right)\,\text{cm}^2\ ]$$

(d) Berechnen Sie ε so, dass die Inhalte aller drei Teilflächen im Inneren des Rechtecks $ABCD$ gleich groß sind. Verwenden Sie dabei das Ergebnis der Aufgabe (e) noch nicht.

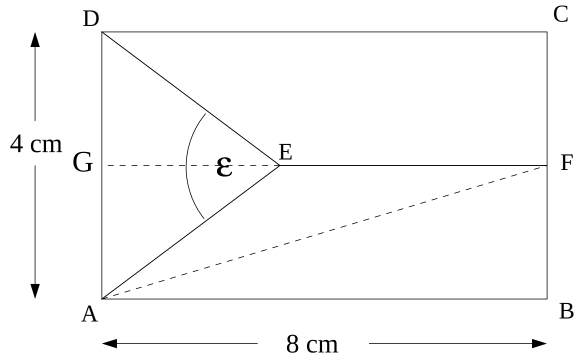
(e) Berechnen Sie den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABFE$ in Abhängigkeit von ε.

$$[\text{ Ergebnis: } A_T = \left(16 - \frac{4}{\tan\frac{\varepsilon}{2}}\right)\ \text{cm}^2\ ]$$

(f) Bestätigen Sie nun das Ergebnis der Aufgabe (d) mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgaben (c) und (e).

Lösung: (a) –

(b)



Das Dreieck AED ist stets gleichschenklig.
Das Winkelmaß ε wird für $E = F$ am kleinsten:

$$\tan\frac{\varepsilon(min)}{2} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GF}} = \frac{2}{8} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\,(\min) \approx 28,07°$$

Andererseits darf der Punkt E nicht auf F liegen; d.h. es gilt stets $\varepsilon < 180°$.
Also gilt insgesamt: $\varepsilon \in [28,07°; 180°[$.
Anmerkung: Es gilt eigentlich $\varepsilon\,(\min) = 28,072\,486\ldots°$, so dass die linke Intervallgrenze nicht exakt angegeben werden kann.

(c) Im Dreieck AEG gilt:

$$\overline{GE} = \frac{2}{\tan\frac{\varepsilon}{2}} \quad .$$

$$A_D = 0,5 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{GE} = 0,5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{\tan\frac{\varepsilon}{2}}\,\text{cm}^2 = \left(\frac{4}{\tan\frac{\varepsilon}{2}}\right)\ \text{cm}^2 \quad .$$

(d) Es muss gelten:

$$A_D = \frac{1}{3} \cdot A(ABCD)$$

$$\text{Also}: \quad \frac{4}{\tan\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{1}{3} \cdot 32 \quad \Leftrightarrow \quad \tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \quad \textbf{(*)} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 41,11°$$

(e) $A_T = 0,5 \cdot (\overline{AB} + \overline{EF}) \cdot \overline{AF}$ und

$$\overline{EF} = 8\,\text{cm} - \overline{GE} = \left(8 - \frac{2}{\tan\frac{\varepsilon}{2}}\right)\ \text{cm}$$

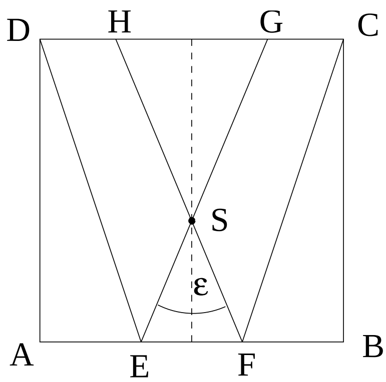
$$A_T = 0,5 \cdot \left(8 + 8 - \frac{2}{\tan\frac{\varepsilon}{2}}\right) \cdot 2\,\text{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad A_T = \left(16 - \frac{4}{\tan\frac{\varepsilon}{2}}\right)\ \text{cm}^2$$

(f) Wir setzen $\tan\frac{\varepsilon}{2} = z$. Dann muss $A_D = A_T$ gelten:

$$\frac{4}{z} = 16 - \frac{2}{z} \quad \Leftrightarrow \quad z = \tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{8}$$

Die Übereinstimmung mit der Gleichung **(*)** in der Lösung der Aufgabe (d) ist damit errreicht.

13.



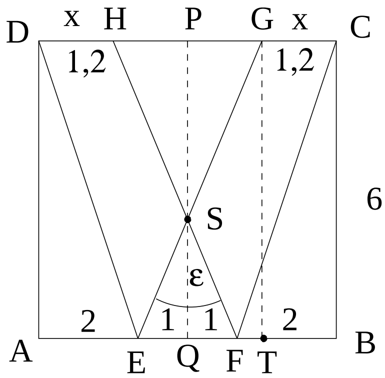
In der obigen Figur ist $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm. Es gilt: $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ und $\sphericalangle ESF = \varepsilon$.
Die Punkte G und H sind auf $[CD]$ beweglich und es gilt $\overline{DH} = \overline{GC} = x$ cm.
Hinweis: Gegebenenfalls sind Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) • Zeichne die Figur für $x = 1,2$.
- Berechne das zugehörige Winkelmaß ε.
  Hinweis: Zeichne vom Punkt G aus eine Hilfsline so ein, dass du die Aufgabe mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken lösen kannst.

(b) Berechne x so, dass das Dreieck EFS gleichseitig wird.

(c) Untersuche elementargeometrisch (d.h. ohne die Verwendung trigonometrischer Funktionen), ob es unter den Dreiecken EFS ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck gibt.

Lösung: (a) • –
-



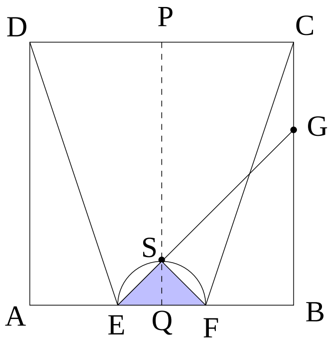
Die gesuchte Hilfslinie ist das Lot $[GT]$ vom Punkt G auf die Seite $[AB]$.
Es gilt$\sphericalangle EGT = \frac{\varepsilon}{2}$ (Z-Winkel) und $\overline{ET} = (4 - 1,2)\,\text{cm} = 2,8\,\text{cm}$.
Im Dreieck ETG gilt dann
$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{2,8}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{2} \approx 25,02° \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 50,04°$.

(b) In diesem Fall muss $\varepsilon = 60° = \sphericalangle FEG$ gelten.
Dann gilt im Dreieck EFG: $\overline{ET} = (4 - x)\,\text{cm}$.

$$\tan 60° = \frac{\overline{GT}}{\overline{ET}} = \frac{6}{4-x} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0,54$$

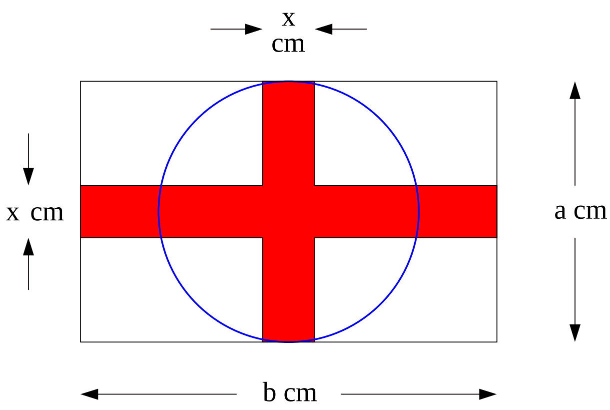
.

(c)



Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck EFS wird dadurch erzeugt, dass man den THALES-Halbkreis über $[EF]$ mit der Symmetrieachse $[PQ]$ schneidet.
Die Halbgerade $[ES]$ müsste die Seite $[CD]$ im Punkt G schneiden. Das ist offenbar nicht der Fall. Also kann das Dreieck EFS nie gleichschenklig-rechtwinklig werden.

14. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England. Zusätzlich wurde noch der Kreis eingezeichnet, dessen Mittelpunkt im „Flaggenmittelpunkt" liegt.



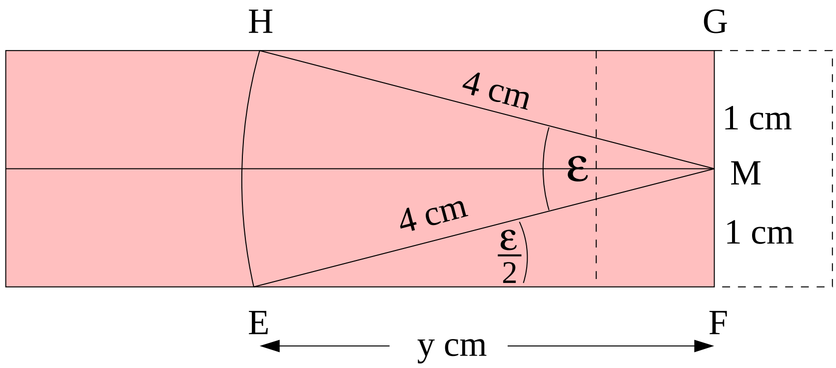
Hinweis: Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne die Figur für $a = 8$, $b = 12$ und $x = 2$.

(b) Wie viel Prozent der Kreuzfläche liegen außerhalb der Kreislinie?

Lösung: (a) –

(b) Wir betrachten die Hälfte des waagrechten Balkens:



$\Delta EFM : y^2 = 4^2 - 1^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{15}$
$A(EFM) + A(HMG) = y \cdot 1\,\text{cm}^2 = \sqrt{15}\,\text{cm}^2 \approx 3,87\,\text{cm}^2$
$\Delta EFM : \sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 28,96°$

$$A(Sektor) = \frac{28,96°}{360°} \cdot 4^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 4,04\,\text{cm}^2$$

Der Teil des Kreuzes, der waagrecht links herausragt:
$2\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} - (4,04 + 3,87)\,\text{cm}^2 = 4,09\,\text{cm}^2$
Insgesamt ragen $8,18\,\text{cm}^2$ des waagrechten Kreuzbalkens aus dem Kreis heraus.

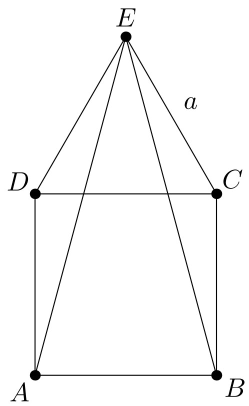
Der Teil des Kreuzes, der senkrecht (z.B. oben) herausragt:
$2\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} - (4,04 + 3,87)\,\text{cm}^2 = 0,09\,\text{cm}^2$
Insgesamt ragen $0,18\,\text{cm}^2$ des senkrechten Kreuzbalkens aus dem Kreis heraus.

Also ragen (gerundet) $8{,}36\,\text{cm}^2$ des Kreuzes aus dem Kreis heraus.

Eine Möglichkeit, die Fläche des Kreuzes zu berechnen, besteht darin, dass du die Flächeninhalte beiden überlappenden Rechtecke, die das Kreuz ergeben, berechnest. Danach musst du jedoch am Ende den Inhalt des Quadrates im Zentrum mit der Seitenlänge $2\,\text{cm}$ einmal abziehen, weil dieses Quadrat ja **beiden** besagten Rechtecken angehört:
$A(Kreuz) = 2 \cdot 8\,\text{cm}^2 + 2 \cdot 12\,\text{cm}^2 = 36\,\text{cm}^2$
Prozentualer Anteil der herausragenden Fläche:

$$\frac{8{,}36}{36} \approx 23{,}22\%\,.$$

15. An das Quadrat $ABCD$ ist das gleichseitige Dreieck DCE mit der Seitenlänge a angefügt worden.



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Zeige elementargeometrisch, also ohne Verwendung von Winkelfunktionen, dass $\sphericalangle AEB = 30°$ gilt.

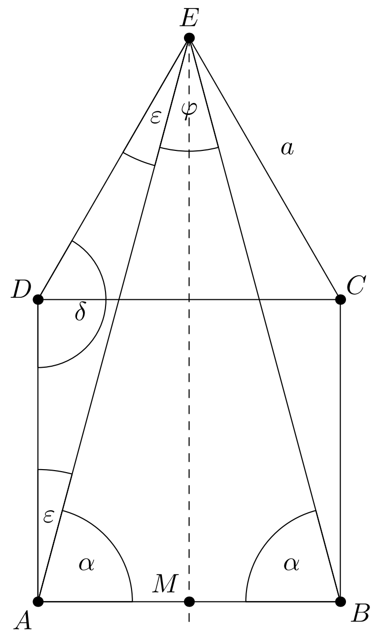
(c) Begründe anhand der Zeichnung, dass $\tan 75° = 2 + \sqrt{3}$ gilt.

(d) Bestätige das Ergebnis der Aufgabe (c) mit Hilfe des folgenden Additionstheorems für die Tangens-Funktion, das in der Formelsammlung steht:

$$\tan(\psi + \zeta) = \frac{\tan\psi + \tan\zeta}{1 - \tan\psi \cdot \tan\zeta}$$

Tipp: Zerlege das Winkelmaß 75° so in zwei besondere Winkelmaße, dass sich jeweils deren Tangens-Werte aus der Formelsammlung entnehmen lassen.

Lösung: (a)



(b) In der Figur ist EM die Symmetrieachse.
Weil die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ mit der des gleichseitigen Dreiecks DCE übereinstimmt, sind die Dreiecke AED und EBC gleichschenklig und wegen der Symmetrie kongruent.
Aus Symmetriegründen ist das Dreieck ABE ebenfalls gleichschenklig.
Weiter gilt: $\delta = 90° + 60° = 150° \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = (180° - 150°) : 2 = 15°$.
$\Rightarrow \quad \alpha = 90° - \varepsilon = 75°$ und $\varphi = 180° - 2 \cdot \alpha = 30°$
Oder am Punkt E: $\varphi = 60° - 2 \cdot \varepsilon = 30°$.

(c) In der Lösung (b) steht: $\alpha = 75°$.

Im Dreieck AME gilt: $\tan 75° = \dfrac{\overline{EM}}{\overline{AM}} = \dfrac{a + \frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \dfrac{\frac{a}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)}{\frac{a}{2}}$

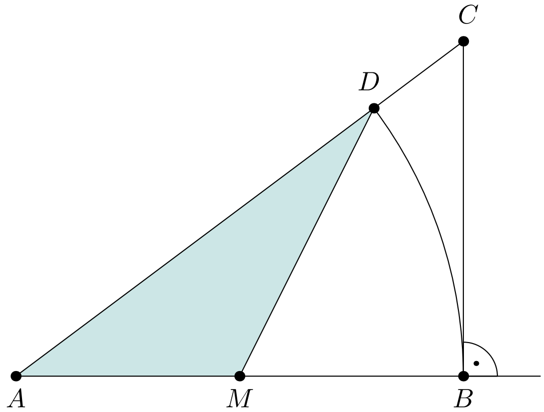
$\Rightarrow \quad \tan 75° = 2 + \sqrt{3}$

(d) Es gilt: $75° = 45° + 30°$. Damit ist $\psi = 45°$ und $\zeta = 30°$
Aus der Formelsammlung: $\tan 45° = 1$ und $\tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad \tan 75° = \tan(45° + 30°) = \frac{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

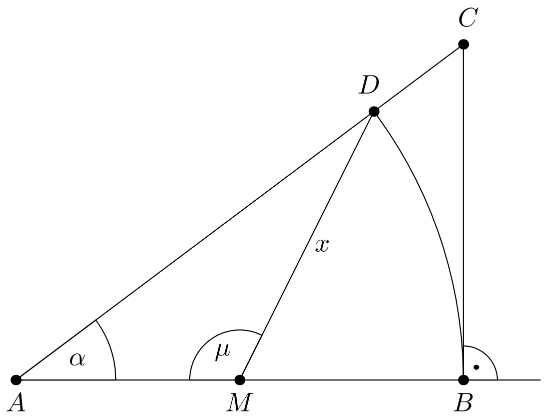
$$\Rightarrow \quad \tan 75° = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = \frac{6 \cdot (2 + \sqrt{3})}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

16.



Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $\overline{AC} = 11,20\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6,72\,\text{cm}$.
Der Mittelpunkt der Kathete $[AB]$ ist M. Der Punkt A ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von B nach D.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks AMD.

Lösung:

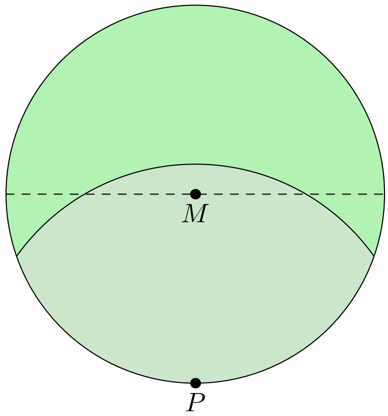


$\Delta ABC : \sin\alpha = \dfrac{6,72}{11,2} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 36,87°$
Weiter gilt: $\overline{AB}^{\,2} = (11,20^{\,2} - 6,72^{\,2})\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 8,96\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad \overline{AM} = 4,48\,\text{cm}$. Wegen $\overline{AD} = 8,96\,\text{cm}$ folgt weiter:
$\Delta AMD : x^{\,2} \approx 4,48^{\,2} + 8,96^{\,2} - 2 \cdot 4,48 \cdot 8,96 \cdot \cos 36,87°$
$\Rightarrow \quad x \approx 6,10\,\text{cm}$.

$$\Delta AMD : \frac{\sin\mu}{8,96} \approx \frac{\sin 36,87°}{6,01} \quad \Rightarrow \quad [\mu \approx 63,45°] \quad \vee \quad \mu \approx 116,55°.$$

$A_{\Delta AMD} \approx 0,5 \cdot 4,48 \cdot 8,96 \cdot \sin 116,55°\,\text{cm}^2 \approx 17,96\,\text{cm}^2$

17. Ziegen gehen sich aus dem Weg

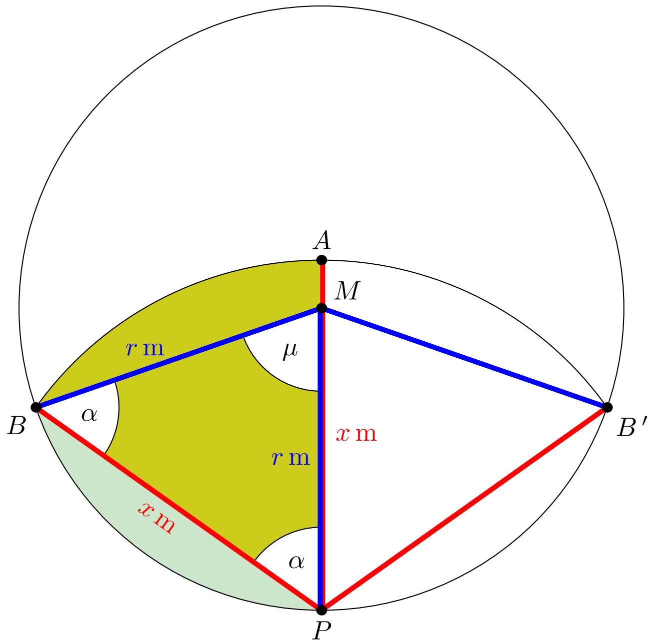


Auf einer kreisförmigen Weide sollen die Ziege „Elsa“ und gleichzeitig ihr angriffslustiger Ziegenbock „Lohengrin“ grasen. Damit er dabei Elsa in Ruhe lässt, wird Lohengrin mit einer Leine an einen Pfahl P, der am Rande der Weide eingeschlagen ist, so angebunden, dass den beiden Tieren gleichgroße Flächen zum Abweiden zur Verfügung stehen.

(a) Zeichne die Figur für $r = 4\,\mathrm{m}$ in einem geeigneten Maßstab.

(b) Wie lang ist die Leine? **Tipp:** Zerlege die Fläche, die „Lohengrin“ beansprucht, in geeignete Teilflächen.

Lösung: (a) Maßstab 1 : 100



(b) $A_{\text{Sektor}\,PAB} = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot x^2 \cdot \pi$ **(1)**

Dreieck PMB: $\mu = 180° - 2\alpha$
Kosinussatz im Dreieck PMB:

$x^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos\mu = 2r^2 - 2r^2 \cos(180° - 2\alpha)$
$x^2 = 2r^2 + 2r^2 \cos\alpha \quad \mathbf{(2)}$
$x = r\sqrt{2}\sqrt{1+\cos 2\alpha} \quad \mathbf{(3)}$

(2) in **(1)**:
$$A_{\text{Sektor}PAB} = \frac{\alpha}{360°} \cdot (2r^2 + 2r^2\cos\alpha) \cdot \pi = \frac{\alpha}{180°} r^2\pi + \frac{\alpha}{180°} r^2 \pi \cos 2\alpha \quad \mathbf{(4)}$$

Dazu muss die Fläche des Segments unterhalb der Sehne $[PB]$ addiert werden:
$$\begin{aligned}
A_{Segment} &= A_{SektorMBP} - A_{\Delta MBP} \\
&= \frac{\mu}{360°} \cdot r^2\pi - \frac{1}{2} r^2 \sin\mu \\
&= \frac{180° - 2\alpha}{360°} \cdot r^2\pi - \frac{1}{2} r^2 \sin(180° - 2\alpha) \\
A_{Segment} &= \frac{1}{2} r^2\pi - \frac{\alpha}{180°} \cdot r^2\pi - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha \quad \mathbf{(5)}
\end{aligned}$$

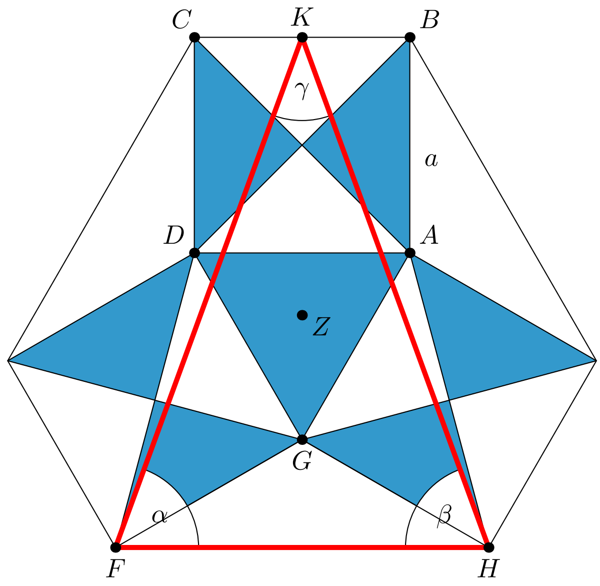
Sektor- und Segmentfläche ergeben zusammen [**(4)**+**(5)**] die halbe Weidefläche von „Lohengrin“:
$$\left(\frac{\alpha}{180°} r^2\pi + \frac{\alpha}{180°} r^2\pi \cos 2\alpha\right) + \left(\frac{1}{2} r^2\pi - \frac{\alpha}{180°} \cdot r^2\pi - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha\right) = \frac{1}{4} r^2\pi$$

Diese Gleichung lässt sich vereinfachen zu:
$$2\sin 2\alpha - \frac{\alpha}{45°}\pi\cos 2\alpha = \pi \quad \mathbf{(*)}\text{, wobei } \alpha \text{ in Grad angegeben wird.}$$

Natürlich kommt es dabei nicht mehr auf die Länge des Kreisdurchmessers an.
Nun ist die Lösung der Gleichung **(*)** nicht in geschlossener Form darstellbar. Das liegt daran, dass darin sowohl α als auch $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ auftauchen.
Mit dem SOLVER eines Taschenrechners ergibt sich: $\alpha \approx 54{,}59°$.
In **(3)** eingesetzt erhältst du die Leinenlänge $x \approx r \cdot 1{,}16$. Das bedeutet: Die Leine ist etwa 16 % länger als der Kreisradius r.
Anmerkungen:

- Weil Lohengrins Leine um seinen Hals liegt, könnte er Elsa mit seinen Hörnern trotzdem noch ärgern.
- Die Frage: „Wie lang müsste die Leine sein, damit Lohengrin p % der Kreisfläche erreichen kann?“ ist durch eine leichte Änderung der Gleichung **(*)** zu beantworten.

18.

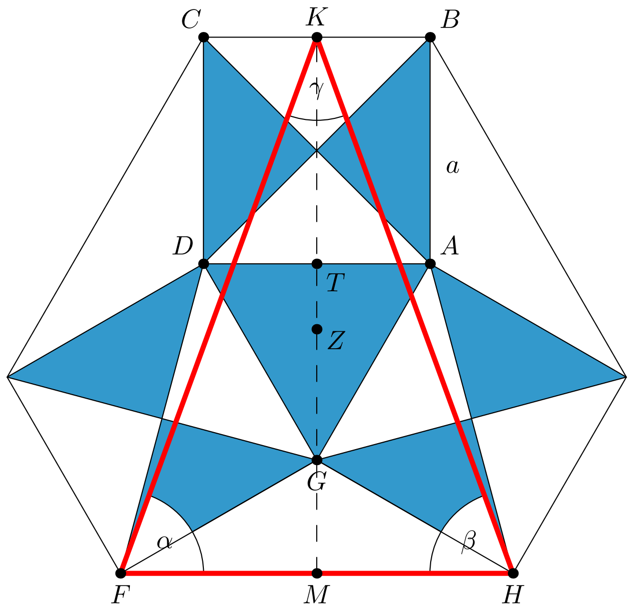


Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Im Zentrum befindet sich das gleichseitige Dreieck ADG mit dem Mittelpunkt Z. Auf den Seiten dieses Dreiecks wurden drei Quadrate errrichtet. Es gilt: $\overline{AB} = a$. Zusätzlich wurde noch das Dreieck FHK eingezeichnet.

(a) Zeichne die Figur für $a = 3\,\text{cm}$.

(b) Berechne α, β und γ.

Lösung: (a)



(b) Die Gerade MK ist die Symmetrieachse des Dreiecks FHK. Also gilt $\alpha = \beta$.
Im gleichseitigen Dreieck ADG stellt die Strecke $[GT]$ die Dreieckshöhe dar:

$\overline{GT} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3}.$

Der Punkt G ist der gemeinsame Eckpunkt zweier Quadrate und des gleichseitigen Dreiecks ADG. Also gilt: $\sphericalangle HGF = 360° - 2 \cdot 90° - 60° = 120°$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle HFG = \sphericalangle GHF = (180° - 120°) : 2 = 30°$

Das Dreieck FHG wird durch seine Höhe $[GM]$ in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt. $\Rightarrow \quad \sphericalangle FGM = \sphericalangle MGH = (90° - 30°) : 2 = 60°$

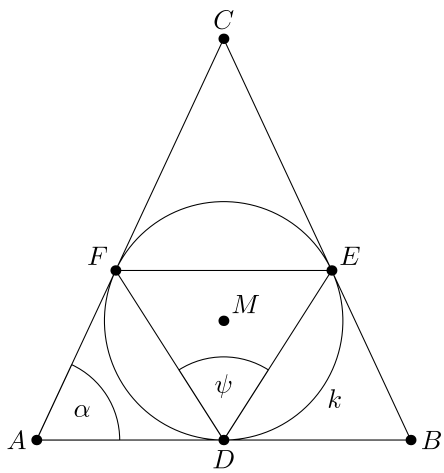
Wegen $\overline{FG} = \overline{AG} = a$ gilt: $\Delta\, FMG \cong \Delta\, GMH \cong \Delta\, GAT$. Es sind alles halbe gleichseitige Dreiecke: $\overline{GM} = \frac{1}{2}\, a$.

Im rechtwinkligen Dreieck FMK gilt dann:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{KT} + \overline{TG} + \overline{GM}}{\overline{FM}} = \frac{a + \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot a}{\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow \quad \alpha = \beta \approx 69{,}90°$ und $\gamma \approx 180° - 2 \cdot 69{,}90° = 40{,}20°$

19.



Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit der Basis $[AB]$. Der Inkreis k mit dem Mittelpunkt M berührt die Dreiecksseiten in den Punkten D, E und F.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 9\,\text{cm}$ und $\alpha = 65°$.

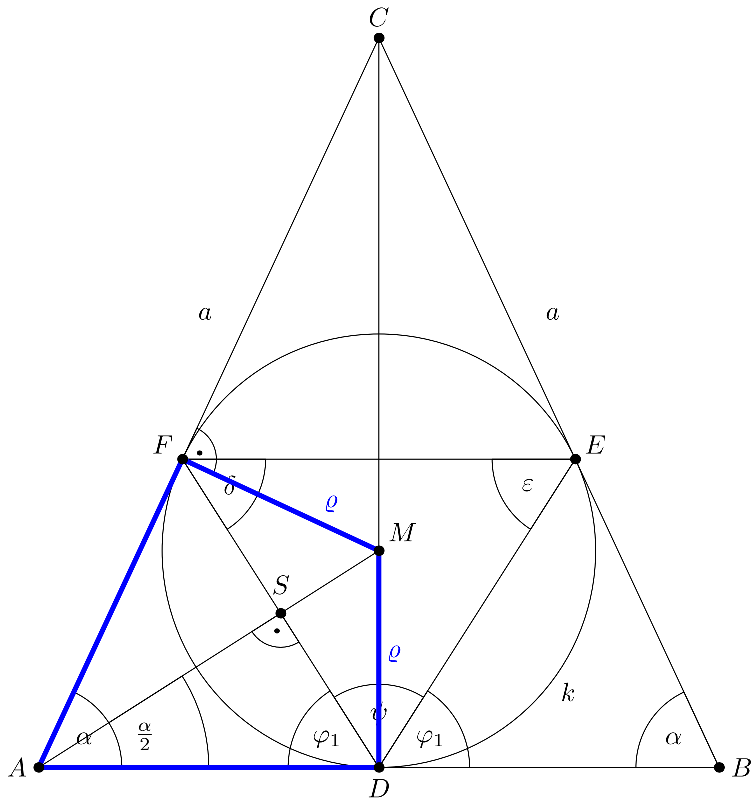
(b)
- Zeichne das Viereck $ADMF$ ein.
- Zeige: $\psi = \alpha$.

(c) • Zeige: Für das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke DEF und ABC gilt:

$$\frac{A_{\Delta DEF}}{A_{\Delta ABC}} = \cos\alpha(1-\cos\alpha).$$

• Welche besondere Form hätten die Dreiecke ABC und DEF, wenn der Flächenanteil des Dreiecks DEF an dem des Dreiecks ABC maximal sein soll?

Lösung: (a)



(b) • Siehe obige Zeichnung.

• Das Viereck $ADMF$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, denn die Diagonale $[AM]$ ist die Halbierende des Winkels mit dem Maß α und damit die Symmetrieachse dieses Vierecks.
Das Dreieck ADS ist rechtwinklig, weil die beiden Diagonalen in jedem Drachenviereck senkrecht aufeinander stehen:
$\varphi_1 = 90° - \dfrac{\alpha}{2} = \varphi_2$. Weiter muss gelten: $\varphi_1 + \varphi_2 + \psi = 180°$
$\Rightarrow \quad \psi = 180° - 2 \cdot \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \psi = \alpha.$

(c) • Mit $\overline{CA} = \overline{CB} = a$ gilt: $A_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin\gamma$.

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin(180° - 2\alpha) = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2}a^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\boxed{A_{\Delta ABC} = a^2 \sin\alpha\cos\alpha} \qquad \textbf{(*)}$$

$A_{\Delta DEF} = \dfrac{1}{2}\cdot\overline{FD}^{\,2}\sin\alpha \qquad$ **(**)**

Wende im Dreieck ADF den Kosinussatz an:

$\overline{FD}^{\,2} = \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 - 2\cdot\dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{c}{2}\cdot\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{c^{\,2}}{4}\cdot(1-\cos\alpha)$ in **(*)**:

$$\boxed{A_{DEF} = \frac{c^{\,2}}{4}\cdot(1-\cos\alpha)\sin\alpha}$$

$$\frac{A_{\Delta DEF}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{c^{\,2}}{4}\cdot(1-\cos\alpha)\sin\alpha}{a^{\,2}\sin\alpha\cos\alpha} = \left(\frac{\frac{c}{2}}{a}\right)^2\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

Im Dreieck ADC gilt: $\dfrac{\frac{c}{2}}{a} = \cos\alpha$

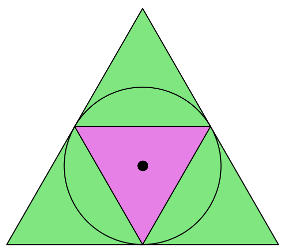
$$\Rightarrow \quad \frac{A_{\Delta DEF}}{A_{\Delta ABC}} = \cos^2\alpha\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha(1-\cos\alpha)$$

Dabei darf aber α nicht 90° werden. **(Warum?)**

- $T(\alpha) = \cos\alpha(1-\cos\alpha) = -\cos^2\alpha + \cos\alpha = -\left(\cos\alpha - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}$

  $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ liefert $T_{max} = \dfrac{1}{4}$

  Dann muss aber $\alpha = 60^\circ$ gelten; d.h. in diesem Fall sind die Dreiecke ABC und DEF jeweils gleichseitig. Das innere Dreieck nimmt 25% der Gesamtfläche ein. Das sieht dann so aus:



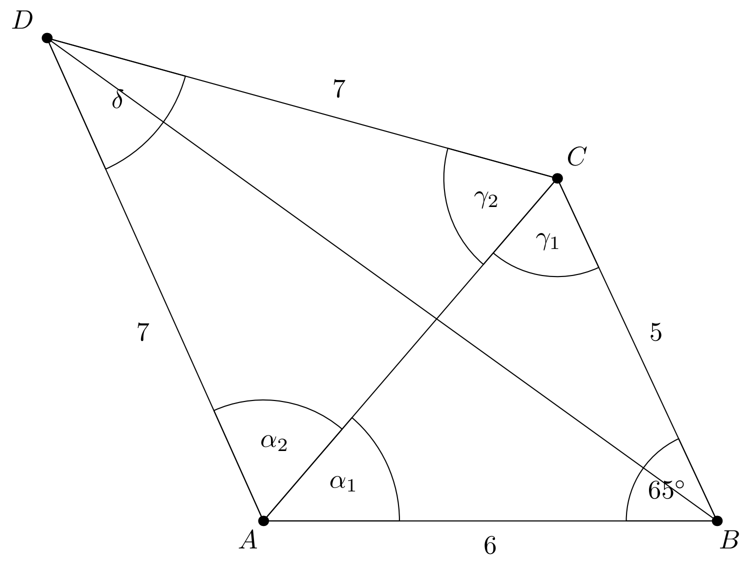
20. Ein Viereck $ABCD$ ist durch folgende Bestimmungsstücke festgelegt:
    $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\beta = \sphericalangle CBA = 65^\circ$, $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$ und $\overline{DC} = \overline{AD} = 7\,\text{cm}$.
    (a) Zeichne dieses Viereck.
    $[AB]$ ziemlich weit rechts, Platzbedarf über $[AB]$: 8 cm
    (b) Begründe: Es handelt sich nicht um einen achsensymmetrischen Drachen.

(c) Berechne die Länge der Diagonalen $[AC]$.

(d) Berechne die Länge der Diagonalen $[BD]$.

(e) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$.

Lösung: (a)



(b) Zwar sind die Seiten $[AD]$ und $[CD]$ gleich lang, aber die Seiten $[BA]$ und $[BC]$ sind es nicht.

(c) $\Delta\, ABC$: $\overline{AC}^{\,2} = \left(5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 65°\right)\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} \approx 5{,}97\,\text{cm}$

(d) $\Delta\, ABC$: $5^2 = 6^2 + 5{,}97^{\,2} - 2 \cdot 6 \cdot 5{,}97 \cdot \cos\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \approx 49{,}38°$
$\Delta\, ACD$: $5{,}97^{\,2} = 7^{\,2} + 7^{\,2} - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos\delta \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 50{,}48°$
$\Delta\, ACD$: $\alpha_2 = \gamma_2 \approx (180° - 50{,}48°) : 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \gamma_2 \approx 64{,}76°$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle BAD = \alpha_1 + \alpha_2 \approx 114{,}14°$
$\Rightarrow \quad \overline{BD}^{\,2} \approx \left(6^2 + 7^{\,2} - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos 114{,}14°\right)\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} \approx 10{,}92\,\text{cm}$

(e) $A_{ABCD} = A_{\Delta ABC} + A_{\Delta ACD}$:

$$A_{ABCD} \approx \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin 65° + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \sin 50{,}48°\right)\,\text{cm}^2 \approx 32{,}49\,\text{cm}^2$$

21. Ein Dreieck ABC ist durch folgende Bestimmungsstücke festgelegt:
$\overline{AB} = 10\,\text{cm}$, $\alpha = \sphericalangle\, BAC = 50°$ und $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

   (a) • Zeichne dieses Dreieck. Platzbedarf über $[AB]$: 8cm
       • Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

   (b) Man erhält neue Dreiecke AB_nC_n dadurch, dass die Seite $[AC]$ über C hinaus um x cm verlängert und gleichzeitig die Seite $[AB]$ von B aus um $2x$ cm verkürzt wird.
       • Zeichne farbig für $x = 1{,}5$ das Dreieck AB_1C_1 ein.

- Berechne den Flächeninhalt des Dreeicks AB_1C_1.
- Berechne den Abstand d des Punktes C_1 von der Seite $[AB]$.
- Berechne die Länge der Strecke $[B_1C_1]$.

(c) Notiere alle Belegungen von x, für die es neue Dreiecke AB_nC_n gibt.

(d) Zeige: Für den Flächeninhalt A der neuen Dreiecke AB_nC_n gilt in Abhängigkeit von x (gerundet):
$$A(x) = (-0,77x^2 - 0,77x + 23,1)\,\mathrm{cm}^2.$$

(e)
- Berechne diejenige Belegung von x, die den Extremwert des Terms $T(x) = -0,77x^2 - 0,77x + 23,1$ liefert.
- Begründe: Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es keines, dessen Flächeninhalt A so groß wie der Extremwert des zugehörigen Terms $T(x)$ ist.

(f) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das Dreieck AB_2C_2, das einen Flächeninhalt von $7,7\,\mathrm{cm}^2$ aufweist. Berechne den zugehörigen x-Wert.

(g) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das gleichschenklige Dreieck AB_3C_3, mit der Basis $[B_3C_3]$. Berechne den zugehörigen x-Wert.

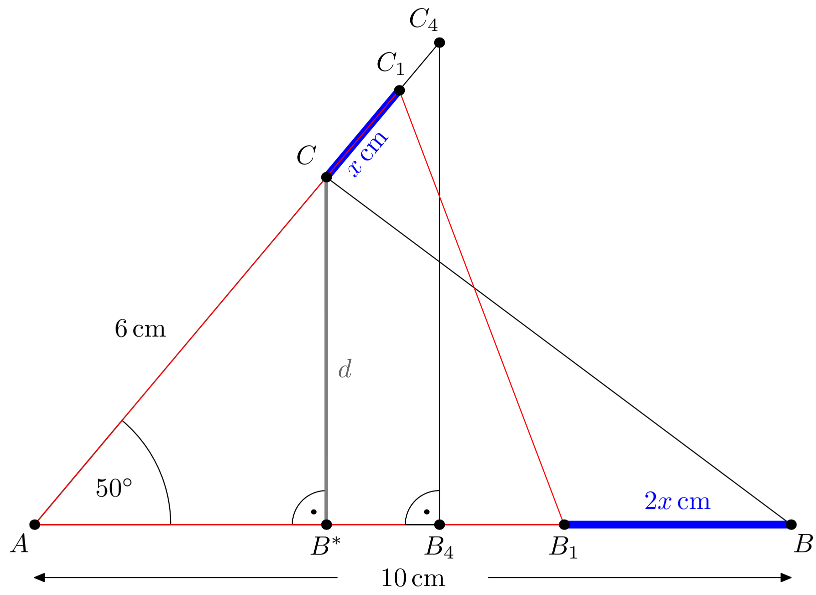
(h) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das rechtwinklige Dreieck AB_4C_4 mit der Hypotenuse $[AC_4]$.
- Berechne den zugehörigen x-Wert.

  [Ergebnis: $x \approx 2,32$]
- Zeichne dieses Dreieck ein.

(i)
- Zeige: Für die Längen der Strecken $[B_nC_n]$ gilt in Abhängigkeit von x:
$$\overline{B_nC_n}(x) = \sqrt{7,56x^2 - 25,44x + 59,2}\,\mathrm{cm}^2 \text{ (gerundet).}$$
- Bestätige mit diesem Ergebnis das Ergebnis der Aufgabe (b) 4. Punkt.

(j) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das Dreieck AB_5C_5, in dem der Winkel C_5B_5A das Maß 62° hat. Berechne den zugehörigen X-Wert.

Lösung: (a) •



- $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot (10 \cdot 6 \cdot \sin 50^\circ)\,\text{cm}^2 \approx 22{,}98\,\text{cm}^2$

(b)
- Siehe Zeichnung.
- $A_{\Delta AB_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot (7 \cdot 7.5 \cdot \sin 50^\circ)\,\text{cm}^2 \approx 20{,}11\,\text{cm}^2$
- ΔAB^*C: $\quad \sin 50^\circ = \frac{d}{6\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad d \approx 4{,}60\,\text{cm}$ (siehe Zeichnung)
- $\overline{B_1C_1}^{\,2} = 7^2 + 7.5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7{,}5 \cdot \cos 50^\circ$
  $\Rightarrow \quad \overline{B_1C_1} \approx 6{,}14\,\text{cm}$ (siehe Zeichnung)

(c) $x < 0$: Aus „Verlängern“ würde „Verkürzen“ und umgekehrt, das geht nicht.
$x = 0$ liefert kein „neues Dreieck“, vgl. Angabe.
$x = 5$: Das Dreieck entartet zur Strecke.
$x > 5$: Die betreffenden Punkte B_n würden links vom Punkt A auftauchen; die betreffenden Dreiecke hätten dann den falschen Drehsinn.

Also: $x \in \,]0;5[_{\mathbb{R}}$.

(d) $A(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot (10 - 2x)(6 + x) \cdot \sin 50^\circ\right)\,\text{cm}^2 \approx 0{,}77 \cdot \left(30 + 5x - 6x - x^2\right)\,\text{cm}^2$

$A(x) \approx 0{,}77 \cdot \left(-x^2 - x + 30\right)\,\text{cm}^2 = (-0{,}77x^2 - 0{,}77x + 23{,}1)\,\text{cm}^2$

(e)
- Quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned}
T(x) &= -0{,}77x^2 - 0{,}77x + 23{,}1 \\
&= -0{,}77(x^2 - x + 0{,}5^2 - 0{,}25 - 30) \\
&= -0{,}77[(x + 0{,}5)^2 - 30{,}25] \\
T(x) &= -0{,}77(x + 0{,}5)^2 + 23{,}2925
\end{aligned}$$

  $x = -0{,}5$ liefert $T_{max} = 23{,}2925$

- Wegen $-1{,}5 \notin \,]0;5[_{\mathbb{R}}$ wird dieses Maximum bei keinem der Dreiecke AB_nC_n angenommen.

(f) $-0,77x^2 - 0,77x + 23,1 = 7,7 \quad \Leftrightarrow \quad -0,77x^2 - 0,77x + 15,4 = 0$
Der Solver des GTR liefert die beiden Lösungen $x_1 = 4$ und $x_2 = -5$.
Wegen $-5 \notin \,]0;5[_{\mathbb{R}}$ kommt nur $x_1 = 4$ als Lösung in Frage.

(g) Es muss gelten: $\overline{AB_n} = \overline{AC_n}$; d.h. $10 - 2x = 6 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\overline{3}$

(h) Fertige am besten eine Skizze dazu an.

- In diesem Fall gilt: $\cos 50° = \dfrac{10-2x}{6+x}$. Der Solver des GTR liefert $x \approx 2,32$.
- Siehe Zeichnung.

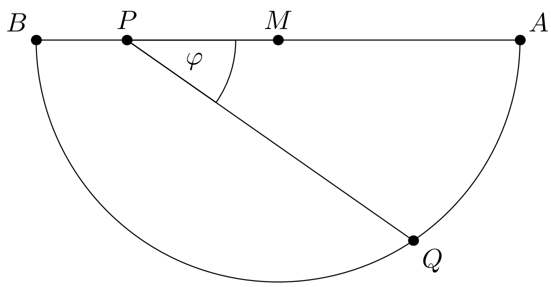
(i)
- Kosinussatz in den Dreiecken AB_nC_n:
$\overline{B_nC_n}(x)^2 = [(10-2x)^2 + (6+x)^2 - 2 \cdot (10-2x) \cdot (6+x) \cdot \cos 50°]\,\text{cm}^2$
$\approx [100 - 40x + 4x^2 + 36 + 12x + x^2 - 2 \cdot (60 + 10x - 12x - 2x^2) \cdot 0,64]\,\text{cm}^2$
$= [5x^2 - 28x + 136 - 1,28 \cdot (-2x^2 - 2x + 60)]\,\text{cm}^2$
$= [5x^2 - 28x + 136 + 2,56x^2 + 2,56x - 76,80]\,\text{cm}^2$
$\overline{B_nC_n}(x) \approx \sqrt{7,56x^2 - 25,44x + 59,2}\,\text{cm}$
- $\overline{B_nC_n}(1,5) = \sqrt{7,56 \cdot 1,5^2 - 25,44 \cdot 1,5 + 59,2}\,\text{cm} \approx 6,17\,\text{cm}$
Anmerkung: Das Ergebnis in der Aufgabe (b) 4. Punkt lautet:
$\overline{B_1C_1} \approx 6,14\,\text{cm}$. Die Abweichung ergibt sich daraus, dass hier in der Lösung (i) 1. Punkt viel häufiger gerundet worden ist als in der Aufgabe (b) 4. Punkt. Der Wert 6, 14 liegt näher am exakten Ergebnis, das aber nie „genau“ dagestellt werden kann.

(j) Im entsprechenden Dreieck gilt: $\sphericalangle AC_5B_5 = 180° - 50° - 62° = 68°$.

$$\frac{\sin 68°}{10-2x} = \frac{\sin 62°}{6+x}$$

Der Solver des GTR liefert $x \approx 1,21$.

22.

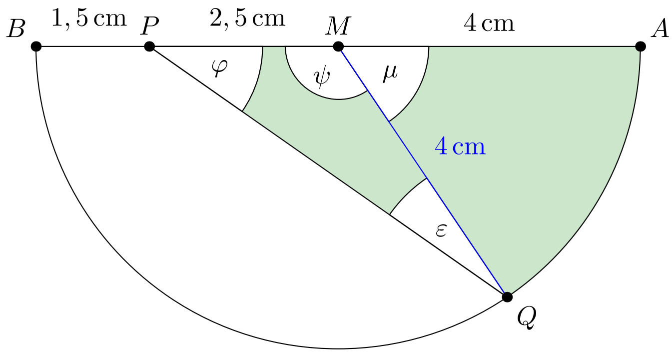


Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M. Weiter gilt:
$\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{PM} = 2,5\,\text{cm}$ und $\varphi = 35°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[AP]$ und $[PQ]$, sowie von dem Kreisbogen von Q nach A begrenzt wird. Tipp: Zeichne eine geeignete Hilfslinie ein.

Lösung: (a)



Die Hilfslinie ist der Kreisradius $[MQ]$ mit $\overline{MQ} = \overline{MA} = \overline{MB} = 4\,\text{cm}$.

(b) ΔPQM: $\dfrac{2,5}{\sin\varepsilon} = \dfrac{4}{\sin 35°} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 21,01°$

$\Rightarrow \quad \psi \approx 180° - 35° - 21,01° = 123,99°$.

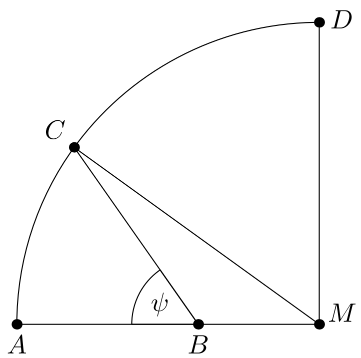
$A_{\Delta PQM} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 4 \cdot \sin 123,99° \approx 4,15\,\text{cm}^2$

$\mu \approx 180° - 123,99° = 56,01°$.

$A_{Sektor\,MQA} \approx \dfrac{56,01°}{360°} \cdot 4^2\pi \approx 7,82\,\text{cm}^2$

$\Rightarrow \quad A_{gesamt} \approx 4,15\,\text{cm}^2 + 7,82\,\text{cm}^2 = 11,97\,\text{cm}^2$.

23.

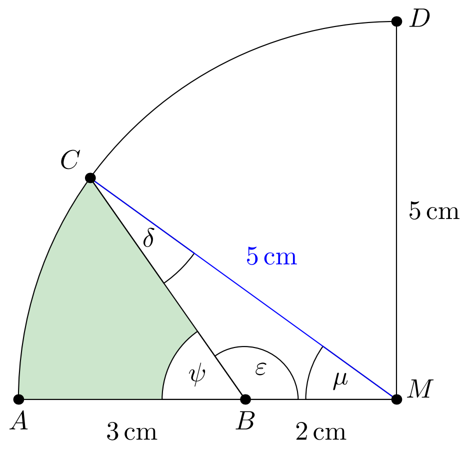


Der Mittelpunkt des Viertelkreises ist M.
Weiter gilt: $\overline{AM} = 5\,\text{cm}$, $\overline{AB} = 3\,\text{cm}$ und $\psi = 55°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[AB]$ und $[BC]$ sowie von dem Kreisbogen von C nach A begrenzt wird.
Tipp: Zeichne eine geeignete Hilfslinie ein.

Lösung: (a)



Die Hilfslinie ist der Kreisradius $[MC]$ mit $\overline{MC} = \overline{MA} = \overline{MD} = 5\,\text{cm}$.

(b) $\varepsilon = 180° - 55° = 125°$

ΔBMC: $\dfrac{2}{\sin\delta} = \dfrac{5}{\sin 125°} \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 19{,}13°$

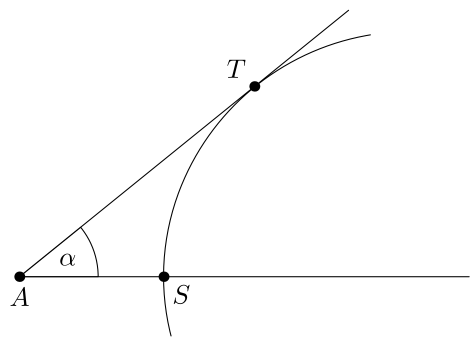
$\Rightarrow \quad \mu \approx 180° - 125° - 19{,}13° = 35{,}87°.$

$A_{\Delta BMC} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sin 35{,}87° \approx 2{,}93\,\text{cm}^2$

$A_{Sektor\;MCA} \approx \dfrac{35{,}87°}{360°} \cdot 5^2\pi \approx 7{,}83\,\text{cm}^2$

$\Rightarrow \quad A_{Rest} = A_{Sektor} - A_{\Delta BMC} \approx 4{,}90\,\text{cm}^2.$

24.



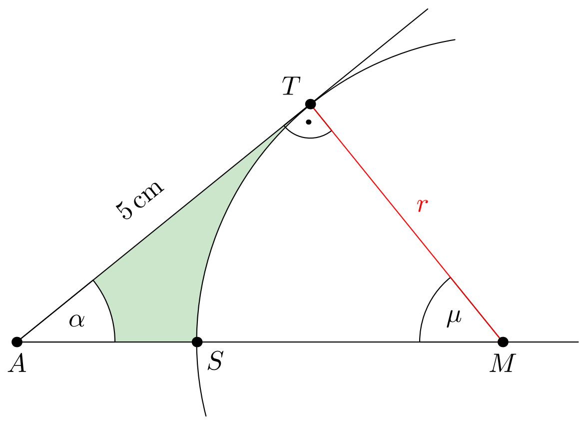
Der Kreisbogen mit dem zunächst nicht sichtbaren Mittelpunkt $M \in [AS$ berührt den einen Schenkel von α im Punkt T und schneidet den anderen Schenkel von α im Punkt S.
Weiter gilt: $\overline{AT} = 5\,\text{cm}$ und $\alpha = 39°$.

(a) Zeichne die Figur ohne den Punkt S und den Kreisbogen.

(b) Konstruiere den Mittelpunkt M des Kreisbogens. Zeichne den Kreisbogen und den Punkt S ein.

(c) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[AT]$ und $[AS]$ sowie von dem Kreisbogen von T nach S begrenzt wird.

Lösung: (a)



(b) Der Berührradius $r = \overline{MT}$ steht auf seiner Tangente $[AT$ senkrecht. Die Senkrechte zur Halbgeraden $[AT$ im Punkt T schneidet den waagrechten Schenkel von α im Kreismittelpunkt M. Damit werden der Kreisbogen und der Schnittpunkt S konstruierbar.

(c) ΔAMT: $\tan 39° = \dfrac{r}{5} \quad \Rightarrow \quad r \approx 4,05\,\text{cm}$.

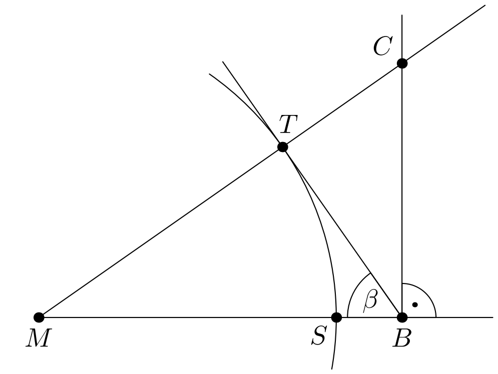
$\mu = 90° - 39° = 51°$.

$A_{\Delta AMT} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 4,05 \cdot 5\,\text{cm}^2 \approx 10,13\,\text{cm}^2$.

$$A_{Sektor\,MTS} \approx \frac{51^\circ}{360^\circ} \cdot 4{,}05^2 \pi\,\text{cm}^2 \approx 7{,}30\,\text{cm}^2.$$

$$\Rightarrow \quad A_{Rest} = A_{\Delta AMC} - A_{Sektor} \approx 2{,}83\,\text{cm}^2.$$

25.

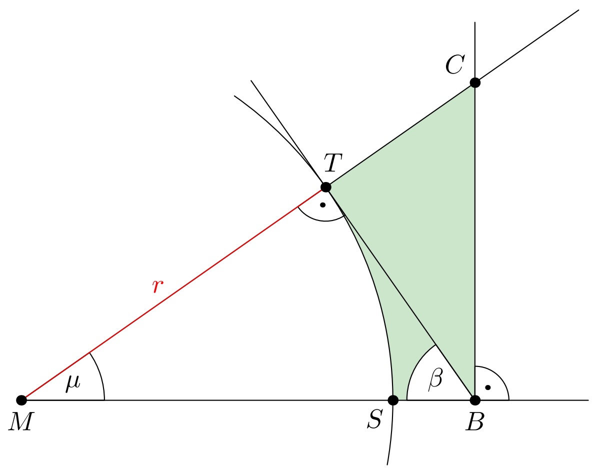


Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist M. Weiter gilt: $\overline{MB} = 6\,\text{cm}$ und $\beta = 55^\circ$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[SB]$, $[BC]$ und $[CT]$ sowie von dem Kreisbogen von T nach S begrenzt wird.

Lösung: (a)



- Zeichne $[MB]$.
- Zeichne die Senkrechte zu $[MB]$ durch den Punkt B.
- Trage in B den Winkel mit dem Maß $\beta = 55^\circ$ an. Jetzt hast du zwei Möglichkeiten, den Punkt T zu konstruieren:
  1.

Zeichne durch den Punkt M die Senkrechte auf den freien Schenkel von β. Diese Senkrechte schneidet den freien Schenkel von β im Punkt T. Die Halbgerade $[MT$ scheidet die vorher gezeichnete Senkrechte zu MB durch den Punkt B im Punkt C.

2.

Der THALES-(Halb-)Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$ scheidet den freien Schenkel von β im Punkt T. Dann wird C wie in 1. konstruiert.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde zur 1. Möglichkeit gegriffen.

(b) Der Berührradius $r = \overline{MT}$ steht auf seiner Tangente BT senkrecht.

Im ΔMBT gilt dann: $\mu = 90° - 55° = 35°$.

$$\cos 35° = \frac{r}{6\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad r \approx 4,91\,\text{cm}.$$

Für den Flächeninhalt des Kreissektors MST gilt dann:

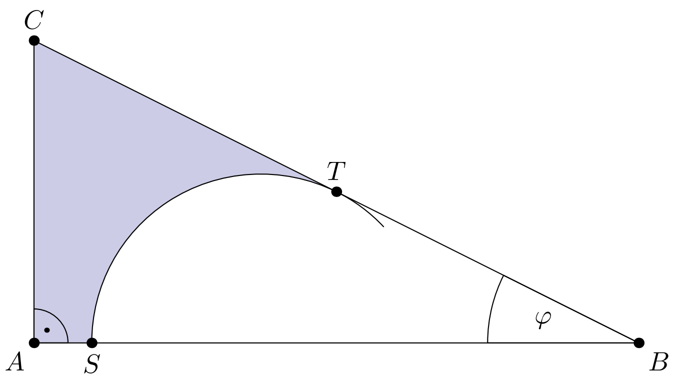
$$A_{Sektor\,MST} \approx \frac{35°}{360°} \cdot 4,91^2 \pi\,\text{cm}^2 \approx 7,36\,\text{cm}^2.$$

Im ΔMBC gilt: $\tan 35° = \dfrac{\overline{BC}}{6} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} \approx 4,20\,\text{cm}.$

$$A_{\Delta MBC} \approx \frac{1}{2} \cdot 4,20 \cdot 6\,\text{cm}^2 = 12,60\,\text{cm}^2$$

$$A_{Rest} = A_{\Delta MBC} - A_{Sektor} \approx 5,24\,\text{cm}^2.$$

26.

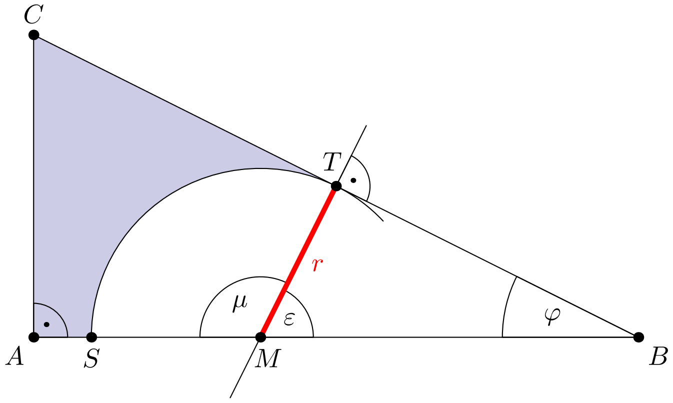


Der Kreisbogen berührt die Hypotenuse $[BC]$ im Hypotenusenmittelpunkt T. Der Mittelpunkt dieses Kreisbogens ist der noch verborgene Punkt M, der auf $[AB]$ liegt. Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 4\,\text{cm}$.

(a) Zeichne den Punkt M ein.

(b) Berechne den Inhalt des eingefärbten Flächenstückes.
[Teilergebnis: Radius des Kreisbogens $\approx 2,24\,\text{cm}$]

Lösung: (a)



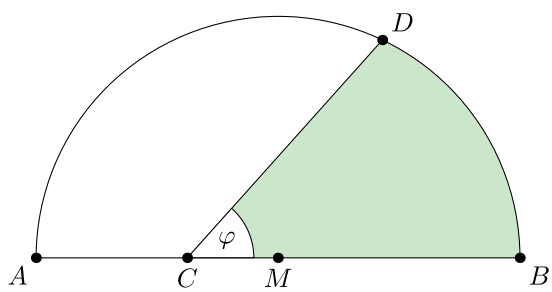
Der Berührradius $r = [MT]$ steht auf seiner Kreistangente BC senkrecht. Zeichne also eine Senkrechte zur Hypotenuse $[BC]$ durch den Punkt T. Diese Senkrechte schneidet dann die Kathete $[AB]$ im Mittelpunkt M des Kreisbogens.

(b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen.
PYTHAGORAS im Dreieck ABC: $\overline{BC}^2 = 8^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} \approx 8,97\,\text{cm}$.
$\Delta\, ABC$: $\tan\varphi = \dfrac{4}{8} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 26,57°$.
$\Delta\, MBT$: $\tan 26,57° \approx \dfrac{r}{4,47} \quad \Rightarrow \quad r \approx 2,24\,\text{cm}$,
und $\varepsilon \approx 90° - 26,57° = 63,43°$.
$\mu \approx 180° - 63,43° \quad \mu \approx 116,57°$.
$A_{\Delta\, ABC} = 0,5 \cdot 4 \cdot 8\,\text{cm}^2 = 16\,\text{cm}^2$
$A_{\Delta\, MBT} \approx 0,5 \cdot 2,24 \cdot 4,47\,\text{cm}^2 \approx 5,01\,\text{cm}^2$

$$A_{Sektor\, MTS} \approx \frac{116,57°}{360°} \cdot 2,24^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 = 5,10\,\text{cm}^2$$

$$A_{Farbe} \approx 16\,\text{cm}^2 - 5,01\,\text{cm}^2 - 5,10\,\text{cm}^2 = 5,89\,\text{cm}^2.$$

27.



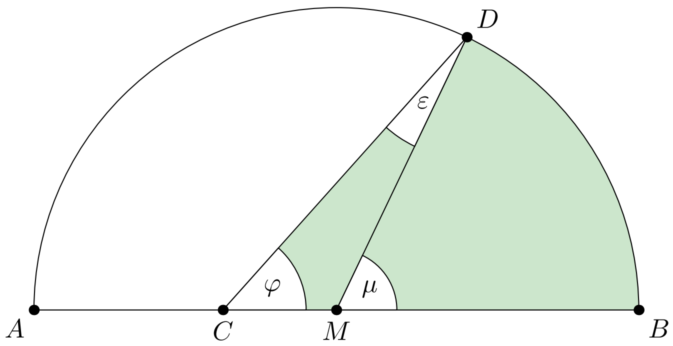
Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M.
Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{AC} = 2,5\,\text{cm}$ und $\varphi = 49°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Die eingefärbte Fläche ist kein Kreissektor. Zeichne dazu an einer geeigneten Stelle eine Hilfslinie ein.

(c) Berechne den Inhalt A der eingefärbten Fläche.

Lösung: (a)



(b) Die Hilfslinie ist der Kreisradius $\overline{MD}$. Der Mittelpunkt des Kreisbogens von B nach D ist der Punkt M. Daher ist die Strecke $[CD]$ länger als der Kreisradius $\overline{MD}$. Bei einem Kreissektor müssen aber die begrenzenden Strecken gleich lang sein, weil dies die Kreisradien sind.

(c) $\overline{MD} = 4\,\text{cm}$ und $\overline{MC} = 1,5\,\text{cm}$.

Im Dreieck CMD gilt: $\dfrac{1,5\,\text{cm}}{\sin\varepsilon} = \dfrac{4\,\text{cm}}{\sin 49°} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 16,44°$.

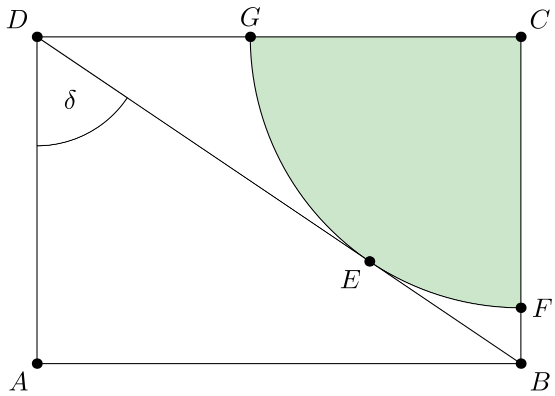
$\Rightarrow \quad \sphericalangle DMC \approx 180° - 49° - 16,44° = 114,56° \Rightarrow \quad \mu \approx 65,44°$.

$A_{\Delta\,CMD} \approx 0,5 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot \sin 114,56°\ \text{cm}^2 \approx 2,73\,\text{cm}^2$.

$A_{Sektor\,MBD} \approx \dfrac{65,44°}{360°} \cdot 4^2 \cdot \pi \approx 9,14\,\text{cm}^2$.

$A_{gesamt} \approx 2,73\,\text{cm}^2 + 9,14\,\text{cm}^2 = 11,87\,\text{cm}^2$.

28.

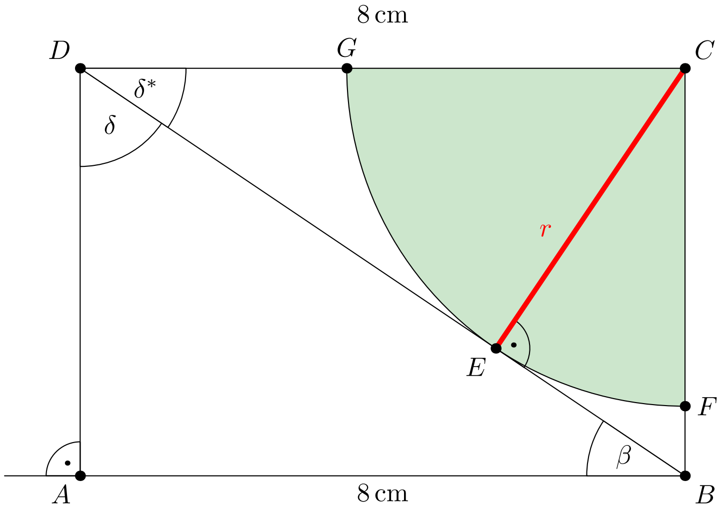


Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\delta = 56°$.
Der Mittelpunkt des Kreisbogens, der die Diagonale $[BD]$ im Punkt E berührt, ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Flächeninhalt des eingefärbten Kreissektors.
[Teilergebnis: Radius des Kreisbogens $\approx 3{,}64\,\text{cm}$]

Lösung: (a)



Im Dreieck ABD gilt: $\beta = 90° - 56° = 34°$.

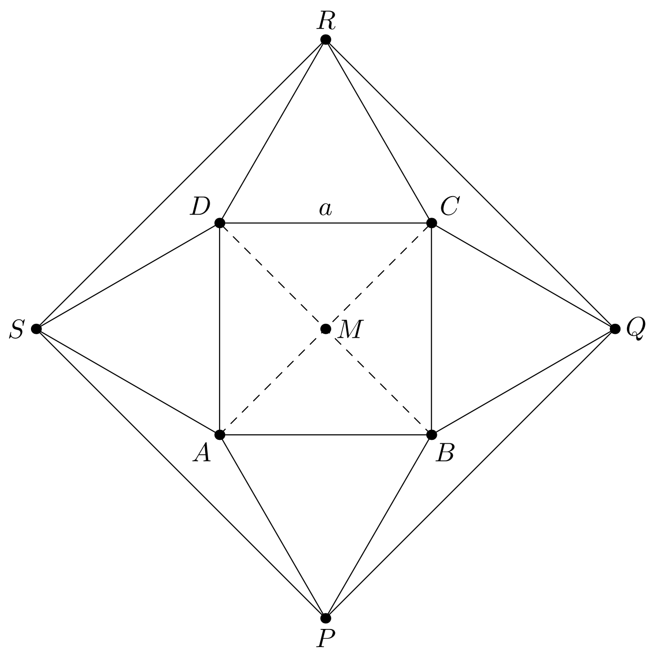
- Zeichne die Strecke $[AB]$.
- Errichte eine Senkrechte zur Strecke $[AB]$ durch den Punkt A.
- Trage am Punkt B den $34°$-Winkel an.
- Die Senkrechte und der freie Schenkel des $34°$-Winkels schneiden sich im Punkt D.
- Zeichne den Punkt C, die Diagonale $[BD]$ und den Kreisbogen ein.
- Der Berührradius $r = [CE]$ steht auf seiner Kreistangente BD senkrecht. Zeichne also das Lot vom Punkt C auf die Diagonale $[BD]$. Der Lotfußpunkt ist E und $r = [CE]$.

(b) Im Dreieck DEC gilt: $\delta^* = \beta = 34°$ (Z-Winkel).

$$\sin 34° = \frac{r}{8\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad r \approx 4,47\,\text{cm}.$$

$$A_{Sektor} \approx \frac{90°}{360°} \cdot 4,47^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 15,69\,\text{cm}^2$$

29.



Das Viereck $PQRS$ ist dadurch entstanden, dass man über den vier Seiten des Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a jeweils gleichseitige Dreiecke errichtet hat.

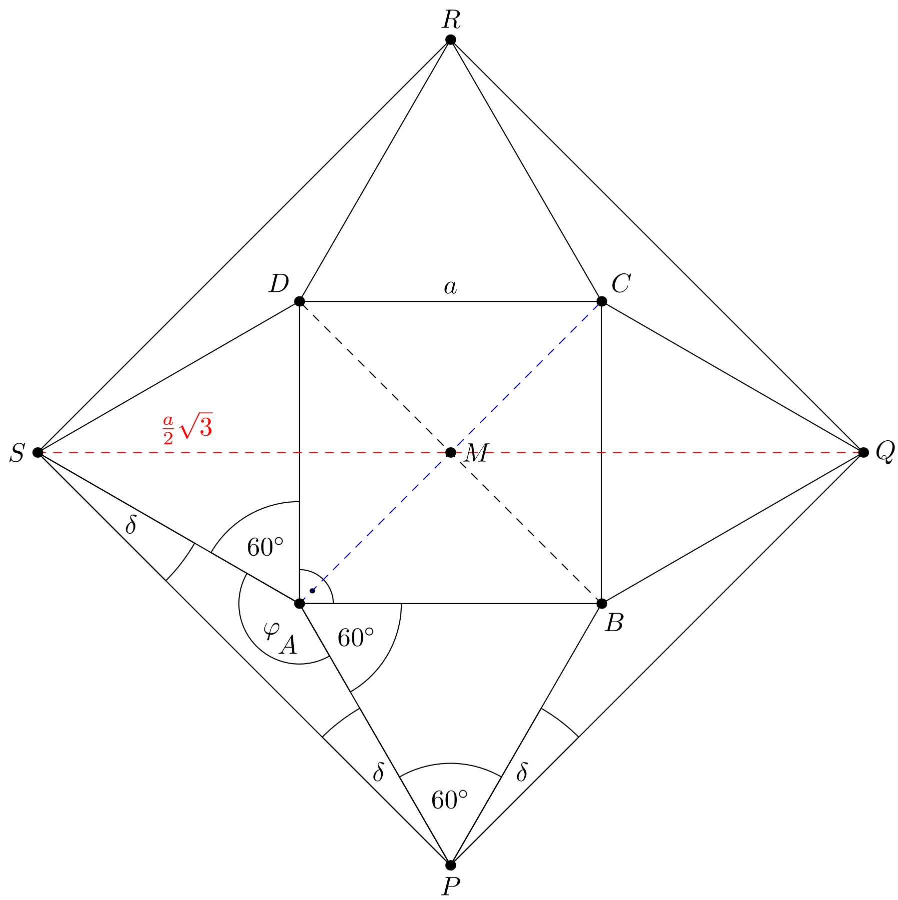
(a) Zeichne die Fgur für $a = 4\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat.
Hinweis: Zeige, dass z.B. $\sphericalangle APS = 15°$ gilt.

(c) Zeige auf verschiedene Weise: Für den Flächeninhalt A des Vierecks $PQRS$ gilt:
$$A_{PQRS} = a^2(2 + \sqrt{3})$$
.

(d) Berechne den prozentualen Flächenanteil des Quadrates $ABCD$ am Viereck $PQRS$.

Lösung: (a)



(b) Die vier Dreiecke SPA, PQB, QRC und RSD sind aus Symmetriegründen kongruent. Also handelt es sich bei dem Viereck $PQRS$ mindestens um eine Raute.
Am Punkt A gilt: $\varphi = 360° - 90° - 2 \cdot 60° = 150°$.
Aus Symmetriegründen sind die vier Dreiecke SPA, PQB, QRC und RSD gleichschenklig.
$\Rightarrow \quad \delta = (180° - 150°) : 2 = 15°$.
Dann siehst du z.B. am Punkt P: $\sphericalangle QPS = 2 \cdot 15° + 60° = 90°$. Also ist die Raute sogar ein Quadrat.

(c) **1. Möglichkeit:** Die Summe aller Teilflächen

$$A_{PQRS} = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 150° = a^2 + a^2\sqrt{3} + a^2 = a^2(2 + \sqrt{3})\,.$$

2. Möglichkeit: Alle Quadrate sind zueinander ähnlich
Wenn du das kleine Quadrat $ABCD$ mit einem Faktor k streckst, erhältst du das große Quadrat. (Erst eine anschließende Drehung des gestreckten Quadrates um 45° brächte dieses Zwischenbild zur Deckung mit dem großen Quadrat $PQRS$. Aber das spielt bei der Ermittlung des Flächeninhaltes des großen Quadrates $PQRS$ keine Rolle, weil ja die Drehung einer Fläche deren Inhalt unverändert lässt.)

Den Streckungsfaktor k ermittelst du über die Diagonalenlängen:. Es gilt z.B.: $k =$

$\dfrac{\overline{SQ}}{\overline{AC}}$.

$\overline{SQ} = 2 \cdot \dfrac{a}{2}\sqrt{3} + a = a \cdot (\sqrt{3}+1)$ und $\overline{AC} = a\sqrt{2}$.

Dann gilt: $k = \dfrac{a \cdot (\sqrt{3}+1)}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$.

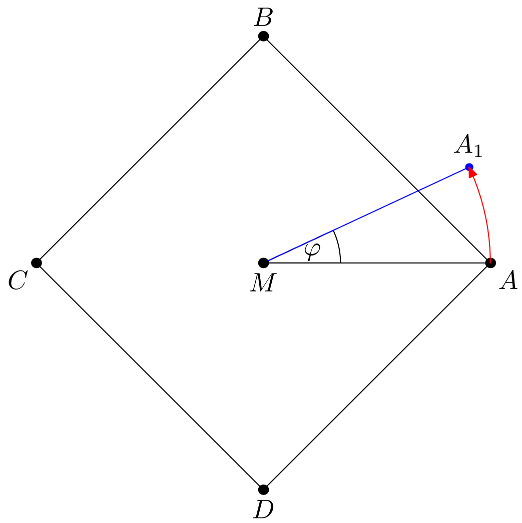
Weiter folgt:

$$A_{PQRS} = k^2 \cdot A_{ABCD} = \left[\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}\right]^2 \cdot a^2 = \frac{2(3+2\sqrt{3}+1)}{4} \cdot a^2 .$$

$\Rightarrow \quad A_{PQRS} = (2+\sqrt{3}) \cdot a^2$.

(d) $\dfrac{A_{ABCD}}{A_{PQRS}} = \dfrac{a^2}{(2+\sqrt{3}) \cdot a^2} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} \approx 0,2679 = 26,79\,\%$.

30.



Gegeben ist das Quadrat $ABCD$ mit dem Mittelpunkt M und der Diagonalenlänge $d = 10\,\text{cm}$.
Dieses Quadrat wird nun um den Mittelpunkt M mit dem Winkel φ gedreht, wobei $\varphi \in]0°; 90°[_{\mathbb{R}}$ gilt.
Dadurch entstehen zum einen Quadrate $A_nB_nC_nD_n$ und zum anderen Achtecke $AA_nBB_nCC_nDD_n$.

(a)
- Zeichne das Quadrat $ABCD$ und seinen Umkreis.
- Zeichne für $\varphi = 25°$ das Quadrat $A_1B_1C_1D_1$ farbig ein.
- Zeichne dazu das Achteck $AA_1BB_1CC_1DD_1$ in einer anderen Farbe.

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Achtecke $AA_nBB_nCC_nDD_n$ gilt in Anbhängigkeit von φ:

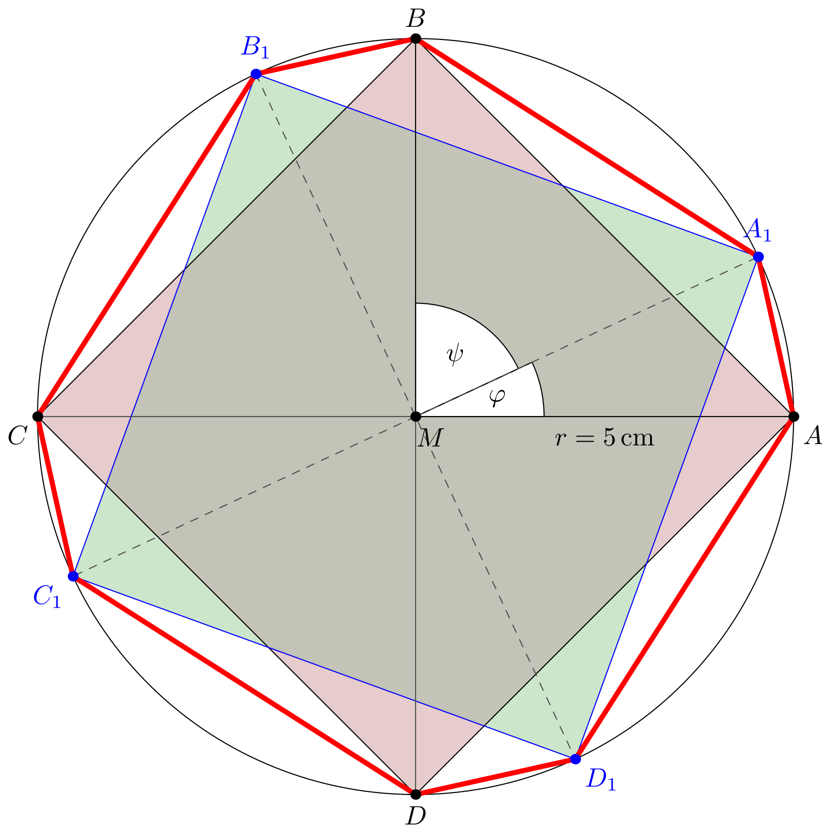
$$A(\varphi) = 50 \cdot (\sin\varphi + \cos\varphi)\,\mathrm{cm}^2$$

(c) • Begründe rechnerisch: Es gilt ebenfalls

$$A(\varphi) = \frac{50}{\cos 45^\circ}\,(\sin\varphi \sin 45^\circ + \sin 45^\circ \cos\varphi)\,\mathrm{cm}^2$$

- Vereinfache den in der obigen Zeile dargestellten Term für $A(\varphi)$ so weit wie möglich. Der Nenner vor der Klammer soll dabei rational werden.
- Unter allen Achtecken $AA_nBB_nCC_nDD_n$ gibt es das Achteck $AA_2BB_2CC_2DD_2$, dessen Flächeninhalt maximal wird.
  Berechne dieses Maximum und die zugehörige Belegung von φ .
- Berechne den Umfang u des flächengrößten Achtecks ohne zu runden.
  Zeige: $u = 40 \cdot \sqrt{\ldots}\ \mathrm{cm}$

Lösung: (a) Alle verlangten Zeichnungen:



(b) Die roten Achtecke setzen sich aus je vier kongruenten Dreiecken vom Typ MAA_n und vom Typ MA_nB zusammen. Weiter gilt: $\psi = 90° - \varphi$.

$$\begin{aligned}
A(\varphi) &= 4 \cdot A_{MAA_n} + 4 \cdot A_{MA_nB} \\
&= \left(4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \sin\varphi + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \sin\psi\right) \text{ cm}^2 \\
&= [50 \cdot \sin\varphi + 50 \cdot \sin(90° - \varphi)] \text{ cm}^2 \\
A(\varphi) &= 50 \cdot (\sin\varphi + \cos\varphi) \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

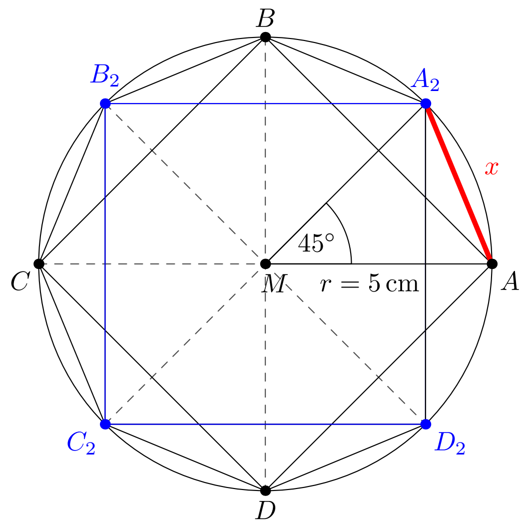
(c)

- $$\begin{aligned}
A(\varphi) = \frac{50}{\cos 45°}(\sin\varphi \sin 45° + \sin 45° \cos\varphi) \text{ cm}^2 &= \\
50 \cdot \left(\sin\varphi \cdot \frac{\sin 45°}{\cos 45°} + \frac{\sin 45°}{\cos 45°} \cdot \cos\varphi\right) \text{ cm}^2 &= \\
50 \cdot (\sin\varphi \tan 45° + \cos\varphi \tan 45°) \text{ cm}^2 .&
\end{aligned}$$

  Wegen $\tan 45° = 1$ ergibt sich die Lösung von (b).

- $$\begin{aligned}
A(\varphi) &= \frac{50}{\cos 45°} \cdot (\sin\varphi \sin 45° + \sin 45° \cos\varphi) \text{ cm}^2 \\
&= \frac{50}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \sin(45° + \varphi) \text{ cm}^2 . \\
\text{Also gilt:} \quad A(\varphi) &= 50 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(45° + \varphi) \text{ cm}^2 .
\end{aligned}$$

- $A(\varphi)$ wird maximal, wenn $\sin(45° + \varphi)$ maximal wird;
  d.h. wenn $\sin(45° + \varphi)$ den Wert 1 annimmt. Das ist im Definitonsbereich der Fall, wenn $\varphi = 45°$ gilt.
  Der maximale Flächeninhalt beträgt dann $50 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}^2 \approx 70{,}71 \text{ cm}^2$.

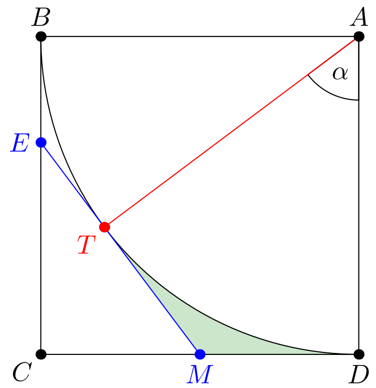
- 

Kosinussatz im Dreieck MAA_2: $x^2 = \left(5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 45°\right)\ \text{cm}^2$.

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \left[25 \cdot (2 - \sqrt{2})\right]\ \text{cm} \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}\ \text{cm}.$$

Aus Symmetriegründen gilt: $u = 8x = 40 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}\,\text{cm} \quad (\approx 30{,}61\ \text{cm})$.

31.



Dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 6\,\text{cm}$ ist ein Viertelkreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius a einbeschreiben worden. Der Mittelpunkt der Seite $[CD]$ ist M.
Weiter gilt: $\overline{BE} = 2\,\text{cm}$.
Hinweis: Alle Rechenergebnisse sind auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne das Quadrat $ABCD$, den Viertelkreis und die Strecke $[EM]$.

(b)
- Zeige durch Rechnung: $\overline{EM} = 5\,\text{cm}$.
- Begründe: Die Strecke $[ME]$ berührt den Kreisbogen in einem Punkt T.
  Tipp: Wenn der Punkt T Berührpunkt sein soll, dann müssen gleichzeitig die beiden Vierecke $MDAT$ und $BETA$ besondere Vierecke sein.
- Zeichne die Strecke $[AT]$ ein.

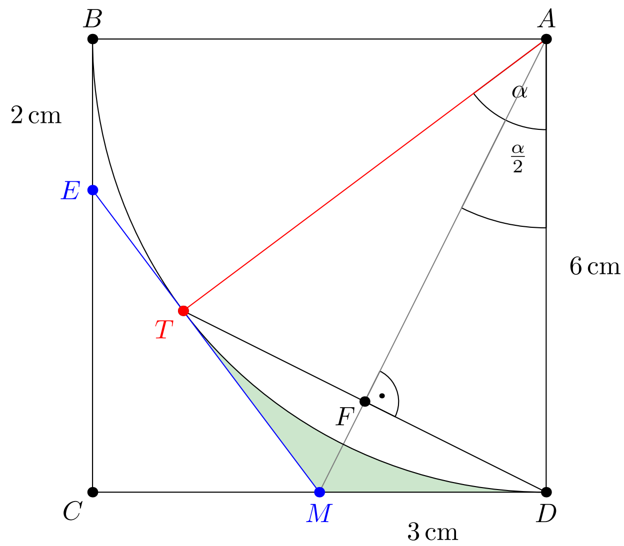
(c) Berechne das Maß α des Winkels TAD.

[Teilergebnis: $\frac{\alpha}{2} \approx 26{,}57°$]

- Zeichne den Diagonalenschnittpunkt F des Vierecks $MDAT$ ein.
- Berechne den Inhalt der in der Eingangsfigur getönten Fläche.

[Teilergebnis: $\overline{FD} \approx 2{,}68\,\text{cm}$]

Lösung: (a) Die Zeichnung enthält bereits alle Elemente.



(b) - Im rechtwinkligen Dreieck CME gilt:
  $\overline{EM}^{\,2} = [3^2 + (6-2)^2]\,\text{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{EM} = 5\,\text{cm}\,.$

- Wenn der Punkt T der Berührpunkt sein soll, dann müssen die beiden Vierecke $MDAT$ und $BETA$ achsensymmetrische Drachenvierecke sein.
  Dann muss aber $\overline{MD} = \overline{MT} = 3\,\text{cm}$ und $\overline{EB} = \overline{ET} = 2\,\text{cm}$ gelten.
  Dann muss also $\overline{MT} + \overline{ET} = 5\,\text{cm}$ gelten. Das hast du aber vorhin gerade mit dem Satz des PYTHAGORAS gezeigt. Also gibt es den Punkt T als Berührpunkt.

- Siehe Zeichnung.

(c) Im Dreieck MDA gilt:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{3\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} \approx 26,57^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 53,14^\circ\,.$$

- Siehe Zeichnung.
- Im Dreieck FDA gilt:

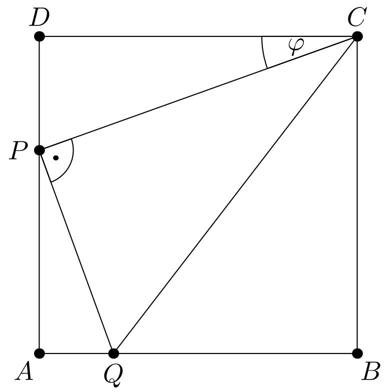
$$\sin 26,57^\circ \approx \frac{\overline{FD}}{6\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{FD} \approx 2,68\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{TD} \approx 5,36\,\text{cm}\,.$$

$$\Delta MDA: \quad \overline{AM}^2 = (6^2 + 3^2)\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AM} \approx 6,71\,\text{cm}\,.$$

$$A_{\text{getönt}} = A_{MDAT} - A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AM}\cdot\overline{TD} - A_{\text{Sektor}}\,.$$

$$A_{\text{getönt}} \approx \frac{1}{2}\cdot 6,71\cdot 5,36\,\text{cm}^2 - \frac{53,14^\circ}{360^\circ}\cdot 6^2\pi\,\text{cm}^2 \approx 1,29\,\text{cm}^2$$

32.



Dem Quadrat $ABCD$ ist das rechtwinklige Dreieck QCP einbeschrieben worden. Dabei gilt: $\sphericalangle\, DCP = \varphi$.

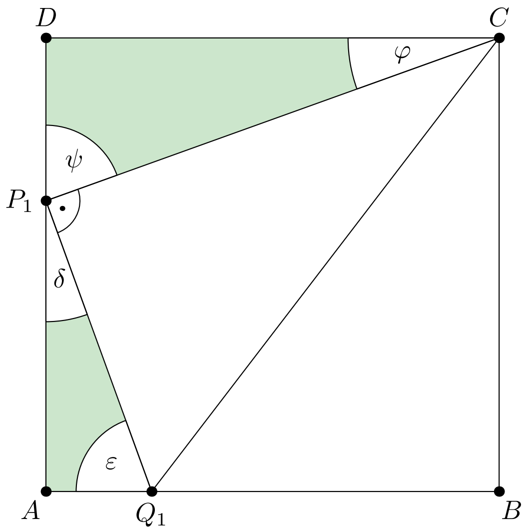
Hinweis: Gegebenenfalls sind alle Ergebnissse auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne das Quadrat für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und für $\varphi = 20°$ das Dreieck QCP .

(b) Begründe: Die Dreiecke AQP und PCD sind zueinander ähnlich.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks QCP .

Lösung: (a)



(b) Im rechtwinkligen Dreieck PCD gilt: $\varphi + \psi = 90°$ (*) .
Am Punkt P gilt: $\psi + 90° + \delta = 180°$ also: $\delta + \psi = 90°$, und mit (*) folgt: $\varphi = \delta$ (**) .
Im rechtwinkligen Dreieck AQP gilt: $\delta + \varepsilon = 90°$. Mit (*) und (**) folgt: $\psi = \varepsilon$.
Damit stimmen die Dreiecke AQP und QCP paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Also sind sie zueinander ähnlich.

(c) $\Delta\, PCD\colon \quad \cos 20° = \dfrac{6\,\text{cm}}{\overline{PC}} \quad \Rightarrow \quad \overline{PC} \approx 6{,}39\,\text{cm}$.

Und weiter (z.B.): $\overline{PD}^2 = \left(6,39^2 - 6^2\right)\ \mathrm{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PD} \approx 2,20\,\mathrm{cm}$.
$\Rightarrow \quad \overline{AP} \approx 6\,\mathrm{cm} - 2,20\,\mathrm{cm} = 3,80\,\mathrm{cm}$.

$$\Delta\, AQP: \quad \cos 20^\circ \approx \frac{3,80\,\mathrm{cm}}{\overline{PQ}} \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \approx 4,04\,\mathrm{cm}\,.$$

$$A_{\Delta\, QCP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PQ} \approx \frac{1}{2} \cdot 6,39\,\mathrm{cm} \cdot 4,04\,\mathrm{cm} \approx 12,91\,\mathrm{cm}^2\,.$$

4. Abbildungen im Koordinatensystem

1. Gegeben sind die Funktionen $f_1 : y = -0,5 \cdot log_3(x+2) - 1$ und $f_2 : y = 0,5 \cdot log_3(x - 1) - 1$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   (a) Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f_2 an.

   (b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph der Funktion f_1 durch orthogonale Affinität an der x-Achse mit $k = -1$ und anschließender Verschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet werden kann.

   (c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen von f_1 und f_2.

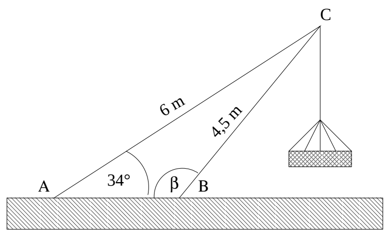
Lösung: (a) $D =]1; \infty[\quad W = \mathbb{R}$

(b) -.-

(c) $S(1,30 \mid -1,54)$

5. Zusammenfassende Aufgaben

1. Auf einem Kinderspielplatz ist an der Spitze eines Stahlgestells ABC ein Autoreifen zum Schaukeln aufgehängt. (Siehe Skizze)



   (a) Berechnen Sie das Maß des Winkels β.

   (b) Wie hoch befindet sich die Spitze C über dem Erdboden?

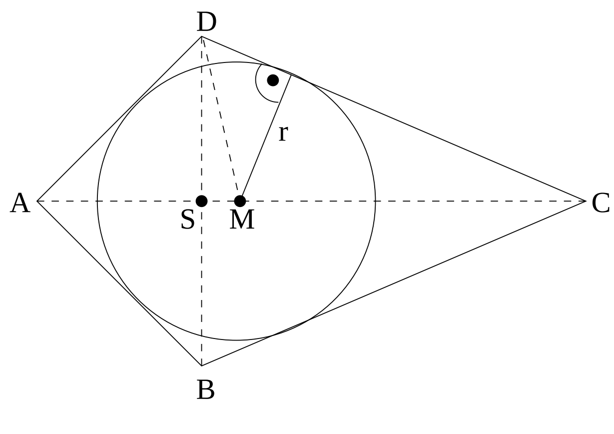
   (c) Zur Verstärkung der Konstruktion soll von B aus eine Stütze s senkrecht zur Strebe $[AC]$ eingebaut werden. Berechnen Sie die Länge dieser Stütze s.

Lösung: (a) $\beta \approx 131,79°$

(b) ca. $3,36$m

(c) ca. $1,11$m

2. Aus einem Blechstück in Form eines symmetrischen Drachenvierecks soll ein möglichst großer Kreis ausgestanzt werden. In der Zeichnung gilt: $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$, $\overline{BD} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{AS} = 3\,\text{cm}$.



   (a) Berechnen Sie die Maße der Innenwinkel des Drachenvierecks und seine Seitenlängen. [Teilergebnis: $\beta = 111,80°$]

(b) Berechnen Sie den Radius des ausgestanzten Kreises. [Ergebnis: $r = 2,53\,\mathrm{cm}$]

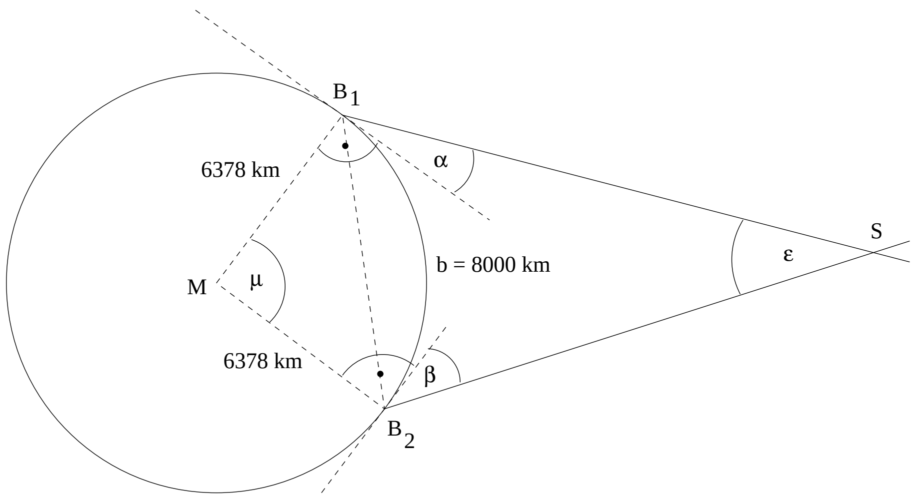
(c) Wie viel Prozent der Vielecksfläche $ABCD$ beträgt die Kreisfläche?

Lösung: (a) $\beta = 111,80°$

(b) $r = 2,53\,\mathrm{cm}$

(c) ca. 67%

3. Ein Satellit S wird von der Bodenstation B_1 mit dem Winkel $\alpha = 30\frac{1}{3}°$, von der Bodenstation B_2 mit dem Winkel $\beta = 40°\,15'$ angepeilt, als der Satellit sich gerade senkrecht über der Verbindungslinie B_1B_2 befindet. Beide Bodenstationen liegen an der Küste und befinden sich in gleicher Höhe über dem Meeresspiegel. Der Erdradius wird mit 6378 km gerechnet und die Bogenlänge b über der Strecke $[B_2B_1]$ beträgt 8000 km.



Hinweis: Die Ergebnisse sind jeweils auf 3 Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $[B_1B_2]$. Ergebnis: $\overline{B_1B_2} = 7485,806\,\mathrm{km}$

(b) Berechnen Sie das Maß ϵ des Winkels B_1SB_2. Ergebnis: $\epsilon = 37,550°$

(c) Wie weit ist der Satellit S von der Bodenstation B_2 entfernt?

(d) In welcher Höhe über dem Meeresspiegel befindet sich der Satellit S?

Lösung: (a) $\overline{B_1B_2} = 7485,806\,\mathrm{km}$

(b) $\epsilon = 37,550°$

(c) $\overline{SB_2} = 11243,984\,\mathrm{km}$

(d) $h = \overline{SB_0} = 9739,646\,\mathrm{km}$

4. Ein halbkugelförmiges Glasgefäß mit einer Wandstärke von $5\,\mathrm{mm}$ hat ein Fassungsvermögen von $10\,\mathrm{l}$.
   Berechne den Außendurchmesser des Gefäßes in mm.

Lösung: $10\,\mathrm{l} = 10\,\mathrm{dm}^3 = 10^4\,\mathrm{cm}^3 = 10^7\,\mathrm{mm}^3$.
Für den Innenradius r_i des Gefäßes gilt dann:

$$\frac{2}{3}r_i^3 = 10^7\,\mathrm{mm}^3 \quad \Rightarrow \quad r_i \approx 168{,}4\,\mathrm{mm}\,.$$

$$\Rightarrow \quad d_i \approx 337\,\mathrm{mm} \quad \Rightarrow \quad d_a \approx 347\,\mathrm{mm}\,.$$

Teil II.

Wahlpflichtfächergruppe II/III

6. Quadratische Funktionen

1. (a) Gegeben sind die Parabel $p_1 : y = -0,25x^2 - x + 5$ und die Gerade $g : y = -0,5x + 3$ auf $G = R \times R$.
   Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt.

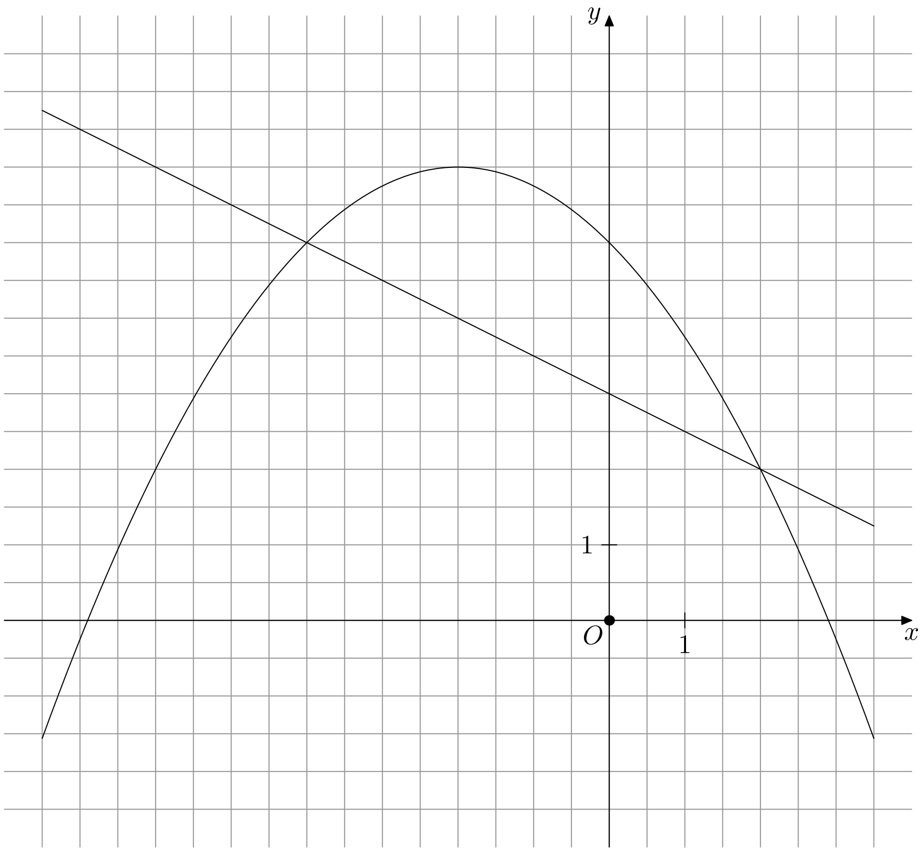
   (b) Die Gerade g schneidet die Parabel p_1 in den Punkten A und B, wobei der Schnittpunkt B nicht im II. Quadranten liegt.
   Zeichnen Sie die Schnittpunkte ein und berechnen Sie deren Koordinaten.

   (c) Es sind jetzt zusätzlich zwei Parabeln gegeben:
   $p_2 : y = 0,25x^2 - 2x + 5$ und $p_3 : y = -0,25x^2 + 2x$.
   Begründen Sie: Die Parabel p_1 lässt sich nur auf eine der beiden Parabeln p_2 oder p_3 verschieben. Berechnen Sie den zugehörigen Vektor.

   (d) Geben Sie die möglichst kurze Summenform der Gleichung einer weiteren Parabel p_4 an, die zur Parabel p_2 kongruent ist und die nur durch drei Quadranten des Koordinatensystems verläuft.

   (e) Auf der Parabel p_1 wandern Punkte C_n und auf der Geraden g wandern Punkte D_n. Der Abszissenwert der Punkte D_n ist stets um 1,5 größer als der Abszissenwert x der Punkte C_n.

   - Zeichnen Sie für $x = -3$ die Strecke $[C_1D_1]$ ein.
   - Es gibt unter den Strecken $[C_nD_n]$ zwei Strecken $[C_2D_2]$ und $[C_3D_3]$, die ganz auf der Geraden g liegen. Zeichnen Sie diese beiden Strecken ein und ermitteln Sie die zugehörigen x-Werte.



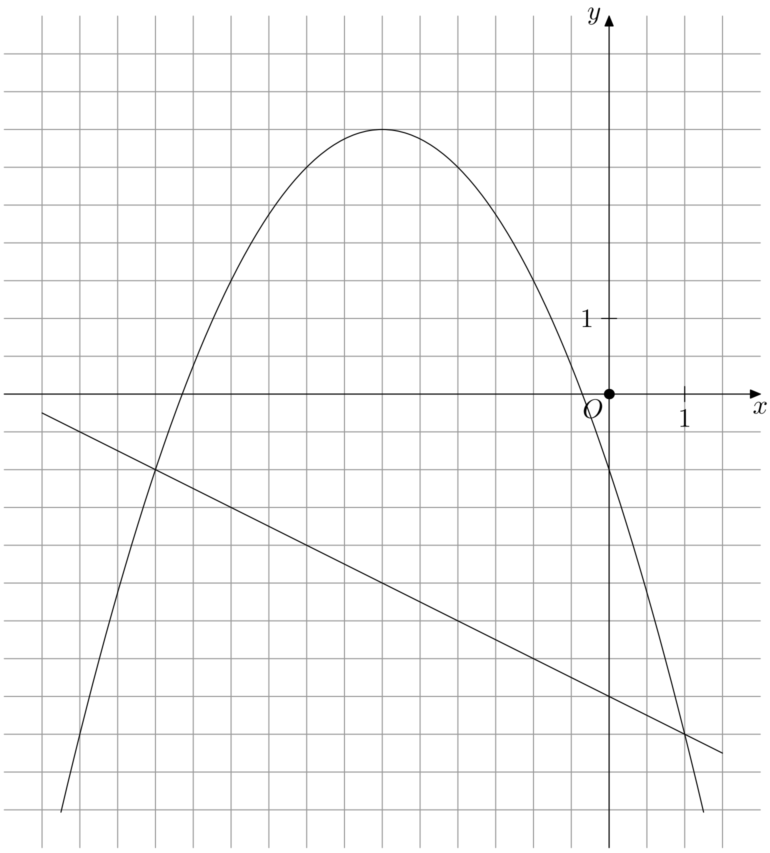
Lösung: (a) $A(-4|5)$ und $B(2|2)$

(b) Parabeln, die sich aufeinander verschieben lassen, müssen den gleichen Formfaktor haben. Also lässt sich die Parabel p_1 nur auf die Parabel p_3 verschieben.
Es gilt: $S_1(-2|6)$ und $S_3(4|4)$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) Die Parabel p_4^* mit der Gleichung $y = 0,25(x+2)^2 - 1$ hat den Scheitel $S_4^*(-2|-1)$ und sie verläuft durch den Ursprung. Den Scheitel dieser Parabel muss man nur ein wenig nach links verschieben und man erhält dann beliebig viele Parabeln, welche den geforderten Verlauf besitzen; z.B. $p_4 : y = 0,25(x+4)^2 - 1 = 0,25x^2 + 2x + 3$.

(d) Die Punkte C_2 und C_3 müssen mit den Schnittpunkten der Parabel p_1 und der Geraden g zusammenfallen. Also gilt $x = -4$ und $x = 2$.

2. Gegeben sind die Parabel p durch die Gleichung $y = -0,5x^2 - 3x - 1$ und die Gerade g durch die Gleichung $y = -0,5x - 4$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Der Punkt B $(-4|-2)$ liegt auf der Geraden g.
Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



(a) Auf der Parabel p wandern sowohl Punkte A_n mit dem Abszissenwert x als auch Punkte C_n, wobei der Abszissenwert der Punkte C_n stets um 3 größer als der Abszissenwert x der Punkte A_n ist.
Dabei werden laufend Dreiecke A_nBC_n erzeugt. Im Dreieck A_1BC_1 besitzt der Abszissenwert des Punktes C_1 den Wert -2. Zeichne dieses Dreieck ein.

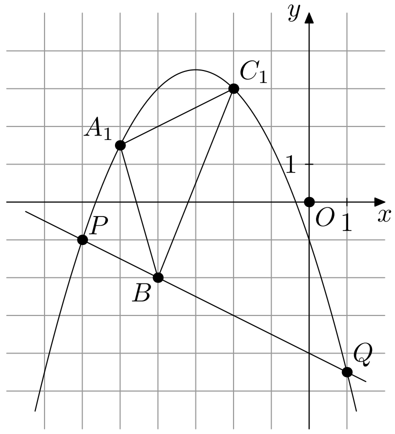
(b) Berechne die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit vom x-Wert der Punkte A_n.
[Ergebnis: $C_n(x+3|-0,5x^2-6x-14,5)$]

(c) Für den Flächeninhalt A der Dreiecke A_nBC_n ergibt sich in Abhängigkeit von x:
$$A(x) = (0,75x^2 + 8,25x + 28,5)\,\text{cm}^2$$
Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es die beiden Dreiecke A_2BC_2 und A_3BC_3, deren Punkte C_2 und C_3 auf der Geraden g liegen.
Berechne den Flächeninhalt dieser beiden Dreiecke.

(d) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es das Dreieck A_4BC_4, dessen Seite $[A_4C_4]$ parallel zur x-Achse liegt.
Berechne die zugehörige Belegung von x.

(e) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es das Dreieck A_5BC_5, dessen Seite $[A_5C_5]$ parallel zur Geraden g liegt.
Berechne das Maß γ des Winkels A_5C_5B dieses Dreiecks.
[Teilergebnis: $x = -4$]

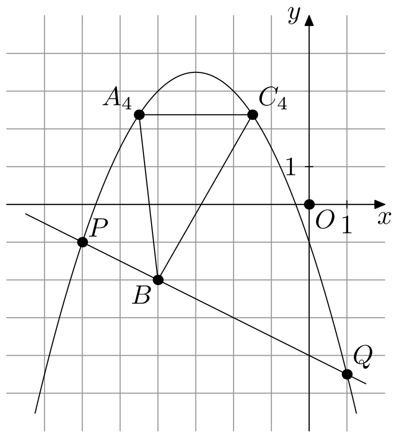
Lösung: (a) Wenn der Punkt C_1 den x-Wert -2 besitzt, dann muss der Punkt A den x-Wert -5 besitzen:



(b) $x_C = x + 3$ wird in den Rechtsterm der Parabelgleichung von p eingesetzt, weil $C_n \in p$ gilt:
$y_C = -0,5(x+3)^2 - 3(x+3) - 1 = -0,5(x^2 + 6x + 9) - 3x - 9 - 1 = -0,5x^2 - 3x - 4,5 - 3x - 10 = -0,5x^2 - 6x - 14,5$.

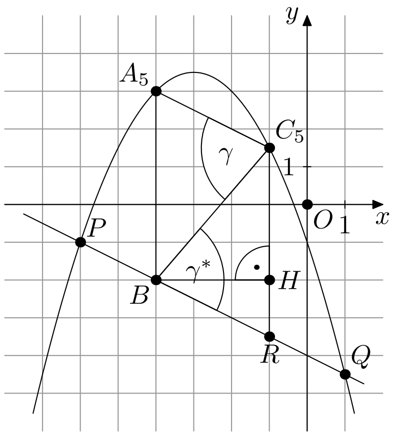
(c) Die Punkte C_2 und C_3 müssen auf den beiden Schnittpunkten P und Q der Parabel p und der Geraden g liegen:
$p \cap g : -0,5x^2 - 3x - 1 = -0,5x - 4 \quad \Rightarrow \quad D^* = 12,25$
$\cdots \quad \Rightarrow \quad x_2 = -6 \quad x_3 = 1$. Eingesetzt in den Flächenterm:
$A(-6) = (0,75 \cdot (-6)^2 + 8,25 \cdot (-6) + 28,5)\,\mathrm{cm}^2 = 6\,\mathrm{cm}^2$
$A(1) = (0,75 \cdot 1^2 + 8,25 \cdot 1 + 28,5)\,\mathrm{cm}^2 = 37,5\,\mathrm{cm}^2$

(d)



Die Punkte A_4 und C_4 haben zur x-Achse den gleichen Abstand. Folglich ist ihr y-Wert der gleiche:
$-0,5x^2 - 3x - 1 = -0,5x^2 - 6x - 14,5 \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad x = -4,5$.

(e)



Der Steigungsfaktor der Strecke $[A_5C_5]$ muss mit dem der Geraden g übereinstimmen:

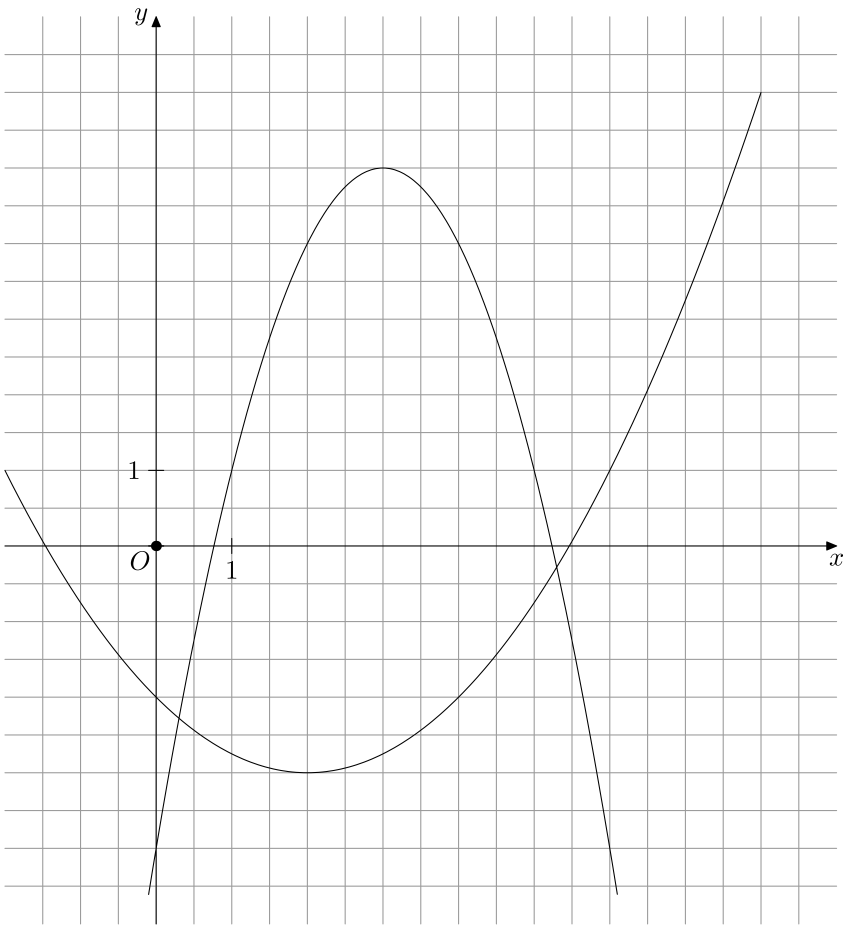
$$\frac{(-0,5x^2-6x-14,5)-(-0,5x^2-3x-1)}{(x+3)-x}=\frac{-3x-13,5}{3}=-0,5$$
$\cdots \quad \Rightarrow \quad x=-4.$

Damit sind alle Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks A_5BC_5 bekannt:
$\mathrm{A}_5\,(-4|3)$, $\mathrm{B}\,(-4|-2)$ und $\mathrm{C}_5\,(-1|1,5)$.

1. Möglichkeit: Berechne alle Streckenlängen im Dreieck A_5BC_5 und wende den Kosinussatz an.

2. Möglichkeit:
Du siehst, dass γ und γ^* gleich groß sind (Z-Winkel).
Die Höhe $[BH]$ zerlegt den Winkel mit dem Maß γ^* in zwei Teilwinkel, deren Maß jeweils in den rechtwinkligen Dreiecken BHC_5 und RHB mit dem Tangens berechnet werden kann.
$\tan\sphericalangle HBC_5=\dfrac{3,5}{3} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle HBC_5\approx 49,40°.$
$\tan\sphericalangle RBH=\dfrac{1,5}{3} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle RBH\approx 26,57°.$ Also gilt: $\gamma\approx 75,97°.$

3. Die nach unten geöffnete Normalparabel p_1 besitzt den Scheitel $S_1(3 \mid 5)$.
Die Gleichung einer weiteren Parabel p_2 hat die Form $y=ax^2-x+c$ und sie verläuft durch die Punkte $P(-0,4 \mid -1,56)$ und $Q(0,8 \mid -2,64)$.
Im Koordinatensystem sind Ausschnitte der beiden Parabeln dargestellt:



(a) Zeige: Die Parabel p_1 hat die Gleichung $y = -x^2 + 6x - 4$.
Zeige: Die Parabel p_2 hat die Gleichung $y = 0,25x^2 - x - 2$.

(b) Auf der Parabel p_1 wandern Punkte $D_n(x \mid -x^2+6x-4)$ und auf der Parabel p_2 wandern Punkte A_n mit jeweils dem gleichen Abszissenwert wie die Punkte D_n. Dadurch werden achsensymmetrische Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ mit den folgenden Eigenschaften erzeugt:

- $[A_nD_n] \parallel [B_nC_n]$
- die Strecken $[B_nC_n]$ liegen stets rechts von den Strecken $[A_nD_n]$
- Die Seiten $[B_nC_n]$ sind jeweils 4 cm lang.
- Der Abstand der beiden jeweils parallelen Trapezseiten beträgt stets 4 cm.

Zeichne für $x = 4$ das Trapez $A_1B_1C_1D_1$ ein.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ gilt in Abhängigkeit von x: $A(x) = (-2,5x^2 + 14x + 4)\,\text{cm}^2$.

(d) Untersuche, ob es unter allen Trapezen $A_nB_nC_nD_n$ eines gibt, das einen Flächeninhalt von $24\,\text{cm}^2$ aufweist.

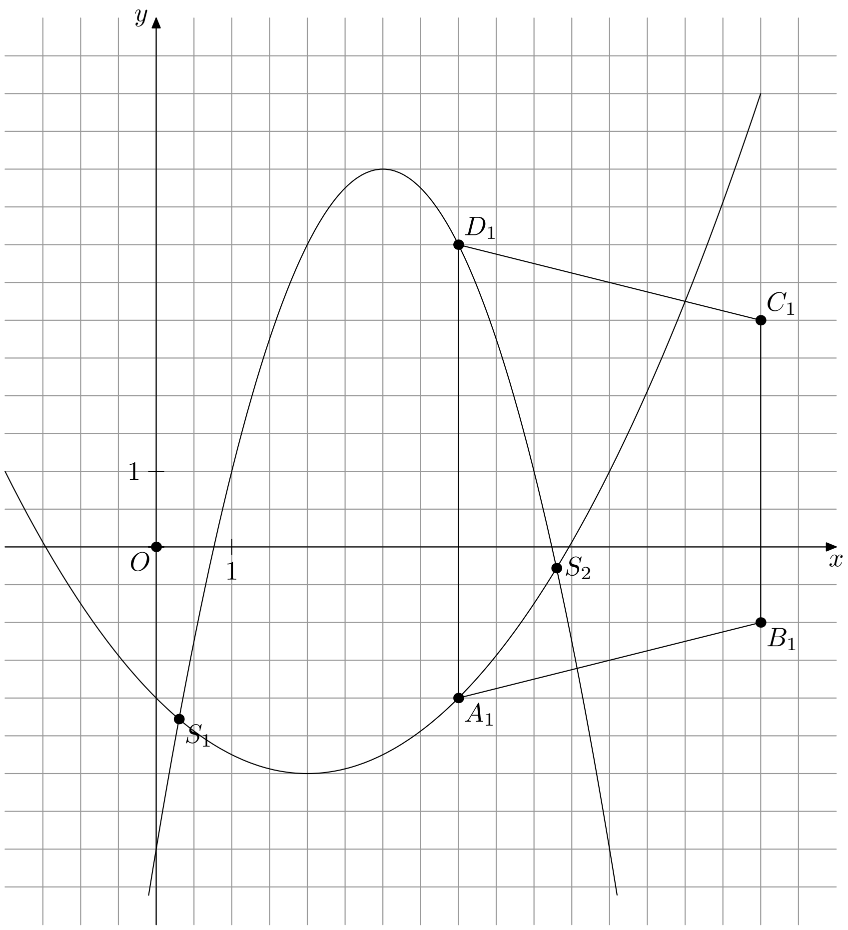
(e) Wie viele Quadrate gibt es als Sonderfall unter allen Trapezen $A_nB_nC_nD_n$? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) Jede nach unten geöffnete Normalparabel hat den Formfaktor $a = -1$.
Mit $S_1(3 \mid 5)$ folgt für $p_1 : y = -(x-3)^2 + 5 = -(x^2 - 6x + 9) + 5 = -x^2 + 6x - 4$.

$$\begin{array}{llrcll}
A(-0,4 \mid -1,56) & \text{in } p_2 : & -1,56 & = & 0,16a + 0,4 + c & (1) \\
B(-0,8 \mid -2,64) & \text{in } p_2 : & -2,64 & = & 0,64a - 0,8 + c & (2) \quad \mid \cdot(-1) \\
\hline
 & & 2,64 & = & -0,64a + 0,8 - c & (2)' \\
 & (1) + (2)': & 1,08 & = & -0,48a + 1,2 &
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad a =$
$0,25$ in (1): $-1,56 = 0,04 + 0,4 + c$
$\Rightarrow \quad c = -2 \quad \Rightarrow \quad p_2 : y = 0,25x^2 - x - 2$

(b)



(c) Für alle Punkte D_n, die jeweils über ihrem zugehörigen Punkt A_n liegen, gilt (Einheiten werden zunächst weggelassen):
$\overline{A_nD_n}(x) = (-x^2 + 6x - 4) - (0,25x^2 - x - 2) = \ldots = -1,25x^2 + 7x - 2$
Für den Flächeninhalt der Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ gilt dann:

$$A(x) = \frac{(-1,25x^2 + 7x - 2) + 4}{2} \cdot 4 = 2 \cdot (-1,25x^2 + 7x - 2)$$

$\Rightarrow \quad A(x) = (-2,5x^2 + 14x + 4)\,\text{cm}^2.$

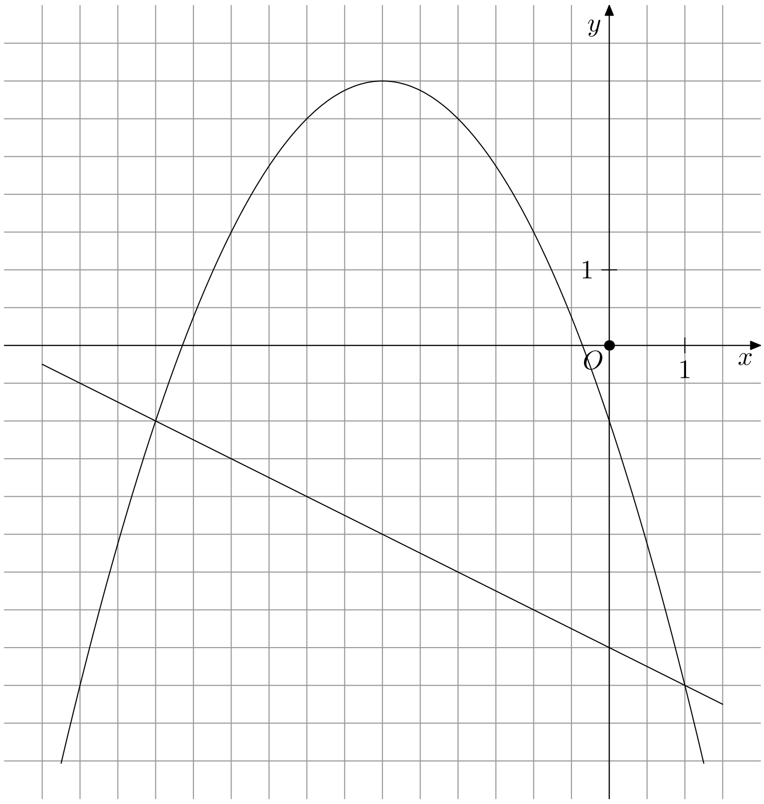
(d) 1. Möglichkeit:
$-2,5x^2 + 14x + 4 = 24 \quad \Leftrightarrow \quad -2,5x^2 + 14x - 20 = 0$
Diskriminante: $D^* = -4 < 0$. Ein solches Trapez gibt es nicht.
2. Möglichkeit:
Zur Lösung der Aufgabe wird der Extremwert des Flächenterms

$$-2,5x^2 + 14x + 4$$

über die Scheitelkoordinaten der zugehörigen Parabel p^* errechnet:
$p^* : y = -2,5x^2 + 14x + 4 \quad \Rightarrow \quad S^*(2,8 \mid 23,6)$.
Also lautet der Antwortsatz zum Extremwertproblem „$x = 2,8$ liefert die maximale Trapezläche $23,6\,\text{cm}^2$." Deshalb kann es kein Trapez mit einem noch größeren Flächeninhalt, wie z.B. $24\,\text{cm}^2$ geben.

(e) 1. Möglichkeit (rechnerisch):
In c) wurde schon $\overline{A_nD_n}(x) = (1,25x^2 + 7x - 2)\,\text{cm}$ errechnet.
Soll eines der Trapeze zum Quadrat werden, dann müssen alle Seiten gleich lang sein.
Insbesondere gilt dann: $\overline{A_nD_n} = \overline{B_nC_n} = 4\,\text{cm}$
Also: $1,25x^2 + 7x - 2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1,25x^2 + 7x - 6 = 0$
Diskriminante: $D^* = 79 > 0$. Also gibt es zwei Lösungen und damit zwei Quadrate.
2. Möglichkeit(anschaulich):
Nur dann, wenn die Strecken $[A_nD_n]$ zwischen den beiden Schnittpunkten S_1 und S_2 der Parabeln p_1 und p_2 bleiben, gibt es solche Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ (ansonsten gibt es zwei Dreiecke oder überschlagene Trapeze). Wenn Quadrate dabei sein sollen, dann müssen deren Seiten genau so wie alle Strecken $[B_nC_n]$ $4\,\text{cm}$ lang sein.
Am Schnittpunkt S_1 ist eine der Strecken $[A_nD_n]$ zum Punkt entartet, also $0\,\text{cm}$ lang. Auf ihrer Wanderbewegung nach rechts werden dann die Strecken $[A_nD_n]$ immer länger, bis sie einen maximalen Wert erreichen. Aus der Zeichnung kann man ablesen, dass dieser Maximalwert länger als $7\,\text{cm}$ ist. Also wird dazwischen sicher eine Seitenlänge von $4\,\text{cm}$ angenommen.
Nachdem die maximale Streckenlänge von mehr als $7\,\text{cm}$ erreicht worden ist, nehmen die Steckenlängen $[A_nD_n]$ bis zum Schnittpunkt S_2 der beiden Parabeln (die dortige Streckenlänge beträgt wieder $0\,\text{cm}$) ständig ab. Also muss auf dem Weg dorthin eine der Strecken $[A_nD_n]$ erneut $4\,\text{cm}$ lang geworden sein.
Also gibt es unter den Trapezen $A_nB_nC_nD_n$ zwei Quadrate.

4. Gegeben sind die Parabel $p : y = -0,5x^2 - 3x - 1$ und die Gerade $g : y = -0,5x - 4$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



Auf der Parabel p wandern sowohl Punkte $A_n(x \mid -0,5x^2-3x-1)$ als auch Punkte C_n. Dabei ist der Abszissenwert der Punkte C_n stets um 3 größer als der Abszissenwert x der Punkte A_n.

(a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der Parabel p mit der Geraden g.

(b) Berechne die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit vom x-Wert der Punkte A_n.

[Ergebnis: $C_n(x+3 \mid -0,5x^2-6x-14,5)$]

(c) Zusammen mit dem Punkt $B(-4|-2)$ werden zwischen Gerade und Parabel Dreiecke A_nBC_n erzeugt.
Zeichne für $A_1(-5|y_1)$ das Dreieck A_1BC_1 in obiges Koordinatensystem ein.

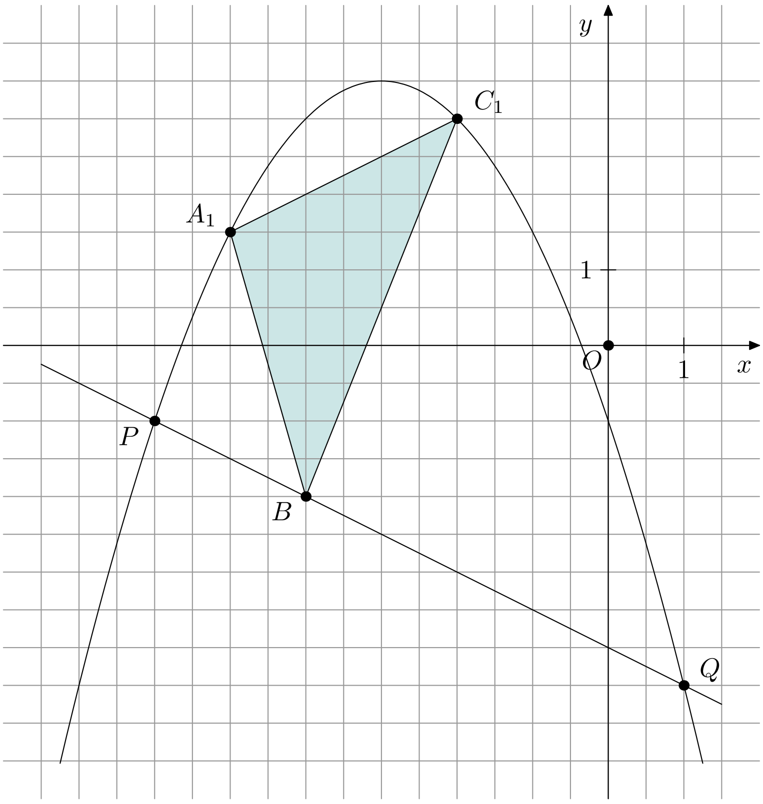
(d) Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke A_nBC_n in Abhängigkeit von x.

[Ergebnis: $A(x) = (0,75x^2+8,25x+28,5)\,\mathrm{cm}^2$]

(e) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es eines, das einen minimalen Flächeninhalt aufweist. Berechne dieses Minimum und die zugehörige Belegung von x.

(f) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es das Dreieck A_3BC_3, so dass $\sphericalangle A_3BP = \sphericalangle BA_3C_3$ gilt. Berechne den zugehörigen Abszissenwert x.

Lösung:



(a) $-0,5x^2 - 3x - 1 = -0,5x - 4 \quad \Rightarrow \quad -0,5x^2 - 2,5x + 3 = 0$
$D^* = 12,25 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{D^*} = 3,5$
$x_{1;2} = \dfrac{2,5 \pm 3,5}{-1}$
$x_1 = -6$ in g: $y_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad P(-6 \mid -1)$
$x_2 = 1$ in g: $y_2 = -4,5 \quad \Rightarrow \quad Q(1 \mid -4,5)$

(b) Das Ergebnis folgt aus: $C_n(x+3 \mid -0,5(x+3)^2 - 6(x+3) - 14,5)$.

(c) Siehe Zeichnung

(d) $\overrightarrow{BC_n} = \begin{pmatrix} x+7 \\ -0,5x^2 - 6x - 12,5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BA_n} = \begin{pmatrix} x+4 \\ -0,5x^2 - 3x + 1 \end{pmatrix}$

$$A(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x+7 & x+4 \\ -0,5x^2 - 6x - 12,5 & -0,5x^2 - 3x + 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \quad A(x) = (0,75x^2 + 8,25x + 28,5)\,\mathrm{cm}^2$

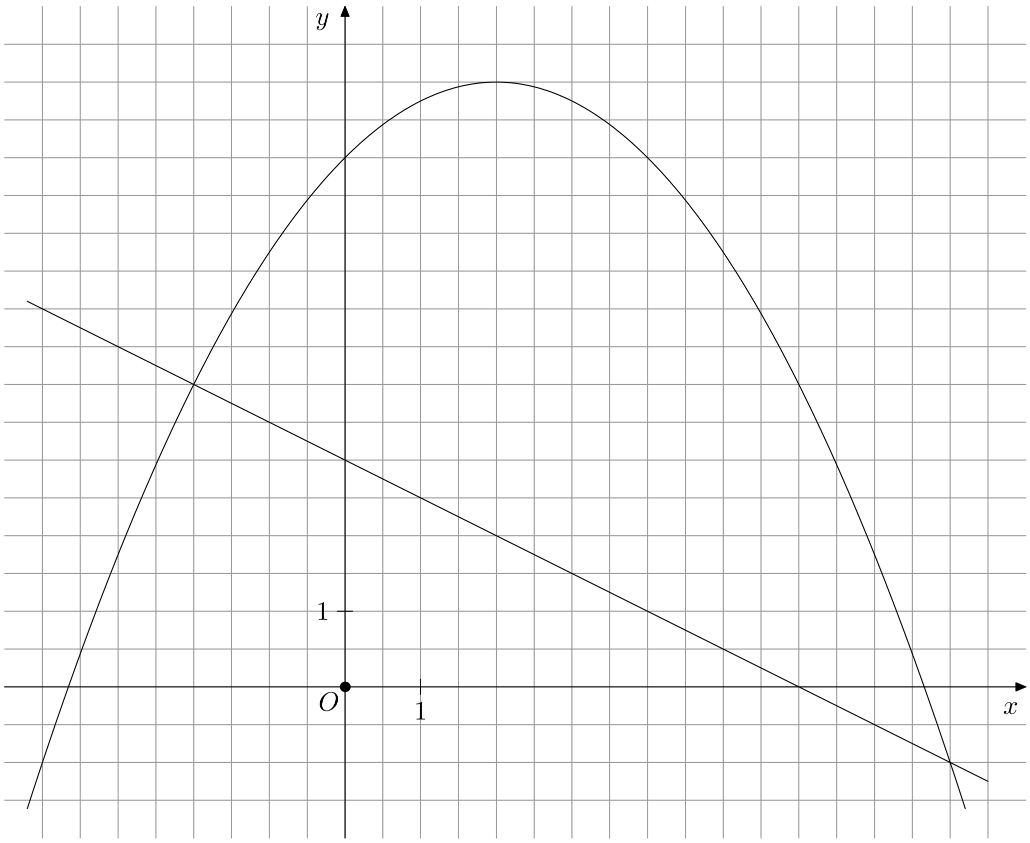
(e) $x = -5,5$ liefert $A_{\min} = 5,8125\,\mathrm{cm}^2$.

(f) Die Seite $[A_3C_3]$ muss zur Graden g parallel sein:

$$\overrightarrow{A_nC_n} = \begin{pmatrix} x+3-x \\ -0,5x^2 - 6x - 14,5 - (-0,5x^2 - 3x - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3x - 13,5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{-3x - 13,5}{3} = -0,5 \quad \Rightarrow \quad x = -4$

5. Gegeben sind die Parabel p und die Gerade g durch die Gleichungen:
$p : y = -0,25x^2 + x + 7$ und $g : y = -0,5x + 3$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



(a) Ermittle die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der Parabel p mit der Geraden g. Der Punkt P soll dabei nicht im IV. Quadranten liegen.

(b) Die Punkte $A_n(x \mid -0,25x^2 + x + 7)$ auf der Parabel p und die Punkte B_n auf der Geraden g besitzen jeweils den gleichen Abszissenwert.
Die Punkte A_n und B_n sind Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken $A_nB_nC_n$ mit den Basen $[A_nB_n]$. Die Höhen auf diese Basen sind stets 4 cm lang. Die Punkte C_n sollen stets rechts von den Basen $[A_nB_n]$ liegen.
Zeichne für $x = -1$ das Dreieck $A_1B_1C_1$ ein.

(c) Zeichne für $C_2(7,5 \mid y_2)$ das Dreieck $A_2B_2C_2$ ein.
Berechne die Koordinaten des Punktes A_2.

(d) Zeige durch Rechnung: Für den Flächeninhalt A dieser Dreiecke $A_nB_nC_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = (-0,5x^2 + 3x + 8)\,\text{cm}^2$$

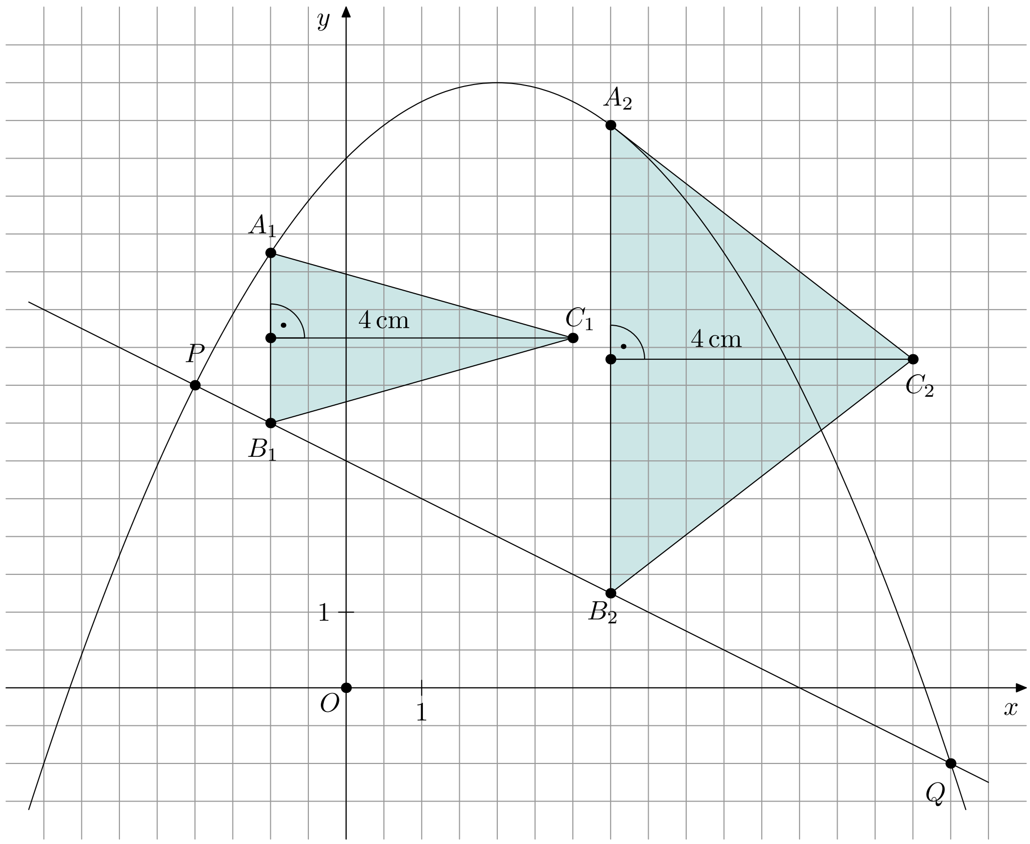
(e) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es eines, das einen maximalen Flächeninhalt aufweist. Berechne dieses Maximum und die zugehörige Belegung von x.

(f) Gibt es unter allen Dreiecken A_nBC_n ein Dreeick $A_3B_3C_3$, dessen Eckpunkt C_3 auf der y-Achse liegt? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) Der Schnittpunkt im IV.Quadranten muss Q sein.

1. Möglichkeit:
$-0,25x^2 + x + 7 = -0,5x + 3 \quad \Rightarrow \quad -0,25x^2 + 1,5x + 4 = 0$
$D^* = 6,25 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{D^*} = 2,5$
$x_{1;2} = \dfrac{-1,5 \pm 2,5}{-0,5}$
$x_1 = -2$ in g: $y_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad P(-2 \mid 4)$
$x_2 = 8$ in g: $y_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad Q(8 \mid -1)$
2. Möglichkeit:
Aus der schon vorhandenen Zeichnung kannst du ablesen: $P(-2 \mid 4)$ und $Q(8 \mid -1)$.
Wenn du die Koordinaten dieser Punkte in die Gleichung der Parabel **und** die der Geraden einsetzt, ergeben sich insgesamt vier wahre Aussagen. Das bedeutet, dass die Punkte P und Q **sowohl** auf der Geraden g **als auch** auf der Parabel p liegen.
Weil aber eine Gerade eine Parabel höchstens in zwei Punkten schneiden kann, sind P und Q die gesuchten Schnittpunkte.

(b)



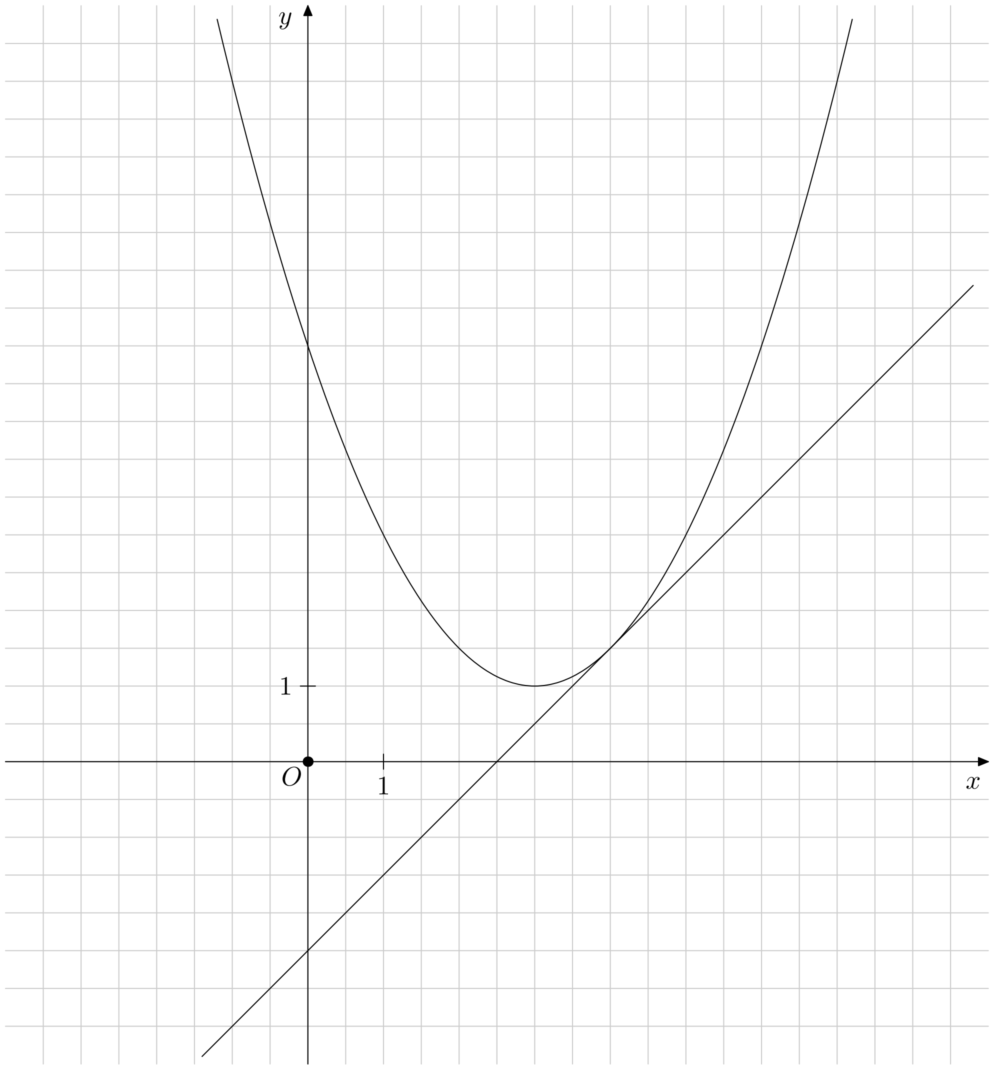
(c) Siehe Zeichnung.
$x_C = 7,5 \quad \Rightarrow \quad x = 7,5 - 4 = 3,5$
$\Rightarrow \quad y = -0,25 \cdot 3,5^2 + 3,5 + 7 = 7,4375 \quad \Rightarrow \quad A_2(3,5 \mid 7,4375)$

(d) $y_{A_n} - y_{B_n} = -0,25x^2 + x + 7 - (-0,5x + 3) = -0,25x^2 + 1,5x + 4$
$A(x) = 0,5 \cdot (-0,25x^2 + 1,5x + 4) \cdot 4\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad A(x) = (-0,5x^2 + 3x + 8)\,\text{cm}^2$

(e) $x = 3$ liefert $A_{\max} = 12,5\,\text{cm}^2$.

(f) Wenn der Punkt C_3 auf der y-Achse liegen soll, dann müssen die Punkte A_3 und B_3 auf einer Parallelen zur y-Achse im Abstand von 4 cm liegen, die durch den II. und III. Quadranten verläuft.
Der Abstand des Punktes P von der y-Achse beträgt 2 cm. Demnach käme der Punkt B_3 auf der Geraden g über den Punkt A_3 auf der Parabel p zu liegen. Dadurch hätte das Dreieck $A_3B_3C_3$ den falschen Drehsinn, weil der Punkt C_3 ja wie alle Punkte C_n rechts von der Basis liegen müsste; d.h. es gibt unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ kein solches Dreieck $A_3B_3C_3$.

6. Die Parabel p besitzt die Scheitelkoordinaten $S(3 \mid 1)$ und sie verläuft durch einen Punkt mit den Koordinaten $(5 \mid 3)$. Außerdem ist eine Gerade g durch die Gleichung $y = x - 2,5$ gegeben.
Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt.
Auf der Geraden g liegen Punkte $A_n(x \mid x - 2,5)$ und auf der Parabel p liegen Punkte C_n, die jeweils denselben Abszissenwert wie die Punkte A_n besitzen.
Damit werden Rauten $A_nB_nC_nD_n$ erzeugt, deren Diagonalen $[B_nD_n]$ stets 4 cm lang sind.



(a) Zeige: Die Parabel p besitzt die Gleichung $y = 0,5x^2 - 3x + 5,5$.

(b) Begründe rechnerisch: Die Gerade g ist eine Tangente an die Parabel p.

(c)
- Zeichne für $x = -1$ die Raute $A_1B_1C_1D_1$ ein.
- Zeichne für $D_2(4 \mid y_{D_2})$ die Raute $A_2B_2C_2D_2$ ein.

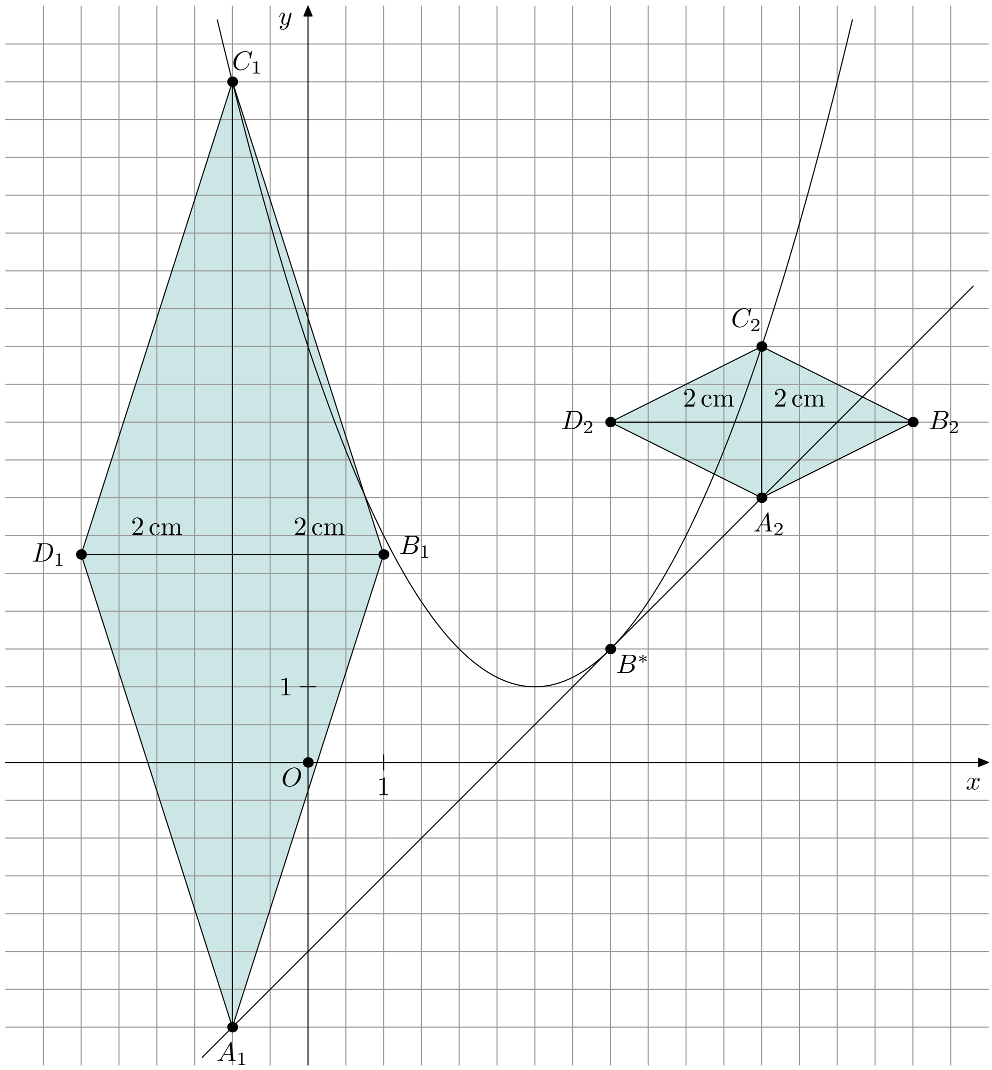
(d)
- Für die Diagonalenlängen $\overline{A_nC_n}$ gilt in Abhängigkeit von x:
  $\overline{A_nC_n}(x) = (0,5x^2 - 4x + 8)\,\text{cm}$.
  Ermittle damit alle Belegungen von x, für die es solche Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt.
- Für den Flächeninhalt A der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gilt in Abhängigkeit von x:
  $A(x) = (x^2 - 8x + 16)\,\text{cm}^2$.
  Bestätige damit das Ergebnis der vorherigen Aufgabe.
- Bestätige mit dem Ergebnis der Aufgabe (b) das Ergebnis der vorherigen Aufgabe.

(e) Unter allen Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt es auch Quadrate.
- Jeweils ein Eckpunkt dieser Quadrate muss auf der Geraden g liegen. Warum?
- Wie viele solcher Quadrate gibt es? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) $S(3 \mid 1)$ und $(5 \mid 3)$ in die Scheitelform:
$p : 3 = a \cdot (5-3)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad a = 0,5$
$p : y = 0,5 \cdot (x-3)^2 + 1 = \ldots = 0,5x^2 - 3x + 5,5$

(b) $p \cap g : 0,5x^2 - 3x + 5,5 = x - 2,5 \quad \Rightarrow \quad 0,5x^2 - 4x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad D^* = 0$
Also ist die Gerade g eine Tangente an die Parabel p.

(c)
- Siehe Zeichnung.
- Wenn der Punkt D_2 den Abszissenwert 4 besitzt, dann muss der Punkt B_2 den Abszissenwert $4 + 4 = 8$ besitzen.
Somit müssen die Punkte A_2 und C_2 jeweils den x-Wert $\frac{8+4}{2} = 6$ besitzen, denn in jeder Raute halbieren sich die Diagonalen. Das ergibt dann das folgende Bild:



(d)

- $\overline{A_nC_n}(x) = (0,5x^2 - 4x + 8)\,\text{cm} = [0,5(x^2 - 8x + 16)]\,\text{cm} = 0,5(x-4)^2\,\text{cm}$
  Es gilt stets $(x-4)^2 \geqq 0$ und damit $0,5(x-4)^2 \geqq 0$.
  Für $x = 4$ gilt $\overline{A_nC_n}(4) = 0\,\text{cm}$; d.h. die betreffende „Raute" würde zur Strecke entarten.
  Der Drehsinn sämtlicher Rauten bleibt immer richtig, weil die Punkte C_n auf der Parabel p stets „über" der Geraden g mit ihren Punkten A_n liegen.
  Also gibt es Rauten $A_nB_nC_nD_n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

- Für den Flächeninhalt A der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gilt in Abhängigkeit von x:
  $A(x) = 0,5 \cdot 4 \cdot (0,5x^2 - 4x + 8)\,\text{cm}^2 = \ldots = (x-4)^2\,\text{cm}^2$
  Nur für $x = 4$ verschwindet der Flächeninhalt der betreffenden (zur Strecke entarteten) Raute.
  Also gibt es Rauten $A_nB_nC_nD_n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

- Die Gerade g ist eine Tangente der Parabel p. Also gibt es keinen Punkt auf der Parabel, der die Gerade g überqueren und damit den Drehsinn auch nur einer der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ umkehren könnte.
  Einzig der Berührpunkt B^* stellt einen kritischen Fall dar.
  Wie in der Lösung (b) schon gezeigt, gilt $0,5x^2 - 4x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0,5(x-4)^2 = 0$ und damit folgt $B^*(4 \mid 1,5)$ (siehe Zeichnung). Nur dort gibt es eine (zu Strecke entartete) „Raute".
  Also gibt es Rauten $A_nB_nC_nD_n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

(e)

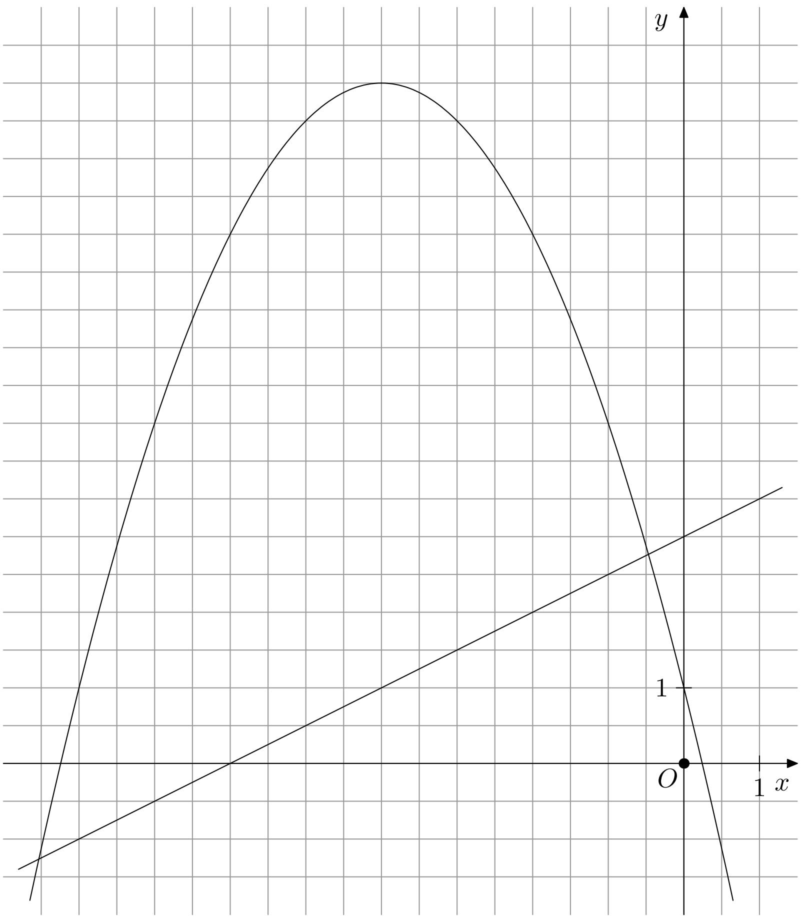
- Die Quadratdiagonalen liegen wie alle Rautendiagonalen $\overline{A_nC_n}$ zur y-Achse parallel und sie halbieren jeweils zwei rechte Innenwinkel der betreffenden Quadrate.
  Die Gerade g besitzt den Steigungsfaktor m=1; d.h. sie schneidet die x-Achse unter einem 45°-Winkel. Folglich müssen die Quadratdiagonalen einen 45°-Winkel mit der Geraden g einschließen. Also müssen die Quadrateckpunkte unter den Rauteneckpunkten B_n auf der Geraden g liegen.

- 1. Möglichkeit:
  $0,5x^2 - 4x + 8 = 4 \quad \Rightarrow \quad 0,5x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad D^* = 8.$
  Die quadratische Gleichung besitzt zwei Lösungen und damit gibt es zwei Quadrate.
  2. Möglichkeit:
  Der Eckpunkt B_1 der Raute $A_1B_1C_1D_1$ liegt „über" der Geraden g, der Eckpunkt B_2 der Raute $A_2B_2C_2D_2$ liegt dagegen „unter" der Geraden g.
  Also muss einer der Punkte B_n – wir nennen ihn B_3 – während der Wanderung von der Position 1 zur Position 2 **auf** der Geraden g liegen.
  Die Gerade g besitzt den Steigungsfaktor m=1; d.h. sie schneidet die x-Achse unter einem 45°-Winkel. Das bedeutet, dass auch in der betreffenden Raute $A_3B_3C_3D_3$ $\sphericalangle B_3A_3C_3 = 45°$ gilt. Aus Symmetriegründen muss dann $\sphericalangle B_3A_3D_3 = 90°$ gelten. Wenn jedoch in der Raute $A_3B_3C_3D_3$ ein Innenwinkel das Maß 90° besitzt, dann muss diese Raute (wie jede andere auch) ein Quadrat sein.
  Wenn nun Punkte B_n über den Punkt B_2 der Raute $A_2B_2C_2D_2$ hinaus nach rechts wandern, nehmen die Diagonalenlängen $\overline{A_nC_n}$ wieder zu. Sie „heben" dann die Punkte B_n über die Gerade g hinweg. Also muss es einen weiteren Punkt B_4 geben der auf der Geraden g liegt. Aus den vorherigen Überlegungen muss dieser Punkt B_4 zu einem weiteren Quadrat $A_4B_4C_4D_4$ gehören.

Links von der Position des Quadrates $A_3B_3C_3D_3$ und rechts von der Position des Quadrates $A_4B_4C_4D_4$ überquert keiner der Punkte B_n mehr die Gerade g. Also bleibt es bei den beiden Quadraten.

Anmerkung:
Die veränderlichen Rauten lassen sich sehr anschaulich in einer Datei, die mit Hilfe des dem dynamischen Mathematikprogrammes „GEONExT“ erzeugt wurde („10eh116.gxt“), darstellen.

7. Gegeben sind eine Parabel p und eine Gerade g durch die Gleichungen:
$P : y = -0,5x^2 - 4x + 1$ und $g : y = 0,5x + 3$.
Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



Auf der Parabel p liegen dort, wo die Parabel **oberhalb** der Geraden verläuft, Punkte $P_n(x \mid -0,5x^2 - 4x + 1)$.
Auf der Geraden g liegen Punkte Q_n jeweils mit dem gleichen Abszissenwert x wie die Punkte P_n. Zudem liegen auf der Geraden g Punkte R_n, deren Abszissenwert jeweils um 2 größer als der Abszissenwert der Punkte P_n bzw. Q_n ist .
Dadurch werden Dreiecke $P_nQ_nR_n$ erzeugt.

(a) Zeichne für $x = -4,5$ das Dreieck $P_1Q_1R_1$ ein.

(b) Zeige: Die Streckenlängen $\overline{P_nQ_n}$ lassen sich in Abhängigkeit von x wie folgt darstellen:
$$\overline{P_nQ_n}(x) = (-0,5x^2 - 4,5x - 2)\,\text{cm}$$

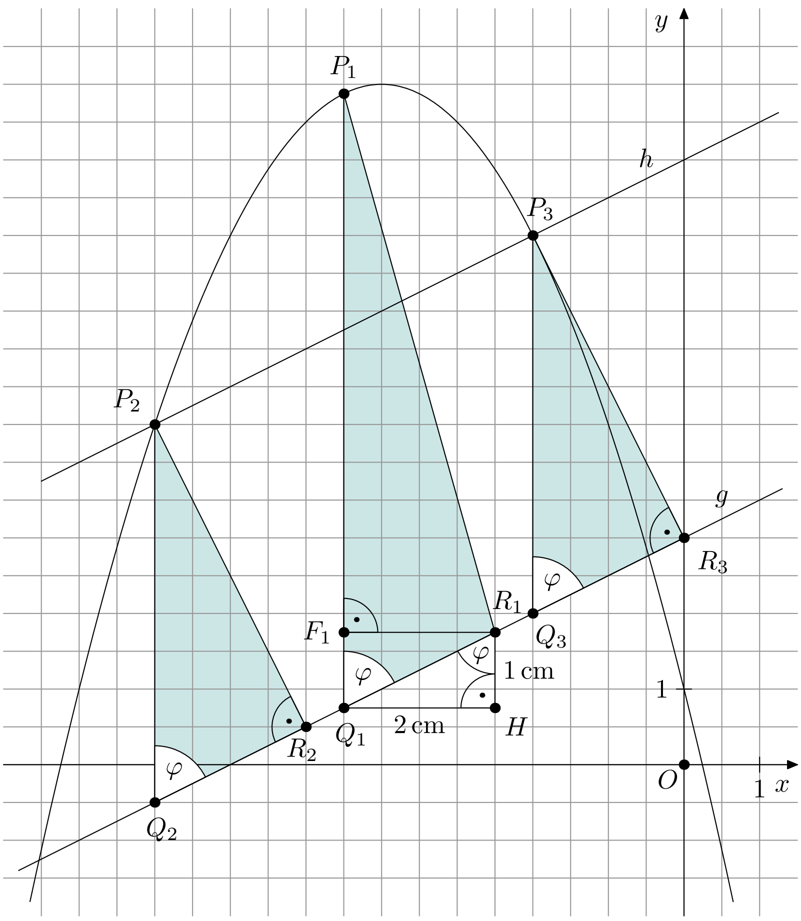
(c) Begründe: Die längste unter allen Streckenlängen $\overline{P_nQ_n}$ erzeugt gleichzeitig das flächengrößte unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$

(d) Untersuche rechnerisch, ob es unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$ gleichschenklige gibt, deren Basis jeweils eine der Strecken $[P_nQ_n]$ ist.

(e)
- Zeichne für $x = -7$ das Dreieck $P_2Q_2R_2$ ein.
  Weise rechnerisch nach, dass dieses Dreieck rechtwinklig ist.
- Berechne das Maß eines der spitzen Innenwinkel dieses Dreiecks.
- Es gibt ein weiteres Dreieck $P_3Q_3R_3$, das zum Dreieck $P_2Q_2R_2$ kongruent ist.
  Konstruiere den Eckpunkt P_3 dieses Dreiecks (die Konstruktionslinie muss deutlich sichtbar sein) und begründe deine Vorgehensweise.
  Zeichne dieses Dreieck $P_3Q_3R_3$ ein.

(f) Unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$ gibt es noch zwei rechtwinklige Dreiecke $P_4Q_4R_4$ und $P_5Q_5R_5$ mit den Hypotenusen $[Q_4R_4]$ bzw. $[Q_5R_5]$. Berechne die zugehörigen x-Werte.

Lösung: (a) Siehe Zeichnung.



(b) Es gilt: $\overline{P_nQ_n}^{\,2} = (x-x)^2\,\text{cm}^2 + [(-0,5x^2-4x+1)-(0,5x+3)]\,\text{cm}^2$
$= (-0,5x^2-4,5x-2)^2\,\text{cm}^2$.
$\Rightarrow \quad \overline{P_nQ_n} = \mid -0,5x^2-4,5x-2 \mid\ \text{cm}$.
Weil die y-Werte der Punkte P_n stets größer als die y-Werte der Punkte Q_n sind, kannst du die Betragstriche weglassen.
Also folgt: $\overline{P_nQ_n}(x) = (-0,5x^2-4,5x-2)\,\text{cm}$

(c) 1. Möglichkeit: anschaulich
Die Höhen $[R_nF_n]$ der Dreiecke $P_nQ_nR_n$ sind konstant 2 cm lang (vgl. $[R_1F_1]$ in der Zeichnung). Nur die Längen der zugehörigen Grundlinien $[P_nQ_n]$ sind veränderlich. Wegen der Formelgleichung für Dreiecksflächen $A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}$ hängt der Flächeninhalt dieser Dreiecke $P_nQ_nR_n$ nur von den Längen der Grundlinien $[P_nQ_n]$ ab. Wenn dort die maximale Länge erreicht ist, dann ist auch die zugehörige Dreiecksfläche am größten.
2. Möglichkeit: rechnerisch
Für den Flächeninhalt A der Dreiecke $P_nQ_nR_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_nQ_n} \cdot \overline{R_nF_n} =$$
$$\frac{1}{2} \cdot (-0,5x^2-4,5x-2) \cdot 2\,\text{cm}^2 = (-0,5x^2-4,5x-2)\,\text{cm}^2.$$

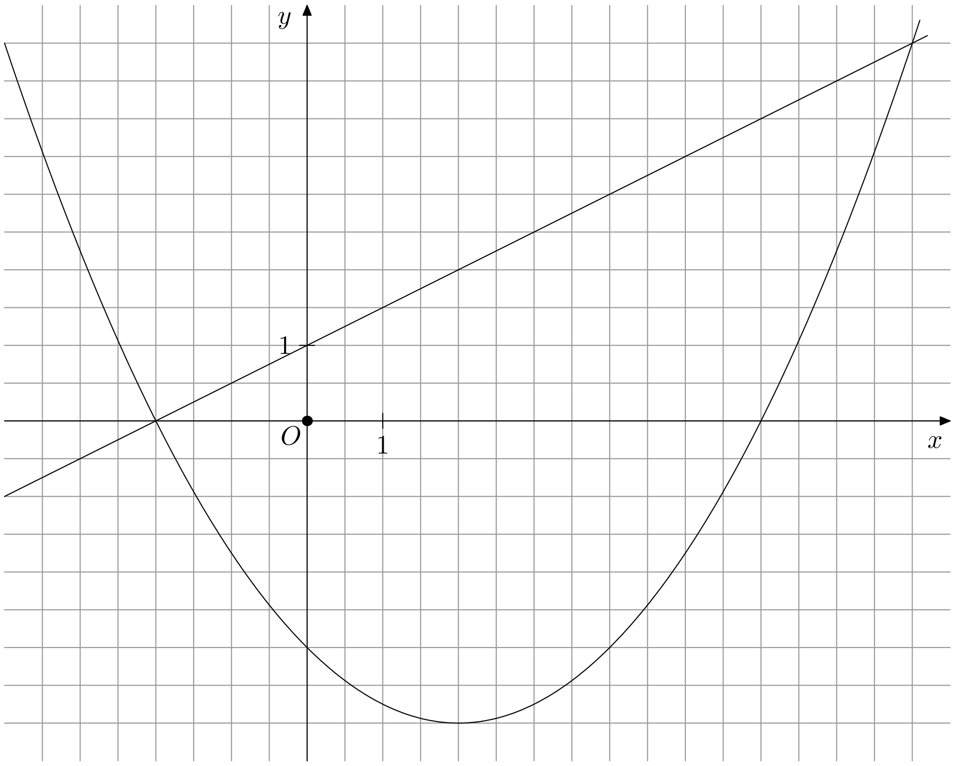
Damit stimmen für jeden zulässigen x-Wert die Maßzahlen von Flächeninhalt und Grundlinienlänge überein.
Wenn also eine der Grundlinien $[P_nQ_n]$ am längsten wird, dann ist auch der Inhalt der zugehörigen Dreiecksfläche maximal.

(d) Es gilt $Q_n(x \mid 0,5x+3)$ und $R_n(x+2 \mid 0,5(x+2)+3) = (x+2 \mid 0,5x+4)$.
Betrachte das Steigungsdreieck Q_1HR_1, das an der Geraden g unveränderlich ist.
Dem kannst du entnehmen, dass stes $\overline{Q_nR_n} = \sqrt{1^2+2^2}\,\text{cm} = \sqrt{5}\,\text{cm}$ gilt.
Von Aufgabe (b) ist $\overline{P_nQ_n}(x) = (-0,5x^2 - 4,5x - 2)\,\text{cm}$ schon bekannt.
Es muss $-0,5x^2 - 4,5x - 2 = \sqrt{5}$ gelten.
$\Leftrightarrow \quad 0,5x^2 + 4,5x + (2+\sqrt{5}) = 0 \quad \Rightarrow \quad D^* = 16,25 - 2\sqrt{5}\,(\approx 11,78) > 0$
Also gibt es zwei solche gleichschenklige Dreiecke.

(e)
- Siehe Zeichnung.
- $x = -7$ liefert: $P_2(-7 \mid 4,5)$, $Q_2(-7 \mid -0,5)$ und $R_2(-5 \mid 0,5)$.
  $\overline{P_2Q_2} = 5\,\text{cm}$, $\overline{Q_2R_2}(x) = \sqrt{5}\,\text{cm}$ (siehe Lösung der Aufgabe (d)) und $\overline{P_2R_2} = \sqrt{(-5+7)^2 + (4,5-0,5)^2}\,\text{cm} = \sqrt{20}\,\text{cm}$
  In diesem Dreieck $P_2Q_2R_2$ gilt der Satz des PYTHAGORAS:
  $5^2 = \sqrt{5}^{\,2} + \sqrt{20}^{\,2}$. Also ist das Dreieck $P_2Q_2R_2$ rechtwinklig.
- Jeder Eckpunkt Q_n der Dreiecke $P_nQ_nR_n$ ist Scheitel eines Winkels mit dem Maß φ (Stufen- oder F-Winkel). Im Steigungsdreieck Q_1HR_1 ist der Punkt R_1 ebenfalls Scheitel eines Winkels mit dem Maß φ (Wechsel- oder Z-Winkel).
  Dort gilt: $\tan\varphi = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 63,43°$.
- Die Parallele h zur Geraden g durch den Punkt P_2 schneidet die Parabel p im gesuchten Punkt P_3 (Siehe Zeichnung).
  Begründung:
  Der Punkt P_2 besitzt den Abstand $\overline{P_2R_2}$ zur Geraden g. Alle Punkte P_n aber, die den Abstand $\overline{P_2R_2}$ von der Geraden g haben, liegen auf einer Parallelen (in der Zeichnung: h) zur Geraden g die den Abstand $\overline{P_2R_2}$ besitzt.
- Weil alle Strecken $[Q_nR_n]$ $\sqrt{5}\,\text{cm}$ lang sind, müssen die gesuchten Dreiecke z.B. zum Steigungsdreieck Q_1HR_1 kongruent sein; d.h. es muss gelten:
  $\overline{P_nQ_n}(x) = (-0,5x^2 - 4,5x - 2)\,\text{cm} = 1\,\text{cm} \quad \Leftrightarrow \quad -0,5x^2 - 4,5x - 3 = 0$

  $$D^* = 14,25 \Rightarrow \quad x_{1;2} = \frac{4,5 \pm \sqrt{14,25}}{-1} \Rightarrow x_1 \approx -8,27 \text{ und } x_1 \approx -0,72$$

8. Gegeben ist Parabel p mit der Gleichung $p: y = ax^2 - x - 3$, die durch den Punkt $P(-3 \mid 2,25)$ verläuft.
   Außerdem ist eine Gerade g durch die Gleichung $g: y = 0,5x + 1$ gegeben.
   Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



(a) • Berechne die Scheitelkoordinaten der Parabel p.

[Teilergebnis: $p : y = 0,25x^2 - x - 3$]

• Untersuche, ob die Gerade h mit der Gleichung $h : y = 0,5x - 5,26$ die Parabel p berührt.

(b) Auf der Parabel p liegen Punkte $B_n(x \mid 0,25x^2 - x - 3)$. Auf der Geraden g liegen Punkte $C_n(x \mid 0,5x+1)$ mit dem gleichen Abszissenwert x wie die Punkte B_n.

Für $x \in]-2;8[_{\mathbb{R}}$ erzeugen die Punkte A_n zusammen mit den Punkten B_n und C_n rechtwinklige Dreiecke $A_nB_nC_n$ mit den Hypotenusen $[A_nC_n]$. Dabei sind die Katheten $[A_nB_n]$ stets 4 cm lang.

Zeichne für $x = -1$ und $x = 5$ die beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ ein.

(c) Berechne die Länge der Katheten $[B_nC_n]$ in Abhängigkeit von x.

[Ergebnis: $\overline{B_nC_n}(x) = (-0,25x^2 + 1,5x + 4)$ cm]

(d) Unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ gibt es eines mit maximalem Flächeninhalt. berechne dieses Maximum und die zugehörige Belegung von x.

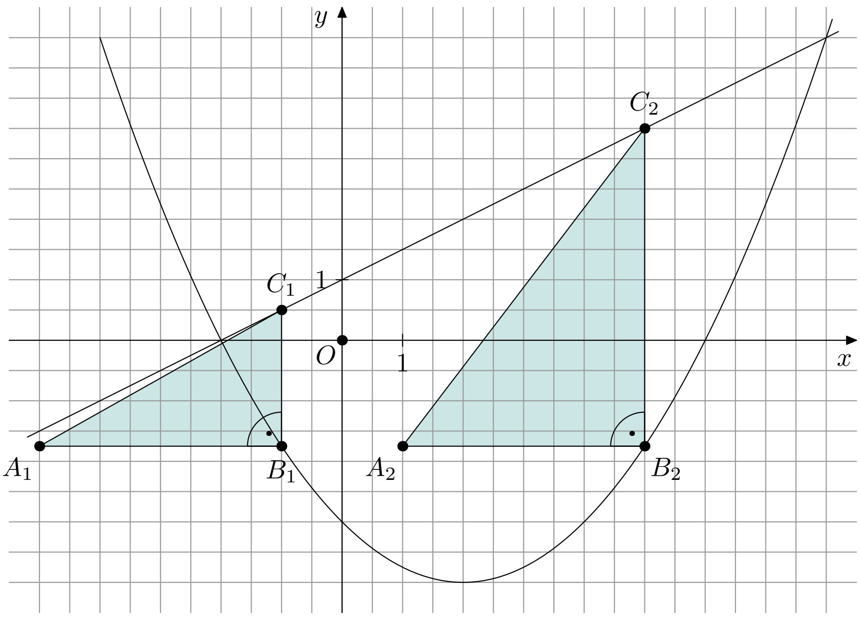
(e) Unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ gibt es zwei Dreiecke $A_3B_3C_3$ und $A_4B_4C_4$, so dass der Winkel $A_3C_3B_3$ bzw. $A_4C_4B_4$ das Maß $45°$ besitzt. Berechne die zugehörigen Belegungen von x.

(f) Untersuche rechnerisch, ob es unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ eines gibt, deren Hypotenuse auf der Geraden g liegt.

Lösung: (a)

- $P(-3 \mid 3,25)$ in p: $2,25 = a \cdot (-3)^2 - (-3) - 3 \quad \Rightarrow \quad 2,25 = 9a \quad \Rightarrow \quad a = 0,25$ und $p : y = 0,25x^2 - x - 3$.
  $S\left(-\frac{-1}{2 \cdot 0,25}\middle| -3 - \frac{(-1)^2}{4 \cdot 0,25}\right) = (2 \mid -4)$
- $0,25x^2 - x - 3 = 0,5x - 5,26 \quad \Rightarrow \quad D^* = -0,01 < 0$: Die Gerade g meidet die Parabel p.

(b)



(c)

$$\begin{aligned}
\overline{B_nC_n}(x) &= y_{C_n} - y_{B_n} \\
\overline{B_nC_n}(x) &= 0,5x + 1 - (0,25x^2 - x - 3) \\
&= 0,5x + 1 - 0,25x^2 + x + 3 \\
\overline{B_nC_n}(x) &= (-0,25x^2 + 1,5x + 4)\,\text{cm}^2
\end{aligned}$$

(d) Für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_nB_nC_n$ gilt in Abhängigkeit von x:
$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-0,25x^2 + 1,5x + 4)\,\text{cm}^2$.
$A(x) = 2 \cdot (-0,25x^2 + 1,5x + 4)\,\text{cm}^2$.
$A(x) = (-0,5x^2 + 3x + 8)\,\text{cm}^2$.
$x = 3$ liefert $A_{max} = 12,5\,\text{cm}^2$.

(e) Die beiden Dreiecke $A_3B_3C_3$ und $A_4B_4C_4$ müssen gleichschenklig sein:
$\overline{B_nC_n}(x) = 4\,\text{cm}: \quad \Rightarrow \quad -0,25x^2 + 1,5x + 4 = 4$
$\Leftrightarrow \quad x(-0,25x + 1,5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 6$

(f) Die Dreiecke $A_nB_nC_n$ können als Steigungsdreiecke zu den Hypotenusen $[A_nC_n]$ aufgefasst werden:
Wenn eine dieser Hypotenusen $[A_nC_n]$ auf der Geraden g liegen soll, dann müssen beide Steigungsfaktoren übereinstimmen; d.h.

$$\frac{-0,25x^2 + 1,5x + 4}{4} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -0,5x^2 + 3x + 8 = 4$$

$\Leftrightarrow \quad -0,5x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow \quad D^* = 17 > 0.$
Also gibt es zwei solche Dreiecke.

9. Gegeben ist die Parabel p_0 durch die Gleichung $y = 0,5x^2 + 2x + 1000$.
   (a) Gib die Gleichung einer Parabel p_1 an, welche die gleichen Scheitelkoordinaten wie die Parabel p_0 besitzt, die aber nicht zur Parabel p_0 kongruent ist.
   (b) Gib die Gleichung einer Parabel p_2 an, die zur Parabel p_0 kongruent ist und deren Scheitel gleichzeitig auf der x-Achse liegt.
   (c) Es gibt beliebig viele Parabeln, welche die Parabel p_0 meiden und deren Scheitel im II. Quadranten liegen. Gib die Gleichung einer dieser Parabeln an und führe den Nachweis.
   (d) Es gibt beliebig viele Parabeln, welche mit der Parabel p_0 nur einen Punkt gemeinsam haben. Gib die Gleichung einer dieser Parabeln an und führe den Nachweis.

Lösung: (a) $y = 0,5x^2 + 2x + 1000 = \ldots = 0,5 \cdot (x + 2)^2 + 998 \quad \Rightarrow \quad S_0(-2 \mid 998)$
Skizziere die Parabel p_0.
Z.B. $p_1 : y = -0,17296 \cdot (x + 2)^2 + 998$

(b) Z.B. $p_2 : y = -0,5 \cdot (x - \frac{22}{7})^2$

(c) Wähle unter den beliebig vielen Parabeln, die in Frage kommen, am besten eine Parabel (nenne sie p_3) aus, die zur Parabel p_0 kongruent ist, die aber nach unten geöffnet ist: Der Formfaktor hat dann den Wert $-0,5$.
Wähle dann am besten deren Scheitel so aus, dass dieser genau unterhalb des Scheitels $S_0(-2 \mid 998)$ liegt, also z.B. $S_3(-2 \mid 997)$.
Diese Parabel p_3 hat dann die Gleichung $y = -0,5 \cdot (x + 2)^2 + 997$.

(d) „$\cdots$ nur einen Punkt gemeinsam hat“ eröffnet zweierlei Lösungsmöglichkeiten:
(α) Die gesuchte Parabel schneidet die Parabel p_0 nur in einem Punkt
(β) Die gesuchte Parabel berührt die Parabel p_0

Die einfachste Möglichkeit der Auswahl besteht in der Möglichkeit (α):
Die Parabel p_0 wird nach rechts oder nach links verschoben. Damit behält der Formfaktor den Wert $0,5$ und die beiden Symmetrieachsen liegen parallel. Damit verlaufen auch die Parabeläste so, dass sie sich nur einmal überkreuzen.
Also z.B.: $p_4 : y = 0,5 \cdot (x + 1)^2 + 998$.
Rechnerisch würde sich dann mit der Parabel p_4 die folgende Gleichung ergeben:
$0,5 \cdot (x + 2)^2 + 998 = 0,5 \cdot (x + 1)^2 + 998 \ldots \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -3x = -1,5.$
Egal, wie weit du die Parabel p_0 nach rechts oder links verschiebst: Rechnerisch hebt sich stets nach dem Gleichsetzen der Summand mit dem Faktor x^2 weg.
In der Möglichkeit (β) müsstest du nach einer Parabel p_5 suchen, welche die Parabel

p_0 berührt. Eine entsprechende Parabelgleichung ist nicht so schnell und auch nicht so leicht zu finden, wie in der Möglichkeit (α).

10. Gegeben ist eine Parabel durch die Gleichung:
$$y = -10x^2 - 19x + 2 \qquad .$$
Untersuche, ob die Parabel durch alle vier Quadranten verläuft.

Lösung: Berechne zunächst den Parabelscheitel: $S(x_S \mid y_S)$ mit $a = -10$, $b = -19$ und $c = 2$.

$$x_S = -\frac{-19}{2 \cdot (-10)} < 0 \text{ und } y_S = 2 - \frac{(-19)^2}{4 \cdot (-10)} > 0$$

Der Scheitel liegt also im II. Quadranten.

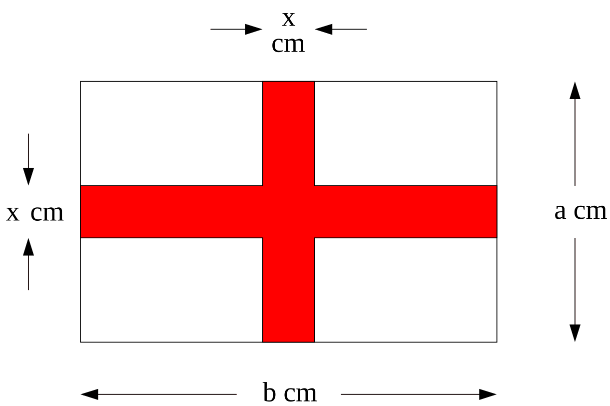
Wegen $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet, also verläuft ihr linker Ast auch durch den III. Quadranten.
Weil sich die Äste der Parabel nach unten beliebig weit voneinander entfernen, muss ihr rechter Ast „irgendwann" die y-Achse überqueren. Also verläuft der Graph auch durch den IV. Quadranten.
Nun musst du noch untersuchen, ob es Punkte auf der Parabel gibt, die im I. Quadranten liegen.
Ermittle dazu die Nullstellen der Funktionsgleichung: $10x^2 - 19x + 2 = 0$.
$D^* = (-19)^2 - 4 \cdot (-10) \cdot 2 = 441$ und $\sqrt{D^*} = 21$

$$x_{1;2} = \frac{19 \pm 21}{-20} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 0,1.$$

$x_2 = 0,1$ liegt rechts vom Ursprung auf der x-Achse; also verläuft die Parabel auch durch den I. Quadranten und damit durch alle vier Quadranten.

7. Quadratische Funktionen und Gleichungen

1. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



   (a) Zeichne die Figur für $a = 11$, $b = 16$ und $x = 2$ im Maßstab 1:2.

   (b) Zeige rechnerisch:

   - Für den Flächeninhalt A_w des weißen Anteils dieser Flagge gilt in Abhängigkeit von x:
   $$A_w(x) = (x^2 - 27x + 176)\,\mathrm{cm}^2$$
   - Für den Flächeninhalt A_k des Kreuzes in dieser Flagge gilt in Abhängigkeit von x:
   $$A_k(x) = (-x^2 + 27x)\,\mathrm{cm}^2$$

   (c) Berechne x so, dass die Fläche des Kreuzes 30% der Gesamtfläche ausmacht.

   (d) Berechne x so, dass die Inhalte von weißer Fläche und Kreuzfläche gleich sind.

Lösung: (a) –

(b)
- Eine Möglichkeit der Lösung besteht darin, vom Flächeninhalt der Flagge denjenigen der beiden überlappenden Rechtecke, die das Kreuz ergeben, zu subtrahieren. Um den Flächeninhalt des Kreuzes zu erhalten, musst du jedoch am Ende den Inhalt des Quadrates im Zentrum einmal abziehen, weil das Quadrat ja **beiden** besagten Rechtecken angehört.
Also: $A_w(x) = 11 \cdot 16\,\mathrm{cm}^2 - (11x + 16x - x^2)\,\mathrm{cm}^2 = (x^2 - 27x + 176)\,\mathrm{cm}^2$
- Wie oben schon dargelegt, ergibt sich:
$A_k(x) = (11x + 16x - x^2)\,\mathrm{cm}^2 = (-x^2 + 27x)\,\mathrm{cm}^2$

(c) Der Flächeninhalt des umlaufenden Rechtecks beträgt $176\,\text{cm}^2$.
30% von $176\,\text{cm}^2 = 52{,}8\,\text{cm}^2$.
$52{,}8 = -x^2 + 27x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 27x + 52{,}8 = 0$

$$x_{1;2} = \frac{27 \pm \sqrt{517{,}8}}{2}$$

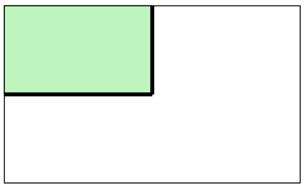
$x_1 = 0{,}5 \cdot (27 + \sqrt{517{,}8}) \approx 24{,}88 \quad (\dagger) \quad$, wegen $G =]0;\, 11[_{\mathbb{R}}$.
$x_2 = 0{,}5 \cdot (27 - \sqrt{517{,}8}) \approx 2{,}12 \in G =]0;\, 11[_{\mathbb{R}}$.
Also: $L = \{13{,}5 - 0{,}5\sqrt{517{,}8}\}$.

(d) $x^2 - 27x + 176 = -x^2 + 27x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 54x + 176 = 0$ mit $G =]0;\, 11[_{\mathbb{R}}$

$$x_{1;2} = \frac{54 \pm 2\sqrt{377}}{4}$$

$x_1 = 13{,}5 + 0{,}5\sqrt{377} \approx 23{,}21 \quad (\dagger) \quad$, wegen $G =]0;\, 11[_{\mathbb{R}}$.
$x_2 = 13{,}5 - 0{,}5\sqrt{377} \approx 3{,}79 \in G =]0;\, 11[_{\mathbb{R}}$.
Also: $L = \{13{,}5 - 0{,}5\sqrt{377}\}$

2.

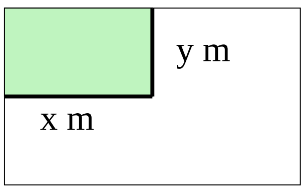


Familie Taerkot hat auf ihrem eingezäunten Grundstück einen $140\,\text{m}^2$ großen Garten angelegt. Er wurde zusätzlich mit einem $25{,}5\,\text{m}$ langen Maschendrahtzaun abgegrenzt.

(a) Berechne Länge und Breite.

(b) Hätte Familie Taerkot mit $25{,}5\,\text{m}$ Maschendraht auf die in der Abbildung dargestellte Weise eine noch größere Gartenfläche abgrenzen können?

Lösung: (a)



Es gilt:
$$\begin{array}{rrcll} & x + y & = & 25{,}5 & (1) \quad \Leftrightarrow \quad y = 25{,}5 - x \quad (1)' \\ \wedge & x \cdot y & = & 140 & (2) \\ \hline \end{array}$$

$(1)'$ in (2): $x \cdot (25{,}5 - x) = 140 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 25{,}5x - 140 = 0$
$\Rightarrow \quad L = \{17{,}5\,;\, 8\}$. Wegen $(1)'$ folgt: $y = 8 \vee y = 17{,}5$.
Das Gartengrundstück ist $17{,}5\,\text{m}$ lang und $8\,\text{m}$ breit (oder umgekehrt).

(b) Für den Flächeninhalt A gilt: $A = x \cdot y\,\mathrm{m}^2$.
Mit $(1)'$ folgt $A(x) = x(25,5 - x)\,\mathrm{m}^2 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = (-x^2 + 25,5x)\,\mathrm{m}^2$.
Der Extremwert muss wegen des negativen Vorzeichens von x^2 ein Maximum sein. Die Berechnung erfolgt z.B. so, als ob du die Scheitelkoordinaten der zugehörigen (nach unten geöffneten) Parabel ermittelst:
$a = -1 \quad b = 25,5$ und $c = 0$:
$x_S = -\dfrac{25,5}{-2} = 12,75$ und $y_S = 0 - \dfrac{25,5^2}{-4} = 162,5625$ (Maximum).

Mit dem $25,5\,\mathrm{m}$ langen Maschendraht hätte Familie Taerkot auf diese Weise sogar etwas mehr als $162\,\mathrm{m}^2$ einzäunen können.

Die Länge $x = 12,75\,\mathrm{m}$ liefert mit $(1)'$ die Breite $y = (25,5 - 12,75)\,\mathrm{m} = 12,75\,\mathrm{m}$. Das bedeutet, dass der flächengrößte Garten eine quadratische Form hätte.

3. Ursula und Hans wollen die folgenden quadratischen Gleichungen lösen:

$$\begin{array}{ccccccccc} x^2 & + & 0,5x & - & 14 & = & 0 & (1) \\ x & + & 2x^2 & - & 28 & = & 0 & (2) \end{array}$$

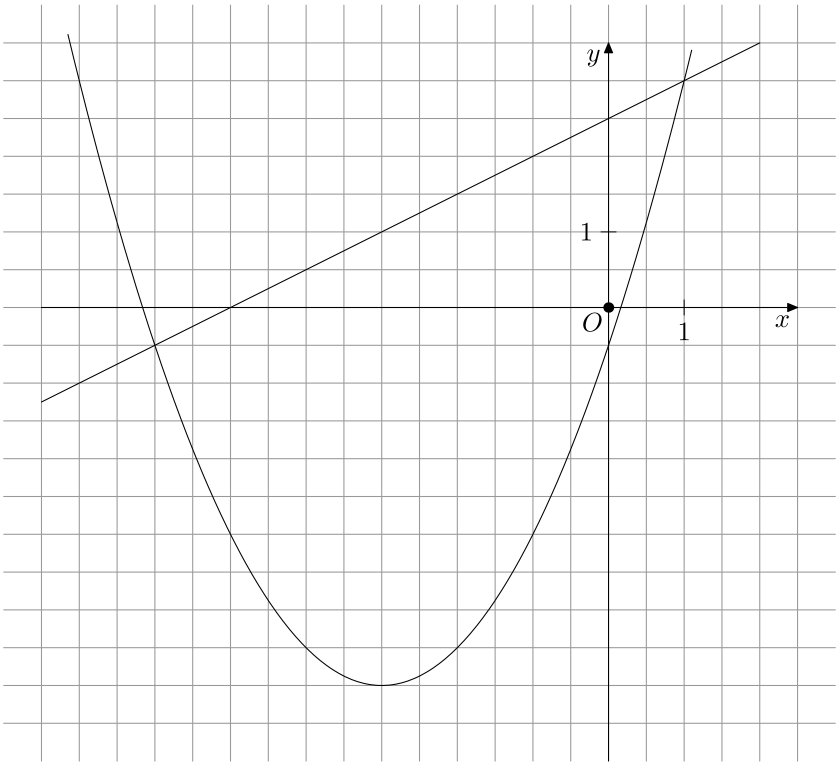
(a) Hans bekommt für die Gleichung (1) die Lösungsmenge $\{-4;\ 3,6\}$ heraus. Überprüfe das.

(b) Danach schaut sich Ursula die Gleichung (2) genauer an. Sie meint schließlich: „Da brauchen wir die Lösungsformel gar nicht. Die beiden Gleichungen müssen dieselben Lösungen haben.“ Wie hat Ursula das erkannt?

Lösung: (a) Du kannst das durch z.B. Einsetzen überprüfen:
-4 in (1): $(-4)^2 + 0,5 \cdot (-4) - 14 = 0$ ergibt eine wahre Aussage.
$3,6$ in (1): $3,6^2 + 0,5 \cdot 3,6 - 14 = 0,76 \neq 0$; d.h. 3,6 ist keine Lösung.

(b) $x^2 + 0,5 - 14 = 0 \mid \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + x - 28 = 0$. Wenn du jetzt noch die Summanden x und $2x^2$ vertauschst, erhältst du die Gleichung (2). Beide Gleichungen sind äquivalent. Also haben sie die gleiche Lösungsmenge.

4.



Für die Gleichung einer Parabel p gilt $a = 0,5$. Die Punkte $P(-4 \mid -4,5)$ und $Q(1 \mid 3)$ liegen auf dieser Parabel. Die Parabel p und die Gerade g mit der Gleichung $y = 0,5x + 2$ sind in Ausschnitten dargestellt.

(a) Zeige durch Rechnung: Die Parabel p hat die Gleichung $y = 0,5x^2 + 3x - 0,5$.

(b) Berechne die Scheitelkoordinaten der Parabel.

(c) Es werden nun rechtwinklige Dreiecke $A_nB_nC_n$ mit den folgenden Eigenschaften erzeugt:

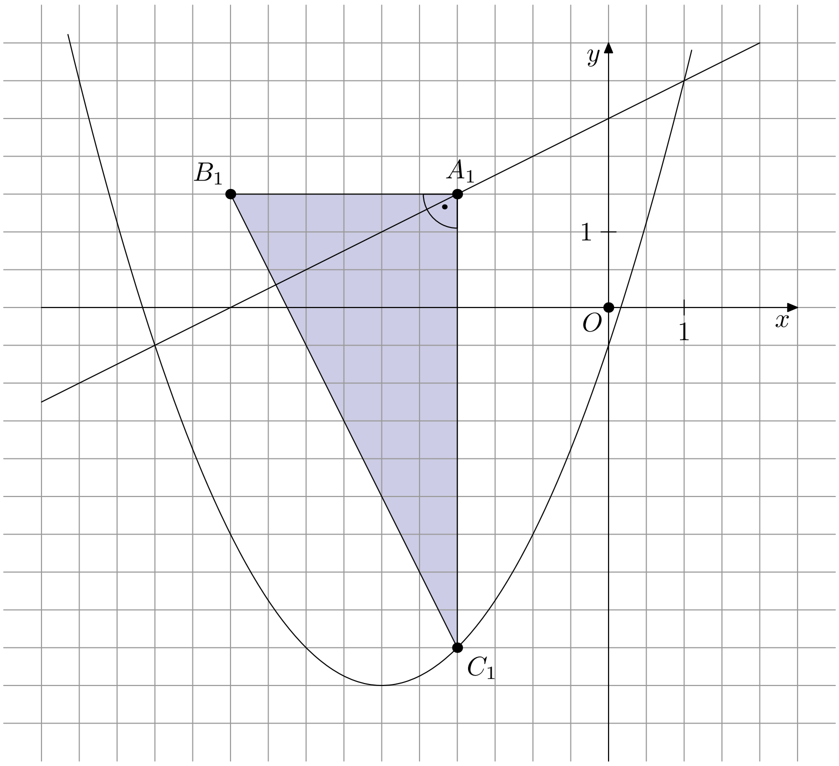
- Die Punkte A_n liegen auf der Geraden g.
- Die Punkte C_n liegen auf der Parabel p.
- Die Punkte A_n sind die Scheitel der rechten Winkel aller Dreiecke $A_nB_nC_n$.
- Die Punkte C_n haben den gleichen Abszissenwert wie die Punkte A_n.
- Der Abszissenwert der Punkte B_n ist stets um 3 kleiner als der Abszissenwert der Punkte C_n.

Zeichne oben für $x = 2$ das Dreieck $A_1B_1C_1$ ein.

(d) Gib zwei x-Werte an, für die es kein Dreieck gibt. Begründe deine Wahl.

(e) Begründe: Unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ gibt es keines, das zu einem Punkt entartet.

Lösung:



(a)

$P(-4 \mid -4,5)$:	-4,5	$=$	$0,5 \cdot (-4,5)^2 + b \cdot (-4,5) + c$	
$Q(1 \mid 3)$:	3	$=$	$0,5 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$	
	$-4,5$	$=$	$8 - 4b + c$	(1)
	3	$=$	$0,5 + b + c$	(2)
$(2) - (1):$	$7,5$	$=$	$-7,5 + 5b$	

$\Rightarrow \quad b = 3$ und z.B. in (2): $c = -0,5$.
Also gilt für p: $y = 0,5x^2 + 3x - 0,5$.

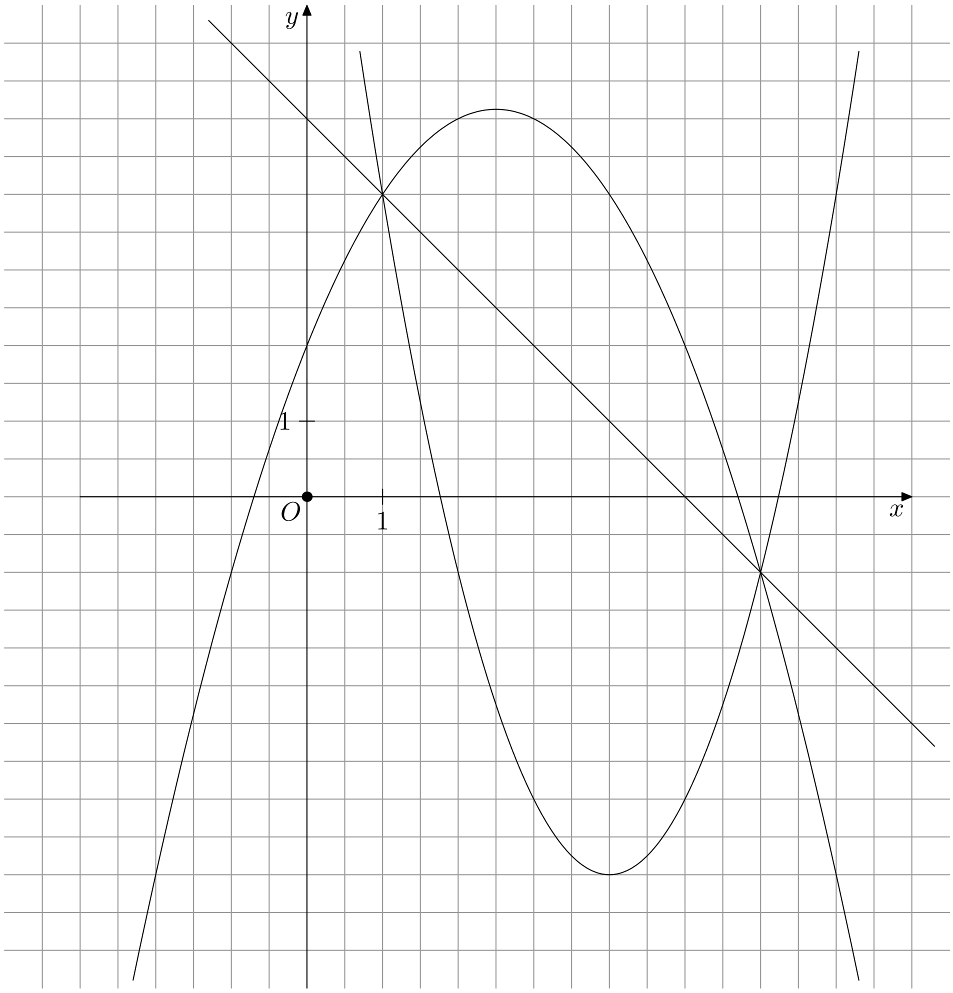
(b) $x_S = -\dfrac{-3}{2 \cdot 0,5} = -3$ und $y_S = -0,5 - \dfrac{3^2}{4 \cdot 0,5} = -5 \Rightarrow \quad S(-3 \mid -5)$.

(c) Siehe Zeichnung oben.

(d) An den Schnittpunkten der Parabel mit der Geraden gilt: $x = -6$ bzw. $x = 1$. Dort liegen die betreffenden Punkte A_n und C_n aufeinander. Also gibt es jeweils kein Dreieck.

(e) Weil die Punkte B_n niemals mit den Punkten A_n zur Deckung kommen, kann das betreffende Dreieck höchstens zur Strecke entarten.

5.



Gegeben sind die Parabel $p_1 : y = -0,5x^2 + 2,5x + 2$, die Parabel $p_2 : y = x^2 - 8x + 11$ sowie die Gerade $g : y = -x + 5$. Ausschnitte aus diesen Graphen sind oben dargestellt.

(a) Die Gerade g schneidet die Parabel p_1 in den Punkten A und B. Dabei liegt der Punkt B im IV. Quadranten. Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes B.

(b) Die Punkte $R_n(x \mid -0,5x^2 + 2,5x + 2)$ liegen auf der Parabel p_1, die Punkte $Q_n(x \mid -x + 5)$ liegen auf der Geraden g und die Punkte $P_n(x \mid x^2 - 8x + 11)$ liegen auf der Parabel p_2. Die Punkte P_n und R_n haben stets den gleichen Abszissenwert x. Die Punkte Q_n haben jeweils eine um 1 größere Abszisse als die Punkte P_n und R_n. Dadurch entstehen laufend Dreiecke $P_nQ_nR_n$.
Zeichne für $x = 2$ das Dreieck $P_1Q_1R_1$ ein.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Dreiecke $P_nQ_nR_n$ gilt:

$$A(x) = (-0,75x^2 + 5,25x - 4,5) \text{ FE}$$

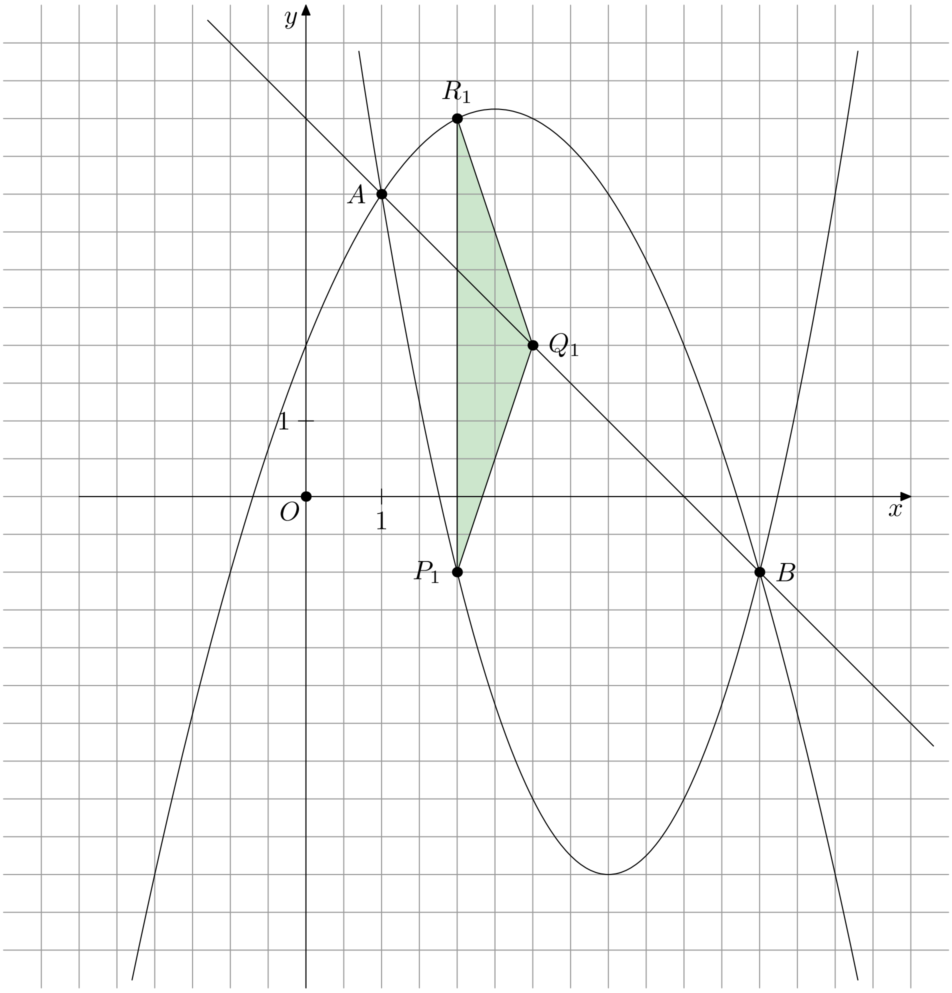
$$[\text{ Teilergebnis:}\overline{R_nP_n}(x) = (-1,5x^2 + 10,5x - 95) \text{ LE }]$$

Unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$ gibt es ein flächengrößtes: das Dreieck $P_0Q_0R_0$. Berechne dieses Maximum und die zugehörigen Koordinaten des Eckpunktes

P_0.

(d) Im Dreieck $P_3Q_3R_3$ hat der Mittelpunkt M_3 der Strecke P_3R_3 den y-Wert 1. Berechne die x-Koordinate von M_3.

Lösung:



(a) $p_1 \cap g$: $-0,5x^2 + 2,5x + 2 = -x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad -0,5x^2 + 3,5x - 3 = 0$.
$[x_1 = 1] \quad x_2 = 6$ in g: $y = -6 + 5 = -1 \quad \Rightarrow B(6 \mid -1)$.

(b) Siehe Zeichnung.

(c) $\overline{R_nP_n}(x) = y_{R_n} - y_{P_n} =$
$[-0,5x^2 + 2,5x + 2 - (x^2 - 8x - 11)]$ LE $= (-1,5x^2 + 10,5x - 9)$ LE.
$A(x) = 0,5 \cdot 1 \cdot (-1,5x^2 + 10,5x - 9)$ FE $= (-0,75x^2 + 5,25x - 4,5)$ FE.

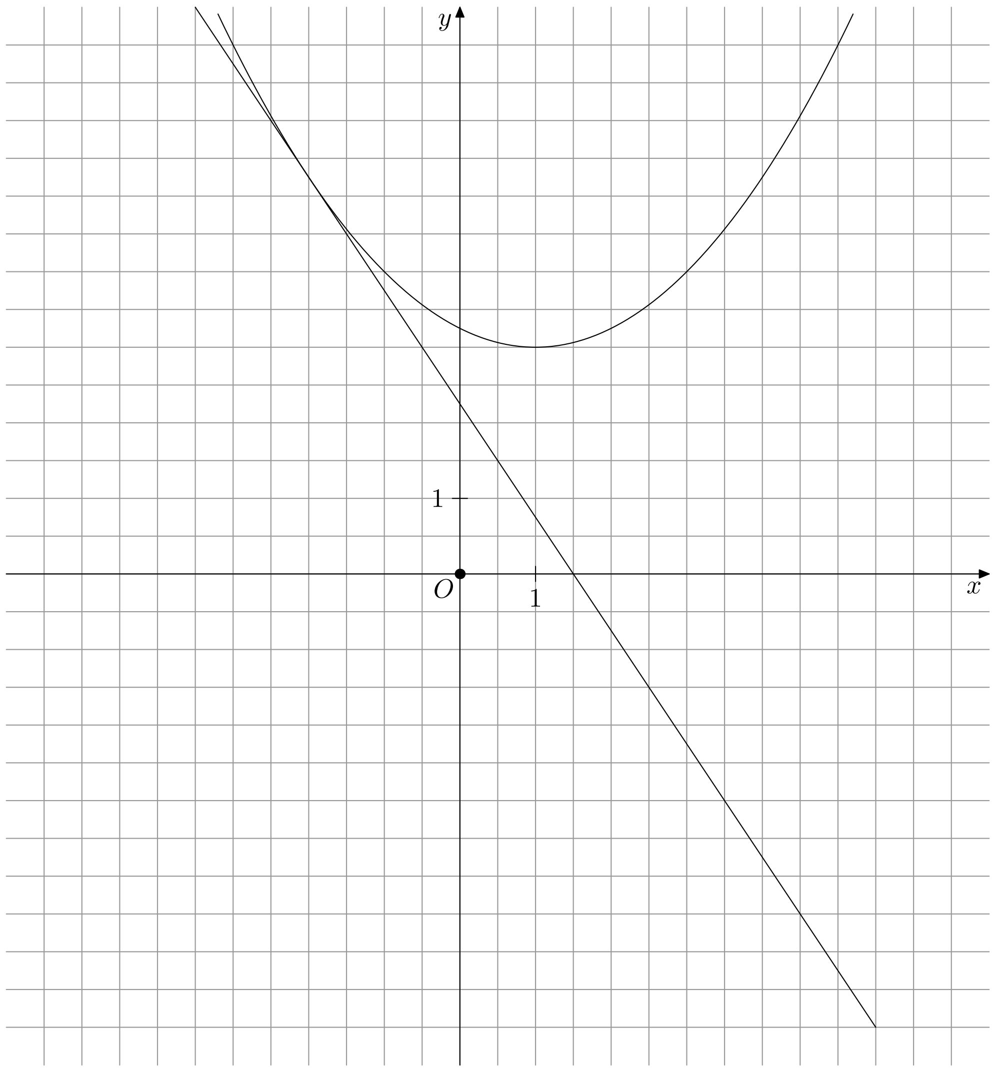
$$A_{max} = -4,5 - \frac{5,25^2}{4 \cdot (-0,75)} \text{ FE} \approx 4,69 \text{ FE}.$$

$$x = \frac{-5,25}{2 \cdot (-0,75)} = 3,5 \text{ liefert dieses Maximum.}$$

$P_0(3,5 \mid 3,5^2 - 8 \cdot 3,5 + 11) = (3,5 \mid -4,75)$

(d) $y_{M_n}(x) = \dfrac{(x^2 - 8x + 11) + (-0,5x^2 + 2,5x + 2)}{2}$
$= 0,25x^2 - 2,75x + 6,5 = 1. \qquad [x_1 \approx 8,37] \quad x_2 \approx 2,63.$

6.



Gegeben sind die Parabel $p_1 : y = 0,25x^2 - 0,5x + 3,25$ sowie die Gerade $g : y = -1,5x + 2,25$. Ausschnitte aus diesen Graphen sind oben dargestellt.

(a) Begründe rechnerisch: Die Gerade g berührt die Parabel p.

(b) Die Punkte $M_n(x \mid -1,5x+2,25)$ auf der Geraden g sind die Diagonalenschnittpunkte von Rauten $A_nB_nC_nD_n$. Die Eckpunkte $A_n(x \mid 0,25x^2 - 0,5x + 3,25)$ der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ liegen auf der Parabel p. Die Eckpunkte C_n besitzen

stets den gleichen Abszissenwert x wie die Punkte A_n. Die Länge der Diagonalen $[B_nD_n]$ der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ beträgt stets 4 LE.
Zeichne für $x = 2,5$ die Raute $A_1B_1C_1D_1$ ein.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gilt:

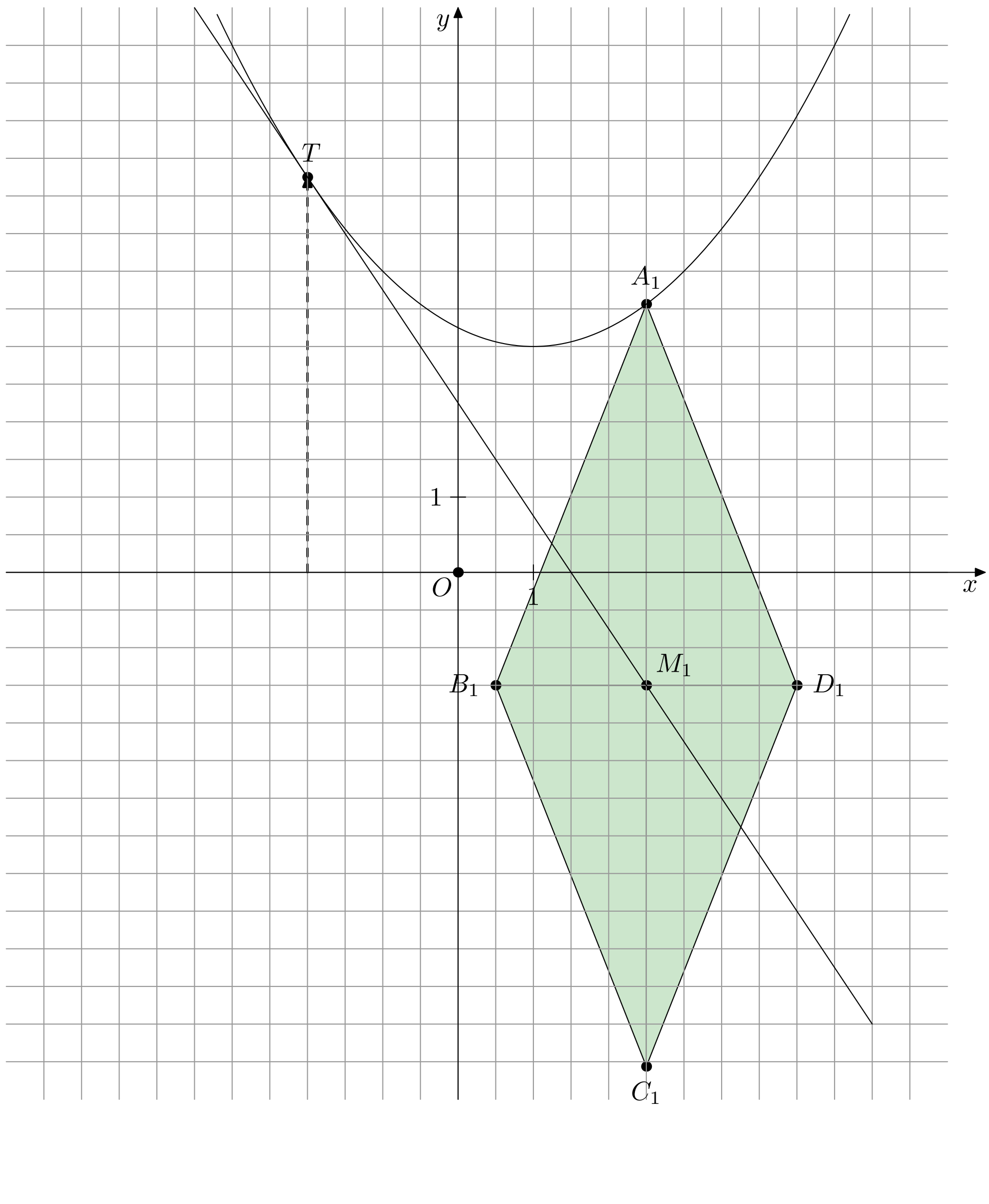
$$A(x) = (x^2 + 4x + 4) \text{ FE}$$

$$[\text{ Teilergebnis:} \overline{A_nM_n}(x) = (0,25x^2 + x + 1) \text{ LE }]$$

(d) Die Raute $A_0B_0C_0D_0$ soll diejenige unter allen Rauten $A_nB_nC_nD_n$ sein, die den minmalen Flächeninhalt besitzt. Berechnen Sie die zugehörige Belegung von x. Es stellt sich heraus, dass der minimale Flächeninhalt 0 FE beträgt. Begründen Sie diesen Sachverhalt in Worten mit Hilfe Ihrer Zeichnung.

(e) Geben Sie die Koordinaten der Rauteneckpunkte D_n in Abhängigkeit von x an.

Lösung:



(a) $p \cap g$: $0,25x^2 - 0,5x + 3,25 = -1,5x + 2,25 \quad \Leftrightarrow \quad 0,25x^2 + x + 1 = 0$
$D = 1^2 - 4 \cdot 0,25 \cdot 1 = 0$; also berührt die Gerade g die Parabel p.

(b) Siehe Zeichnung.

(c) $A_{A_nB_nC_nD_n} = \frac{1}{2}\overline{A_nM_n} \cdot \overline{B_nD_n}$:

$\overline{A_nM_n} = \big[(0,25x^2 - 0,5x + 3,25) - (-1,5x + 2,25)\big]$ LE
$\Rightarrow \quad \overline{A_nM_n}(x) = 0,25x^2 + x + 1)$ LE.

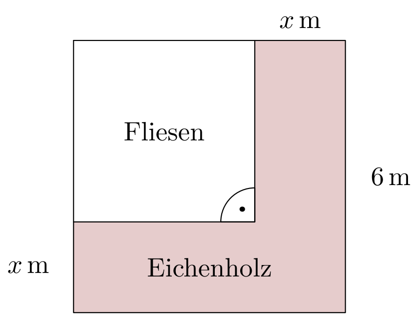
$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (0,25x^2 + x + 1) \cdot 4$ FE $= (x^2 + 4x + 4)$ FE

(d) $x = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$. Dieser x-Wert liefert das Minimum.

Für $x = -2$ entartet die Raute zur Strecke, denn $x = -2$ ist der Abszissenwert des Berührpunktes T der Geraden g mit der Parabel p (siehe Zeichnung).

(e) $D_n(x \mid -1,5x + 2,25)$.

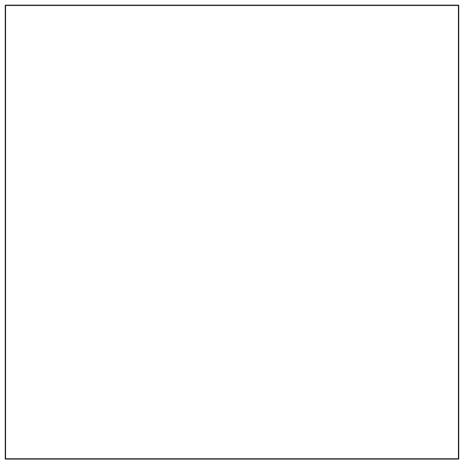
7.



Der quadratische Boden eines Badezimmers mit einer Seitenlänge von 6 m ist einerseits gefliest, anderserseits mit Eichenbrettern L-förmig verlegt worden. Das „L“ hat eine Breite von x m.
Die Fläche aus Holz ist halb so groß wie die gesamte Bodenfläche.

(a) Zeige: $x = 6 - 3\sqrt{2}$.

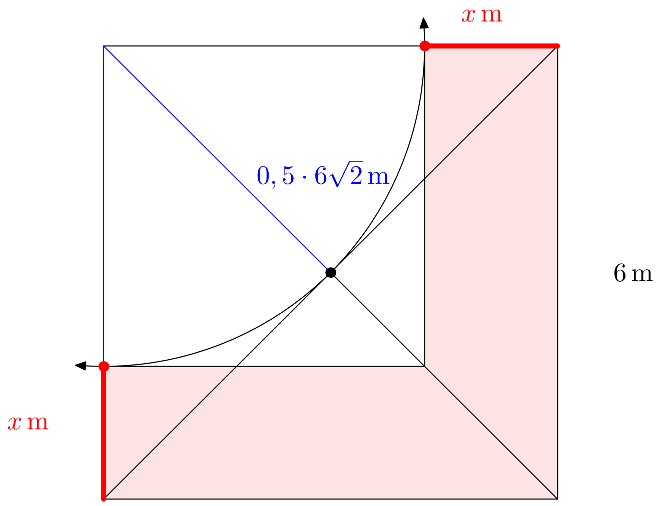
(b) •



In welchem Maßstab ist der Grundriss des Badezimmers in der obigen Figur dargestellt?

- Konstruiere mit Zirkel und Lineal in diesen Grundriss maßstabgerecht die Streckenlänge $x\,\mathrm{m} = (6 - 3\sqrt{2})\,\mathrm{m}$.
  Tipp: $6 - 3\sqrt{2} = 6 - 0,5 \cdot 6\sqrt{2}$.
- Vervollständige damit die Flächenaufteilung des Badezimmers.

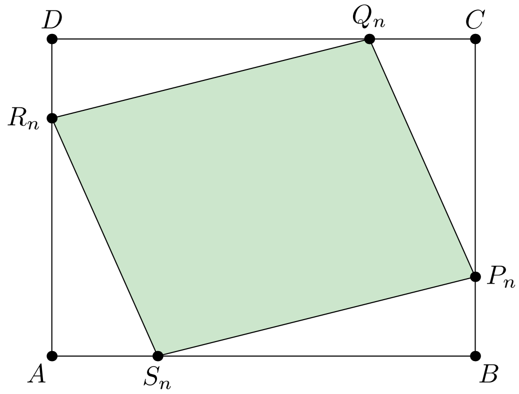
Lösung: (a) Wenn das „L“ überall $x\,\mathrm{m}$ dick ist, dann ist die geflieste Fläche ein Quadrat mit der Seitenlänge $(6 - x)\,\mathrm{m}$.
Wenn das „L“ die Hälfte der Gesamtfläche ausmacht, dann muss die quadratische geflieste Fläche die andere Hälfte einnehmen. Als Maßzahlengleichung ergibt sich dann:
$(6 - x)^2 = 0.5 \cdot (6 \cdot 6) = 18$, mit $x \in\ ]0,\ 6[_{\mathbb{R}}$.
$\Leftrightarrow \quad |\, 6 - x \,| = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$.
$\Leftrightarrow \quad 6 - x = 3\sqrt{2} \quad \vee \quad 6 - x = -3\sqrt{2}$.
$\Leftrightarrow \quad x = 6 - 3\sqrt{2} \quad \vee \quad x = 6 + 3\sqrt{2}$.
Wegen $x \in\ ]0,\ 6[_{\mathbb{R}}$ folgt $x = 6 - 3\sqrt{2}$.

(b)
- Der Grundriss ist im Maßstab $1 : 100$ dargestellt. $(1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm})$.
- 

Ein Quadrat, dessen Seitenlänge 6 cm beträgt, hat eine Diagonalenlänge von $6\sqrt{2}$ cm. $0,5 \cdot 6\sqrt{2}$ cm ist dann gerade die halbe Diagonalenlänge dieses Quadrates. Du erhältst x, wenn du mit Hilfe des Kreisbogens die Differenz aus der Seitenlänge des großen Quadrates und seiner halben Diagonalenlänge abträgst.

- Der Rest ist klar.

8.



In das Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 8$ cm und $\overline{BC} = 6$ cm werden Parallelogramme $P_nQ_nR_nS_n$ einbeschrieben, wobei gilt: $\overline{BP_n} = \overline{DR_n} = 6k$ cm und $\overline{AS_n} = \overline{CQ_n} = 8k$ cm mit $k \in]0;1[_{\mathbb{R}}$.

(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ und für $k = 0,25$ das Parallelogramm $P_1Q_1R_1S_1$.

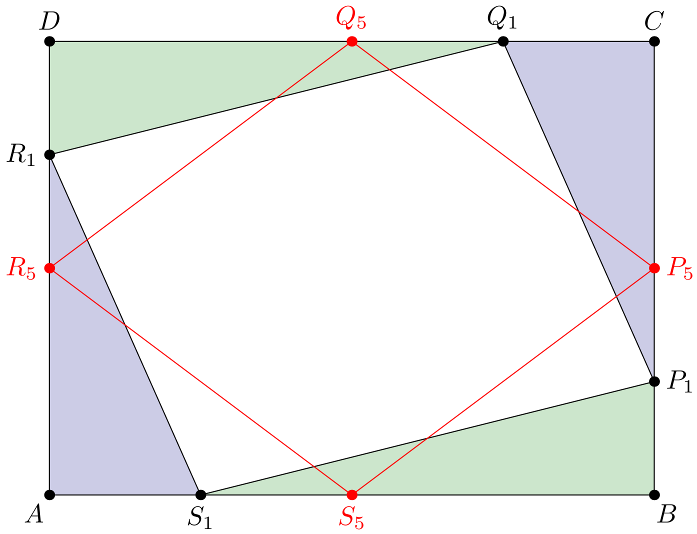
(b) Zeige: Für das Verhältnis q der Flächeninhalte der Parallelogramme $P_nQ_nR_nS_n$ zum Rechteck $ABCD$ gilt in Abhängigkeit von k:
$$q(k) = \frac{A_{P_nQ_nR_nS_n}}{A_{ABCD}} = 1 - 2k(1-k)\,.$$

(c) $k = 0,4$ erzeugt das Parallelogramm $P_2Q_2R_2S_2$. Wie viel Prozent der Fläche des Rechtecks $ABCD$ wird von diesem Parallelogramm eingenommen?

(d) Unter allen Parallelogrammen $P_nQ_nR_nS_n$ gibt es die Parallelogramme $P_3Q_3R_3S_3$ und $P_4Q_4R_4S_4$, die jeweils 58% der Fläche des Rechtecks $ABCD$ einnehmen. Berechne die zugehörigen Belegungen von k.

(e) Für $k = 0,5$ wird das Parallelogramm $P_5Q_5R_5S_5$ erzeugt.
- Zeichne dieses Parallelogramm in einer anderen Farbe ein.
- Um welches besondere Parallelogramm handelt es sich hier? Begründe deine Antwort.
- Zeige: Unter allen Parallelogrammen $P_nQ_nR_nS_n$ besitzt dieses Parallelogramm $P_5Q_5R_5S_5$ den kleinsten Flächeninhalt.

Lösung: (a)



(b) Es gilt $\Delta\, S_nBP_n \cong \Delta\, R_nQ_nD$ und $\Delta\, P_nCQ_n \cong \Delta\, AS_nR_n$.
$A_{ABCD} = 48\,\text{cm}^2$
$A_{P_nQ_nR_nS_n} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta\, S_nBP_n} - 2 \cdot A_{\Delta\, P_nCQ_n}$.
$2 \cdot A_{\Delta\, S_nBP_n} = 2 \cdot 0{,}5 \cdot \overline{S_nB} \cdot \overline{BP_n} = (1-k) \cdot 8\,\text{cm} \cdot 6k\,\text{cm} = 48\,\text{cm}^2 \cdot (1-k) \cdot k$.
$2 \cdot A_{\Delta\, P_nCQ_n} = 2 \cdot 0{,}5 \cdot \overline{P_nC} \cdot \overline{CQ_n} = (1-k) \cdot 6\,\text{cm} \cdot 8k\,\text{cm} = 48\,\text{cm}^2 \cdot (1-k) \cdot k$.

$$\begin{aligned} A_{P_nQ_nR_nS_n} &= 48\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 48\,\text{cm}^2 \cdot (1-k) \cdot k \\ A_{P_nQ_nR_nS_n} &= 48\,\text{cm}^2 \cdot [1 - 2k(1-k)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad q(k) = \frac{A_{P_nQ_nR_nS_n}}{A_{ABCD}} = \frac{48\,\text{cm}^2 \cdot [1-2k(1-k)]}{48\,\text{cm}^2} = 1 - 2k(1-k)\,.$$

(c) $q(0{,}4) = 1 - 2 \cdot 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}4) = 0{,}52 = 52\%$

(d)

$$\begin{aligned} 1 - 2k(1-k) &= 0{,}58 \\ 2k^2 - 2k + 1 &= 0{,}58 \\ 2k^2 - 2k + 0{,}42 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad k_1 = 0{,}3 \quad$ und $\quad k_2 = 0{,}7$

(e)
- Siehe Zeichnung.
- Es handelt sich um eine Raute.
  Begründung: Die vier rechtwinkligen Dreiecke S_5BP_5, P_5CQ_5, R_5Q_5D und AS_5R_5 sind kongruent, denn die besitzen jeweils Katheten, die jeweils 3 cm bzw. 4 cm lang sind. Also sind auch ihre Hypotenusen, die die Seiten des Parallelogramms $P_5Q_5R_5S_5$ bilden, gleich lang. Also ist dieses Viereck eine Raute.
- $q(k) = 1 - 2k(1-k) = 2k^2 - 2k + 1 = 2(k^2 - k + 0{,}5^2 - 0{,}25) + 1 = 2[(k-0{,}5)^2 - 0{,}25) + 1] = 2(k-0{,}5)^2 + 0{,}5$
  $k = 0{,}5$ liefert den minimalen Flächenanteil von $0{,}5 = 50\%$.

8. Trigonometrie

1. Ein Segelflieger wollte von A-Dorf über B-Stadt nach C-Berg und wieder zurück nach A-Dorf fliegen. Aus flugtechnischen Gründen tritt er jedoch am Punkt D den sofortigen Rückflug an.
   (a) Berechnen Sie die Länge der Strecke, die der Flieger zurücklegt.
   (b) Berechne Sie, um wie viele Kilometer der geplante Flug länger gewesen wäre als die tatsächlich zurückgelegte Strecke.

Lösung: (a) $178,4\,\mathrm{km}$
(b) $48,6\,\mathrm{km}$

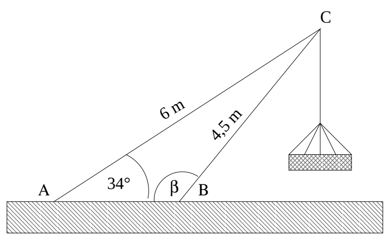
2. Ein Flugzeug fliegt auf geradlinigem Kurs und in gleichbleibender Höhe von $500\,\mathrm{m}$ mit einer Geschwindigkeit von $150\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ genau über einen Beobachter hinweg.
   Wie weit ist das Flugzeug nach $20\,\mathrm{s}$ vom Beobachter entfernt und unter welchem Winkel gegen die Horizontale beobachet er es dann?

Lösung: ca. $3041\,\mathrm{m}$

3. Die Plattform eines Leuchtturms befindet sich in $23,8\,\mathrm{m}$ Höhe. Mit einem Fernrohr sieht man ein vor Anker liegendes Schiff unter einem Winkel von $12,9°$.
   Wie weit ist das Schiff horizontal vom Fuß des Leuchtturms entfernt, wenn sich das Fernrohr $1,60\,\mathrm{m}$ über der Plattform befindet?

Lösung: ca. $110\,\mathrm{m}$

4. Auf einem Kinderspielplatz ist an der Spitze eines Stahlgestells ABC ein Autoreifen zum Schaukeln aufgehängt. (Siehe Skizze)



(a) Berechnen Sie das Maß des Winkels β.

(b) Wie hoch befindet sich die Spitze C über dem Erdboden?

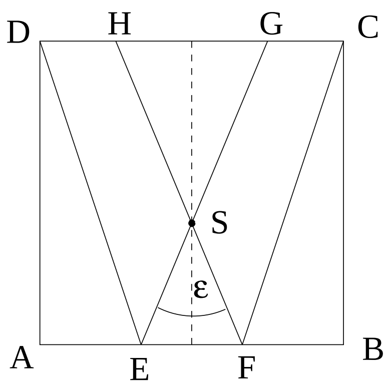
(c) Zur Verstärkung der Konstruktion soll von B aus eine Stütze s senkrecht zur Strebe $[AC]$ eingebaut werden. Berechnen Sie die Länge dieser Stütze s.

Lösung: (a) $\beta \approx 131{,}79°$

(b) ca. $3{,}36$m

(c) ca. $1{,}11$m

5.



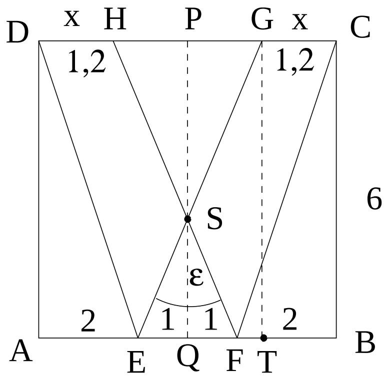
In der obigen Figur ist $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm. Es gilt: $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ und $\sphericalangle ESF = \varepsilon$.
Die Punkte G und H sind auf $[CD]$ beweglich und es gilt $\overline{DH} = \overline{GC} = x$ cm.
Hinweis: Gegebenenfalls sind Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a)
- Zeichne die Figur für $x = 1{,}2$.
- Berechne das zugehörige Winkelmaß ε.
  Hinweis: Zeichne vom Punkt G aus eine Hilfsline so ein, dass du die Aufgabe mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken lösen kannst.

(b) Berechne x so, dass das Dreieck EFS gleichseitig wird.

(c) Untersuche elementargeometrisch (d.h. ohne die Verwendung trigonometrischer Funktionen), ob es unter den Dreiecken EFS ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck gibt.

Lösung: (a)
- –
-



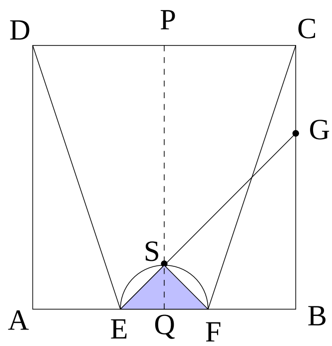
Die gesuchte Hilfslinie ist das Lot $[GT]$ vom Punkt G auf die Seite $[AB]$.
Es gilt$\sphericalangle EGT = \frac{\varepsilon}{2}$ (Z-Winkel) und $\overline{ET} = (4 - 1,2)\,\text{cm} = 2,8\,\text{cm}$.
Im Dreieck ETG gilt dann
$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{2,8}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{2} \approx 25,02° \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 50,04°$.

(b) In diesem Fall muss $\varepsilon = 60° = \sphericalangle FEG$ gelten.
Dann gilt im Dreieck EFG: $\overline{ET} = (4 - x)\,\text{cm}$.

$$\tan 60° = \frac{\overline{GT}}{\overline{ET}} = \frac{6}{4-x} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0,54$$

.

(c)



Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck EFS wird dadurch erzeugt, dass man den THALES-Halbkreis über $[EF]$ mit der Symmetrieachse $[PQ]$ schneidet.
Die Halbgerade $[ES]$ müsste die Seite $[CD]$ im Punkt G schneiden. Das ist offenbar nicht der Fall. Also kann das Dreieck EFS nie gleichschenklig-rechtwinklig werden.

6. Ermittle die Koordinate x des Punktes $C(x \mid 1)$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC mit $A(2 \mid -2)$, $B(2 \mid 5)$ und $\gamma = 90°$

   (a) durch eine Zeichnung,

   (b) durch drei verschiedene Rechenwege.

Lösung: (a) $C(-1,46 \mid 1)$
(b) $C(-1,46 \mid 1)$

7. Die Ecken C_n von Dreiecken ABC_n mit $A(1 \mid 1)$, $B(6 \mid 4)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 5$.

   Konstruiere die beiden möglichen rechtwinkligen Dreiecke ABC_1 und ABC_2 mit jeweils $\gamma = 90°$ und berechne die $x-$Koordinate der Eckpunkte C_1 und C_2.

Lösung: $x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

8. Vom Viereck $ABCD$ sind die Punkte $A(-2 \mid 0)$, $C(4 \mid 4,5)$, $D(-2 \mid 3)$, sowie $a = 5\,\text{LE}$, $f = 7\,\text{LE}$, und $\sphericalangle BDC = 65,83°$ gegeben.

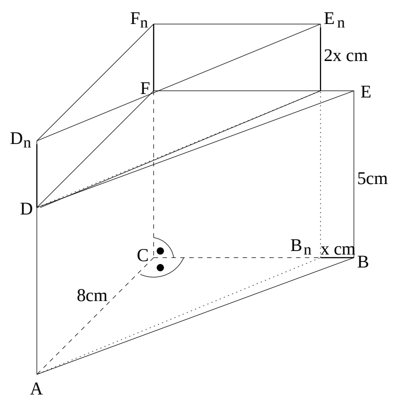
   (a) Konstruieren Sie das Viereck $ABCD$. Für die Zeichnung: $-3 \leqq x \leqq 5$ und $-3 \leqq y \leqq 5$

   (b) Berechnen Sie die Maße der Winkel α und δ, sowie die Länge der Seite b.

   (c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ACD mit drei verschiedenen Formeln.

Lösung: (a) -.-
(b) $\alpha = 120° \quad \delta = 104,04° \quad b = 7,20\,LE$
(c) $A_{ABC} = 9\,FE$

9. Das rechtwinklige Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$, $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$, $\overline{CB} = 6\,\text{cm}$ ist Grundfläche eines geraden Prismas mit der Höhe 5 cm. Verkürzt man die Seite $[BC]$ um x cm und verlängert man die Höhe des Prismas um $2x$ cm, so ergeben sich neue Prismen mit der Grundfläche AB_nC. (Siehe Schrägbild)



(a) Berechne das Volumen der Prismen $AB_nCD_nE_nF_n$ in Abhängigkeit von x. [Ergebnis: $V(x) = (-8x^2 + 28x + 120)\,\text{cm}^3$]

(b) Berechne das maximal mögliche Volumen und gib den zugehörigen $x-$Wert an.

(c) Berechne die $x-$Werte, bei denen Prismen das Volumen $V = 130\,\text{cm}^3$ besitzen.

Lösung: (a) $V(x) = (-8x^2 + 28x + 120)\text{cm}^3$

(b) $V_{max} = 144,5\,\text{cm}^3$ für $x = 1,75$

(c) $x_1 = 3,10 \quad x_2 = 0,40$

10. (a) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge $a = 6\,\text{cm}$.

(b) In dieses Dreieck wird ein Dreieck PQR mit den folgenden Eigenschaften einbeschrieben:

- Der Punkt P ist der Mittelpunkt der Seite $[AC]$.
- $R \in [BC] \wedge \overline{BR} = 2\,\text{cm}$
- $Q \in [AB] \wedge [PQ] \perp [AB]$

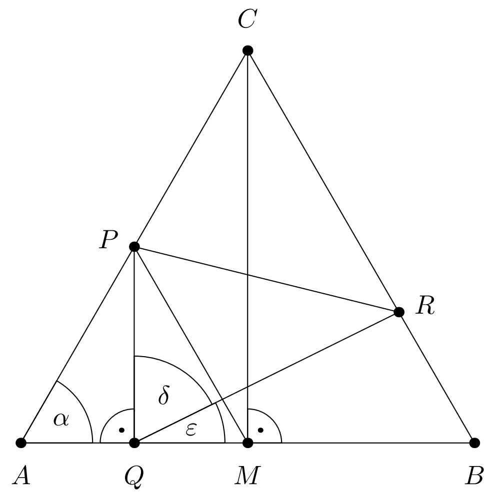
Zeichne dieses Dreieck PQR in das Dreieck ABC ein.

(c) Begründe auf verschiedene Weise: $\overline{AQ} = 1,5\,\text{cm}$.

(d) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks PQR.

Lösung: (a) —

(b)



Wir rechnen teilweise nur mit Maßzahlen.

(c) 1. Möglichkeit: mit einer Winkelfunktion

$\Delta AQP : \alpha = 60°; \quad \cos 60° = \frac{\overline{AQ}}{3\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AQ} = 1,5\,\text{cm}$

2. Möglichkeit: mit ähnlichen Dreiecken

$\Delta AQP \sim \Delta AMC : \quad \frac{\overline{AQ}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$

$\frac{\overline{AQ}}{3\,\text{cm}} = \frac{3\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AQ} = 1,5\,\text{cm}$

3. Möglichkeit: Zeichne die Hilfslinie $[PM]$ ein.

ΔAMP: $\overline{AM} = \overline{AP} = 3\,\text{cm} \quad \wedge \alpha = 60°$
Daher ist das Dreieck AMP ist gleichseitig. Der Punkt Q ist also der Mittelpunkt der 3 cm langen Basis $[AM]$ in diesem Dreieck. $\Rightarrow \quad \overline{AQ} = 1,5\,\text{cm}$

(d) $\Delta AQP : \overline{PQ}^{\,2} = 3^2 - 1,5^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \approx 2,60\,\text{cm}$

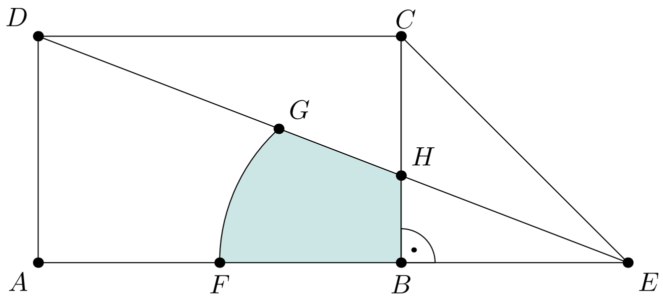
$\Delta QBR : \overline{QR}^{\,2} = 2^2 + 4,5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4,5 \cdot \cos 60° \quad \Rightarrow \quad \overline{QR} \approx 3,91\,\text{cm}$

$\frac{\sin\varepsilon}{2} \approx \frac{\sin 60°}{3,91} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 26,29°$

$\Delta QRP : \delta \approx 180° - 90° - 26,29° \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 63,71°$

$A_{\Delta PQR} \approx \frac{1}{2} \cdot 2,60 \cdot 3,91 \cdot \sin 63,71° \quad \Rightarrow \quad A_{\Delta PQR} \approx 4,56\,\text{cm}^2$

11.



Herr Lieche hat zu seinem rechteckigen Grundstück $ABCD$ mit $\overline{AB} = 80\,\text{m}$ und $\overline{AD} = 50\,\text{m}$ noch einen Teil BEC des Nachbargrundstückes mit $\overline{BE} = 50\,\text{m}$ hinzugekauft (siehe Abbildung oben).

(a) Der Kreisbogen GF besitzt den Mittelpunkt B und einen Radius von 40 m. Zeichne die Figur im Maßstab 1 : 1000.

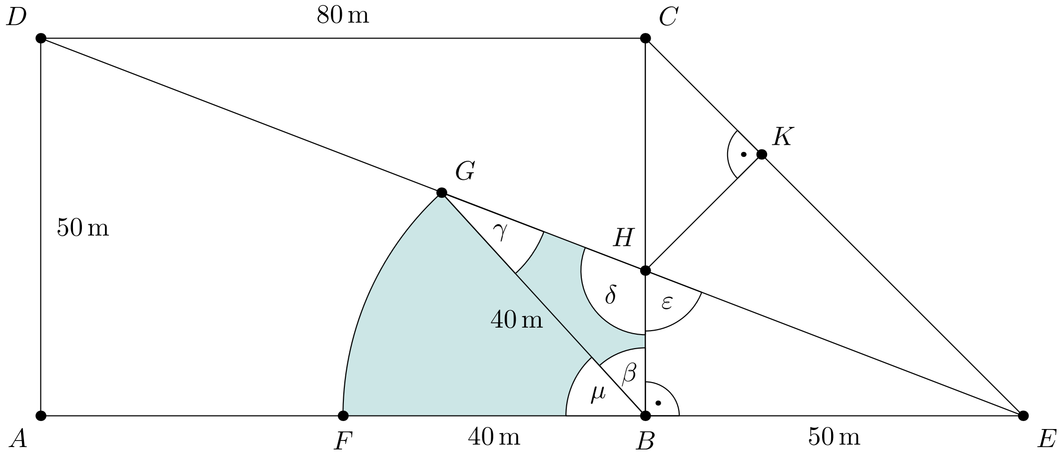
(b) Auf der Strecke $[DE]$ sollen Büsche im Abstand von 1m gepflanzt werden. Wie viele Büsche kann Herr Lieche höchstens darauf unterbringen?

(c) Vom Punkt H aus soll ein möglichst kurzer 1 m breiter Weg zur Grundstücksgrenze $[CE]$ angelegt werden. Auf dem geplanten Weg wird zunächst das Erdreich bis zu einer Tiefe von $0,4\,\text{m}$ ausgehoben und wegtransportiert. Wie viele m^3 Erdreich sind das ungefähr?

(d) Die grau gefärbte Fläche soll mit eng aneinander liegenden Granitplatten belegt werden. Wie viele € muss Herr Lieche mindestens dafür ausgeben, wenn der Quadratmeterpreis 22 € beträgt?

[Teilergebnis: $\overline{HB} \approx 19,2\,\text{m}$]

Lösung: (a)



(b) $\overline{DE}^{\,2} = 130\,\text{m}^2 + 50\,\text{m}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{DE} \approx 139,3\,\text{m}$

Wenn Herr Lieche den ersten Busch auf den Punkt D oder auf den Punkt E setzt, dann braucht er 140 Büsche, denn der 1. Busch steht dann nach 0 m da, der 2. Busch nach 1 m und schließlich der 140. Busch nach 139 m.

Wenn er genügend weit innen mit dem ersten Busch beginnt, dann braucht er weniger Büsche. Also braucht er höchstens 140 Büsche.

(c) Weil hier nur nach dem ungefähren Erdaushub gefragt ist, genügt es, die kürzeste Weglänge, nämlich die Strecke $[HK]$ aus der Zeichnung herauszumessen: $\overline{HK} \approx 2,2\,\text{cm}$. Das entspricht einer tatsächlichen Wegstrecke von ca. 22 m.

Also errechnet sich der Erdaushub aus: $1\,\text{m} \cdot 0,4\,\text{m} \cdot 22\,\text{m} \approx 8,8\,\text{m}^3$

Anmerkung:

Es gibt natürlich auch einen rechnerischen Weg zur Lösung, der hier jedoch in der Aufgabenstellung nicht zwingend vorgeschrieben ist:

Die beiden Dreiecke BEC und CHK sind gleichschenklig-rechtwinklig und damit ist z.B. das Dreieck CHK ein halbes Quadrat. Wenn die Streckenlänge $\overline{CH}$ bekannt ist, dann ergibt sich: $\overline{HK} = \dfrac{\overline{CH}}{\sqrt{2}}$.

In der Lösung zur Aufgabe (d) wird die Streckenlänge $\overline{HB}$ berechnet. Damit wäre mit $\overline{CH} = 50\,\text{m} - \overline{HB}$ alles erledigt.

(d) Die beiden Dreiecke AED und BEH sind zueinander ähnlich. Wende z.B. den Vierstreckensatz an:

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{HB}}{50\,\mathrm{m}} = \frac{50}{130} \quad \Rightarrow \quad \overline{HB} \approx 19{,}2\,\mathrm{m}$$

[**Anmerkung:**
Du kannst auch vom Dreieck AED mit $\tan \sphericalangle DEA = \frac{50}{130} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle DEA = \sphericalangle HEB \approx 21{,}04°$ in das Dreieck HBE wandern:
$\tan 21{,}04° \approx \frac{\overline{CH}}{50}$
Auch daraus ergibt sich (näherungsweise) der Wert für die Streckenlänge $\overline{HB}$.
Dieser Rechenweg stellt aber nur eine etwas umständlichere Form des Vierstreckensatzes dar.]

$$\Delta HBE : \tan\varepsilon \approx \frac{50}{19{,}2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 68{,}99° \text{ und } \delta = 180° - \varepsilon \approx 111{,}01°$$

$$\Delta GBH : \frac{\sin\gamma}{19{,}2} \approx \frac{\sin 111{,}01°}{40} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 26{,}62°$$

und $\beta \approx 180° - 111{,}01° - 26{,}62° \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 42{,}37°$

$$A_{\Delta GBH} \approx 0{,}5 \cdot 40 \cdot 19{,}2 \cdot \sin 42{,}37° \mathrm{m}^2 \quad \Rightarrow \quad A_{\Delta GBH} \approx 258{,}8 \mathrm{m}^2$$

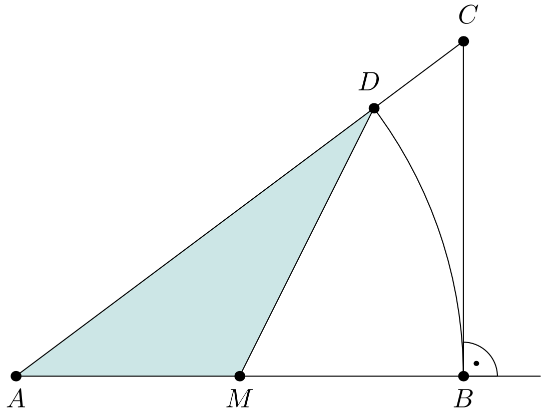
$$\mu = 90° - \beta \approx 47{,}63°$$

$$A_{Sektor BGF} \approx \frac{47{,}63°}{360°} \cdot 40^2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad A_{Sektor BGF} \approx 665{,}0\,\mathrm{m}^2$$

Zu pflasternde Fläche: $A_{ges} \approx 923{,}8\,\mathrm{m}^2$

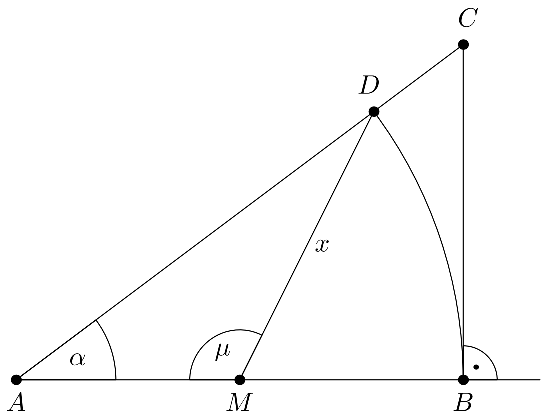
Bei einem Quadratmeterpreis von 22 € muss Herr Lieche mindestens 20324 € für die Platten ausgeben.

12.



Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $\overline{AC} = 11,20\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6,72\,\text{cm}$.
Der Mittelpunkt der Kathete $[AB]$ ist M. Der Punkt A ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von B nach D.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks AMD.

Lösung:

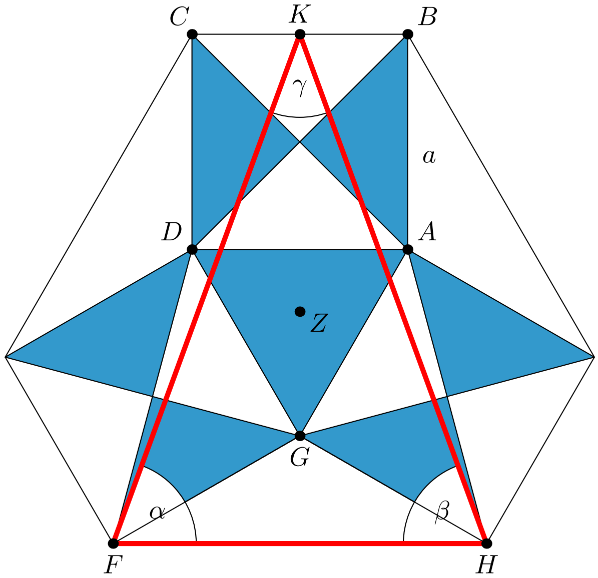


$\Delta ABC : \sin\alpha = \dfrac{6,72}{11,2} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 36,87°$
Weiter gilt: $\overline{AB}^{\,2} = (11,20^{\,2} - 6,72^{\,2})\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 8,96\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad \overline{AM} = 4,48\,\text{cm}$. Wegen $\overline{AD} = 8,96\,\text{cm}$ folgt weiter:
$\Delta AMD : x^{\,2} \approx 4,48^{\,2} + 8,96^{\,2} - 2 \cdot 4,48 \cdot 8,96 \cdot \cos 36,87°$
$\Rightarrow \quad x \approx 6,10\,\text{cm}$.

$$\Delta AMD : \frac{\sin\mu}{8,96} \approx \frac{\sin 36,87°}{6,01} \quad \Rightarrow \quad [\mu \approx 63,45°] \quad \vee \quad \mu \approx 116,55°.$$

$A_{\Delta AMD} \approx 0,5 \cdot 4,48 \cdot 8,96 \cdot \sin 116,55°\ \text{cm}^2 \approx 17,96\,\text{cm}^2$

13.

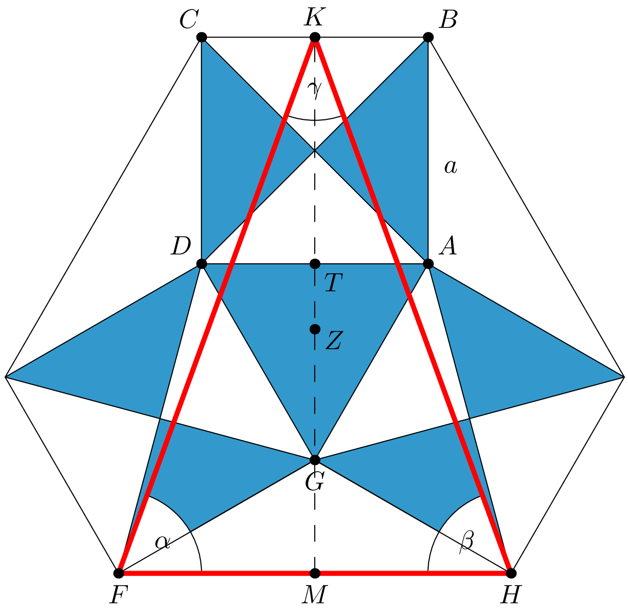


Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Im Zentrum befindet sich das gleichseitige Dreieck ADG mit dem Mittelpunkt Z. Auf den Seiten dieses Dreiecks wurden drei Quadrate errrichtet. Es gilt: $\overline{AB} = a$. Zusätzlich wurde noch das Dreieck FHK eingezeichnet.

(a) Zeichne die Figur für $a = 3\,\text{cm}$.

(b) Berechne α, β und γ.

Lösung: (a)



(b) Die Gerade MK ist die Symmetrieachse des Dreiecks FHK. Also gilt $\alpha = \beta$.
Im gleichseitigen Dreieck ADG stellt die Strecke $[GT]$ die Dreieckshöhe dar:

$\overline{GT} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3}.$

Der Punkt G ist der gemeinsame Eckpunkt zweier Quadrate und des gleichseitigen Dreiecks ADG. Also gilt: $\sphericalangle HGF = 360° - 2 \cdot 90° - 60° = 120°$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle HFG = \sphericalangle GHF = (180° - 120°) : 2 = 30°$

Das Dreieck FHG wird durch seine Höhe $[GM]$ in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt. $\Rightarrow \quad \sphericalangle FGM = \sphericalangle MGH = (90° - 30°) : 2 = 60°$

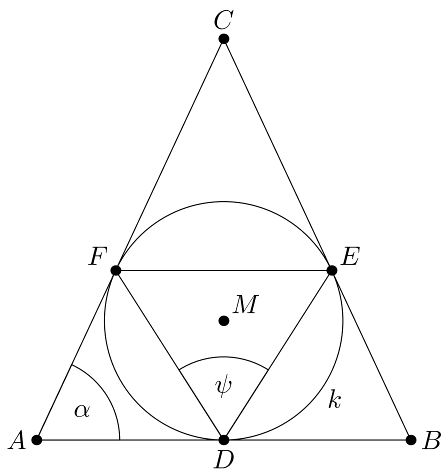
Wegen $\overline{FG} = \overline{AG} = a$ gilt: $\Delta\, FMG \cong \Delta\, GMH \cong \Delta\, GAT$. Es sind alles halbe gleichseitige Dreiecke: $\overline{GM} = \frac{1}{2}\, a.$

Im rechtwinkligen Dreieck FMK gilt dann:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{KT} + \overline{TG} + \overline{GM}}{\overline{FM}} = \frac{a + \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot a}{\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow \quad \alpha = \beta \approx 69{,}90°$ und $\gamma \approx 180° - 2 \cdot 69{,}90° = 40{,}20°$

14.



Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit der Basis $[AB]$. Der Inkreis k mit dem Mittelpunkt M berührt die Dreiecksseiten in den Punkten D, E und F.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 9\,\text{cm}$ und $\alpha = 65°$.

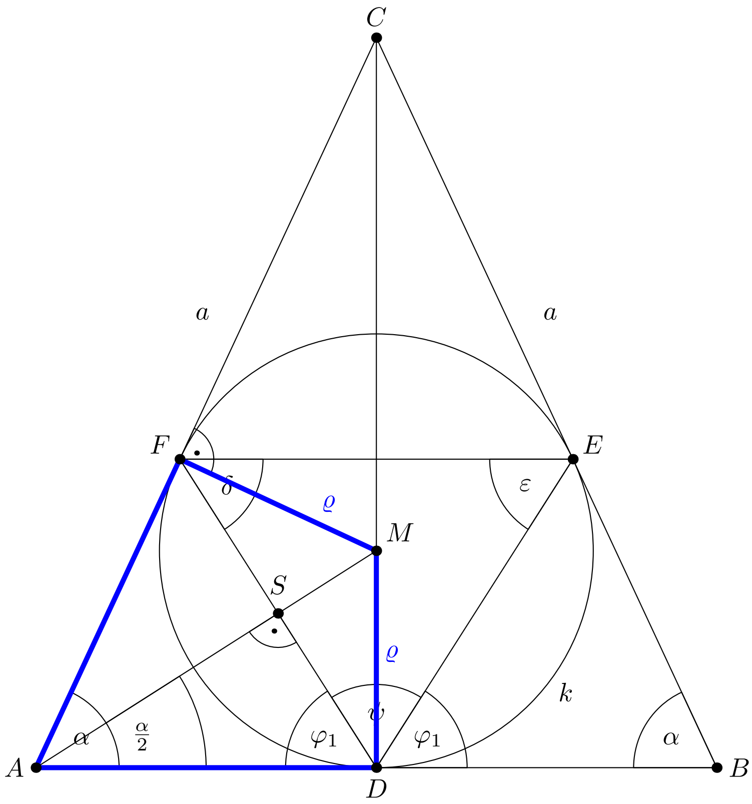
(b)
- Zeichne das Viereck $ADMF$ ein.
- Zeige: $\psi = \alpha$.

(c) • Zeige: Für das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke DEF und ABC gilt:

$$\frac{A_{\Delta DEF}}{A_{\Delta ABC}} = \cos\alpha(1 - \cos\alpha).$$

• Welche besondere Form hätten die Dreiecke ABC und DEF, wenn der Flächenanteil des Dreiecks DEF an dem des Dreiecks ABC maximal sein soll?

Lösung: (a)



(b) • Siehe obige Zeichnung.

• Das Viereck $ADMF$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, denn die Diagonale $[AM]$ ist die Halbierende des Winkels mit dem Maß α und damit die Symmetrieachse dieses Vierecks.
Das Dreieck ADS ist rechtwinklig, weil die beiden Diagonalen in jedem Drachenviereck senkrecht aufeinander stehen:
$\varphi_1 = 90° - \dfrac{\alpha}{2} = \varphi_2$. Weiter muss gelten: $\varphi_1 + \varphi_2 + \psi = 180°$
$\Rightarrow \quad \psi = 180° - 2 \cdot \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \psi = \alpha.$

(c) • Mit $\overline{CA} = \overline{CB} = a$ gilt: $A_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin\gamma.$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin(180° - 2\alpha) = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} a^2 \cdot 2 \sin\alpha\cos\alpha$$

$$\boxed{A_{\Delta ABC} = a^2 \sin\alpha \cos\alpha} \qquad \textbf{(*)}$$

$A_{\Delta DEF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FD}^{\,2} \sin\alpha \qquad$ **(**)**

Wende im Dreieck ADF den Kosinussatz an:

$\overline{FD}^{\,2} = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{c^{\,2}}{4} \cdot (1 - \cos\alpha)$ in **(*)**:

$$\boxed{A_{DEF} = \frac{c^{\,2}}{4} \cdot (1 - \cos\alpha) \sin\alpha}$$

$$\frac{A_{\Delta DEF}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{c^{\,2}}{4} \cdot (1 - \cos\alpha) \sin\alpha}{a^{\,2} \sin\alpha \cos\alpha} = \left(\frac{\frac{c}{2}}{a}\right)^2 \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}$$

Im Dreieck ADC gilt: $\frac{\frac{c}{2}}{a} = \cos\alpha$

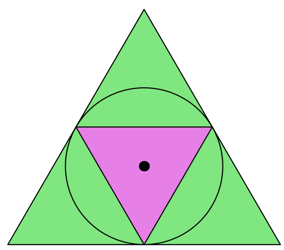
$$\Rightarrow \quad \frac{A_{\Delta DEF}}{A_{\Delta ABC}} = \cos^2\alpha \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha(1 - \cos\alpha)$$

Dabei darf aber α nicht $90°$ werden. **(Warum?)**

- $T(\alpha) = \cos\alpha(1 - \cos\alpha) = -\cos^2\alpha + \cos\alpha = -\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

  $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ liefert $T_{max} = \frac{1}{4}$

  Dann muss aber $\alpha = 60°$ gelten; d.h. in diesem Fall sind die Dreiecke ABC und DEF jeweils gleichseitig. Das innere Dreieck nimmt 25% der Gesamtfläche ein. Das sieht dann so aus:



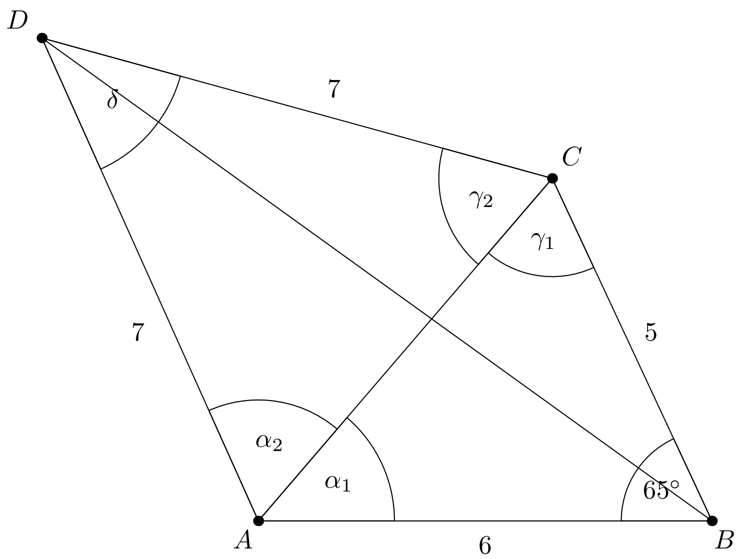
15. Ein Viereck $ABCD$ ist durch folgende Bestimmungsstücke festgelegt:
    $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\beta = \sphericalangle CBA = 65°$, $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$ und $\overline{DC} = \overline{AD} = 7\,\text{cm}$.
    (a) Zeichne dieses Viereck.
    [AB] ziemlich weit rechts, Platzbedarf über [AB]: 8 cm
    (b) Begründe: Es handelt sich nicht um einen achsensymmetrischen Drachen.

(c) Berechne die Länge der Diagonalen $[AC]$.

(d) Berechne die Länge der Diagonalen $[BD]$.

(e) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$.

Lösung: (a)



(b) Zwar sind die Seiten $[AD]$ und $[CD]$ gleich lang, aber die Seiten $[BA]$ und $[BC]$ sind es nicht.

(c) $\Delta\, ABC$: $\overline{AC}^{\,2} = \left(5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 65°\right)\, \text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} \approx 5{,}97\,\text{cm}$

(d) $\Delta\, ABC$: $5^2 = 6^2 + 5{,}97^{\,2} - 2 \cdot 6 \cdot 5{,}97 \cdot \cos \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \approx 49{,}38°$
$\Delta\, ACD$: $5{,}97^{\,2} = 7^{\,2} + 7^{\,2} - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos \delta \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 50{,}48°$
$\Delta\, ACD$: $\alpha_2 = \gamma_2 \approx (180° - 50{,}48°) : 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \gamma_2 \approx 64{,}76°$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle BAD = \alpha_1 + \alpha_2 \approx 114{,}14°$
$\Rightarrow \quad \overline{BD}^{\,2} \approx \left(6^2 + 7^{\,2} - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos 114{,}14°\right)\, \text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} \approx 10{,}92\,\text{cm}$

(e) $A_{ABCD} = A_{\Delta ABC} + A_{\Delta ACD}$:

$$A_{ABCD} \approx \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin 65° + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \sin 50{,}48°\right)\, \text{cm}^2 \approx 32{,}49\,\text{cm}^2$$

16. Ein Dreieck ABC ist durch folgende Bestimmungsstücke festgelegt:
$\overline{AB} = 10\,\text{cm}$, $\alpha = \sphericalangle\, BAC = 50°$ und $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(a)
- Zeichne dieses Dreieck. Platzbedarf über $[AB]$: 8cm
- Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

(b) Man erhält neue Dreiecke AB_nC_n dadurch, dass die Seite $[AC]$ über C hinaus um x cm verlängert und gleichzeitig die Seite $[AB]$ von B aus um $2x$ cm verkürzt wird.

- Zeichne farbig für $x = 1{,}5$ das Dreieck AB_1C_1 ein.

- Berechne den Flächeninhalt des Dreeicks AB_1C_1.
- Berechne den Abstand d des Punktes C_1 von der Seite $[AB]$.
- Berechne die Länge der Strecke $[B_1C_1]$.

(c) Notiere alle Belegungen von x, für die es neue Dreiecke AB_nC_n gibt.

(d) Zeige: Für den Flächeninhalt A der neuen Dreiecke AB_nC_n gilt in Abhängigkeit von x (gerundet):

$$A(x) = (-0,77x^2 - 0,77x + 23,1)\,\text{cm}^2.$$

(e)
- Berechne diejenige Belegung von x, die den Extremwert des Terms $T(x) = -0,77x^2 - 0,77x + 23,1$ liefert.
- Begründe: Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es keines, dessen Flächeninhalt A so groß wie der Extremwert des zugehörigen Terms $T(x)$ ist.

(f) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das Dreieck AB_2C_2, das einen Flächeninhalt von $7,7\,\text{cm}^2$ aufweist. Berechne den zugehörigen x-Wert.

(g) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das gleichschenklige Dreieck AB_3C_3, mit der Basis $[B_3C_3]$. Berechne den zugehörigen x-Wert.

(h) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das rechtwinklige Dreieck AB_4C_4 mit der Hypotenuse $[AC_4]$.

- Berechne den zugehörigen x-Wert.

  [Ergebnis: $x \approx 2,32$]

- Zeichne dieses Dreieck ein.

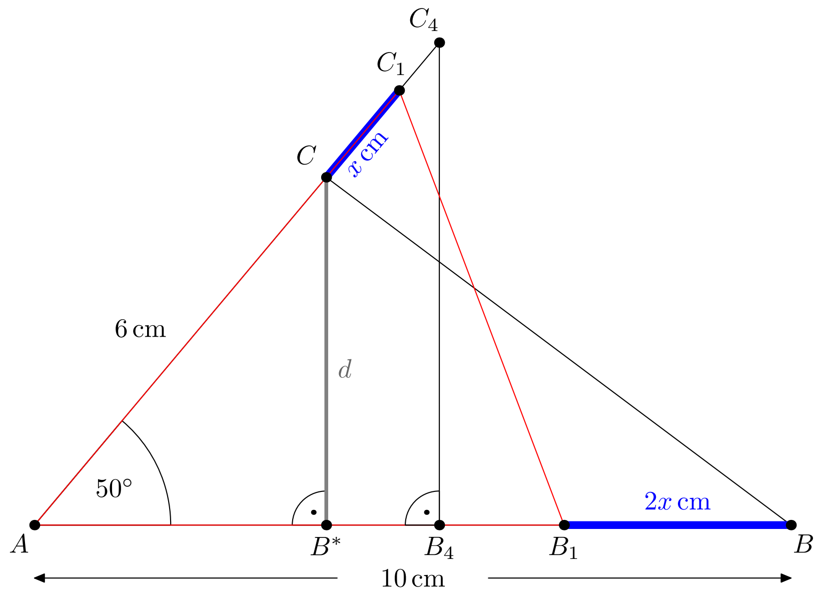
(i)
- Zeige: Für die Längen der Strecken $[B_nC_n]$ gilt in Abhängigkeit von x:

$$\overline{B_nC_n}(x) = \sqrt{7,56x^2 - 25,44x + 59,2}\,\text{cm}^2 \text{ (gerundet).}$$

- Bestätige mit diesem Ergebnis das Ergebnis der Aufgabe (b) 4. Punkt.

(j) Unter allen Dreiecken AB_nC_n gibt es das Dreieck AB_5C_5, in dem der Winkel C_5B_5A das Maß 62° hat. Berechne den zugehörigen X-Wert.

Lösung: (a) •



- $A_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot (10 \cdot 6 \cdot \sin 50^\circ)\,\mathrm{cm}^2 \approx 22{,}98\,\mathrm{cm}^2$

(b)
- Siehe Zeichnung.
- $A_{\Delta AB_1C_1} = \dfrac{1}{2} \cdot (7 \cdot 7.5 \cdot \sin 50^\circ)\,\mathrm{cm}^2 \approx 20{,}11\,\mathrm{cm}^2$
- ΔAB^*C: $\quad \sin 50^\circ = \dfrac{d}{6\,\mathrm{cm}} \quad \Rightarrow \quad d \approx 4{,}60\,\mathrm{cm}$ (siehe Zeichnung)
- $\overline{B_1C_1}^{\,2} = 7^2 + 7.5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7{,}5 \cdot \cos 50^\circ$
  $\Rightarrow \quad \overline{B_1C_1} \approx 6{,}14\,\mathrm{cm}$ (siehe Zeichnung)

(c) $x < 0$: Aus „Verlängern“ würde „Verkürzen“ und umgekehrt, das geht nicht.
$x = 0$ liefert kein „neues Dreieck“, vgl. Angabe.
$x = 5$: Das Dreieck entartet zur Strecke.
$x > 5$: Die betreffenden Punkte B_n würden links vom Punkt A auftauchen; die betreffenden Dreiecke hätten dann den falschen Drehsinn.

Also: $x \in]0;5[_{\mathbb{R}}$.

(d) $A(x) = \left(\dfrac{1}{2} \cdot (10 - 2x)(6 + x) \cdot \sin 50^\circ\right) \mathrm{cm}^2 \approx 0{,}77 \cdot \left(30 + 5x - 6x - x^2\right) \mathrm{cm}^2$

$A(x) \approx 0{,}77 \cdot \left(-x^2 - x + 30\right) \mathrm{cm}^2 = (-0{,}77x^2 - 0{,}77x + 23{,}1)\,\mathrm{cm}^2$

(e)
- Quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned}
T(x) &= -0{,}77x^2 - 0{,}77x + 23{,}1 \\
&= -0{,}77(x^2 - x + 0{,}5^2 - 0{,}25 - 30) \\
&= -0{,}77[(x + 0{,}5)^2 - 30{,}25] \\
T(x) &= -0{,}77(x + 0{,}5)^2 + 23{,}2925
\end{aligned}$$

$x = -0{,}5$ liefert $T_{max} = 23{,}2925$

- Wegen $-1{,}5 \notin]0;5[_{\mathbb{R}}$ wird dieses Maximum bei keinem der Dreiecke AB_nC_n angenommen.

(f) $-0,77x^2 - 0,77x + 23,1 = 7,7 \quad \Leftrightarrow \quad -0,77x^2 - 0,77x + 15,4 = 0$
Der Solver des GTR liefert die beiden Lösungen $x_1 = 4$ und $x_2 = -5$.
Wegen $-5 \notin]0;5[_{\mathbb{R}}$ kommt nur $x_1 = 4$ als Lösung in Frage.

(g) Es muss gelten: $\overline{AB_n} = \overline{AC_n}$; d.h. $10 - 2x = 6 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\overline{3}$

(h) Fertige am besten eine Skizze dazu an.

- In diesem Fall gilt: $\cos 50° = \dfrac{10-2x}{6+x}$. Der Solver des GTR liefert $x \approx 2,32$.
- Siehe Zeichnung.

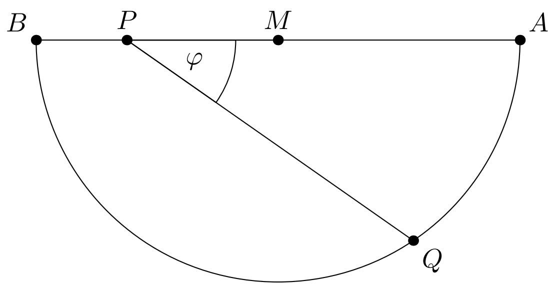
(i)
- Kosinussatz in den Dreiecken AB_nC_n:
$\overline{B_nC_n}(x)^2 = [(10-2x)^2 + (6+x)^2 - 2 \cdot (10-2x) \cdot (6+x) \cdot \cos 50°]\,\text{cm}^2$
$\approx [100 - 40x + 4x^2 + 36 + 12x + x^2 - 2 \cdot (60 + 10x - 12x - 2x^2) \cdot 0,64]\,\text{cm}^2$
$= [5x^2 - 28x + 136 - 1,28 \cdot (-2x^2 - 2x + 60)]\,\text{cm}^2$
$= [5x^2 - 28x + 136 + 2,56x^2 + 2,56x - 76,80]\,\text{cm}^2$
$\overline{B_nC_n}(x) \approx \sqrt{7,56x^2 - 25,44x + 59,2}\,\text{cm}$
- $\overline{B_nC_n}(1,5) = \sqrt{7,56 \cdot 1,5^2 - 25,44 \cdot 1,5 + 59,2}\,\text{cm} \approx 6,17\,\text{cm}$
Anmerkung: Das Ergebnis in der Aufgabe (b) 4. Punkt lautet:
$\overline{B_1C_1} \approx 6,14\,\text{cm}$. Die Abweichung ergibt sich daraus, dass hier in der Lösung (i) 1. Punkt viel häufiger gerundet worden ist als in der Aufgabe (b) 4. Punkt. Der Wert 6,14 liegt näher am exakten Ergebnis, das aber nie „genau“ dagestellt werden kann.

(j) Im entsprechenden Dreieck gilt: $\sphericalangle AC_5B_5 = 180° - 50° - 62° = 68°$.

$$\frac{\sin 68°}{10-2x} = \frac{\sin 62°}{6+x}$$

Der Solver des GTR liefert $x \approx 1,21$.

17.

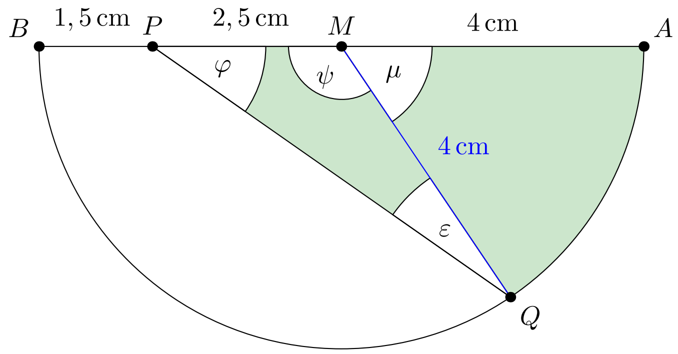


Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M. Weiter gilt:
$\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{PM} = 2,5\,\text{cm}$ und $\varphi = 35°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[AP]$ und $[PQ]$, sowie von dem Kreisbogen von Q nach A begrenzt wird. Tipp: Zeichne eine geeignete Hilfslinie ein.

Lösung: (a)



Die Hilfslinie ist der Kreisradius $[MQ]$ mit $\overline{MQ} = \overline{MA} = \overline{MB} = 4\,\text{cm}$.

(b) ΔPQM: $\dfrac{2,5}{\sin\varepsilon} = \dfrac{4}{\sin 35^\circ} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 21,01^\circ$

$\Rightarrow \quad \psi \approx 180^\circ - 35^\circ - 21,01^\circ = 123,99^\circ.$

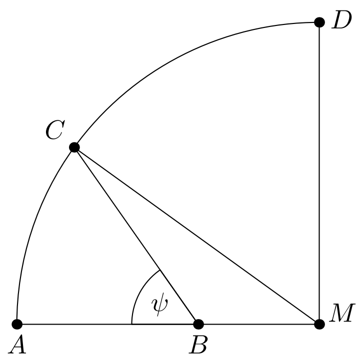
$A_{\Delta PQM} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 4 \cdot \sin 123,99^\circ \approx 4,15\,\text{cm}^2$

$\mu \approx 180^\circ - 123,99^\circ = 56,01^\circ.$

$A_{Sektor\ MQA} \approx \dfrac{56,01^\circ}{360^\circ} \cdot 4^2\pi \approx 7,82\,\text{cm}^2$

$\Rightarrow \quad A_{gesamt} \approx 4,15\,\text{cm}^2 + 7,82\,\text{cm}^2 = 11,97\,\text{cm}^2.$

18.

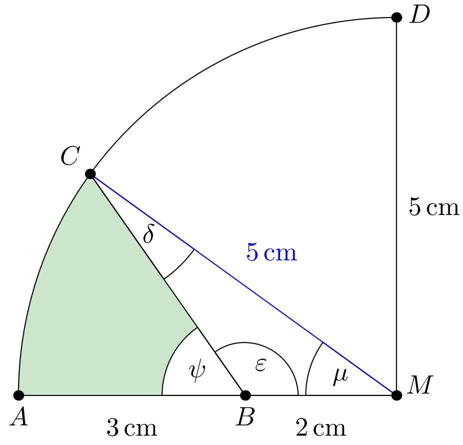


Der Mittelpunkt des Viertelkreises ist M.
Weiter gilt: $\overline{AM} = 5\,\text{cm}$, $\overline{AB} = 3\,\text{cm}$ und $\psi = 55°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[AB]$ und $[BC]$ sowie von dem Kreisbogen von C nach A begrenzt wird.
Tipp: Zeichne eine geeignete Hilfslinie ein.

Lösung: (a)



Die Hilfslinie ist der Kreisradius $[MC]$ mit $\overline{MC} = \overline{MA} = \overline{MD} = 5\,\text{cm}$.

(b) $\varepsilon = 180° - 55° = 125°$

ΔBMC: $\dfrac{2}{\sin\delta} = \dfrac{5}{\sin 125°} \quad\Rightarrow\quad \delta \approx 19{,}13°$

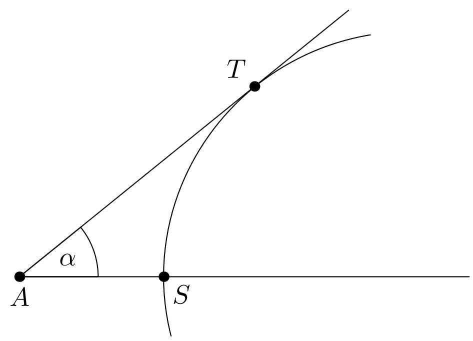
$\Rightarrow\quad \mu \approx 180° - 125° - 19{,}13° = 35{,}87°.$

$A_{\Delta BMC} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sin 35{,}87° \approx 2{,}93\,\text{cm}^2$

$A_{Sektor\,MCA} \approx \dfrac{35{,}87°}{360°} \cdot 5^2\pi \approx 7{,}83\,\text{cm}^2$

$\Rightarrow\quad A_{Rest} = A_{Sektor} - A_{\Delta BMC} \approx 4{,}90\,\text{cm}^2.$

19.



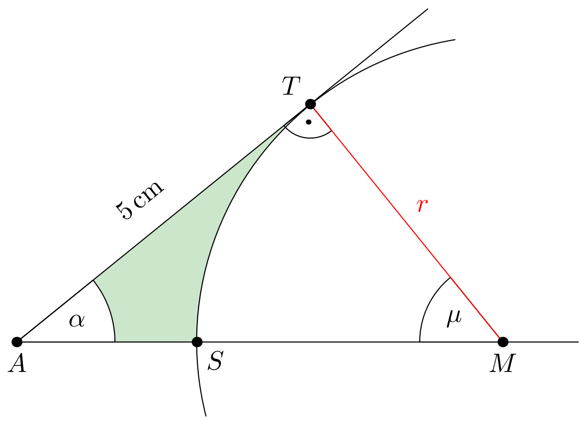
Der Kreisbogen mit dem zunächst nicht sichtbaren Mittelpunkt $M \in [AS$ berührt den einen Schenkel von α im Punkt T und schneidet den anderen Schenkel von α im Punkt S.
Weiter gilt: $\overline{AT} = 5\,\text{cm}$ und $\alpha = 39°$.

(a) Zeichne die Figur ohne den Punkt S und den Kreisbogen.

(b) Konstruiere den Mittelpunkt M des Kreisbogens. Zeichne den Kreisbogen und den Punkt S ein.

(c) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[AT]$ und $[AS]$ sowie von dem Kreisbogen von T nach S begrenzt wird.

Lösung: (a)



(b) Der Berührradius $r = \overline{MT}$ steht auf seiner Tangente $[AT$ senkrecht. Die Senkrechte zur Halbgeraden $[AT$ im Punkt T schneidet den waagrechten Schenkel von α im Kreismittelpunkt M. Damit werden der Kreisbogen und der Schnittpunkt S konstruierbar.

(c) ΔAMT: $\tan 39° = \dfrac{r}{5} \quad \Rightarrow \quad r \approx 4{,}05\,\text{cm}$.

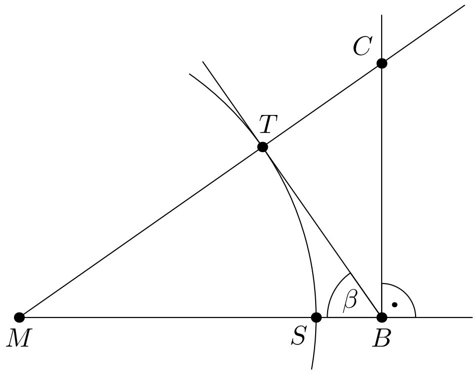
$\mu = 90° - 39° = 51°$.

$A_{\Delta AMT} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 4{,}05 \cdot 5\,\text{cm}^2 \approx 10{,}13\,\text{cm}^2$.

$$A_{Sektor\,MTS} \approx \frac{51°}{360°} \cdot 4,05^2 \pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 7,30\,\mathrm{cm}^2.$$

$$\Rightarrow \quad A_{Rest} = A_{\Delta AMC} - A_{Sektor} \approx 2,83\,\mathrm{cm}^2.$$

20.

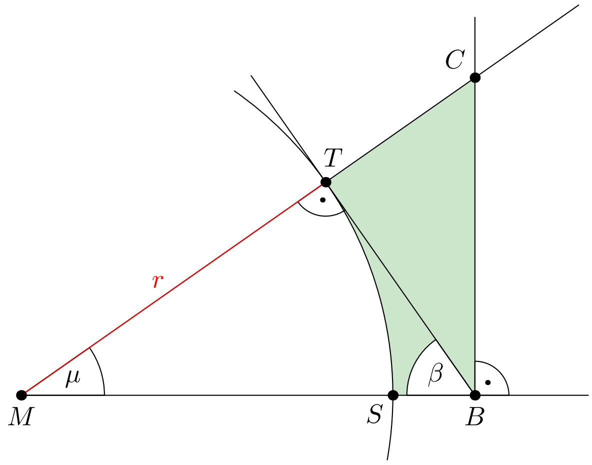


Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist M. Weiter gilt: $\overline{MB} = 6\,\mathrm{cm}$ und $\beta = 55°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den Strecken $[SB]$, $[BC]$ und $[CT]$ sowie von dem Kreisbogen von T nach S begrenzt wird.

Lösung: (a)



- Zeichne $[MB]$.
- Zeichne die Senkrechte zu $[MB]$ durch den Punkt B.
- Trage in B den Winkel mit dem Maß $\beta = 55°$ an. Jetzt hast du zwei Möglichkeiten, den Punkt T zu konstruieren:
  1.

Zeichne durch den Punkt M die Senkrechte auf den freien Schenkel von β. Diese Senkrechte schneidet den freien Schenkel von β im Punkt T. Die Halbgerade $[MT$ scheidet die vorher gezeichnete Senkrechte zu MB durch den Punkt B im Punkt C.
2.
Der THALES-(Halb-)Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$ scheidet den freien Schenkel von β im Punkt T. Dann wird C wie in 1. konstruiert.
Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde zur 1. Möglichkeit gegriffen.

(b) Der Berührradius $r = \overline{MT}$ steht auf seiner Tangente BT senkrecht.

Im ΔMBT gilt dann: $\mu = 90° - 55° = 35°$.

$\cos 35° = \frac{r}{6\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad r \approx 4,91\,\text{cm}$.

Für den Flächeninhalt des Kreissektors MST gilt dann:

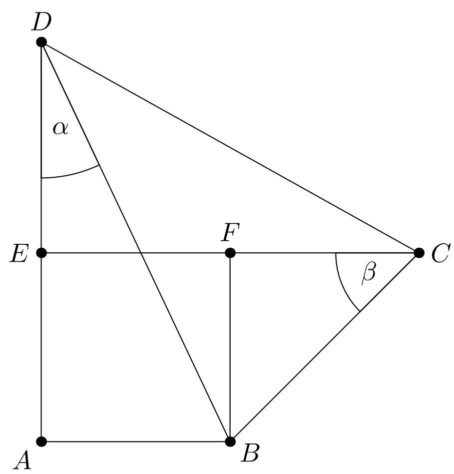
$A_{Sektor\,MST} \approx \frac{35°}{360°} \cdot 4,91^2\pi\,\text{cm}^2 \approx 7,36\,\text{cm}^2$.

Im ΔMBC gilt: $\tan 35° = \frac{\overline{BC}}{6} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} \approx 4,20\,\text{cm}$.

$A_{\Delta MBC} \approx \frac{1}{2} \cdot 4,20 \cdot 6\,\text{cm}^2 = 12,60\,\text{cm}^2$

$A_{Rest} = A_{\Delta MBC} - A_{Sektor} \approx 5,24\,\text{cm}^2$.

21.



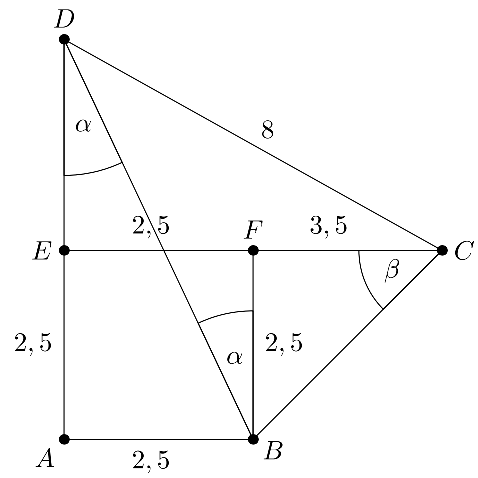
Die nicht maßstabgerechte Figur $ABCD$ setzt sich aus zwei rechtwinkligen Dreiecken und einem Quadrat zusammen. Dabei gilt: $\overline{FC} = 3,5\,\text{cm}$, $\overline{CD} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{FB} =$

$2,5\,\text{cm}$.
Die Endergebnisse sind auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) • $\overline{DB}$
 • α
 • β

(b) Ein weiterer Winkel in der Figur hat ebenfalls das Maß α Kennzeichen dieses Winkelmaß eindeutig mit „α“. Begründe deine Antwort.

Lösung:



Die Zeichnung wurde mit den gegebenen Maßzahlen beschriftet.

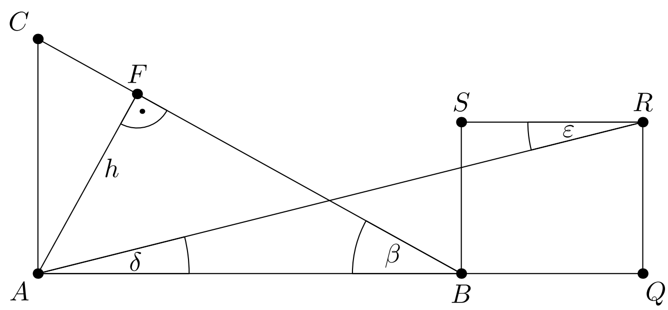
(a) • Dazu musst du erst $\overline{DE}$ berechnen:
$\Delta\,ECD$: $\overline{DE}^2 + \overline{EC}^2 = \overline{DC}^2$
$\overline{DE}^2 + 6^2\,\text{cm}^2 = 8^2\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{DE} \approx 5,29\,\text{cm}$ $\Delta\,ABD$: $\overline{DB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2$
$\overline{DB}^2 = 7,79^2\,\text{cm}^2 + 2,5^2\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{DB} \approx 8,18\,\text{cm}$

• $\overline{AD} = 2,5\,\text{cm} + 5,29\,\text{cm} = 7,79\,\text{cm}$
$\Delta\,ABD$: $\tan\alpha = \dfrac{2,5}{7,79} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 17,79^\circ$

• $\Delta\,BCF$: $\tan\beta = \dfrac{2,5}{3,5} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 35,54^\circ$

(b) Es ist der Winkel FBD (Z-Winkel, siehe Zeichnung).

22.

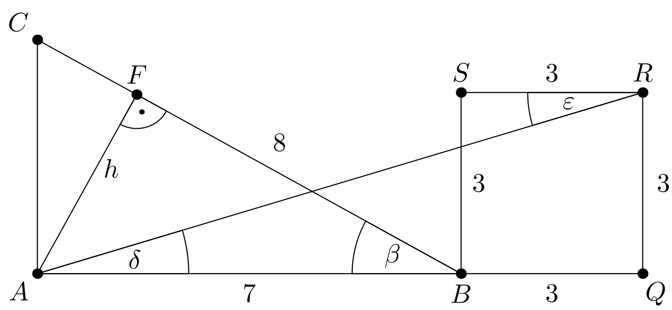


Die nicht maßstabgerechte Figur setzt sich aus einem rechtwinkligen DreieckABC und einem Quadrat $BQRS$ zusammen.
Dabei gilt: $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{QR} = 3\,\text{cm}$.
Die Endergebnisse sind auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Berechne:
- β
- h
- δ

(b) Das Winkelmaß ε stimmt mit einem anderen in der Figur befindlichen Winkelmaß überein. Mit welchem Winkelmaß besteht Übereinstimmung? Begründe deine Antwort.

Lösung:

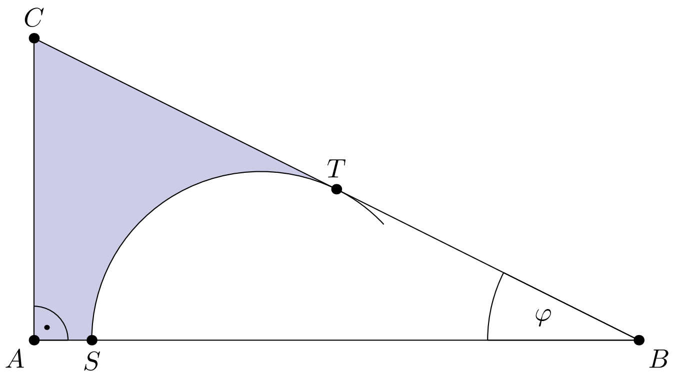


Die Zeichnung wurde mit den gegebenen Maßzahlen beschriftet.

(a)
- $\Delta\, ABC$: $\cos\beta = \dfrac{7}{8} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 28{,}96°$.
- $\Delta\, ABF$: $\sin\beta = \dfrac{h}{7} \quad \Leftrightarrow \quad h \approx 7 \cdot \sin 28{,}96° \quad \Rightarrow \quad h \approx 3{,}39\,\text{cm}$.
- $\Delta\, AQR$: $\tan\delta = \dfrac{3}{10} \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 16{,}70°$.

(b) $\varepsilon = \delta$ (Z-Winkel).

23.



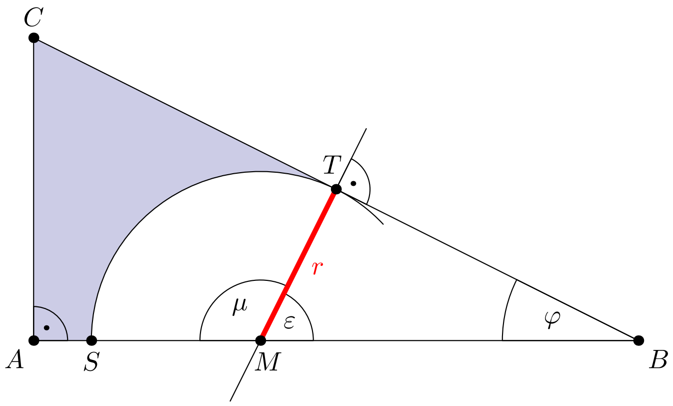
Der Kreisbogen berührt die Hypotenuse $[BC]$ im Hypotenusenmittelpunkt T. Der Mittelpunkt dieses Kreisbogens ist der noch verborgene Punkt M, der auf $[AB]$ liegt. Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 4\,\text{cm}$.

(a) Zeichne den Punkt M ein.

(b) Berechne den Inhalt des eingefärbten Flächenstückes.

[Teilergebnis: Radius des Kreisbogens $\approx 2,24\,\text{cm}$]

Lösung: (a)



Der Berührradius $r = [MT]$ steht auf seiner Kreistangente BC senkrecht. Zeichne also eine Senkrechte zur Hypotenuse $[BC]$ durch den Punkt T. Diese Senkrechte schneidet dann die Kathete $[AB]$ im Mittelpunkt M des Kreisbogens.

(b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen.

PYTHAGORAS im Dreieck ABC: $\overline{BC}^2 = 8^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} \approx 8,97\,\text{cm}$.

$\Delta\, ABC$: $\tan\varphi = \frac{4}{8} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 26,57°$.

$\Delta\, MBT$: $\tan 26,57° \approx \frac{r}{4,47} \quad \Rightarrow \quad r \approx 2,24\,\text{cm}$,

und $\varepsilon \approx 90° - 26,57° = 63,43°$.

$\mu \approx 180° - 63,43° \quad \mu \approx 116,57°$.

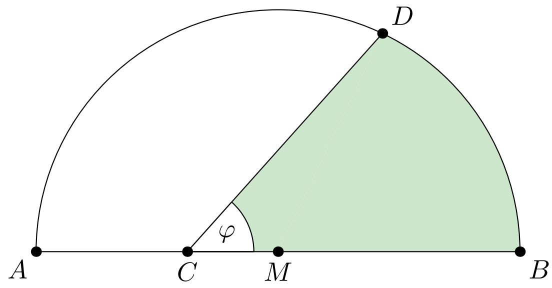
$A_{\Delta\, ABC} = 0,5 \cdot 4 \cdot 8\,\text{cm}^2 = 16\,\text{cm}^2$

$A_{\Delta\, MBT} \approx 0,5 \cdot 2,24 \cdot 4,47\,\text{cm}^2 \approx 5,01\,\text{cm}^2$

$$A_{Sektor\,MTS} \approx \frac{116,57^\circ}{360^\circ} \cdot 2,24^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 = 5,10\,\text{cm}^2$$

$$A_{Farbe} \approx 16\,\text{cm}^2 - 5,01\,\text{cm}^2 - 5,10\,\text{cm}^2 = 5,89\,\text{cm}^2.$$

24.



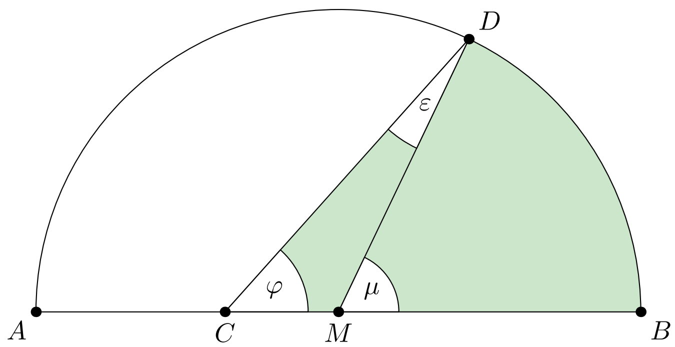
Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M.
Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{AC} = 2,5\,\text{cm}$ und $\varphi = 49^\circ$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Die eingefärbte Fläche ist kein Kreissektor. Zeichne dazu an einer geeigneten Stelle eine Hilfslinie ein.

(c) Berechne den Inhalt A der eingefärbten Fläche.

Lösung: (a)



(b) Die Hilfslinie ist der Kreisradius $\overline{MD}$. Der Mittelpunkt des Kreisbogens von B nach D ist der Punkt M. Daher ist die Strecke $[CD]$ länger als der Kreisradius $\overline{MD}$. Bei einem Kreissektor müssen aber die begrenzenden Strecken gleich lang sein, weil dies die Kreisradien sind.

(c) $\overline{MD} = 4\,\text{cm}$ und $\overline{MC} = 1,5\,\text{cm}$.

Im Dreieck CMD gilt: $\dfrac{1,5\,\text{cm}}{\sin\varepsilon} = \dfrac{4\,\text{cm}}{\sin 49^\circ} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 16,44^\circ.$

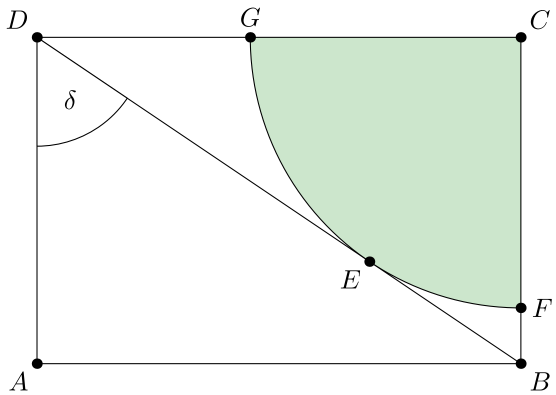
$\Rightarrow \quad \sphericalangle DMC \approx 180^\circ - 49^\circ - 16,44^\circ = 114,56^\circ \Rightarrow \quad \mu \approx 65,44^\circ.$

$A_{\Delta\, CMD} \approx 0,5 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot \sin 114,56^\circ\ \text{cm}^2 \approx 2,73\,\text{cm}^2.$

$A_{Sektor\, MBD} \approx \frac{65,44^\circ}{360^\circ} \cdot 4^2 \cdot \pi \approx 9,14\,\text{cm}^2.$

$A_{gesamt} \approx 2,73\,\text{cm}^2 + 9,14\,\text{cm}^2 = 11,87\,\text{cm}^2.$

25.

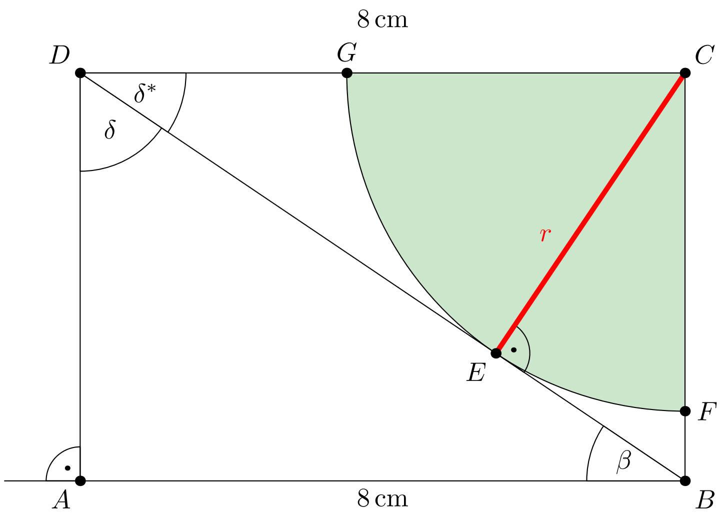


Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\delta = 56^\circ$.
Der Mittelpunkt des Kreisbogens, der die Diagonale $[BD]$ im Punkt E berührt, ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Flächeninhalt des eingefärbten Kreissektors.
[Teilergebnis: Radius des Kreisbogens $\approx 3,64\,\text{cm}$]

Lösung: (a)



Im Dreieck ABD gilt: $\beta = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$.

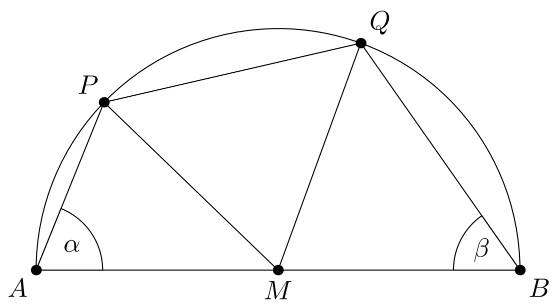
- Zeichne die Strecke $[AB]$.
- Errichte eine Senkrechte zur Strecke $[AB]$ durch den Punkt A.
- Trage am Punkt B den 34°-Winkel an.
- Die Senkrechte und der freie Schenkel des 34°-Winkels schneiden sich im Punkt D.
- Zeichne den Punkt C, die Diagonale $[BD]$ und den Kreisbogen ein.
- Der Berührradius $r = [CE]$ steht auf seiner Kreistangente BD senkrecht. Zeichne also das Lot vom Punkt C auf die Diagonale $[BD]$. Der Lotfußpunkt ist E und $r = [CE]$.

(b) Im Dreieck DEC gilt: $\delta^* = \beta = 34°$ (Z-Winkel).

$$\sin 34° = \frac{r}{8\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad r \approx 4,47\,\text{cm}.$$

$$A_{Sektor} \approx \frac{90°}{360°} \cdot 4,47^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 15,69\,\text{cm}^2$$

26.



Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M. Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 68°$ und $\beta = 55°$.

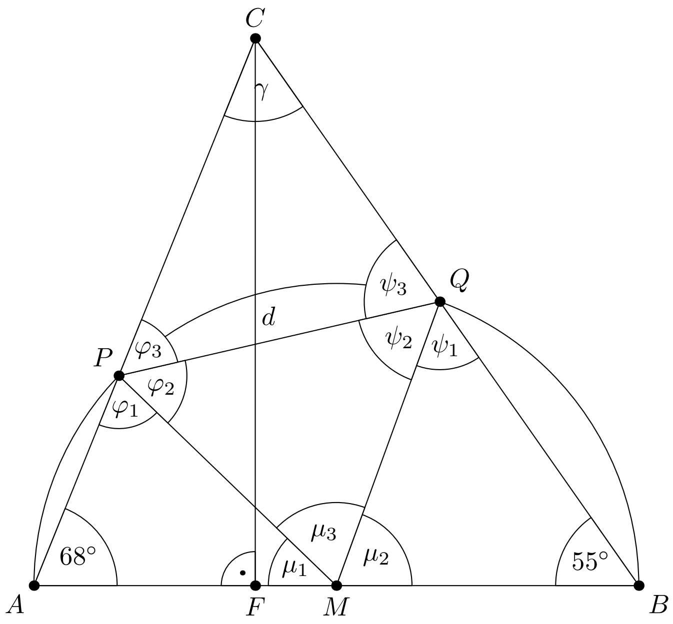
(a) Zeichne die Figur. Platzbedarf über $[AB]$: 9 cm.

(b)
- Zeige: $\sphericalangle QMP = 66°$.
- Zeige: Die Strecke $[PQ]$ ist (gerundet) $4,36\,\text{cm}$ lang.

(c) Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks MQP.

(d) Der Schnittpunkt der Halbgeraden $[AP$ und $[BQ$ ist der Punkt C.
- Zeichne das Dreieck ABC ein.
- Berechne den Flächeninhalt A^* des Dreiecks ABC.
- Berechne den Abstand d des Punktes C von der Grundseite $[AB]$.

Lösung: (a)



(b) • Das Dreieck AMP ist gleichschenklig; d.h. $\overline{MA} = \overline{MP} = 4\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad \varphi_1 = 68° \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = 180° - 2 \cdot 68° = 44°$.
Ebenso ist das Dreieck MBQ gleichschenklig: $\overline{MB} = \overline{MQ} = 4\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad \psi_1 = 55° \quad \Rightarrow \quad \mu_2 = 180° - 2 \cdot 55° = 70°$.
[**Exkurs:** Auf analoge Weise am Punkt P bzw. Q erhältst du:
$\varphi_3 = 55° = \beta$ und $\psi_3 = 68° = \alpha$].
Am Punkt M gilt also: $\mu_3 = \sphericalangle QMP = 180° - 44° - 70° = 66°$.

• Kosinussatz im Dreieck PMQ:
$\overline{PQ}^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 66° \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \approx 4{,}36\,\text{cm}$.

(c) Das Dreieck PMQ ist ebenfalls gleichschenklig; d.h. $\overline{MQ} = \overline{MP} = 4\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad \varphi_2 = \psi_2 = 57°$.

$A_{\Delta\,PMQ} = \frac{1}{2} \cdot\ 4^2 \cdot \sin 66° \approx 7{,}31\,\text{cm}^2$.

(d) Der Schnittpunkt der Halbgeraden $[AP$ und $[BQ$ ist der Punkt C.

• Siehe Zeichnung.

• Es gilt: $\gamma = 180° - 55° - 68° = 57°$.
Sinussatz im Dreieck ABC:

$$\frac{\sin 55°}{\overline{AC}} = \frac{\sin 57°}{8\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} \approx 7{,}81\,\text{cm}.$$

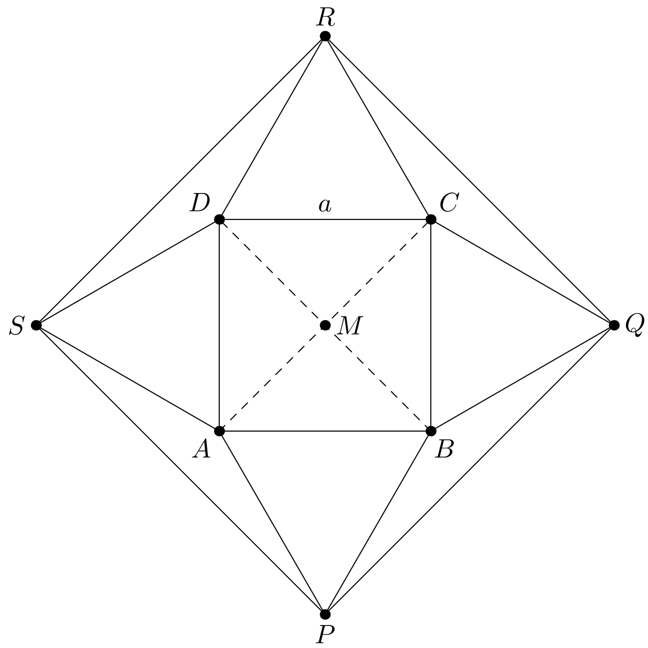
$$\Rightarrow \quad A^*_{\Delta\,ABC} \approx \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7{,}81 \cdot \sin 68°\,\text{cm}^2 \approx 28{,}97\,\text{cm}^2.$$

• Siehe Zeichnung: Der gesuchte Abstand d ist die Länge der Dreieckshöhe $[CF]$.
Für den Flächeninhalt A^* des Dreiecks ABC gilt:

$$A^* = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d.$$

$$\Rightarrow \quad 28{,}97\,\text{cm}^2 \approx \frac{1}{2} \cdot 8\,\text{cm} \cdot d \quad \Rightarrow \quad d \approx 7{,}24\,\text{cm}.$$

27.



Das Viereck $PQRS$ ist dadurch entstanden, dass man über den vier Seiten des Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a jeweils gleichseitige Dreiecke errichtet hat.

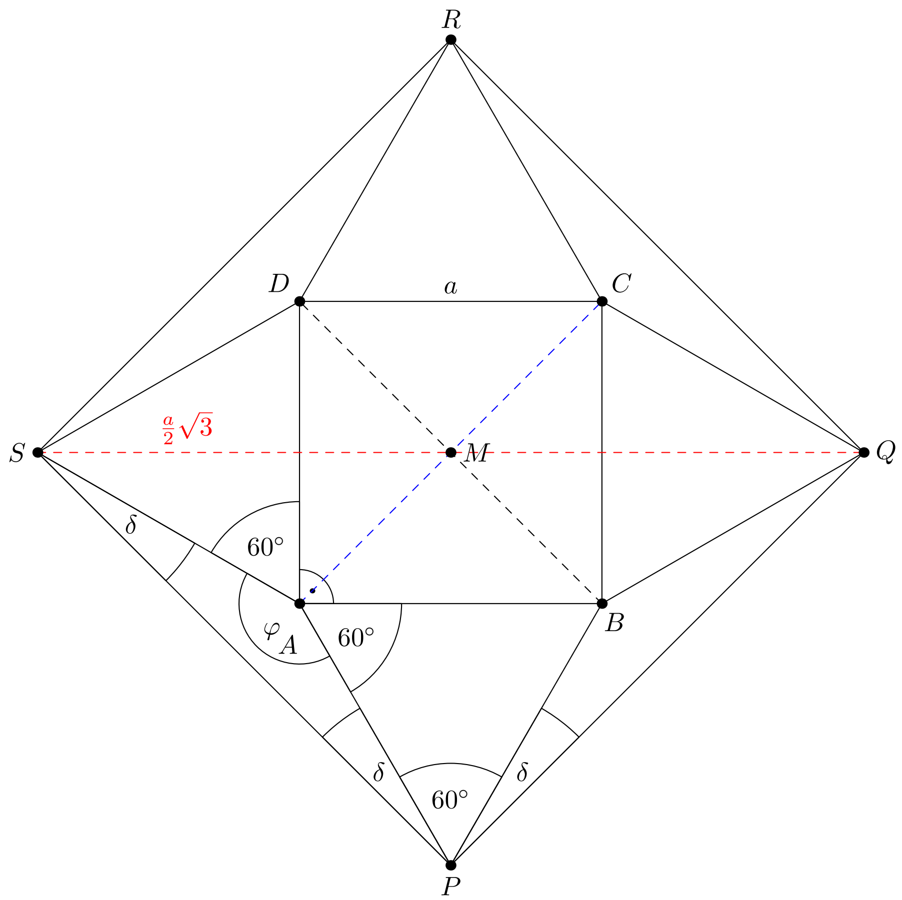
(a) Zeichne die Fgur für $a = 4\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat.
Hinweis: Zeige, dass z.B. $\sphericalangle APS = 15°$ gilt.

(c) Zeige auf verschiedene Weise: Für den Flächeninhalt A des Vierecks $PQRS$ gilt:
$$A_{PQRS} = a^2(2+\sqrt{3})$$
.

(d) Berechne den prozentualen Flächenanteil des Quadrates $ABCD$ am Viereck $PQRS$.

Lösung: (a)



(b) Die vier Dreiecke SPA, PQB, QRC und RSD sind aus Symmetriegründen kongruent. Also handelt es sich bei dem Viereck $PQRS$ mindestens um eine Raute.
Am Punkt A gilt: $\varphi = 360° - 90° - 2 \cdot 60° = 150°$.
Aus Symmetriegründen sind die vier Dreiecke SPA, PQB, QRC und RSD gleichschenklig.
$\Rightarrow \quad \delta = (180° - 150°) : 2 = 15°$.
Dann siehst du z.B. am Punkt P: $\sphericalangle QPS = 2 \cdot 15° + 60° = 90°$. Also ist die Raute sogar ein Quadrat.

(c) **1. Möglichkeit:** Die Summe aller Teilflächen
$A_{PQRS} = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 150° = a^2 + a^2\sqrt{3} + a^2 = a^2(2 + \sqrt{3})$.

2. Möglichkeit: Alle Quadrate sind zueinander ähnlich
Wenn du das kleine Quadrat $ABCD$ mit einem Faktor k streckst, erhältst du das große Quadrat. (Erst eine anschließende Drehung des gestreckten Quadrates um 45° brächte dieses Zwischenbild zur Deckung mit dem großen Quadrat $PQRS$. Aber das spielt bei der Ermittlung des Flächeninhaltes des großen Quadrates $PQRS$ keine Rolle, weil ja die Drehung einer Fläche deren Inhalt unverändert lässt.)

Den Streckungsfaktor k ermittelst du über die Diagonalenlängen:. Es gilt z.B.: $k =$

$$\frac{\overline{SQ}}{\overline{AC}}\,.$$

$$\overline{SQ} = 2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} + a = a \cdot (\sqrt{3}+1) \quad \text{und} \quad \overline{AC} = a\sqrt{2}\,.$$

Dann gilt: $k = \dfrac{a \cdot (\sqrt{3}+1)}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}\,.$

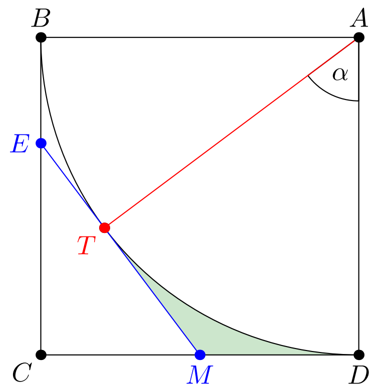
Weiter folgt:

$$A_{PQRS} = k^2 \cdot A_{ABCD} = \left[\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}\right]^2 \cdot a^2 = \frac{2(3+2\sqrt{3}+1)}{4} \cdot a^2\,.$$

$\Rightarrow \quad A_{PQRS} = (2+\sqrt{3}) \cdot a^2\,.$

(d) $\dfrac{A_{ABCD}}{A_{PQRS}} = \dfrac{a^2}{(2+\sqrt{3}) \cdot a^2} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} \approx 0,2679 = 26,79\%\,.$

28.



Dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 6\,\text{cm}$ ist ein Viertelkreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius a einbeschreiben worden. Der Mittelpunkt der Seite $[CD]$ ist M.
Weiter gilt: $\overline{BE} = 2\,\text{cm}$.
Hinweis: Alle Rechenergebnisse sind auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne das Quadrat $ABCD$, den Viertelkreis und die Strecke $[EM]$.

(b)
- Zeige durch Rechnung: $\overline{EM} = 5\,\text{cm}$.
- Begründe: Die Strecke $[ME]$ berührt den Kreisbogen in einem Punkt T.
  Tipp: Wenn der Punkt T Berührpunkt sein soll, dann müssen gleichzeitig die beiden Vierecke $MDAT$ und $BETA$ besondere Vierecke sein.
- Zeichne die Strecke $[AT]$ ein.

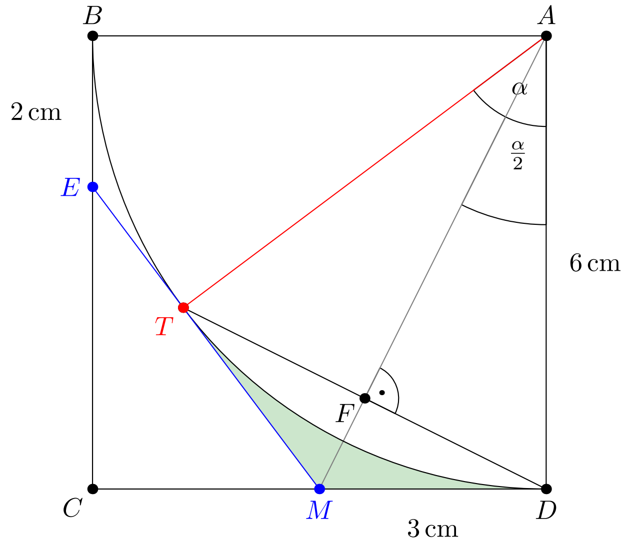
(c) Berechne das Maß α des Winkels TAD.

[Teilergebnis: $\frac{\alpha}{2} \approx 26{,}57°$]

- Zeichne den Diagonalenschnittpunkt F des Vierecks $MDAT$ ein.
- Berechne den Inhalt der in der Eingangsfigur getönten Fläche.

[Teilergebnis: $\overline{FD} \approx 2{,}68\,\text{cm}$]

Lösung: (a) Die Zeichnung enthält bereits alle Elemente.



(b)
- Im rechtwinkligen Dreieck CME gilt:
  $\overline{EM}^2 = [3^2 + (6-2)^2]\,\text{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{EM} = 5\,\text{cm}$.
- Wenn der Punkt T der Berührpunkt sein soll, dann müssen die beiden Vierecke $MDAT$ und $BETA$ achsensymmetrische Drachenvierecke sein.
  Dann muss aber $\overline{MD} = \overline{MT} = 3\,\text{cm}$ und $\overline{EB} = \overline{ET} = 2\,\text{cm}$ gelten.
  Dann muss also $\overline{MT} + \overline{ET} = 5\,\text{cm}$ gelten. Das hast du aber vorhin gerade mit dem Satz des PYTHAGORAS gezeigt. Also gibt es den Punkt T als Berührpunkt.
- Siehe Zeichnung.

(c) Im Dreieck MDA gilt:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{3\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} \approx 26{,}57° \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 53{,}14°\,.$$

- Siehe Zeichnung.
- Im Dreieck FDA gilt:

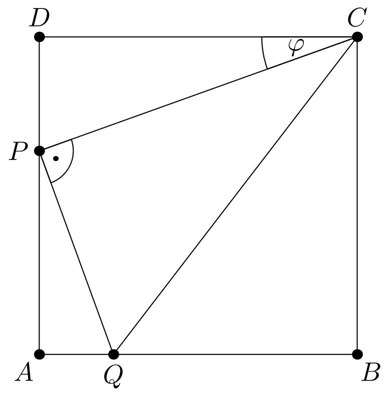
$$\sin 26{,}57° \approx \frac{\overline{FD}}{6\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{FD} \approx 2{,}68\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{TD} \approx 5{,}36\,\text{cm}\,.$$

$$\Delta MDA: \quad \overline{AM}^2 = (6^2 + 3^2)\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AM} \approx 6{,}71\,\text{cm}\,.$$

$$A_{\text{getönt}} = A_{MDAT} - A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{TD} - A_{\text{Sektor}} \,.$$

$$A_{\text{getönt}} \approx \frac{1}{2} \cdot 6{,}71 \cdot 5{,}36\,\text{cm}^2 - \frac{53{,}14°}{360°} \cdot 6^2\pi\,\text{cm}^2 \approx 1{,}29\,\text{cm}^2$$

29.



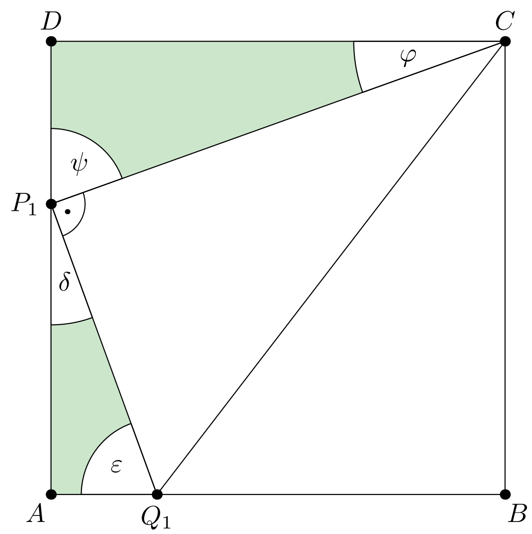
Dem Quadrat $ABCD$ ist das rechtwinklige Dreieck QCP einbeschrieben worden. Dabei gilt: $\sphericalangle\, DCP = \varphi$.
Hinweis: Gegebenenfalls sind alle Ergebnissse auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne das Quadrat für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und für $\varphi = 20°$ das Dreieck QCP .

(b) Begründe: Die Dreiecke AQP und PCD sind zueinander ähnlich.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks QCP .

Lösung: (a)



(b) Im rechtwinkligen Dreieck PCD gilt: $\varphi + \psi = 90°$ (*) .
Am Punkt P gilt: $\psi + 90° + \delta = 180°$ also: $\delta + \psi = 90°$, und mit (*) folgt: $\varphi = \delta$ (**) .
Im rechtwinkligen Dreieck AQP gilt: $\delta + \varepsilon = 90°$. Mit (*) und (**) folgt: $\psi = \varepsilon$.
Damit stimmen die Dreiecke AQP und QCP paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Also sind sie zueinander ähnlich.

(c) $\Delta\, PCD: \quad \cos 20° = \dfrac{6\,\text{cm}}{\overline{PC}} \quad \Rightarrow \quad \overline{PC} \approx 6,39\,\text{cm}$.

Und weiter (z.B.): $\overline{PD}^2 = \left(6,39^2 - 6^2\right)\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PD} \approx 2,20\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad \overline{AP} \approx 6\,\text{cm} - 2,20\,\text{cm} = 3,80\,\text{cm}$.

$\Delta\, AQP: \quad \cos 20° \approx \dfrac{3,80\,\text{cm}}{\overline{PQ}} \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \approx 4,04\,\text{cm}$.

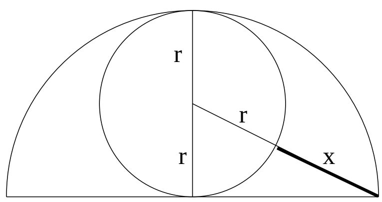
$A_{\Delta\, QCP} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PQ} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 6,39\,\text{cm} \cdot 4,04\,\text{cm} \approx 12,91\,\text{cm}^2$.

9. Berechnungen am Kreis

1. Der Minutenzeiger einer Kirchturmuhr ist $0,95\,\text{m}$ und der Stundenzeiger $0,45\,\text{m}$ lang.
   (a) Berechne den Weg, den die Spitze des Minutenzeigers in 3 Stunden zurücklegt.
   (b) Berechne den Weg, den die Spitze des Stundenzeigers in der selben Zeit zurücklegt.

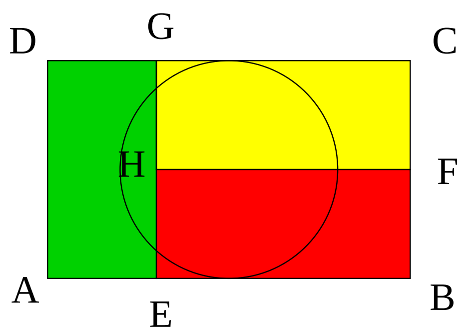
Lösung: (a) ca. $17,91\,\text{m}$
(b) ca. $0,71\,\text{m}$

2. Berechne auf Grund der Skizze die Länge der Strecke x in Abhängigkeit vom Radius r.



Lösung: $x = 1,24\,r$

3.



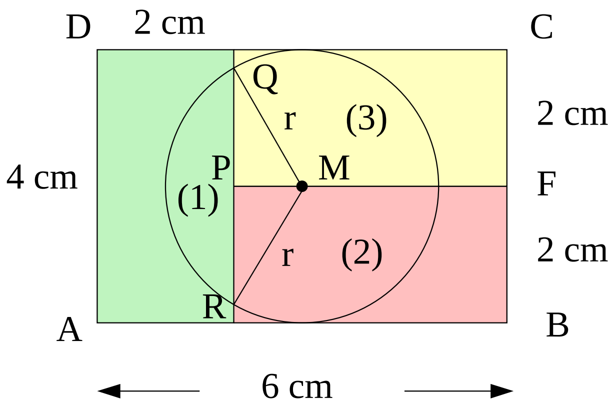
Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet. Alle drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Außerdem gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.
Zusätzlich ist noch ein Kreis eingezeichnet, dessen Mittelpunkt M der Mittelpunkt des Rechtecks $ABCD$ ist.

(a) Begründe: Es muss $\overline{AD} = 4\,\text{cm}$ gelten. Zeichne dann die obige Figur.

(b) Berechne jeweils den Anteil der drei Rechtecke im Inneren an der Kreisfläche in Prozent. Runde auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung:

(a) Weil alle Rechtecke im Inneren kongruent sind, muss $\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{AE} = 2\,\text{cm} =$ Kreisradius r gelten. $\Rightarrow$ $\overline{BC} = \overline{AD} = 4\,\text{cm}$.



(b) Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt $A(1)$ des Kreissegmentes (1): (Der Flächeninhalt des Kreises wird später mit $A_\odot$ abgekürzt.)
Wegen $\overline{PM} = 1\,\text{cm}$ und $\overline{MQ} = 2\,\text{cm}$ ist das Dreieck PMQ ein halbes gleichseitiges Dreieck. $\Rightarrow$ $\sphericalangle QMR = 120°$
Das Dreieck RMQ ist dann genauso groß wie ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von 2 cm.

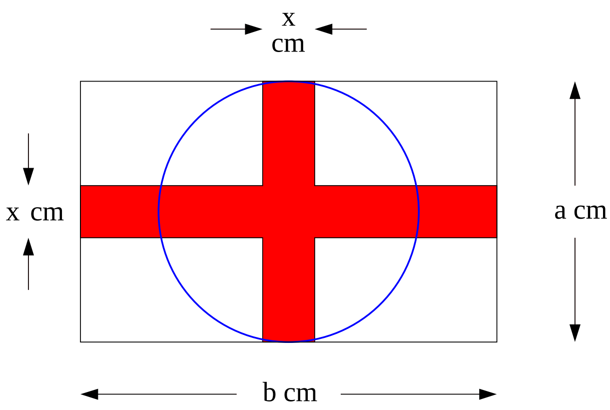
$$A(1) = \left(\frac{120°}{360°} \cdot 2^2\pi - \frac{2^2}{4}\sqrt{3}\right)\,\text{cm}^2 \approx 2,46\,\text{cm}^2$$

$A_\odot = 2^2\pi\,\text{cm}^2 \approx 12,57\,\text{cm}^2$

$$\frac{A(1)}{A_\odot} \approx \frac{2,46\,\text{cm}^2}{12,57\,\text{cm}^2} \approx 19,57\%$$

Und weiter gilt: $\frac{A(2)}{A_\odot} = \frac{A(3)}{A_\odot} \approx (100\% - 19,57\%) : 2 \approx 40,22\%$

4. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England. Zusätzlich wurde noch der Kreis eingezeichnet, dessen Mittelpunkt im „Flaggenmittelpunkt“ liegt.



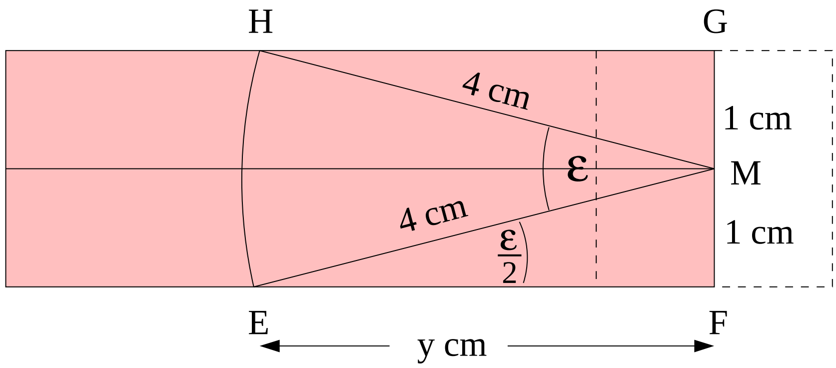
Hinweis: Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne die Figur für $a = 8$, $b = 12$ und $x = 2$.

(b) Wie viel Prozent der Kreuzfläche liegen außerhalb der Kreislinie?

Lösung: (a) –

(b) Wir betrachten die Hälfte des waagrechten Balkens:



$\Delta EFM : y^2 = 4^2 - 1^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{15}$
$A(EFM) + A(HMG) = y \cdot 1\,\text{cm}^2 = \sqrt{15}\,\text{cm}^2 \approx 3,87\,\text{cm}^2$
$\Delta EFM : \sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 28,96°$

$$A(Sektor) = \frac{28,96°}{360°} \cdot 4^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 4,04\,\text{cm}^2$$

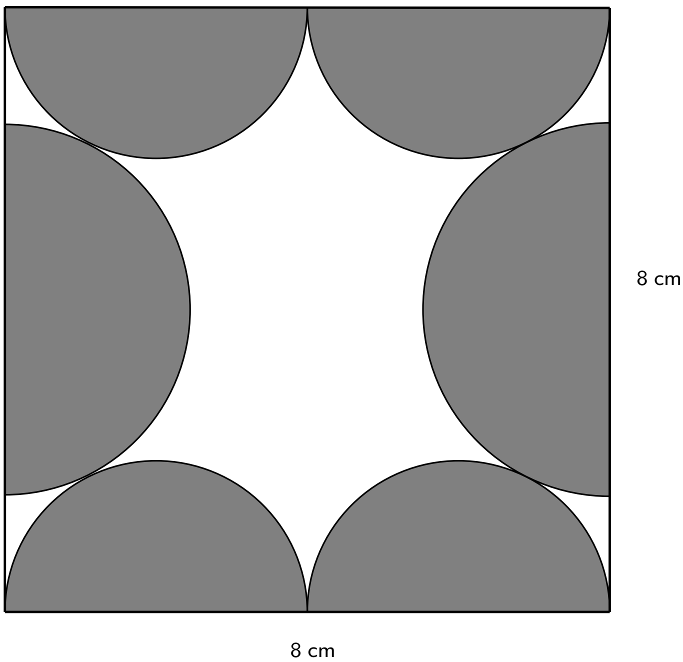
Der Teil des Kreuzes, der waagrecht links herausragt:
$2\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} - (4,04 + 3,87)\,\text{cm}^2 = 4,09\,\text{cm}^2$
Insgesamt ragen $8,18\,\text{cm}^2$ des waagrechten Kreuzbalkens aus dem Kreis heraus.

Der Teil des Kreuzes, der senkrecht (z.B. oben) herausragt:
$2\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} - (4,04 + 3,87)\,\text{cm}^2 = 0,09\,\text{cm}^2$
Insgesamt ragen $0,18\,\text{cm}^2$ des senkrechten Kreuzbalkens aus dem Kreis heraus.

Also ragen (gerundet) $8,36\,\text{cm}^2$ des Kreuzes aus dem Kreis heraus.

Eine Möglichkeit, die Fläche des Kreuzes zu berechnen, besteht darin, dass du die Flächeninhalte beiden überlappenden Rechtecke, die das Kreuz ergeben, berechnest. Danach musst du jedoch am Ende den Inhalt des Quadrates im Zentrum mit der Seitenlänge $2\,\text{cm}$ einmal abziehen, weil dieses Quadrat ja **beiden** besagten Rechtecken angehört:
$A(Kreuz) = 2 \cdot 8\,\text{cm}^2 + 2 \cdot 12\,\text{cm}^2 = 36\,\text{cm}^2$
Prozentualer Anteil der herausragenden Fläche:

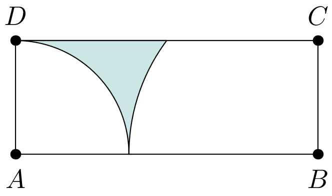
$$\frac{8,36}{36} \approx 23,22\%\,.$$

5. 

Gegeben ist das Quadrat mit $8\,\text{cm}$ Seitenlänge und die sechs Halbkreise. Berechne den Flächeninhalt der hellen Fläche.

Lösung: Der Flächeninhalt beträgt $44,33\,\text{cm}^2$.

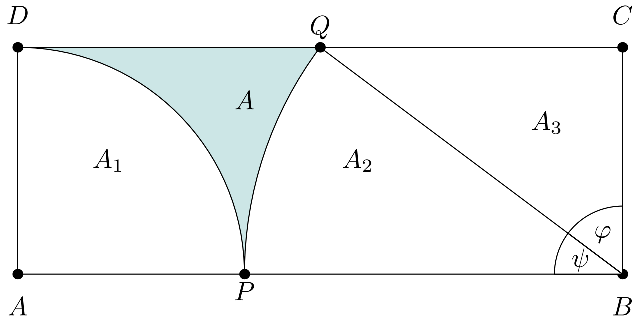
6. Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 3\,\text{cm}$. Die Punkte A und B sind Kreismittelpunkte.



(a) Zeichne die skizzierte Figur gemäß den obigen Angaben.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

Lösung: (a) Zeichne zuerst den Kreisbogen um den Punkt A mit dem Radius 3 cm. Dadurch erhältst du den Punkt P.
Zeichne dann den zweiten Kreisbogen um den Punkt B mit dem Radius $\overline{BP}$. So erhältst du den Punkt Q.

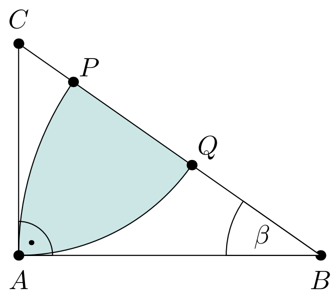


(b) Neben dem Kreissektor APD mit dem Flächeninhalt A_1 erzeugt die Hilfslinie $[BQ]$ den Kreissektor BQP mit dem Flächeninhalt A_2 und dazu das Dreieck QBC mit dem Flächeninhalt A_3.
Es muss gelten: $\overline{AP} = 3\,\text{cm}$ und damit $\overline{BP} = \overline{BQ} = 5\,\text{cm}$.
$A_1 = \dfrac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 7{,}07\,\text{cm}^2$

$\Delta BCQ : \cos\varphi = \dfrac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 53{,}13^\circ \quad \Rightarrow \quad \psi \approx 36{,}87^\circ$
$A_2 = \dfrac{36{,}87^\circ}{360^\circ} \cdot 5^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 8{,}04\,\text{cm}^2$

Z.B. PYTHAGORAS im ΔQBC: $\overline{QC}^{\,2} + 3^2\,\text{cm}^2 = 5^2\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \overline{QC} = 4\,\text{cm}$.
$A_3 = \dfrac{1}{2} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 6\,\text{cm}^2$
Das Rechteck $ABCD$ hat einen Flächeninhalt von $24\,\text{cm}^2$.
Für den gesuchten Flächeninhalt A gilt dann: $A = A_{ABCD} - A_1 - A_2 - A_3$
$A \approx (24 - 7{,}07 - 8{,}04 - 6)\,\text{cm}^2 \quad A \approx 2{,}89\,\text{cm}^2$.

7.



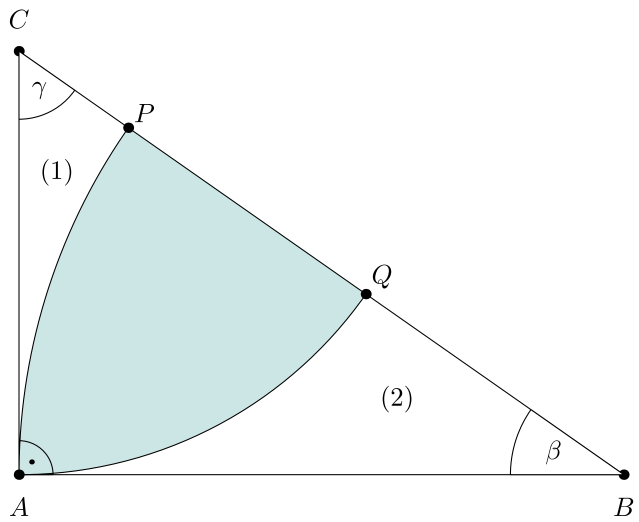
Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 35°$. Die Punkte B und C sind Kreismittelpunkte.

(a) Zeichne die Figur gemäß den obigen Angaben.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

Lösung: (a)
- Zeichne die Strecke $[AB]$.
- Trage den rechten Winkel in A, und den Winkel mit dem Maß $35°$ in B an.
- Der Schnittpunkt der freien Schenkel der beiden Winkel ist C.

(b)



Es gilt: $\gamma = 90° - 35° = 55°$ und $\tan 35° = \dfrac{\overline{CA}}{8\,\text{cm}}$.
$\Rightarrow \quad \overline{CA} \approx 5,60\,\text{cm}$.
Für den Inhalt A der grauen Fläche AQP ergibt sich:
$A_{AQP} = A_{\Delta ABC} - A_{(1)} - A_{(2)}$. (*)
Weiter gilt: $A_{(1)} = A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(35°)}$ und $A_{(2)} = A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(55°)}$
Mit (*) ergibt sich:
$A_{\Delta ABC} - \big(A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(35°)}\big) - \big(A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(55°)}\big)$
$A_{AQP} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta ABC} + A_{Sektor(35°)} - A_{\Delta ABC} + A_{Sektor(55°)}$
$A_{AQP} = A_{Sektor(35°)} + A_{Sektor(55°)} - A_{\Delta ABC}$ (**)
Hinweise:

- Natürlich kann man auch die Inhalte der Teilflächen $A_{(1)}$ und $A_{(2)}$ gleich ausrechnen und diese dann vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC subtrahieren.
- Wie könntest du die obige Gleichung (**) geometrisch deuten?

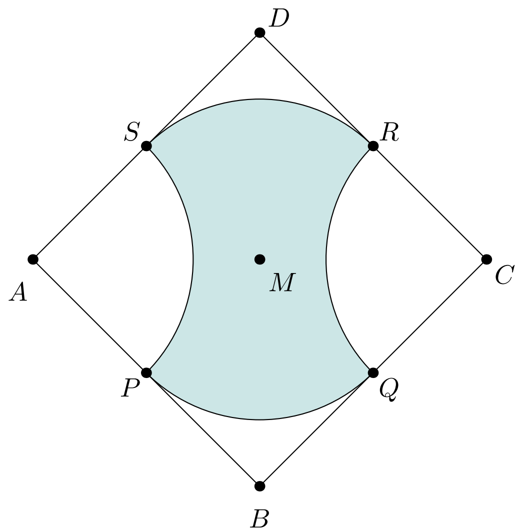
$$A_{Sektor(35^\circ)} = \frac{35^\circ}{360^\circ} \cdot 8^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 19,55\,\text{cm}^2$$

$$A_{Sektor(55^\circ)} \approx \frac{55^\circ}{360^\circ} \cdot 5,60^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 15,05\,\text{cm}^2$$

$$A_{ABC} \approx \frac{1}{2} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 5,60\,\text{cm} = 22,40\,\text{cm}^2$$

Schließlich ergibt sich: $A_{AQP} \approx (19,55 + 15,05 - 22,40)\,\text{cm}^2$
$\Rightarrow \quad A_{AQP} \approx 12,20\,\text{cm}^2$

8.



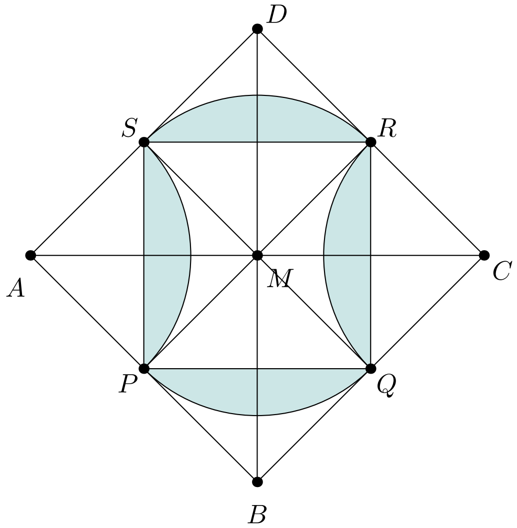
Der Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$ ist der Punkt M. Die Punkte P, Q, R und S sind die Mittelpunkte der jeweiligen Quadratseiten.
Die Mittelpunkte der vier Kreisbögen, welche die grau getönte Figur im Inneren des Quadrates $ABCD$ begrenzen, sind die Punkte A, C und M.

(a) Zeichne die Figur für die Diagonalenlänge $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Fritz behauptet: „Der Inhalt der grauen Fläche ist halb so groß wie der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$.“
Maria meint: „Der Inhalt der grauen Fläche kleiner als die Hälfte des Quadrates. Das sieht man doch!“
Wer hat Recht? Begründe deine Antwort.

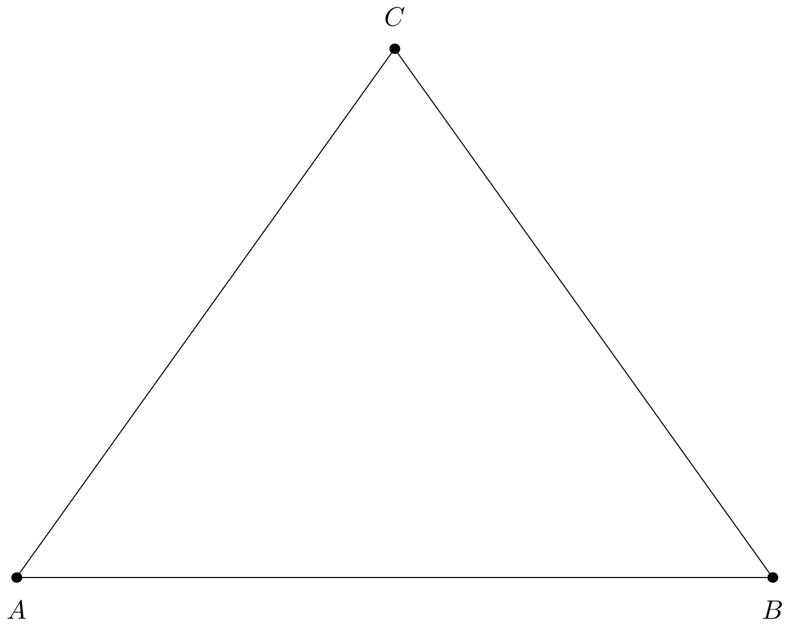
Lösung: (a)
- In jedem Quadrat stehen die beiden Diagonalen aufeinander senkrecht und sie halbieren sich.
  Damit kann man das Quadrat $ABCD$ zeichnen.
- Der Punkt M erzeugt die beiden Kreisbögen oben und unten; die Punkte A und C erzeugen die beiden Kreisbögen links und rechts.

(b)



Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat. Mit Hilfe seiner Diagonalen erkennst du, dass das Quadrat $PQRS$ halb so groß wie das Quadrat $ABCD$ ist. Die vier grauen Kreissegmente sind alle kongruent, da sie von kongruenten Kreissektoren mit gleichem Radius und gleichem Öffnungswinkel (90°) stammen.
Zwei dieser Segmente wurden links und rechts aus dem Quadrat $PQRS$ herausgeschnitten, zwei wurden oben und unten an dieses Quadrat angefügt. Somit hat die grau eingefärbte Figur in der Aufgabe den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat $PQRS$; die Figur ist also halb so groß wie das Quadrat $ABCD$. Fritz hat Recht.

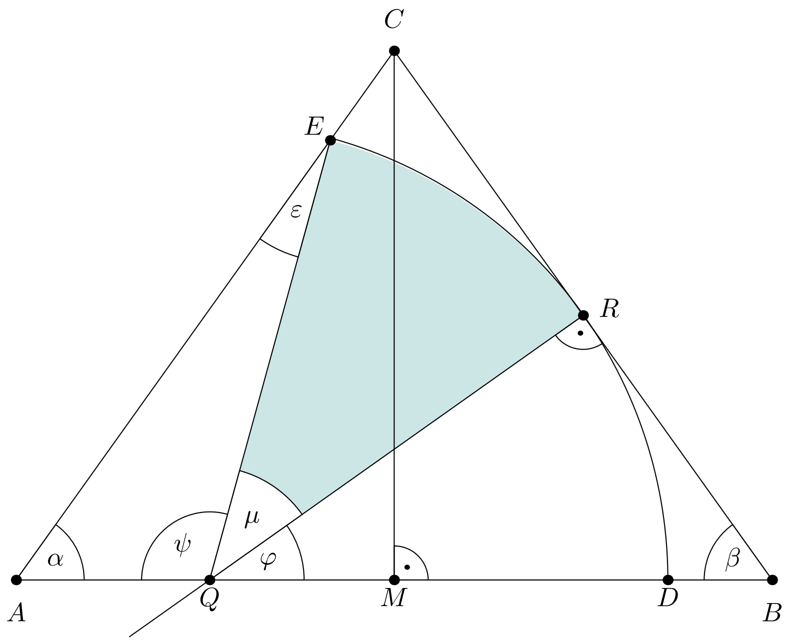
9. Für das dargestellte gleichschenklige Dreieck ABC gilt:
Die Basislänge $\overline{AB}$ beträgt 10 cm. Die Höhe auf die Basis ist 7 cm lang.
Der Mittelpunkt der Basis $[AB]$ ist M und R ist der Mittelpunkt der Seite $[BC]$.
In dieses Dreieck ist ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt Q auf der Strecke $[AB]$ so einbeschrieben, dass er Seite $[BC]$ im Punkt R berührt.
Der eine Endpunkt D dieses Kreisbogens liegt auf $[AB]$, sein anderer Endpunkt E liegt auf $[AC]$.



(a) Ergänze die Zeichnung mit den obigen Angaben.

(b) Berechne den Flächeninhalt des Kreissektors QRE.

Lösung: (a) Die Senkrechte zur Strecke $[BC]$ durch den Punkt R schneidet die Strecke $[AB]$ im Kreismittelpunkt Q.



(b) ΔBCM:
$\tan\beta = \frac{7}{5} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 54,46^\circ \quad$ und $\varphi = 90^\circ - \beta \approx 35,54^\circ$
nur Maßzahlen: $\overline{BC}^2 = 7^2 + 5^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} \approx 8,60\,\mathrm{cm}$
$\Rightarrow \overline{BR} \approx 4,30\,\mathrm{cm}$
ΔQBR:

$\cos 54,46° \approx \dfrac{4,30\,\text{cm}}{\overline{QB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{QB} \approx 7,40\,\text{cm}$

$\tan 54,46° \approx \dfrac{\overline{QR}}{4,30\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{QR} \approx 6,02\,\text{cm}$

$\overline{AQ} \approx (10 - 7,40)\,\text{cm} \quad \overline{AQ} \approx 2,60\,\text{cm}$

$\overline{QE} = \overline{QR} \approx 6,02\,\text{cm}$ und $\alpha = \beta \approx 54,46°$

ΔAQE:

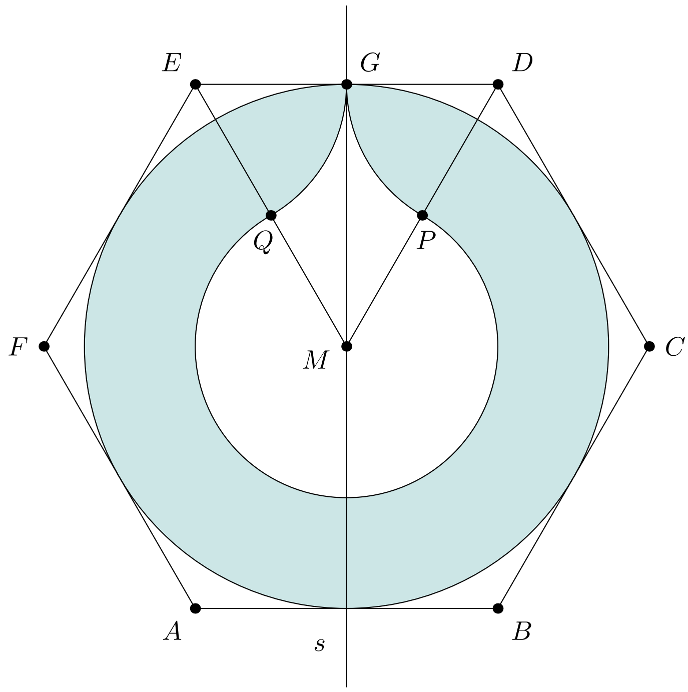
$\dfrac{\sin\varepsilon}{2,60} \approx \dfrac{\sin 54,46°}{6,02} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 20,58°$

$\psi \approx 180° - 54,46° - 20,58° \quad \psi \approx 104,96°$

$\mu \approx 180° - 104,96° - 35,54° \quad \mu \approx 39,50°$

$A_{Sektor\,QRE} \approx \dfrac{39,5°}{360°} \cdot 6,02^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad A_{Sektor\,QRE} \approx 15,91\,\text{cm}^2.$

10. Das regelmäßige Sechseck $ABCDEF$ besitzt den Mittelpunkt M und die Symmetrieachse s.
Der Mittelpunkt des Inkreises dieses regelmäßigen Sechsecks ist M. D und E sind die Mittelpunkte der Kreisbögen, die sich in G berühren.



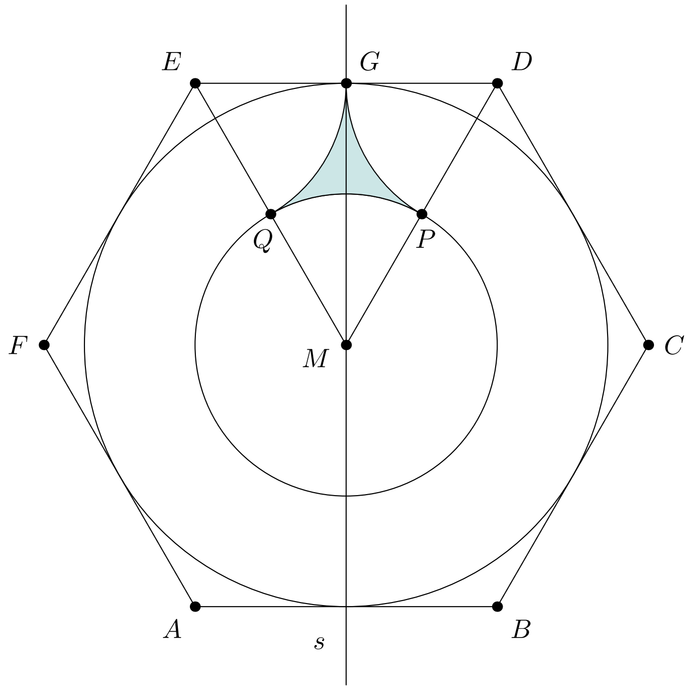
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Berechne für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ den Flächeninhalt des grau eingefärbten Ringes.

Lösung: (a) Am einfachsten erhältst du ein regelmäßiges Sechseck mit einer Seitenlänge von 4 cm, indem du auf einer Kreislinie k den Radius von 4 cm sechsmal abträgst. Damit dieses Sechseck aber mit zwei gegenüber liegenden Seiten (hier: $[ED]$ und $[AB]$) waagrecht

liegt, zeichnest du erst die Symmetrieachse s ein und dann wieder durch den Punkt M eine zweite Symmetrieachse, die auf s senkrecht steht. Diese schneidet die Kreislinie k in den Punkten F und C.
Zwei weitere Kreise Radius von 4 cm um F und C schneiden die Kreislinie k in den Punkten E und A bzw. B und D.

(b)



Der direkteste Weg der Flächenberechnung führt über den Kreisbogen PQ, so dass ein geschlossener Kreisring entsteht, dem lediglich noch das (grau eingefärbte) Kreisbogendreieck QPG entnommen werden muss.
Jedes regelmäßige Sechseck lässt sich in 6 kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegen.
Der große Radius R des Ringes ist so lang wie eine Höhe $[MG]$ des gleichseitigen Dreiecks MDE: $R = \frac{4}{2}\sqrt{3}\,\text{cm} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.
Der kleine Radius r des Ringes ist halb so lang wie die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks MDE: $r = 2\,\text{cm}$.
Damit ergibt sich für den Flächeninhalt A_{Ring} des geschlossenen Kreisrings:
$A_{Ring} = \left[(2\sqrt{3})^2 - 2^2 \cdot \pi\right]\ \text{cm}^2$
Der Flächeninhalt $A_{Kreisdreieck}$ des Kreisbogendreiecks QPG bleibt übrig, wenn man aus dem gleichseitigen Dreieck MDE die drei kongruenten Sektoren EQG, MPQ und DGP mit einem Mittelpunktswinkel von jeweils 60° entfernt:

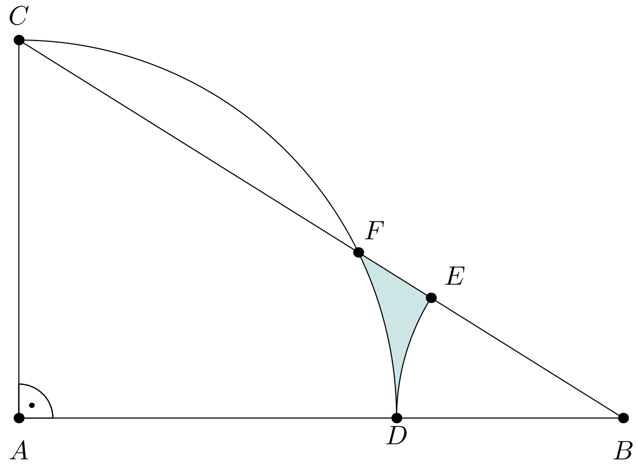
$$A_{Kreisdreieck} = \left(\frac{4^2}{4} \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi\right)\ \text{cm}^2 = \left(4\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{cm}^2$$

Damit ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt:

$$A = \left(8\pi - 4\sqrt{3} + \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{cm}^2 = \frac{17\pi - 8\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 \approx 19{,}78\,\text{cm}^2$$

Hinweis:
Eine weitere Möglichkeit besteht darin, den Flächeninhalt des offenen Kreisrings außerhalb des Dreiecks MDE zu berechnen und dann die beiden „Enden“, die im gleichseitigen Dreieck MDE liegen, anzufügen. Doch dies ist offensichtlich wesentlich mühsamer auszurechnen.

11.



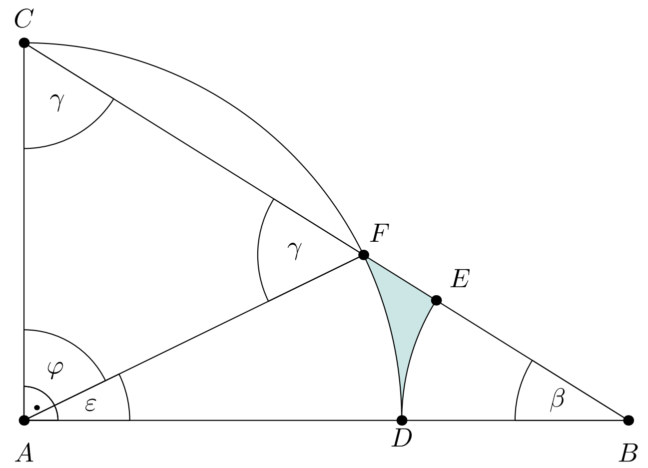
Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 5\,\text{cm}$. Die Punkte A und B sind Kreismittelpunkte.

(a) Zeichne die Figur gemäß den obigen Angaben.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

Lösung: (a)
- Zeichne das Dreieck ABC.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{AC} = 5\,\text{cm}$ schneidet die Hypotenuse $[BC]$ im Punkt F und die Kathete $[AB]$ im Punkt D.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BD} = 3\,\text{cm}$ schneidet die Hypotenuse $[BC]$ im Punkt E.

(b) Die Strecke $[AF]$ zerlegt das Dreieck ABC in die beiden Teildreiecke AFC und ABF. Das Dreieck AFC ist gleichschenklig.



Im Dreieck ABC gilt: $\tan\gamma = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 57{,}99°$.
$\Rightarrow \quad \beta = 90° - \gamma \approx 32{,}01° \Rightarrow \quad \varphi = 180° - 2\cdot\gamma \approx 64{,}02°$
$\Rightarrow \quad \varepsilon = 90° - \varphi \approx 25{,}98°$.

Damit kann man den Flächeninhalt des Dreiecks ABF und den der beiden Kreissektoren ADF und BED berechnen:
$A_{\Delta ABF} \approx \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot \sin 25{,}98°\,\mathrm{cm}^2 \approx 8{,}76\,\mathrm{cm}^2$

$$A_{Sektor\,ADF} \approx \frac{25{,}98°}{360°}\cdot 5^2\cdot\pi \approx 5{,}67\,\mathrm{cm}^2$$

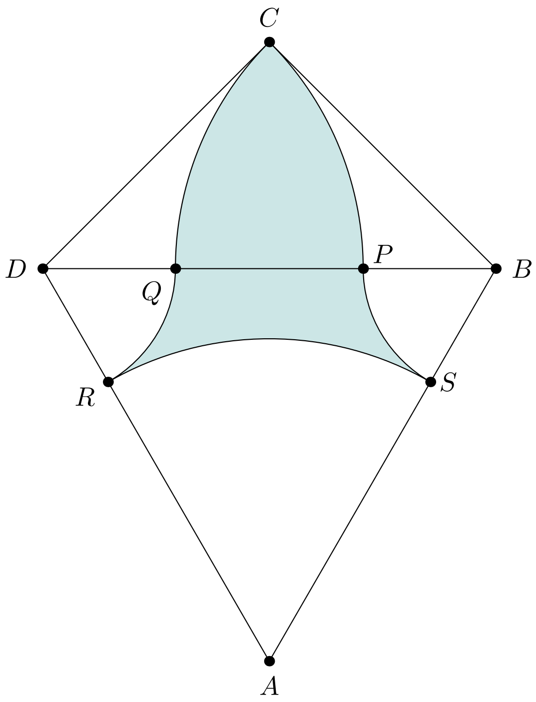
$$A_{Sektor\,BED} \approx \frac{32{,}01°}{360°}\cdot 3^2\cdot\pi \approx 2{,}51\,\mathrm{cm}^2$$

Für den Inhalt A des grauen Flächenstückes ergibt sich damit:
$A \approx 8{,}76\,\mathrm{cm}^2 - (5{,}67 + 2{,}51)\,\mathrm{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad A \approx 0{,}58\,\mathrm{cm}^2$

Anmerkungen:

- Den Flächeninhalt des Dreiecks ABF kannst du auch aus der Differenz der Flächeninhalte der beiden Dreiecke ABC und AFC ermitteln.
- Zur Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ABF gibt es noch andere Möglichkeiten, die aber umständlicher sind.

12.



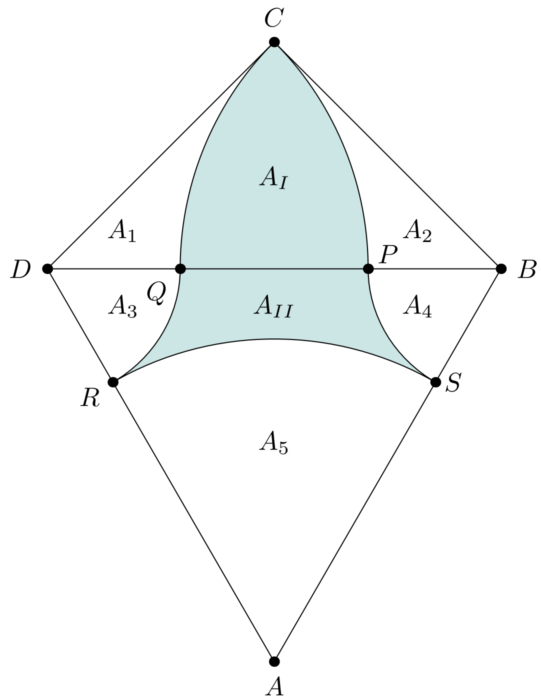
Das Viereck $ABCD$ ist aus einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck und einem gleichseitigen Dreieck zusammengefügt. Die Mittelpunkte der Kreisbögen sind die Punkte B, D und A.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{BD} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

Lösung: (a)
- Zeichne die Dreiecke DBC und ABD.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ schneidet die Seite $[BD]$ im Punkt Q und der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt D und dem Radius $\overline{DC}$ schneidet die Seite $[BD]$ im Punkt P.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt D und dem Radius $\overline{DQ}$ schneidet die Seite $[AD]$ im Punkt R und der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BP}$ schneidet die Seite $[AB]$ im Punkt S.

(b)



$A_1 = A_{\Delta DBC} - A_{Sektor BCQ} = A_2$
$A_I = A_{\Delta DBC} - (A_1 + A_2) = A_{\Delta DBC} - 2 \cdot (A_{\Delta DBC} - A_{Sektor BCQ})$
$A_I = 2 \cdot A_{Sektor BCQ} - A_{\Delta DBC}$
Wie kannst du dieses Ergebnis geometrisch deuten?
Es wird zunächst nur mit Maßzahlen gerechnet: $\overline{BC} = 3\sqrt{2}$
$A_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$; $\quad A_{Sektor BCQ} = \frac{45°}{360°} \cdot (3\sqrt{2})^2\pi = 2.25\pi$

Also: $A_I = 4.5\pi - 9 \quad \Rightarrow \quad A_I = \left(\frac{9\pi}{2} - 9\right)\,\mathrm{cm}^2 \quad (\approx 5,14\,\mathrm{cm}^2)$
Was spielt sich nun unterhalb der Strecke $[DB]$ ab?
$\overline{DQ} = \overline{BP} = 6 - 3\sqrt{2}$
$A_3 = A_4 = \frac{60°}{360°}(6 - 3\sqrt{2})^2 \cdot \pi = \frac{1}{6}(36 - 36\sqrt{2} + 18) \cdot \pi$
$A_3 = A_4 = (9 - 6\sqrt{2}) \cdot \pi \quad (\approx 1,62\,\mathrm{cm}^2)$
$\overline{AR} = \overline{AS} = 6 - (6 - 3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$
$A_5 = \frac{60°}{360°} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot \pi = \frac{18}{6} \cdot \pi = 3\pi \quad (\approx 9,42\,\mathrm{cm}^2)$

$A_{II} = \frac{6^2}{4}\sqrt{3} - [2 \cdot (9 - 6\sqrt{2})\pi + 3\pi]$
$A_{II} = 9\sqrt{3} - (18\pi - 12\sqrt{2}\pi + 3\pi)$
$A_{II} = 9\sqrt{3} - (21 - 12\sqrt{2})\pi \quad (\approx 2,93\,\mathrm{cm}^2)$

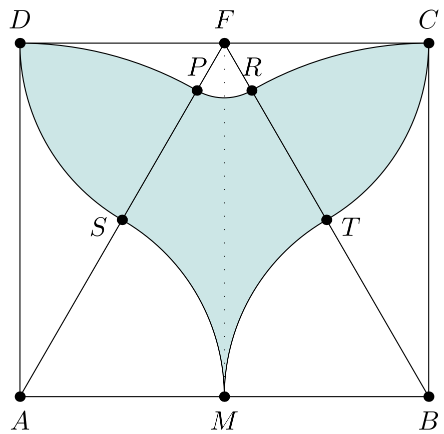
Für die Gesamtfläche A des „Fisches“ ergibt sich:

$$A = A_I + A_{II} = \left[\left(\frac{9\pi}{2} - 9\right) + 9\sqrt{3} - (21 - 12\sqrt{2})\pi\right]\,\mathrm{cm}^2$$

$$A = \left[9(\sqrt{3}-1) - \pi \cdot \left(21 - 12\sqrt{2} - \frac{9}{2}\right)\right]\ \text{cm}^2$$

$$A = \left[9(\sqrt{3}-1) + \frac{3}{2}\pi(8\sqrt{2}-11)\right]\ \text{cm}^2 \quad (\approx 8{,}07\,\text{cm}^2)$$

13.



In das Rechteckeck $ABCD$ ist ein gleichseitiges Dreieck ABF einbeschrieben. Die Mittelpunkte der sieben Kreisbögen sind die Punkte A, B und F.

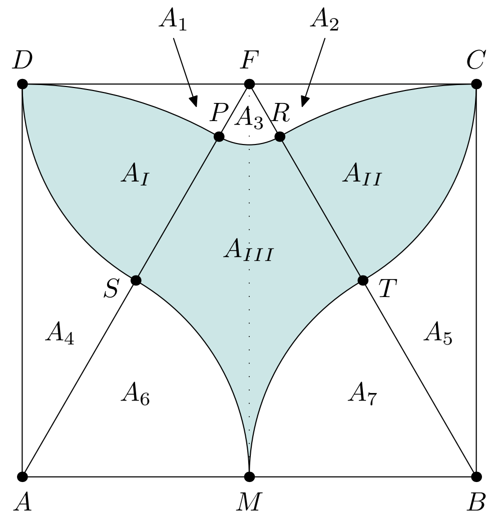
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

Lösung: (a)

- Zeichne das gleichseitige Dreieck ABF. Die Höhe $[FM]$ dieses Dreiecks ist genau so lang wie die Rechtecksseiten $[AD]$ und$[BC]$.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{AD}$ schneidet die Seite $[AF]$ im Punkt P und der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ schneidet die Seite $[BF]$ im Punkt R.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt F und dem Radius $\overline{FP}$ schneidet die Seite $[BF]$ im Punkt R.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt F und dem Radius $\overline{FD} = 3\,\text{cm}$ schneidet die Seite $[AF]$ im Punkt S, wobei ebenfalls $\overline{FS} = 3\,\text{cm}$ gilt.
- Nun musst du noch den Kreisbogen um den Punkt A mit dem Radius $\overline{AS}$ zeichnen. Dieser Kreisbogen trifft auf den Punkt M.
  Weil die Mittelpunkte F und A der beiden Kreisbögen, die sich im Punkt S treffen, zusammen mit dem Punkt S auf einer Geraden liegen, gehen sie ohne Knick ineinander über.
- Die entsprechenden Schritte führen rechts der Symmetrieachse MF vom Punkt C über den Punkt T zum Punkt M.

(b)



Wir rechnen meist nur mit Maßzahlen:

$$A_{ABCD} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \quad (\approx 31,18\,\mathrm{cm}^2)$$

$$A_{\Delta AFD} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCD} = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{3} \quad (\approx 7,79\,\mathrm{cm}^2)$$

$$A_{Sektor APD} = A_{Sektor BCR} = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot (3\sqrt{3})^2\pi = \frac{9}{4}\,\pi \quad (\approx 7,07\,\mathrm{cm}^2)$$

$$A_1 = A_2 = A_{\Delta AFD} - A_{Sektor APD} = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{4}\pi \quad (\approx 0,73\,\mathrm{cm}^2)$$

Weiter gilt: $\overline{FP} = 6 - 3\sqrt{3}\,.$

$$A_3 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot (6 - 3\sqrt{3})^2 \cdot \pi = \frac{36 - 36\sqrt{3} + 27}{6}\pi = \frac{21 - 12\sqrt{3}}{2}\pi$$

$$A_3 = \frac{21}{2}\,\pi - 6\sqrt{3}\pi \quad (\approx 0,34\,\mathrm{cm}^2)$$

$$A_4 = A_5 = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2 \cdot \pi = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\,\pi \quad (\approx 3,08\,\mathrm{cm}^2)$$

$$A_6 = A_7 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2 \cdot \pi = \frac{3}{2}\pi \quad (\approx 4,71\,\mathrm{cm}^2)$$

$$A_I = A_{II} = A_{\Delta AFD} - A_1 - A_4$$

$$A_I = \frac{9}{2}\,\sqrt{3} - \left(\frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{4}\pi\right) - \left(\frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\,\pi\right)$$

$$A_I = A_{II} = \frac{15}{4}\,\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3} \quad (\approx 3,99\,\mathrm{cm}^2)$$

$A_{III} = A_{\Delta ABF} - A_3 - (A_6 + A_7)$, wobei $A_6 = A_7$ gilt.

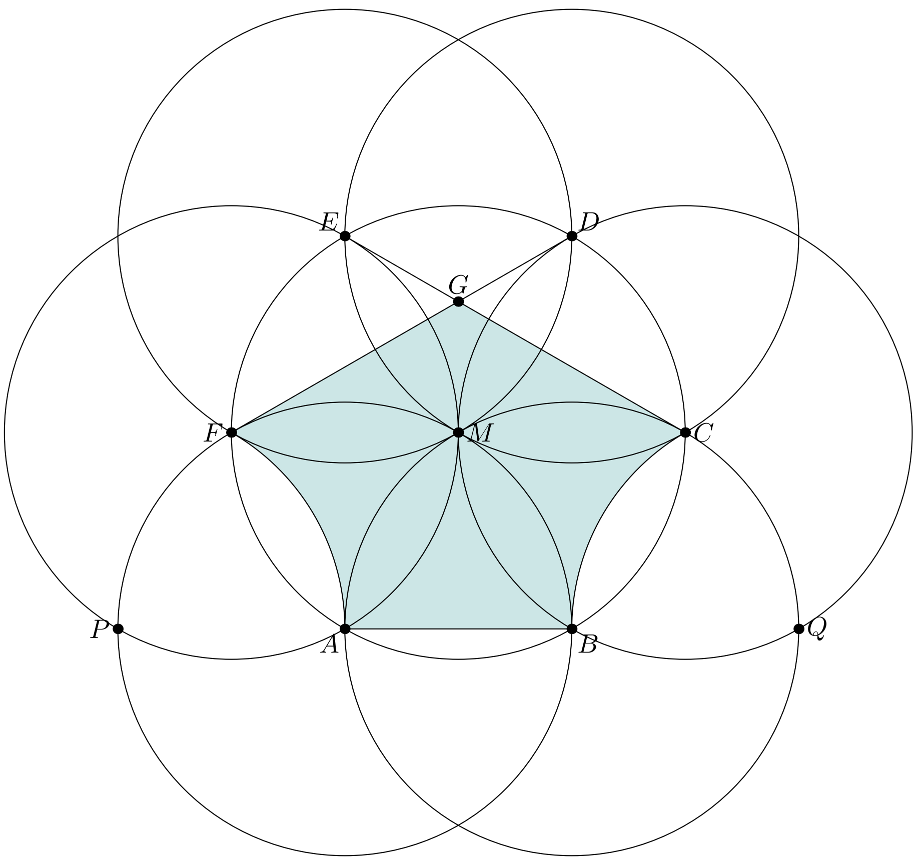
$$A_{III} = 9\sqrt{3} - \left(\frac{21}{2}\,\pi - 6\sqrt{3}\,\pi\right) - 2\cdot\frac{3}{2}\,\pi = 9\sqrt{3} - \frac{27}{2}\,\pi + 6\sqrt{3}\,\pi \quad (\approx 5{,}83\,\mathrm{cm}^2)$$

Damit ergibt sich als Flächeninhalt A der grau getönten Figur:

$$A = 2\cdot A_I + A_{III} = 2\cdot\left(\frac{15}{4}\cdot\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3}\right) + \left(9\sqrt{3} - \frac{27}{2}\,\pi + 6\sqrt{3}\,\pi\right)$$

$$A = 6\pi(\sqrt{3}-1)\,\mathrm{cm}^2 \approx 13{,}80\,\mathrm{cm}^2$$

14. In der Abbildung gilt: $\overline{AB} = 3\,\mathrm{cm}$.
Der Punkt M und die Punkte A, B, C, D, E, und F sind Kreismittelpunkte.
Die Punkte P und Q sind die Mittelpunkte der Kreisbögen AF und CB, die sich in das Innere des Kreises mit dem Mittelpunkt M wölben.

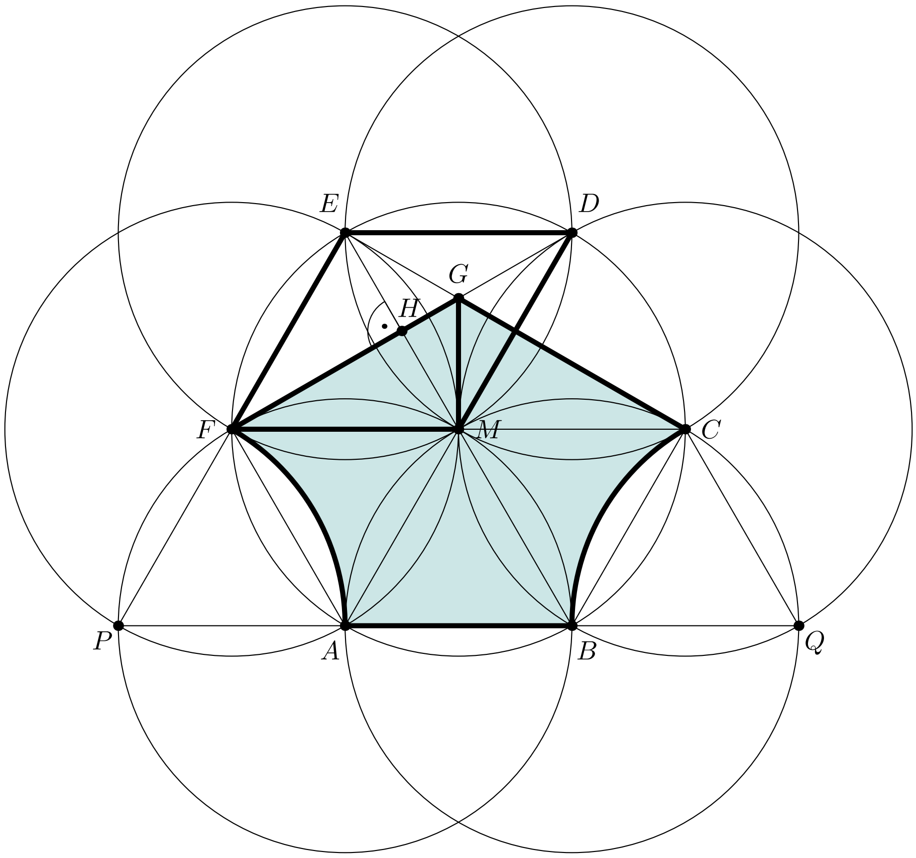


(a) Begründe: Das Sechseck $ABCDEF$ ist regelmäßig.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.
Hinweis: Zeichne ausgehend von Punkt M geeignete Hilfslinien ein.

Lösung: (a) Die Strecken $[AB]$, $[BC]$, ... , $[FA]$ sind jeweils 3 cm lang. Also sind die Dreiecke ABM, BCM, ... , FAM gleichseitig und kongruent. Daher haben die Winkel BAF, CBA,... , EFA alle das Maß 120°. Also ist das Sechseck $ABCDEF$ regelmäßig.

(b)



Das Viereck $FMDE$ ist aus den beiden kongruenten gleichseitigen Dreiecken FME und MDE zusammengefügt. Also ist das Viereck $FMDE$ eine Raute, deren Diagonalen $[FD]$ und $[EM]$ im Punkt H aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck MDE liegt die Strecke $[MG]$ auf einer Winkelhalbierenden. Der Punkt G ist gleichzeitig der Schwerpunkt in diesem Dreieck, der alle Seitenhalbierenden (hier: $[EC]$ und $[DF]$) und damit alle Höhen im Verhältnis 2:1 teilt.

Also gilt : $\overline{MG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\text{cm} = \sqrt{3}\,\text{cm} \quad (\approx 1,73\,\text{cm})$.

Wegen $\overline{FC} = 6\,\text{cm}$ gilt: $A_{\Delta FCG} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 3\sqrt{3}\,\text{cm}^2 (\approx 5,20\,\text{cm}^2)$

Die Dreiecke FAM, ABM und BCM sind gleichseitig und kongruent:
$A_{\Delta ABM} = \frac{3^2}{4}\sqrt{3}\,\text{cm}^2 = \frac{9}{4}\sqrt{3}\text{cm}^2 (\approx 3,90\,\text{cm}^2)$.

Von den beiden Dreiecken FAM und BCM musst du jeweils noch das nach innen

gewölbte Kreissegment unter der Sehne $[AF]$ bzw. $[BC]$ subtrahieren.
Diese beiden Segmente sind aus Symmetriegründen zu ihrem jeweils darüber liegenden Kreissegment kongruent.
Somit ergibt sich z.B: $A_{Segment[AF]} = A_{Sektor MFA} - A_{\Delta MFA}$.

Alle folgenden Berechnungen erfolgen in der Einheit cm^2.

$$A_{Segment(AF)} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2\pi - \frac{3^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\pi - \frac{9}{4}\sqrt{3} \quad (\approx 0,82\,\text{cm}^2)$$

Für das Flächenstück A^*, das durch die Strecken $[MF]$ und $[MA]$ sowie durch den nach innen gewölbten Kreisbogen AF begrenzt wird, ergibt sich:

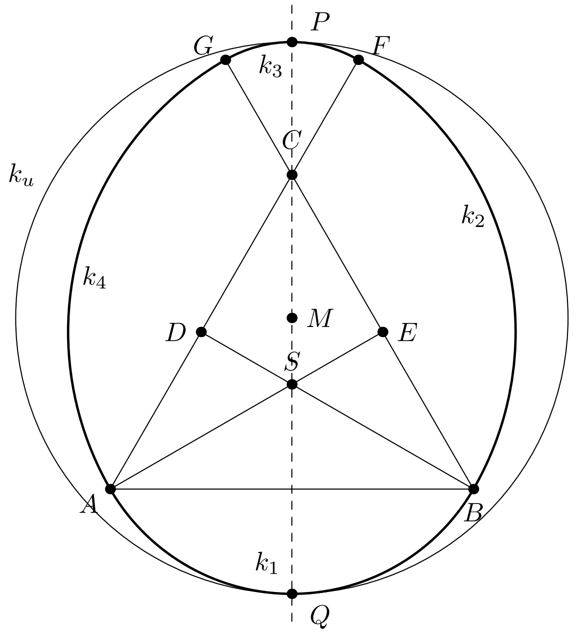
$$A^* = \frac{3^2}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi + \frac{9}{4}\sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi \quad (\approx 3,08\,\text{cm}^2)$$

Für den Inhalt A des grauen Flächenstückes ergibt sich damit:

$$A = 3\sqrt{3} + \frac{9}{4}\sqrt{3} + 2 \cdot \left(\frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi\right) = \left(3 + \frac{9}{4} + 9\right)\sqrt{3} - 3\pi.$$

$$A = \left(\frac{57}{4}\sqrt{3} - 3\pi\right)\,\text{cm}^2 \quad (\approx 15,26\,\text{cm}^2)$$

15.



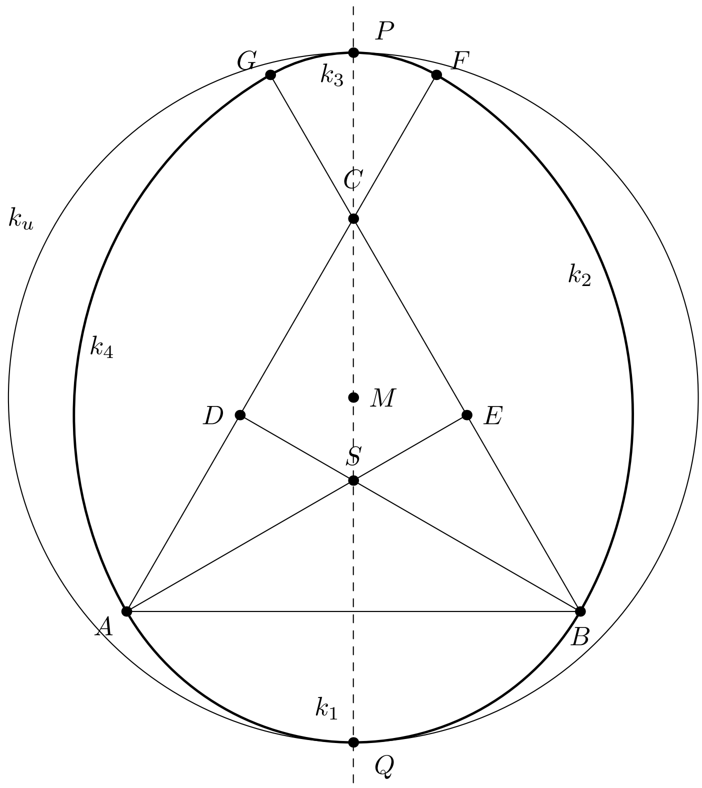
Die Punkte D und E sind zwei Seitenmittelpunkte des gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge a.

Die Punkte S, D, C und E sind die Mittelpunkte der Kreisbögen k_1, k_2, k_3 und k_4, welche die eiförmige Figur bilden. Der Punkt M ist der Mittelpunkt des Umkreises k_u dieser Eilinie.

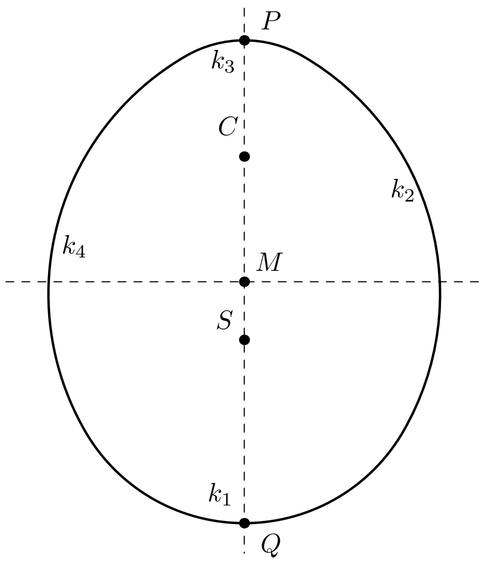
(a)
- Beschreibe, wie du diese Figur zeichnest.
- Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Neben der Symmetrieachse PQ besitzt die Eilinie keine weitere.

(c) Wie viel Prozent der Fläches des Umkreises k_u bedeckt die eiförmige Fläche?

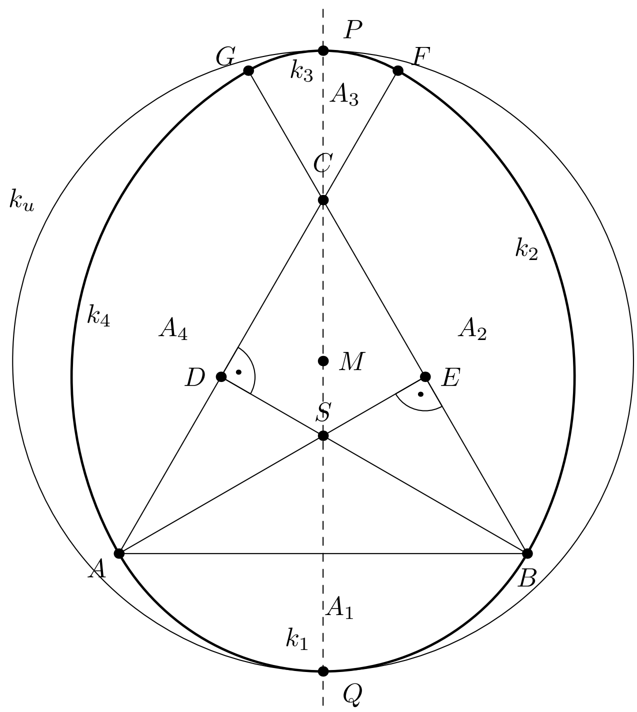
Lösung: (a)
- Zeichne das gleichseitige Dreieck ABC. Verlängere dabei die Strecken $[AC]$ und $[BC]$ jeweils über C hinaus.
  $[AE] \cap [BD] = \{S\}$
  Zeichne den Kreisbogen $k_1(S\,; r_1 = \overline{SA})$.
  $k_2(D\,; r_2 = \overline{DB}) \cap [AC = \{F\}$ und $k_3(E\,; r_3 = \overline{EA}) \cap [BC = \{G\}$.
  Zeichne den Kreisbogen $k_4(C\,; r_4 = \overline{CF})$.
  Die Gerade PQ ist die Symmetrieachse der Figur.
  Der Mittelpunkt der Strecke $[PQ]$ ist M.
- 

(b)



Zwar sind die beiden Kreisbögen k_2 und k_4 kongruent, aber die beiden Kreisbögen k_1 (Radius $\overline{SQ}$) und k_3 (Radius $\overline{CP}$) sind es nicht. Also ist die Senkrechte zur Geraden PQ durch den Punkt M keine Symmetrieachse der Figur. Andere Geraden, die ebenfalls durch M verlaufen, kommen aus dem gleichen Grund nicht als Symmetrieachsen in Betracht.

(c) Der Schnittpunkt S ist auch der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, der die Schwerlinien im Verhältnis $2:1$ teilt.
Es seien $r_1 = \overline{SA}$, $r_2 = \overline{DB}$ und $r_3 = \overline{CF}$.
Die drei Kreisbögen k_1, k_2 und k_3 schließen die Kreisteile A_1, A_2, A_3 und A_4 außerhalb des gleichseitigen Dreiecks ABC ein, dessen Flächeninhalt kurz A_Δ heißen soll.



$$r_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3}\sqrt{3} \quad ; \qquad r_2 = \frac{a}{2}\sqrt{3} = r_4$$

$$A_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{3}A_\Delta = \frac{1}{9}a^2\pi - \frac{1}{3}A_\Delta$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2}A_\Delta = \frac{3}{16}a^2\pi - \frac{1}{2}A_\Delta = A_4$$

$$r_3 = \frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

$$A_3 = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{a}{2}\left(\sqrt{3}\ -1\right)\right]^2 \cdot \pi = \ldots = \frac{1}{6}a^2\pi - \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}\pi$$

$$\begin{aligned}
A_{Ei} &= \frac{1}{9}a^2\pi - \frac{1}{3}A_\Delta + \frac{3}{8}a^2\pi - A_\Delta + \frac{1}{6}a^2\pi - \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}\pi + A_\Delta \\
&= a^2\pi\left(\frac{1}{9} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\pi \\
&= a^2\pi\frac{8 + 27 + 12}{72} - a^2\sqrt{3} \cdot \frac{1 + \pi}{12} \\
&= \frac{47}{12}a^2\pi - \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 \cdot (1 + \pi) \\
A_{Ei} &= \frac{a^2}{72} \cdot (47\pi - 6\sqrt{3} - 6\pi\sqrt{3}) \quad \approx 52,31\,\text{cm}^2 \qquad \text{für } a = 6\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Für den Durchmesser d_u des Umkreises k_u gilt: $d_u = 2 \cdot r_1 + r_3$.

$$\Rightarrow \quad r_u = \frac{1}{2} \cdot (2r_1 + r_3) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}a\sqrt{3} + \frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{1}{2}a)$$

$$\begin{aligned}
r_u &= \frac{1}{3}a\sqrt{3} + \frac{1}{4}a\sqrt{3} - \frac{1}{4}a \\
&= a\left(\frac{7}{12}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right) \\
r_u &= \frac{1}{12}a(7\sqrt{3} - 3) \quad \approx 4,56\,\text{cm} \qquad \text{für } a = 6\,\text{cm} \\
r_u^2 &= \frac{a^2}{144}(156 - 42\sqrt{3})
\end{aligned}$$

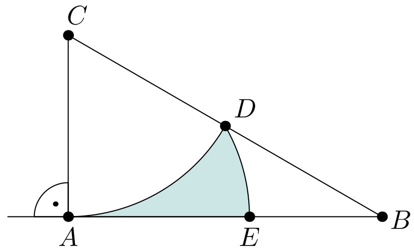
Für den Flächeninhalt A_u des Unkreises ergibt sich dann:

$$A_u = \frac{a^2}{144}(156 - 42\sqrt{3}) \cdot \pi$$

$$\frac{A_{Ei}}{A_u} = \frac{\frac{a^2}{72} \cdot (47\pi - 6\sqrt{3} - 6\pi\sqrt{3})}{\frac{a^2}{144}(156 - 42\sqrt{3}) \cdot \pi} = 0,7999561666\ldots \approx 0,8 = 80\%$$

Der Verdacht liegt nahe, dass es genau 80% sind. Aber Zähler und Nenner stehen leider im irrationalen Verhältnis (man sagt, „Zähler und Nenner sind inkommensurabel.“). Das liegt z.B. daran, dass sich die Zahl π nicht herauskürzt.

16.

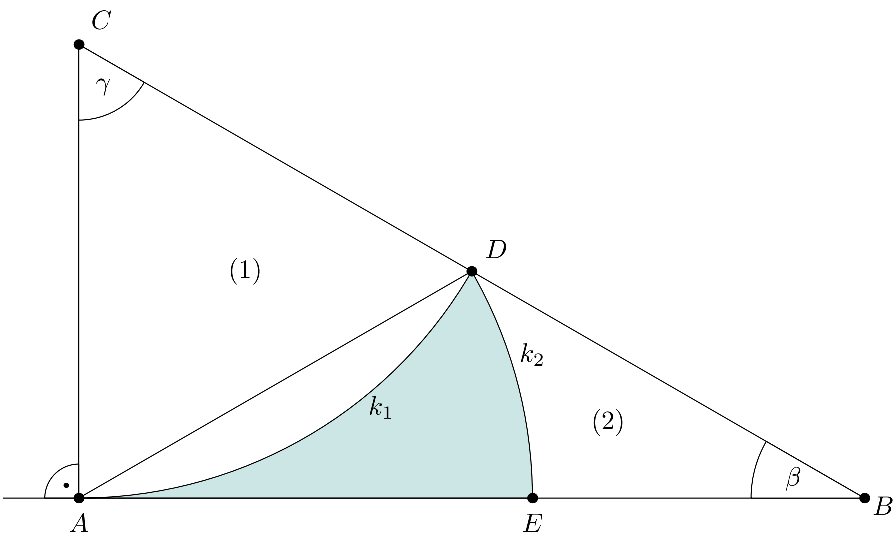


Die Eckpunkte A und C des rechtwinkligen Dreiecks ABC sind die Mittelpunkte der Kreisbögen von E nach D bzw. von A nach D. Die Radien der Kreisbögen sind gleich lang.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt der getönten Fläche.

Lösung: (a)



- Zeichne die Strecke $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$. Trage am Punkt A einen rechten Winkel an.
- Zeichne um den Punkt C einen Kreisbogen k_1 mit Radius $6\,\text{cm}$. Zeichne um den Punkt A einen Kreisbogen k_2 mit Radius $6\,\text{cm}$.

- $k_1 \cap k_2 = \{D\}$. Das Dreieck ADC ist somit gleichseitig mit der Seitenlänge 6 cm. $k_2 \cap \{$freier Schenkel des rechten Winkels mit dem Scheitel $A\} = \{E\}$.
- $[CD \cap [AE = \{B\}$.

(b) Weil das Dreieck ADC gleichseitig ist, folgt $\gamma = 60°$. Weil das Dreieck ABC rechtwinklig ist, folgt $\beta = 30°$.

Der Flächeninhalt A des Dreiecks ABC beträgt somit
$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 18\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \quad (\approx 31{,}18\,\text{cm}^2)$.

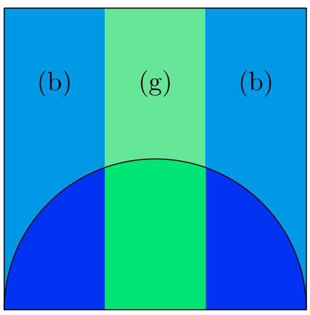
Berechne dann den Flächeninhalt des Kreissektors (1) mit dem Mittelpunkt C und dem Kreisbogen von A nach D:
$A_{(1)} = \frac{60°}{360°} \cdot 6^2\pi\,\text{cm}^2 = 6\pi\,\text{cm}^2 \quad (\approx 18{,}85\,\text{cm}^2)$

Den Inhalt $A_{(2)}$ der Fläche (2), die durch die Strecken $[EB]$ und $[BD]$ sowie durch den Keisbogen von E nach D begrenzt wird, berechnest du, indem du den Inhalt des Kreissektors mit dem Mittelpunkt A und dem Radius 6 cm vom Flächeninhalt des Dreiecks ABD subtrahierst.
Das Dreieck ABC ist ein halbes gleichseitiges Dreieck. Weil $\overline{CD} = 6\,\text{cm}$ gilt, ist der Punkt D damit der Mittelpunkt der Hypotenuse $[BC]$, die ja 12 cm lang sein muss. Deshalb ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABD halb so groß wie der des Dreiecks ABC:
$A_{\Delta ABD} = 0{,}5 \cdot 18\sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \quad (\approx 15{,}59\,\text{cm}^2)$.

$$\Rightarrow \quad A_{(2)} = \left(9\sqrt{3} - \frac{30°}{360°} \cdot 6^2\pi\right)\text{cm}^2 = (9\sqrt{3} - 3\pi)\,\text{cm}^2 \quad (\approx 6{,}16\,\text{cm}^2).$$

Den Inhalt A der getönten Fläche erhältst du, indem du die beiden Flächeninhalte $A_{(1)}$ und $A_{(2)}$ vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC subtrahierst:
$A = 18\sqrt{3} - [6\pi + (9\sqrt{3} - 3\pi)]\,\text{cm}^2 = (9\sqrt{3} - 3\pi)\,\text{cm}^2 = A_{(2)}$ **!**
Das bedeutet z.B. auch, dass der Kreisbogen von E nach D die Fläche halbiert, die von den Strecken $[AB]$ und$[BD]$ sowie vom Kreisbogen von A nach D begrenzt wird.

17.



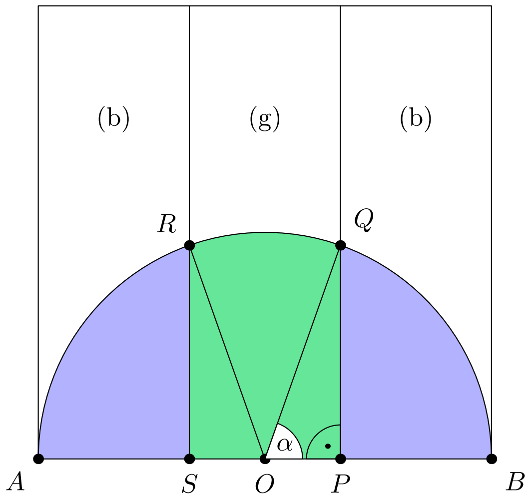
Das ist der Entwurf eines Logos für die Firma „Sun & Brown“. Es besteht aus einem Quadrat, das aus drei kongruenten Streifen blau (b) und grün (g) zusammengesetzt ist. Außerdem ist dem Quadrat ein Halbkreis einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur, so dass die Quadratseite 6 cm lang ist.

(b) Berechne den Inhalt der blauen Fläche im Halbkreis.

(c) Wie viel Prozent der Halbkreisfläche sind grün eingefärbt?

Lösung: (a)



(b) Um den Inhalt der blauen Teilfläche $PBQP$ zu berechnen, musst du von der Fläche des Sektors OBQ die des Dreiecks OPQ subtrahieren:

Im rechtwinkligen Dreieck OPQ gilt: $\overline{OP} = 1\,\text{cm}$ und $\overline{OQ} = 3\,\text{cm}$.

Also: $\cos\alpha = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70{,}53°$.

$$A_{Sektor} \approx \frac{70{,}53°}{360°} \cdot 3^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 5{,}54\,\text{cm}^2$$

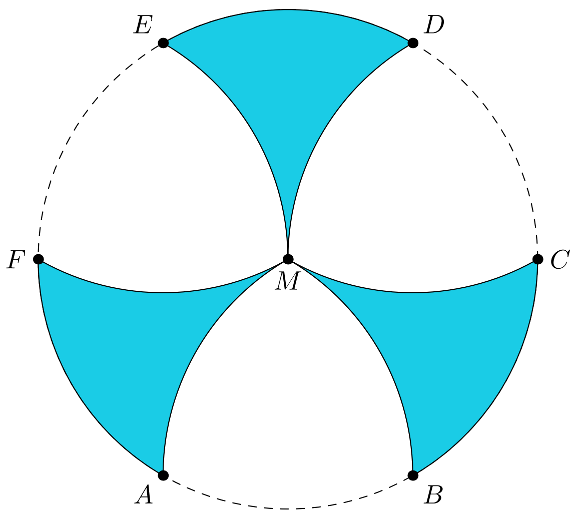
$A_{\Delta OPQ} \approx 0{,}5 \cdot 1 \cdot 3\,\text{cm}^2 \approx 1{,}41\,\text{cm}^2$
$A_{PBQP} \approx 5{,}54\,\text{cm}^2 - 1{,}41\,\text{cm}^2 = 4{,}13\,\text{cm}^2$
Geamte blaue Fläche: $A \approx 2 \cdot 4{,}13\,\text{cm}^2 = 8{,}26\,\text{cm}^2$.

(c) Halbkreis: $A_{HK} = \dfrac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \pi \approx 14{,}14\,\text{cm}^2$

$$\frac{A_{grün}}{A_{HK}} \approx \frac{14{,}14\,\text{cm}^2 - 8{,}26\,\text{cm}^2}{14{,}14\,\text{cm}^2} \approx 0{,}4158 = 41{,}58\%$$

Knapp 42% der Halbkreisfläche sind grün eingefärbt.

18.



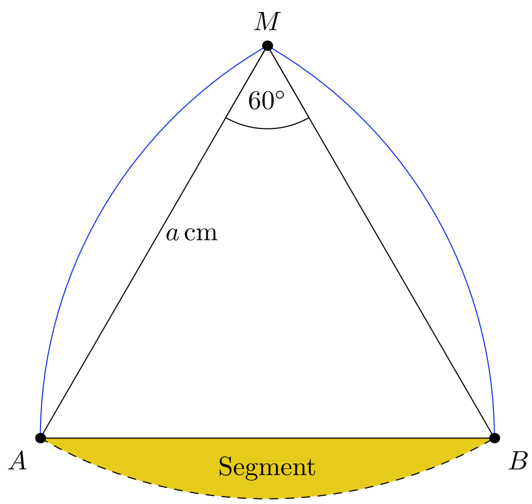
Die Punkte A, B, C, D, E und F sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge a cm. Diese Punkte sind auch die Mittelpunkte der Kreisbögen im Inneren.

(a) Zeichne die Figur für $a = 6$.

(b) Berechne den Flächeninhalt der getönten Figur in deiner Zeichnung.

Lösung: (a) Zeichne zunächst den Umkreis der Figur mit dem Radiua $a = 6$ cm. Trage dann den Radius 6-mal auf der Kreislinie ab. Beginne dabei mit einem der „waagrechten" Punkte C oder F. Zeichne dann die 6 Kreisbögen ein.

(b)



Die Ausgangsfigur (AF) enthält drei Kreisbogendreiecke (KBD). Eines davon ist jetzt herausgezeichnet.
Es setzt sich aus einem gleichseitigen Dreieck (D) und drei kongruenten Segmenten

(Sg) zusammen.
Den Flächeninhalt der Ausgangsfigur (AF) kannst du berechnen, indem du vom Flächeninhalt des Umkreises (k) der Ausgangsfigur den der drei Kreisbogendreiecke (KBD) subtrahiertst:
$A_{AF} = A_k - 3 \cdot A_{KBD}$.
Weiter gilt also: $A_{KBD} = A_D + 3 \cdot A_{Sg}$ und $A_{Sg} = A_{SektorMAB} - A_D$.
$\Rightarrow \quad A_{KBD} = A_D + 3 \cdot (A_{SektorMAB} - A_D)$.

$$\Rightarrow \quad A_{KBD} = 3 \cdot A_{SektorMAB} - 2 \cdot A_D = \left[3 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot a^2\pi - 2 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right] \text{cm}^2$$

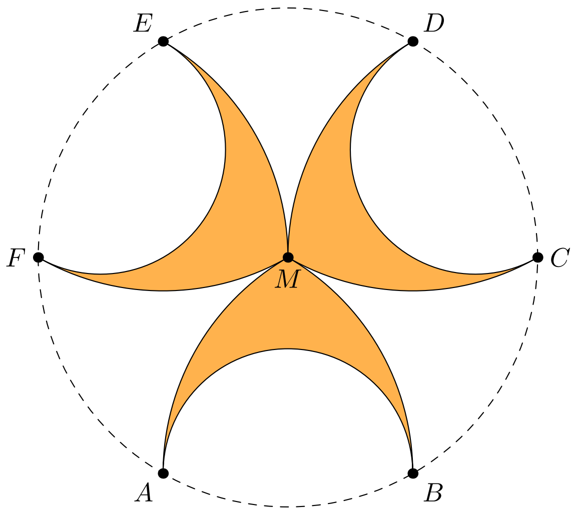
$$\Rightarrow \quad A_{KBD} = \left[\frac{1}{2}a^2\pi - \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}\right] \text{cm}^2$$

$$A_{AF} = a^2\pi \,\text{cm}^2 - 3 \cdot \left[\frac{1}{2}a^2\pi - \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}\right] \text{cm}^2$$

$$A_{AF} = \left[a^2\pi - \frac{3}{2}a^2\pi + \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\right] \text{cm}^2 = \frac{a^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)\,\text{cm}^2$$

Für $a = 6$ ergibt sich: $A_{AF} \approx 36,98\,\text{cm}^2$.

19.



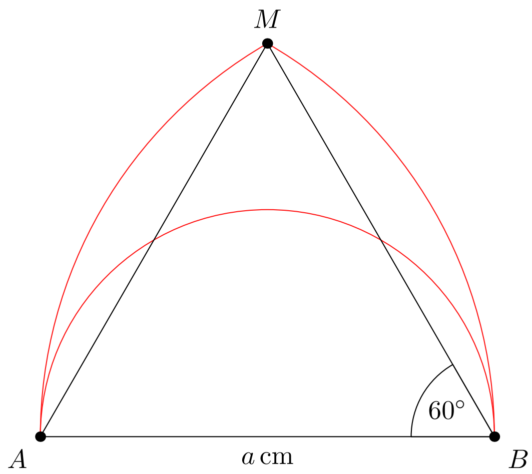
Die Punkte A, B, C, D, E und F sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge a cm. Diese Punkte sind auch die Mittelpunkte der Kreisbögen im Inneren. Die Strecken $[AB]$, $[CD]$ und $[EF]$ sind jeweils die Durchmesser der drei Halbkreise im Inneren.

(a) Zeichne die Figur für $a = 6$.

(b) Berechne den Flächeninhalt der getönten Figur in deiner Zeichnung.

Lösung: (a) Zeichne zunächst den Umkreis der Figur mit dem Radiua $a = 6\,\text{cm}$. Trage dann den Radius 6-mal auf der Kreislinie ab. Beginne dabei mit einem der „waagrechten“ Punkte C oder F. Zeichne dann die 6 Kreisbögen und die 3 Halbkreise ein.

(b)



Die Figur stellt eines der drei kongruenten Elemente der Ausgangsfigur (AF) dar: An den Schenkeln $[MA]$ und $[MB]$ des gleichseitigen Dreiecks ABC liegen zwei kongruente Segmente (Seg), die zum Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks addiert werden. Davon wird dann der Flächeninhalt des Halbkreises (Hk) subtrahiert. Das Ergebnis wird schließlich noch mit 3 multipliziert.

$A_{AF} = 3 \cdot (A_{ABC} + 2 \cdot A_{Seg} - A_{Hk}) = 3 \cdot [A_{ABC} + 2 \cdot (A_{Sektor} - A_{ABC}) - A_{Hk}]$
$A_{AF} = 6 \cdot A_{Sektor} - 3 \cdot A_{ABC} - 3 \cdot A_{Hk})$

$$A_{AF} = \left[6 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot a^2\pi - 3 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi\right] \text{cm}^2$$

$$A_{AF} = \left[a^2\pi - \frac{3}{4}a^2\sqrt{3} - \frac{3}{8}\,a^2\pi\right] \text{cm}^2$$

$$A_{AF} = \left[\frac{5}{8}\,a^2\pi - \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}\right] \text{cm}^2 = \left[\frac{a^2}{8} \cdot \left(5\pi - 6\sqrt{3}\right)\right] \text{cm}^2$$

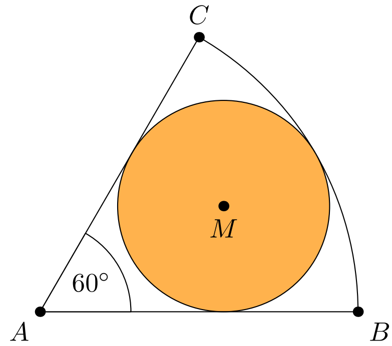
Für $a = 6$ ergibt sich: $A_{AF} \approx 23{,}92\,\text{cm}^2$

Anmerkung:

Es gilt $A_{AF} = \left[\frac{5}{8}\,a^2\pi - \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}\right] \text{cm}^2 = \left[\frac{225^\circ}{360^\circ} \cdot a^2\pi - 3 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right] \text{cm}^2$.

Das bedeutet: Die Ausgangsfigur hat den gleichen Flächeninhalt wie ein Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel 225° und dem Radius $a\,\text{cm}$, dem man 3 gleichseitige Dreiecke mit einer Seitenlänge von jeweils $a\,\text{cm}$ entnommen hat.

20.

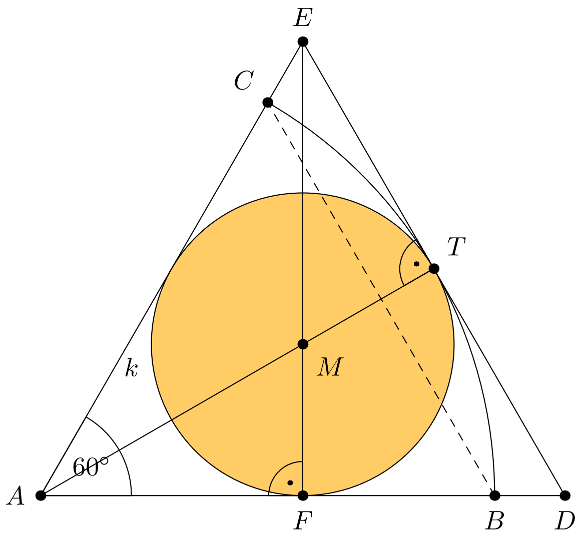


Der gefärbte Kreis mit dem Mittelpunkt M ist dem Kreissektor ABC mit dem Mittelpunkt A und einem Öffnungswinkel von $60°$ einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur für den Sektorradius $\overline{AB} = a = 6\,\text{cm}$.
Tipp: Die beiden Kreislinien berühren sich in einem Punkt T. Durch diesen Punkt verläuft die gemeinsame Tangente an die beiden Kreislinien. Zeichne diesen Punkt T und die Tangente ein.

(b) Welchen Bruchteil der Sektorfläche nimmt der Kreis ein?

Lösung: (a)

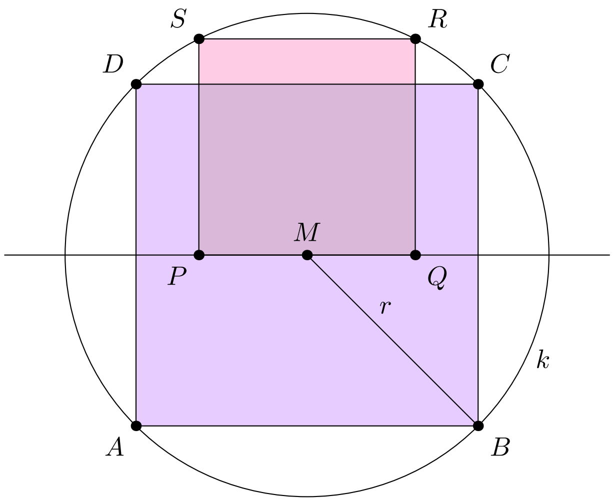


(b) Die Gerade $[AT]$ ist eine Symmetrieachse des gleichseitigen Dreiecks ABC und des Dreiecks ADE. Also ist dieses Dreieck ADE ebenfalls gleichseitig. Die Strecke $[MT]$ stellt den Radius des Kreises k dar.
Die $a = 6\,\text{cm}$ lange Strecke $[AT]$ ist eine Höhe im gleichseitigen Dreieck ADE. Der Kreis k ist der Inkreis des Dreiecks ADE. $\Rightarrow \quad [AT] \cap [EF] = M$. Somit stellt die Strecke $[MT]$ den Radius des Kreises k dar.

Weil im gleichseitigen Dreieck die Winkelhalbierenden gleichzeitig die Schwerlinien sind, teilt der Mittelpunkt M die Strecke $[MT]$ im Verhältnis $2:1$.

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1}{3}\,a \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{Kreis}}{A_{Sektor}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\cdot a\right)^2 \pi}{\frac{60°}{360°}\cdot a^2\,\pi} = \frac{1}{9} : \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

21.

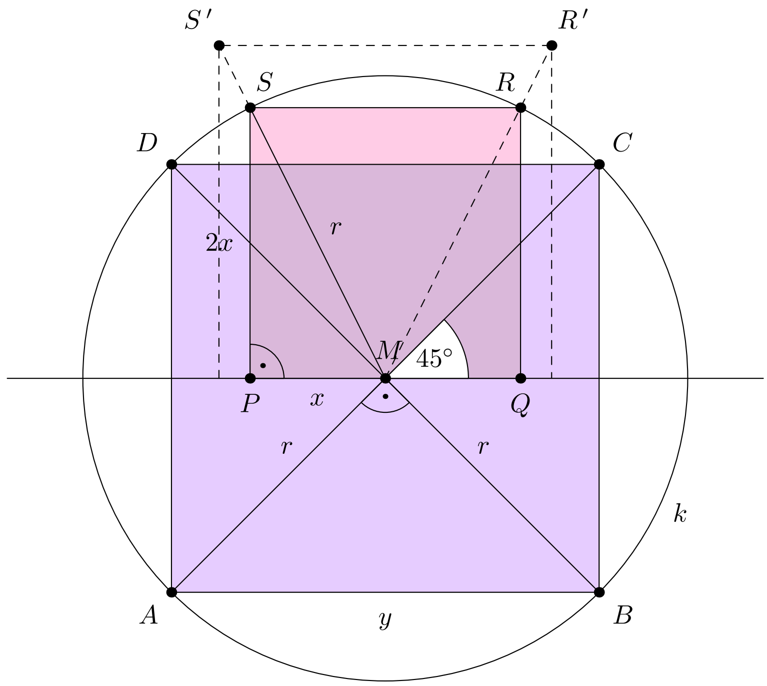


In den Kreis k mit dem Radius r ist das Quadrat $ABCD$ und in seinen Halbkreis ist das Quadrat $PQRS$ einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur für $r = 4\,\text{cm}$.

(b) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Quadrate.

Lösung: (a)



Zeichne zunächst den Kreis mit dem Mittelpunkt M und seinem waagrecht liegenden Durchmesser. Zeichne dann zwei Geraden ein, die jeweils einen 45°-Winkel mit dieser Waagrechten bilden und sich im Punkt M schneiden. Die Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit der Kreislinie k sind die Eckpunkte des Quadrates $ABCD$.
Um das Quadrat $PQRS$ zu erhalten, zeichnest du am besten erst ein (hier gestrichelt eingezeichnetes) Probequadrat mit den Eckpunkten R' und S' ein. Dann folgt:
$[MR'] \cap k = \{R\}$ und $[MS'] \cap k = \{S\}$.
Die Lote der Eckpunkte R und S auf die Waagrechte liefern die restlichen Quadrat-Eckpunkte Q und P.

(b) Für die Berechnung kannst du den Radius r verwenden. Es geht jedoch auch, wenn du für r 4 cm einsetzt.
Es gilt: $\overline{AB} = y$ und $\overline{MP} = x$, dann ist $\overline{PS} = 2x$ (siehe Zeichnung).
Das Dreieck ABM ist gleichschenklig-rechtwinklig und damit ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $y = r\sqrt{2}$. $\quad \Rightarrow \quad A_{ABCD} = y^2 = 2r^2$.

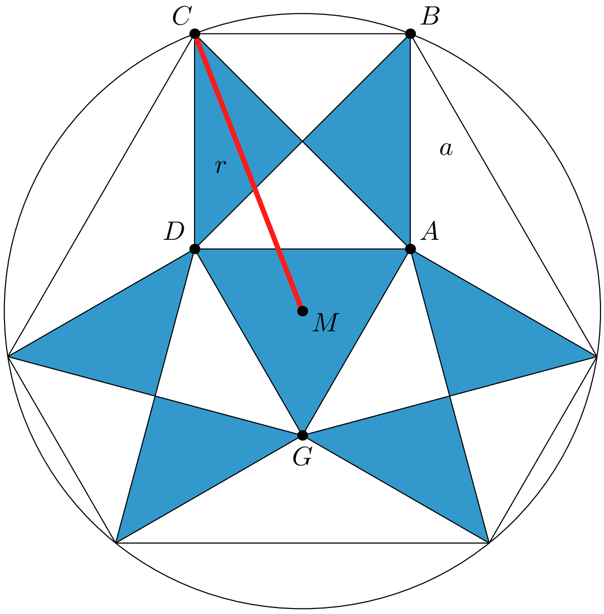
PYTHAGORAS im Dreieck PMS: $x^2 + (2x)^2 = r^2$

$$\Leftrightarrow \quad 5x^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{2r}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad A_{PQRS} = (2x)^2 = \frac{4}{5}\, r^2$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{4}{5}\, r^2}{2r^2} = 2 : 5 = \frac{4}{10} = 40\%$$

Das Quadrat $ABCD$ ist um 60% größer als das Quadrat $PQRS$.

22.

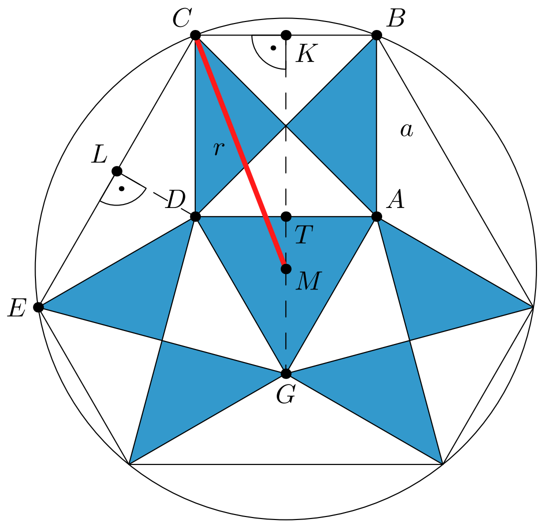


Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Im Zentrum befindet sich das gleichseitige Dreieck ADG. Der Umkreis mit dem Mittelpunkt M wurde zusammen mit dem Umkreisradius r zusätzlich eingezeichnet. Die Länge der Quadratseite $\overline{AB}$ ist a.

(a) Berechne den Umkreisradius r für $a = 4$.

(b) Wie viel Prozent der Umkreisfläche wird von dem sechseckigen Logo bedeckt?

Lösung: (a)



Das Logo ist mit seinem Umkreis verkleinert dargestellt.
Im gleichseitigen Dreieck ADG stellt die Strecke $[GT]$ die Dreieckshöhe dar. Dann gilt:

$\overline{MT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3}.$

$\Rightarrow \quad \overline{MK} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3} + a = a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + 1\right)$. Weiter gilt: $\overline{CK} = \frac{1}{2} \cdot a.$

Im rechtwinkligen Dreieck MKC gilt:

$$r^2 = \left[a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + 1\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^2 = a^2 \cdot \left(\frac{3}{36} + \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 + \frac{1}{4}\right).$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = \frac{a^2}{3}\left(4 + \sqrt{3}\right) \qquad \textbf{(*)}$$

$$\Rightarrow \quad r = a \cdot \sqrt{\frac{4 + \sqrt{3}}{3}} \quad a = 4\,\text{cm}: r \approx 5{,}53\,\text{cm}.$$

(b) Für die Fläche $A_{\odot}$ des Umkreises gilt dann mit **(*)**:

$$A_{\odot} = \frac{\pi}{3} \cdot a^2 \cdot (4 + \sqrt{3}).$$

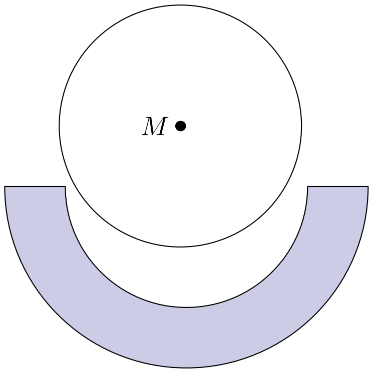
Das gleichschenklige Dreieck EDC hat die Schenkellänge a. Es wird durch die Höhe $[LD]$ in die beiden kongruenten rechtwinkligen Dreiecke EDL und LDC zerlegt.
Es gilt: $\sphericalangle CDE = 360° - 2 \cdot 90° - 60° = 120°$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle LED = \sphericalangle CLD = (180° - 120°) : 2 = 30°$. Somit lassen sich die beiden Hälften des Dreiecks EDC zu einem gleichseitigen Dreieck zusammenfügen, das mit dem gleichseitigen Dreieck ADG kongruent ist.
Um den Flächeninhalt des Logos zu berechnen, musst du also zu dem der drei Quadrate den vierfachen des gleichseitigen Dreiecks ADG im Zentrum addieren. Für A_{Logo} ergibt sich dann:

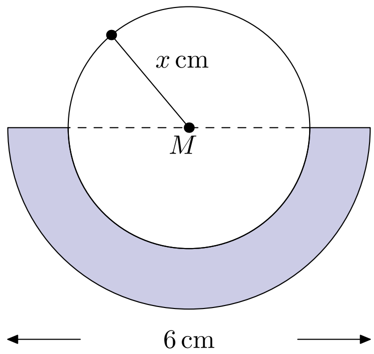
$$A_{Logo} = 3 \cdot a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 3a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(3 + \sqrt{3}).$$

$$\frac{A_{Logo}}{A_{\odot}} = \frac{a^2(3 + \sqrt{3})}{\frac{\pi}{3} \cdot a^2 \cdot (4 + \sqrt{3})} \approx 0{,}7883 = 78{,}83\%$$

Knapp 79% des Umkreises werden vom TDK-Logo bedeckt.

23.





In dem Bild eines Firmenlogos wird der Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $x\,\mathrm{cm}$ ($x < 3$) in einen dunkel gefärbten Halbkreisring eingebettet, dessen äußerer Durchmesser 6 cm beträgt (siehe Abbildung oben rechts).

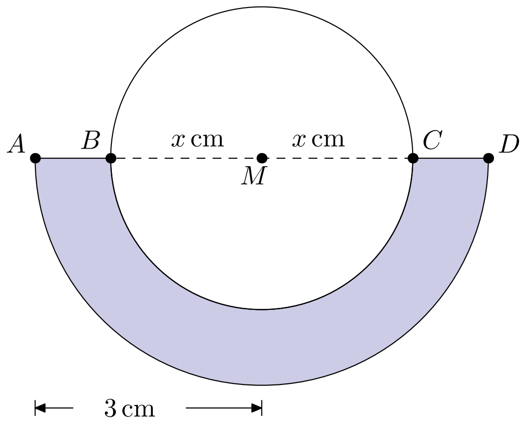
(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

(b) Berechne für $x = 2$ den Flächeninhalt des Halbkreisringes.

(c) Berechne x so, dass der Inhalt der Kreisfläche genauso groß wie der des Halkreisringes ist.

(d) Berechne x so, dass der Halbkreisring den doppelten Umfang wie der Vollkreis besitzt.

Lösung: (a)



Beginne am besten mit dem Vollkreis.

(b) $A_{HR} = \left(\frac{1}{2} \cdot 3^2\pi - \frac{1}{2} \cdot 2^2\pi\right)\,\mathrm{cm}^2 = 2{,}5\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 7{,}85\,\mathrm{cm}^2$

(c) Die Maßzahlengleichung für $x \in \mathbb{Q}^+$ heißt:

$$x^2\pi = \frac{1}{2} \cdot 3^2\pi - \frac{1}{2} \cdot x^2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}x^2 = \frac{9}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{3} \approx 1{,}73$$

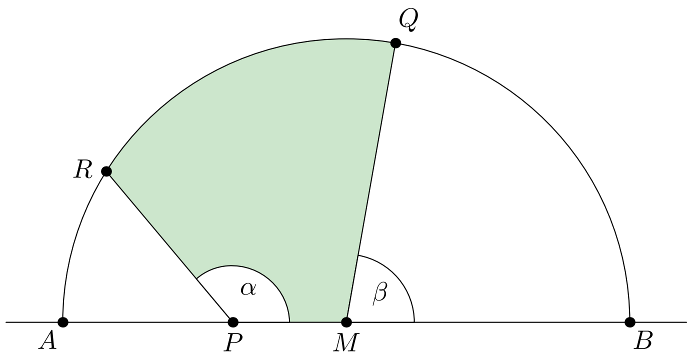
(d) Es gilt $\overline{AB} = \overline{CD} = (3 - x)\,\mathrm{cm}$.

$$2 \cdot u_{Vollkreis} = 2 \cdot 2x\pi \,\text{cm} \quad u_{HK} = \left[\frac{1}{2} \cdot 6\pi + 2 \cdot (3 - x) + \frac{1}{2} \cdot 2x\pi\right] \text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad 4x\pi = 3\pi + 6 - 2x + x\pi \quad \Leftrightarrow \quad x(2 + 3\pi) = 6 + 3\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{6 + 3\pi}{2 + 3\pi} \approx 1,35$$

24.



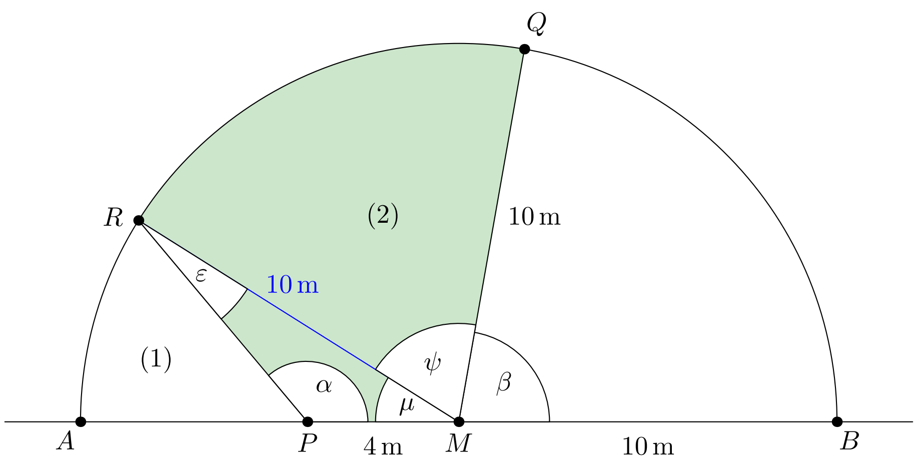
Die Figur stellt den Entwurf einer halbkreisförmigen Bühnenfläche dar. Der Durchmesser $[AB]$ soll 20 m und die Länge der Strecke $[PM]$ soll 4 m betragen.
Die von den Strecken $[RP]$, $[PM]$, $[MQ]$ und dem Kreisbogen von Q nach R begrenzte Teilfläche soll farbig von der restlichen Fläche abgesetzt werden.

(a) Zeichne die Bühne im Maßstab 1 : 200 für $\alpha = 130°$ und $\beta = 80°$.

(b) Berechne den Inhalt der farbig abgesetzten Teilfläche.
[Ergebnis: $A_{Farbe} \approx 69,85\,\text{m}^2$]

(c) Berechne den prozentualen Anteil der farbigen Fläche an der Gesamtfläche der Bühne.

Lösung: (a)



Für deine Zeichnung gilt:
$20\,\text{m} = 2000\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 2000\,\text{cm} : 200 = 10\,\text{cm}$
$4\,\text{m} = 400\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{PM} = 400\,\text{cm} : 200 = 2\,\text{cm}$

(b) Strategie: Addiere den Flächeninhalt des Dreiecks PMR zum Kreissektor (2) mit dem Mittelpunktswinkel ψ. Halbkreisfläche. Die „weiße" Teilfläche (1) ist **kein Kreissektor**.
Die Hilfslinie $[MR]$ ist die Schlüsselstelle auf dem Lösungsweg.

$$A_{Halbkreis} = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \pi\,\text{m}^2 = 50\pi\,\text{m}^2 \approx 157,08\,\text{m}^2$$

$$A_1 = A_{Sektor MRA} - A_{\Delta PMR}$$

Sinussatz im Dreieck PMR: $\dfrac{\sin\varepsilon}{4} = \dfrac{\sin 130°}{10}$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon \approx 17,84° \quad \Rightarrow \quad \mu \approx 180° - 130° - 17,84° = 32,16°$$

$$A_{\Delta PMR} \approx \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \cdot \sin 32,16° \approx 10,65\,\text{m}^2$$

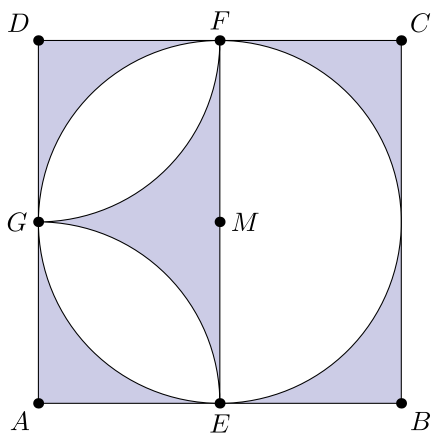
$$\psi \approx 180° - 80° - 32,16° = 67,84°$$

$$A_{(2)} = \left(\frac{67,84°}{360°} \cdot 10^2 \cdot \pi\right)\,\text{m}^2 \approx 59,20\,\text{m}^2$$

$$A_{Farbe} \approx (10,65 + 59,20)\,\text{m}^2 = 69,85\,\text{m}^2$$

(c) $\dfrac{A_{Farbe}}{A_{Halbkreis}} \approx \dfrac{69,85\,\text{m}^2}{157,08\,\text{m}^2} \approx 0,44 = \%$

25.

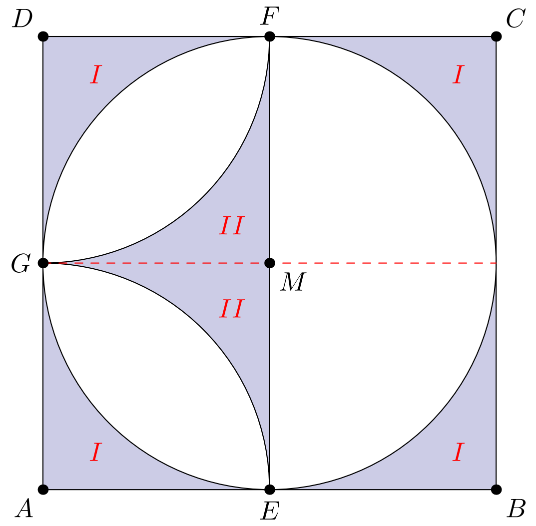


Das ist das Logo einer Firma, die Elektrogeräte herstellt.
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit dem Mittelpunkt M. Die Punkte A und D sind die Mittelpunkte der Kreisbögen von E nach G bzw. von G nach F.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne die Summe der Flächeninhalte der getönten Teilflächen in der Figur.

Lösung: (a)

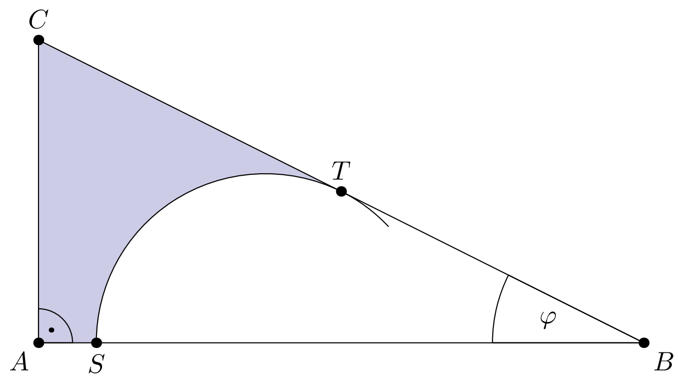


(b) Aus Symmetriegründen gilt: $A_I = A_{II}$.

$$A_I = (3^2 - \frac{1}{4} \cdot 3^2 \cdot \pi)\,\text{cm}^2 \approx 1,93\,\text{cm}^2.$$

$$A_{gesamt} = 4 \cdot A_I + 2 \cdot A_{II} = 6 \cdot A_I \approx 11,58\,\text{cm}^2.$$

26.



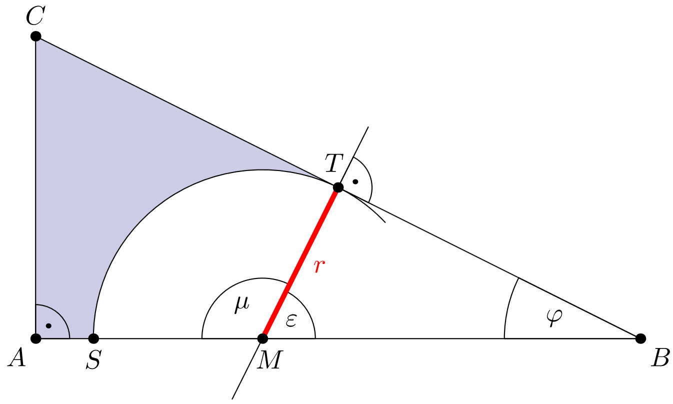
Der Kreisbogen berührt die Hypotenuse $[BC]$ im Hypotenusenmittelpunkt T. Der Mittelpunkt dieses Kreisbogens ist der noch verborgene Punkt M, der auf $[AB]$ liegt. Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 4\,\text{cm}$.

(a) Zeichne den Punkt M ein.

(b) Berechne den Inhalt des eingefärbten Flächenstückes.

[Teilergebnis: Radius des Kreisbogens $\approx 2,24\,\text{cm}$]

Lösung: (a)



Der Berührradius $r = [MT]$ steht auf seiner Kreistangente BC senkrecht. Zeichne also eine Senkrechte zur Hypotenuse $[BC]$ durch den Punkt T. Diese Senkrechte schneidet dann die Kathete $[AB]$ im Mittelpunkt M des Kreisbogens.

(b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen.

PYTHAGORAS im Dreieck ABC: $\overline{BC}^2 = 8^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} \approx 8,97\,\text{cm}$.

$\Delta\, ABC$: $\tan\varphi = \dfrac{4}{8} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 26,57°$.

$\Delta\, MBT$: $\tan 26,57° \approx \dfrac{r}{4,47} \quad \Rightarrow \quad r \approx 2,24\,\text{cm}$,

und $\varepsilon \approx 90° - 26,57° = 63,43°$.

$\mu \approx 180° - 63,43° \quad \mu \approx 116,57°$.

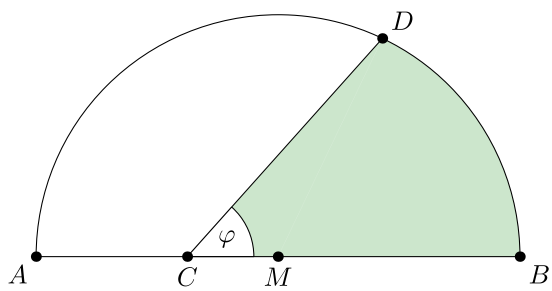
$A_{\Delta\, ABC} = 0,5 \cdot 4 \cdot 8\,\text{cm}^2 = 16\,\text{cm}^2$

$A_{\Delta\, MBT} \approx 0,5 \cdot 2,24 \cdot 4,47\,\text{cm}^2 \approx 5,01\,\text{cm}^2$

$$A_{Sektor\, MTS} \approx \frac{116,57°}{360°} \cdot 2,24^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 = 5,10\,\text{cm}^2$$

$$A_{Farbe} \approx 16\,\text{cm}^2 - 5,01\,\text{cm}^2 - 5,10\,\text{cm}^2 = 5,89\,\text{cm}^2.$$

27.



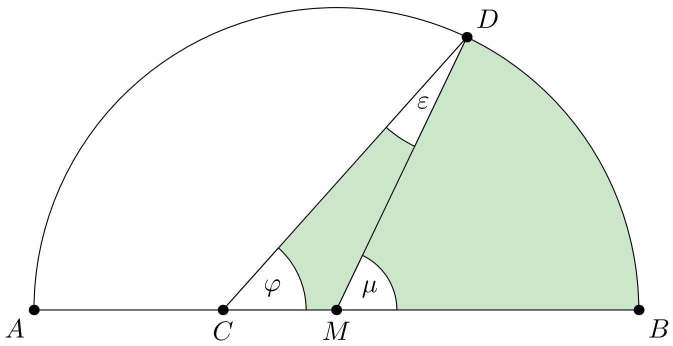
Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M.
Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{AC} = 2,5\,\text{cm}$ und $\varphi = 49°$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Die eingefärbte Fläche ist kein Kreissektor. Zeichne dazu an einer geeigneten Stelle eine Hilfslinie ein.

(c) Berechne den Inhalt A der eingefärbten Fläche.

Lösung: (a)



(b) Die Hilfslinie ist der Kreisradius $\overline{MD}$. Der Mittelpunkt des Kreisbogens von B nach D ist der Punkt M. Daher ist die Strecke $[CD]$ länger als der Kreisradius $\overline{MD}$. Bei einem Kreissektor müssen aber die begrenzenden Strecken gleich lang sein, weil dies die Kreisradien sind.

(c) $\overline{MD} = 4\,\text{cm}$ und $\overline{MC} = 1,5\,\text{cm}$.

Im Dreieck CMD gilt: $\dfrac{1,5\,\text{cm}}{\sin\varepsilon} = \dfrac{4\,\text{cm}}{\sin 49°} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 16,44°$.

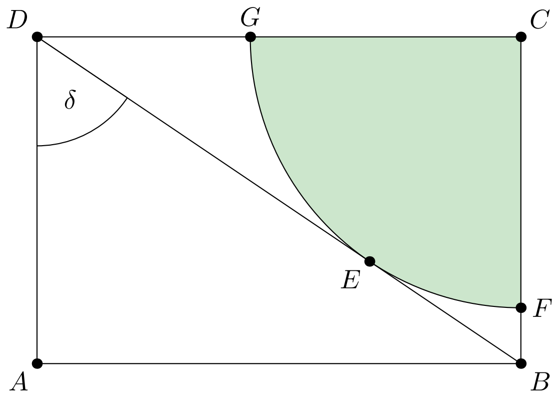
$\Rightarrow \quad \sphericalangle DMC \approx 180° - 49° - 16,44° = 114,56° \Rightarrow \quad \mu \approx 65,44°$.

$A_{\Delta\,CMD} \approx 0,5 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot \sin 114,56°\,\text{cm}^2 \approx 2,73\,\text{cm}^2$.

$A_{Sektor\,MBD} \approx \dfrac{65,44°}{360°} \cdot 4^2 \cdot \pi \approx 9,14\,\text{cm}^2$.

$A_{gesamt} \approx 2,73\,\text{cm}^2 + 9,14\,\text{cm}^2 = 11,87\,\text{cm}^2$.

28.

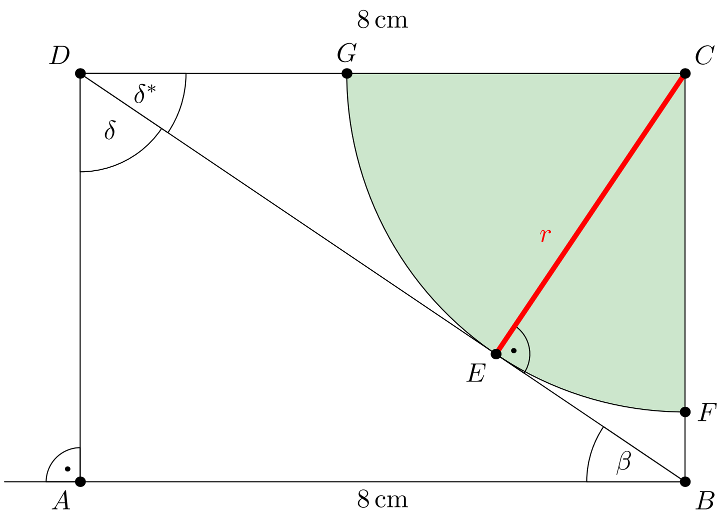


Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\delta = 56°$.
Der Mittelpunkt des Kreisbogens, der die Diagonale $[BD]$ im Punkt E berührt, ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Berechne den Flächeninhalt des eingefärbten Kreissektors.
[Teilergebnis: Radius des Kreisbogens $\approx 3,64\,\text{cm}$]

Lösung: (a)



Im Dreieck ABD gilt: $\beta = 90° - 56° = 34°$.

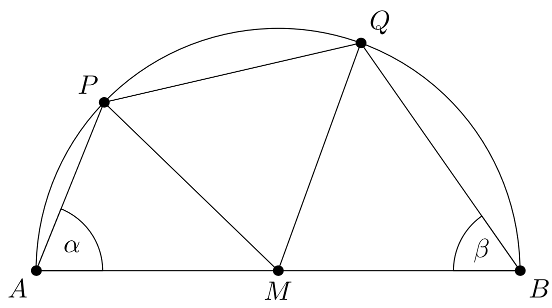
- Zeichne die Strecke $[AB]$.
- Errichte eine Senkrechte zur Strecke $[AB]$ durch den Punkt A.
- Trage am Punkt B den 34°-Winkel an.
- Die Senkrechte und der freie Schenkel des 34°-Winkels schneiden sich im Punkt D.
- Zeichne den Punkt C, die Diagonale $[BD]$ und den Kreisbogen ein.
- Der Berührradius $r = [CE]$ steht auf seiner Kreistangente BD senkrecht. Zeichne also das Lot vom Punkt C auf die Diagonale $[BD]$. Der Lotfußpunkt ist E und $r = [CE]$.

(b) Im Dreieck DEC gilt: $\delta^* = \beta = 34°$ (Z-Winkel).

$$\sin 34° = \frac{r}{8\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad r \approx 4{,}47\,\text{cm}.$$

$$A_{Sektor} \approx \frac{90°}{360°} \cdot 4{,}47^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 15{,}69\,\text{cm}^2$$

29.



Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M. Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 68°$ und $\beta = 55°$.

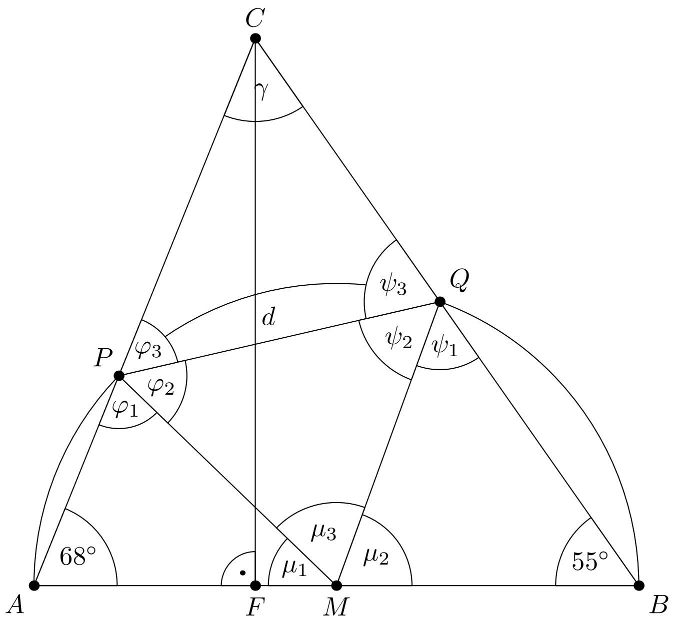
(a) Zeichne die Figur. Platzbedarf über $[AB]$: 9 cm.

(b)
- Zeige: $\sphericalangle QMP = 66°$.
- Zeige: Die Strecke $[PQ]$ ist (gerundet) $4{,}36\,\text{cm}$ lang.

(c) Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks MQP.

(d) Der Schnittpunkt der Halbgeraden $[AP$ und $[BQ$ ist der Punkt C.
- Zeichne das Dreieck ABC ein.
- Berechne den Flächeninhalt A^* des Dreiecks ABC.
- Berechne den Abstand d des Punktes C von der Grundseite $[AB]$.

Lösung: (a)



(b) • Das Dreieck AMP ist gleichschenklig; d.h. $\overline{MA} = \overline{MP} = 4\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad \varphi_1 = 68° \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = 180° - 2 \cdot 68° = 44°$.
Ebenso ist das Dreieck MBQ gleichschenklig: $\overline{MB} = \overline{MQ} = 4\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad \psi_1 = 55° \quad \Rightarrow \quad \mu_2 = 180° - 2 \cdot 55° = 70°$.
[**Exkurs:** Auf analoge Weise am Punkt P bzw. Q erhältst du:
$\varphi_3 = 55° = \beta$ und $\psi_3 = 68° = \alpha$].
Am Punkt M gilt also: $\mu_3 = \sphericalangle QMP = 180° - 44° - 70° = 66°$.

• Kosinussatz im Dreieck PMQ:
$\overline{PQ}^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 66° \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \approx 4{,}36\,\text{cm}$.

(c) Das Dreieck PMQ ist ebenfalls gleichschenklig; d.h. $\overline{MQ} = \overline{MP} = 4\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad \varphi_2 = \psi_2 = 57°$.

$A_{\Delta\,PMQ} = \frac{1}{2} \cdot\; 4^2 \cdot \sin 66° \approx 7{,}31\,\text{cm}^2$.

(d) Der Schnittpunkt der Halbgeraden $[AP$ und $[BQ$ ist der Punkt C.

• Siehe Zeichnung.

• Es gilt: $\gamma = 180° - 55° - 68° = 57°$.
Sinussatz im Dreieck ABC:

$$\frac{\sin 55°}{\overline{AC}} = \frac{\sin 57°}{8\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} \approx 7{,}81\,\text{cm}.$$

$$\Rightarrow \quad A^*_{\Delta\,ABC} \approx \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7{,}81 \cdot \sin 68°\,\text{cm}^2 \approx 28{,}97\,\text{cm}^2.$$

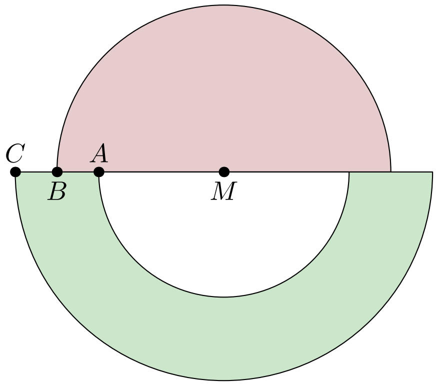
• Siehe Zeichnung: Der gesuchte Abstand d ist die Länge der Dreieckshöhe $[CF]$.
Für den Flächeninhalt A^* des Dreiecks ABC gilt:

$$A^* = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d.$$

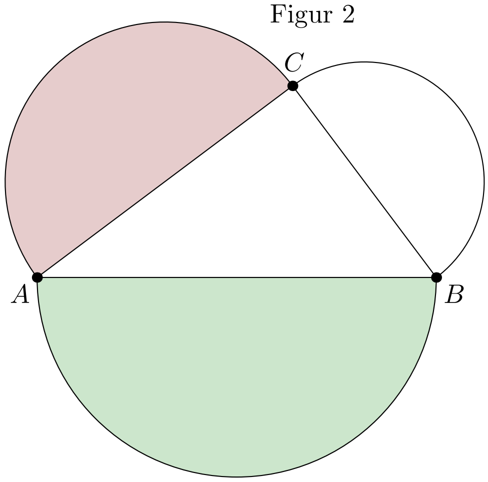
$$\Rightarrow \quad 28,97\,\text{cm}^2 \approx \frac{1}{2} \cdot 8\,\text{cm} \cdot d \quad \Rightarrow \quad d \approx 7,24\,\text{cm}.$$

30.

Figur 1



Figur 2



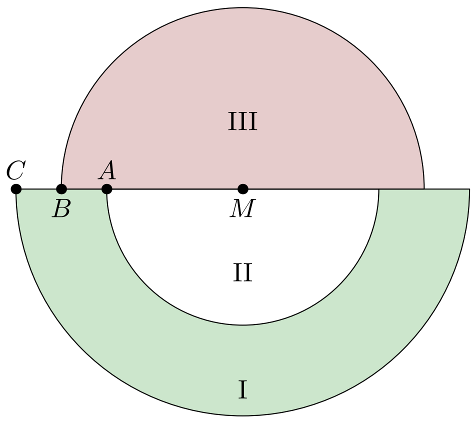
(a) Zeichne die Figur 1 für $\overline{MA} = 3,6\,\text{cm}$, $\overline{MB} = 4,8\,\text{cm}$ und $\overline{MC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Zeige ohne zu runden, dass der untere Kreisring und der obere Halbkreis den gleichen Flächeninhalt besitzen.

(c)
- Zeichne die Figur 2 für $c = \overline{AB} = 12\,\text{cm}$, $a = \overline{BC} = 7,2\,\text{cm}$ und $b = \overline{AC} = 9,6\,\text{cm}$.
- Begründe: Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.
- Notiere den Zusammenhang zwischen den drei Halbkreisflächen in der Figur 2 in Form einer Gleichung.
- Was hat die Figur 2 mit der Figur 1 zu tun? Beschreibe deine Idee.

Lösung: (a) Die Figur 1 ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

Figur 1



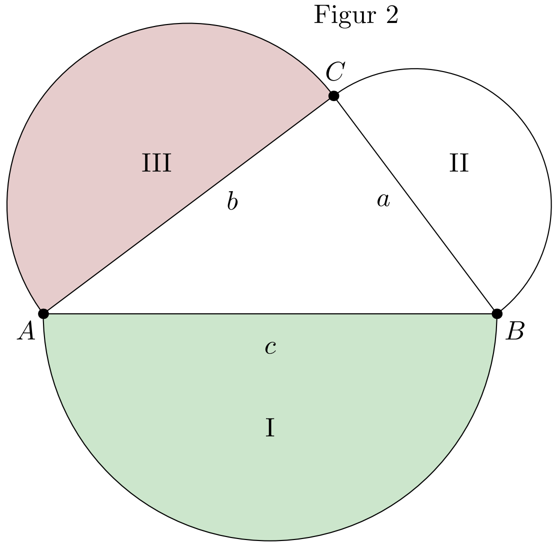
(b) Du hast die drei Halbkreise I, II und III vor dir.
Es müsste gelten: $A_{III} = A_I - A_{II}$. Es wird in der Einheit cm^2 gerechnet.

Also: $\frac{1}{2} \cdot 4,8^2\pi = \frac{1}{2} \cdot 6^2\pi - \frac{1}{2} \cdot 3,6^2\pi \;\Big|\; : \frac{1}{2}\pi$

$4,8^2 = 6^2 - 3,6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 23,04 = 36 - 12,96$. Das stimmt, also ist die Behauptung bewiesen.

(c) • Die Figur 2 ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

Figur 2



• Für die Maßzahlen müsste gelten:
$12^2 = 7,2^2 + 9,6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 144 = 51,84 + 92,16$. Das stimmt, also ist das Dreieck ABC rechtwinklig.

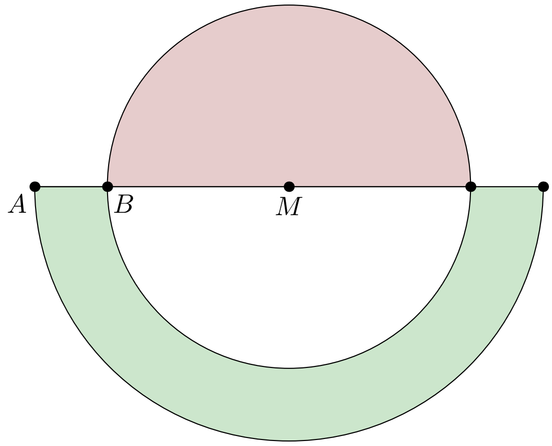
• Es gilt: $c^2 = a^2 + b^2 \;\big|\; \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \pi$.

Das bedeutet: Der Halbreis I hat den gleichen Flächeninhalt wie die beiden Halbkreise II und III zusammen.

• In der Figur 1 siehst du einen gleich gelagerten Fall: Wenn du den Halbkreis II aus dem Halbkreis I entfernst, ergibt sich: Der Halbkreis I muss genauso groß sein wie die beiden Halbkreise II und III zusammen.
In der Figur 1 und der Figur 2 haben gleich nummerierte Halbkreise den gleichen Durchmesser; d.h. sie sind kongruent.

31.



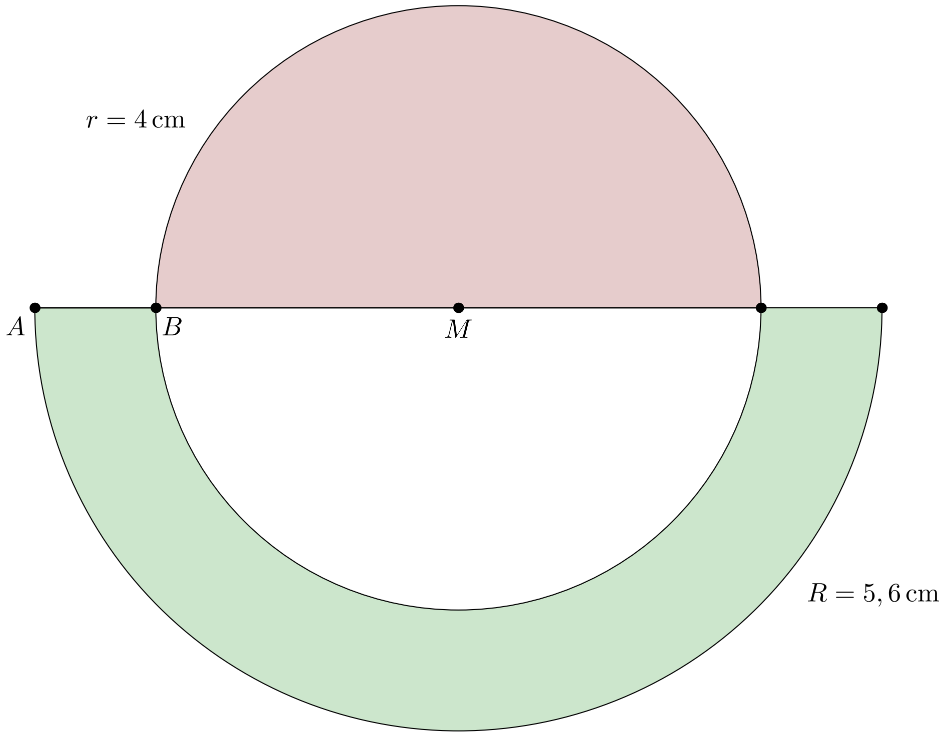
(a) Zeichne die Figur für $R = \overline{MA} = 5,6\,\mathrm{cm}$ und $r = \overline{MB} = 4\,\mathrm{cm}$.

(b) Zeige, dass der untere Kreisring und der obere Halbkreis nicht denselben Flächeninhalt besitzen.

(c) Jetzt sei $r = \sqrt{18}\,\mathrm{cm}$.
Berechne R so, dass der Inhalt der beiden getönten Flächen gleich ist.

(d) Welcher Zusammenhang muss zwischen R und r bestehen, damit die getönten Flächen gleichen Inhalt besitzen?

Lösung: (a)



(b) **Anmerkung: Zu allen Flächenmaßzahlen gehört die Einheit „cm^2“.** Es gilt:
$A_{\text{Halbkreis(klein)}} = \frac{1}{2} \cdot 4^2\pi$ und $A_{\text{Kreisring}} = \frac{1}{2} \cdot 5,6^2\pi - A_{\text{Halbkreis(klein)}}$.

Es muss also gelten: $A_{\text{Halbkreis(groß)}} = 2 \cdot A_{\text{Halbkreis(klein)}}$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 5{,}6^2\pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2\pi \quad \Big| : \pi \quad \Leftrightarrow \quad 15{,}68 \neq 16\,.$$

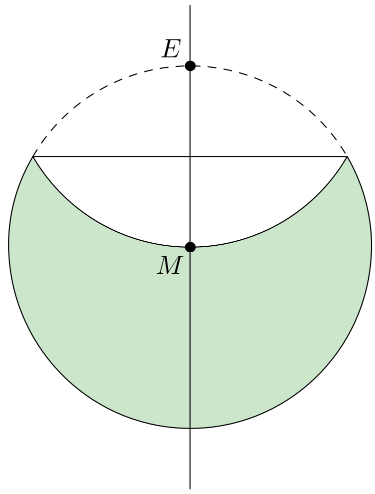
(c) $\frac{1}{2} \cdot R^2\,\pi = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{18}^{\,2}\pi\,\text{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 = 36\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad R = 6\,\text{cm}\,.$

(d) Es muss gelten: $\frac{1}{2} \cdot R^2\,\pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^{\,2}\pi \quad \Rightarrow \quad R = r\sqrt{2}\,.$

Du könntest das auch mit Hilfe der Eigenschaften der zentrischen Streckung begründen:

- Alle Kreise sind zueinander ähnlich.
- Wenn du eine Kreisfläche verdoppelst, dann gilt für den Streckungsfaktor k: $k^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{2}\,.$

32.

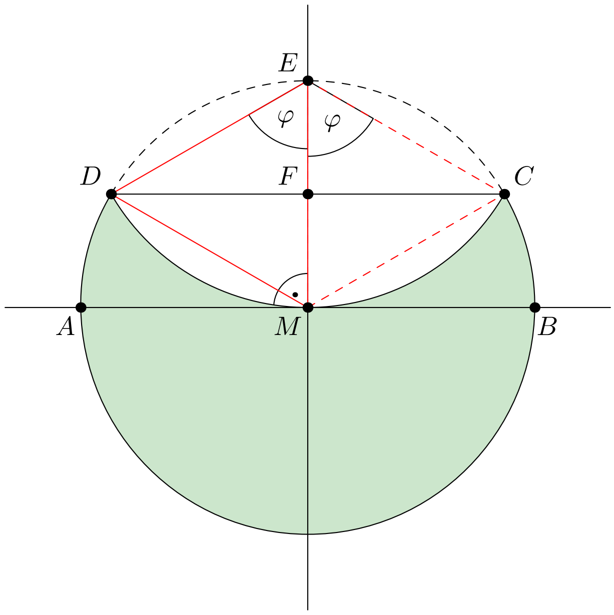


Erwin hat einen Kreis aus Papier ausgeschnitten. Er faltet nun die Kreisscheibe so, dass der Punkt E auf den Kreismittelpunkt M zu liegen kommt.

(a) Zeichne die Figur mit einem Kreisdurchmesser von 6 cm.

(b) Berechne den Anteil der eingefärbten Fläche an der gesamten Kreisfläche in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Von der Kreisscheibe hat Erwin das Kreissegment $CDMC$ heruntergeklappt.
Den Flächeninhalt dieses Kreissegmentes erhältst du, indem du vom Flächeninhalt des Kreissektors $EDMCE$ den Flächeninhalt des Dreiecks DCE subtrahierst.
Im Dreieck DME gilt: $\overline{ME} = \overline{MD} = \overline{DE} = 3\,\text{cm}$.
Also ist das Dreieck DME gleichseitig, und es gilt: $\varphi = 60°$.
Das Dreieck DCE hat den gkeichen Flächeninhalt wie dieses Dreieck DME.

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{120°}{360°} \cdot 3^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 9,42\,\text{cm}^2\,.$$

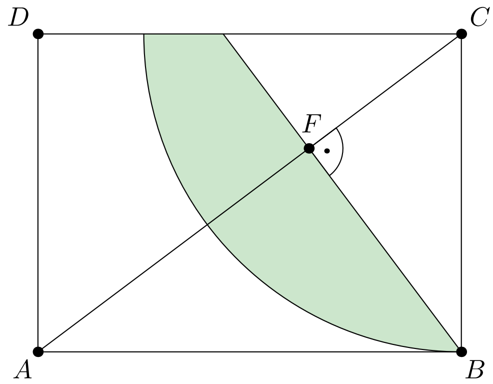
$$A_{\Delta\,DCE} = \frac{3^2}{4}\,\text{cm}^2 \cdot \sqrt{3} \approx 3,90\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{\text{Segment}} \approx 9,42\,\text{cm}^2 - 3,90\,\text{cm}^2 = 5,52\,\text{cm}^2\,.$$

Diese Segmentfläche musst du zwei Mal von der Fläche der Kreisscheibe subtrahieren:
$A_{\text{gefärbt}} \approx 3^2\pi\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 5,52\,\text{cm}^2 \approx 17,23\,\text{cm}^2\,.$

$$\frac{A_{\text{gefärbt}}}{A_{\bigcirc}} = \frac{17,23\,\text{cm}^2}{28,27\,\text{cm}^2} \approx 0,6945 = 69,54\%\,.$$

33.

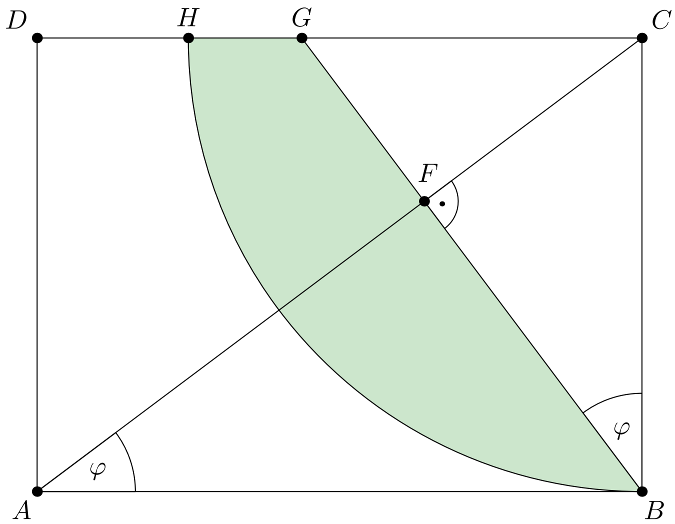


Der Punkt C des Rechtecks $ABCD$ ist der Mittelpunkt des Kreisbogens.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt A der eingefärbten Fläche. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Strategie: Subtrahiere den Flächeninhalt des Dreiecks BCG vom Flächeninhalt des Viertelkreises mit dem Mittelpunkt C und dem Radius $r = 6\,\text{cm}$.

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{4} \cdot 6^2 \pi\,\text{cm}^2 = 9\pi\,\text{cm}^2\,.$$

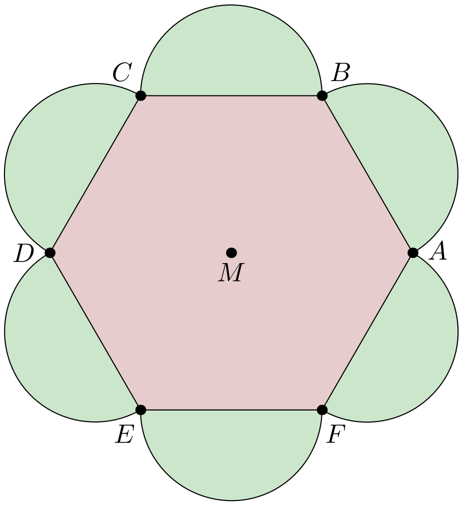
Weil sie z.B. im Winkelmaß φ übereinstimmen, sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABC und BCG zueinander ähnlich:

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{CG} = \frac{36\,\text{cm}^2}{8\,\text{cm}} = 4{,}5\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\, BCG} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 4{,}5\,\text{cm} = 13{,}5\,\text{cm}^2\,.$$

$$\Rightarrow \quad A = (9\pi - 13,5)\,\text{cm}^2 \approx 14,77\,\text{cm}^2\,.$$

34.

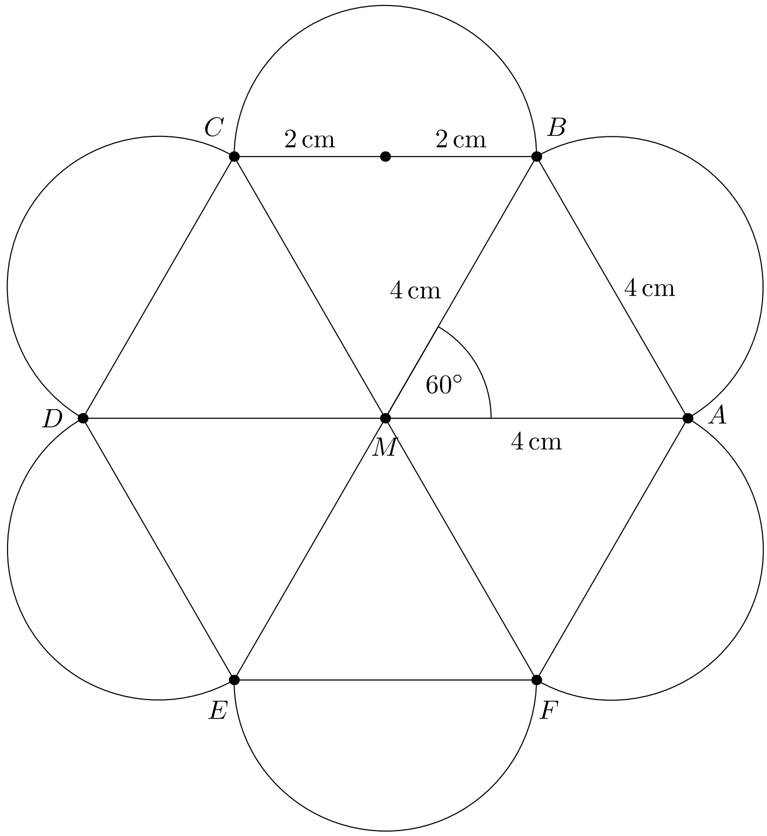


Das Sechseck $ABCDEF$ mit dem Mittelpunkt M ist regelmäßig.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AD} = 8\,\text{cm}\,.$

(b) Berechne den Flächeninhalt A der Figur. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

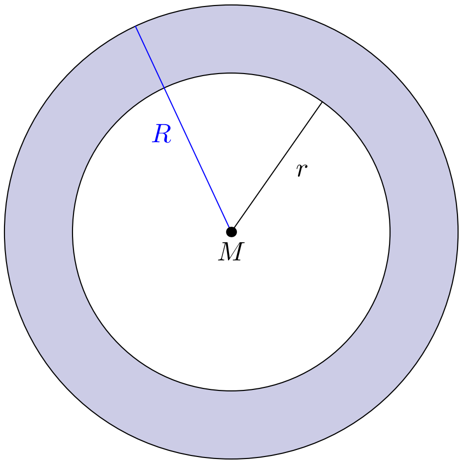
Lösung: (a)



(b) Die drei Diagonalen zerlegen jedes regelmäßige Sechseck in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke. In unserem Fall hat jedes dieser gleichseitigen Dreiecke eine Seitenlänge von 4 cm.
Die sechs kongruenten Halbkreise lassen sich paarweise zu drei Vollkreisen mit dem Radius $r = 2\,\text{cm}$ zusammenfügen.

Also: $A = \left(6 \cdot \dfrac{4^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2^2 \cdot \pi\right)\,\text{cm}^2 \approx 79{,}27\,\text{cm}^2$.

35.



(a) Zeichne die Figur für $R = 5\,\text{cm}$ und $r = 3,5\,\text{cm}$.

(b) Berechne für $R = 5\,\text{cm}$ den Kreisradius r so, dass der Kreisring 19% der großen Kreisfläche einnimmt.

(c) Berechne für $r = 3,5\,\text{cm}$ den Kreisradius R so, dass der Flächeninhalt des Kreisringes genauso groß wird wie der des kleinen Kreises.

Lösung: (a) Klar.

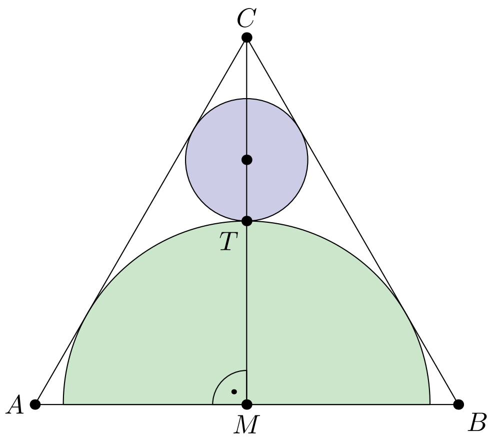
(b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned} 5^2\pi - r^2\pi &= 0,19 \cdot 5^2\pi \\ r^2\pi &= 0,81 \cdot 5^2\pi \\ r &= 0,9 \cdot 5\,\text{cm} = 4,5\,\text{cm} \end{aligned}$$

(c) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned} 3,5^2\pi &= (R^2 - 3,5^2)\pi \\ R^2\pi &= 2 \cdot 3,5^2\pi \\ R &= 3,5 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \approx 4,95\,\text{cm} \end{aligned}$$

36.

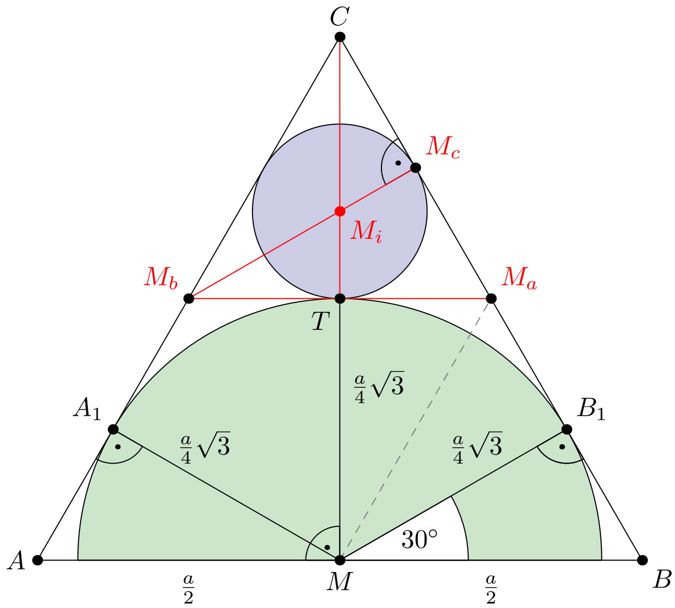


Im gleichseitigen Dreieck ABC ist M der Basismittelpunkt.
Diesem gleichseitigen Dreieck sind ein Halbkreis und ein kleinerer Kreis einbeschrieben worden. Die beiden Kreislinien berühren sich im Punkt T.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$.

(b) Berechne das Verhältnis des Flächeninhaltes des kleinen Kreises zu dem des Halbkreises.

Lösung: (a)



Wir bezeichenen die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ABC mit a.

(b) Die Dreiecke AMA_1 und MBB_1 sind halbe gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}$. Aus Symmetriegründen sind diese beiden Dreiecke zudem kongruent.
Das Dreieck MBB_1 ist (ebenso wie das Dreieck AMA_1) ein halbes gleichseitiges Dreieck mit der Dreieckshöhe $\overline{MB_1}(= \overline{MA_1}) = \frac{a}{4}\sqrt{3}$.
Weil der Punkt T auf der Halbkreislinie liegt, gilt ebenso $\overline{MT} = \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MC}$.
M_a und M_b sind also zwei Seitenmittelpunkte des gleichseitigen Dreiecks ABC.
Dann gilt $[M_aM_b] \,\|\, [AB]$.
Demnach beträgt der Inkreisradius ρ_i des Dreiecks M_bM_aC ein Viertel von dem des Dreiecks ABC.
Für den Inkreisradius ρ_g des gleichseitigen Dreiecks gilt: $\rho_g = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
$\Rightarrow \quad \rho_i = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{24}\sqrt{3}$.
Für den Flächeninhalt A_k des kleinen Kreises gilt dann:

$$A_k = \left(\frac{a}{24}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi = \frac{a^2}{96} \cdot \pi\,.$$

Für den Flächeninhalt A_{HK} des Halbkreises gilt dann:

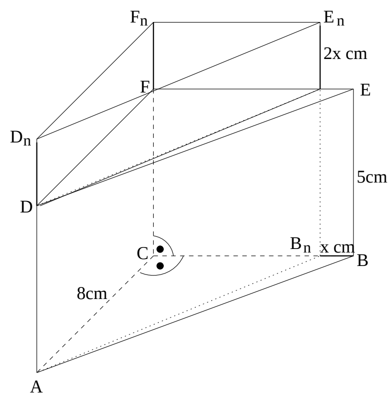
$$A_{HK} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{4}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi = \frac{3a^2}{32} \cdot \pi \,.$$

Für das fragliche Flächenverhältnis ergibt sich dann:

$$\frac{A_k}{A_{HK}} = \left[\frac{a^2}{96} \cdot \pi\right] : \left[\frac{a^2}{32} \cdot \pi\right] = \frac{32}{96} = \frac{1}{3} \,.$$

10. Raumgeometrie

1. Das rechtwinklige Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$, $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$, $\overline{CB} = 6\,\text{cm}$ ist Grundfläche eines geraden Prismas mit der Höhe 5 cm. Verkürzt man die Seite $[BC]$ um x cm und verlängert man die Höhe des Prismas um $2x$ cm, so ergeben sich neue Prismen mit der Grundfläche AB_nC. (Siehe Schrägbild)



   (a) Berechne das Volumen der Prismen $AB_nCD_nE_nF_n$ in Abhängigkeit von x. [Ergebnis: $V(x) = (-8x^2 + 28x + 120)\,\text{cm}^3$]

   (b) Berechne das maximal mögliche Volumen und gib den zugehörigen $x-$Wert an.

   (c) Berechne die $x-$Werte, bei denen Prismen das Volumen $V = 130\,\text{cm}^3$ besitzen.

Lösung: (a) $V(x) = (-8x^2 + 28x + 120)\text{cm}^3$

(b) $V_{max} = 144,5\,\text{cm}^3$ für $x = 1,75$

(c) $x_1 = 3,10 \quad x_2 = 0,40$

2. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basislänge $\overline{AB} = 12\,\text{cm}$ und dem Basismittelpunkt M. Die Dreieckshöhe $[CM]$ ist 5 cm lang.
Dieses Dreieck ist die Grundfläche einer 9,5 cm hohen Pyramide $ABCS$, deren Spitze S senkrecht über dem Mittelpunkt M liegt.

   (a) Zeichne für $q = 0,5$ und $\omega = 30°$ ein Schrägbild dieser Pyramide $ABCS$, so dass $[CM]$ auf der Schrägbildachse liegt.

   (b) Berechne die Länge der Seitenkante $[CS]$ und das Maß α des Winkels MCS:
   [Ergebnisse: $\overline{CS} \approx 10,74\,\text{cm}$ und $\alpha \approx 62,24°$]

(c) Begründe ohne Rechnung: Die Seitenkante $[AS]$ muss länger als die Seitenkante $[CS]$ sein.

(d) Auf der Seitenkante $[CS]$ wandern Punkte P_n mit dem Maß φ der Winkel P_nMC. Dabei werden laufend Dreiecke ABP_n erzeugt.

- Zeichne für $\varphi = 40°$ das Dreieck ABP_1 ein.
- Berechne die Innenwinkelmaße dieses Dreiecks ABP_1.

(e) Unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$ gibt es ein rechtwinkliges Dreieck ABP_2 mit der Hypotenuse$[AB]$.
Konstruiere dieses Dreieck ABP_2 in das Schrägbild.

(f) Untersuche, ob es unter allen Dreiecken ABP_n auch gleichseitige gibt.

(g) Das Maß φ der Neigungswinkel der Dreiecke ABP_n zur Grundfläche ABC wächst von 0° bis 90°. Eines der drei unten stehenden Diagramme beschreibt graphisch den Zusammenhang zwischen dem Winkelmaß φ und dem jeweils zugehörigen Maß ε des Innenwinkels AP_nB der Dreiecke ABP_n näherungsweise korrekt. Die beiden anderen stellen diesen Zusammenhang falsch dar.
Welche beiden sind das? Begründe jeweils deine Antwort.

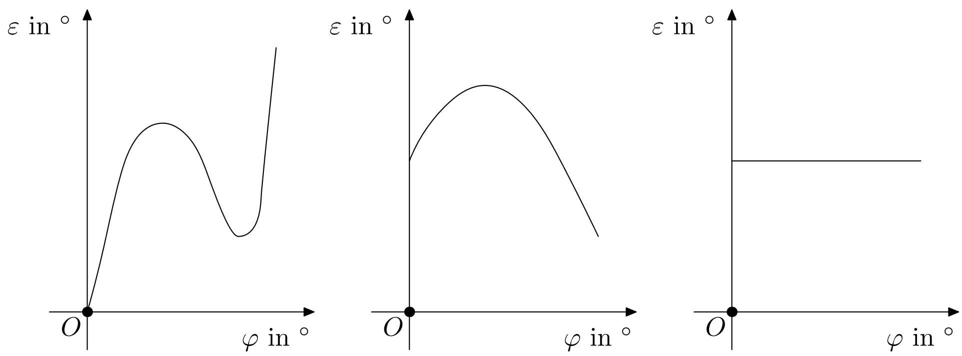
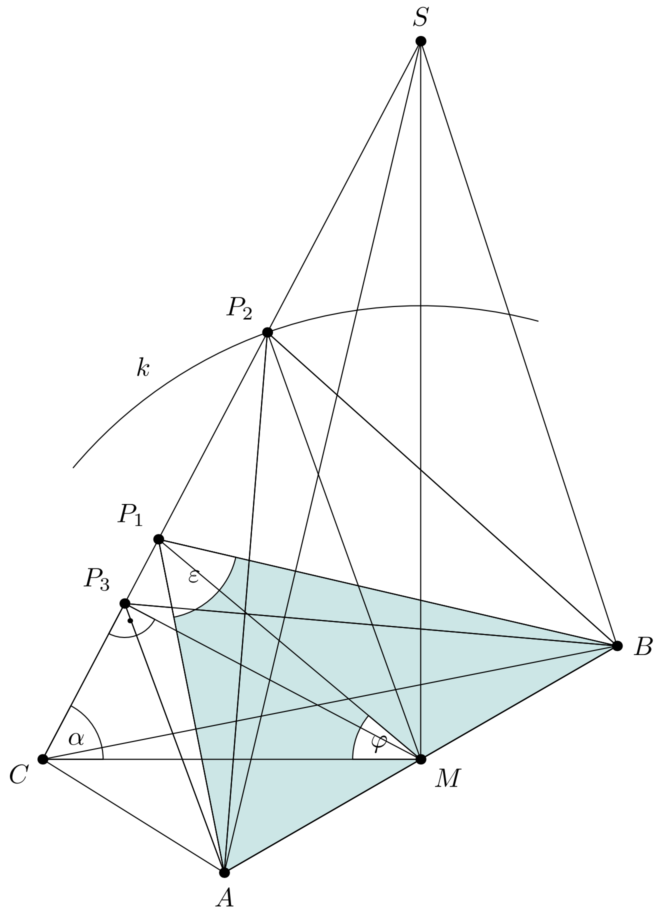


Diagramm I Diagramm II Diagramm III

Lösung: (a) Siehe Zeichnung.



(b) Es gilt: $\overline{CS}^{\,2} = (5^2 + 9,5^2)\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{CS} \approx 10,74\,\text{cm}$
Weiter gilt: $\tan\alpha = \dfrac{9,5}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 62,24°$

(c) 1. Möglichkeit:
Die beiden in M rechtwinkligen Dreiecke CMS und AMS besitzen die gemeinsame Kathete $[MS]$. Die Kathete $[AM]$ ist länger als die Kathete $[CM]$. Also ist auch die Hypotenuse $[AS]$ länger als die Hypotenuse $[CS]$.
2. Möglichkeit:
Das Dreieck CMS steht aufrecht in wahrer Größe da.
Zeichene das Dreieck AMS in wahrer Größe und vergleiche die Hypotenusenlängen $[CS]$ und $[AS]$: $\overline{AS}$ ist länger als $\overline{CS}$.

(d)
- Siehe Zeichnung.
- $\sphericalangle CP_1M \approx 180° - 40° - 62,24° \approx 77,76°$
  Sinussatz im ΔCMP_1: $\dfrac{\overline{P_1M}}{\sin 62,24°} \approx \dfrac{5\,\text{cm}}{\sin 77,76°} \quad \Rightarrow \quad \overline{P_1M} \approx 4,53\,\text{cm}$

  Das Dreieck ABP_1 ist gleichschenklig. Die Höhe $[P_1M]$ liegt auf der Symmetrieachse des Dreiecks:

  $\tan \sphericalangle MAP_1 \approx \dfrac{4,53}{6} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle MAP_1 = \sphericalangle P_1BM \approx 37,05°$

$\sphericalangle AP_1B \approx 180° - 2 \cdot 37{,}05° \approx 105{,}90°$
$\sphericalangle CP_1M \approx 180° - 40° - 62{,}24° \quad \sphericalangle CP_1M \approx 77{,}76°$

$$\frac{\overline{P_1M}}{\sin 62{,}24°} \approx \frac{5\,\text{cm}}{\sin 77{,}76°} \quad \Rightarrow \quad \overline{P_1M} \approx 4{,}53\,\text{cm}$$

Das Dreieck ABP_1 ist gleichschenklig: $\overline{P_1A} = \overline{P_1B}$. Die Höhe auf die Basis $[AB]$ liegt auf der Symmetrieachse des Dreiecks:

$$\tan \sphericalangle MAP_1 = \frac{\overline{MP_1}}{\overline{AM}} \approx \frac{5\,\text{cm}}{\sin 77{,}76°}$$

$$\Rightarrow \quad \sphericalangle MAP_1 = \sphericalangle P_1BM \approx 37{,}05° \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle AP_1B \approx 105{,}9°.$$

(e) Alle Dreiecke ABP_n sind gleichschenklig mit der gemeinsamen Basis $[AB]$. Das rechtwinklige Dreieck ABP_2 besitzt den Durchmesser des THALES-Kreises als Hypotenuse $[AB]$. Folglich muss die Höhe $[MP_2]$ dieses Dreiecks halb so lang wie die Hypotenuse, nämlich 6 cm sein.
Weil das Dreieck CMS in wahrer Größe erscheint, schneidet die Kreislinie k mit Radius 6 cm die Seitenkante $[CS]$ im Punkt P_2.

(f) Alle Dreiecke ABP_n sind gleichschenklig mit der gemeinsamen Basis $[AB]$, die 12 cm lang ist. Wenn darunter ein gleichseitiges Dreieck sein soll, dann muss einer von dessen Innenwinkeln, z.B. $\sphericalangle BAP_n$, das Maß 60° besitzen.
Je näher die Punkte P_n an die Sitze S der Pyramide heranrücken, desto höher werden die Dreiecke ABP_n mit ihren Höhen $[MP_n]$ und desto größer werden die Maße der Innenwinkel BAP_n. Falls einer der Punkte P_n auf der Spitze S landet, werden die betreffenden Maßzahlen jeweils maximal.

1. Möglichkeit:

Im ΔABS gilt: $\tan \sphericalangle BAS = \dfrac{9{,}5}{6} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle BAS < 57{,}8° < 60°$.
Die Maße der Innenwinkel der Dreiecke ABP_n erreichen also für keinen der Punkte P_n das Maß 60°. Damit existiert unter allen Dreiecken ABP_n kein gleichseitiges.

2. Möglichkeit:

Wenn eines der Dreiecke ABP_n gleichseitig sein soll, dann gilt für dessen Höhe $h = \dfrac{12}{2}\sqrt{3} > 10{,}39\,\text{cm} > 9{,}5\,\text{cm} = \overline{MS}$.
Also gibt es unter allen Dreiecken ABP_n kein gleichseitiges.

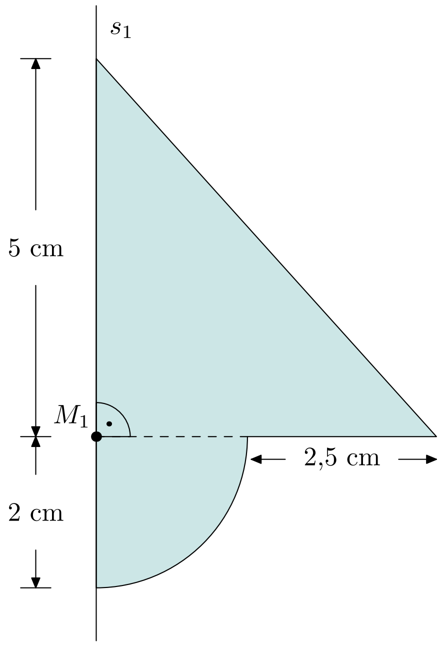
(g) Im Diagramm I beginnt der Graph im Ursprung. Das würde bedeuten:
Dem Winkelmaß $\varphi = 0°$ ist das Winkelmaß $\varepsilon = 0°$ zugeordnet.
Folglich müsste das Dreieck ABC wegen $\varphi = 0°$ zur Strecke entarten. Das ist offensichtlich nicht der Fall. Also stellt das Diagramm I den Sachverhalt falsch dar.
Aus dem Diagramm III kannst du ablesen, dass sich das Winkelmaß ε nicht ändert, also vom Winkelmaß φ unabhängig ist. Der Punkt P_3 jedoch (vgl. Zeichnung) besitzt unter allen Punkten P_n die kürzeste Entfernung zur Basis $[AB]$. Also muss dort das

Winkelmaß ε am größten ausfallen. Daher muss dieses Winkelmaß veränderlich sein: Die Darstellung im Diagramm III ist auch falsch.

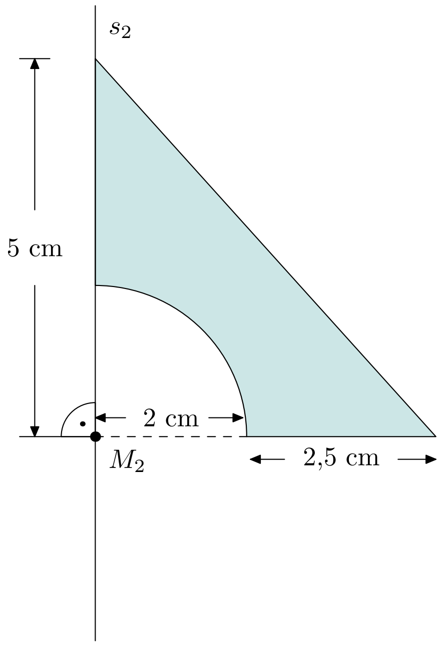
Anmerkungen:

Im Aufgabentext wird ausgesagt, dass eines dieser drei Diagramme den Sachverhalt (näherungsweise) richtig darstellt. Das kann dann nur das Diagramm II sein. Es gibt zu dieser Teilaufgabe eine dynamische Konstruktion mit GEONExT (Dateiname: 10bm001_1.gxt), welche diesen Graphen bei der Bewegung des Punktes P auf der Kante $[CS]$ korrekt wiedergibt.

3. In der Figur 1 und in der Figur 2 sind die Punkte M_1 und M_2 die Mittelpunkte der zugehörigen Kreisbögen.
   Jede der beiden grau getönten Flächen rotiert um die betreffende Achse s_1 bzw. s_2.



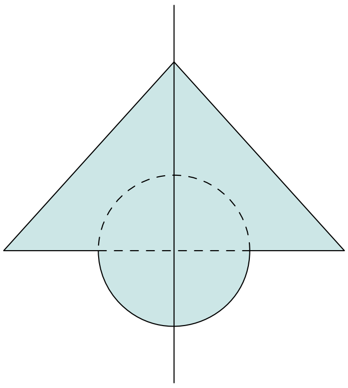
Figur 1



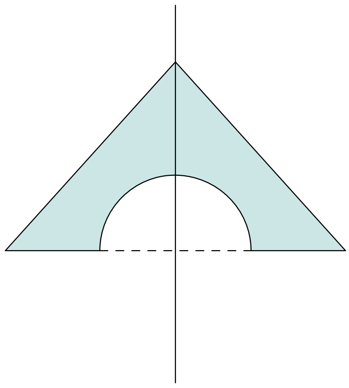
Figur 2

   (a) Berechne den Unterschied der Rauminhalte der beiden Rotationskörper.
   (b) Maria behauptet: „Die Oberflächen der beiden Rotationskörper sind gleich groß.“ Hat Maria Recht? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) Am besten zeichnest du dir erst einmal die Axialschnitte der beiden Rotationskörper hin:



Zur Figur 1



Zur Figur 2

(b) Der zur Figur 1 gehörende Rotationskörper R_1 besteht aus einem Kegel, an dessen Grundfläche eine Halbkugel hängt. Aus dem Kegel des Rotationskörpers R_2 ist eine Halbkugel mit dem gleichen Radius herausgebohrt worden. Beide Kegel von R_1 und R_2 sind kongruent.
Also unterscheiden sich die entsprechenden Rauminhalte V_1 und V_2 der beiden Rotationskörper lediglich um das Volumen einer Kugel mit Radius 2 cm:

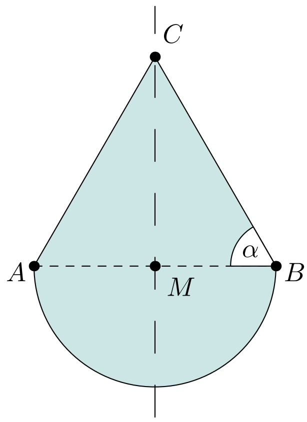
$$V_1 - V_2 = \Delta V = \frac{4}{3} \cdot 2^3 \cdot \pi \,\text{cm}^3 = \frac{32}{3} \cdot \pi \,\text{cm}^3 \approx 33,51 \,\text{cm}^3.$$

(c) Die Oberflächen O_1 und O_2 der Rotationskörper R_1 und R_2 bestehen aus paarweise kongruenten Teilflächen:

- Zwei Kreisringe mit dem Durchmesser 9cm, die jeweils $2,5$cm breit sind
- Zwei Kegelmäntel
- Zwei Halbkugeln mit dem Durchmesser 4 cm

Folglich hat Maria Recht: $O_1 = O_2$.
Anmerkung: Natürlich kannst du die Oberflächen auch jeweils berechnen, aber dadurch verzögerst du nur die Entscheidung, ob Maria Recht hat.

4.



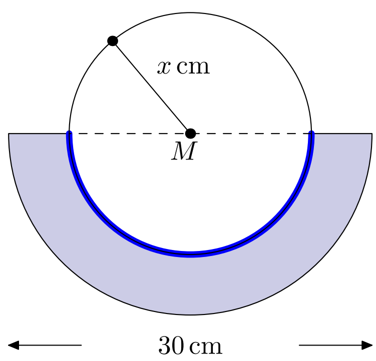
Die Figur stellt den Axialschnitt eines Rotationskörpers dar, der sich aus einer Halbkugel und einem Kreiskegel mit $\alpha = 60°$ zusammensetzt. Das Volumen der Halbkugel beträgt 0,5 Liter.
Berechne die Oberfläche des Rotationskörpers in der Einheit cm^2.

Lösung: Es sei r der Radius der Halbkugel.
Für das Volumen der Halbkugel gilt dann: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3\pi = 500\,\mathrm{cm}^3$.
$\Rightarrow \quad r \approx 6{,}20\,\mathrm{cm}$.
Für die Oberfläche O_1 der Halbkugel ergibt sich:
$O_1 \approx 2 \cdot 6{,}20^2 \cdot \pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 241{,}53\,\mathrm{cm}^2$.
Das Dreieck ABC ist aus Symmetriegründen gleichschenklig. Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck ein Innenwinkel das Maß 60° hat, dann muss dieses Dreieck gleichseitig sein. Für die Länge s der Mantellinie gilt dann: $s = 2 \cdot r \approx 12{,}40\,\mathrm{cm}$. Damit ergibt sich für die Mantelfläche O_2 des Kegels: $O_2 \approx 6{,}20 \cdot \pi \cdot 12{,}40\,\mathrm{cm}^2 \approx 241{,}53\,\mathrm{cm}^2$.
Anmerkung: Auch wenn du mit exakten Werten rechnen würdest, hätten die Mantelfläche des Kegels und die Oberfläche der Halbkugel gleiches Maß.
$O_{ges} = O_1 + O_2 \approx 483{,}06\,\mathrm{cm}^2$.

5. Frau Lunde will für ihre Familie $0{,}5\,\mathrm{kg}$ Spaghetti in einem Topf mit $20\,\mathrm{cm}$ Durchmesser kochen. In der Anleitung steht: „Für $100\,\mathrm{g}$ Spaghetti rechnet man einen Liter Wasser.“
Wie hoch muss das Wasser nach dieser Anleitung im Topf anfangs stehen, wenn 15% der eingefüllten Wassermenge während des Kochvorgangs verdampfen?

Lösung: $0{,}5\,\mathrm{kg} = 500\,\mathrm{g}$. Wenn für $100\,\mathrm{g}$ Spaghetti ein Liter Wasser benötigt wird, müssen also zunächst 5 Liter $= 5000\,\mathrm{cm}^3$ Wasser in den Topf.
Zusätzlich muss noch diejenige Wassermenge berücksichtigt werden, die während des Kochvorgangs verdampft.
Insgesamt müssen sich dann $5000\,\mathrm{cm}^3 \cdot 1{,}15 = 5750\,\mathrm{cm}^3$ Wasser im Topf sein.
Die Wassermenge im Topf hat eine zylindrische Form mit einem Radius von $10\,\mathrm{cm}$ und der Einfüllhöhe h: $5750\,\mathrm{cm}^3 = (10\,\mathrm{cm})^2 \cdot \pi \cdot h \quad \Rightarrow \quad h \approx 18{,}3\,\mathrm{cm}$
Das Wasser im Topf muss knapp $20\,\mathrm{cm}$ hoch stehen.

6.



Die Darstellung zeigt den Axialschnitt eines Zimmerbrunnens: Eine Kugel aus Marmor mit dem Radius $r = x\,\text{cm}$ ist in eine unbewegliche Halbkugelschale mit einem äußeren Durchmesser von $30\,\text{cm}$ aus dem gleichen Material eingepasst. Ein dünner Wasserfilm in der Berührfläche der beiden Körper bewirkt, dass die Kugel fast reibungsfrei rotieren kann.

(a) Zeichne die Figur für $x = 7{,}5$ im Maßstab $1:5$.

(b) Berechne für $x = 7{,}5$ die Oberfläche der Halbkugelschale in der Einheit dm^2.

(c) • Zeige: Für die Oberfläche O der Kugelschale gilt in Abhängigkeit von x:

$$O(x) = (x^2 + 475) \cdot \pi\,\text{cm}^2$$

• Bestätige damit dein Ergebnis der Aufgabe (b).

(d) Berechne x so, dass die Oberfläche der Halbkugelschale fünfmal so groß wie die der Vollkugel ist.

(e) Berechne für $x = 7{,}5$ das Volumen der Halbkugelschale in der Einheit dm^3.

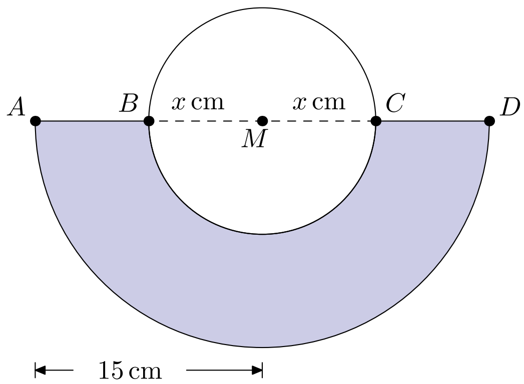
(f) • Zeige: Für das Volumen V der Kugelschale gilt in Abhängigkeit von x:

$$V(x) = (2250 - \frac{2}{3}x^3) \cdot \pi\,\text{cm}^3$$

• Bestätige damit dein Ergebnis der Aufgabe (e).

(g) Berechne x so, dass die Halbkugelschale genau so schwer wie die Vollkugel ist.

Lösung: (a)



Für die Zeichnung gilt: Kugelradius $r = (7{,}5 : 5)\,\text{cm} = 1{,}5\,\text{cm}$ und äußerer Radius der Halbkugelschale $R = (15 : 5)\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$.
Beginne am besten mit dem Vollkreis.

(b) Äußere Halbkugel: $O_a = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15^2 \pi\,\text{cm}^2 = 250\pi\,\text{cm}^2$

Innere Halbkugel: $O_i = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7{,}5^2 \pi\,\text{cm}^2 = 112{,}5\pi\,\text{cm}^2$

Kreisring aus $[AB]$ bzw. $[CD]$: $A_{KR} = (15^2\pi - 7{,}5^2\pi)\,\text{cm}^2 = 168{,}25\,\text{cm}^2$

Somit ergibt sich für die Oberfläche der Halbkugelschale in diesem Fall:
$O_{HKS} = 531{,}25\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 1668{,}97\,\mathrm{cm}^2 \approx 1669\,\mathrm{cm}^2 \approx 16{,}7\,\mathrm{dm}^2$.

(c)
- Äußere Halbkugel: $O_a = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15^{\,2}\pi\,\mathrm{cm}^2 = 250\pi\,\mathrm{cm}^2$

  Innere Halbkugel: $O_i = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x^{\,2}\pi\,\mathrm{cm}^2 = 2x^2\pi\,\mathrm{cm}^2$

  Kreisring aus $[AB]$ bzw. $[CD]$: $A_{KR} = (15^2\pi - x^2\pi)\,\mathrm{cm}^2 =$
  $= (225\pi - x^2\pi)\,\mathrm{cm}^2$

  Somit ergibt sich: $O(x) = (250 + 2x^2 + 225 - x^2)\pi\,\mathrm{cm}^2 = (x^2 + 475)\pi\,\mathrm{cm}^2$.

- $O(7,5) = (7,5^2 + 475)\pi\,\mathrm{cm}^2 = 531,25\pi\,\mathrm{cm}^2$, siehe Lösung (b).

(d) Die Maßzahlengleichung für $x \in \mathbb{R}^+$ heißt:
$5 \cdot 4x^2\pi = (x^2 + 475)\pi \quad \Leftrightarrow \quad 19x^2 = 475 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$

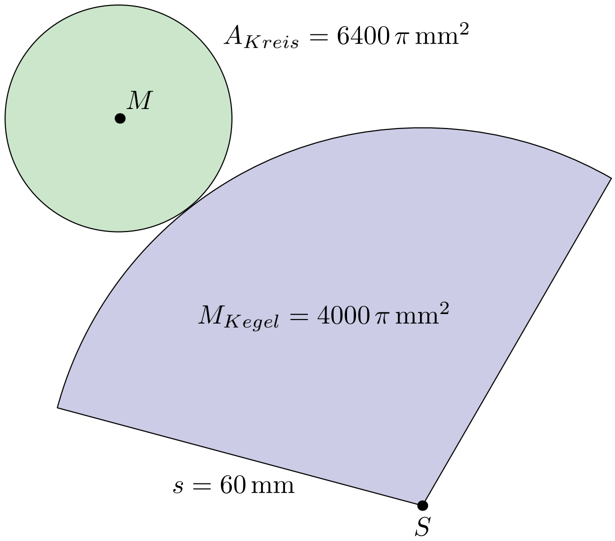
(e) $V = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 15^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 7.5^3\right)\,\mathrm{cm}^3 = 1968,75\pi\,\mathrm{cm}^3 \approx 6185\,\mathrm{cm}^3 \approx 6,2\,\mathrm{dm}^3$

(f)
- $V(x) = \frac{2}{3}\pi\left(15^3 - x^3\right)\,\mathrm{cm}^3 = \left(2250 - \frac{2}{3}x^3\right)\pi\,\mathrm{cm}^3$
- $V(7,5) = \left(2250 - \frac{2}{3} \cdot 7,5^3\right)\pi = 1968,75\pi\,\mathrm{cm}^3$, siehe Lösung (e).

(g) In der Angabe steht, dass die Halbkugelschale und die Vollkugel aus dem gleichen Material sind. Wenn das Volumen der beiden Körer identisch ist, dann müssen auch die zugehörigen Massen gleich sein. Daraus ergibt sich die zugehörige Maßzahlengleichung mit $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\left(2250 - \frac{2}{3}x^3\right)\pi = \frac{4}{3}x^3\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2250 = 2 \cdot x^3 \qquad \Rightarrow \quad x \approx 10,40$$

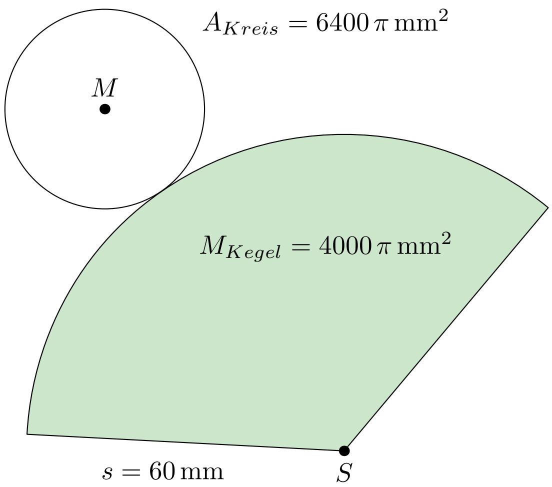
7.



Egon hat die Mantelfläche eines Kegels und dessen Grundfläche aus Papier ausgeschnitten. Zeige durch Rechnung, dass er die die beiden Teile nicht lückenlos und nicht bündig zu einem Kegel zusammenfügen kann.

Lösung: Aus $A_{Kreis} = 6400\,\pi\,\text{mm}^2$ folgt $r = 80\,\text{mm}$.
Wegen $M_{Kegel} = r \cdot \pi \cdot s$ folgt dann $M_{Kegel} = 80 \cdot \pi \cdot 60\,\text{mm}^2 = 4800\,\pi\,\text{mm}^2$ und nicht wie angegeben $4000\,\pi\,\text{mm}^2$. Also passen Grundkreis und Mantelfläche des Kegels nicht zusammen.

8.



Erich hat die Mantelfläche eines Kegels und einen Kreis ausgeschnitten. Zeige rechnerisch, dass die Mantelfläche des Kegels und der Kreis als dessen Grundfläche nicht lückenlos und bündig zusammengefügt werden können.

Lösung: Für den Kreisradius r gilt: $r^2\pi = 6400 \cdot \pi\,\mathrm{mm}^2 \quad \Rightarrow \quad r = 80\,\mathrm{mm}$.
Nach der Formelgleichung für den Kegelmantel muss gelten:
$80\,\mathrm{mm} \cdot \pi \cdot 60\,\mathrm{mm} = 4000 \cdot \pi\,\mathrm{mm}^2$, was falsch ist.
Also passen die beiden Flächenstücke nicht zusammen.