
SMART

**Sammlung mathematischer Aufgaben
als Hypertext mit T_EX**

Jahrgangsstufe 9 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

*Die Aufgaben stehen für private und unterrichtliche Zwecke zur Verfügung. Eine kommerzielle Nutzung bedarf der vorherigen Genehmigung.

Inhaltsverzeichnis

I. Wahlpflichtfächergruppe I	3
1. Lineare Gleichungssysteme	4
2. Reelle Zahlen	9
3. Quadratische Funktionen	13
4. Quadratische Gleichungen und Ungleichungen	29
5. Flächeninhalt ebener Vielecke	35
6. Abbildung durch zentrische Streckung	88
7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck	110
8. Berechnungen am Kreis	132
9. Raumgeometrie	166
 II. Wahlpflichtfächergruppe II/III	 171
10. Lineare Funktionen	172
11. Gleichungssysteme	175
12. Reelle Zahlen	179
13. Flächeninhalt ebener Vielecke	183
14. Abbildung durch zentrische Streckung	228
15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck	244
16. Raumgeometrie	261

Teil I.

Wahlpflichtfächergruppe I

1. Lineare Gleichungssysteme

1. (a) $L = \{(-3 \mid 5)\}$
(b) - -
2. (a) $L = \{(\frac{1}{3}a + 2 \mid \frac{5}{3}a + 1)\}$
(b) Die beiden Gleichungen liefern identische Geraden, also folgt:
 $L = \{(x \mid y) \mid y = 2x - 9\}$
3. $L = \{(-4 \mid 2)\}$
4. $L = \{(5 \mid 2, 5)\}$
5. (a) - -
(b) $S(3, 6 \mid 2, 1)$
(c) Es gibt keine eindeutige Lösung; eine mehr oder weniger geschickte Wahl aus dem Geradenbüschel bleibt den Schülern überlassen.
(d) Jede Gerade, welche die Gerade h nicht schneidet, muss zu dieser parallel sein. Weil g aber nicht parallel zu h liegt, muss g auch alle Parallelen zu h schneiden.
6. (a) - -
(b) $g : y = \frac{1}{3}x + 1,5$
(c) $S(-1, 5 \mid 1)$
(d) Es gibt keine eindeutige Lösung.
(e) Jede Gerade, welche die Gerade h nicht schneidet, muss zu dieser parallel sein. Weil g aber nicht parallel zu h liegt, muss g auch alle Parallelen zu h schneiden.
7. (a) - -
(b) $g_3 : y = 4,25x - 4,5$
(c) $S(3, 6 \mid 2, 1)$

1. Lineare Gleichungssysteme

(d) $g_4 : y = x + 500$

(e) $A = 8,1 \text{ FE}$

8. Die Zahlen heißen 12 und 65.

9. - -

10.

- Die Gleichung (1) besagt, dass die Summe aus zwei Zahlen x und y den Wert 1 ergeben soll.

Gleichzeitig soll nach der Gleichung (2) die Summe aus denselben Zahlen x und y den Wert -37 ergeben. Das ist ein Widerspruch. Also gilt $L = \emptyset$.

- Wenn du die Gleichung (2) spaltenweise von der Gleichung (1) subtrahierst, ergibt sich in ausführlicher Schreibweise die Gleichung

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 38$$

Weil die linke Seite der Gleichung stets Null ergibt, steht hier eine stets falsche Aussage; d.h. $L = \emptyset$.

11. (a) „Da müssten wir ja die beiden Gleichungen nach x oder nach y auflösen, und das wird schwierig, weil wir am Ende eine Gleichung durch 7 oder durch 9 teilen müssten. Dann entstehen aber Brüche oder periodische Dezimalzahlen. Dadurch wird die Lösung unnötig erschwert.“

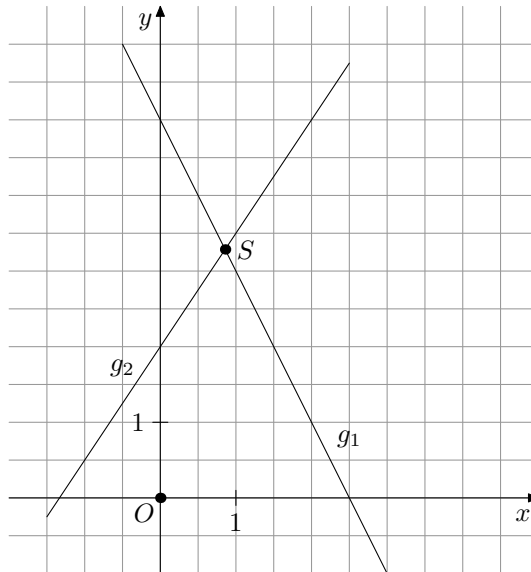
- (b) Hier eignet sich das **Additionsverfahren** zur Lösung:

$$\begin{array}{rclclcl}
 & 3x & - & 7y & = & -27 & (1) \mid \cdot 5 \\
 \wedge & -5x & + & 9y & = & 37 & (2) \mid \cdot 3 \\
 \hline
 & 15x & - & 35y & = & -135 & (1)' \\
 \wedge & -15x & + & 27y & = & 111 & (2)' \\
 \hline
 (1)' + (2)' : & & & -8y & = & -24 &
 \end{array}$$

$$\Rightarrow y = 3, \text{ z.B. in } (1) : x = -2 \quad L = \{(-2 \mid 3)\}$$

12. (a) Bevor du die Gerade g_1 zeichnen kannst, musst du erst ihre Gleichung nach y auflösen:
 $y = -2x + 5$.

1. Lineare Gleichungssysteme



(b)

$$\begin{aligned} 1,5x + 2 &= -2x + 5 \\ 3,5x &= 3 \quad x \approx -0,86 \quad \text{in } g_1: y \approx 1,5 \cdot 0,86 + 2 \\ &\quad y \approx 3,29 \quad \Rightarrow \quad S(0,86 \mid 3,29) \end{aligned}$$

- (c) In der Zeichenebene muss jede Gerade h , welche die Gerade g_2 nicht schneidet, zu dieser **parallel** verlaufen; d.h. die Gleichungen der Geraden g_2 und h müssen **den gleichen Steigungsfaktor** besitzen.

Dann lautet z.B. die Gleichung einer Geraden h : $y = 1,5x - 11\frac{13}{17}$.

- (d) Grundsätzlich müsstest du die Koordinaten des Punktes A in die Gleichung der Geraden g_2 einsetzen und dann entscheiden, ob die Gleichung eine wahre oder falsche Aussage liefert. Das wäre aber mit erheblichem Rechenaufwand verbunden. „Leider“ helfen herkömmliche Taschenrechner im Moment (im Jahre 2008) auch nicht weiter, weil sie nicht so viele Stellen verarbeiten können. Also muss es noch einen anderen Lösungsweg geben:

Der Punkt A liegt im IV. Quadranten. Die Gerade g_2 verläuft aber offenbar nicht durch diesen Quadranten. Also liegt der Punkt A nicht auf der Geraden g_2 .

13. Anzahl der Goldhamster: x und Anzahl der Zwergkaninchen: y .

Zahl der verkauften Tiere: $10 + x + y = 23$

Einnahmen in €: $10 \cdot 2,5 + 4 \cdot x + 8 \cdot y = 97$.

Damit erhältst du das folgende Gleichungssystem:

1. Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rclcrcl}
 & x & + & y & = & 13 & (1) \mid \cdot (-4) \\
 \wedge & 4x & + & 8y & = & 72 & (2) \\
 \hline
 & -4x & - & 4y & = & -52 & (1)' \\
 \wedge & 4x & + & 8y & = & 72 & (2)' \\
 \hline
 (1)' + (2)': & & & 4y & = & 20 & \mid : 4
 \end{array}$$

Also: $y = 5$ in (1) : $x = 8$.

Es wurden acht Goldhamster und fünf Zwergkaninchen verkauft.

14. (a) Hier gilt: $63 \text{ cm} = 2 \cdot h + t$.

(b) Z.B.:

$$h_1 = 20 \text{ cm} \Rightarrow t_1 = 23 \text{ cm}$$

$$h_1 = 18 \text{ cm} \Rightarrow t_1 = 27 \text{ cm}.$$

- (c) Es gilt: $h = (63 \text{ cm} - t) : 2$

$$\begin{array}{rcl}
 h = (63 \text{ cm} - t) : 2 & \leq & 16 \text{ cm} \mid \cdot 2 \\
 63 \text{ cm} - t & \leq & 32 \text{ cm} \mid -63 \text{ cm} \\
 -t & \leq & -31 \text{ cm} \mid \cdot (-1) \\
 t & \geq & 31 \text{ cm}
 \end{array}$$

Die Stufentiefe muss also mindestens 31 cm betragen.

- (d) In der Formelgleichung gilt dann $h = t$: $63 \text{ cm} = 3t$ $t = 21 \text{ cm}$.
Eine Stufentiefe von nur 21 cm wäre für ältere Leute zu gefährlich.

- (e) Es werden 1, 20 m : 15 = 120 cm : 15 cm = 8 Stufen benötigt.

$$63 \text{ cm} = 2 \cdot 15 \text{ cm} + t \Rightarrow t = 33 \text{ cm}.$$

$$33 \text{ cm} \cdot 8 = 264 \text{ cm} = 2,64 \text{ m}.$$

Die gesamte Treppenlänge beträgt also 2,64 m.

15. (a) Wegen $\mathbb{T}_{77} = \{1; 7; 11; 77\}$ folgt

entweder:

$$\begin{array}{rclcrcl}
 & a & + & b & = & 11 & (1) \\
 \wedge & a & - & b & = & 7 & (2) \\
 \hline
 (1) + (2) : & 2a & & & = & 18
 \end{array}$$

$$\Rightarrow a = 9 \quad \text{z.B. in (2): } b = 2$$

$$\text{Probe: } 9^2 - 2^2 = 81 - 4 = 77, \text{ stimmt.}$$

oder:

$$\begin{array}{rclcrcl}
 & a & + & b & = & 77 & (1) \\
 \wedge & a & - & b & = & 1 & (2) \\
 \hline
 (1) + (2) : & 2a & & & = & 78
 \end{array}$$

$$\Rightarrow a = 39 \quad \text{z.B. in (2): } b = 38$$

$$\text{Probe: } 39^2 - 38^2 = 1521 - 1444 = 77, \text{ stimmt.}$$

1. Lineare Gleichungssysteme

$$\Rightarrow L = \{(9 \mid 2); (39 \mid 38)\}$$

- (b) 83 ist eine Primzahl. Wegen $T_{83} = \{1; 83\}$ folgt

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 83 \quad (1) \\ \wedge & & \\ a - b & = & 1 \quad (2) \end{array}$$

$$(1) + (2) : \quad 2a = 84$$

$$\Rightarrow a = 42 \quad \text{z.B. in (2): } b = 41$$

$$\text{Probe: } 42^2 - 41^2 = 1764 - 1681 = 83, \text{ stimmt.}$$

- (c) Wegen $T_{38} = \{1; 2; 19; 38\}$ folgt z.B.

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 19 \quad (1) \\ \wedge & & \\ a - b & = & 2 \quad (2) \end{array}$$

$$(1) + (2) : \quad 2a = 21 \quad \Rightarrow \quad a \notin \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad b \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Damit folgt: } L = \emptyset.$$

- (d) Das folgende Gegenbeispiel zeigt, dass Edwin Unrecht hat:

$$a^2 - b^2 = 44. \text{ Daraus wird z.B.:}$$

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 22 \quad (1) \\ \wedge & & \\ a - b & = & 2 \quad (2) \end{array}$$

$$(1) + (2) : \quad 2a = 24$$

$$\Rightarrow a = 12 \text{ und } b = 10.$$

$$\text{In der Tat ist } 12^2 - 10^2 = 144 - 100 = 44.$$

Für $a^2 - b^2 = 2^n \cdot p$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $p \in \mathbb{P}$ ist die Lösungsmenge nie leer.

2. Reelle Zahlen

1. Vereinfache jeweils den Term so weit wie möglich ohne mit dem Taschenrechner zu runden. Es muss ein logischer Rechenweg zum Ergebnis führen.

(a) $\sqrt{(\sqrt{1000} + \sqrt{999}) \cdot (\sqrt{1000} - \sqrt{999})}$

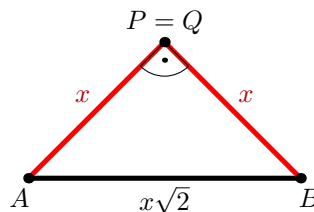
(b) $(\sqrt{3}^2 - 3) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})^{3876}$

(a) 1

(b) 0

2.

(a)



Die Hypotenuse $[AB]$ des Dreiecks ABP bzw. ABQ ist so lang wie die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge x , nämlich $\overline{AB} = x \cdot \sqrt{2}$.

Der Umfang dieses Dreiecks muss die Stablänge l ergeben:

$$x + x + x\sqrt{2} = l \Leftrightarrow x(2 + \sqrt{2}) = l \Leftrightarrow x = \frac{l}{2 + \sqrt{2}}$$

(b) • $\frac{l}{2 + \sqrt{2}} = \frac{l}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2l - l\sqrt{2}}{2} = l - \frac{l}{2}\sqrt{2} = x,$

was zu zeigen war.

- Der THALES-Halbkreis unter der Strecke $[PQ]$ schneidet deren Symmetrieachse s im Punkt S .

Folglich sind die beiden Dreiecke PSM und SQM kongruente gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke, die du zu einem Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AM} = \overline{MQ} = \overline{MS} = \frac{l}{2}$ und der Diagonalenlänge $\overline{PS} = \overline{QS} = \overline{PB} = \overline{QA} = \frac{l}{2}\sqrt{2}$ zusammenfügen könntest.

Dann besitzen aber die Strecken $[AQ]$ und $[BQ]$ jeweils die Länge $l - \frac{l}{2}\sqrt{2} = x$ (siehe oben).

2. Reelle Zahlen

- Ein 2,40 m = 240 cm langer Metallstab ist im Maßstab 1:20 in deiner Zeichnung 240 cm : 20 = 12 cm lang.
 - Zeichne die Mittelsenkrechte s der Strecke $[PQ]$
 - Zeichne den THALES-(Halb)Kreis k_T unter der Strecke $[PQ]$
 - $k_T \cap s = \{S\}$
 - $k_1(P, r_1 = \overline{PS}) \cap [PQ] = \{B\}$
 - $k_2(Q, r_2 = \overline{QS}) \cap [PQ] = \{A\}$
 - $k_3(B, r_3 = \overline{BQ}) \cap s = \{R\}$ oder $k_4(A, r_4 = \overline{AP}) \cap s = \{R\}$
oder $k_3 \cap k_4 = \{R\}$
 - Das Dreieck ABR ist das gesuchte.

3. (a) Bei der Basis 1 kann der Exponent heißen, wie er will: Der Potenzwert ist immer 1.
 $(3 + 1^{9876534212345}) \cdot (7\sqrt{2} - 3\sqrt{2})^2 = 4 \cdot (4\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 16 \cdot 2 = 128$

- (b) Jede Potenz mit der Basis 0 und einem natürlichen Exponenten hat den Wert 0.

$$\left(\frac{185}{37} - 0^{555666777888999}\right) : \left(\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} + 95\right) =$$

$$= 5 : \left(\sqrt{\frac{50}{2}} + 95\right) = 5 : 100 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

(c) $\sqrt{9\frac{1}{4}} : \sqrt{4\frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{37}{4}} : \sqrt{\frac{37}{8}} = \sqrt{\frac{37}{4} \cdot \frac{8}{37}} = \sqrt{2}$

- (d) Der Term stellt ein Produkt aus drei Faktoren dar: In jedem Klammernpaar steht einer davon.

Ein Produkt hat dann den Wert 0, wenn mindestens ein Faktor den Wert 0 hat. Du siehst:

$$\underbrace{\left(\sqrt{12} + 13^{1000}\right)}_{>0} \cdot \left(\sqrt{1}^{777555333111} - \frac{1}{2} : \frac{3}{6}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{9888777666555}{9888777666554} + 14^{-87}\right)}_{>0}$$

Dann muss der Faktor in der Mitte den Wert 0 besitzen:

$$\sqrt{1} = 1. \text{ Nach Lösung (a) ist also } \sqrt{1}^{9876534212345} = 1$$

$$\text{und } \frac{1}{2} : \frac{3}{6} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1.$$

Somit vereinfacht sich der mittlere Faktor zu $1 - 1 = 0$. Damit ist der ganze Produktwert 0.

2. Reelle Zahlen

4. $\sqrt{9\frac{1}{4}}$ ist ausführlich geschrieben $\sqrt{9 + \frac{1}{4}}$.

Claudia hat also über einem **Pluszeichen** die Wurzel in zwei einzelne Wurzeln zerlegt. Das darfst du aber nur bei **Punktrechnungen** tun.

Der richtige Weg wäre: $\sqrt{9\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$. Spätestens hier erkennst du, dass die Wurzel „nicht aufgeht“; d.h. das Ergebnis ist nicht rational.

Und tatsächlich: $\frac{\sqrt{37}}{2} \approx 3,041381265$.

5. Wenn $\sqrt{2} = 1,414213562$ wäre, dann müsste umgekehrt

$$1,414213562^2 = 1,414213562 \cdot 1,414213562 = 2 \text{ gelten.}$$

Wenn man aber eine Zahl mit einer anderen Zahl multipliziert, dann ist die Endziffer des Produktwertes die letzte Ziffer des Produktwertes der beiden Endziffern der beiden Faktoren.

Beispiel: $109457 \cdot 5620003$ liefert das Produkt der Endziffern $7 \cdot 3 = 21$.

Also endet der Produktwert aus $109457 \cdot 5620003$ mit der Ziffer 1. Bei Dezimalzahlen gilt diese Regel natürlich auch.

Der Produktwert $1,414213562 \cdot 1,414213562$ besitzt $9 + 9 = 18$ Stellen nach dem Komma, wobei die letzte Ziffer nicht 0 sein kann, denn dann wäre ja schon nach 17 Ziffern Schluss. Die letzte Ziffer ist $2 \cdot 2 = 4$.

Der ETR rundet also auf 9 Stellen nach dem Komma.

Anmerkung:

Es ist $1,414213562 \cdot 1,414213562 = 1,999999998944727844$, also treten die vorhergesagten 18 Stellen nach dem Komma auf.

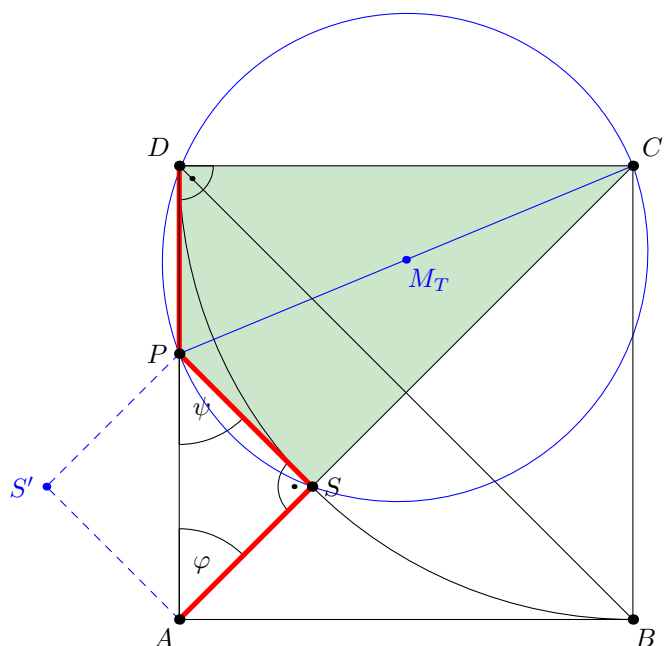
Der ETR zeigt aber nur 9 Stellen nach dem Komma an. Also muss er runden: Die 10. Ziffer im Ergebnis ist eine 9. Also wird die 9. Ziffer nach dem Komma, nämlich die 8, zur 9. Dann müsste der ETR eigentlich für $\sqrt{2}^2$ das Ergebnis 1,999999999 anzeigen.

Das macht er aber nur, wenn du $1,414213562 \cdot 1,414213562$ oder $1,414213562^2$ per Hand eingibst.

Wenn du dagegen „ $\sqrt{2}$ “ eingibst, und das Ergebnis mit der „ x^2 “-Taste quadrierst, dann erscheint „glatt“ 2 im Fenster. Daraus kannst du schließen, dass der ETR bei $\sqrt{2}$ anders rundet als bei der „Handeingabe“.

$$\begin{aligned} 6. \quad & \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}} \right)^{444} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} \right)^{444} = \left(\frac{(\sqrt{5}-1) \cdot (\sqrt{5}+1)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \right)^{444} = \left(\frac{\sqrt{5}^2 - 1^2}{\sqrt{2}^2} \right)^{444} = \\ & = \left(\frac{4}{2} \right)^{444} = 2^{444} = 2^{4 \cdot 111} = (2^4)^{111} = 16^{111}. \end{aligned}$$

7. (a)



- (b) • Es gilt: $\overline{CS} = \overline{CD}$. (*)
 Die Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ sind Halbierende der betreffenden rechten Innenwinkel.
 Also folgt $\varphi = 45^\circ$.
 Wegen der Innenwinkelsumme im rechtwinkligen Dreieck ASP gilt dann $\psi = 45^\circ$.
 Also ist das Dreieck ASP gleichschenkelig. Damit gilt:
 $\overline{AS} = \overline{AC} - \overline{SC} = \overline{SP} = (6\sqrt{2} - 6) \text{ cm}$.

Der Punkt S' ist das Spiegelbild des Punktes S an der Strecke $[AP]$. Das Dreieck ASP ist somit die Hälfte eines Quadrates mit der Diagonalen $[AP]$.

Somit gilt: $\overline{AP} = \overline{AS} \cdot \sqrt{2} = (12 - 6\sqrt{2}) \text{ cm}$.

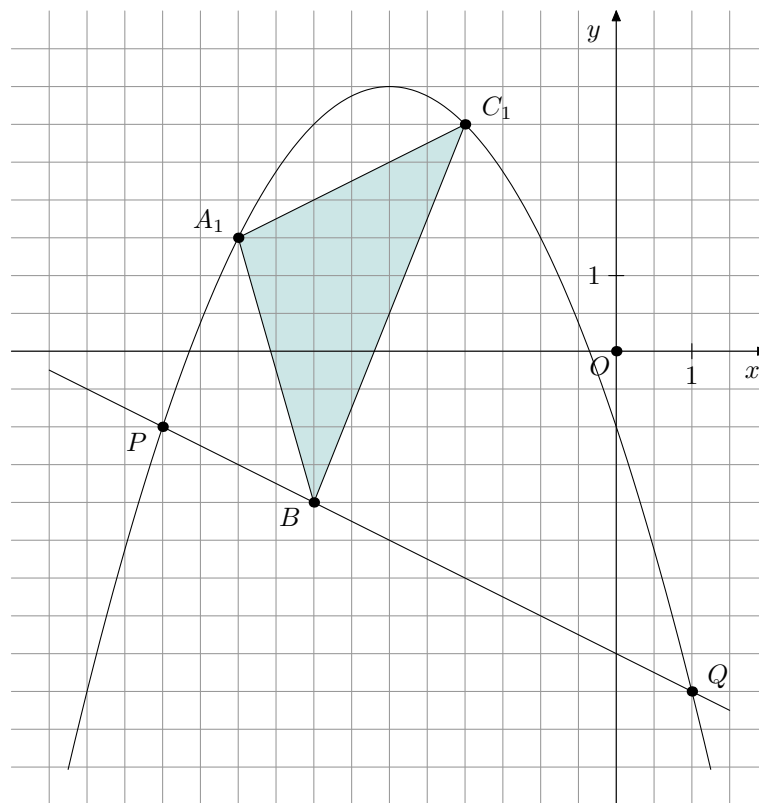
$\Rightarrow \overline{DP} = \overline{AD} - \overline{AS} = [6 - (12 - 6\sqrt{2})] \text{ cm} = (6\sqrt{2} - 6) \text{ cm} = \overline{PS} = \overline{AS}$.

Mit (*) ist erwiesen, dass es sich um einen achsensymmetrischen Drachen handelt.

- Die Diagonale $[PC]$ des Drachens $SCDP$ zerlegt dieses Viereck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke. Somit liegen die Eckpunkte S , C , D und P dieses Vierecks auf dem THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[SC]$. Dieser Kreis ist also der Umkreis des Drachenvierecks.

3. Quadratische Funktionen

1.



$$(a) \quad -0,5x^2 - 3x - 1 = -0,5x - 4 \Rightarrow -0,5x^2 - 2,5x + 3 = 0$$

$$D^* = 12,25 \Rightarrow \sqrt{D^*} = 3,5$$

$$x_{1;2} = \frac{2,5 \pm 3,5}{-1}$$

$$x_1 = -6 \text{ in } g: y_1 = -1 \Rightarrow P(-6 \mid -1)$$

$$x_2 = 1 \text{ in } g: y_2 = -4,5 \Rightarrow Q(1 \mid -4,5)$$

(b) Das Ergebnis folgt aus: $C_n(x+3 \mid -0,5(x+3)^2 - 6(x+3) - 14,5)$.

(c) Siehe Zeichnung

$$(d) \quad \overrightarrow{BC_n} = \begin{pmatrix} x+7 \\ -0,5x^2 - 6x - 12,5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{BA_n} = \begin{pmatrix} x+4 \\ -0,5x^2 - 3x + 1 \end{pmatrix}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x+7 & x+4 \\ -0,5x^2 - 6x - 12,5 & -0,5x^2 - 3x + 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow A(x) = (0,75x^2 + 8,25x + 28,5) \text{ cm}^2$$

3. Quadratische Funktionen

(e) $x = -5,5$ liefert $A_{\min} = 5,8125 \text{ cm}^2$.

(f) Die Seite $[A_3C_3]$ muss zur Geraden g parallel sein:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_nC_n} &= \begin{pmatrix} x+3-x \\ -0,5x^2-6x-14,5-(-0,5x^2-3x-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3x-13,5 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \frac{-3x-13,5}{3} &= -0,5 \quad \Rightarrow \quad x = -4\end{aligned}$$

2. (a) Der Schnittpunkt im IV.Quadranten muss Q sein.

1. Möglichkeit:

$$-0,25x^2 + x + 7 = -0,5x + 3 \quad \Rightarrow \quad -0,25x^2 + 1,5x + 4 = 0$$

$$D^* = 6,25 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{D^*} = 2,5$$

$$x_{1;2} = \frac{-1,5 \pm 2,5}{-0,5}$$

$$x_1 = -2 \text{ in } g: y_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad P(-2 \mid 4)$$

$$x_2 = 8 \text{ in } g: y_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad Q(8 \mid -1)$$

2. Möglichkeit:

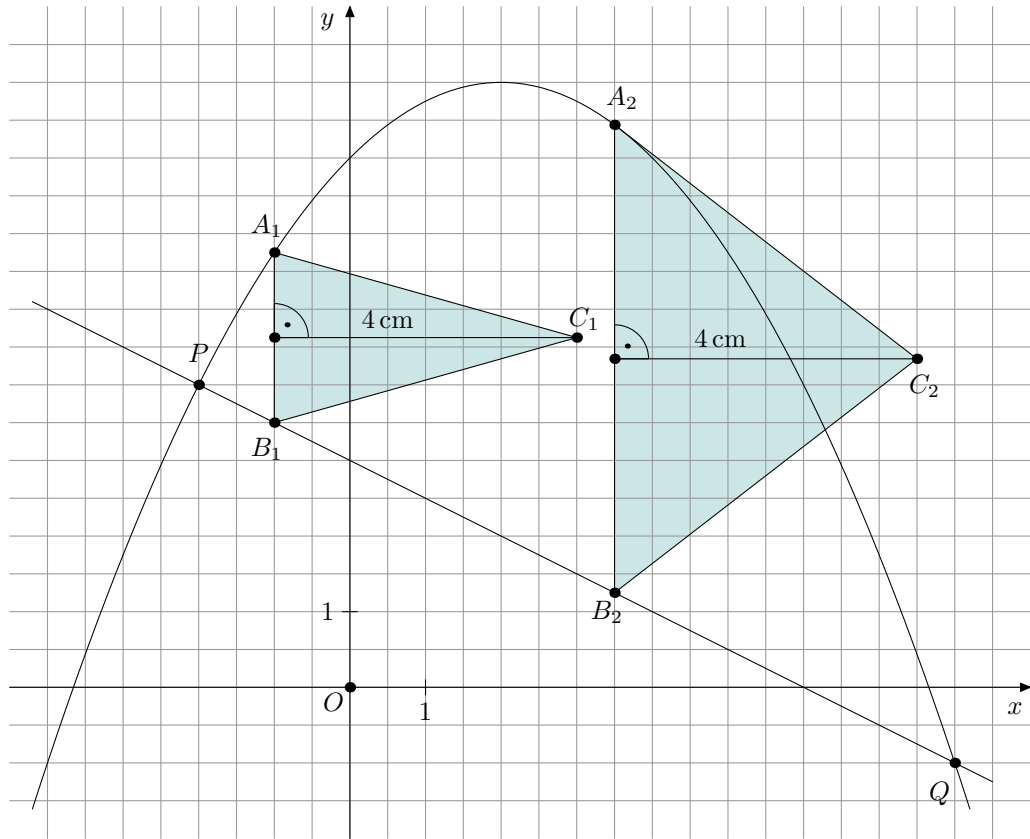
Aus der schon vorhandenen Zeichnung kannst du ablesen: $P(-2 \mid 4)$ und $Q(8 \mid -1)$.

Wenn du die Koordinaten dieser Punkte in die Gleichung der Parabel **und** die der Geraden einsetzt, ergeben sich insgesamt vier wahre Aussagen. Das bedeutet, dass die Punkte P und Q **sowohl** auf der Geraden g **als auch** auf der Parabel p liegen.

Weil aber eine Gerade eine Parabel höchstens in zwei Punkten schneiden kann, sind P und Q die gesuchten Schnittpunkte.

(b)

3. Quadratische Funktionen



(c) Siehe Zeichnung.

$$x_C = 7,5 \Rightarrow x = 7,5 - 4 = 3,5$$

$$\Rightarrow y = -0,25 \cdot 3,5^2 + 3,5 + 7 = 7,4375 \Rightarrow A_2(3,5 \mid 7,4375)$$

(d) $y_{A_n} - y_{B_n} = -0,25x^2 + x + 7 - (-0,5x + 3) = -0,25x^2 + 1,5x + 4$

$$A(x) = 0,5 \cdot (-0,25x^2 + 1,5x + 4) \cdot 4 \text{ cm}^2 \Rightarrow A(x) = (-0,5x^2 + 3x + 8) \text{ cm}^2$$

(e) $x = 3$ liefert $A_{\max} = 12,5 \text{ cm}^2$.

(f) Wenn der Punkt C_3 auf der y -Achse liegen soll, dann müssen die Punkte A_3 und B_3 auf einer Parallelen zur y -Achse im Abstand von 4 cm liegen, die durch den II. und III. Quadranten verläuft.

Der Abstand des Punktes P von der y -Achse beträgt 2 cm. Demnach käme der Punkt B_3 auf der Geraden g über den Punkt A_3 auf der Parabel p zu liegen. Dadurch hätte das Dreieck $A_3B_3C_3$ den falschen Drehsinn, weil der Punkt C_3 ja wie alle Punkte C_n rechts von der Basis liegen müsste; d.h. es gibt unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ kein solches Dreieck $A_3B_3C_3$.

3. (a) $S(3 \mid 1)$ und $(5 \mid 3)$ in die Scheitelform:

$$p: 3 = a \cdot (5 - 3)^2 + 1 \Rightarrow a = 0,5$$

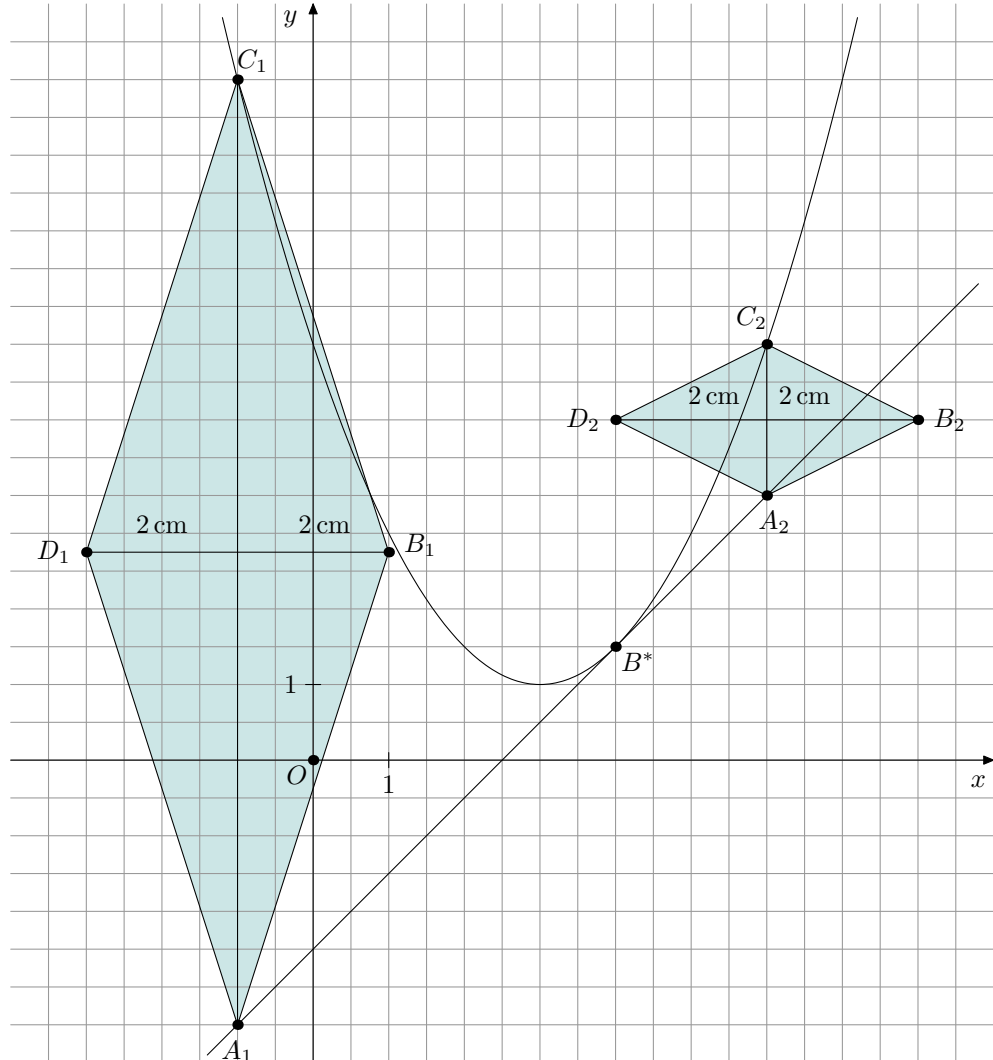
$$p: y = 0,5 \cdot (x - 3)^2 + 1 = \dots = 0,5x^2 - 3x + 5,5$$

(b) $p \cap g: 0,5x^2 - 3x + 5,5 = x - 2,5 \Rightarrow 0,5x^2 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow D^* = 0$

Also ist die Gerade g eine Tangente an die Parabel p .

3. Quadratische Funktionen

- (c)
- Siehe Zeichnung.
 - Wenn der Punkt D_2 den Abszissenwert 4 besitzt, dann muss der Punkt B_2 den Abszissenwert $4 + 4 = 8$ besitzen.
Somit müssen die Punkte A_2 und C_2 jeweils den x -Wert $\frac{8+4}{2} = 6$ besitzen, denn in jeder Raute halbieren sich die Diagonalen. Das ergibt dann das folgende Bild:



- (d)
- $\overline{A_n C_n}(x) = (0,5x^2 - 4x + 8) \text{ cm} = [0,5(x^2 - 8x + 16)] \text{ cm} = 0,5(x - 4)^2 \text{ cm}$
Es gilt stets $(x - 4)^2 \geq 0$ und damit $0,5(x - 4)^2 \geq 0$.
Für $x = 4$ gilt $\overline{A_n C_n}(4) = 0 \text{ cm}$; d.h. die betreffende „Raute“ würde zur Strecke entarten.
Der Drehsinn sämtlicher Rauten bleibt immer richtig, weil die Punkte C_n auf der Parabel p stets „über“ der Geraden g mit ihren Punkten A_n liegen.
Also gibt es Rauten $A_n B_n C_n D_n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
 - Für den Flächeninhalt A der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ gilt in Abhängigkeit von x :
 $A(x) = 0,5 \cdot 4 \cdot (0,5x^2 - 4x + 8) \text{ cm}^2 = \dots = (x - 4)^2 \text{ cm}^2$
Nur für $x = 4$ verschwindet der Flächeninhalt der betreffenden (zur Strecke

3. Quadratische Funktionen

entarteten) Raute.

Also gibt es Rauten $A_n B_n C_n D_n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

- Die Gerade g ist eine Tangente der Parabel p . Also gibt es keinen Punkt auf der Parabel, der die Gerade g überquert und damit den Drehsinn auch nur einer der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ umkehren könnte.

Einzig der Berührungspunkt B^* stellt einen kritischen Fall dar.

Wie in der Lösung (b) schon gezeigt, gilt $0,5x^2 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow 0,5(x-4)^2 = 0$ und damit folgt $B^*(4 | 1,5)$ (siehe Zeichnung). Nur dort gibt es eine (zu Strecke entartete) „Raute“.

Also gibt es Rauten $A_n B_n C_n D_n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

- (e) • Die Quadratdiagonalen liegen wie alle Rautendiagonalen $\overline{A_n C_n}$ zur y -Achse parallel und sie halbieren jeweils zwei rechte Innenwinkel der betreffenden Quadrate. Die Gerade g besitzt den Steigungsfaktor $m=1$; d.h. sie schneidet die x -Achse unter einem 45° -Winkel. Folglich müssen die Quadratdiagonalen einen 45° -Winkel mit der Geraden g einschließen. Also müssen die Quadrateckpunkte unter den Rauteneckpunkten B_n auf der Geraden g liegen.

- 1. Möglichkeit:

$$0,5x^2 - 4x + 8 = 4 \Rightarrow 0,5x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow D^* = 8.$$

Die quadratische Gleichung besitzt zwei Lösungen und damit gibt es zwei Quadrate.

- 2. Möglichkeit:

Der Eckpunkt B_1 der Raute $A_1 B_1 C_1 D_1$ liegt „über“ der Geraden g , der Eckpunkt B_2 der Raute $A_2 B_2 C_2 D_2$ liegt dagegen „unter“ der Geraden g .

Also muss einer der Punkte B_n – wir nennen ihn B_3 – während der Wanderung von der Position 1 zur Position 2 **auf** der Geraden g liegen.

Die Gerade g besitzt den Steigungsfaktor $m=1$; d.h. sie schneidet die x -Achse unter einem 45° -Winkel. Das bedeutet, dass auch in der betreffenden Raute $A_3 B_3 C_3 D_3$ $\sphericalangle B_3 A_3 C_3 = 45^\circ$ gilt. Aus Symmetriegründen muss dann $\sphericalangle B_3 A_3 D_3 = 90^\circ$ gelten. Wenn jedoch in der Raute $A_3 B_3 C_3 D_3$ ein Innenwinkel das Maß 90° besitzt, dann muss diese Raute (wie jede andere auch) ein Quadrat sein.

Wenn nun Punkte B_n über den Punkt B_2 der Raute $A_2 B_2 C_2 D_2$ hinaus nach rechts wandern, nehmen die Diagonalenlängen $\overline{A_n C_n}$ wieder zu. Sie „heben“ dann die Punkte B_n über die Gerade g hinweg. Also muss es einen weiteren Punkt B_4 geben der auf der Geraden g liegt. Aus den vorherigen Überlegungen muss dieser Punkt B_4 zu einem weiteren Quadrat $A_4 B_4 C_4 D_4$ gehören.

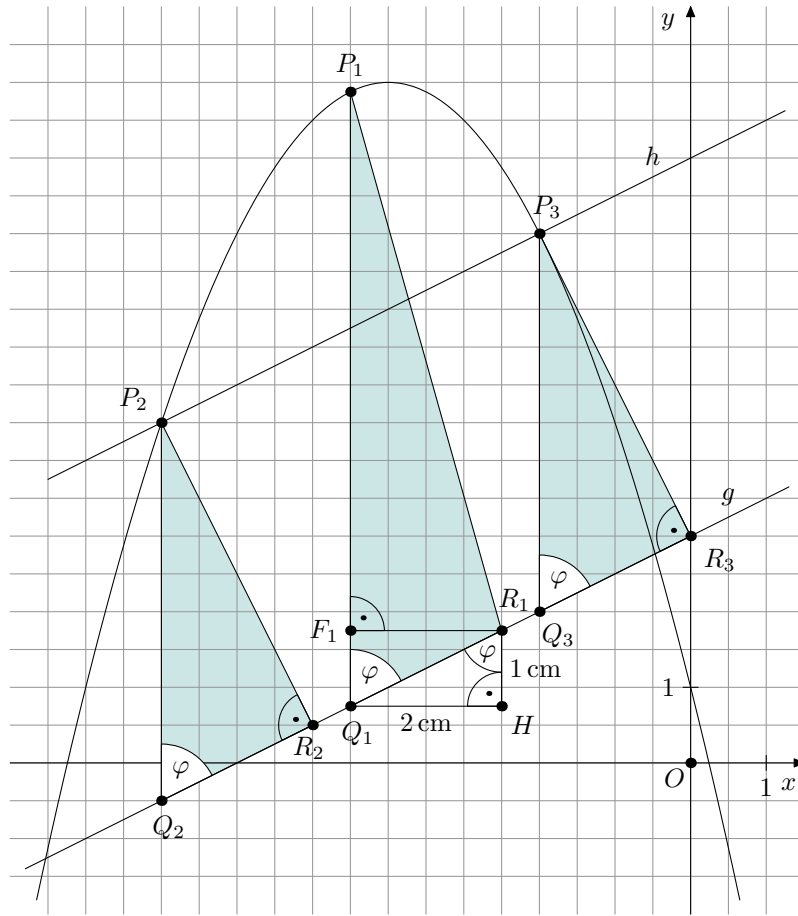
Links von der Position des Quadrates $A_3 B_3 C_3 D_3$ und rechts von der Position des Quadrates $A_4 B_4 C_4 D_4$ überquert keiner der Punkte B_n mehr die Gerade g . Also bleibt es bei den beiden Quadraten.

Anmerkung:

Die veränderlichen Rauten lassen sich sehr anschaulich in einer Datei, die mit Hilfe des dynamischen Mathematikprogrammes „GEONExT“ erzeugt wurde („10eh116.gxt“), darstellen.

3. Quadratische Funktionen

4. (a) Siehe Zeichnung.



- (b) Es gilt: $\overline{P_n Q_n}^2 = (x - x)^2 \text{ cm}^2 + [(-0,5x^2 - 4x + 1) - (0,5x + 3)] \text{ cm}^2$
 $= (-0,5x^2 - 4,5x - 2)^2 \text{ cm}^2$.
 $\Rightarrow \overline{P_n Q_n} = |-0,5x^2 - 4,5x - 2| \text{ cm}$.

Weil die y -Werte der Punkte P_n stets größer als die y -Werte der Punkte Q_n sind, kannst du die Betragstriche weglassen.

Also folgt: $\overline{P_n Q_n}(x) = (-0,5x^2 - 4,5x - 2) \text{ cm}$

- (c) 1. Möglichkeit: anschaulich

Die Höhen $[R_n F_n]$ der Dreiecke $P_n Q_n R_n$ sind konstant 2 cm lang (vgl. $[R_1 F_1]$ in der Zeichnung). Nur die Längen der zugehörigen Grundlinien $[P_n Q_n]$ sind veränderlich.

Wegen der Formelgleichung für Dreiecksflächen $A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}$ hängt der Flächeninhalt dieser Dreiecke $P_n Q_n R_n$ nur von den Längen der Grundlinien $[P_n Q_n]$ ab. Wenn dort die maximale Länge erreicht ist, dann ist auch die zugehörige Dreiecksfläche am größten.

2. Möglichkeit: rechnerisch

Für den Flächeninhalt A der Dreiecke $P_n Q_n R_n$ gilt in Abhängigkeit von x :

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_n Q_n} \cdot \overline{R_n F_n} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot (-0,5x^2 - 4,5x - 2) \cdot 2 \text{ cm}^2 = (-0,5x^2 - 4,5x - 2) \text{ cm}^2.$$

3. Quadratische Funktionen

Damit stimmen für jeden zulässigen x -Wert die Maßzahlen von Flächeninhalt und Grundlinienlänge überein.

Wenn also eine der Grundlinien $[P_n Q_n]$ am längsten wird, dann ist auch der Inhalt der zugehörigen Dreiecksfläche maximal.

- (d) Es gilt $Q_n(x \mid 0, 5x + 3)$ und $R_n(x + 2 \mid 0, 5(x + 2) + 3) = (x + 2 \mid 0, 5x + 4)$.

Betrachte das Steigungsdreieck $Q_1 H R_1$, das an der Geraden g unveränderlich ist.

Dem kannst du entnehmen, dass $\overline{Q_n R_n} = \sqrt{1^2 + 2^2} \text{ cm} = \sqrt{5} \text{ cm}$ gilt.

Von Aufgabe (b) ist $\overline{P_n Q_n}(x) = (-0, 5x^2 - 4, 5x - 2) \text{ cm}$ schon bekannt.

Es muss $-0, 5x^2 - 4, 5x - 2 = \sqrt{5}$ gelten.

$$\Leftrightarrow -0, 5x^2 + 4, 5x + (2 + \sqrt{5}) = 0 \Rightarrow D^* = 16, 25 - 2\sqrt{5} (\approx 11, 78) > 0$$

Also gibt es zwei solche gleichschenklige Dreiecke.

- (e) • Siehe Zeichnung.

- $x = -7$ liefert: $P_2(-7 \mid 4, 5)$, $Q_2(-7 \mid -0, 5)$ und $R_2(-5 \mid 0, 5)$.

$$\overline{P_2 Q_2} = 5 \text{ cm}, \overline{Q_2 R_2}(x) = \sqrt{5} \text{ cm} \text{ (siehe Lösung der Aufgabe (d)) und } \overline{P_2 R_2} = \sqrt{(-5 + 7)^2 + (4, 5 - 0, 5)^2} \text{ cm} = \sqrt{20} \text{ cm}$$

In diesem Dreieck $P_2 Q_2 R_2$ gilt der Satz des PYTHAGORAS:

$$5^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{20}^2. \text{ Also ist das Dreieck } P_2 Q_2 R_2 \text{ rechtwinklig.}$$

- Jeder Eckpunkt Q_n der Dreiecke $P_n Q_n R_n$ ist Scheitel eines Winkels mit dem Maß φ (Stufen- oder F-Winkel). Im Steigungsdreieck $Q_1 H R_1$ ist der Punkt R_1 ebenfalls Scheitel eines Winkels mit dem Maß φ (Wechsel- oder Z-Winkel).

$$\text{Dort gilt: } \tan \varphi = \frac{2}{1} \Rightarrow \varphi \approx 63, 43^\circ.$$

- Die Parallele h zur Geraden g durch den Punkt P_2 schneidet die Parabel p im gesuchten Punkt P_3 (Siehe Zeichnung).

Begründung:

Der Punkt P_2 besitzt den Abstand $\overline{P_2 R_2}$ zur Geraden g . Alle Punkte P_n aber, die den Abstand $\overline{P_2 R_2}$ von der Geraden g haben, liegen auf einer Parallelen (in der Zeichnung: h) zur Geraden g die den Abstand $\overline{P_2 R_2}$ besitzt.

- Weil alle Strecken $[Q_n R_n]$ $\sqrt{5} \text{ cm}$ lang sind, müssen die gesuchten Dreiecke z.B. zum Steigungsdreieck $Q_1 H R_1$ kongruent sein; d.h. es muss gelten:

$$\overline{P_n Q_n}(x) = (-0, 5x^2 - 4, 5x - 2) \text{ cm} = 1 \text{ cm} \Leftrightarrow -0, 5x^2 - 4, 5x - 3 = 0$$

$$D^* = 14, 25 \Rightarrow x_{1;2} = \frac{4, 5 \pm \sqrt{14, 25}}{-1} \Rightarrow x_1 \approx -8, 27 \text{ und } x_2 \approx -0, 72$$

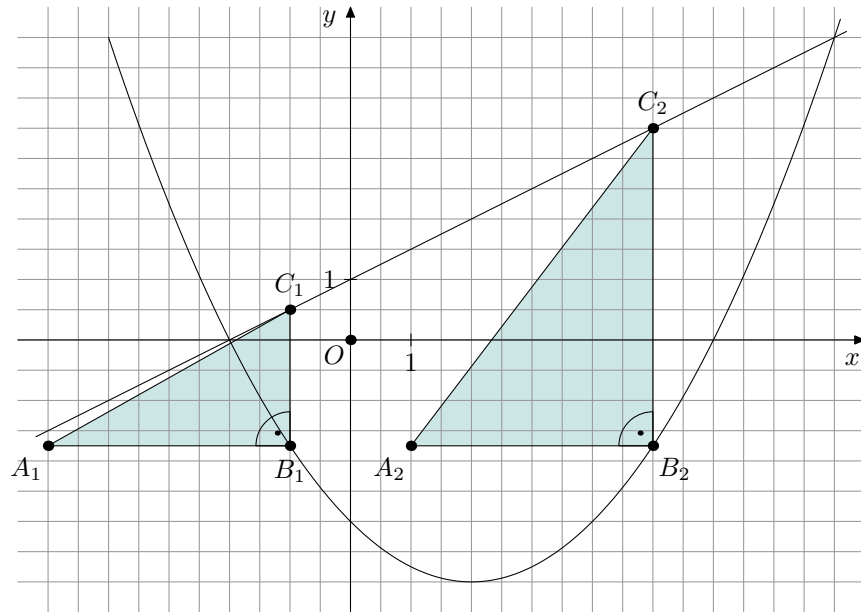
5. (a) • $P(-3 \mid 3, 25)$ in p : $2, 25 = a \cdot (-3)^2 - (-3) - 3 \Rightarrow 2, 25 = 9a \Rightarrow a = 0, 25$
und $p: y = 0, 25x^2 - x - 3$.

$$S\left(-\frac{1}{2 \cdot 0, 25} \mid -3 - \frac{(-1)^2}{4 \cdot 0, 25}\right) = (2 \mid -4)$$

- $0, 25x^2 - x - 3 = 0, 5x - 5, 26 \Rightarrow D^* = -0, 01 < 0$: Die Gerade g meidet die Parabel p .

- (b)

3. Quadratische Funktionen



(c)

$$\begin{aligned}
 \overline{B_n C_n}(x) &= y_{C_n} - y_{B_n} \\
 \overline{B_n C_n}(x) &= 0,5x + 1 - (0,25x^2 - x - 3) \\
 &= 0,5x + 1 - 0,25x^2 + x + 3 \\
 \overline{B_n C_n}(x) &= (-0,25x^2 + 1,5x + 4) \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

(d) Für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n B_n C_n$ gilt in Abhängigkeit von x :

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-0,25x^2 + 1,5x + 4) \text{ cm}^2.$$

$$A(x) = 2 \cdot (-0,25x^2 + 1,5x + 4) \text{ cm}^2.$$

$$A(x) = (-0,5x^2 + 3x + 8) \text{ cm}^2.$$

$$x = 3 \text{ liefert } A_{\max} = 12,5 \text{ cm}^2.$$

(e) Die beiden Dreiecke $A_3 B_3 C_3$ und $A_4 B_4 C_4$ müssen gleichschenkelig sein:

$$\overline{B_n C_n}(x) = 4 \text{ cm} : \Rightarrow -0,25x^2 + 1,5x + 4 = 4$$

$$\Leftrightarrow x(-0,25x + 1,5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$$

(f) Die Dreiecke $A_n B_n C_n$ können als Steigungsdreiecke zu den Hypotenusen $[A_n C_n]$ aufgefasst werden:

Wenn eine dieser Hypotenusen $[A_n C_n]$ auf der Geraden g liegen soll, dann müssen beide Steigungsfaktoren übereinstimmen; d.h.

$$\frac{-0,25x^2 + 1,5x + 4}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0,5x^2 + 3x + 8 = 4$$

$$\Leftrightarrow -0,5x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow D^* = 17 > 0.$$

Also gibt es zwei solche Dreiecke.

6. (a) $y = 0,5x^2 + 2x + 1000 = \dots = 0,5 \cdot (x + 2)^2 + 998 \Rightarrow S_0(-2 | 998)$
Skizziere die Parabel p_0 .

3. Quadratische Funktionen

Z.B. $p_1 : y = -0,17296 \cdot (x + 2)^2 + 998$

(b) Z.B. $p_2 : y = -0,5 \cdot (x - \frac{22}{7})^2$

- (c) Wähle unter den beliebig vielen Parabeln, die in Frage kommen, am besten eine Parabel (nenne sie p_3) aus, die zur Parabel p_0 kongruent ist, die aber nach unten geöffnet ist: Der Formfaktor hat dann den Wert $-0,5$.

Wähle dann am besten deren Scheitel so aus, dass dieser genau unterhalb des Scheitels $S_0(-2 | 998)$ liegt, also z.B. $S_3(-2 | 997)$.

Diese Parabel p_3 hat dann die Gleichung $y = -0,5 \cdot (x + 2)^2 + 997$.

- (d) „... nur einen Punkt gemeinsam hat“ eröffnet zweierlei Lösungsmöglichkeiten:

(α) Die gesuchte Parabel schneidet die Parabel p_0 nur in einem Punkt

(β) Die gesuchte Parabel berührt die Parabel p_0

Die einfachste Möglichkeit der Auswahl besteht in der Möglichkeit (α):

Die Parabel p_0 wird nach rechts oder nach links verschoben. Damit behält der Formfaktor den Wert $0,5$ und die beiden Symmetrieachsen liegen parallel. Damit verlaufen auch die Parabeläste so, dass sie sich nur einmal überkreuzen.

Also z.B.: $p_4 : y = 0,5 \cdot (x + 1)^2 + 998$.

Rechnerisch würde sich dann mit der Parabel p_4 die folgende Gleichung ergeben:

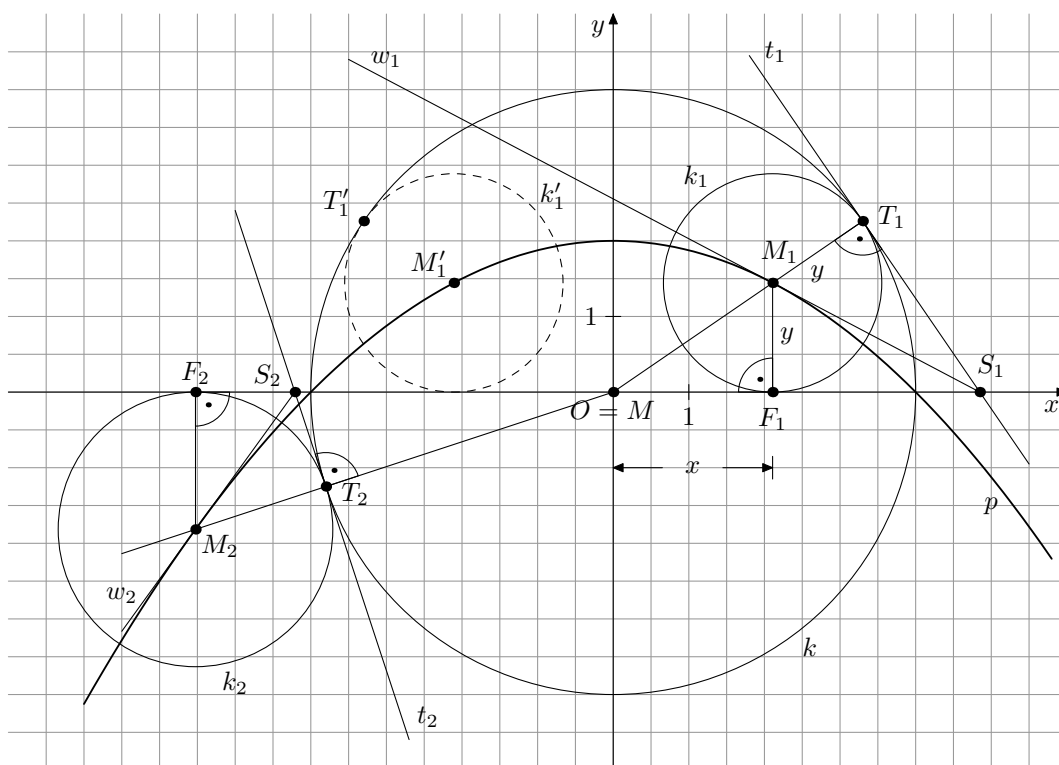
$$0,5 \cdot (x + 2)^2 + 998 = 0,5 \cdot (x + 1)^2 + 998 \dots \Leftrightarrow 2x = -3x = -1,5.$$

Egal, wie weit du die Parabel p_0 nach rechts oder links verschiebst: Rechnerisch hebt sich stets nach dem Gleichsetzen der Summand mit dem Faktor x^2 weg.

In der Möglichkeit (β) müsstest du nach einer Parabel p_5 suchen, welche die Parabel p_0 berührt. Eine entsprechende Parabelgleichung ist nicht so schnell und auch nicht so leicht zu finden, wie in der Möglichkeit (α).

7.

3. Quadratische Funktionen



- (a) Der Mittelpunkt M_1 muss sowohl zur Tangente t_1 als auch zur x -Achse den gleichen Abstand besitzen. Alle Punkte, die jeweils von diesen beiden Geraden mit dem Schnittpunkt S_1 den gleichen Abstand besitzen, liegen auf der Halbierenden w_1 des Winkels $T_1S_1F_1$. Diese Halbgerade verläuft dann durch den Punkt M_1 .
- (b) Die Tangente t_2 schneidet die x -Achse im Punkt S_2 . Dort bildet die Tangente t_2 mit der x -Achse einen stumpfen Winkel im III. Quadranten. Die Halbgerade w_2 halbiert diesen Winkel. Dann folgt: $[MT_2 \cap w_2 = \{M_2\}]$.
- (c) Für $T_3(4 \mid 0)$ und $T_4(-4 \mid 0)$ entarten die Berührkreise zu Punkten.
Für $T_5(0 \mid -4)$ liegt die zugehörige Kreistangente waagrecht. Der zugehörige Berührkreis müsste sich am Punkt $T_5(0 \mid -4)$ nach unten krümmen. Er könnte dann die x -Achse niemals berühren.
Mann könnte die Tangente noch als gigantischen „Berührkreis“ deuten, der die x -Achse rechts und links „im Unendlichen“ berührt.
- (d) • Wenn du den Berührkreis k_1 an der y -Achse spiegelst, dann erhältst du einen Kreis k'_1 mit dem Mittelpunkt M'_1 , der die Kreislinie k ebenfalls von innen berührt (siehe Zeichnung). Also liegt der Punkt M'_1 ebenfalls auf der Parabel p . Dasselbe gilt nun für das Spiegelbild M'_2 des Mittelpunktes M_2 und damit für alle denkbaren Kreismittelpunkte.
Daher ist die y -Achse die Symmetrieachse der Parabel p .
Je näher die Berührkreise im I. und II. Quadranten der y -Achse kommen, desto größer wird deren Durchmesser; d.h. desto höher liegen die zugehörigen Kreismittelpunkte. Der Kreis k_0 , dessen Durchmesser auf der y -Achse liegt, ist am größten; d.h. dessen Mittelpunkt $M_0(0 \mid 2)$ liegt am höchsten. Das muss dann der Parabelscheitel sein.

3. Quadratische Funktionen

Wegen der Lage der Punkte T_3 und T_4 muss die Funktionsgleichung der Parabel die Nullstellen 4 und -4 besitzen.

- 1. Möglichkeit:

mit den beiden Nullstellen 4 und -4 sowie dem Scheitel $S(0 \mid 2)$

$$p: y = a \cdot (x - 4)(x + 4) \quad \wedge \quad S(0 \mid 2) \in p:$$

$$2 = a \cdot (0 - 4)(0 + 4) \quad \Rightarrow \quad a = -0,125.$$

$$\text{Eingesetzt: } p: y = -0,125 \cdot (x - 4)(x + 4) = -0,125 \cdot (x^2 - 16)$$

$$y = -0,125x^2 + 2$$

- 2. Möglichkeit:

mit den Scheitelkoordinaten $(0 \mid 2)$ und z.B. dem Punkt $T_3(4 \mid 0)$

$$p: y = a \cdot (x - 0)^2 + 2 \quad \wedge \quad T_3(4 \mid 0) \in p:$$

$$0 = a \cdot (4 - 0)^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad -2 = 16a \quad \Rightarrow \quad a = -0,125 \text{ usw.}$$

- (e) Dieser Kreis sei k_6 mit dem Mittelpunkt M_6 .

Auf der Winkelhalbierenden des I. Quadranten gilt $y = x$. Mit dem Ergebnis in der Aufgabe (d) folgt dann:

$$x = -0,125x^2 + 2 \quad \text{mit } G = \mathbb{R}^+ \quad \Leftrightarrow \quad 0,125x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{0,25}.$$

Wegen $G = \mathbb{R}^+$ muss das Minuszeichen im Zähler entfallen.

$$\text{Also: } x = \frac{\sqrt{2} - 1}{0,25} = 4(\sqrt{2} - 1).$$

$$\frac{A_{k_6}}{A_k} = \frac{4^2(\sqrt{2} - 1)^2 \cdot \pi}{4^2\pi} = 3 - 2\sqrt{2} \approx 17,16\%$$

8. Berechne zunächst den Parabelscheitel: $S(x_S \mid y_S)$ mit $a = -10$, $b = -19$ und $c = 2$.

$$x_S = -\frac{-19}{2 \cdot (-10)} < 0 \quad \text{und} \quad y_S = 2 - \frac{(-19)^2}{4 \cdot (-10)} > 0$$

Der Scheitel liegt also im II. Quadranten.

Wegen $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet, also verläuft ihr linker Ast auch durch den III. Quadranten.

Weil sich die Äste der Parabel nach unten beliebig weit voneinander entfernen, muss ihr rechter Ast „irgendwann“ die y-Achse überqueren. Also verläuft der Graph auch durch den IV. Quadranten.

Nun musst du noch untersuchen, ob es Punkte auf der Parabel gibt, die im I. Quadranten liegen.

Ermittle dazu die Nullstellen der Funktionsgleichung: $10x^2 - 19x + 2 = 0$.

3. Quadratische Funktionen

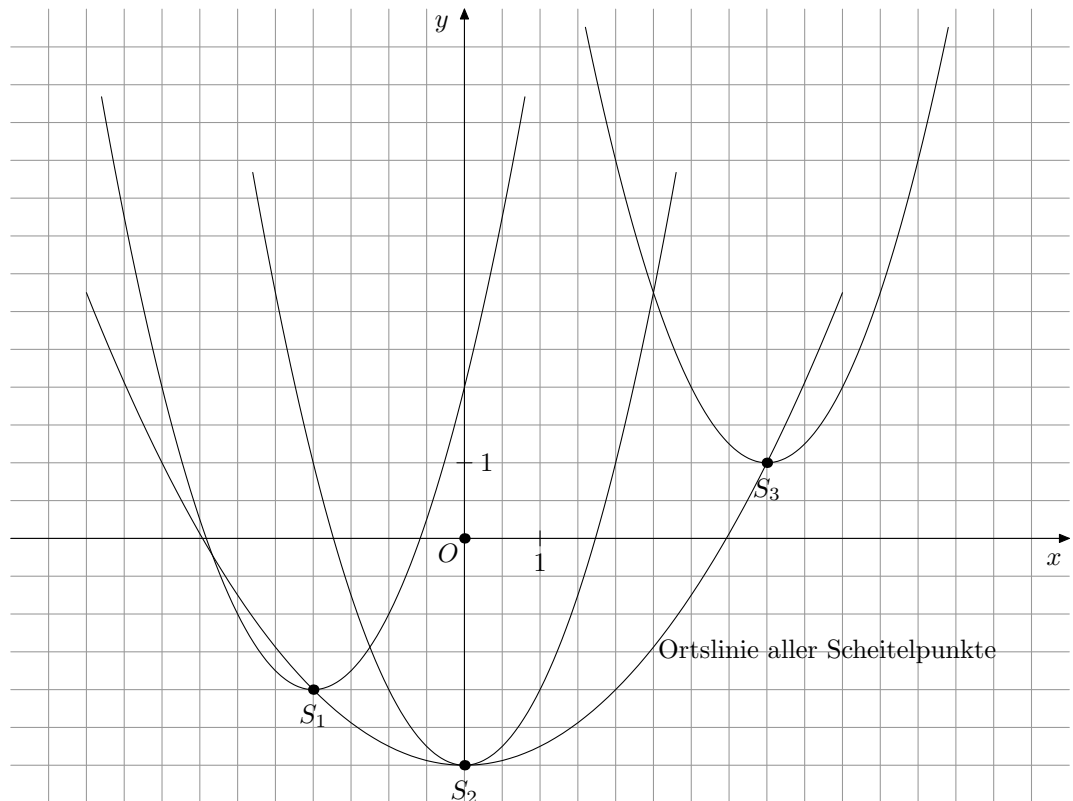
$$D^* = (-19)^2 - 4 \cdot (-10) \cdot 2 = 441 \text{ und } \sqrt{D^*} = 21$$

$$x_{1;2} = \frac{19 \pm 21}{-20} \Rightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 0, 1.$$

$x_2 = 0, 1$ liegt rechts vom Ursprung auf der x-Achse; also verläuft die Parabel auch durch den I. Quadranten und damit durch alle vier Quadranten.

9. (a) Vor dem binomischen Klammerterm steht heimlich der Formfaktor 1, egal, womit a belegt wird. Also handelt es sich ausschließlich um nach oben geöffnete Normalparabeln.

(b)



- (c) Es ist $x_S = 2a \Rightarrow a = \frac{x_S}{2}$ (1) und weiter gilt: $y_S = a^2 - 3$.

$$\text{Mit (1) folgt: } y_S = \frac{x_S^2}{4} - 3 = 0,25x_S^2 - 3.$$

- (d) Aus der Schargleichung folgt: Die Parabeln besitzen die Scheitelkoordinaten $(2a \mid a^2 - 3)$.

Die Parabel p_4 besitzt den Scheitel $S_4(-1 \mid 2,75)$.

Es muss einerseits $2a = -1 \Leftrightarrow a = -0,5$ gelten.

Gleichzeitig muss $a^2 - 3 = -2,75$ gelten. Das ist für $a = -0,5$ (oder $a = 0,5$) erfüllt. Also gehört die Parabel p_4 der Schar an.

Die Parabel p_5 besitzt den Scheitel $S_5(3 \mid -0,75)$.

3. Quadratische Funktionen

Es muss einerseits $2a = 3 \Leftrightarrow a = 1,5$ gelten.

Gleichzeitig muss $a^2 - 3 = -0,75$ gelten. Das ist für $a = 1,5$ (oder $a = 0,5$) erfüllt.

Also gehört die Parabel p_5 der Schar an.

Die Parabel p_6 besitzt den Scheitel $S_6(-5 \mid 3,75)$.

Es muss einerseits $2a = -5 \Leftrightarrow a = -2,5$ gelten.

Gleichzeitig muss $a^2 - 3 = 3,75$ gelten. Das ist für $a = -2,5$ nicht erfüllt. Also gehört die Parabel p_6 der Schar nicht an.

- (e) Wenn eine dieser Parabeln die x -Achse berührt, dann liegt ihr Scheitel auf der x -Achse. Das ist dort der Fall, wo der Trägergraph aller Scheitelpunkte die x -Achse schneidet. Es gibt offensichtlich zwei solche Schnittpunkte.

10. (a) Mit Hilfe einer Formelsammlung kannst du das Ergebnis sofort errechnen.

- (b) Es müsste $x_S = -\frac{1}{2a} = 0$ gelten. Ein Bruch hat aber nur dann den Wert 0, wenn der Zähler den Wert 0 besitzt. Das ist hier jedoch nicht der Fall. Also gibt es keine solche Parabel.

- (c) Läge einer der Scheitelpunkte im II. Quadranten, dann wäre sein Abszissenwert < 0 .

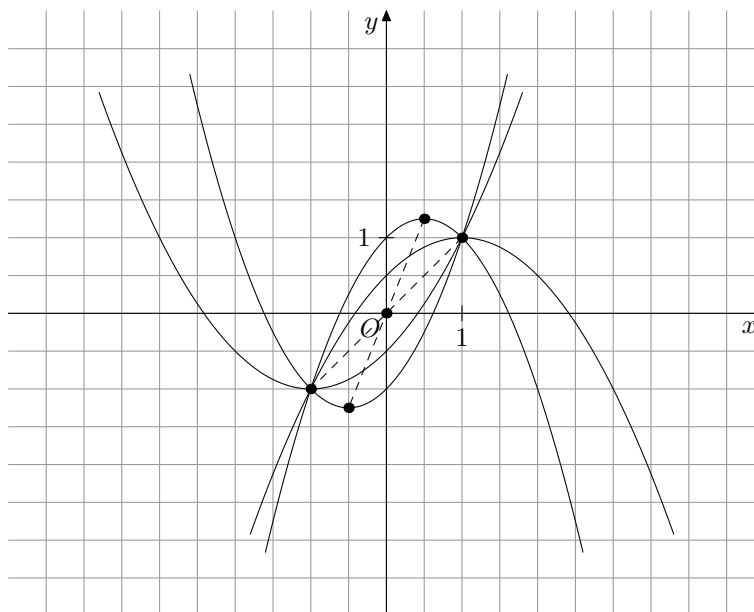
Wegen $x_S = -\frac{1}{2a}$ müsste a positiv sein.

Wegen $y_S = -a - \frac{1}{4a}$ folgt $y_S < 0$.

Dann liegt jedoch der Scheitel im III. und nicht im II. Quadranten.

(d)

a	-1	$-0,5$	$0,5$	1
$S(x_S \mid y_S)$	$(0,5 \mid 1,25)$	$(1 \mid 1)$	$(-1 \mid -1)$	$(-0,5 \mid -1,25)$



3. Quadratische Funktionen

(e) Es gilt:

$$x_S = -\frac{1}{2a} \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{2 \cdot x_S} \quad (1)'$$

$$\wedge \quad y_S = -a - \frac{1}{4a} \quad (2)$$

$$(1)' \text{ in } (2): y_S = -\left(-\frac{1}{2 \cdot x_S}\right) - \frac{1}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot x_S}\right)} = \frac{1}{2x_S} + \frac{x_S}{2}$$

(f) Die Tabelle der Aufgabe (d) lässt vermuten, dass ein Vorzeichenwechsel des Parameters a eine Punktspiegelung des betreffenden Parabelscheitels am Koordinatenursprung zur Folge hat. Die Parabel bleibt dabei deckungsgleich zur ursprünglichen Parabel, wechselt aber ihre Öffnungsrichtung (siehe graphische Darstellung).

$$\text{Also: } a' = -a \text{ und } x_{S'} = -\frac{1}{2a'} = -\frac{1}{-2a} = \frac{1}{2a} = -x_S$$

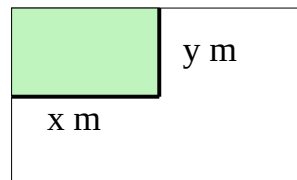
$$\text{und } y_{S'} = -a' - \frac{1}{4a'} = -(-a) - \frac{1}{4 \cdot (-a)} = -\left(-a - \frac{1}{4 \cdot a}\right) = -y_S$$

(g) Schnittpunkte mit der x -Achse verlangen $y = 0 : ax^2 + x - a = 0$.

Für die Diskriminante D^* ergibt sich: $D^* = 1^2 - 4 \cdot a \cdot (-a) = 1 + 4a^2$.

$4a^2$ wird nie negativ. Daher bleibt $4a^2 + 1$ stets positiv. Also hat die quadratische Gleichung $ax^2 + x - a = 0$ stets zwei Lösungen. Damit schneidet jede Scharparabel die x -Achse zweimal.

11. (a)



$$\begin{array}{lcl} \text{Es gilt:} & \begin{array}{l} x + y = 25,5 \quad (1) \\ \wedge \quad x \cdot y = 140 \quad (2) \end{array} & \Leftrightarrow \quad y = 25,5 - x \quad (1)' \end{array}$$

$$(1)' \text{ in } (2): x \cdot (25,5 - x) = 140 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 25,5x - 140 = 0$$

$$\Rightarrow L = \{17,5 ; 8\}. \text{ Wegen } (1)' \text{ folgt: } y = 8 \vee y = 17,5.$$

Das Gartengrundstück ist 17,5 m lang und 8 m breit (oder umgekehrt).

(b) Für den Flächeninhalt A gilt: $A = x \cdot y \text{ m}^2$.

$$\text{Mit } (1)' \text{ folgt } A(x) = x(25,5 - x) \text{ m}^2 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = (-x^2 + 25,5x) \text{ m}^2.$$

Der Extremwert muss wegen des negativen Vorzeichens von x^2 ein Maximum sein. Die Berechnung erfolgt z.B. so, als ob du die Scheitelkoordinaten der zugehörigen (nach unten geöffneten) Parabel ermittelst:

$$a = -1 \quad b = 25,5 \text{ und } c = 0:$$

3. Quadratische Funktionen

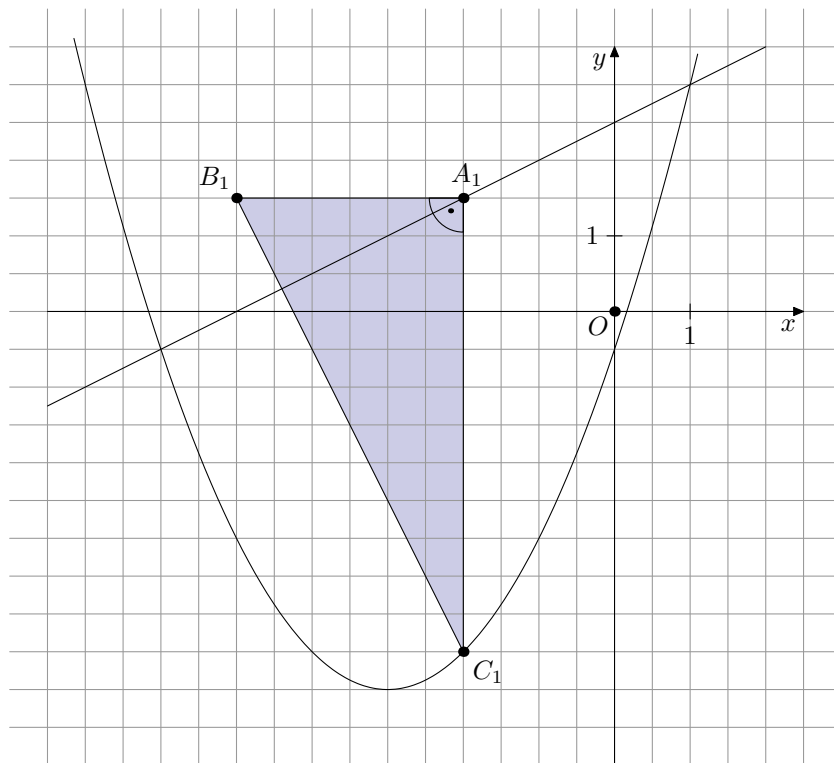
$$x_S = -\frac{25,5}{-2} = 12,75 \text{ und } y_S = 0 - \frac{25,5^2}{-4} = 162,5625 \text{ (Maximum).}$$

Mit dem 25,5 m langen Maschendraht hätte Familie Taerkot auf diese Weise sogar etwas mehr als 162 m^2 einzäunen können.

Die Länge $x = 12,75 \text{ m}$ liefert mit (1)' die Breite $y = (25,5 - 12,75) \text{ m} = 12,75 \text{ m}$. Das bedeutet, dass der flächengrößte Garten eine quadratische Form hätte.

12. (a) Du kannst das durch z.B. Einsetzen überprüfen:
 -4 in (1): $(-4)^2 + 0,5 \cdot (-4) - 14 = 0$ ergibt eine wahre Aussage.
 $3,6$ in (1): $3,6^2 + 0,5 \cdot 3,6 - 14 = 0,76 \neq 0$; d.h. $3,6$ ist keine Lösung.
- (b) $x^2 + 0,5 - 14 = 0 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 28 = 0$. Wenn du jetzt noch die Summanden x und $2x^2$ vertauschst, erhältst du die Gleichung (2). Beide Gleichungen sind äquivalent. Also haben sie die gleiche Lösungsmenge.

13.



(a)

3. Quadratische Funktionen

$P(-4 \mid -4, 5):$	$-4,5$	$=$	$0,5 \cdot (-4,5)^2 + b \cdot (-4,5) + c$	
$Q(1 \mid 3):$	3	$=$	$0,5 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$	
	$-4,5$	$=$	$8 - 4b + c$	(1)
	3	$=$	$0,5 + b + c$	(2)
$(2) - (1):$	$7,5$	$=$	$-7,5 + 5b$	

$\Rightarrow b = 3$ und z.B. in (2): $c = -0,5$.

Also gilt für p : $y = 0,5x^2 + 3x - 0,5$.

(b) $x_S = -\frac{-3}{2 \cdot 0,5} = -3$ und $y_S = -0,5 - \frac{3^2}{4 \cdot 0,5} = -5 \Rightarrow S(-3 \mid -5)$.

(c) Siehe Zeichnung oben.

(d) An den Schnittpunkten der Parabel mit der Geraden gilt: $x = -6$ bzw. $x = 1$. Dort liegen die betreffenden Punkte A_n und C_n aufeinander. Also gibt es jeweils kein Dreieck.

(e) Weil die Punkte B_n niemals mit den Punkten A_n zur Deckung kommen, kann das betreffende Dreieck höchstens zur Strecke entarten.

4. Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

1. (a) –

- (b) • Eine Möglichkeit der Lösung besteht darin, vom Flächeninhalt der Flagge denjenigen der beiden überlappenden Rechtecke, die das Kreuz ergeben, zu subtrahieren. Um den Flächeninhalt des Kreuzes zu erhalten, musst du jedoch am Ende den Inhalt des Quadrates im Zentrum einmal abziehen, weil das Quadrat ja **beiden** besagten Rechtecken angehört.

$$\text{Also: } A_w(x) = 11 \cdot 16 \text{ cm}^2 - (11x + 16x - x^2) \text{ cm}^2 = (x^2 - 27x + 176) \text{ cm}^2$$

- Wie oben schon dargelegt, ergibt sich:

$$A_k(x) = (11x + 16x - x^2) \text{ cm}^2 = (-x^2 + 27x) \text{ cm}^2$$

- (c) Der Flächeninhalt des umlaufenden Rechtecks beträgt 176 cm^2 .

$$30\% \text{ von } 176 \text{ cm}^2 = 52,8 \text{ cm}^2.$$

$$52,8 = -x^2 + 27x \Leftrightarrow x^2 - 27x + 52,8 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{27 \pm \sqrt{517,8}}{2}$$

$$x_1 = 0,5 \cdot (27 + \sqrt{517,8}) \approx 24,88 \quad (\dagger) \quad , \text{ wegen } G =]0; 11[_{\mathbb{R}}.$$

$$x_2 = 0,5 \cdot (27 - \sqrt{517,8}) \approx 2,12 \in G =]0; 11[_{\mathbb{R}}.$$

$$\text{Also: } L = \{13,5 - 0,5\sqrt{517,8}\}.$$

- (d) $x^2 - 27x + 176 = -x^2 + 27x \Leftrightarrow 2x^2 - 54x + 176 = 0$ mit $G =]0; 11[_{\mathbb{R}}$

$$x_{1;2} = \frac{54 \pm 2\sqrt{377}}{4}$$

$$x_1 = 13,5 + 0,5\sqrt{377} \approx 23,21 \quad (\dagger) \quad , \text{ wegen } G =]0; 11[_{\mathbb{R}}.$$

$$x_2 = 13,5 - 0,5\sqrt{377} \approx 3,79 \in G =]0; 11[_{\mathbb{R}}.$$

$$\text{Also: } L = \{13,5 - 0,5\sqrt{377}\}$$

2. (a) $15 \text{ m} = 1500 \text{ cm}$ entsprechen hier 6 cm .

Dann entspricht 1 cm im Plan $1500 \text{ cm} : 6 = 250 \text{ cm}$ in Wirklichkeit.

Der Plan wurde also im Maßstab $1 : 250$ erstellt.

- (b) • Im Plan ist jeder Radweg 1 cm breit. Also würden die Radwege $2,50 \text{ m}$ breit. Die Gesamtfläche der beiden Radwege würde $(2,5 \cdot 15 + 2,5 \cdot 12,5) \text{ m}^2 = 68,75 \text{ m}^2$ betragen.

4. Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

$$\frac{68,75 \text{ m}^2}{225 \text{ m}^2} > 0.3 = 30\% > 25\%: \text{Protest!}$$

- Es gilt der Ansatz:

$$15x + (15 - x) \cdot x = 0.25 \cdot 225 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 30x + 56,25 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{30 \pm 15\sqrt{3}}{2}$$

Das Pluszeichen entfällt, da sonst $x > 15$ wird. Also gilt:

$$x \leq 15 - \frac{15}{2}\sqrt{3}.$$

- (c) • Das Dreieck $M_1 M'_1 S$ ist gleichseitig mit der Seitenlänge $\overline{AB} = 15 \text{ m}$ und der Höhe

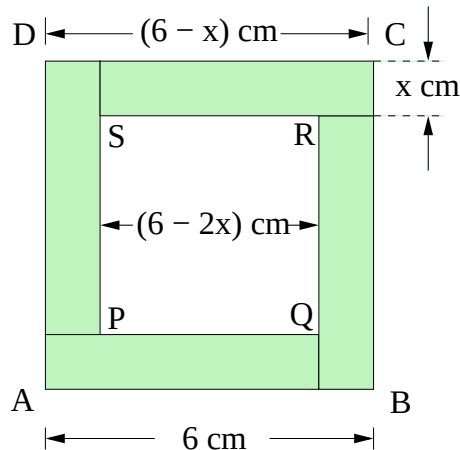
$$\overline{BS} = \frac{15}{2}\sqrt{3} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \overline{CS} = \left(15 - \frac{15}{2}\sqrt{3}\right) \text{ m}$$

- $\overline{CS} \approx 2,009 \text{ m} \approx 2 \text{ m}$

Radwegfläche für diesen Fall: $2 \cdot 15 \text{ m}^2 + 13 \cdot 2 \text{ m}^2 = 56 \text{ m}^2$

$$\frac{56 \text{ m}^2}{225 \text{ m}^2} = 0.248 = 24,8\%. \text{ Das ist ok.}$$

3. (a) Die Figur wurde etwas kleiner gezeichnet:



- (b) **1. Möglichkeit:** $A_{\text{Rechteck}} = \frac{1}{5} \cdot A_{ABCD} = 0,2 \cdot A_{ABCD}$
 $x(6 - x) = 0,2 \cdot 36 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 7,2 = 0 \quad (*)$

Mit $\sqrt{D^*} = 6\sqrt{2}$ folgt: $x_{1,2} = \frac{6 \pm 6\sqrt{0,2}}{2}$

Das Pluszeichen entfällt, da sonst $x > 6$ wäre.

Also gilt: $x = 3 - 3\sqrt{0,2} \approx 1,66$.

- 2. Möglichkeit:** $A_{PQRS} = \frac{1}{5} \cdot A_{ABCD}$

$$(6 - 2x)^2 = 0,2 \cdot 36 \quad \Leftrightarrow \quad 36 - 24x + 4x^2 = 7,2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 7,2 = 0 \quad \text{siehe } (*)$$

4. Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

3. Möglichkeit: $A_{PQRS} = A_{Rechteck}$

$$(6 - 2x)^2 = x(6 - x) \quad \Leftrightarrow \quad 36 - 24x + 4x^2 = 6x - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 7,2 = 0 \quad \text{siehe (*)}$$

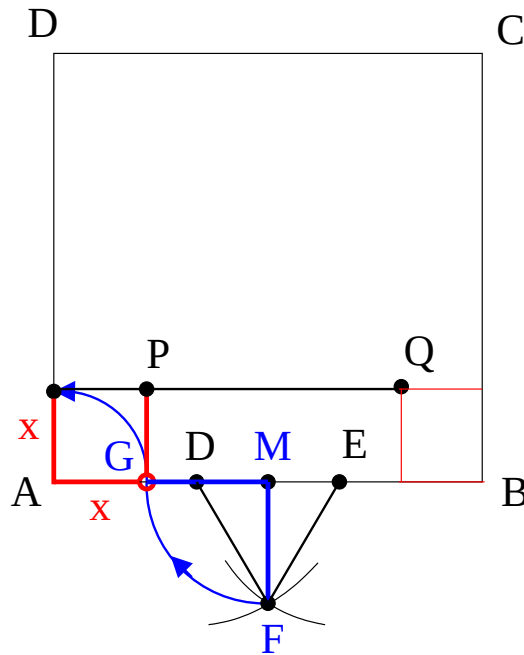
(c) $\bullet (6-2x)^2 = \frac{1}{3} \cdot 36 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 0; x_{1;2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

Das Pluszeichen entfällt wieder, da sonst $x > 6$ wäre.

Also gilt: $x = 3 - \sqrt{3} = \frac{6}{2} - \frac{2}{2}\sqrt{3}$.

- Die Seite $[AB]$ besitzt den Mittelpunkt M.

Weiter gilt: $\overline{DM} = \overline{ME} = 1 \text{ cm}$. Die Punkte M und A sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.



Unter der Basis $[DE]$ wurde das gleichseitige Dreieck DFE mit der Seitenlänge 2 cm konstruiert. Also ist die Höhe $\overline{MF} = \frac{2}{2}\sqrt{3}$ cm lang. Dann gilt auch $\overline{MF} = \overline{MG}$. Dann ist aber $\overline{AG} = (3 - \frac{2}{2}\sqrt{3})$ cm $= (3 - \sqrt{3})$ cm $= x$ cm $= \overline{AP}$.

4. (a) Wenn das „L“ überall x m dick ist, dann ist die geflieste Fläche ein Quadrat mit der Seitenlänge $(6 - x)$ m.

Wenn das „L“ die Hälfte der Gesamtfläche ausmacht, dann muss die quadratische geflieste Fläche die andere Hälfte einnehmen. Als Maßzahlengleichung ergibt sich dann:

$$(6 - x)^2 = 0.5 \cdot (6 \cdot 6) = 18, \text{ mit } x \in]0, 6[_{\mathbb{R}}.$$

$$\Leftrightarrow |6 - x| = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}.$$

$$\Leftrightarrow 6 - x = 3\sqrt{2} \quad \vee \quad 6 - x = -3\sqrt{2}.$$

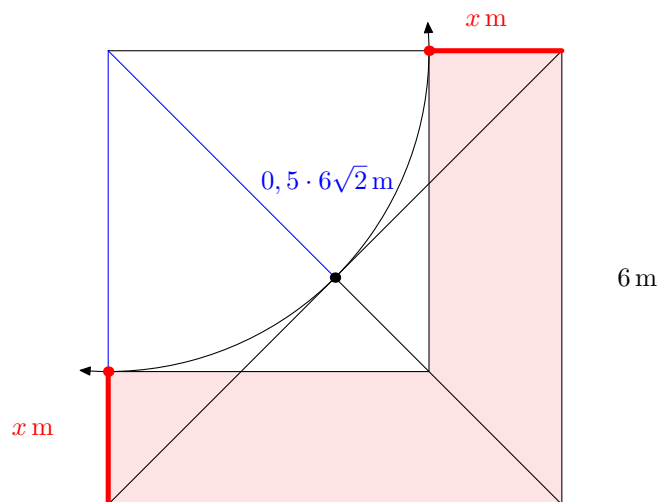
$$\Leftrightarrow x = 6 - 3\sqrt{2} \quad \vee \quad x = 6 + 3\sqrt{2}.$$

Wegen $x \in]0, 6[_{\mathbb{R}}$ folgt $x = 6 - 3\sqrt{2}$.

4. Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

- (b) • Der Grundriss ist im Maßstab 1 : 100 dargestellt. (1 m = 100 cm).

•



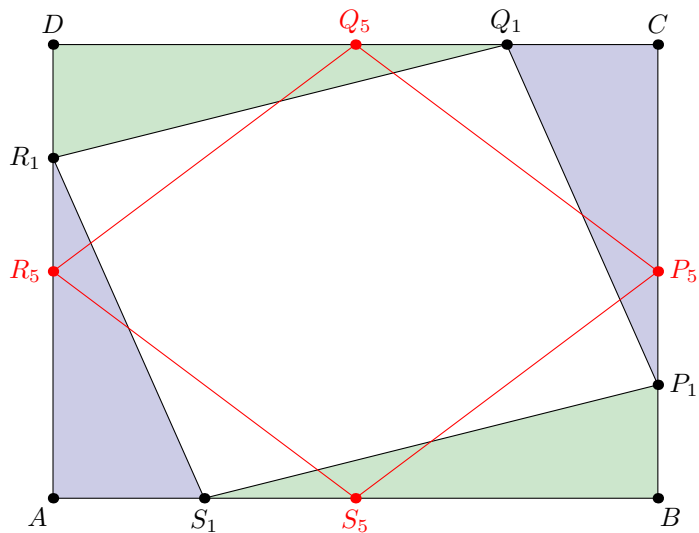
Ein Quadrat, dessen Seitenlänge 6 cm beträgt, hat eine Diagonalenlänge von $6\sqrt{2}$ cm.

$0,5 \cdot 6\sqrt{2}$ cm ist dann gerade die halbe Diagonalenlänge dieses Quadrates.

Du erhältst x , wenn du mit Hilfe des Kreisbogens die Differenz aus der Seitenlänge des großen Quadrates und seiner halben Diagonalenlänge abträgst.

- Der Rest ist klar.

5. (a)



- (b) Es gilt $\triangle S_nBP_n \cong \triangle R_nQ_nD$ und $\triangle P_nCQ_n \cong \triangle AS_nR_n$.

$$A_{ABCD} = 48 \text{ cm}^2$$

$$A_{P_nQ_nR_nS_n} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\triangle S_nBP_n} - 2 \cdot A_{\triangle P_nCQ_n}.$$

$$2 \cdot A_{\triangle S_nBP_n} = 2 \cdot 0,5 \cdot \overline{S_nB} \cdot \overline{BP_n} = (1 - k) \cdot 8 \text{ cm} \cdot 6k \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2 \cdot (1 - k) \cdot k.$$

4. Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

$$2 \cdot A_{\Delta P_n C Q_n} = 2 \cdot 0,5 \cdot \overline{P_n C} \cdot \overline{C Q_n} = (1 - k) \cdot 6 \text{ cm} \cdot 8k \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2 \cdot (1 - k) \cdot k.$$

$$A_{P_n Q_n R_n S_n} = 48 \text{ cm}^2 - 2 \cdot 48 \text{ cm}^2 \cdot (1 - k) \cdot k$$

$$A_{P_n Q_n R_n S_n} = 48 \text{ cm}^2 \cdot [1 - 2k(1 - k)]$$

$$\Rightarrow q(k) = \frac{A_{P_n Q_n R_n S_n}}{A_{ABCD}} = \frac{48 \text{ cm}^2 \cdot [1 - 2k(1 - k)]}{48 \text{ cm}^2} = 1 - 2k(1 - k).$$

(c) $q(0,4) = 1 - 2 \cdot 0,4 \cdot (1 - 0,4) = 0,52 = 52\%$

(d)

$$1 - 2k(1 - k) = 0,58$$

$$2k^2 - 2k + 1 = 0,58$$

$$2k^2 - 2k + 0,42 = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = 0,3 \quad \text{und} \quad k_2 = 0,7$$

(e) • Siehe Zeichnung.

• Es handelt sich um eine Raute.

Begründung: Die vier rechtwinkligen Dreiecke $S_5 B P_5$, $P_5 C Q_5$, $R_5 Q_5 D$ und $A S_5 R_5$ sind kongruent, denn die besitzen jeweils Katheten, die jeweils 3 cm bzw. 4 cm lang sind. Also sind auch ihre Hypotenusen, die die Seiten des Parallelogramms $P_5 Q_5 R_5 S_5$ bilden, gleich lang. Also ist dieses Viereck eine Raute.

• $q(k) = 1 - 2k(1 - k) = 2k^2 - 2k + 1 = 2(k^2 - k + 0,5^2 - 0,25) + 1 = 2[(k - 0,5)^2 - 0,25] + 1 = 2(k - 0,5)^2 + 0,5$

$k = 0,5$ liefert den minimalen Flächenanteil von $0,5 = 50\%$.

6. (a) $x = 6$.

(b) Gleichung (2):

Da der Nenner stets von 0 verschieden ist, hat der Bruch den Wert 0, wenn der Zähler den Wert 0 hat. Das ist wieder wie in (1) für $x = 6$ der Fall.

Gleichung (3):

Für die Definitionsmenge D gilt: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Der Zähler verschwindet für $x = 6$. Also ist die Lösung wieder die gleiche wie in (1).

Gleichung (4):

Der Nenner wird 0, wenn $x = 6$ gilt. Also folgt $D = \mathbb{R} \setminus \{6\}$.

Der Zähler hat nur eine einzige Nullstelle, nämlich $x = 6 \notin D$. Die Lösungsmenge ist im Gegensatz zu (1) **leer**.

Gleichung (5):

Wieder gilt $D = \mathbb{R} \setminus \{6\}$.

$$36 - x^2 = (6 - x)(6 + x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 \notin D \vee x = -6 \in D.$$

4. Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

Also ist $x = -6$ die einzige Lösung. Sie stimmt nicht mit der Lösung von (1) überein.

Gleichung (6):

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-6\}.$$

$$0,5x^2 - 6x + 18 = 0,5(x - 6)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 \in D.$$

Die Gleichung (6) besitzt die gleiche Lösung wie die Gleichung (1).

Gleichung (7):

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

$$= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \in D \vee x = 6 \in D.$$

Eine der Lösungen der Gleichung (7) ist zwar mit der der Gleichung (1) identisch, aber die Gleichung (7) besitzt noch eine zweite Lösung, die in (1) nicht auftaucht. (1) und (7) haben also **verschiedene Lösungsmengen**.

Gleichung (8):

$$(-1, 1)^{17} \cdot (\sqrt{2x} + 2\sqrt{3}) \cdot 17\frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2x} - \sqrt{12}) =$$

$$(-1, 1)^{17} \cdot 17\frac{1}{3} \cdot [(\sqrt{2x})^2 - (\sqrt{12})] = (-1, 1)^{17} \cdot 17\frac{1}{3} \cdot [2x - 12] = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 6 \in D.$$

Also ist die Lösung wieder die gleiche wie in (1).

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

1. (a) - -
 (b) $A_{PQRS} = 9 \text{ cm}^2$
 (c) $\beta = 14,04^\circ$

2. (a) 9 cm, 18 cm
 (b) $d = \sqrt{405} \text{ cm} \approx 20,12 \text{ cm}$

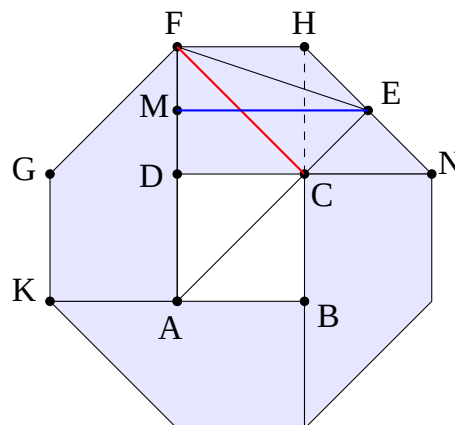
3. $x = 5$.

4. $x = 5,8$

5. $\overline{CD} = 2,8 \text{ cm}$

6. (a) $e = 4 \text{ cm}$
 (b) $u = 4 \cdot \sqrt{40} \text{ cm} \approx 25,28 \text{ cm}$

7. (a) $[FG]$ ist genauso lang wie die Diagonale $[AC]$ des Quadrates $ABCD$.
 Also gilt: $a\sqrt{2} = 3,2 \Rightarrow a = \frac{3,2}{\sqrt{2}} \approx 2,26$.
 Für die Zeichnung: $\overline{AF} = \overline{KB} = 2a \text{ cm} \approx 5,52 \text{ cm}$.



5. Flächeninhalt ebener Vielecke

(b) $A(ABCD) = a^2 \text{ cm}^2 = \left(\frac{3,2}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ cm}^2 = 5,12 \text{ cm}^2$

- (c) • Wegen $\overline{CE} = 0,5 \cdot \overline{AC}$ müsste gelten:

$$2a = 1,5a\sqrt{2} \quad (a \neq 0) \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}.$$

Weil aber $\sqrt{2}$ irrational ist, liegt hier ein Widerspruch vor.

Dieser Widerspruch lässt sich auch durch Vergrößerung oder Verkleinerung der Figur nicht auflösen: Jede Vergrößerung oder Verkleinerung ist eine winkeltreue Abbildung. Wenn in der Ausgangsfigur keine zwei Winkel maßgleich sind, dann wird dies auch bei einer Größenänderung nicht anders.

- Es wird nur mit Maßzahlen gerechnet.

1. Möglichkeit:

$$A(AEF) = 0,5 \overline{AE} \cdot \overline{FC} = 0,5 \cdot 1,5a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 1,5a^2.$$

2. Möglichkeit:

$$A(AEF) = 0,5 \cdot \overline{AF} \cdot \overline{EM} = 0,5 \cdot 2a \cdot 1,5a = 1,5a^2.$$

3. Möglichkeit:

Das Lot $[FC]$ zerlegt das Dreieck AEF in die beiden rechtwinkligen Teildreiecke ACF und CEF .

Das Dreieck ACF ist so groß wie das Quadrat $ABCD$: $A(ACF) = a^2$.

Weil $[FC] \parallel [HN]$ ist, folgt $A(CEF) = A(FCH) = 0,5a^2$.

$$\Rightarrow A(AEF) = a^2 + 0,5a^2 = 1,5a^2.$$

8. Der Flächeninhalt beträgt $8,625 \text{ cm}^2$.

9. (a) –

(b)

$$A_T(x) = \frac{8+x}{2} \cdot \frac{x}{2} \text{ cm}^2 = \frac{x^2+8x}{4} \text{ cm}^2 = (0,25x^2 + 2x) \text{ cm}^2$$

- (c) 1. Möglichkeit (mühsam):

$$0,25x^2 + 2x = 33 \Leftrightarrow 0,25(x+4)^2 = 37 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 148(*)$$

Wegen $x \in \mathbb{R}^+$ ist (*) gleichwertig mit $x = 2\sqrt{37} - 4 > 8$, was wegen $\overline{EF} = x \text{ cm} \leq \overline{AB} = 8 \text{ cm}$ nicht geht.

2. Möglichkeit:

Damit das Dreieck AED existiert, muss $x < 8$ gelten. Das Trapez $ABFE$ nimmt stets weniger als die Hälfte des Rechtecks $ABCD$ ein. Also muss stets $A_T < 32 \text{ cm}^2$ sein und damit kann dieser Flächeninhalt nicht größer als 32 cm^2 (nämlich 33 cm^2) sein.

- (d) Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ muss dreimal so groß sein wie der Flächeninhalt des Trapezes $ABFE$:

$$3 \cdot (0,25x^2 + 2x) = 8x \Rightarrow 0,75x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(0,75x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \dagger$$

$$\text{wegen } x \in \mathbb{R}^+ \quad \vee \quad 0,75x - 2 = 0 \Rightarrow x \approx 2,67$$

- (e) Es muss gelten:

$$8 - x = \frac{x}{2}\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{16}{2 + \sqrt{3}} \Leftrightarrow x \approx 4,29$$

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

- (f) Es muss gelten:

$$x + \frac{x}{2} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 1,5x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 5,33$$

10.

- (a) –

- (b) $\triangle RQC \cong \triangle APS \quad \wedge \quad \triangle SRD \cong \triangle PBQ$.

Damit sind je zwei gegenüber liegende Seiten des Vierecks $PQRS$ gleich lang. Also handelt es sich um ein Parallelogramm.

- (c) Der gesuchte Flächeninhalt ergibt sich z.B. dadurch, dass man an den Eckpunkten des Rechtecks $ABCD$ die vier jeweils paarweise kongruenten rechtwinkligen Dreiecke abschneidet.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \overline{RD} &= 0,5(a-x) \text{ cm} = \overline{PB} \quad \wedge \quad \overline{SD} = 0,5(b-x) \text{ cm} = \overline{BQ}. \\ A(SRD) + A(PBQ) &= 2 \cdot [0,5 \cdot 0,5(a-x) \cdot 0,5(b-x)] \text{ cm}^2 \\ &= 0,25(a-x)(b-x) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Weiter gilt: } \overline{RC} &= 0,5(b+x) \text{ cm} = \overline{AP} \quad \wedge \quad \overline{CQ} = 0,5(a+x) \text{ cm} = \overline{AS}. \\ A(RQC) + A(APS) &= 2 \cdot [0,5 \cdot 0,5(b+x) \cdot 0,5(a+x)] \text{ cm}^2 \\ &= 0,25(a+x)(b+x) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Im Folgenden wird nur mit Maßzahlen gerechnet.

$$\begin{aligned} A(PQRS) &= ab - [0,25(a-x)(b-x) + 0,25(a+x)(b+x)] \\ &= ab - 0,25[ab - ax - bx + x^2 + ab + ax + bx + x^2] \\ &= ab - 0,5ab - 0,5x^2 \\ A(PQRS) &= 0,5(ab - x^2), \text{ was zu zeigen war.} \end{aligned}$$

- (d) Für die Maßzahlen gilt:

$$\frac{ab - 0,5x^2}{2} = 0,5ab - 0,25x^2$$

Wegen $0,25x^2 > 0$ (für alle $x \in \mathbb{R}^+$) folgt:

$$\frac{ab - 0,5x^2}{2} < \frac{ab}{2} = 0,5ab = 0,5 \cdot A(ABCD).$$

11. (a) Die Katheten der Dreiecke sind jeweils zu einer der Koordinatenachsen parallel. Ihre Längen können deshalb mit Hilfe der Koordinaten der Eckpunkte einfach bestimmt werden.

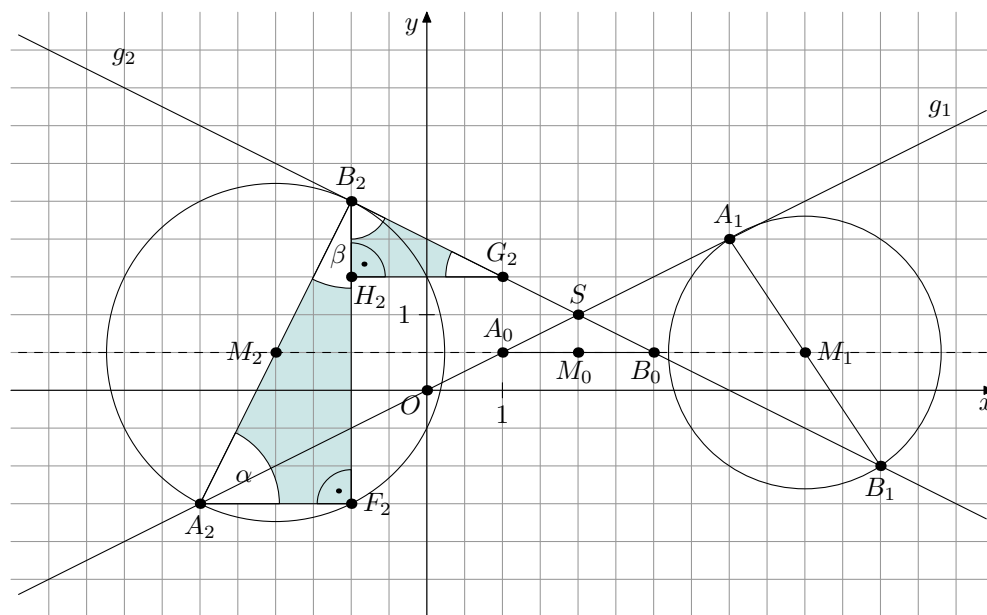
- (b) $A_{ABCD} = 26 \text{ cm}^2$

- (c) –

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

12. (a) -.-
(b) -.-
(c) $x = 6$: Das Dreieck entartet zur Strecke.
 $x = 7$: Das betreffende Dreieck erhält den falschen Drehsinn.
(d) Es gibt zwei solche Dreiecke: Man errichte im Punkt A und im Punkt B jeweils eine Senkrechte zur Strecke AB .
(e) g^* muss so zu AB parallel liegen, dass der korrekte Drehsinn gewahrt bleibt.
13. $d = 6,3 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \approx 8,91 \text{ cm}$
14. (a) - -
(b) - -
(c) Ergebnis: $A_{\triangle ABC} = 10 \text{ cm}^2$
(d) - -
15. $x = 5$.
16. $x = 5,8$
17. (a) -.-
(b) -.-
(c) $x = 6$: Das Dreieck entartet zur Strecke.
 $x = 7$: Das betreffende Dreieck erhält den falschen Drehsinn.
(d) Es gibt zwei solche Dreiecke: Man errichte im Punkt A und im Punkt B jeweils eine Senkrechte zur Strecke AB .
(e) g^* muss so zu AB parallel liegen, dass der korrekte Drehsinn gewahrt bleibt.
18. $d = 6,3 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \approx 8,91 \text{ cm}$
19. (a)

5. Flächeninhalt ebener Vielecke



- (b) Es gilt: $B_n(x+2 \mid -0,5 \cdot (x+2) + 2) \Rightarrow B_n(x+2 \mid -0,5x+1)$

- (c) 1. Möglichkeit: aus der Zeichnung

Im rechtwinkligen Dreieck $A_2F_2B_2$ gilt: $\alpha + \beta = 90^\circ$. (*)

Die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks $A_2F_2B_2$ sind jeweils doppelt so lang wie die des rechtwinkligen Dreiecks $H_2G_2B_2$. Also sind diese beiden Dreiecke zueinander ähnlich.

Also gilt: $\triangleleft H_2 B_2 G_2 = \alpha$ und $\triangleleft B_2 G_2 H_2 = \beta$.

Wegen (*) muss der Punkt B_2 der Scheitel eines rechten Winkels sein.

Also folgt: $[A_2B_2] \perp g_1$.

- ## 2. Möglichkeit: rechnerisch

Der Steigungsfaktor der Strecke $[A_2B_2]$ müsste so groß wie der negative Kehrwert des Steigungsfaktors $-0,5$ der Geraden g_2 sein. Er müsste also den Wert 2 besitzen:

$$A_2(-3 \mid -0,5 \cdot (-3) + 1) = (-3 \mid -1,5) \text{ und}$$

$$B_2(-3 + 2 \mid -0,5 \cdot (-3) + 1) = (-1 \mid 2,5)$$

Also gilt:

$m_{[A_2B_2]} = \frac{2, 5 + 1, 5}{-1 + 3} = 2$, was zu zeigen war. Also folgt: $[A_2B_2] \perp g_1$.

- (d) Einer der Durchmesser $[A_n B_n]$ muss auf der Geraden g_1 senkrecht stehen, wenn der betreffende Kreis die Gerade g_1 berühren soll. Der Wert eines der Steigungsfaktoren der Durchmesser $[A_n B_n]$ muss also der negative Kehrwert des Steigungsfaktors der Geraden g_1 sein. Somit ergibt sich :

$$m_{[A_n B_n]} = \frac{(-0,5x+1) - 0,5x}{(x+2) - x} = \frac{-x+1}{2}$$

Also: $\frac{-x+1}{2} = -2 \Rightarrow x = 5$

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

(e) Es gilt: $M_n \left(\frac{(x+2)+x}{2} \mid \frac{(-0,5x+1)+0,5x}{2} \right) = (x+1 \mid 0,5)$

Der y -Wert ist also immer konstant 0,5. Also heißt die Gleichung der Ortslinie der Mittelpunkte $M_n : y = 0,5$. Die Kreismittelpunkte liegen also auf einer Parallelen zur x -Achse im Abstand von 0,5 cm, die durch den I. und II. Quadranten verläuft.

(f) $\overline{A_n B_n}(x)^2 = (x+2-x)^2 + (-0,5x+1-0,5x)^2 \text{ cm}^2$
 $\Rightarrow \overline{A_n B_n}(x)^2 = 2^2 + (1-x)^2 \text{ cm}^2$
 $\Rightarrow \overline{A_n B_n}(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} \text{ cm}$

(g) 1. Möglichkeit: mit Hilfe der Zeichnung

Die Kreisfläche wird minimal, denn der betreffende Kreisdurchmesser am kleinsten ist. Das Ergebnis der Aufgabe (f) weist darauf hin, dass es solch einen kürzesten Durchmesser $[A_0 B_0]$ gibt.

Die Kreisdurchmesser sind die Hypotenusen der begleitenden rechtwinkligen Dreiecke (siehe z.B. das Dreieck $A_2 F_2 B_2$ in der Zeichnung). Die waagrechte Kathete dieser Dreiecke ist stets 2 cm lang.

Kürzer als 2 cm kann der Kreisdurchmesser also nicht werden. Um dieser Länge möglichst nahe zu kommen, muss der Durchmesser daher möglichst waagrecht liegen.

Alle Punkte A_n auf der Geraden g_1 , die rechts vom Punkt S liegen, erzeugen schräg abwärts gerichtete Kreisdurchmesser, die mit wachsenden Abszissenwert x eher steiler als flacher verlaufen.

Ebenso geht es mit Durchmessern $[A_n B_n]$, deren Endpunkte beide links von S liegen: Sie lassen sich nicht in die Waagrechte zwingen.

Also kann der gesuchte waagrechte Durchmesser nur dort gefunden werden, wo ein Endpunkt links und der andere rechts von S liegt. Aus Symmetriegründen muss dann der betreffende Endpunkt A_0 1 cm links und der zugehörige Punkt B_0 1 cm rechts von S liegen: $A_0(1 \mid 0,5)$ und $B_0(3 \mid 0,5)$. Die Strecke $[A_0 B_0]$ ist dann 2 cm lang und stellt das zur Strecke entartete begleitende Dreieck dar. Der Streckenmittelpunkt $M_0(2 \mid 0,5)$ kommt dann dem Punkt S am nächsten. Fritz hat Recht. Betrachte auch die Zeichnung.

2. Möglichkeit: durch Rechnung

$$\sqrt{x^2 - 2x + 5} = \sqrt{(x-1)^2 + 4}$$

$x = 1$ liefert den minimalen Durchmesser $d_{\min} = 2 \text{ cm}$ und damit auch die minimale Kreisfläche.

Die Koordinaten des zugehörigen Mittelpunktes M_0 sind nach Aufgabe (e): $(2 \mid 0,5)$. Aus der Zeichnung kann man die Koordinaten des Geradenschnittpunktes S ablesen: $(2 \mid 1)$, was du durch Einsetzen in beide Geradengleichungen bestätigen könntest.

Also stellt die Strecke $[M_0 S]$ die kürzeste Entfernung zwischen der Ortslinie und dem Punkt S dar. Fritz hat Recht.

(h) $\left(\frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 2x + 5} \right)^2 \pi = 17 \pi \Rightarrow x^2 - 2x + 5 = 4 \cdot 17$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 63 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 = 9 \text{ und } x_2 = -7$$

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

- (i) Der Abstand der betreffenden Mittelpunkte zur y -Achse, also ihr Abszissenwert $x + 1$ muss genauso groß wie der zugehörige Kreisradius sein:

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2x + 5}\right) = x + 1 \quad |^2$$

$$x^2 - 2x + 5 = 4x^2 + 8x + 4 \Rightarrow 3x^2 + 10x - 1 = 0$$

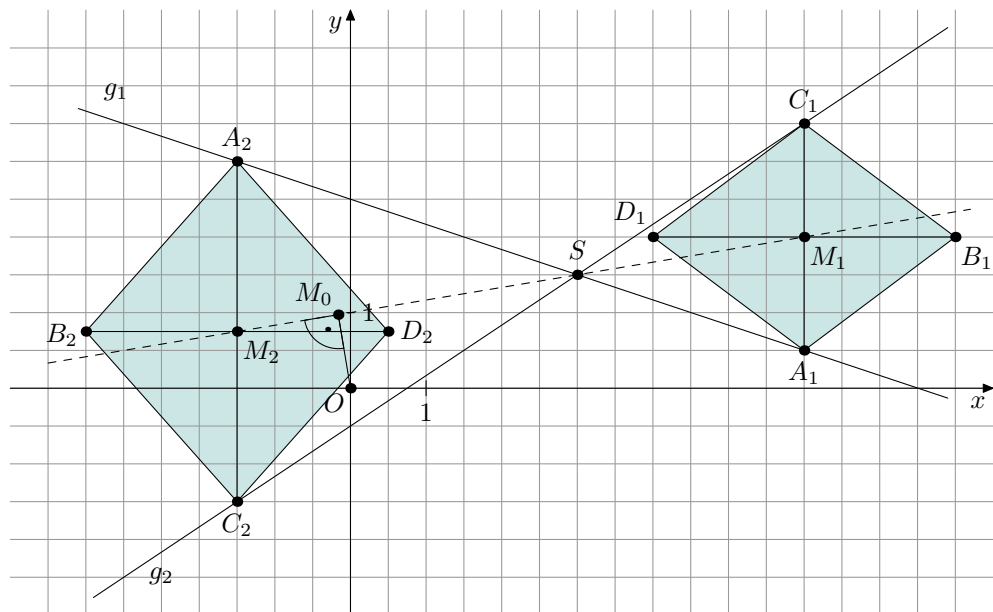
$$\Rightarrow D^* = 112 \text{ und } \sqrt{D^*} \approx 10,58$$

$$\Rightarrow x_{1;2} \approx \frac{-10 \pm 10,58}{6} \Rightarrow x_1 \approx -3,43 \text{ und } x_2 \approx -0,10.$$

Für beide Abszissenwerte existieren die betreffenden Durchmesser.

Anmerkung: Für diese Aufgabe gibt es die GEONExT-Datei 09eh118_l1.gxt.

20. (a)



- (b) Wenn sich die Rauten $A_nB_nC_nD_n$ auf den Geradenschnittpunkt S zubewegen, dann werden die Diagonalen $[A_nC_n]$ immer kürzer. Im Schnittpunkt S selbst entartet die betreffende „Raute“ zur Strecke.

Aus der Zeichnung ergibt sich: $S(3 \mid 1, 5)$.

$$\text{Rechnung: } g_1 \cap g_2 : -\frac{1}{3}x + 2,5 = \frac{2}{3}x - 0,5 \Rightarrow x = 3.$$

Also gibt es nur Rauten für $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

- (c) • Es gilt: $C_n(x \mid \frac{2}{3}x - 0,5)$. Wir rechnen im Folgenden meist nur mit Maßzahlen.
 $\overline{A_nC_n}(x) = \sqrt{(x - x)^2 + [(\frac{2}{3}x - 0,5) - (-\frac{1}{3}x + 2,5)]^2} = \sqrt{(x - 3)^2}$
 $\Rightarrow \overline{A_nC_n}(x) = |x - 3| \text{ cm} \dots \text{ und nicht nur } (x - 3) \text{ cm!}$

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

- Für $x = 3$ wird die Diagonalenlänge 0. Also gibt es für diesen x -Wert keine Raute.
- (d) Wenn eine der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ zum Quadrat werden soll, müssen dessen Diagonalen gleich lang sein.
Also: $|x - 3| = 4 \Leftrightarrow x - 3 = 4 \vee x - 3 = -4 \Rightarrow L = \{-1; 7\}$
- (e) Für den Flächeninhalt A der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ gilt in Abhängigkeit von x :
 $A(x) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |x - 3| \text{ cm}^2 = 2 \cdot |x - 3| \text{ cm}^2$
Also: $2 \cdot |x - 3| = 20 \Leftrightarrow x - 3 = 10 \vee x - 3 = -10 \Rightarrow L = \{-7; 13\}$
- (f) $M_n \left(\frac{x+x}{2} \mid \frac{(-\frac{1}{3}x+2, 5) + (\frac{2}{3}x-0, 5)}{2} \right) = (x \mid \frac{1}{6}x + 1)$
- (g) Für die Entfernungen $\overline{OM_n}$ gilt in Abhängigkeit von x :

$$\begin{aligned}
 \overline{OM_n}(x)^2 &= x^2 + \left(\frac{1}{6}x + 1\right)^2 && \text{cm}^2 \\
 &= x^2 + \frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{3}x + 1 && \text{cm}^2 \\
 \overline{OM_n}(x)^2 &= \frac{37}{36}x^2 + \frac{1}{3}x + 1 && \text{cm}^2 \\
 &= \frac{37}{36} \left[x^2 + \frac{12}{37}x + \left(\frac{6}{37}\right)^2 - \frac{36}{1369} + \frac{36}{37} \right] && \text{cm}^2 \\
 &= \frac{37}{36} \left[\left(x + \frac{6}{37}\right)^2 + \frac{-36 + 1332}{1369} \right] && \text{cm}^2 \\
 \overline{OM_n}(x) &= \sqrt{\frac{37}{36} \left(x + \frac{6}{37}\right)^2 + \frac{36}{37}} && \text{cm}
 \end{aligned}$$

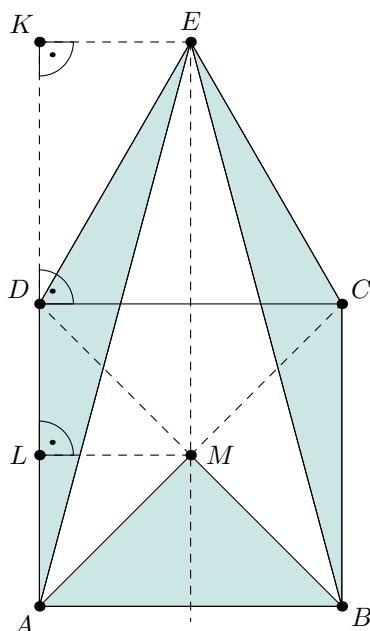
$x = -\frac{36}{37} \approx -0,16$ liefert $\overline{OM_0} = \sqrt{\frac{36}{37}} \text{ cm} \approx 0,97 \text{ cm}$. Das ist die kürzeste Entfernung.

Amerkung: Es gibt zu dieser Aufgabe eine GEONExT-Datei: *09eh119.gxt*

- (h) 1. Möglichkeit:
Wenn die Diagonale $[B_3 D_3]$ auf der x -Achse liegt, dann liegt auch der zugehörige Mittelpunkt M_3 auf ihr. Dann muss dessen y -Wert 0 sein:
 $\frac{1}{6}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -6 \Rightarrow A_3(-6 \mid -\frac{1}{3} \cdot (-6) + 2, 5) = (-6 \mid 4, 5)$
Weiter folgt: $C_3(-6 \mid \frac{2}{3} \cdot (-6) - 0, 5) = (-6 \mid -4, 5)$
Der Punkt B_3 liegt 2 LE weiter links von M_3 auf der x -Achse: $B_3(-8 \mid 0)$.
Der Punkt C_3 liegt 2 LE weiter rechts von M_3 auf der x -Achse: $C_3(-4 \mid 0)$.
- 2. Möglichkeit: Wie du in der 1. Möglichkeit gesehen hast, muss die x -Achse die Symmetrieachse der Raute $A_3 B_3 C_3 D_3$ sein, denn die y -Werte der Punkte A_3 und C_3 unterscheiden sich lediglich durch das Vorzeichen. Also kannst du jetzt z.B. ansetzen:
 $y_{C_n} = -y_{A_n}$.
 $\frac{2}{3}x - 0,5 = -(-\frac{1}{3}x + 2,5) \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - 0,5 = \frac{1}{3}x - 2,5 \Leftrightarrow x = -6$
Der Rest ist schon in der 1. Möglichkeit dargestellt.

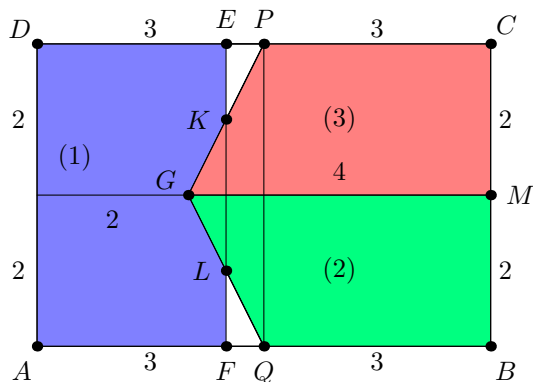
21. (a)

5. Flächeninhalt ebener Vielecke



- (b) In der Figur ist die Gerade EM die Symmetrieachse. Deshalb sind die beiden Dreiecke AED und BCE kongruent, insbesondere also flächengleich. Der Flächeninhalt der Dreiecke ABM und AMD ist ebenfalls gleich. Die Dreiecke AMD und AED besitzen dieselbe Grundseite $[AD]$. Außerdem sind die zugehörigen Höhen $[LM]$ bzw. $[KE]$ gleich lang. Also besitzen die beiden Dreiecke AMD und AED und damit auch das Dreieck ABM den gleichen Flächeninhalt, nämlich 25% der Quadratfläche.

22. (a) • Beschrifte deine Zeichnung mit Maßzahlen:



- 1. Möglichkeit: durch Rechnung
 Das grüne und das rote Trapez sind kongruent.
 Rote Fläche $A_3 = 0,5 \cdot (4 + 3) \cdot 2 \text{ cm}^2 = 7 \text{ cm}^2$
 Die blaue Fläche (1) lässt sich in zwei kongruente Trapeze zerlegen:
 $A_1 = [0,5 \cdot (2 + 3) \cdot 2] \cdot 2 \text{ cm}^2 = 10 \text{ cm}^2 > A_3$
 Der Eindruck hat den König nicht getäuscht.

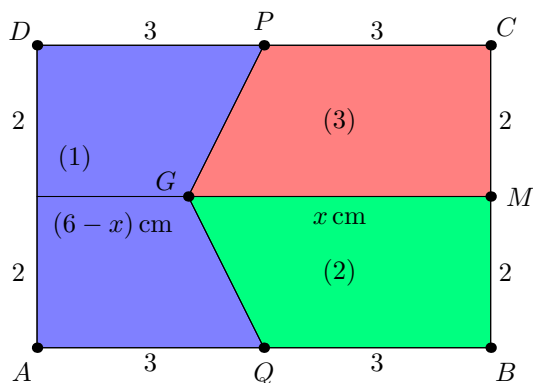
5. Flächeninhalt ebener Vielecke

2. Möglichkeit: anschaulich

Die Hilfslinie $[EF]$ verläuft durch die Punkte K und L , die die Mittelpunkte der Strecken $[GP]$ und $[GQ]$ sind.

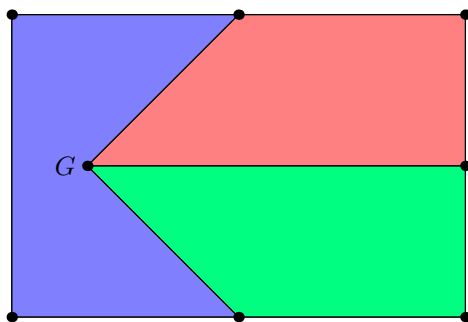
Dann besitzt das Fünfeck $QBCPG$ den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck $FBCE$. Ebenso besitzt dann das Fünfeck $AQGPD$ den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck $AFED$. Die blaue Fläche nimmt also knapp die Hälfte der Flagge ein. Dann kann dies für die rote und die grüne Fläche der Flagge nicht auch noch gelten. Der König hat sich nicht getäuscht.

(b) •



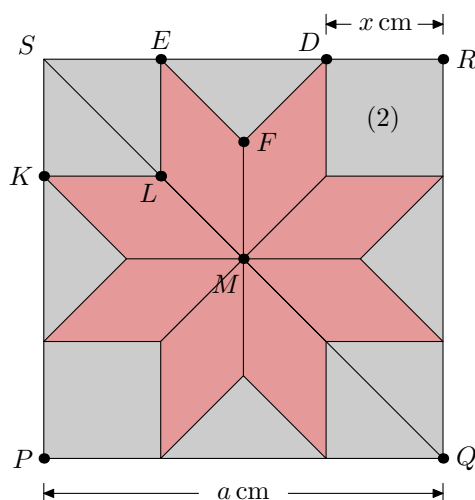
- Für die trapezförmige Südregion gilt:
 $A_2 = 0.5 \cdot (x + 3) \cdot 2 \text{ cm}^2 = (x + 3) \text{ cm}^2 = A_3$. Die blaue Fläche lässt sich in zwei kongruente Trapeze zerlegen. Somit muss $A_2 = A_1$ gelten: $x + 3 = 0.5 \cdot [3 + (6 - x)] \cdot 2 \cdot 2 \Leftrightarrow x + 3 = 18 - 2x \Leftrightarrow x = 5$

Die Flagge sieht dann so aus:



23. (a)

5. Flächeninhalt ebener Vielecke



Aus Symmetriegründen ist das Dreieck EFD gleichschenkelig.

Die Diagonale $[QS]$ im Quadrat $PQRS$ ist ebenfalls Diagonale im Quadrat $KLES$.

$$\Rightarrow \angle ELS = 45^\circ \Rightarrow \angle MLE = 135^\circ \Rightarrow \angle LEF = 45^\circ \Rightarrow \angle FED = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

Im Dreieck EFD haben damit beide Basiswinkel das Maß 45° , also ist dieses Dreieck gleichschenkelig-rechtwinklig.

- (b) • Sämtliche Rauten besitzen die gleiche Seitenlänge x cm.
Das Dreieck EFD ist ein halbes Quadrat mit der Seitenlänge x cm und der Diagonalenlänge $\overline{ED} = x\sqrt{2}$ cm.

$$\text{Nun folgt: } \overline{RS} = a \text{ cm} = (x + x\sqrt{2} + x) \text{ cm} \Rightarrow a = x \cdot (2 + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\bullet x = \frac{a}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{a \cdot (2 - \sqrt{2})}{2} = a - \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

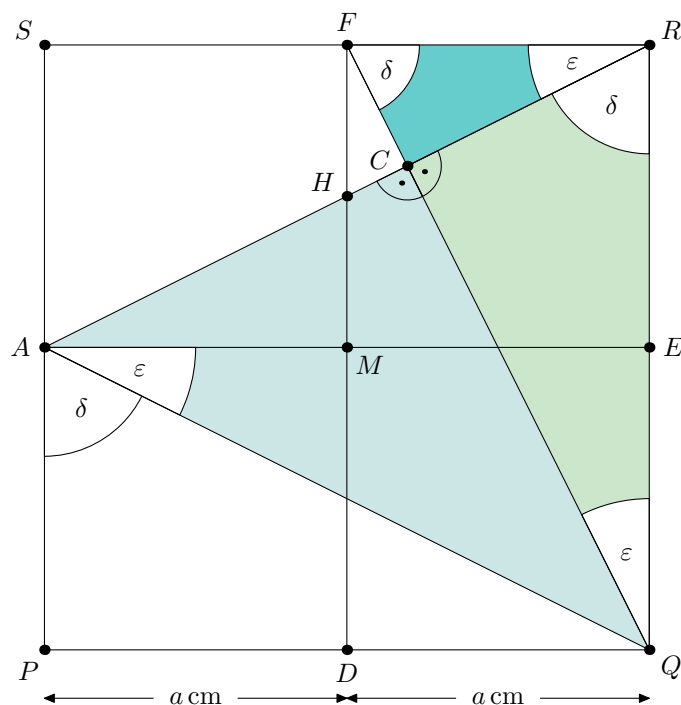
- (c) Es gilt $\overline{MS} = \frac{a}{2}\sqrt{2} \text{ cm} = \overline{SD}$

$$\Rightarrow \overline{DR} = \overline{SR} - \overline{SD} = (a - \frac{a}{2}\sqrt{2}) \text{ cm}, \text{ was zu zeigen war.}$$

- (d) Klar.

24. (a) •

5. Flächeninhalt ebener Vielecke



- Am Punkt A erkennst du: $\varepsilon + \delta = 90^\circ$.

Die Rechtecke $APQE$, $AERS$ und $DQRF$ sind kongruent.

$$\Rightarrow \angle QAE = \angle FQR = \angle SRA = \varepsilon$$

$$\text{und } \angle PAQ = \angle ARE = \angle QFR = \delta.$$

Wegen $\varepsilon + \delta = 90^\circ$ und der Innenwinkelsumme von 180° im Dreieck CQR muss $\angle QCR = 90^\circ$ gelten. Also ist das Dreieck AQC rechtwinklig.

- (b) Die Dreiecke CQR und FCR sind zueinander ähnlich. Die Hypotenuse $[QR]$ im Dreieck QRC ist doppelt so lang wie die Hypotenuse $[FR]$ im Dreieck FCR . Also ist der Flächeninhalt des Dreiecks QRC viermal ($2^2 = 4$) so groß wie der des Dreiecks FCR .

Damit ist der Flächeninhalt des Dreiecks FQR fünfmal so groß wie der des Dreiecks FCR . Weil die Dreiecke FQR und ARS kongruent sind, ist der Flächeninhalt des Dreiecks ARS auch fünfmal so groß wie der des Dreiecks FCR .

Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecks FCR kurz mit „ A_Δ “.

Dann gilt: $A_{PQRS} = 20 \cdot A_\Delta$ und

$$A_{\Delta AQC} = 20 \cdot A_\Delta - 10 \cdot A_\Delta - 4 \cdot A_\Delta = 6 \cdot A_\Delta.$$

$$\frac{A_{\Delta AQC}}{A_{PQRS}} = \frac{6 \cdot A_\Delta}{20 \cdot A_\Delta} = \frac{3}{10} = 30\%.$$

ANMERKUNG

Die Aufgabe (b) ist auch ohne den Vergleich der Flächen der beiden Dreiecke FCR und CQR lösbar. Dann brauchst du jedoch den Satz des PYTHAGORAS und die Flächenformel für rechtwinklige Dreiecke. Dazu ein paar Stichpunkte:

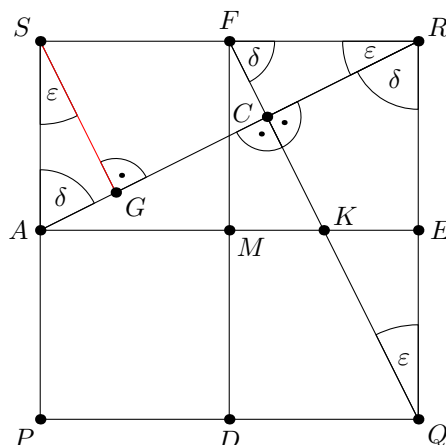
$$\overline{FQ} = a \cdot \sqrt{5}, \quad \overline{CR} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \overline{CQ} = \frac{4a}{\sqrt{5}}.$$

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

$$\Rightarrow A_{\Delta CQR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4a}{\sqrt{5}} = \frac{4a^2}{5}.$$

$$\Rightarrow A_{\Delta AQC} = 4a^2 - 2a^2 - \frac{4a^2}{5} = \frac{6}{5} \cdot a^2 \text{ usw.}$$

(c)



Die gesuchte Hilfslinie ist das Lot $[SG]$ vom Eckpunkt S auf die Diagonale $[AR]$. Die rechtwinkligen Dreiecke ARS , SGR und FCR sind zueinander ähnlich. Eine Kathete ist jeweils doppelt so lang wie die andere.

Weil der Punkt F die Hypotenuse $[SR]$ halbiert, ist der Punkt C der Mittelpunkt der Kathete $[GR]$ im Dreieck SGR .

Die Dreiecke AGS und FCR sind kongruent: Ihre beiden Hypotenusen sind gleich lang und sie stimmen in allen Innenwinkelmaßen paarweise überein.

Es gilt also: $\overline{GC} = \overline{GC} = 2 \cdot \overline{AG}$.

$\Rightarrow \overline{CA} = 3 \cdot \overline{AG}$ und $\overline{CR} = 2 \cdot \overline{AG}$.

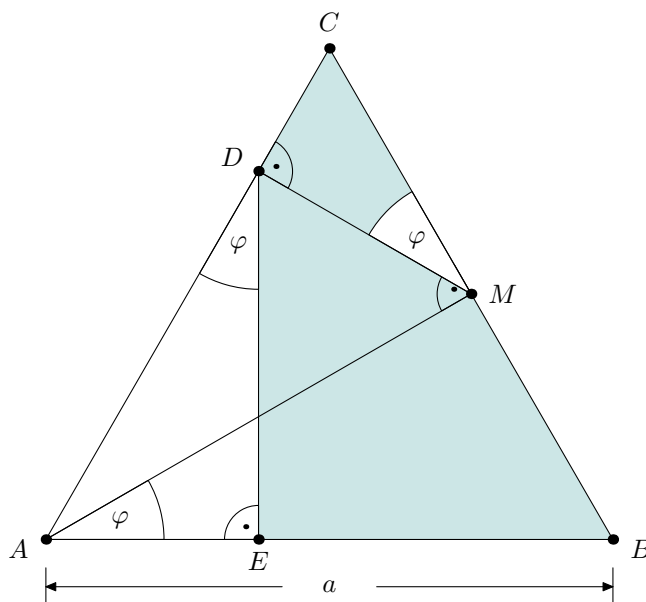
Also folgt: $\overline{CR} : \overline{CA} = 2 : 3$.

(d) Auf der Strecke $[QF]$ spielt der Punkt C die gleiche Rolle wie der Punkt G auf der Strecke $[AR]$.

Also folgt: $\overline{CF} : \overline{CQ} = 1 : 4$.

25. (a)

5. Flächeninhalt ebener Vielecke



- (b) In einem gleichseitigen Dreieck hat jeder Innenwinkel das Maß 60° .

Das bedeutet hier: $\varphi = 30^\circ$. Somit sind die Dreiecke ABM , DMC und AED **halbe gleichseitige Dreiecke**.

$$\Rightarrow \overline{BM} = \overline{MC} = 0,5a$$

$$\Rightarrow \overline{DC} = 0,5 \cdot \overline{MC} = 0,5 \cdot 0,5a = 0,25a$$

$$\Rightarrow \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{DC} = a - 0,25a = 0,75a$$

Weiter gilt: $\triangle AED \sim \triangle ABM$. Streckungsfaktor $k = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{0,75a}{a} = 0,75$.

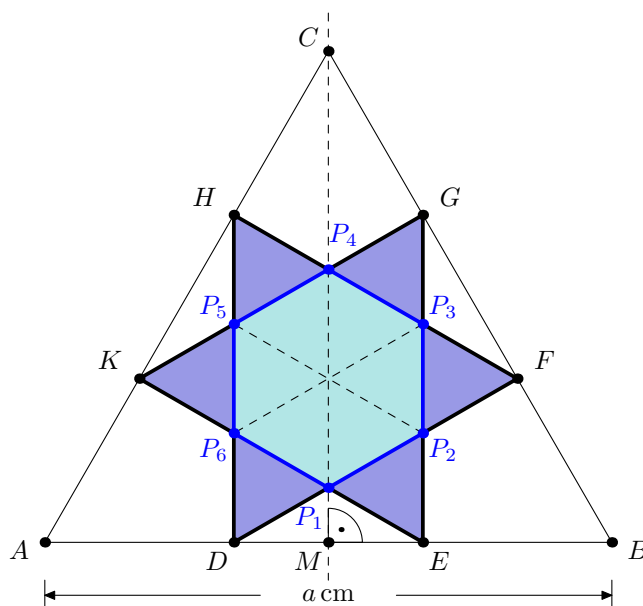
Es ist hier also gleichgültig, wie lang die Seite des Grundstückes ist.

$$\text{Nun gilt: } A_{\triangle AED} = 0,75^2 \cdot A_{\triangle ABM} \Rightarrow \frac{A_{\triangle AED}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2} \cdot 0,5625 = 28,125\%.$$

Das ist der prozentuale Anteil der asphaltierten Fläche an der Gesamtfläche (100%). Die Rasenfläche nimmt also knapp 72% des Grundstückes ABC ein.

26. (a)

5. Flächeninhalt ebener Vielecke



- (b) Die Gerade $[CM]$ ist eine Symmetrieachse des Dreiecks ABC , die auf der Basis $[AB]$ senkrecht steht.

Nun gilt $\overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$ und $\overline{DM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD}$, weil ja z.B. der Punkt D die Strecke $[AB]$ drittelt.

Also teilt der Punkt D die Strecke $[AM]$ im Verhältnis $2 : 1$. Dasselbe Streckenverhältnis erzeugt aber auch der Punkt H auf der Strecke $[AC]$. Also sind die beiden Dreiecke AMC und ADH zueinander ähnlich.

$$\Rightarrow [DH] \parallel [MC] \Rightarrow \angle HDA = 90^\circ.$$

Aus Symmetriegründen sind die Punkte E, F, G, H und K ebenfalls Scheitel von rechten Winkeln.

- (c) Wir rechnen meist ohne die Einheiten „cm“ bzw. „cm²“.

Das Dreieck DBF ist rechtwinklig: $\overline{DF}^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot a\right)^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot a\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot a^2$.

Die Dreiecke DBF, HFC und ADH sind kongruent. $\Rightarrow \overline{DF} = \overline{FH} = \overline{HD}$.

Die Dreiecke EBG, KGC und AEK sind kongruent. $\Rightarrow \overline{EG} = \overline{GK} = \overline{KE}$.

Also sind die beiden Dreiecke DFH und EGK gleichseitig. Die sechs kleinen Dreiecke über den Sechsecksseiten $\overline{P_1P_2} \dots \overline{P_6P_1}$ sind ebenfalls gleichseitig und kongruent. Das Sechseck $P_1 \dots P_6$ ist damit regelmäÙig.

$$A_{\Delta DFH} = \frac{1}{4} \cdot \overline{DF}^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Weil z.B. $\overline{P_1P_2} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DF}$ gilt, folgt:

$$A_{\Delta EP_2P_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot A_{\Delta DFH} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{108} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Der Stern besteht z.B. aus den Dreieck DFH , an das drei kleine Dreiecke vom Typ EP_2P_1 angefügt worden sind:

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

$$A_{\text{Stern}} = \left(\frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{108} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \right) = \frac{1}{9} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$k_1 = \frac{A_{\text{Stern}}}{A_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1}{9} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \right) : \left(\frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \right) = \frac{4}{9}$$

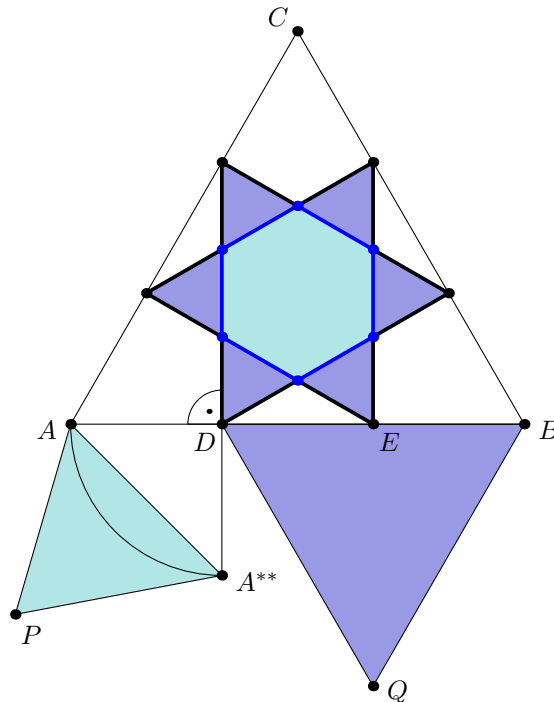
- (d) Die gesuchten Hilfslinien sind die Diagonalen des Sechsecks. Durch sie wird dieses Sechseck in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegt.

Wenn Du diese sechs kongruenten gleichseitigen Dreiecke nach außen klappst, hast du den Stern erzeugt. Also besteht der Stern insgesamt aus 12 solcher Dreiecke. Damit ist der Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks $P_1 \dots P_6$ im Inneren halb so groß wie der des Sterns:

$$k_2 = 0,5 \cdot k_1 = \frac{2}{9}.$$

Anmerkung: Eine Begründung muss also nicht unbedingt rechnerisch erfolgen. Trotzdem kannst du auch wieder das Verhältnis als Bruch von Flächeninhalten herleiten. Das ist aber umständlicher.

(e)



- Für das gesuchte Dreieck „ Δ^* “ mit der Seitenlänge a^* cm gilt:

$$A_{\Delta^*} = A_{\text{Stern}} = \frac{4}{9} \cdot A_{\Delta ABC} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 \cdot A_{\Delta ABC}$$

$$\Rightarrow a^* = \frac{2}{3} \cdot a.$$

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

Errichte also z.B. unter der Strecke $[DB]$ das gesuchte Dreieck DQB mit der Seitenlänge $\overline{DB} = a^*$. (Siehe Zeichnung oben.)

- Für das gesuchte Dreieck „ Δ^{**} “ mit der Seitenlänge a^{**} cm gilt:

$$A_{\Delta^{**}} = A_{\text{Sechseck}} = \frac{2}{9} \cdot A_{\Delta ABC} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot A_{\Delta ABC}$$

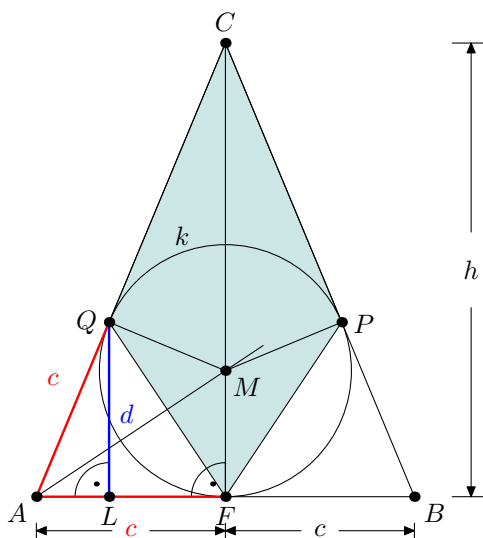
$$\Rightarrow a^{**} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a = \left(\frac{1}{3} \cdot a\right) \sqrt{2}.$$

Der Term $\left(\frac{1}{3} \cdot a\right) \sqrt{2}$ lässt sich als Diagonallänge eines Quadrates mit der Seitenlänge $\frac{1}{3} \cdot a$ deuten.

In der Zeichnung oben ist das Dreieck $AA^{**}D$ ein halbes Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AD} = \frac{1}{3} \cdot a$. Damit hat die Diagonale $[AA^{**}]$ die Länge $(\frac{1}{3} \cdot a) \sqrt{2}$ cm = a^{**} cm. Also ist das Dreieck APA^{**} das gesuchte.

Das dunkel getönte gleichseitige Dreieck DQB hat den doppelten Flächeninhalt wie das hell getönte Dreieck APA^{**} .

27. (a) Die Figur wurde im Maßstab 1 : 2 gezeichnet.



Hier gilt: $\overline{AF} = \overline{AQ}$.

Der Inkreismittelpunkt M ergibt sich aus dem Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC .

- (b) Die Dreiecke ALQ und AFC sind zueinander ähnlich: $\frac{\overline{LQ}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}}$. (*)

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

$\triangle AFC$: $\overline{AC} = \sqrt{h^2 + c^2}$. Also folgt mit (*): $\frac{d}{h} = \frac{c}{\sqrt{h^2 + c^2}}$

$$\Rightarrow d = \frac{h \cdot c}{\sqrt{h^2 + c^2}}.$$

$$(c) \quad A_{AFQ} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot d = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{h \cdot c}{\sqrt{h^2 + c^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h \cdot c^2}{\sqrt{h^2 + c^2}}.$$

$$(d) \quad A_{FPCQ} = A_{\triangle ABC} - 2 \cdot A_{\triangle AFQ} \quad | : A_{\triangle ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{A_{FPCQ}}{A_{\triangle ABC}} = 1 - 2 \cdot \frac{A_{\triangle AFQ}}{A_{\triangle ABC}} = 1 - 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{h \cdot c^2}{\sqrt{h^2 + c^2}}}{c \cdot h} = 1 - \frac{c}{\sqrt{h^2 + c^2}}.$$

$$(e) \quad 1 - \frac{c}{\sqrt{h^2 + c^2}} = 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{\sqrt{h^2 + c^2}} = 0,6 \quad |^2$$

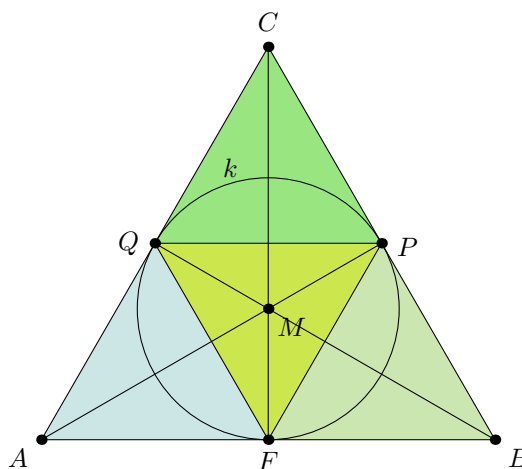
$$\Rightarrow c^2 = 0,36h^2 + 0,36c^2 \quad \Rightarrow \quad 0,64c^2 = 0,36h^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{h} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad c : h = 3 : 4.$$

D.h. die Basislänge $\overline{AB} = 2c$ müsste 1,5 mal so lang wie die Höhe dieses gesuchten Dreiecks ABC sein.

(f) 1. Möglichkeit: **anschaulich:**

Im gleichseitigen Dreieck fällt der Inkreismittelpunkt mit dem Höhenschnittpunkt zusammen:



Die Seiten $[FP]$, $[PQ]$ und $[QF]$ zerlegen das gleichseitige Dreieck ABC in vier kongruente Teildreiecke. Zwei davon nimmt jetzt das Viereck $FPCQ$ ein. Also beträgt der Flächenanteil des Vierecks $FPCQ$ am gleichseitigen Dreieck ABC „genau“ 50%.

2. Möglichkeit: **rechnerisch:**

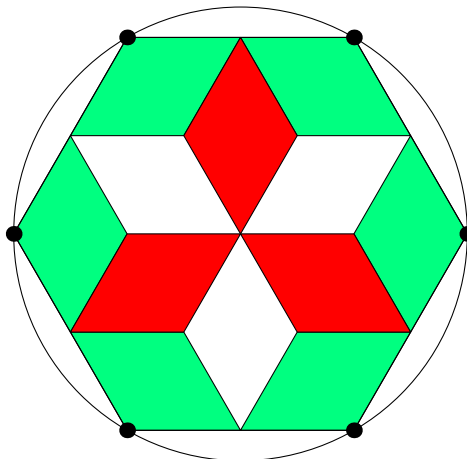
Wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist, gilt: $h = c \cdot \sqrt{3}$.

Eingesetzt in das Ergebnis der Aufgabe (d):

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

$$\frac{A_{FPCQ}}{A_{ABC}} = 1 - \frac{c}{\sqrt{(c \cdot \sqrt{3})^2 + c^2}} = 1 - \frac{c}{\sqrt{4 \cdot c^2}} = 1 - \frac{1}{2} = 50\%.$$

28. (a)

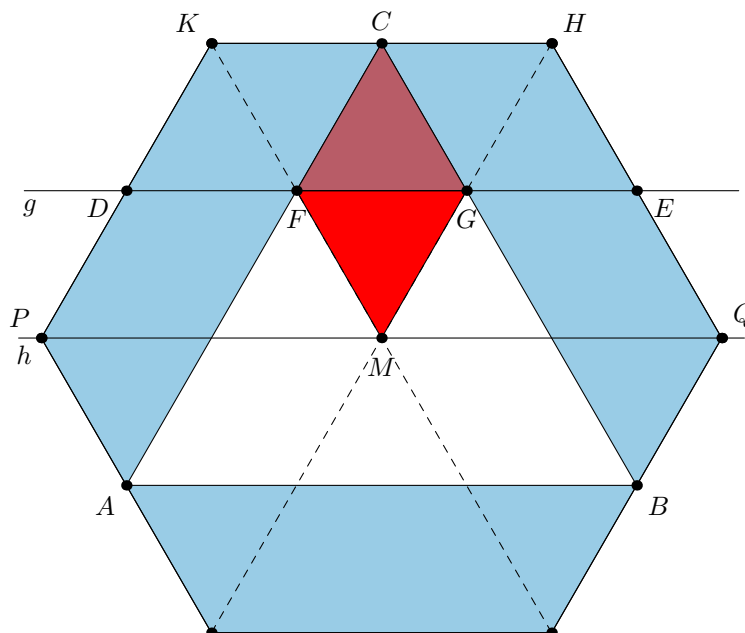


Das Bild ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

Zeichne zunächst einen Kreis mit Radius 6 cm. Um die Eckpunkte auf der Kreislinie zu erhalten, trägst du den Kreisradius 6-Mal auf der Kreislinie ab. Beginne am linken oder am rechten Eckpunkt, dann liegen die oberste und die unterste Seite des Sechsecks waagrecht. Verbinde dann dünn mit dem Bleistift immer zwei entsprechende Seitenmittelpunkte miteinander, so wie es die Zeichnung darstellt.

Damit bist du praktisch fertig. Es gilt jetzt nur noch, die entstandenen Teilflächen entsprechend auszumalen.

(b)



5. Flächeninhalt ebener Vielecke

Die beiden gestrichelten Linien und die Zentrale h zerlegen das regelmäßige Seckseck in 6 kongruente gleichseitige Dreiecke.

Also sind die Vierecke $PMHK$ und $MQHK$ kongruente Rauten. Weil die Punkte D und E Seitenmittelpunkte des Sechsecks sind, schneidet die Gerade g die Rautendiagonalen $[KM]$ bzw. $[MH]$ in den Rautenmittelpunkten F und G .

Damit sind die Punkte F und G Seitenmittelpunkte des Dreiecks MHK . Also gilt: $\triangle FGC \cong \triangle MGF$. Das Viereck $MGCF$ ist eine Raute.

Durch Drehung um 120° lässt sich ein rotes Viereck mit einem anderen zur Deckung bringen.

- (c) Betrachte erneut die Figur in der Lösung der Aufgabe (b):

Die drei gefärbeten Trapeze sind kongruent. Also ist das Dreieck ABC gleichseitig. Aus Symmetriegründen müssen dann alle 3 weißen, alle drei roten und alle sechs grünen Rauten in der Ausgangsfigur kongruent sein.

Das Seckseck enthält 12 Rauten, der Stern enthält 6 Rauten und die Mitsubishi-Figur enthält 3 Rauten.

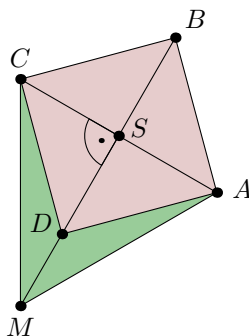
Prozentualer Anteil des Sterns am Sechseck: $\frac{6 \text{ Rauten}}{12 \text{ Rauten}} = 0,5 = 50\%$.

- (d) Prozentualer Anteil des Logos am Sechseck: $\frac{3 \text{ Rauten}}{12 \text{ Rauten}} = 0,25 = 25\%$.

29. (a) Zeichne zunächst einen Kreis mit Radius 6 cm. Um die Eckpunkte auf der Kreislinie zu erhalten, trägst du den Kreisradius 6-mal auf der Kreislinie ab. Beginne am oberen, dann am unteren Eckpunkt.

Um die Quadrate zu konstruieren, zeichnest du am besten einen THALES-Kreis, dessen Durchmesser irgendeine Seite des regelmäßigen Sechsecks ist. Ein solcher ist schon in der Darstellung oben gestrichelt eingezeichnet. Beachte sodann, dass die Diagonalen in jedem Quadrat gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen. Die Eckpunkte der restlichen Quadrate erhältst du z.B. durch Punkt- bzw. Achsenspiegelungen.

- (b)



Dieser Ausschnitt der Gesamtfigur ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

- (c) Die Diagonalenlänge jedes der 6 Quadrate beträgt 6 cm.

$$\Rightarrow A_{\text{Quadrat}} = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \text{ cm}^2 = 18 \text{ cm}^2$$

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

- (d) Berechne zunächst den Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks. Es besteht aus 6 kongruenten gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge 6 cm.

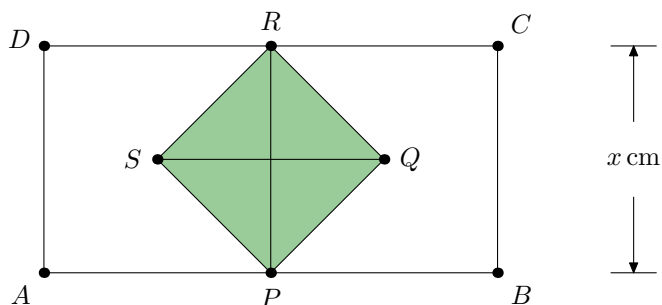
$$\Rightarrow A_{\text{Sechseck}} = 6 \cdot \frac{6^2}{4} \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2 = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 93,53 \text{ cm}^2.$$

Um den Stern zu erhalten, musst du aus diesem Sechseck 6 halbe Quadrate ausschneiden.

Die Fläche des Sterns erhältst du also dadurch, dass du von seinem Flächeninhalt den von 3 Quadraten subtrahierst:

$$A_{\text{Stern}} = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2 - 3 \cdot 18 \text{ cm}^2 = 18(3\sqrt{3} - 4) \text{ cm}^2 \approx 21,53 \text{ cm}^2.$$

30. (a) • $x = 3$:



- In jedem Quadrat stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht. Außerdem sind sie gleich lang, und sie halbieren sich. Also gilt $\overline{PR} = \overline{SQ} = 3 \text{ cm}$.

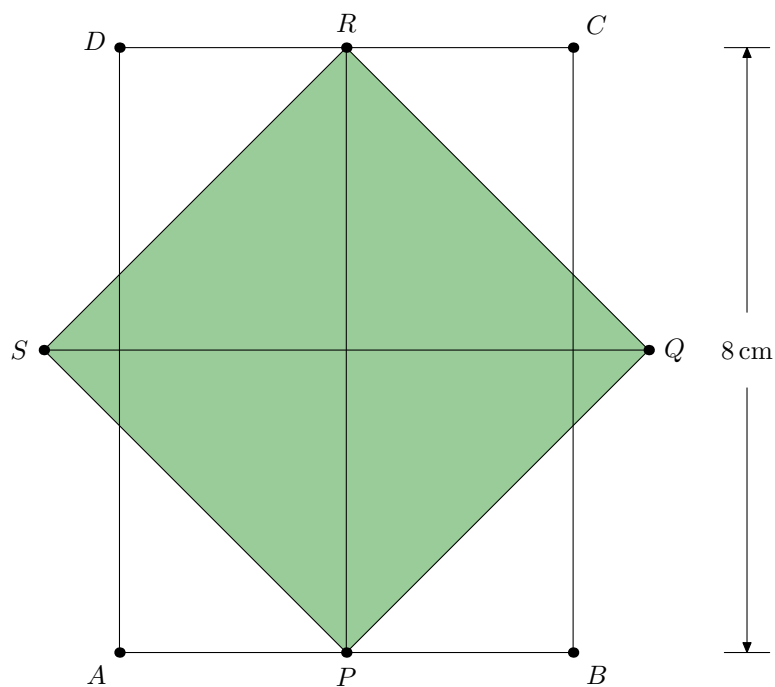
Flächeninhalt des Quadrates: $A_Q = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \text{ cm}^2 = 4,5 \text{ cm}^2$.

Flächeninhalt des Rechtecks: $A_R = 6 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$.

Flächenanteil: $\frac{A_Q}{A_R} = \frac{4,5 \text{ cm}^2}{18 \text{ cm}^2} = 0,25 = 25\%$.

- (b) • $x = 8$:

5. Flächeninhalt ebener Vielecke



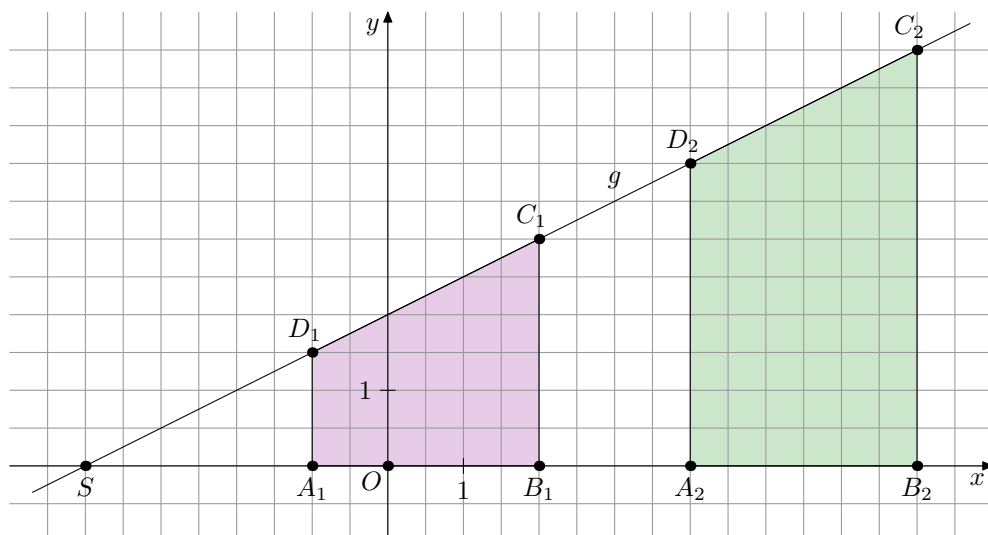
- Es muss gelten: $\overline{SQ} = x\text{ cm} \leq 6\text{ cm}$, also $x \leq 6$. (Dann wird das Rechteck $ABCD$ selbst zum Quadrat.)

(c)

$$\frac{A_Q}{A_R} = \frac{0,5 \cdot x^2}{6x} = 40\% = 0,4 \text{ mit } x \in \mathbb{R}^+.$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,5 \cdot x}{6} = 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4,8.$$

31. (a)



5. Flächeninhalt ebener Vielecke

- (b) Die Gerade g schneidet die x -Achse im Punkt S . Wenn einer der Punkte D_n auf S liegt, dann entartet das betreffende Trapez zum Dreieck; es ist also kein Trapez mehr. Falls einer der Punkte D_n im III. Quadranten liegt, wird der Umlaufsinn der Trapeze $A_n B_n C_n D_n$ falsch.

$$g \cap \{x - \text{Achse}\} = \{S\} : \Rightarrow 0,5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

Also gibt es nur für $x > -4$ solche Trapeze $A_n B_n C_n D_n$.

- (c) Wegen $C_n \in g$ gilt: $C_n(x_C \mid 0,5x_C + 2) \wedge x_C = x + 3$
 $\Rightarrow C_n(x + 3 \mid 0,5 \cdot (x + 3) + 2) = (x + 3 \mid 0,5x + 3,5).$

$$(d) A_{A_n B_n C_n D_n} = \frac{\overline{A_n B_n} + \overline{D_n C_n}}{2} \cdot \overline{A_n B_n}$$

$$A(x) = \left[\frac{(0,5x + 2) + (0,5x + 3,5)}{2} \right] \cdot 3 \text{ FE}$$

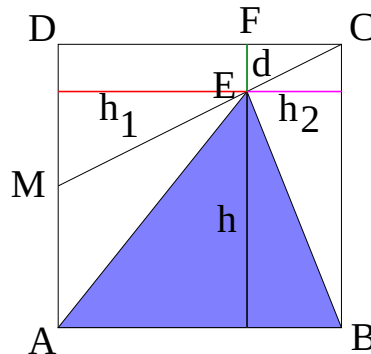
$$A(x) = (1,5x + 8,25) \text{ FE}$$

$$(e) 1,5x + 8,25 = 53,25 \Leftrightarrow x = 30.$$

$$(f) \overline{B_n C_n} = 5 \cdot \overline{A_n D_n} \Leftrightarrow 0,5x + 3,5 = 5 \cdot (0,5x + 2) \Leftrightarrow x = -3,25$$

Anmerkung: Zur Veranschaulichung der Lösung gibt es die Datei 09eh065.gxt.

32.



$$(a) A_{\triangle DMC} = 0,5 \cdot \overline{DC} \cdot \overline{DM} = 0,5 \cdot 6 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} = 9 \text{ m}^2$$

- (b) Zeichne zunächst die beiden genannten Abstände ein. (Hier: h_1 und h_2)
 Den Flächeninhalt von Dreiecken berechnest du gewöhnlich mit dem Term

$$0,5 \cdot \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}$$

Wähle als Grundlinie in den beiden Dreiecken AEM und BCE die Strecken $[AM]$ bzw. $[CN]$. Es gilt hier $\overline{AM} = 3 \text{ m}$ und $\overline{CN} = 6 \text{ m}$.

Weil die beiden Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben, muss zum Ausgleich die zugehörige Höhe h_1 doppelt so groß wie die Höhe h_2 sein:

$$h_1 = 4 \text{ m} \text{ und } h_2 = 2 \text{ m}.$$

- (c) Zeichne zunächst den Abstand d des Punktes E zur Seite $[BC]$ mit dem Fußpunkt F und die Höhe h des Dreiecks ABE ein.

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

Die beiden Dreiecke MCD und ECF sind zueinander ähnlich:

Die Strecke $[DF]$ ist doppelt so lang wie die Strecke $[FC]$. Das bedeutet:

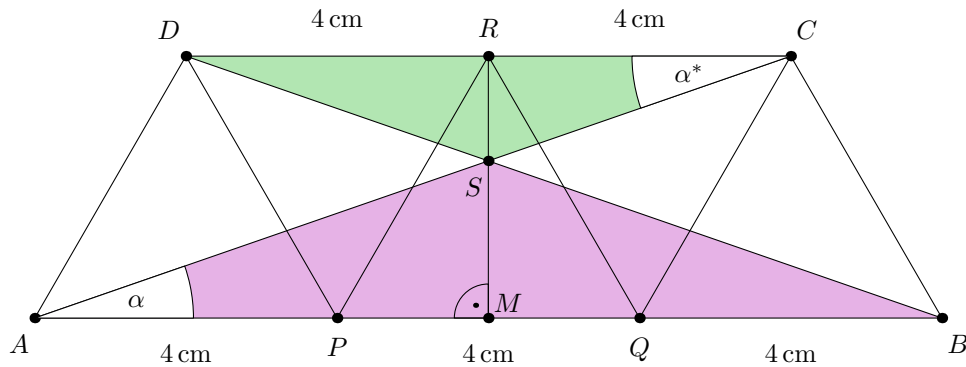
$$\overline{FC} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DC}.$$

Wegen der Ähnlichkeit muss dieses Verhältnis auch für die beiden anderen Katheten der Dreiecke MCD und ECF gelten:

$$\overline{FD} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DM} = 1 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad h = 5 \text{ m}.$$

$$\Rightarrow A_{ABE} = 0,5 \cdot 6 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 15 \text{ m}^2$$

33. (a)



(b) Die beiden Dreiecke ABS und DSC sind zueinander ähnlich: Es gilt z.B.: $\alpha = \alpha^*$ (Z-Winkel).

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{AB}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{DSC}}{A_{ABS}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

(c) Es muss gelten: $\overline{RS} : \overline{SM} = 2 : 3$. (Siehe Lösung (a).)

(d) Für die Trapezhöhe $[RM]$ gilt: $\overline{RM} = \frac{4}{2}\sqrt{3} \text{ cm} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.

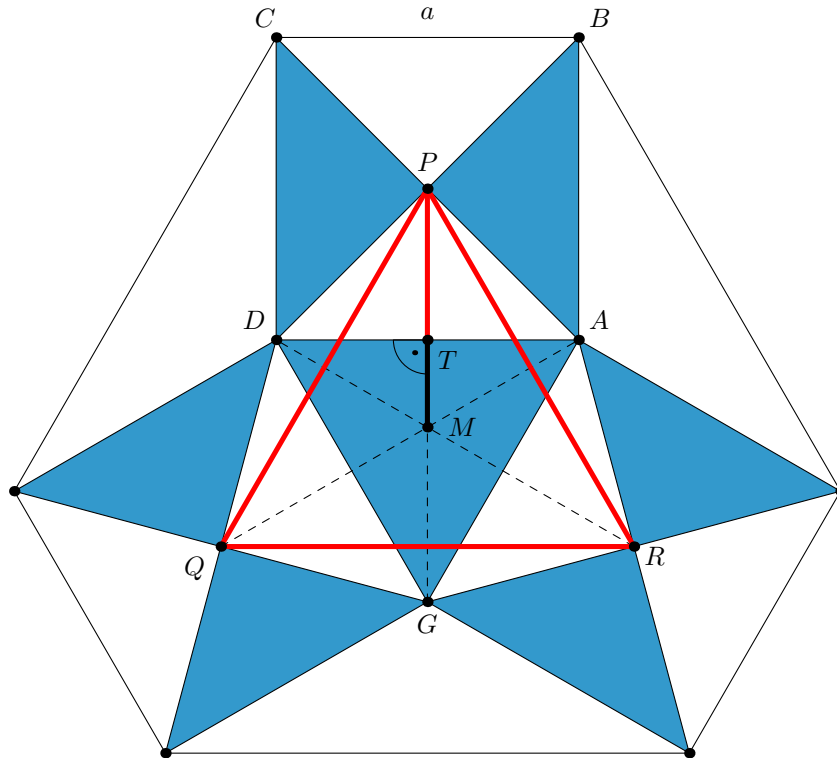
Wegen des Teilverhältnisses von $2 : 3$ teilst du gedanklich $[RM]$ in $2 + 3 = 5$ gleiche Teile. 3 Teile davon entfallen auf die Strecke $[SM]$ und 2 Teile davon entfallen auf die Strecke $[RS]$. Also:

$$\overline{RS} = \frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{3} \text{ cm} = 0,8\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \overline{SM} = \frac{3}{5} \cdot 2\sqrt{3} \text{ cm} = 1,2\sqrt{2}.$$

$$\frac{A_{DSC}}{A_{ABCD}} = \frac{0,5 \cdot 8 \text{ cm} \cdot 0,8\sqrt{2} \text{ cm}}{0,5 \cdot (12 + 8) \text{ cm} \cdot 2\sqrt{2} \text{ cm}} = \frac{4}{25} = 16\%$$

34. (a)

5. Flächeninhalt ebener Vielecke



- Am besten beginnst du mit dem gleichseitigen Dreieck ADG im Zentrum.
 - Errichte dann die drei Quadrate über den Seiten dieses Dreiecks ADG .
- (b) Der Punkt M ist das Zentrum des Logos und gleichzeitig der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks ADG .
Die Strecke $[MT]$ stellt ein Drittel der Höhe h dieses gleichseitigen Dreiecks dar:

$$\overline{MT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3}$$

Für die Strecke $[MP]$ gilt: $\overline{MP} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3} + \frac{1}{2}a = \frac{a}{6}(\sqrt{3} + 3)$.

Die Strecke $[MP]$ stellt zwei Drittel der Höhe h^* des gleichseitigen Dreiecks PQR dar:

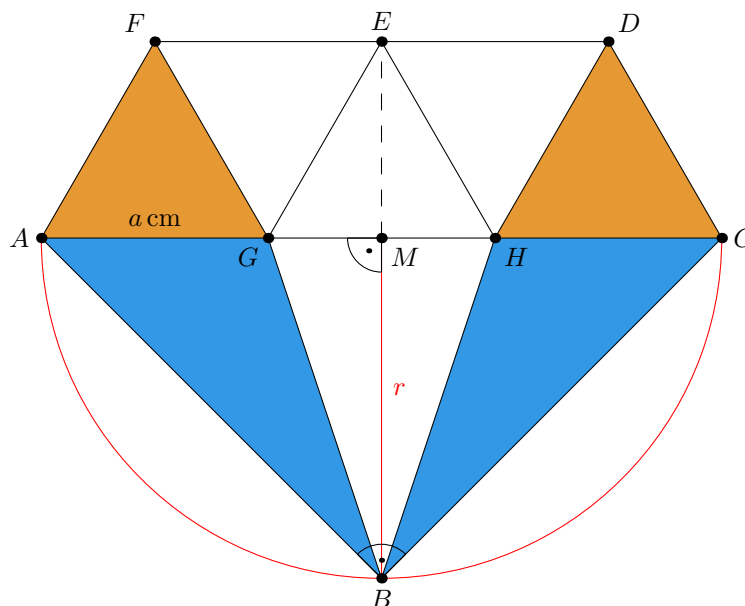
$$\frac{2}{3} \cdot h^* = \frac{a}{6}(\sqrt{3} + 3) \quad \Rightarrow \quad h^* = \frac{a}{4}(\sqrt{3} + 3)$$

Nun gilt: $\frac{A_{ADG}}{A_{PQR}} = \left(\frac{h}{h^*}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{3}}{\frac{a}{4}(\sqrt{3} + 3)}\right)^2 \approx 0,5359 = 53,59\%$

Das bedeutet: Das Dreieck PQR besitzt knapp 54% des Flächeninhaltes des Dreiecks ADG .

35. (a)

5. Flächeninhalt ebener Vielecke



- (b) Das Viereck $BHEG$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, der sich aus den beiden Dreiecken BHG und GHE zusammensetzt.
Der THALES-Halbkreis mit dem Durchmesser $[AC]$ und dem Radius r macht deutlich, dass $\overline{AM} = \overline{MB} = 1,5 a$ cm gilt.

$$A_1(a) = \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot 1,5 a + \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \right) \text{ cm}^2 = \left(\frac{3}{4} a^2 + \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \right) \text{ cm}^2$$

$$A_1(a) = \frac{a^2}{4} (\sqrt{3} + 3) \text{ cm}^2$$

- (c) • Die Dreiecke AGF und GHE sind kongruent, also flächengleich. Die beiden Dreiecke ABG und BHG haben gleich lange Grundlinien: $\overline{AG} = \overline{GH}$.
Der Kreisradius r stellt die gemeinsame Höhe auf die beiden genannten Grundlinien dar (im Dreieck ABG liegt diese Höhe außerhalb). Also sind beide Dreiecke flächengleich. Damit sind auch beide Vierecke flächengleich.
- Die beiden Vierecke $ABGF$ und $BCDH$ sind aus Symmetriegründen kongruent, also flächengleich. Daher sind im Fünfeck $ABCDF$ drei Vierecke von der Größe des Vierecks $BHEG$ und zusätzlich noch die beiden gleichseitigen Dreiecke AGF und HCD enthalten.
Also bedeckt das Viereck $BHEF$ weniger als ein Drittel der Fläche des Fünfecks $ABCDF$.

(d) $A_2(a) = \left(5 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 1,5a \right) \text{ cm}^2 = \frac{a^2}{4} (5\sqrt{3} + 9) \text{ cm}^2$

(e) $\frac{A_1(a)}{A_2(a)} = \frac{\frac{a^2}{4} (\sqrt{3} + 3) \text{ cm}^2}{\frac{a^2}{4} (5\sqrt{3} + 9) \text{ cm}^2} \approx 0,2679 = 26,79\%$

Das Viereck $BHEG$ bedeckt also etwas mehr als 25% der Fünfecksfläche.

36. (a) Klar.

- (b) Bei dem Viereck $ACDF$ handelt es sich um ein achsensymmetrisches Trapez. Dessen Flächenterm könntest du zwar ohne Weiteres aufstellen, aber die Summe der Flächeninhalte der fünf gleichseitigen Dreiecke ist bequemer:

$$A_{ACDF} = 5 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2 = \frac{a^2}{4} \cdot 5 \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Das Dreieck ABC ist ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $\overline{AC} = 3a$ cm:

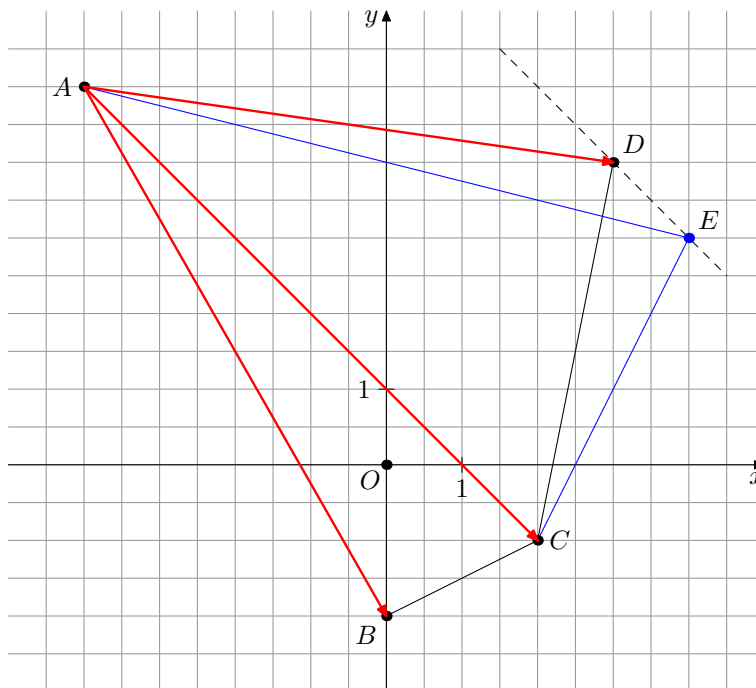
$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3a)^2 \text{ cm}^2 = \frac{a^2}{4} \cdot 9 \text{ cm}^2$$

Der Faktor $\frac{a^2}{4}$ taucht in beiden Flächentermen auf.

Also musst du nur noch den Rest vergleichen, nämlich $5\sqrt{3}$ mit 9:

$5\sqrt{3} < 8,67 < 9$. Also ist der Flächeninhalt des Trapezes $ACDF$ kleiner als der des Dreiecks ABC . (Das Trapez ist jedoch nur um knapp 4% kleiner als das Dreieck.)

37. (a)



- (b)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0+4 \\ -2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{ABCD} = \left[\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & -6 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \right] \text{ cm}^2 = 27 \text{ cm}^2$$

(c) Z.B.: $E(4 | 3)$ (siehe Zeichnung).

Anmerkungen:

Wenn der Punkt D seine Lage verändert, dann bleibt der Flächeninhalt des Dreiecks ABC konstant. Also musst du nur darauf achten, dass der Punkt D so platziert wird, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ACD unverändert bleibt.

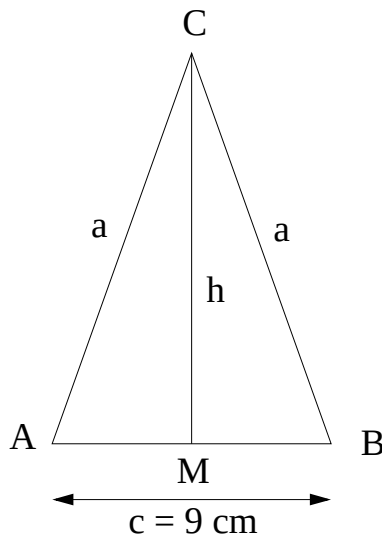
Egal, wo du den Punkt D hinlegst: Die Grundlinie $[AC]$ des Dreiecks ACD bleibt erhalten. Damit sich der Flächeninhalt dieses Dreiecks nicht ändert, muss also die Höhe und damit der Abstand des Punktes D zur Grundlinie $[AC]$ unverändert bleiben.

Der gesuchte Punkt E muss sich dann auf der Parallelen (siehe gestrichelte Linie) zur Diagonalen $[AC]$ durch den Punkt D aufhalten, weil alle Punkte auf dieser Parallelen den gleichen Abstand zur Grundlinie $[AC]$ besitzen. Es gibt daher beliebig viele Lösungen.

38. Es gilt: $3,6^2 + 4,8^2 = 6^2$ Also ist das Dreieck rechtwinklig.

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \text{ cm} \cdot 4,8 \text{ cm} = 8,64 \text{ cm}^2.$$

39. (a)



$$\text{Es gilt also: } 27 \text{ cm}^2 = 0,5 \cdot 9 \text{ cm} \cdot h \Leftrightarrow h = 6 \text{ cm}.$$

$$(b) \text{ Hier gilt: } 9 \text{ cm} + 2a = 24 \text{ cm} \Leftrightarrow a = 7,5 \text{ cm}.$$

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

- (c) Für das z.B. x cm breite und y cm hohe Rechteck gilt dann:
 $x \cdot y = 27$. Es könnte also z.B. 9 cm breit und 3 cm hoch sein oder 20 cm breit und 1,35 cm hoch sein oder ...

40. (a) • Figur 1: $\pi \approx \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \approx 3,162\,227\,766 \dots$

• Taschenrechner: $\pi \approx 3,141\,592\,654 \dots$

$$\frac{3,162\,227\,766 - 3,141\,592\,654}{3,141\,592\,654} \approx 0,0066 = 0,66\%$$

(b) • $\triangle BAC$: $\overline{AC} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
 $\triangle ADC$: $\overline{DE} = \overline{AD} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
 Also $\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3,146\,264\,37 \dots$

- Beim Näherungswert für π in der Figur 1 stimmt die erste Kommastelle und in der Figur 2 stimmen die erste und die zweite Kommastelle.

• ARCHIMEDES: $\frac{22}{7} = 3,142\,857\,143 \dots$

Taschenrechner: $\pi = 3,141\,592\,654 \dots$

Figur 2: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,146\,264\,37 \dots$

(c) • $l_1 = 2 \cdot 6378,388 \text{ km} \cdot 3,146 \approx 40\,132,871 \text{ km}$

• $l_2 = 2 \cdot 6378,388 \text{ km} \cdot 3,142 \approx 40\,081,790 \text{ km}$

• $\Delta l \approx 51 \text{ km}$.

- Dieser Unterschied ist praktisch bedeutungslos, weil der Erdäquator nur näherungsweise eine Kreislinie darstellt.

Außerhalb der Meeresoberfläche führt die Äuatorlinie z.B. in Ecuador in Südamerika über die Andenkette hinweg oder in Kenia in Afrika dicht an dem über 5000 m Mount Kenia vorbei.

Auch die Ozeane bilden keine einheitliche Oberfläche. Der Meeresspiegel variiert global in seiner Höhe bis zu 200 m.

41. falsch, falsch, richtig, richtig

42. (a) Vom großen Würfel sind zwei Seitenflächen voll sichtbar: $A_1 = 2 \cdot 1,2^2 \text{ m}^2$.

Von der vorderen Seitenfläche sind $A_2 = (1,2^2 - x^2) \text{ m}^2$ zu sehen.

Vom kleinen Würfel sind vier Seitenflächen sichtbar: $A_3 = 4 \cdot x^2 \text{ m}^2$.

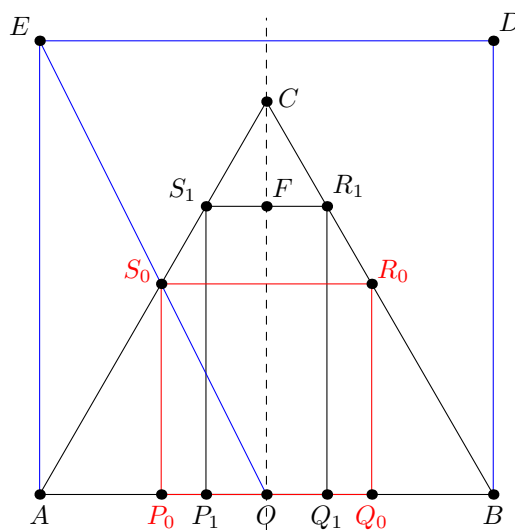
Es muss gelten: $A_1 + A_2 = A_3$:

$$2 \cdot 1,2^2 + (1,2^2 - x^2) = 4 \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot 1,2^2 = 5 \cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow x = 1,2 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 0,24 \cdot \sqrt{15}.$$

(b) $\frac{V_{\text{klein}}}{V_{\text{groß}}} = \frac{(0,24 \cdot \sqrt{15})^3}{1,2^3} \approx 0,4648 = 46,48\%$

43.


 (a) $x \in]0; 6[_{\mathbb{R}}$

(b) In diesem Fall geht es auch ohne Vierstreckensatz:

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke AP_nS_n und Q_nBR_n lassen sich zu einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $y = 2 \cdot (3 - \frac{x}{2}) \text{ cm} = (6 - x) \text{ cm}$ zusammenfügen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A_{P_nQ_nR_nS_n} &= A_{\Delta ABC} - 2 \cdot A_{\Delta AP_nS_n} - A_{\Delta S_nR_nC} \\ &= \left[\frac{6^2}{4} \sqrt{3} - \frac{(6-x)^2}{4} \sqrt{3} - \frac{x^2}{4} \sqrt{3} \right] \text{ cm}^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (36 - 36 + 12x - x^2 - x^2) \text{ cm}^2 \\ A(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4} (-2x^2 + 12x) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$(c) \frac{A(x)}{A_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (-2x^2 + 12x)}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2} \text{ cm}^2 = \frac{1}{18} (-x^2 + 6x) \text{ cm}^2$$

$$(d) \text{ Es gilt: } \frac{1}{18} (-x^2 + 6x) = 32\% = 0,32 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5,76 = 0 \\ \Rightarrow x_1 = 1,2 \text{ und } x_2 = 4,8$$

 (e) • Siehe Zeichnung oben: Zeichne zunächst ein Probequadrat, z.B. das Quadrat $ABDE$.

Weil alle Quadrate und damit alle halben Quadrate zueinander ähnlich sind, muss z.B. der gesuchte Punkt S_0 der Schnittpunkt der Strecken $[AC]$ und $[EO]$ sein. Die Lage der restlichen gesuchten Punkte ist dann klar.

 • Die Dreiecke ABC und S_nR_nC sind zueinander ähnlich. Also gilt:

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{S_n R_n}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CF}} \Leftrightarrow \frac{6}{x} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - x} \Leftrightarrow x = \frac{18\sqrt{3}}{6 + 3\sqrt{3}} = 12\sqrt{3} - 18.$$

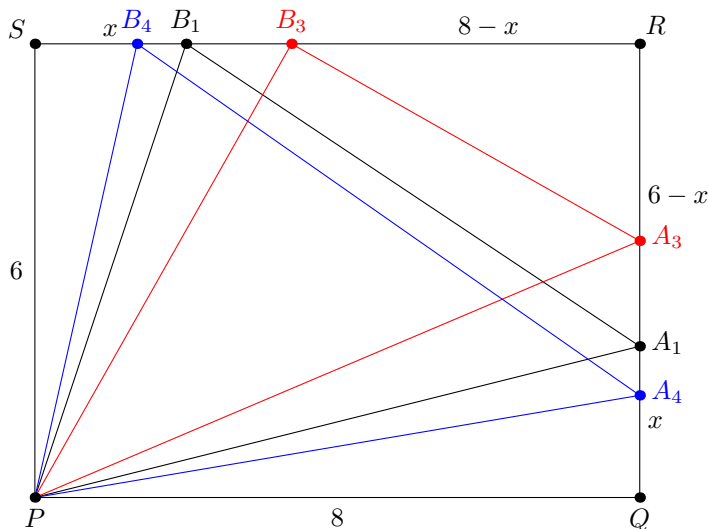
Andererseits gilt nach (b): $A(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4}(-x^2 + 6x) \text{ cm}^2$.

$$A(x) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot (x-3)^2 + \frac{9}{4}\sqrt{3} \right] \text{ cm}^2.$$

Einerseits beträgt die Seitenlänge des Quadrates $P_0Q_0R_0S_0$ $(12\sqrt{3} - 18) \text{ cm} \approx 2,78 \text{ cm}$.

Andererseits beträgt die Seitenlänge des maximalen Rechtecks 3 cm. Also ist das maximale Rechteck kein Quadrat.

44. (a)



(b) $x \in [0; 6]_{\mathbb{R}}$

(c) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned} A_{\Delta P A_n B_n} &= A_{P Q R S} - A_{\Delta P Q A_n} - A_{\Delta A_n R B_n} - A_{\Delta P B_n S} \\ &= 48 - 0,5 \cdot 8 \cdot x - 0,5 \cdot (8 - x) \cdot (6 - x) - 0,5 \cdot 6 \cdot x \\ &= 48 - 4x - 24 + 4x + 3x - 0.5x^2 - 3x \\ A(x) &= (24 - 0,5x^2) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$(d) \quad 24 - 0,5x^2 = 0,3464 \cdot 48 \quad \Rightarrow \quad x = 3,84$$

(e) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned}\overline{PA_n}^2 &= \overline{AB_n}^2 + \overline{PB_n}^2 \\ 8^2 + x^2 &= (6-x)^2 + (8-x)^2 + 6^2 + x^2 \\ 64 + x^2 &= 36 - 12x + x^2 + 64 - 16x + x^2 + 36 + x^2\end{aligned}$$

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

$\Rightarrow x^2 - 14x + 36 = 0 \quad D = 52 \quad \sqrt{D} = 2\sqrt{13}$. Es scheint sogar zwei Dreiecke zu geben. Aber:

$$x_1 = 7 + \sqrt{13} \approx 10,61 \notin [0; 6] \quad x_2 = 7 - \sqrt{13} \approx 3,39 \in [0; 6]$$

$\Rightarrow L = \{7 - \sqrt{13}\}$, siehe „rotes“ Dreieck.

(f) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

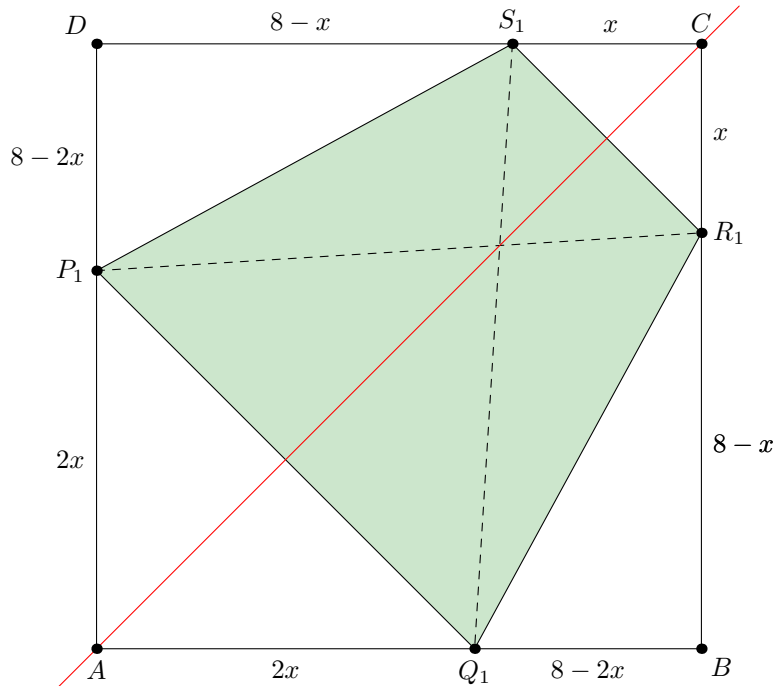
$$\begin{aligned} \overline{PA_n} &= \overline{A_n B_n} \\ 8^2 + x^2 &= (6 - x)^2 + (8 - x)^2 \\ 64 + x^2 &= 36 - 12x + x^2 + 64 - 16x + x^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x^2 - 28x + 36 = 0 \quad D = 640 \quad \sqrt{D} = 8\sqrt{10}$. Wieder scheint es zwei Dreiecke zu geben.

$$x_1 = 14 + 4\sqrt{10} \approx 26,65 \notin [0; 6] \quad x_2 = 14 - \sqrt{10} \approx 1,35 \in [0; 6]$$

$\Rightarrow L = \{14 - \sqrt{10}\}$, siehe „blaues“ Dreieck.

45. (a)



(b) Es muss gelten: $2x \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 4$.

(c) • Es muss gelten: $\overline{Q_2 B} = \overline{C S_2} \Rightarrow 8 - 2x = x \Leftrightarrow x = 2, \overline{6}$.

- Alle Trapeze $P_n Q_n R_n S_n$ besitzen die Gerade AC als Symmetrieachse. Sie schließt mit den Quadratseiten jeweils einen 45° -Winkel ein.

Wenn $[S_2 Q_2]$ an AC gespiegelt wird, dann erhältst du die Diagonale $[P_2 R_2]$, die dann parallel zu $[AB]$ bzw. $[CD]$ liegt.

Also gilt: $[P_2 R_2] \perp [S_2 Q_2]$.

(d)

$$\begin{aligned} A_{P_n Q_n R_n S_n} &= A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta P_n S_n D} - A_{\Delta A Q_n P_n} - A_{\Delta C S_n R_n} \\ A(x) &= [8 \cdot 8 - 2 \cdot 0,5 \cdot (8 - 2x)(8 - x) - 0,5 \cdot (2x)^2 - 0,5 \cdot x^2] \text{ cm}^2 \\ &= [64 - 64 + 8x + 16x - 2x^2 - 0,5x^2 - 2x^2] \text{ cm}^2 \\ A(x) &= (-4,5x^2 + 24x) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

(e) • $a = -4,5 \quad b = 24 \quad c = 0$:

$$x_S = -\frac{24}{2 \cdot (-4,5)} = \frac{8}{3} = 2, \overline{6}. \text{ Siehe Lösung (c).}$$

$$\bullet \quad y_S = 0 - \frac{24^2}{4 \cdot (-4,5)} = 32; \text{ das ist aber die Hälfte (= 50\%) der Quadratfläche.}$$

(f) **1. Möglichkeit:**

Die maximale Trapezfläche beträgt 32 cm^2 . Dann gibt es kein Trapez, das noch größer, nämlich $41,07 \text{ cm}^2$ ist.

2. Möglichkeit:

$$-4,5x^2 + 24x = 41,07 \Leftrightarrow -4,5x^2 + 24x - 41,07 = 0$$

$$\text{Diskriminante } D = 24^2 - 4 \cdot (-4,5) \cdot (-41,07) = -163,26 < 0 (\dagger)$$

Also gibt es keine reelle Lösung und damit kein Trapez mit einem solchen Flächeninhalt.

46. (a) Klar.

(b) Das Dreieck APD ist ein halbes Quadrat. $\Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

Die drei Winkel mit dem Scheitel P ergeben einen gestreckten Winkel:

$$\varphi + 90^\circ + \psi = 180^\circ \Rightarrow \psi = 45^\circ.$$

(c) **Wir rechnen im Folgenden ab und zu nur mit Maßzahlen.**

$$\overline{PB} = 8 - 5 = 3 \text{ cm.} \quad 3 = \frac{\overline{PQ}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{3}{\sqrt{2}} = 1,5 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} = \overline{SR} = \overline{DS}.$$

$$\overline{PD} = 5 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow \overline{PS} = 5\sqrt{2} - 1,5\sqrt{2} = 3,5\sqrt{2} \text{ cm}.$$

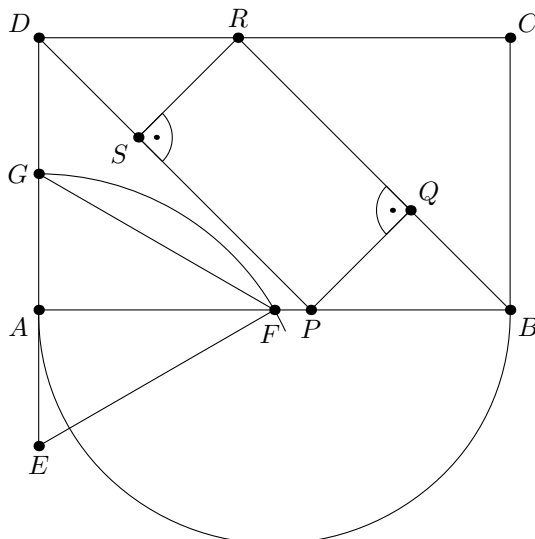
$$A_{PQRS} = \overline{PQ} \cdot \overline{RS} = 1,5\sqrt{2} \cdot 3,5\sqrt{2} = 10,5 \text{ cm}^2.$$

$$A_{ABCD} = 40 \text{ cm}^2.$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{10,5 \text{ cm}^2}{40 \text{ cm}^2} = 0,2625 = 26,25\%.$$

(d)

5. Flächeninhalt ebener Vielecke



- Klar.
- Die Strecke $[AF]$ stellt die Höhe des gleichseitigen Dreiecks EFG mit einer Seitenlänge von 6 cm dar. Also gilt:
 $\overline{AF} = 3\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow a = 2 \cdot \overline{AF} = 6\sqrt{3} \text{ cm}.$
 $\overline{PB} = 6\sqrt{3} - 6 = 6 \cdot (\sqrt{3} - 1) \text{ cm}.$

$$\overline{PQ} = \frac{\overline{PB}}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ cm} = \overline{DS}.$$

$$\overline{PS} = 6\sqrt{2} - 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = (9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}) \text{ cm}.$$

$$A_{PQRS} = 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot (9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}) = (72\sqrt{3} - 108) \text{ cm}^2.$$

$$A_{ABCD} = 6 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(72\sqrt{3} - 108) \text{ cm}^2}{36\sqrt{3} \text{ cm}^2} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,26795 \approx 26,80\%.$$

(e) Es gilt allgemein: $\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (a - b) \cdot (3b - a)}{ab} = -\frac{1}{2} \cdot \left(3\frac{b}{a} - 4 + \frac{a}{b} \right).$

Setzen wir $\frac{b}{a} = k$, so ergibt sich weiter: $\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = -\frac{1}{2} \cdot \left(3k - 4 + \frac{1}{k} \right) = T(k).$

•

$$\begin{aligned}
 T^*(k) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k} \right)^2 + 2 - \sqrt{3} \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - 2\sqrt{3} + 3k \right) + 2 - \sqrt{3} \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - 2\sqrt{3} + 3k - 4 + 2\sqrt{3} \right) \\
 T^*(k) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} + 3k - 4 \right) = T(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k} \right)^2 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k} = 0 \\
 \Leftrightarrow \quad 1 &= k\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{b}{a}.
 \end{aligned}$$

$$T(k)_{max} = T\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 - \sqrt{3} \approx 0,26795 \approx 26,80\%.$$

$$\bullet \text{ Es gilt } \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad a = b\sqrt{3}$$

In der Aufgabe (d) hattest du mit $b = 6 \text{ cm}$ konstruiert. Für die Höhe im gleichseitigen Dreieck EFG der Konstruktion (d) ergibt sich dann $\overline{AF} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$. Weil der Punkt F gleichzeitig Mittelpunkt des Halbkreises ist, gilt $a = 2 \cdot 3\sqrt{3} \text{ cm} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$. Also ergibt sich:

$$k = \frac{b}{a} = \frac{6 \text{ cm}}{6\sqrt{3} \text{ cm}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ wie in der Lösung (e) schon errechnet.}$$

47. (a) Klar.

(b) $x \in]0, 5[_{\mathbb{R}}$.

(c) Wir rechnen mit der Formel: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}$: In den Dreiecken AP_nQ_n bzw AQ_nS_n gilt:

$$A_{AP_nQ_n} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (b - x) = \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}x^2 \quad (5.1)$$

$$A_{AQ_nS_n} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (a - x) = \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}x^2 \quad (5.2)$$

$$(1) + (2): \quad A_{AP_nQ_nS_n} = \frac{1}{2}(a + b) \cdot x - x^2 \quad (5.3)$$

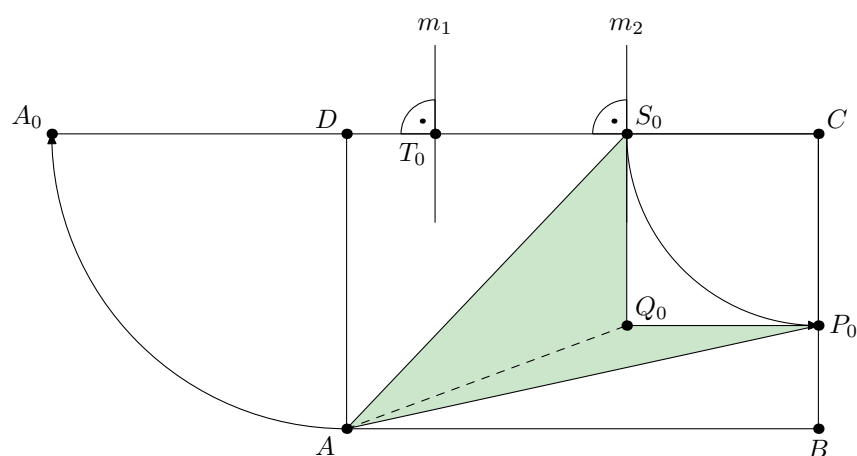
Die Gleichung (3) ist die geforderte.

(d)

$$\begin{aligned}
 A(x) &= -x^2 + \frac{1}{2}(a+b) \cdot x \\
 &= -\left[x^2 - \frac{1}{2}(a+b) \cdot x + \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2 \right] \\
 &= -\left[\left(x - \frac{1}{4}(a+b) \right)^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2 \right] \\
 A(x) &= -\left(x - \frac{1}{4}(a+b) \right)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2
 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{4}(a+b) \text{ liefert } A_{\max} = \frac{(a+b)^2}{16}.$$

(e)



Hier gilt $\overline{A_0C} = a + b$.

Der Punkt T_0 halbiert die Strecke $[A_0C]$: $\overline{T_0C} = \frac{a+b}{2}$.

Der Punkt S_0 halbiert die Strecke $[T_0C]$: $\overline{S_0C} = \frac{a+b}{4} = x$.

48. (a) Gleicher Umfang: $5a = 3x \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}a$.

(b) $A_{\text{Trapez}} = 3 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.

$$A_{\Delta PQR} = \frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\left(\frac{5}{3}a\right)^2}{4}\sqrt{3} = \frac{25}{36}a^2\sqrt{3}.$$

$$\frac{A_{\Delta PQR}}{A_{\text{Trapez}}} = \frac{\frac{25}{36}a^2\sqrt{3}}{\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}} = \frac{25}{36} \cdot \frac{4}{3} = \frac{100}{108} \left(= \frac{25}{27} \right).$$

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

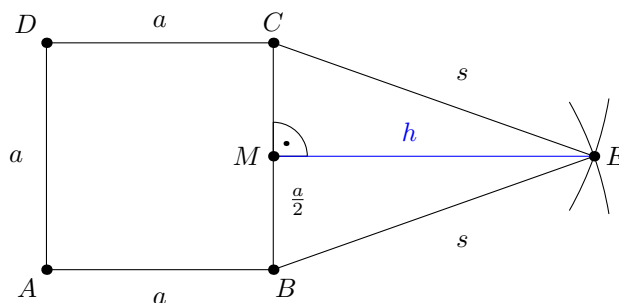
(c) $A_{\triangle PQR} \hat{=} 100\%$.

Nach Lösung (b) gilt $A_{\text{Trapez}} \hat{=} 108\%$.

Dann ist also der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ um 8% größer als der des Dreiecks PQR .

49. (a) $u_{BEC} = a + s + s = 2s + a \quad u_{ABCD} = 4a$
 $2s + a = 4a \quad \Leftrightarrow \quad s = 1,5a.$

(b)



Die beiden Kreisbögen mit dem Radius $r = 1,5 \cdot 3 \text{ cm} = 4,5 \text{ cm}$ und den Mittelpunkten B bzw. C schneiden sich im Punkt E .

(c) $\triangle BEM: \quad h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (1,5a)^2 - (0,5a)^2 = 2,25a^2 - 0,25a^2 = 2a^2$
 $\Rightarrow \quad h = a\sqrt{2}$

$$A_{\triangle BEC} = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2}{2}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad A_{ABCD} = a^2.$$

$$\frac{A_{\triangle BEC}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{a^2}{2}\sqrt{2}}{a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071 = 70,71\%$$

(d) $h^2 = s^2 - \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}}.$

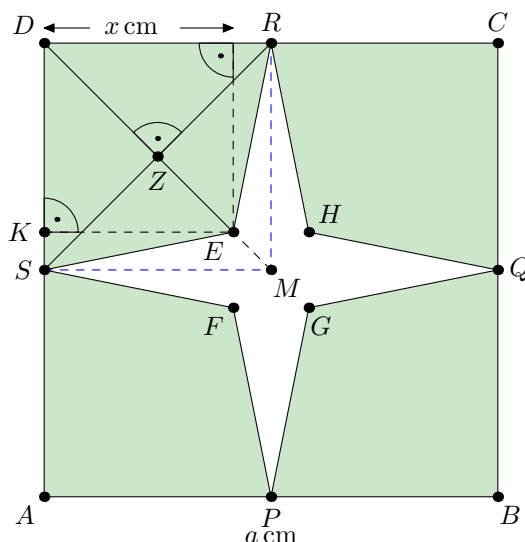
$$A_{\triangle BEC} = A_{ABCD} \quad : \quad \frac{a}{2}\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} = a^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} = a \quad \Bigg|^2$$

$$\Rightarrow \quad s^2 - \frac{a^2}{4} = 4a^2 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 = \frac{16a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{a}{2}\sqrt{17} \approx 2,06 \cdot a.$$

50. (a)

5. Flächeninhalt ebener Vielecke



- (b) Das Viereck $SMRD$ ist ein Quadrat, dessen Diagonalen $[DM]$ und $[SR]$ folgende Eigenschaften besitzen:

- $[SR] \perp [DM]$. Wegen $E \in [DM]$ folgt $[SR] \perp [DE]$.
- DM ist sowohl die Symmetrieachse des Quadrates $SMRD$ als auch die des Vierecks $SERD$.

Also ist das Viereck $SERD$ ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) $A_{SERD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SR} \cdot \overline{DE}$. (*)

$[SR]$ ist eine Diagonale des Quadrates $SMRD$ mit der Seitenlänge 3 cm: $\Rightarrow \overline{SR} = 3\sqrt{2}$ cm.

$[DE]$ ist eine Diagonale des Quadrates mit der Seitenlänge $\overline{KD} = x$ cm und der Diagonale $[DE]$: $\Rightarrow \overline{DE} = x\sqrt{2}$ cm.

Mit (*) folgt dann:

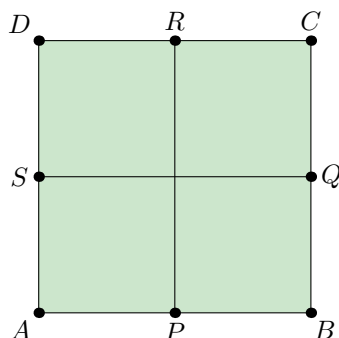
$$A_{SERD} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2} \text{ cm}^2 = 3x \text{ cm}^2.$$

$$A_{\text{Stern}} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{SERD} = 36 \text{ cm}^2 - 4 \cdot 3x \text{ cm}^2 = (36 - 12x) \text{ cm}^2.$$

- (d) • $A(3) = (36 - 12 \cdot 3) \text{ cm}^2 = 0 \text{ cm}^2$.

Für $x = 3$ deckt sich das Drachenviereck $SERD$ mit dem Quadrat $SMRD$. Das geschieht auf die gleiche Weise mit den drei restlichen Drachenvierecken. Dann sieht die Figur so aus:

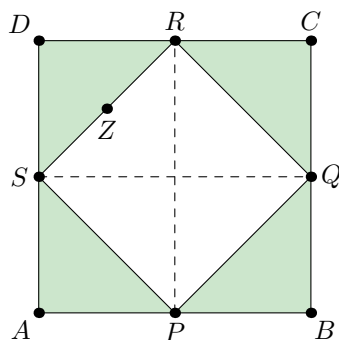
5. Flächeninhalt ebener Vielecke



D.h. der Stern entartet zu zwei gekreuzten Strecken $[PR]$ und $[SQ]$, deren Flächeninhalt 0 ist.

- $A(1, 5) = (36 - 12 \cdot 1, 5) \text{ cm}^2 = 18 \text{ cm}^2$.

Für $x = 1,5$ kommt der Punkt E auf den Diagonalschnittpunkt Z des Drachenvierecks $SERD$ zu liegen; d.h. das Drachenviereck entartet zum gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck SRD . Damit wird der Stern zu einem eingeschriebenen Quadrat dessen Eckpunkte jeweils auf einem Mittelpunkt der Seiten des Quadrates $ABCD$ fallen. Dann sieht die Figur so aus:

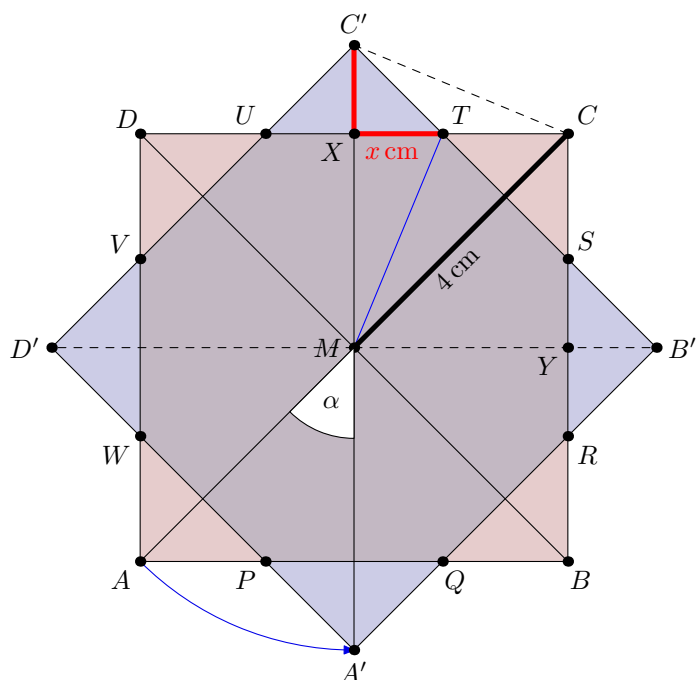


Anhand der gestrichelten Diagonalen des zum Quadrat $PQRS$ entarteten Sterns erkennst du, dass dieses Quadrat halb so groß wie das äußere Quadrat $ABCD$ ausfällt, was auch die obige Rechnung bestätigt.

$$(e) \quad 36 - 12x = 3,6 \quad \Leftrightarrow \quad 32,4 = 12x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,7.$$

51. (a)

5. Flächeninhalt ebener Vielecke



(b) $\alpha = 45^\circ$.

Es gilt z.B.: $MD' \perp MA'$. Die Diagonale $[AC]$ halbiert diesen rechten Winkel.

- (c) • Aus Symmetriegründen sind die vier Dreiecke, die über das Quadrat $ABCD$ hinausragen und die vier Dreiecke, die über das gedrehte Quadrat $A'B'C'D'$ hinausragen, alle kongruent. Also sind alle Seiten des fraglichen Achtecks gleich lang.

Die Diagonalen der Quadrate $ABCD$ und $A'B'C'D'$ schließen paarweise einen 45° -Winkel ein. Also haben alle Innenwinkel des Achtecks das Maß $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Also ist das Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig.

- Subtrahierst du vom gedrehten Quadrat $A'B'C'D'$ die Flächen der vier Dreiecke, die über das Quadrat $ABCD$ hinausragen, dann erhältst du den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUVW$.

Betrachte z.B. das Dreieck UTC' . Aus Symmetriegründen muss es gleichschenkelig-rechtwinklig sein. Also gilt: $\overline{XT} = \overline{XC'} = x \text{ cm}$.

Das Dreieck $MCXC'$ ist gleichschenkelig: $\overline{MC} = \overline{MC'} = 4 \text{ cm}$.

Damit gilt einerseits: $\overline{MX} = (4 - x) \text{ cm}$. (*)

Das Viereck $MYCX$ ist ein Quadrat, dessen Diagonale 4 cm lang ist. Damit gilt andererseits: $\overline{MX} = \frac{4}{\sqrt{2}} \text{ cm}$.

Mit (*) ergibt sich:

$$4 - x = \frac{4}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = 4 - \frac{4}{\sqrt{2}} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}.$$

Das Dreieck UTC' ist genauso groß wie ein Quadrat mit der Seitenlänge $x \text{ cm}$.

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

$$A_{UTC'} = x^2 \text{ cm}^2 = \left(4 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ cm}^2 = 16 \cdot \frac{2-2\sqrt{2}+1}{2} \text{ cm}^2.$$

$$A_{UTC'} = 8 \cdot (3 - 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2.$$

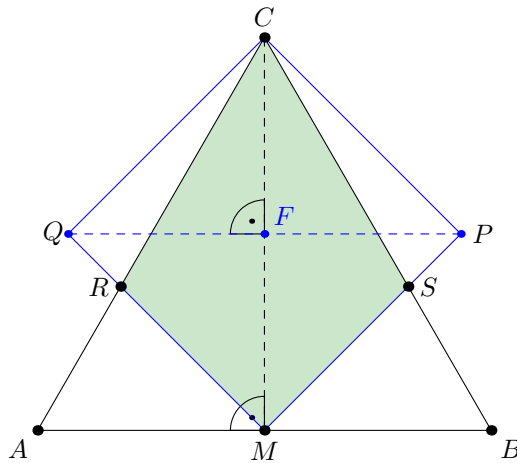
Wegen $A_{PQRSTUUVW} = A_{A'B'C'D'} - 4 \cdot A_{UTC'}$ folgt:

$$A_{PQRSTUUVW} = \frac{1}{2} \cdot 8^2 \text{ cm}^2 - 4 \cdot 8 \cdot (3 - 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2$$

$$A_{PQRSTUUVW} = 32 \cdot [1 - (3 - 2\sqrt{2})] \text{ cm}^2 = 32 \cdot [2\sqrt{2} - 2] \text{ cm}^2$$

$$A_{PQRSTUUVW} = 64 \cdot (\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2 \approx 26,51 \text{ cm}^2.$$

52. (a)



(b) Flächeninhalt A_{Δ} des Dreiecks ABC : $A_{\Delta} = \frac{6^2}{4} \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2 = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Jedes Quadrat darf sich auch „Drachenviereck“ nennen. Am einfachsten kommst du mit der Flächenformel für das Drachenviereck zum Ziel:

$$\text{Hier: } A_{MPCQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MC}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2 \text{ cm}^2 = 13,5 \text{ cm}^2.$$

$$\frac{13,5 \text{ cm}^2}{9\sqrt{3}} \text{ cm}^2 \approx 0,8660 = 86,60\%$$

$100\% - 86,60\% = 13,40\%$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist etwa um 13,40% größer als der des Quadrates $MPCQ$.

(c) Das Viereck $MSCR$ ist ein achsensymmetrisches Drachenviereck.

Begründung:

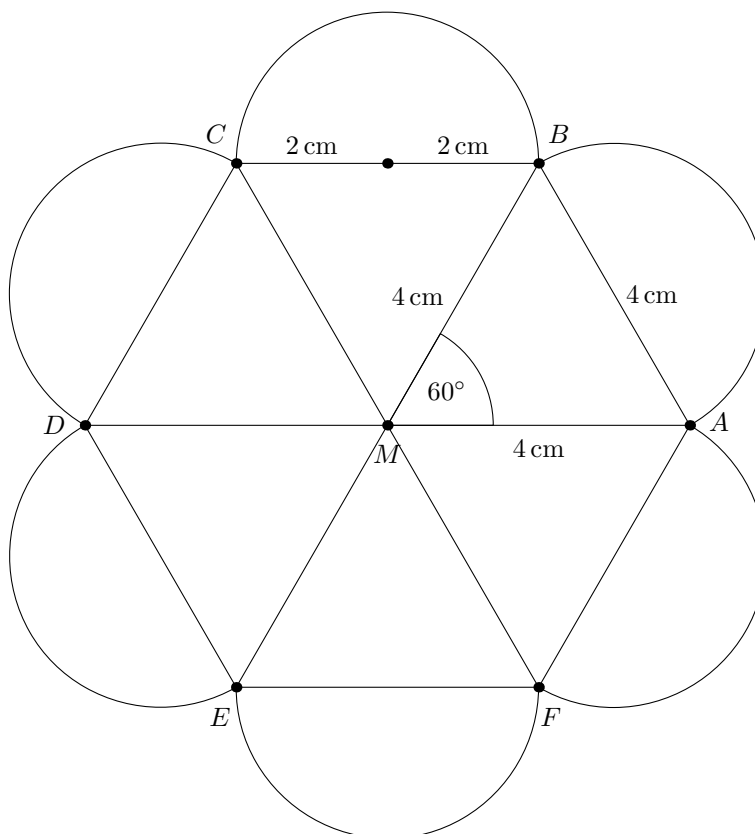
- Seine Diagonalen stehen (wie auch die des Quadrates $MPCQ$) aufeinander senkrecht.

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

- Die Gerade MC ist die Symmetrieachse des Drachenvierecks.

(d) $u = 4 \cdot \overline{MP} = 4 \cdot \overline{MF} \sqrt{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{2} \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \text{ cm} = 6\sqrt{6} \text{ cm}.$

53. (a)



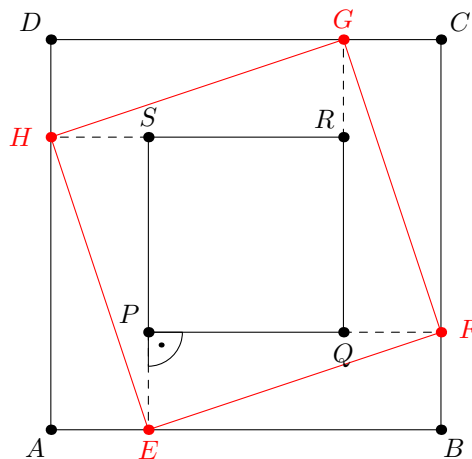
- (b) Die drei Diagonalen zerlegen jedes regelmäßige Sechseck in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke. In unserem Fall hat jedes dieser gleichseitigen Dreiecke eine Seitenlänge von 4 cm.

Die sechs kongruenten Halbkreise lassen sich paarweise zu drei Vollkreisen mit dem Radius $r = 2 \text{ cm}$ zusammenfügen.

Also: $A = \left(6 \cdot \frac{4^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2^2 \cdot \pi \right) \text{ cm}^2 \approx 79,27 \text{ cm}^2.$

54.

5. Flächeninhalt ebener Vielecke



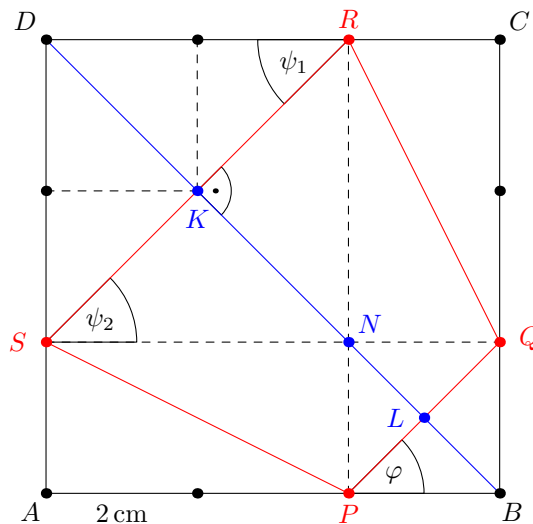
- Es gilt: $\overline{AB} = 81,6 \text{ cm} : 4 = 20,4 \text{ cm}$ und $\overline{PQ} = 34 \text{ cm} : 4 = 8,5 \text{ cm}$.
Dann folgt: $\overline{QF} = \overline{PE} = (20,4 \text{ cm} - 8,5 \text{ cm}) : 2 = 5,95 \text{ cm}$.
Weiter folgt: $\overline{PF} = 8,5 \text{ cm} + 5,95 \text{ cm} = 14,45 \text{ cm}$.
 $\triangle EFP$: $\overline{EF}^2 = A_{EFGH} = \overline{PF}^2 + \overline{PE}^2 = (14,45 \text{ cm})^2 + (5,95 \text{ cm})^2$
 $\Rightarrow A_{EFGH} = 244,205 \text{ cm}^2$.

- **1. Möglichkeit:** $A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{\triangle EBF}$
 $A_{EFGH} = (20,4 \text{ cm})^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45 \text{ cm} \cdot 5,95 \text{ cm} = 244,205 \text{ cm}^2$.

- **2. Möglichkeit:** $A_{EFGH} = A_{PQRS} + 4 \cdot A_{\triangle EFP}$
 $A_{EFGH} = (8,5 \text{ cm})^2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45 \text{ cm} \cdot 5,95 \text{ cm} = 244,205 \text{ cm}^2$.

Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

55. (a)



- (b) Das Dreieck SRD ist gleichschenkelig-rechtwinklig. $\Rightarrow \psi_1 = 45^\circ$.
Dann gilt auch $\psi_2 = 45^\circ$ (Z-Winkel) .

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

Das Dreieck PBQ ist gleichschenkelig-rechtwinklig. $\Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

Also folgt: $[PQ] \parallel [SR]$.

Das Viereck $PQRS$ ist ein (achsensymmetrisches) Trapez..

(c) •

Für die Trapezfläche A gilt: $A_{PQRS} = \frac{\overline{SR} + \overline{PQ}}{2} \cdot \overline{KL}$.

Die Strecke $[SR]$ ist die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 4 cm.

Also folgt: $\overline{SR} = 4\sqrt{2}$ cm.

$[DK]$, $[NB]$ und $[PQ]$ sind jeweils Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge 2 cm.

Also folgt: $\overline{DK} = \overline{NB} = \overline{PQ} = 2\sqrt{2}$ cm und $\overline{LB} = \sqrt{2}$ cm.

Im Quadrat $ABCD$ gilt: $\overline{DB} = 6\sqrt{2}$ cm.

Damit gilt: $\overline{KL} = 6\sqrt{2}$ cm $- 2\sqrt{2}$ cm $- \sqrt{2}$ cm $= 3\sqrt{2}$ cm.

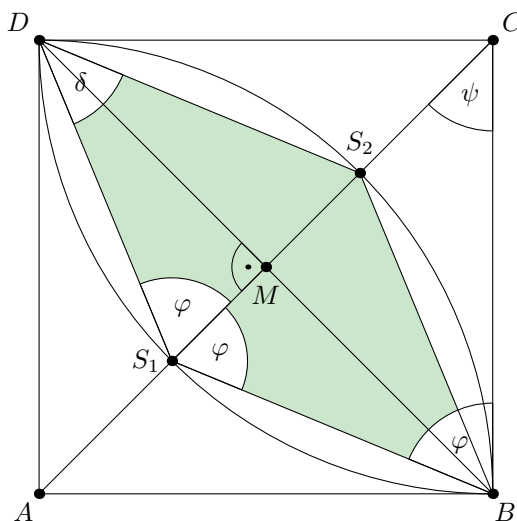
Und damit gilt: $A_{PQRS} = \frac{4\sqrt{2} \text{ cm} + 2\sqrt{2} \text{ cm}}{2} \cdot 3\sqrt{2} \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$.

- Das Trapez $PQRS$ ist von vier rechtwinkligen Dreiecken eingeschlossen. Zwei von ihnen sind kongruent.

$$A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta APS} - A_{\Delta SRD} - A_{\Delta PBQ}.$$

$$A_{PQRS} = 36 \text{ cm}^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \text{ cm}^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \text{ cm}^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \text{ cm}^2 = 18 \text{ cm}^2.$$

56. (a)



Das Viereck S_1BS_2D ist ein achsensymmetrischer Drachen.

- (b) Im Quadrat $ABCD$ halbiert die Diagonale $[AC]$ den rechten Winkel DCB . Also gilt: $\psi = 45^\circ$.

Das Dreieck S_1BC ist gleichschenkelig. $\Rightarrow \varphi = (180^\circ - 45^\circ) : 2 = 67,5^\circ$.

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

$$\Rightarrow \sphericalangle BS_1D = 2 \cdot \varphi = 135^\circ = \sphericalangle DS_2B.$$

$$\Rightarrow \delta = \sphericalangle S_1DS_2 = \sphericalangle S_2BS_1 = (360^\circ - 4 \cdot 67,5^\circ) : 2 = 45^\circ.$$

$$(c) A_{\text{Drachen}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{S_1S_2}.$$

$$\overline{BD} = 6 \cdot \sqrt{2} \text{ cm } (\approx 8,49 \text{ cm}).$$

$$\text{Wegen } \overline{S_1C} = 6 \text{ cm folgt } \overline{AS_1} = \overline{CS_2} = (6 \cdot \sqrt{2} - 6) \text{ cm } (\approx 2,49 \text{ cm}).$$

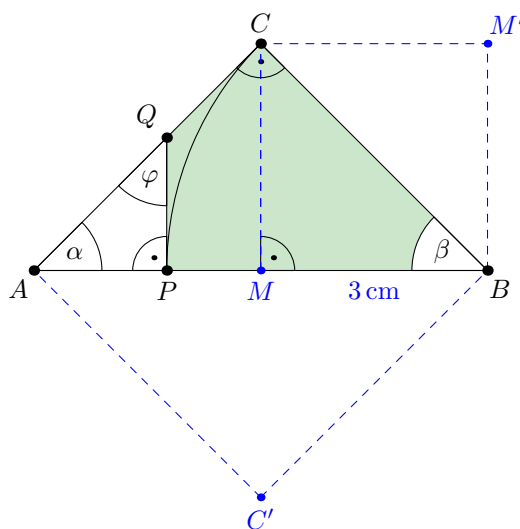
$$\text{Dann ist } \overline{S_1S_2} = [6 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot (6 \cdot \sqrt{2} - 6)] \text{ cm} = (12 - 6\sqrt{2}) \text{ cm } (\approx 3,51 \text{ cm}).$$

$$A_{\text{Drachen}} = \frac{1}{2} \cdot [6\sqrt{2} \cdot (12 - 6\sqrt{2})] \text{ cm}^2.$$

$$A_{\text{Drachen}} = (36\sqrt{2} - 36) \text{ cm}^2 (\approx 14,91 \text{ cm}^2).$$

$$\frac{A_{\text{Drachen}}}{A_{\text{Quadrat}}} = \frac{(36\sqrt{2} - 36) \text{ cm}^2}{36 \text{ cm}^2} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142 = 41,42\%.$$

57. (a)



(b) Es gilt $\alpha = \beta = 45^\circ$. Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck APQ gilt aber auch $\alpha = \varphi = 45^\circ$. Also stimmen die beiden Dreiecke ABC und APQ paarweise in ihren Innenwinkelmaßen überein. Damit sind sie zueinander ähnlich.

(c) Weil die beiden Dreiecke ABC und APQ zueinander ähnlich sind, gilt für den Ähnlichkeitsfaktor k z.B.:

$$k = \frac{\overline{AP}}{\overline{BC}}.$$

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

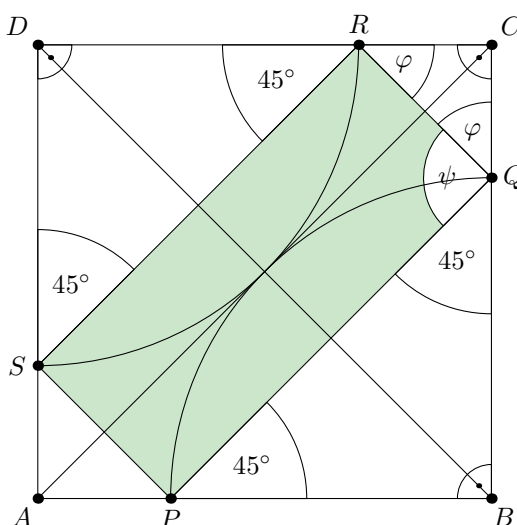
Das Dreieck MBC ist ein halbes Quadrat mit der Daigonalenlänge $\overline{BC} = 3\sqrt{2}\text{ cm}$.

$$\overline{AP} = \overline{BA} - \overline{BP} = \overline{BA} - \overline{BC} = (6 - 3\sqrt{2})\text{ cm}.$$

Damit folgt $k = \frac{(6 - 3\sqrt{2})\text{ cm}}{6\text{ cm}}$.

Und $\frac{A_{\Delta APQ}}{A_{\Delta ABC}} = k^2 = \left[\frac{(6 - 3\sqrt{2})\text{ cm}}{(3\sqrt{2})\text{ cm}} \right]^2 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,1716 = 17,16\%$.

58. (a)



- (b) Die beiden Dreiecke PBQ und SRD sind gleichschenkelig-rechtwinklig. Also haben ihre spitzen Innenwinkel das Maß 45° .

Weiter gilt: $\overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{BQ} = \overline{DC} - \overline{DR} = \overline{CR}$. Also ist auch das Dreieck RQC gleichschenkelig-rechtwinklig. Dann gilt $\varphi = 45^\circ$.

Am Punkt Q gilt somit: $45^\circ + \psi + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \psi = 90^\circ$.

Aus Symmetriegründen sind dann auch die drei restlichen Innenwinkel des Vierecks $PQRS$ rechte Winkel. Also handelt es sich hierbei um ein Rechteck.

- (c) Eine mögliche Strategie: $A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot (A_{\Delta PBQ} + A_{\Delta RQC})$

$$A_{\Delta PBQ} = \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2.$$

$$A_{\Delta RQC} = \frac{1}{2} \cdot (6 - 3\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2 = (27 - 18\sqrt{2}) \text{ cm}^2.$$

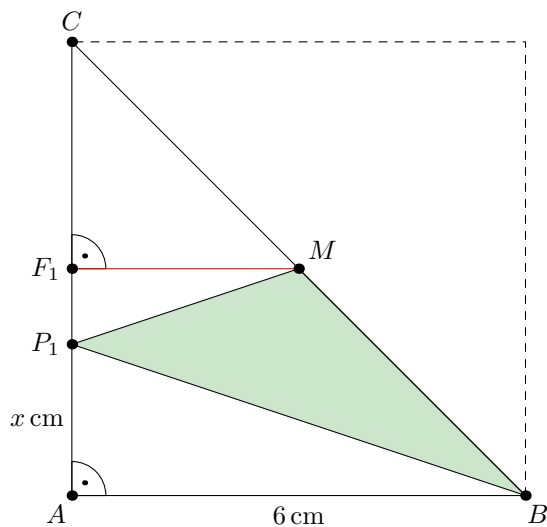
$$A_{PQRS} = 36 \text{ cm}^2 - 2 \cdot [9 \text{ cm}^2 + (27 - 18\sqrt{2}) \text{ cm}^2] = (36\sqrt{2} - 36) \text{ cm}^2.$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(36\sqrt{2} - 36) \text{ cm}^2}{36 \text{ cm}^2} = \frac{(36(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2)}{36 \text{ cm}^2}$$

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

$$= \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142 = 41,42\%$$

59. (a)



- (b) Für $x = 0$ ergibt sich das maximale Dreieck. Für $x = 6$ entartet das betreffende Dreieck zur Doppelstrecke $[BC]$.
Also gibt es Dreiecke für $x \in [0; 6[_{\mathbb{R}}$.
- (c) Eine mögliche Strategie: Berechne jeweils den Flächeninhalt der Dreiecke ABP_n und P_nMC in Abhängigkeit von x . Subtrahiere die beiden Flächeninhalte dann vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2.$$

$$A_{\Delta ABP_n} = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm} \cdot x \text{ cm} = 3x \text{ cm}^2.$$

$$A_{\Delta P_nMC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_nC} \cdot \overline{F_nM} = \frac{1}{2} \cdot (6 - x) \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = (9 - 1,5x) \text{ cm}^2.$$

$$A(x) = [18 - 3x - (9 - 1,5x)] \text{ cm}^2 = (9 - 1,5x) \text{ cm}^2 = A_{\Delta P_nMC}.$$

Kommentar: Die Flächeninhalte der Dreiecke BCP_n werden ständig durch deren Seitenhalbierende $[P_nM]$ halbiert.

(d) $9 - 1,5x = 6,6 \Leftrightarrow x = 1,6.$

(e) Es muss gelten: $\overline{CP_n} = \overline{CM}$.
 $\overline{CP_n} = (6 - x) \text{ cm}.$

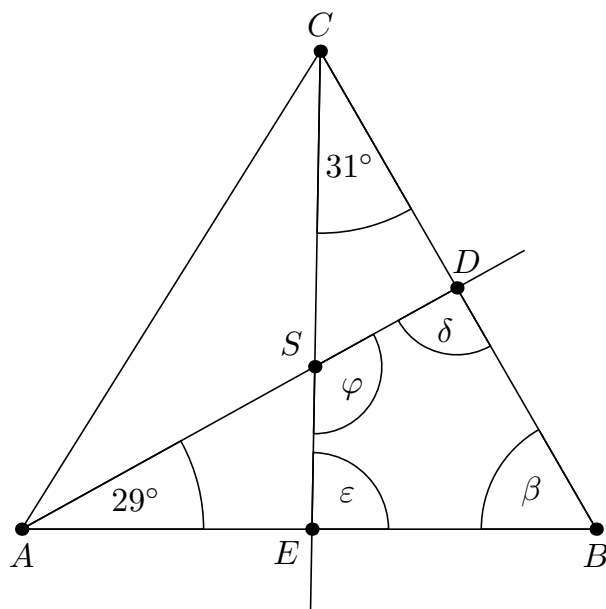
Das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck ABC ist ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $\overline{BC} = 6\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow \overline{CM} = 3\sqrt{2} \text{ cm}.$

Damit muss gelten: $6 - x = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 6 - 3\sqrt{2} \approx 1,76.$

(f) $20\% = 0,2$.

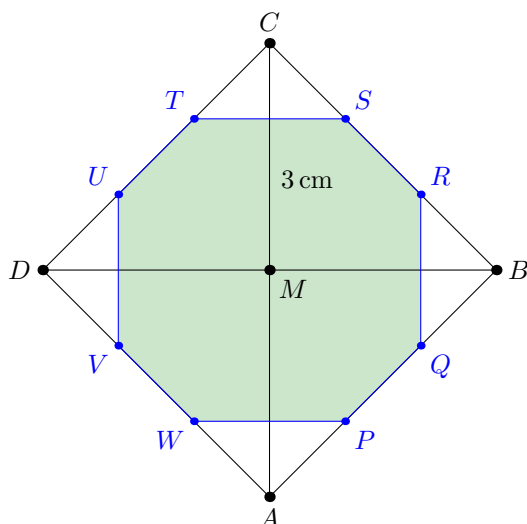
$$(9 - 1,5x) \text{ cm}^2 = 0,2 \cdot 18 \text{ cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - 1,5x = 3,6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3,6.$$

60. (a)



- $\triangle ABC$: $\beta = 180^\circ - 58^\circ - 62^\circ = 60^\circ$.
 $\triangle EBC$: $\varepsilon = 180^\circ - 31^\circ - 60^\circ = 89^\circ$.
- $\triangle ABD$: $\delta = 180^\circ - 29^\circ - 60^\circ = 91^\circ \neq 89^\circ$.
 Also ist das Viereck $EBDF$ kein achsensymmetrischer Drachen.
- Im Viereck $EBDF$ gilt: $\varepsilon + \delta = 180^\circ \Rightarrow \varphi + \beta = 180^\circ$. Also ist das Viereck $EBDF$ ein Sehnenviereck; d.h. es besitzt einen Umkreis.

61. (a)



- (b) Es gilt: $\triangle TSC \sim \triangle DBC$.

Weil z.B. $\overline{TC} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DC}$ gilt, folgt dann $\overline{TS} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DB} = \frac{1}{3} \cdot 6 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$.

Andererseits gilt z.B.:

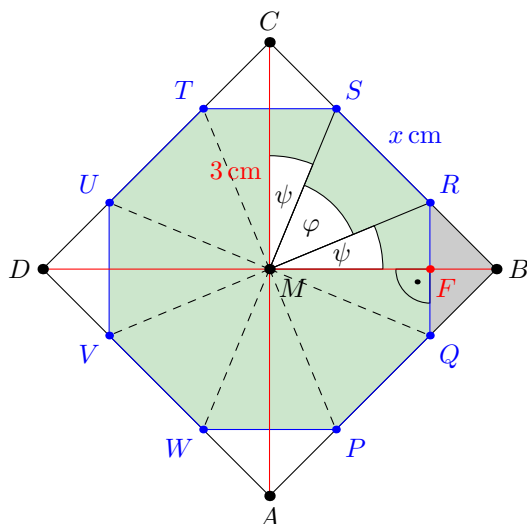
$$\overline{BC} = 3 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow \overline{SR} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BC} = \sqrt{2} \text{ cm} < 2 \text{ cm}.$$

Also ist das Achteck nicht regelmäßig.

- (c) Den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUVW$ kannst du am einfachsten dadurch berechnen, dass du vom Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ die Flächeninhalte der vier kongruenten weißen Dreiecke an seinen Eckpunkten subtrahierst. Den Flächeninhalt A jedes dieser Dreiecke berechnest du am besten mit der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.
 $A_{PQRSTUVW} = \frac{1}{2} \cdot (6 \text{ cm})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2 - 4 \text{ cm}^2 = 14 \text{ cm}^2$

$$\frac{A_{PQRSTUVW}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{14 \text{ cm}^2}{18 \text{ cm}^2} = 0,\overline{7} \approx 77,78\%.$$

62. (a)



5. Flächeninhalt ebener Vielecke

Die Mittelpunktswinkel aller Teildreiecke dieses regelmäßigen Achtecks haben alle das gleiche Maß $\varphi = 360^\circ : 8 = 45^\circ$. Aus Symmetriegründen gilt dann $\psi = 45^\circ : 2 = 22,5^\circ$.

Damit entsteht die Figur so, wie sie in der Angabe dargestellt ist.

- (b) Das Dreieck MBC ist gleichschenkelig-rechtwinklig, also ein halbes Quadrat. $\Rightarrow \overline{BC} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$.

Das Dreieck QBR ist gleichschenkelig-rechtwinklig, also ein halbes Quadrat. Es sei $\overline{RQ} = x \text{ cm}$. $\Rightarrow \overline{RB} = \frac{x}{\sqrt{2}} \text{ cm} = \overline{SC}$.

$$\Rightarrow \overline{BC} = 3\sqrt{2} \text{ cm} = \left(2 \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} + x\right) \text{ cm} \quad \left| \cdot \frac{\sqrt{2}}{\text{cm}} \right.$$

$$\Leftrightarrow 6 = 2x + x\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow x = \frac{6}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

$$x = 3(2 - \sqrt{2}).$$

(*)

Dann ist $u_8 = 24(2 - \sqrt{2}) \text{ cm} \approx 14,06 \text{ cm}$.

- (c) Berechne zunächst den Flächeninhalt eines Teildreiecks z.B. ΔMQR :

$$A_{\Delta MQR} = \frac{1}{2} \cdot \overline{RQ} \cdot \overline{MF} \text{ mit } \overline{MF} = \overline{MB} - \overline{FB}, \text{ wobei } \overline{MB} = 3 \text{ cm gilt.}$$

Weil das Dreieck QBR gleichschenkelig-rechtwinklig ist, gilt:

$$\overline{FB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{RQ} = \frac{1}{2} \cdot x \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{MF} = \left(3 - \frac{1}{2} \cdot x\right) \text{ cm}.$$

$$\Rightarrow A_{\Delta MQR} = \frac{1}{2} \cdot x \text{ cm} \cdot \overline{MF} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(3 - \frac{1}{2} \cdot x\right) \text{ cm}^2.$$

Mit (*) aus der Lösung b) erhalten wir:

$$\begin{aligned} A_{\Delta MQR} &= \frac{1}{2} \cdot 3(2 - \sqrt{2}) \cdot \left[3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (2 - \sqrt{2})\right] \text{ cm}^2 \\ &= \frac{3(2 - \sqrt{2})}{2} \cdot \left[3 - 3 \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right] \text{ cm}^2 = \frac{6 - 3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$A_{\Delta MQR} = \frac{9}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2$$

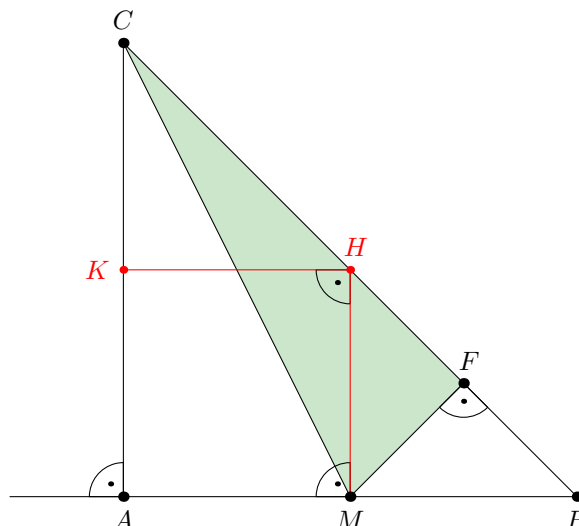
$$A_{PQRSTUVW} = 8 \cdot A_{\Delta MQR} = 8 \cdot \frac{9}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2 = 36 \cdot (\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2$$

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$$

$$\frac{A_{PQRSTUVW}}{A_{ABCD}} = \frac{36 \cdot (\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2}{18 \text{ cm}^2} = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \approx 0,8284 = 82,84\%.$$

63. (a)

5. Flächeninhalt ebener Vielecke



- (b) Die beiden Dreiecke MBH und KHC sind kongruente gleichschenklige-rechtwinklige Dreiecke. Zusammen sind sie so groß wie das Quadrat $AMHK$. Das bedeutet, dass der Flächeninhalt des Dreiecks MBH ein Viertel des Flächeninhalts des Dreiecks ABC beträgt. Das Dreieck MBF ist halb so groß wie das Dreieck MBH .

Also gilt: $A_{\Delta MBF} = \frac{1}{8} \cdot A_{\Delta ABC}$.

Die Dreiecke AMC und MBC haben den gleichen Flächeninhalt, weil ihre Grundlinien und Höhen jeweils gleich lang sind. Damit sind sie jeweils halb so groß wie das Dreieck ABC .

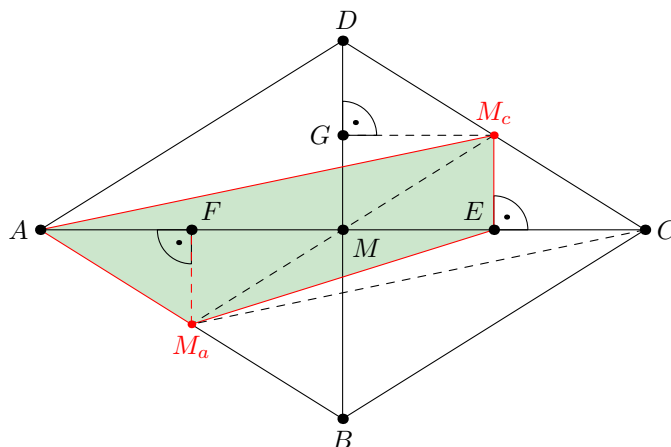
$$\Rightarrow A_{\Delta MFC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta ABC} - \frac{1}{8} \cdot A_{\Delta ABC} = \frac{3}{8} \cdot A_{\Delta ABC} = 0,375 \cdot A_{\Delta ABC}.$$

Der Flächenanteil beträgt somit 37,5%.

- (c) Nimm an, dass die Halbgerade $[CM$ den Winkel ACB halbiert. Der Punkt M würde dann ebenfalls auf der Winkelhalbierenden liegen. Dann müsste sein Abstand zum Schenkel $[CA$ der gleiche sein wie zum Schenkel $[CB$. Es müsste also gelten $\overline{AF} = \overline{AM}$.
Im rechtwinkligen Dreieck MBF ist $[MB]$ die Hypotenuse; d.h. $\overline{MF} < \overline{MB} = \overline{AM}$.
Also wird der Winkel ACB nicht von der Halbgeraden $[CM$ halbiert.

64. (a)

5. Flächeninhalt ebener Vielecke



- (b) Die gestrichelten Hilfslinien in der Eingangsfigur machen dir klar, dass $A_{\Delta ECM_c} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta MCD}$ gilt.
 Aus Symmetriegründen folgt dann: $A_{\Delta ECM_c} = \frac{1}{16} \cdot A_{ABCD}$.

Die Strecke $[AM_c]$ stellt im Dreieck ACD eine Seitenhalbierende dar.

Also gilt: $A_{\Delta ACM_c} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta ACD}$.

Dann ist $A_{\Delta ACM_c} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCD}$.

Wegen $A_{\Delta AEM_c} = A_{\Delta ACM_c} - A_{\Delta ECM_c}$ folgt dann:

$$A_{\Delta AEM_c} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCD} - \frac{1}{16} \cdot A_{ABCD} = \frac{3}{16} \cdot A_{ABCD}.$$

Die beiden Dreiecke AM_aE und AEM_c besitzen die gleiche Grundlinie $[AE]$.

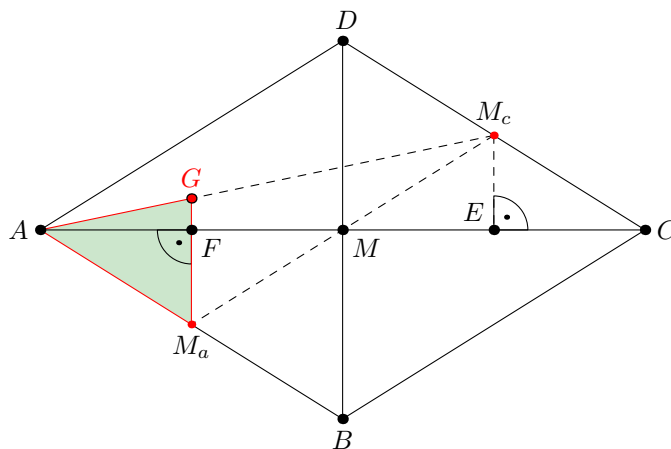
Wegen $\overline{FM_a} = \overline{EM_c}$ sind ihre Höhen gleich lang. Folglich gilt:

$$A_{\Delta AM_aE} = A_{\Delta AEM_c} = \frac{3}{16} \cdot A_{ABCD}.$$

$$\text{Damit ist } A_{AM_aEM_c} = 2 \cdot \frac{3}{16} \cdot A_{ABCD} = \frac{3}{8} \cdot A_{ABCD}.$$

$$\Rightarrow \frac{A_{AM_aEM_c}}{A_{ABCD}} = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\%.$$

65. (a)



5. Flächeninhalt ebener Vielecke

(b) Den Flächeninhalt A des Dreiecks AM_aG kannst du mit

$$A_{\Delta AM_aG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{M_aG} \cdot \overline{FA}. \quad (*)$$

berechnen.

$$\text{Nun ist } \overline{M_aG} = \overline{M_aF} + \overline{FG}. \quad (**)$$

$$\text{Es gilt offensichtlich } \overline{FA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AC}.$$

$$\text{Analog gilt } \overline{M_aF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{4} \cdot \overline{BD}.$$

Weiter machen dir die gestrichelten Hilfslinien anhand der Ähnlichkeitssätze Folgendes klar:

$$\overline{AF} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AC} \text{ und } \overline{AE} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AE}$$

$$\text{Dann gilt: } \overline{FG} = \frac{1}{3} \cdot \overline{EM_c} = \frac{1}{3} \cdot \overline{M_aF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{12} \cdot \overline{BD}.$$

$$\text{Mit } (**) \text{ ergibt sich dann } \overline{M_aG} = \frac{1}{4} \cdot \overline{BD} + \frac{1}{12} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BD}.$$

Mit $(*)$ ergibt sich schließlich

$$A_{\Delta AM_aG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{BD} \cdot \frac{1}{4} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}.$$

$$\text{Mit } A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC} \text{ folgt:}$$

$$\frac{A_{\Delta AM_aG}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}} = \frac{1}{12} = 0,08\overline{3} = 8,3\%.$$

6. Abbildung durch zentrische Streckung

1. Es gibt mehrere Möglichkeiten: z.B. über Steigungsdreiecke, Vektoren, Geradengleichungen.
Antwort: Nein, aber ziemlich knapp.

2. Z.B. über Steigungsdreiecke oder die Länge von Strecken.
Antwort: Um 50%.

3. $E^*(2, 6|3, 1)$.

4.

(a) $\triangle LGD \sim \triangle HKL \sim \triangle KBF \sim \triangle EBL \sim \triangle DAB \sim \triangle DBC$

(b) Es sei $\overline{AD} = x$ cm.

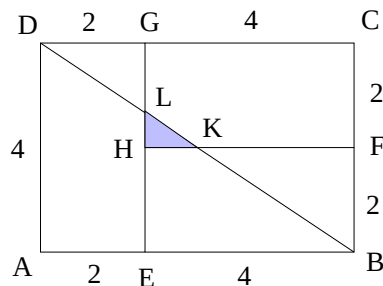
Weil alle Rechtecke im Inneren flächengleich sind, muss $\overline{DG} = \overline{BF} = \overline{FC} = 0,5x$ cm gelten.

Dann ist $\overline{EB} = (6 - 0,5x)$ cm = $\overline{AD} = x$ cm.

$\Rightarrow 6 = 1,5x \quad \overline{AD} = 4$ cm; d.h. alle inneren Rechtecke sind sogar **kongruent**.

Nun kannst du die Figur zeichnen.

(c)



$\triangle DLG \sim \triangle DBC$:

$$\frac{\overline{GL}}{2} = \frac{4}{6} \Rightarrow \overline{GL} = \frac{4}{3}$$

6. Abbildung durch zentrische Streckung

$$\overline{HL} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} = 0,5 \cdot \overline{GL}$$

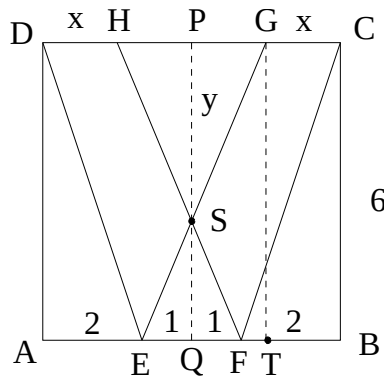
Aus (a): $\triangle HKL \sim \triangle LGD$ mit dem Ähnlichkeitsfaktor $k = 0,5$.

$$\Rightarrow A(HKL) = 0,5^2 \cdot A(LGD) = 0,25 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \text{ cm}^2 = \frac{2}{3} \text{ cm}^2$$

$$\frac{A(HKL)}{A(ABCD)} = \frac{2}{3} : 24 = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$$

5. (a) –

(b)



Wenn y zunimmt (abnimmt), dann wird x größer (kleiner).

(c) **1. Möglichkeit** (mit der Hilfslinie $\overline{GT}$) :

Wegen $\overline{EB} = 4 \text{ cm}$ folgt $\overline{ET} = (4 - x) \text{ cm}$.

$\triangle PSG \sim \triangle ETG$:

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PG}} = \frac{\overline{GT}}{\overline{ET}} \Rightarrow \frac{y}{3-x} = \frac{6}{4-x}.$$

Damit ergibt sich der gewünschte Ausdruck.

2. Möglichkeit (ohne die Hilfslinie $\overline{GT}$) :

Es gilt: $\overline{QS} = (6 - y) \text{ cm}$ und $\triangle PSG \sim \triangle ETG$:

$$\frac{\overline{SP}}{\overline{PG}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{EQ}} \Rightarrow \frac{y}{3-x} = \frac{6-y}{1}.$$

$\Rightarrow y = (3-x)(6-y) = 18 - 3y - 6x + xy \Leftrightarrow y(x-4) = 6x - 18$, woraus die obige Beziehung folgt.

(d) **1. Möglichkeit** (elegant):

Es gilt $\triangle EFS \sim \triangle HSG$. Wenn das Dreieck HSG doppelt so groß wie das Dreieck EFS ist, dann muss für die entsprechenden Seitenlängen der Streckungsfaktor den Wert $\sqrt{2}$ besitzen.

Es muss z.B. gelten:

$$\overline{HG} = \sqrt{2} \cdot \overline{EF}, \text{ also } 6 - 2x = \sqrt{2} \cdot 2. \text{ Damit ergibt sich } x = 3 - \sqrt{2} \approx 1,59.$$

2. Möglichkeit (aufwändig):

Es muss gelten: $A(HSG) = 2 \cdot A(EFS)$. Also: $\frac{1}{2} \cdot \overline{HG} \cdot \overline{PS} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{QS}$

6. Abbildung durch zentrische Streckung

$$(3-x) \cdot y = 2 \cdot (6-y) \Leftrightarrow y = \frac{12}{5-x}.$$

Mit dem Ergebnis der Aufgabe (b) folgt dann

$$\frac{6 \cdot (3-x)}{(4-x)} = \frac{12}{5-x}$$

Diese Bruchgleichung führt dann auf die quadratische Gleichung

$$x^2 - 6x + 7 = 0 \quad \text{mit} \quad G =]0; 3[_{\mathbb{R}} \Rightarrow x_{1;2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Das Pluszeichen entfällt wegen $3 + \sqrt{2} > 3$.

6. Der Turm ist 290 m hoch.

7. $\overline{DE} = 6,25 \text{ m}$

8. (a) - -

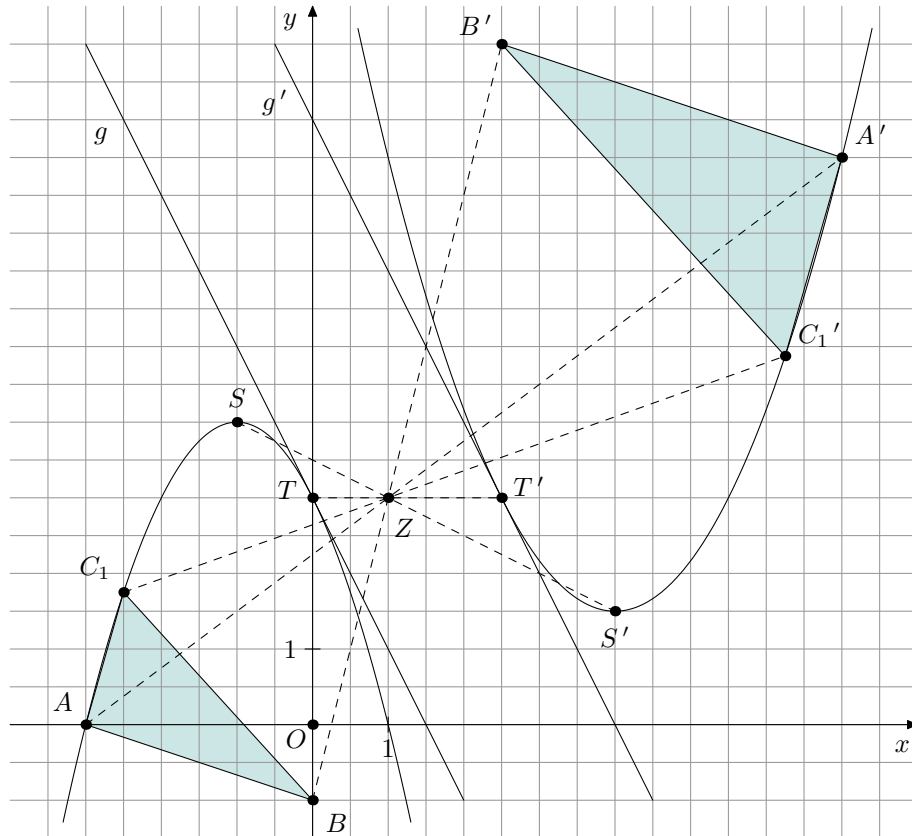
(b) Der Fahrer erreicht 1,1 Promille um 2.40 Uhr, 0,5 Promille um 6.40 Uhr und 0,3 Promille um 8.00 Uhr.

(c) Morgens um 7.40 Uhr hat der Fahrer 0,35 Promille.

(d) - -

9. (a) Siehe Zeichnung.

6. Abbildung durch zentrische Streckung



(b) • Siehe Zeichnung.

• Zunächst ergibt sich $S(-1 \mid 4)$. Weiter sei $S'(x_S' \mid y_S')$.

$$\text{Aus } \overrightarrow{ZS'} = k \cdot \overrightarrow{ZS} \text{ folgt: } \begin{pmatrix} x_S' & -1 \\ y_S' & -3 \end{pmatrix} = -1,5 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Daraus ergibt sich: } \begin{array}{lcl} x_S' - 1 & = & 3 \Rightarrow x_S' = 4 \\ \wedge & & \\ y_S' - 3 & = & -1,5 \Rightarrow y_S' = 1,5 \end{array}$$

Also: $S'(4 \mid 1,5)$.

Die unvollständige Gleichung der Bildparabel p' lautet daher:

$$p' : y = a(x - 4)^2 + 1,5$$

Du siehst nun: $T(0 \mid 3) \in p'$. Als Begründung dafür kannst du z.B. die „Fünf-Punkte-Regel“ für die Zeichnung einer Normalparabel bei bekannten Scheitelkoordinaten heranziehen. Dann erhältst du (mit $k = -1,5$) durch Abzählen der Kästchen: $T'(2,5 \mid 3)$.

$$T'(2,5 \mid 3) \text{ in die Gleichung von } p': 3 = a(2,5 - 4)^2 + 1,5 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

Somit ist das Ergebnis in der Aufgabe (b) bestätigt.

Anmerkung:

Der Wert des Formfaktors a' der Bildparabel p' lässt sich auch allgemein herleiten.

Gehe von einer Parabel p_0 aus, deren Scheitel im Ursprung liegt.

$p_0 : y = ax^2$ mit $a \neq 0$. Ein beliebiger Punkt $P_0(x_0 \mid ax_0^2) \in p$ wird einer zentrischen Streckung mit dem Zentrum $O = (0 \mid 0)$ und dem Streckungsfaktor $k \neq 0$ unterworfen. Sein Bildpunkt sei $P_0'(x' \mid y')$.

6. Abbildung durch zentrische Streckung

Dann gilt $\overrightarrow{OP_0'} = k \cdot \overrightarrow{OP_0}$:

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ a'x_0'^2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x \\ ax^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \wedge \quad \begin{matrix} x_0' & = & k \cdot x & (1) \\ a'x_0'^2 & = & k \cdot ax^2 & (2) \end{matrix}$$

Aus (1): $x = \frac{x_0'}{k}$ in (2): $a'x_0'^2 = k \cdot a \cdot \frac{x_0'^2}{k^2}$

Damit ergibt sich:

$$a' = \frac{a}{k}$$

Diese Beziehung zwischen den entsprechenden Formfaktoren gilt für alle möglichen zentrischen Streckungen von Parabeln.

(c) • Siehe Zeichnung.

- Die Gerade g' muss zur Geraden g parallel liegen, denn jede zentrische Streckung ist winkeltreu.

$$g' : y = -2x + t' \text{ und } T'(2, 5 \mid 3) \in g' : 3 = -2 \cdot 2,5 + t'$$

$$\Rightarrow t' = 8 \text{ und } g' : y = -2x + 8$$

$$p' \cap g' : \frac{2}{3} \cdot (x - 4)^2 + 1,5 = -2x + 8 \quad | \cdot 3$$

$$\dots \Leftrightarrow 2x^2 + 10x + 12,5 = 0 \Rightarrow D^* = 100 - 8 \cdot 12,5 = 0$$

Also ist die Gerade g' eine Tangente an die Parabel p' .

Allgemein gilt: Jede zentrische Streckung ist „**tangententreu**“.

(d) • Siehe Zeichnung.

- Für die Inhalte A von allen möglichen Flächen gilt bei deren zentrischen Streckung mit dem Streckungsfaktor k : $A' = k^2 \cdot A$, wobei A' der Inhalt der Bildfläche ist. Hier gilt: $k = -1,5$ und $A = 2,875 \text{ cm}^2$. Also folgt $A' = (-1,5)^2 \cdot 2,875 \text{ cm}^2 = 6,46875 \text{ cm}^2$.

(e) $A'_\Delta(x) = k^2 \cdot A_\Delta(x)$

$$\text{Also gilt hier: } (-3,375x^2 - 5,625x + 13,5) \text{ cm}^2 = (-1,5)^2 \cdot A_\Delta(x) \quad | : 2,25$$

$$\Rightarrow A_\Delta(x) = (-1,5x^2 - 2,5x + 6) \text{ cm}^2$$

Anmerkung: Natürlich kannst du den Flächeninhalt $A_\Delta(x)$ auch direkt über die Flächendeterminante berechnen. Offensichtlich wäre dieser Weg aber weiter.

6. Abbildung durch zentrische Streckung

(f) 1. Möglichkeit: Durch eine Extremwertberechnung (Vorsicht!)

$$\begin{aligned}
 A_{\Delta}(x) &= (-3,375x^2 - 5,625x + 13,5) \text{ cm}^2 \\
 &= -3,375\left(x^2 + \frac{5}{3}x - 4\right) \text{ cm}^2 \\
 &= -3,375 \left[x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} - 4 \right] \text{ cm}^2 \\
 &= -3,375 \left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{169}{36} \right] \text{ cm}^2 \\
 A_{\Delta}(x) &= \left[-3,375 \left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + 15,84375 \right] \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Jetzt wäre es fatal, einfach zu antworten: „ $x = -\frac{5}{6}$ liefert ...“, denn dieses Rechen-
 ergebnis deckt sich zunächst nicht mit den Gegebenheiten in der Zeichnung! Warum?
 Nun, die Variable x ist als Abszissenwert der Punkte C_n festgelegt worden! Das be-
 deutet, dass dieser Abszissenwert zur Parabel p und nicht zur Parabel p' gehört.

Dieser x -Wert muss also erst noch der zentrischen Streckung unterworfen werden:

$x' = -\left(\frac{5}{6} + 1\right) \cdot (-1,5) = 2,75$. Wegen $Z(1 \mid \dots)$ muss noch 1 addiert werden. Al-
 so beträgt der Abszissenwert des gesuchten Punktes unter den Punkten C_n , der den
 maximalen Flächeninhalt liefert: 3,75.

Aber der Punkt S' besitzt den Abszissenwert 4. Daher kann S' nicht der gesuchte
 Punkt sein.

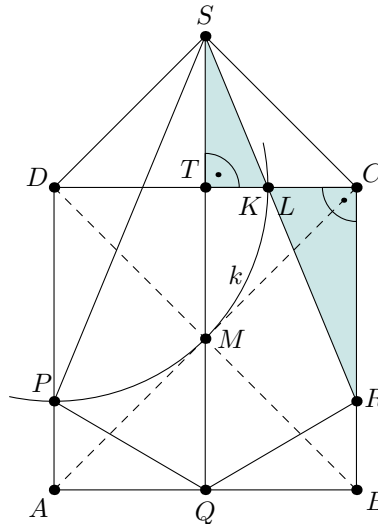
2. Möglichkeit: anschaulich

Unter allen Punkten auf der Parabel p' müsste der Punkt S' den größten Abstand
 von der Grundlinie $[A'B']$ besitzen.

Andererseits muss der Punkt, der den größten Flächeninhalt liefern soll (nenne ihn
 z.B. $C^{*'}), auf der Tangente an die Parabel p' liegen, die zur Grundlinie $[A'B']$ par-
 allel verläuft. Die Tangente an die Parabel p' durch den Punkt S' verläuft aber im
 Gegensatz zur Strecke $[A'B']$ waagrecht. Also kann der Punkt S' nicht der „richtige“
 Punkt sein. Der Punkt $C^{*'}), der den größten Flächeninhalt liefert, liegt etwas links
 oberhalb des Punktes S' .$$

10. (a)

6. Abbildung durch zentrische Streckung



- (b) Es gilt: $\overline{DC} = 2a$ und $\overline{TS} = a$ (Das ist die Dreieckshöhe.)

$$A_{ABCS D} = A_{ABCD} + A_{DCS} = (2a)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = 5a^2$$

$$A_{PQRS} = \overline{QS} \cdot \overline{PR} = \frac{1}{2} \cdot (2a + a) \cdot 2a = 3a^2$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCS D}} = \frac{3a^2}{5a^2} = \frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$$

- (c) Das Dreieck DCS ist ein halbes Quadrat, dessen Seite jetzt 14,5 cm lang wäre. Also würde gelten: $A_{DCS} = \frac{1}{2} \cdot 14,5^2 \text{ cm}^2 = 105,125 \text{ cm}^2$.

Mit Hilfe der gestrichelten Linien erkennst du: Das Quadrat $ABCD$ ist in vier kongruente Dreiecke zerlegt worden, die zum Dreieck DCS kongruent sind.

Das Quadrat $ABCD$ hätte also einen Flächeninhalt von $4 \cdot 105,125 \text{ cm}^2 = 420,5 \text{ cm}^2$.

- (d) Es sei K der Schnittpunkt der Strecke $[SR]$ mit der Strecke $[TC]$.

$$\text{Es gilt dann: } \overline{KC} = \overline{DC} - \overline{DK} = 2a - a\sqrt{2} = a(2 - \sqrt{2})$$

$$\text{Weiter gilt: } \overline{TK} = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1)$$

Dann gilt für Das Teilverhältnis

$$\frac{\overline{KC}}{\overline{TK}} = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{a(\sqrt{2} - 1)} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}^2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)}{1 \cdot (\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2}$$

Natürlich kämst du mit $\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$ zum selben Resultat.

Es sei L der Schnittpunkt des Kreisbogens k mit der Strecke $[TC]$. Zwar liegen die Punkte K und L in der Zeichnung aufeinander, aber ist das auch tatsächlich so?

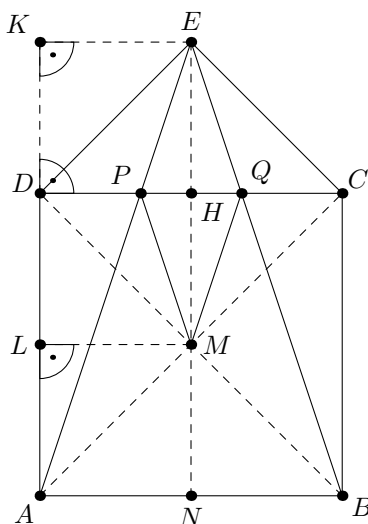
Die Dreiecke LRC und TLS sind beide rechtwinklig und sie besitzen im Punkt L maßgleiche Scheitelwinkel. Also sind die beiden Dreiecke zueinander ähnlich und du kannst den Vierstreckensatz anwenden:

$$\frac{\overline{LC}}{\overline{TL}} = \frac{\overline{RC}}{\overline{TS}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{TS}} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

6. Abbildung durch zentrische Streckung

Also teilt der Punkt L die Strecke $[TC]$ im gleichen Verhältnis wie der Punkt K . Dann müssen aber die beiden Punkte K und L aufeinander liegen; d.h. der Kreisbogen k verläuft tatsächlich durch den Schnittpunkt der Strecke $[SR]$ mit der Strecke $[TC]$.

11. (a)



- (b) Offensichtlich passt das Dreieck DCE fünfmal in die Figur hinein.
 Die Dreiecke AMD und AED besitzen die gleiche Grundseite $[AD]$. Ihre Höhen $[ML]$ bzw. $[EK]$ sind gleich lang. Also sind diese beiden Dreiecke flächengleich.
 Daher gilt: $A_{\triangle AED} = \frac{1}{5} \cdot A_{ABCEDE}$.
 Aus Symmetriegründen folgt: $A_{\triangle ABE} = A_{ABCEDE} - 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot A_{ABCEDE} = \frac{3}{5} A_{ABCEDE}$.

$$\Rightarrow \frac{A_{\triangle ABE}}{A_{ABCEDE}} = \frac{3}{5} = 60\%$$
- (c) Aus Symmetriegründen muss das Viereck $MQEP$ eine Raute sein. Die Dreiecke ANE und PHE sind zueinander ähnlich:

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{EN}} = \frac{1}{3}$$

Daraus ergibt sich übrigens, dass die Strecke $[CD]$ von den Punkten P und Q in drei gleiche Teile geteilt wird.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{A_{\triangle PHE}}{A_{\triangle ANE}} &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = \frac{A_{\triangle PQE}}{A_{\triangle ABE}} \\ \Rightarrow \frac{A_{PQME}}{A_{\triangle ABE}} &= \frac{2}{9} \approx 22,22\% \end{aligned}$$

12. (a) Ur- und Bildparabel besitzen die gleiche Symmetrieachse, nämlich die y -Achse. Dort muss sich das Streckungszentrum Z aufhalten.

6. Abbildung durch zentrische Streckung

Wie bei jeder zentrischen Streckung ist Z der einzige Fixpunkt. Dieser Punkt muss also auf beiden Parabeln liegen. Der einzige Punkt, den beide Parabeln gemeinsam haben, ist der Scheitel im Ursprung. Also liegt das Streckungszentrum Z im Ursprung.

- (b) Du könntest jetzt die Bildkoordinaten eines konkreten Punktes auf der Urparabel (z.B. $(1 \mid 5)$) abbilden und dessen Bildkoordinaten in die Gleichung der Bildparabel einsetzen.

Wir leiten gleich eine allgemeine Beziehung her, die du für analoge Fälle übernehmen kannst:

$$P(x \mid a \cdot x^2) \xrightarrow{Z; k} P'(x' \mid y')$$

Mit $\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$ und $k \neq 0$ folgt:

$$\begin{pmatrix} x' - 0 \\ y' - 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x - 0 \\ a \cdot x^2 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} x' & = & k \cdot x \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{x'}{k} \quad (1') \\ y' & = & k \cdot ax^2 \quad (2) \end{array}$$

$$(1') \text{ in } (2): y' = k \cdot a \cdot \frac{x'^2}{k^2} \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{a}{k} \cdot x'^2$$

Somit ergibt sich für den Formfaktor a' der Bildparabel p' :

$$a' = \frac{a}{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{a}{a'} \quad \text{also:} \quad k = \frac{2,5}{-0,5} = -5$$

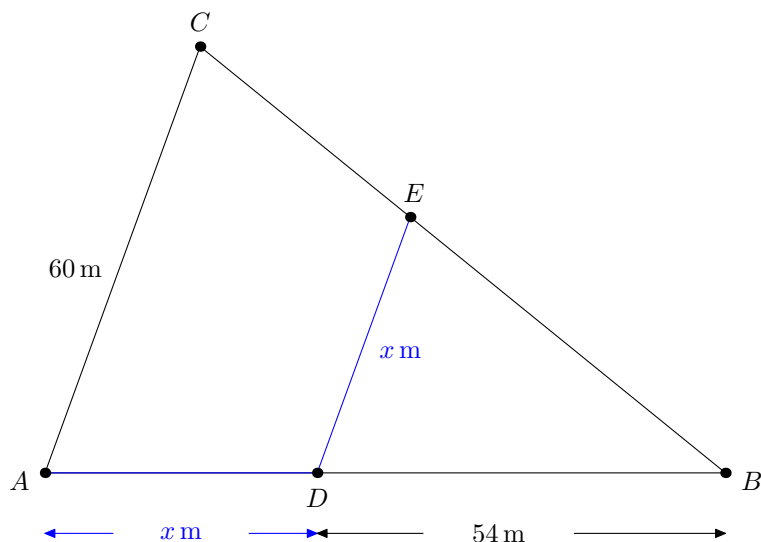
13. Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in allen drei Innenwinkelmaßen übereinstimmen.

Der dritte Innenwinkel im ursprünglichen Dreieck hat das Maß $180^\circ - 73,47^\circ - 41,26^\circ = 65,27^\circ$. In ihm hat also der dritte Innenwinkel das Maß $65,27^\circ$.

Das andere Dreieck besitzt dieses Innenwinkelmaß ebenfalls. Also kann dieses Dreieck (wenn auch die beiden anderen Innenwinkel paarweise übereinstimmen) zu ersten Dreieck ähnlich sein.

14. (a)

6. Abbildung durch zentrische Streckung



Das Viereck $ADEC$ ist ein Trapez. Also ist $[AC] \parallel [DE]$.

Daher gilt: $\triangle DBE \sim \triangle ABC$. Nach einem Vierstreckensatz folgt:

$$\frac{x}{60} = \frac{54}{54 + x} \Leftrightarrow x^2 + 54x - 3240 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung besitzt die Lösungen 36 und -90 , wobei -90 natürlich ausscheidet.

Also ist der Zaun 36 m lang.

- (b) Für den Ähnlichkeitsmaßstab k gilt z.B.: $k = \frac{x \text{ m}}{60 \text{ m}} = \frac{36 \text{ m}}{60 \text{ m}} = 0,6$

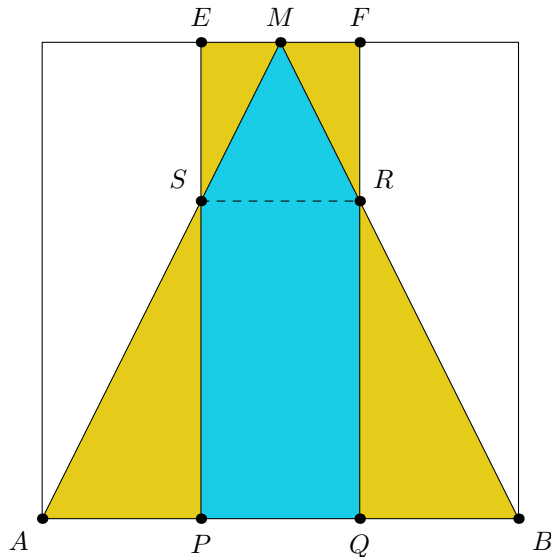
Für Lenis Anteil DBE gilt: $A_{\triangle DBE} = 0,6^2 \cdot A_{\triangle ABC}$.

Weiter folgt: $\frac{A_{\triangle DBE}}{A_{\triangle ABC}} = 0,6^2 = 0,36 = 36\%$.

Also bekommt Sarah den restlichen Anteil von 100%, nämlich 64%.

15. (a)

6. Abbildung durch zentrische Streckung



- (b) Die Dreiecke APS und SME sind zueinander ähnlich.

Es gilt z.B.: $\overline{AP} : \overline{EM} = 1 : 2 = \overline{PS} : \overline{SE}$.

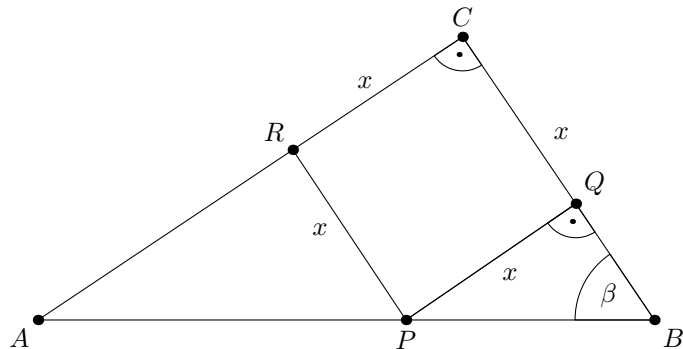
Die Strecke $[PE]$ ist 6,3 cm lang. Nach dem obigen Seitenverhältnis von 1 : 2 folgt: $\overline{PS} = 4,2$ cm und $\overline{SE} = 2,1$ cm = $\overline{SR}$. Das Viereck $SRFE$ ist ein Quadrat.

Für den Flächeninhalt A der Figur $PQRMSP$ gilt dann:

$$A = 2,1 \text{ cm} \cdot 4,2 \text{ cm} + 0,5 \cdot 2,1^2 \text{ cm}^2 = 11,025 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Flächenanteil: } \frac{11,025 \text{ cm}^2}{6,3^2 \text{ cm}^2} = 0,2\overline{7} = \frac{2}{10} + \frac{7}{90} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}.$$

16. (a)



Die Figur wurde im Maßstab 2 : 3 gezeichnet.

- (b) Die beiden Dreiecke PBQ und ABC sind rechtwinklig. Ein Winkel hat jeweils das Maß β . Also stimmen diese Dreiecke wegen der Innenwinkelsumme von 180° in allen drei Innenwinkeln überein. Also sind sie zueinander ähnlich.

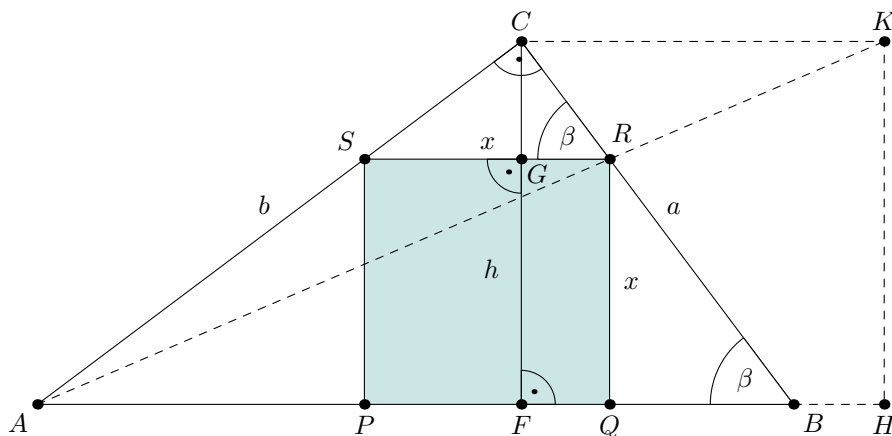
(c) $A_{\Delta PBQ} \sim A_{\Delta ABC}$ Vierstreckensatz: $\frac{\overline{BQ}}{x} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{6-x}{x} = \frac{6}{9}$

6. Abbildung durch zentrische Streckung

$$\Leftrightarrow 54 - 9x = 6x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3,6$$

$$(d) \quad \frac{A_{PQCR}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{3,6^2 \text{ cm}^2}{0,5 \cdot 6 \cdot 9 \text{ cm}^2} = 0,48 = 48\%$$

17. (a)



Zeichne z.B. das Probequadrat $QHKC$ mit der Seitenlänge $h [= 4,8 \text{ cm}]$.
 $[AK] \cap [BC] = \{R\}$. Zeichne dann das Quadrat mit der Seite $[RQ]$ fertig.

- (b) Aus der Zeichnung in (a) ist ersichtlich, dass beide Dreiecke rechtwinklig sind. Außerdem taucht in beiden Dreiecken der Winkel mit dem Maß β auf. Also stimmen die beiden Dreiecke sogar in allen drei Innenwinkeln überein. Also sind sie zueinander ähnlich.

- (c) Wegen $\triangle FBC \sim \triangle ABC$ gilt:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h}{a} = \frac{b}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad h = \frac{ab}{c}. \quad \text{Mit } c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ cm folgt die Behauptung.}$$

Für $a = 6 \text{ cm}$ und $b = 8 \text{ cm}$ ergibt sich $h = 4,8 \text{ cm}$.

- (d) In beiden Dreiecken tauchen Stufenwinkel mit dem Maß β auf. Also sind die beiden Dreiecke zueinander ähnlich.

- (e) Wegen $\triangle SRC \sim \triangle ABC$ verhalten sich die Längen der Hypotenusen wie die entsprechenden Höhen in beiden Dreiecken:

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{c} = \frac{h-x}{h} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{hc}{h+c}$$

Mit $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ cm}$ und $c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ cm}$ ergibt sich:

6. Abbildung durch zentrische Streckung

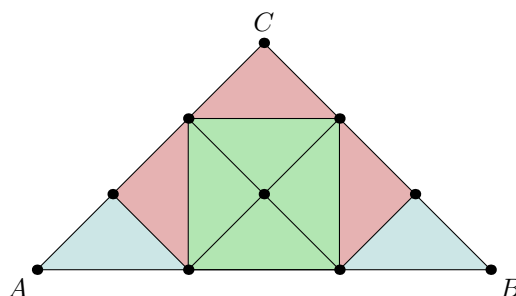
$$x = \frac{ab}{\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Erweitert man den Bruch mit $\sqrt{a^2 + b^2}$, so ergibt sich die Behauptung.

(f) • In diesem Fall gilt $b = a$. $\Rightarrow x = \frac{a^3\sqrt{2}}{3a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

$$\Rightarrow \frac{A_{PQRS}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{x^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{\frac{a^2 \cdot 2}{3^2}}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{4}{9} = 0,4 = 44,4\%$$

•



Das Dreieck ABC lässt sich in neun kongruente gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Vier davon nimmt das einbeschriebene Quadrat ein. Also beträgt der Flächennanteil dieses Quadrates am Dreieck ABC

$$\frac{4}{9} = 0,4 = 44,4\%$$

18. (a) Klar.

(b) $A_1 = A_2 = 1,5^2\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow A_1 + A_2 = 2 \cdot 1,5^2\pi \text{ cm}^2 (\approx 14,14 \text{ cm}^2)$

Der Durchmesser d des großen Kreises ist genauso lang wie die Diagonale $[BD]$ des Quadrates $ABCD$.

$$\Rightarrow d = 3\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow r_3 = 1,5\sqrt{2} \text{ cm}.$$

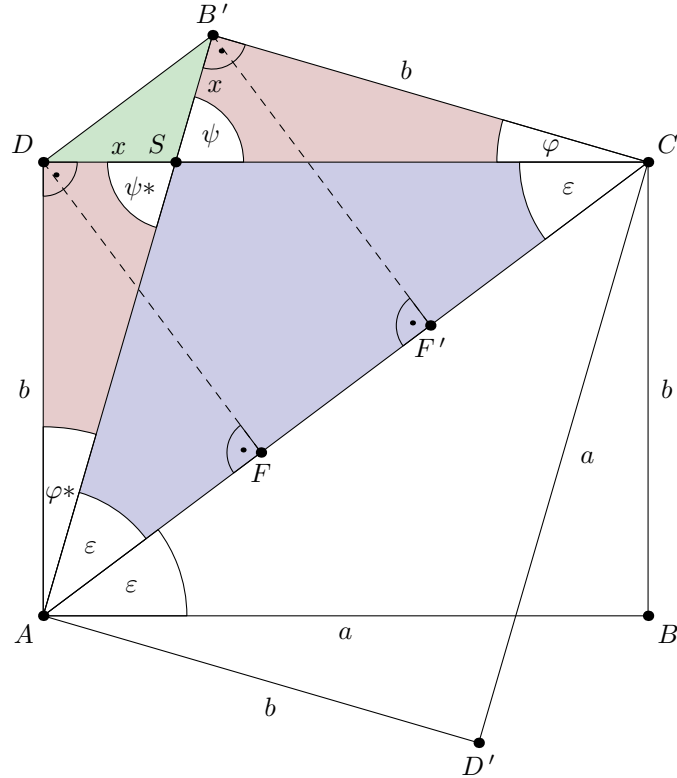
$$\Rightarrow A_3 = (1,5\sqrt{2})^2\pi \text{ cm}^2 = 2 \cdot 1,5^2\pi \text{ cm}^2 = A_1 + A_2.$$

Also sind die beiden kleinen Kreise zusammen genauso groß wie der große Kreis.

Oder kürzer: Der Durchmesser des großen Kreises ist $\sqrt{2}$ -mal so groß wie der Durchmesser eines kleinen Kreises. Also ist der Flächeninhalt des großen Kreises doppelt ($= (\sqrt{2})^2$) so groß wie der eines kleinen Kreises.

19. (a)

6. Abbildung durch zentrische Streckung



- (b) Das Spiegelbild des Rechtecks $ABCD$ ist das kongruente Rechteck $AD'CB'$.

Also gilt: $\overline{CB} = \overline{CB'} = \overline{AD} = b$.

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke ASD und SCB' stimmen also in der Seitenlänge b überein.

Weiter gilt: $\psi = \psi^*$ (Scheitelwinkel) $\Rightarrow \varphi = \varphi^*$.

Damit sind die beiden Dreiecke ASD und SCB' kongruent. Insbesondere gilt dann $\overline{AS} = \overline{CS}$ und $\overline{DS} = \overline{SB'} = x$.

- Einerseits gilt dann im Dreieck SCB' : $\overline{CS} = \sqrt{b^2 + x^2}$
Andererseits gilt: $\overline{CS} = a - x$

$$\bullet \quad \sqrt{b^2 + x^2} = a - x \quad |^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 + x^2 = a^2 - 2ax + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a^2 - b^2}{2a}$$

- (c) $A_{\Delta ACS} = A_{\Delta ACD} - A_{\Delta ASD}$

$$A_{\Delta ACS} = \frac{1}{2} ab - \frac{1}{2} bx = \frac{b}{2} \cdot \left(a - \frac{a^2 - b^2}{2a} \right) = \frac{b}{2} \cdot \frac{2a^2 - a^2 + b^2}{2a} = \frac{b}{4a} \cdot (a^2 + b^2)$$

- (d) • Siehe Zeichnung.

- Aufgrund der Eigenschaften der Achsenspiegelung sind die beiden Dreiecke ACB' und ACD kongruent. Sie besitzen die gemeinsame Hypotenuse $[AC]$. Also sind die beiden Höhen $[DF]$ und $[B'F']$ gleich lang. Das bedeutet, dass die beiden Punkte D und B' den gleichen Abstand zur Strecke $[AC]$ besitzen.
Also folgt: $[B'D] \parallel [AC]$. Also ist das Viereck $ACB'D$ ein (gleichschenkliges) Trapez.

- (e) Die beiden Dreiecke ACS und DSB' sind zueinander ähnlich; d.h.:

6. Abbildung durch zentrische Streckung

$$A_{\Delta DSB'} = k^2 \cdot A_{\Delta ACS} \text{ mit } k = \frac{\overline{DS}}{\overline{CS}}$$

$$k = \frac{x}{a-x} = \frac{a^2-b^2}{2a} : \left(a - \frac{a^2-b^2}{2a}\right) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$A_{\Delta DSB'} = \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 \cdot \frac{b}{4a} \cdot (a^2+b^2) = \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}.$$

(f)

$$\begin{aligned} A_{Trapez} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot b + \frac{b}{4a} \cdot (a^2+b^2) + \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{2b}{4a} \cdot (a^2-b^2) + \frac{b}{4a} \cdot (a^2+b^2) + \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{b}{4a} \cdot \frac{2(a^2-b^2) \cdot (a^2+b^2) + (a^2+b^2)^2 + (a^2-b^2)^2}{a^2+b^2} \\ &= \dots \\ &= \frac{b}{4a} \cdot \frac{4a^4}{a^2+b^2} = ab \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

(g) Es muss gelten: $A_{Trapez} = 0,9 \cdot A_{ABCD}$. Also:

$$ab \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2} = 0,9 \cdot ab \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{a^2+b^2} = 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad 0,1a^2 = 0,9b^2$$

Wegen $a, b > 0$ folgt dann $a = 3 \cdot b$.

(h) Es muss gelten: $ab \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2} = ab \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{a^2+b^2} = 1$.

Ein Bruch hat aber genau dann den Wert 1, wenn Zähler und Nenner gleich sind:

$a^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = 0$ (†). Dann würde das Rechteck zur Strecke entarten; ein solches Trapez gibt es nicht.

(i) Es gilt: $\sphericalangle DCA = \varepsilon$ (Z-Winkel).

Weiter gilt: $\sphericalangle BAS = \psi = 2 \cdot \varepsilon$ (F-Winkel).

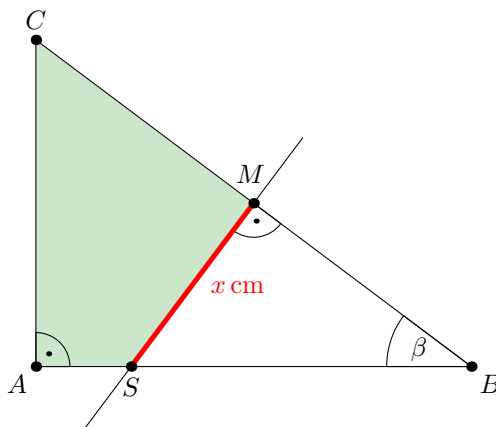
Ebenso folgt: $\varphi = 90^\circ - 2\varepsilon$ (Innenwinkelsumme im Dreieck SCB').

Damit das Trapez $ACB'D$ zum Rechteck wird, muss $\varphi + \varepsilon = 90^\circ$ gelten.

Das bedeutet: $90^\circ - 2\varepsilon + \varepsilon = 90^\circ \Leftrightarrow \varepsilon = 0^\circ$. Wieder würde das Rechteck zur Strecke entarten; d.h. ein solches Trapez gibt es nicht.

20. (a)

6. Abbildung durch zentrische Streckung



In beiden Dreiecken ABC und SBM kommt der Innenwinkel mit dem Maß β vor. Zudem sind beide Dreiecke rechtwinklig. Also müssen beide Dreiecke auch im Maß des dritten Innenwinkels übereinstimmen; also gilt $\triangle SBM \sim \triangle ABC$.

- (b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen.

PYTHAGORAS im Dreieck ABC : $\overline{BC}^2 = 7,2^2 + 5,4^2 \Rightarrow \overline{BC} = 9 \text{ cm}$
 $\Rightarrow \overline{BM} = 4,5 \text{ cm}$.

Vierstreckensatz: $\frac{\overline{MS}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} : \frac{x}{4,5} = \frac{5,4}{7,2} \Leftrightarrow x = 3,375$.

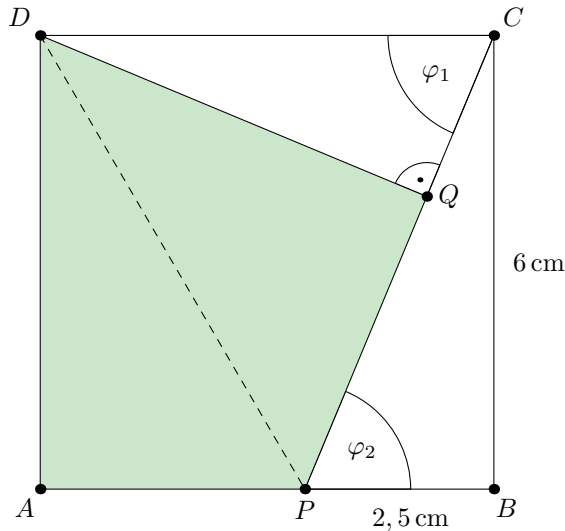
- (c) Berechne den Ähnlichkeitsfaktor: Z.B. $k = \frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{4,5}{7,2} = 0,625$.

Dann gilt $\frac{A_{\triangle SBM}}{A_{\triangle ABC}} = k^2 = 0,625^2 = 0,390625$.

Das bedeutet: Das Dreieck SBM nimmt 39,0625% der Fläche des Dreiecks ABC ein. Dann nimmt das Viereck $ASMC$ $100\% - 39,0625\% = 60,9375\%$ der Fläche des Dreiecks ABC ein.

21. (a)

6. Abbildung durch zentrische Streckung



- (b) Die Kathete $\overline{AD}$ im rechtwinkligen Dreieck APD besitzt die Länge a . Die Hypotenuse $\overline{DC}$ im rechtwinkligen Dreieck DQC hat ebenfalls die Länge a . Weil aber in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite darstellt, gilt: $\overline{DQ} < a = \overline{AD}$. Somit kann die Diagonale $\overline{DP}$ im Viereck $APQD$ nicht Symmetrieachse dieses Vierecks sein.
- (c) In den beiden rechtwinkligen Dreiecken DQC und PBC gilt: $\varphi_1 = \varphi_2$ (Z-Winkel). Damit stimmen die beiden Dreiecke paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck stimmen diese beiden Dreiecke in allen drei Innenwinkelmaßen überein. Also gilt: $\triangle PBC \sim \triangle DQC$.
- (d) Strategie: $A_{APQD} = A_{ABCD} - (A_{\triangle PBC} + A_{\triangle DQC})$.

$$A_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 6 \text{ cm}^2 = 7,5 \text{ cm}^2.$$

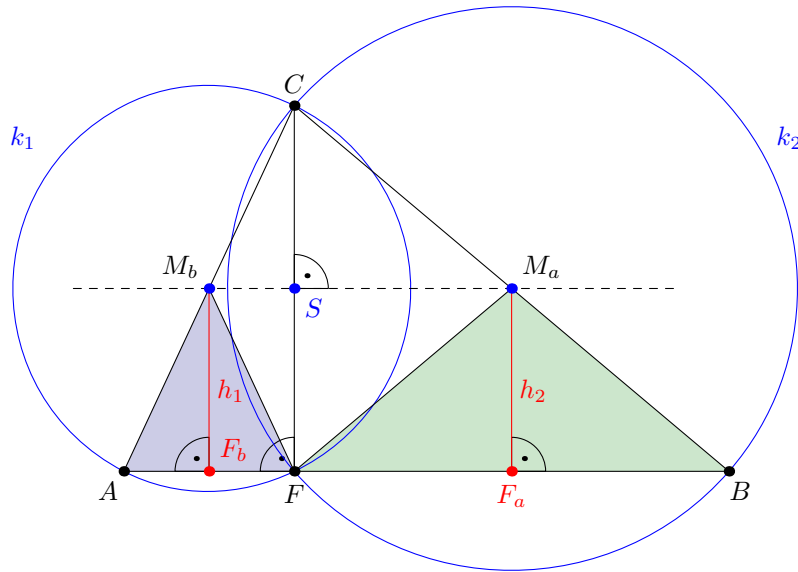
Wegen (c) folgt: $A_{\triangle DQC} = k^2 \cdot A_{\triangle PBC}$ mit dem Streckungsfaktor k .

$$\text{Mit } k = \frac{\overline{DC}}{\overline{PC}} \text{ folgt: } k = \frac{6 \text{ cm}}{\sqrt{2,5^2 + 6^2} \text{ cm}} = \frac{12}{13}.$$

$$\Rightarrow A_{\triangle DQC} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot 7,5 \text{ cm}^2 = \frac{144}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2.$$

$$\begin{aligned} A_{APQD} &= 36 \text{ cm}^2 - \left(7,5 \text{ cm}^2 + \frac{144}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2\right) \\ &= 36 \text{ cm}^2 - \frac{313}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2 \\ \frac{A_{APQD}}{A_{ABCD}} &= \frac{6084 - 2374,5}{169 \cdot 36} = \frac{3709,5}{6084} \approx 0,6094 = 60,94\%. \end{aligned}$$

22. (a)



(b) **1. Möglichkeit:**

Im Kreis k_1 gilt: $\overline{M_bA} = \overline{M_bF} = \overline{M_bC}$.

Im Kreis k_2 gilt: $\overline{M_aB} = \overline{M_aF} = \overline{M_aC}$.

Also sind im Viereck FM_aCM_b zweimal zwei benachbarte Seiten gleich lang. Also handelt es sich um ein achsensymmetrisches Drachenviereck.

2. Möglichkeit:

In jedem rechtwinkligen Dreieck fällt dessen Umkreismittelpunkt mit dem Hypotenusenmittelpunkt zusammen. Also sind die Kreismittelpunkte M_a und M_b gleichzeitig die Mittelpunkte der Seiten $a = [BC]$ bzw. $b = [AC]$.

Die Dreiecke FBC und F_aBM_a sind zueinander ähnlich.

Wegen $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM_a}$ folgt dann $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{F_aM_a} = 2 \cdot \overline{F_bM_b}$.

Also gilt: $h_1 = h_2 = \overline{SF} = \overline{FC}$. Daher liegt die Gerade M_aM_b zur Grundlinie $[AB]$ des Dreiecks ABC parallel. Diese Parallele steht damit auf der Diagonalen des Vierecks FM_aCM_b senkrecht. Gleichzeitig halbiert der Punkt S die Höhe $[CF]$ des Dreiecks ABC . Also ist das Viereck FM_aCM_b ein achsensymmetrischer Drach.

(c) Die in der 2. Möglichkeit verwendete Argumentation ergibt nun Folgendes:

- Die vier Dreiecke F_aBM_a , FF_aM_a , FM_aS und SM_aC sind kongruent. Das Dreieck FBM_a besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.

Also ist das Dreieck FBM_a halb so groß wie das Teildreieck FBC .

- Die vier Dreiecke AF_bM_b , F_bFM_b , FSM_b und M_bSC sind kongruent. Das Dreieck AFM_b besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.

Also ist das Dreieck AFM_b halb so groß wie das Teildreieck AFC .

Also sind die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a zusammen halb so groß wie das Dreieck ABC .

Oder:

Weil der Schnittpunkt S auf halber Höhe im Dreieck ABC liegt, gilt:

$$A_{\Delta M_bM_aC} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta ABC} \text{ (zentrische Streckung mit } k = \frac{1}{2} \text{)}.$$

Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drach mit der Diagonalen

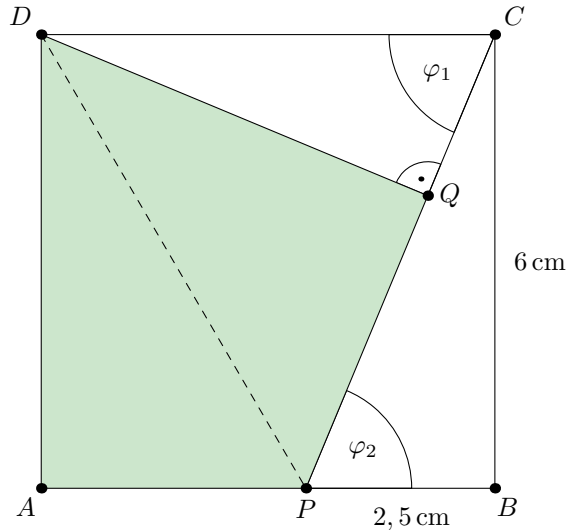
6. Abbildung durch zentrische Streckung

$[M_a M_b]$ als Symmetrieachse.

$$\Rightarrow A_{FM_a CM_b} = 2 \cdot \frac{1}{4} A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta ABC}.$$

Dann muss der Rest, nämlich derjenige, der aus den beiden Dreiecken AFM_b und FBM_a besteht, ebenfalls die Hälfte des Dreiecks ABC einnehmen.

23. (a)



- (b) Die Kathete $\overline{AD}$ im rechtwinkligen Dreieck APD besitzt die Länge a . Die Hypotenuse $\overline{DC}$ im rechtwinkligen Dreieck DQC hat ebenfalls die Länge a . Weil aber in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite darstellt, gilt: $\overline{DQ} < a = \overline{AD}$. Somit kann die Diagonale $\overline{DP}$ im Viereck $APQD$ nicht Symmetrieachse dieses Vierecks sein.
- (c) In den beiden rechtwinkligen Dreiecken DQC und PBC gilt: $\varphi_1 = \varphi_2$ (Z-Winkel). Damit stimmen die beiden Dreiecke paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck stimmen diese beiden Dreiecke in allen drei Innenwinkelmaßen überein. Also gilt: $\Delta PBC \sim \Delta DQC$.
- (d) Strategie: $A_{APQD} = A_{ABCD} - (A_{\Delta PBC} + A_{\Delta DQC})$.

$$A_{\Delta PBC} = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 6 \text{ cm}^2 = 7,5 \text{ cm}^2.$$

Wegen (c) folgt: $A_{\Delta DQC} = k^2 \cdot A_{\Delta PBC}$ mit dem Streckungsfaktor k .

$$\text{Mit } k = \frac{\overline{DC}}{\overline{PC}} \text{ folgt: } k = \frac{6 \text{ cm}}{\sqrt{2,5^2 + 6^2} \text{ cm}} = \frac{12}{13}.$$

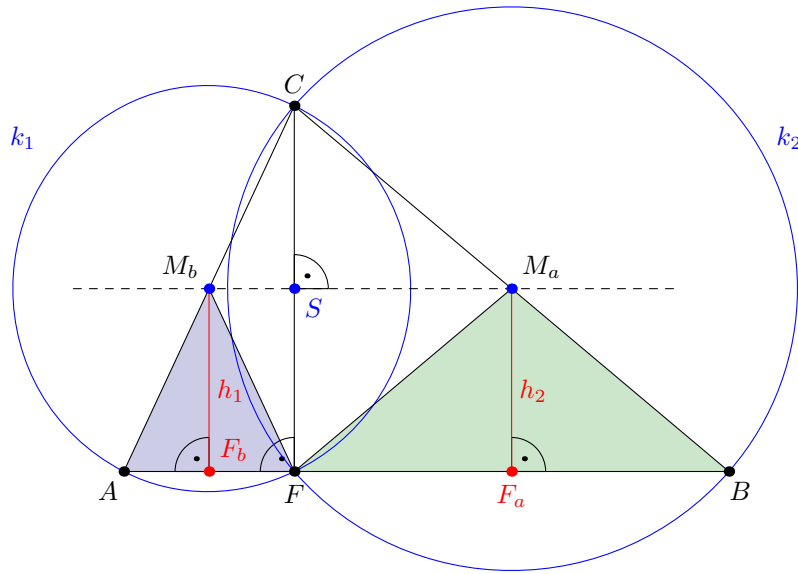
6. Abbildung durch zentrische Streckung

$$\Rightarrow A_{\Delta DQC} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot 7,5 \text{ cm}^2 = \frac{144}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2.$$

$$\begin{aligned} A_{APQD} &= 36 \text{ cm}^2 - \left(7,5 \text{ cm}^2 + \frac{144}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2\right) \\ &= 36 \text{ cm}^2 - \frac{313}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{A_{APQD}}{A_{ABCD}} = \frac{6084 - 2374,5}{169 \cdot 36} = \frac{3709,5}{6084} \approx 0,6094 = 60,94\%.$$

24. (a)



(b) **1. Möglichkeit:**

Im Kreis k_1 gilt: $\overline{M_bA} = \overline{M_bF} = \overline{M_bC}$.

Im Kreis k_2 gilt: $\overline{M_aB} = \overline{M_aF} = \overline{M_aC}$.

Also sind im Viereck FM_aCM_b zweimal zwei benachbarte Seiten gleich lang. Also handelt es sich um ein achsensymmetrisches Drachenviereck.

2. Möglichkeit:

In jedem rechtwinkligen Dreieck fällt dessen Umkreismittelpunkt mit dem Hypotenusenmittelpunkt zusammen. Also sind die Kreismittelpunkte M_a und M_b gleichzeitig die Mittelpunkte der Seiten $a = [BC]$ bzw. $b = [AC]$.

Die Dreiecke FBC und F_aBM_a sind zueinander ähnlich.

Wegen $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM_a}$ folgt dann $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{F_aM_a} = 2 \cdot \overline{F_bM_b}$.

Also gilt: $h_1 = h_2 = \overline{SF} = \overline{FC}$. Daher liegt die Gerade M_aM_b zur Grundlinie $[AB]$ des Dreiecks ABC parallel. Diese Parallele steht damit auf der Diagonalen des Vierecks FM_aCM_b senkrecht. Gleichzeitig halbiert der Punkt S die Höhe $[CF]$ des Dreiecks ABC . Also ist das Viereck FM_aCM_b ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Die in der 2. Möglichkeit verwendete Argumentation ergibt nun Folgendes:

6. Abbildung durch zentrische Streckung

- Die vier Dreiecke F_aBM_a , FF_aM_a , FM_aS und SM_aC sind kongruent. Das Dreieck FBM_a besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
Also ist das Dreieck FBM_a halb so groß wie das Teildreieck FBC .
- Die vier Dreiecke AF_bM_b , F_bFM_b , FSM_b und M_bSC sind kongruent. Das Dreieck AFM_b besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
Also ist das Dreieck AFM_b halb so groß wie das Teildreieck AFC .

Also sind die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a zusammen halb so groß wie das Dreieck ABC .

Oder:

Weil der Schnittpunkt S auf halber Höhe im Dreieck ABC liegt, gilt:

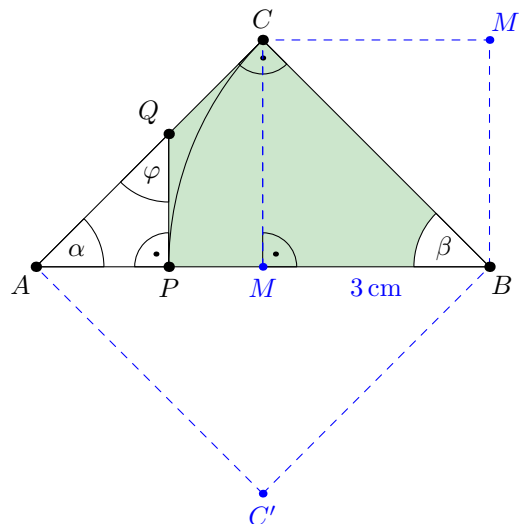
$$A_{\Delta M_bM_aC} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta ABC} \text{ (zentrische Streckung mit } k = \frac{1}{2} \text{)}.$$

Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen mit der Diagonalen $[M_aM_b]$ als Symmetrieachse.

$$\Rightarrow A_{FM_aCM_b} = 2 \cdot \frac{1}{4} A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta ABC}.$$

Dann muss der Rest, nämlich derjenige, der aus den beiden Dreiecken AFM_b und FBM_a besteht, ebenfalls die Hälfte des Dreiecks ABC einnehmen.

25. (a)



- (b) Es gilt $\alpha = \beta = 45^\circ$. Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck APQ gilt aber auch $\alpha = \varphi = 45^\circ$. Also stimmen die beiden Dreiecke ABC und APQ paarweise in ihren Innenwinkelmaßen überein. Damit sind sie zueinander ähnlich.
- (c) Weil die beiden Dreiecke ABC und APQ zueinander ähnlich sind, gilt für den Ähnlichkeitsfaktor k z.B.:

$$k = \frac{\overline{AP}}{\overline{BC}}.$$

Das Dreieck MBC ist ein halbes Quadrat mit der Daigonalenlänge $\overline{BC} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$.

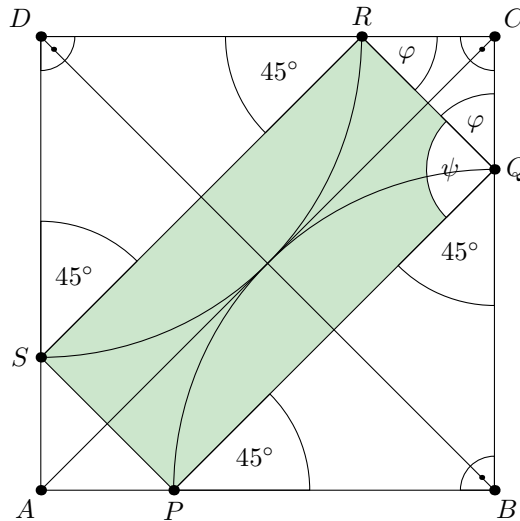
6. Abbildung durch zentrische Streckung

$$\overline{AP} = \overline{BA} - \overline{BP} = \overline{BA} - \overline{BC} = (6 - 3\sqrt{2}) \text{ cm}.$$

$$\text{Damit folgt } k = \frac{(6 - 3\sqrt{2}) \text{ cm}}{6 \text{ cm}}.$$

$$\text{Und } \frac{A_{\Delta APQ}}{A_{\Delta ABC}} = k^2 = \left[\frac{(6 - 3\sqrt{2}) \text{ cm}}{(3\sqrt{2}) \text{ cm}} \right]^2 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,1716 = 17,16\%.$$

26. (a)



- (b) Die beiden Dreiecke PBQ und SRD sind gleichschenkelig-rechtwinklig. Also haben ihre spitzen Innenwinkel das Maß 45° .

Weiter gilt: $\overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{BQ} = \overline{DC} - \overline{DR} = \overline{CR}$. Also ist auch das Dreieck RQC gleichschenkelig-rechtwinklig. Dann gilt $\varphi = 45^\circ$.

Am Punkt Q gilt somit: $45^\circ + \psi + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \psi = 90^\circ$.

Aus Symmetriegründen sind dann auch die drei restlichen Innenwinkel des Vierecks $PQRS$ rechte Winkel. Also handelt es sich hierbei um ein Rechteck.

- (c) Eine mögliche Strategie: $A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot (A_{\Delta PBQ} + A_{\Delta RQC})$

$$A_{\Delta PBQ} = \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2.$$

$$A_{\Delta RQC} = \frac{1}{2} \cdot (6 - 3\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2 = (27 - 18\sqrt{2}) \text{ cm}^2.$$

$$A_{PQRS} = 36 \text{ cm}^2 - 2 \cdot [9 \text{ cm}^2 + (27 - 18\sqrt{2}) \text{ cm}^2] = (36\sqrt{2} - 36) \text{ cm}^2.$$

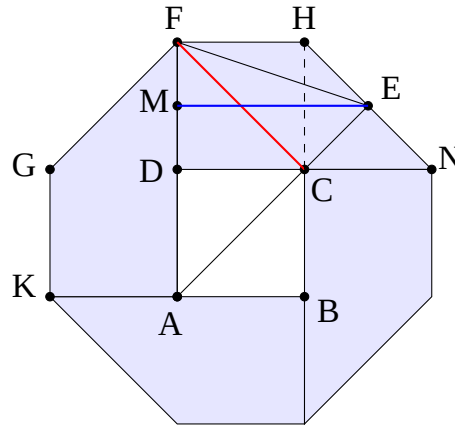
$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(36\sqrt{2} - 36) \text{ cm}^2}{36 \text{ cm}^2} = \frac{(36(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2)}{36 \text{ cm}^2}$$

$$= \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142 = 41,42\%$$

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

1. - -
2. (a) 9 cm, 18 cm
(b) $d = \sqrt{405} \text{ cm} \approx 20,12 \text{ cm}$
3. (b) $60^\circ, 120^\circ$
(c) $A_1 = 2,75 \cdot \sqrt{90,75} \text{ cm}^2 \approx 26,20 \text{ cm}^2$ $A_2 = 1,375 \cdot \sqrt{90,75} \text{ cm}^2 \approx 13,10 \text{ cm}^2$
 $A_3 = A_2$
(d) $d = 2,75 \cdot \sqrt{3} \text{ cm} \approx 4,76 \text{ cm}$
4. Es gibt mehrere Möglichkeiten: z.B. über Steigungsdreiecke, Vektoren, Geradengleichungen.
Antwort: Nein, aber ziemlich knapp.
5. Z.B. über Steigungsdreiecke oder die Länge von Strecken.
Antwort: Um 50%.
6. $E^*(2,6|3,1)$.
7. $d = 6,3 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \approx 8,91 \text{ cm}$
8. (b) $u = 14 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \approx 19,80 \text{ cm}$
9. $x = 1,24 r$
10. (a) $[FG]$ ist genauso lang wie die Diagonale $[AC]$ des Quadrates $ABCD$.
Also gilt: $a\sqrt{2} = 3,2 \Rightarrow a = \frac{3,2}{\sqrt{2}} \approx 2,26$.
Für die Zeichnung: $\overline{AF} = \overline{KB} = 2a \text{ cm} \approx 5,52 \text{ cm}$.

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck



(b) $A(ABCD) = a^2 \text{ cm}^2 = \left(\frac{3,2}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ cm}^2 = 5,12 \text{ cm}^2$

- (c) • Wegen $\overline{CE} = 0,5 \cdot \overline{AC}$ müsste gelten:
 $2a = 1,5a\sqrt{2} \quad (a \neq 0) \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}.$

Weil aber $\sqrt{2}$ irrational ist, liegt hier ein Widerspruch vor.

Dieser Widerspruch lässt sich auch durch Vergrößerung oder Verkleinerung der Figur nicht auflösen: Jede Vergrößerung oder Verkleinerung ist eine winkeltreue Abbildung. Wenn in der Ausgangsfigur keine zwei Winkel maßgleich sind, dann wird dies auch bei einer Größenänderung nicht anders.

- Es wird nur mit Maßzahlen gerechnet.

1. Möglichkeit:

$$A(AEF) = 0,5 \overline{AE} \cdot \overline{FC} = 0,5 \cdot 1,5a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 1,5a^2.$$

2. Möglichkeit:

$$A(AEF) = 0,5 \cdot \overline{AF} \cdot \overline{EM} = 0,5 \cdot 2a \cdot 1,5a = 1,5a^2.$$

3. Möglichkeit:

Das Lot $[FC]$ zelegt das Dreieck AEF in die beiden rechtwinkligen Teildreiecke ACF und CEF .

Das Dreieck ACF ist so groß wie das Quadrat $ABCD$: $A(ACF) = a^2$.

Weil $[FC] \parallel [HN]$ ist, folgt $A(CEF) = A(FCH) = 0,5a^2$.

$$\Rightarrow A(AEF) = a^2 + 0,5a^2 = 1,5a^2.$$

11. Der Umfang beträgt 32 m.

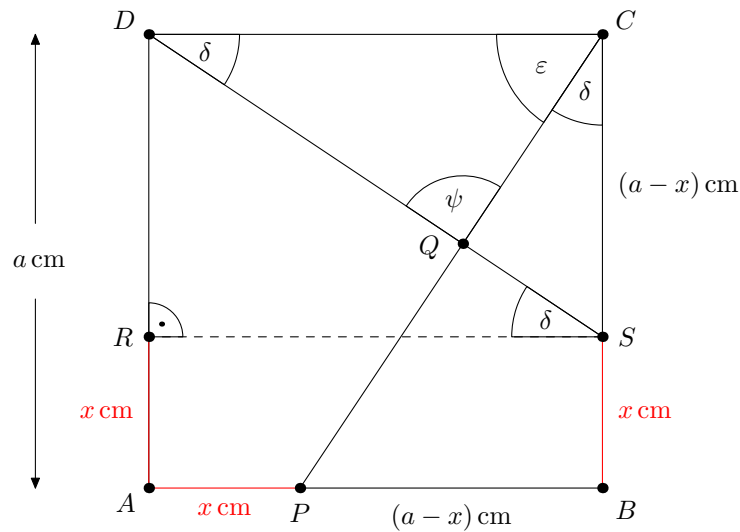
12. Der Treffpunkt ist 17 m vom Brunnen entfernt.

13. $\overline{BC} = 21 \text{ cm}$

14. Die große Pizza hat einen Durchmesser von 32,5 cm.

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

15. (a)



(b) Am Punkt C gilt: $\varepsilon + \delta = 90^\circ$. (*)

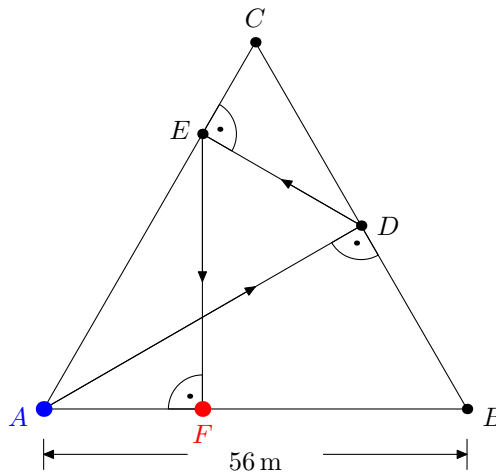
Die rechtwinkligen Dreiecke PBC und RSD sind kongruent, denn es gilt: $\overline{PB} = \overline{RD} = (a-x)$ cm und $\overline{BC} = \overline{RS} = a$ cm.

Also folgt $\sphericalangle DSR = \delta = \sphericalangle SDC$ (Z-Winkel).

Wegen (*) gilt im Dreieck DQC : $\psi = 90^\circ$.

16. (a) Die kürzeste Entfernung eines Punktes zu einer Strecke (Geraden) ist das Lot von diesem Punkt auf die Strecke (Gerade). Aber hier steht z.B. die Strecke $[AD]$ offensichtlich nicht auf der Dreiecksseite $[BC]$ senkrecht.

(b)



(c) Der Punkt D halbiert die Seite $[BC]$. $\Rightarrow \overline{DC} = 28$ m.

Das Dreieck EDC ist ein halbes gleichseitiges Dreieck mit $\overline{EC} = 0,5 \cdot \overline{DC} = 14$ m.

$\Rightarrow \overline{AE} = 56 \text{ m} - 14 \text{ m} = 42 \text{ m}$.

Das Dreieck AFE ist wieder ein halbes gleichseitiges Dreieck: $\overline{AF} = 21$ m.

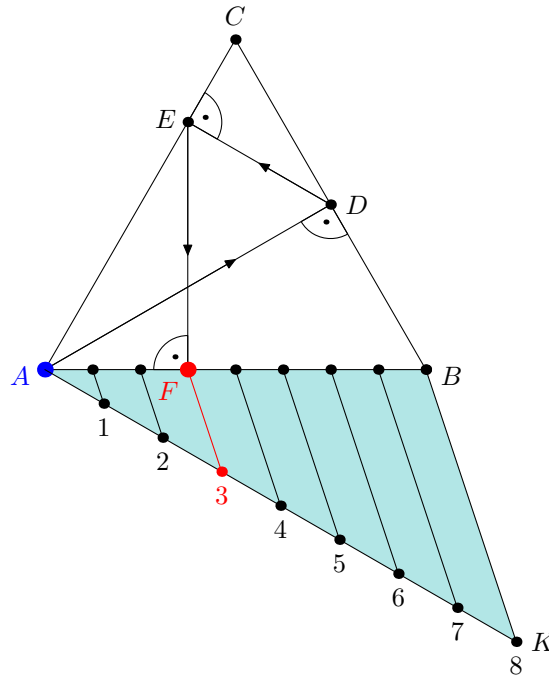
7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

$$\Rightarrow \overline{FB} = 56 \text{ m} - 21 \text{ m} = 35 \text{ m}.$$

$$\frac{21 \text{ m}}{35 \text{ m}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \overline{AF} : \overline{FB} = 3 : 5.$$

- (d) Wähle z.B. eine 8 cm lange Strecke $[AK]$ und teile sie in 8 gleiche Teile. Zeichne die zugehörigen Hilfslinien parallel zu $[BK]$ ein. Der Winkel, den die Strecken $[AK]$ und $[AB]$ einschließen, spielt zwar keine Rolle; du solltest ihn aber wegen der Zeichengenauigkeit nicht zu spitz wählen. Es folgt dann: Der Punkt F teilt die Strecke $[AB]$ im Verhältnis 3 : 8.

Damit gilt: $\overline{AF} : \overline{FB} = 3 : 5$.



17.

Weg a)

Er besteht aus 5 gleich langen Strecken, denn jede Strecke stellt die Diagonale eines rechteckigen Gitterkästchens dar:

$110,5 \text{ m} : 5 = 22,1 \text{ m}$. So lang ist die Diagonale eines Gitterkästchens.

Weg b)

Er enthält 3 gleich lange Rechtecksdiagonalen eines Gitterkästchens. Der Rest dieses Weges ist dreimal so lang wie Breite eines Gitterkästchens. Für die Breite eines Gitterkästchens gilt dann:

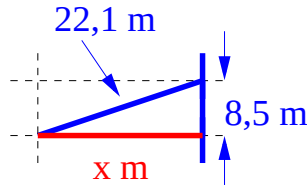
$$(91,8 \text{ m} - 3 \cdot 22,1 \text{ m}) : 3 = 8,5 \text{ m}.$$

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

Weg c)

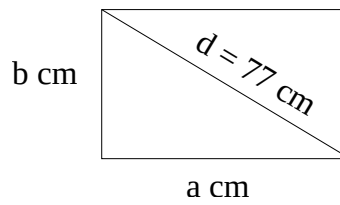
Von einem Gitterkästchen kennst du nun dessen Diagonalenlänge (22,1 m) und dessen Breite (8,5 m).

Dann lässt sich mit dem Satz des PYTHAGORAS die Höhe eines Gitterkästchens ausrechnen. (Das Gitterkästchen ist hier aus Platzgründen waagrecht gelegt):



Hier gilt: $x^2 + 8,5^2 = 22,1^2 \Rightarrow x = 20,4$. Für die Länge des Weges c) ergibt sich dann: $3 \cdot 8,5 \text{ m} + 2 \cdot 22,1 \text{ m} + 2 \cdot 20,4 \text{ m} = 110,5 \text{ m}$; d.h. die Wege a) und c) sind gleich lang.

18. (a)



Altes Format:

$$a : b = 4 : 3 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow b = \frac{3}{4} a.$$

Mit dem PYTHAGORAS folgt:

$$77^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{3}{4} a\right)^2 = a^2 \left(1 + \frac{9}{16}\right) = a^2 \cdot \frac{25}{16} \text{ mit } a, b > 0.$$

$$\Leftrightarrow 77 = \frac{5}{4} a \Leftrightarrow a = 61,6 \text{ und } b = 46,2.$$

Neues Format:

$$a : b = 16 : 9 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{16}{9} \Leftrightarrow b = \frac{9}{16} a.$$

Mit dem PYTHAGORAS folgt:

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

$$77^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{9}{16}a\right)^2 = a^2 \left(1 + \frac{81}{256}\right) = a^2 \cdot \frac{337}{256} \text{ mit } a, b > 0.$$

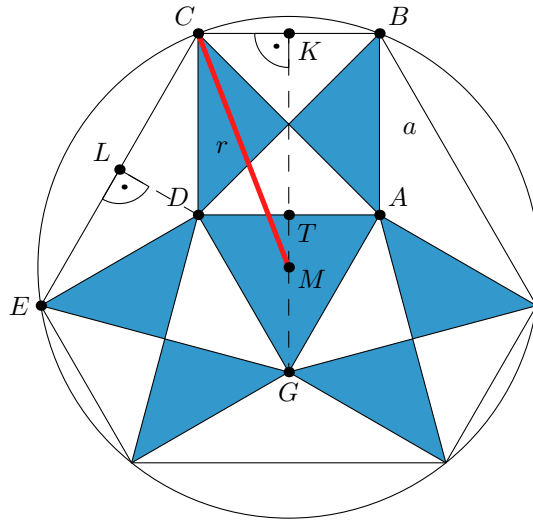
$$\Leftrightarrow a \approx 67 \text{ und } b \approx 36.$$

(b) **Altes Format:** $A_a = 61,6 \text{ cm} \cdot 46,2 \text{ cm} \approx 2846 \text{ cm}^2$

Neues Format: $A_b \approx 67 \text{ cm} \cdot 36 \text{ cm} \approx 2412 \text{ cm}^2$.

Das alte Format weist also bei gleicher Diagonalenlänge einen größeren Flächeninhalt auf.

19. (a)



Das Logo ist mit seinem Umkreis verkleinert dargestellt.

Im gleichseitigen Dreieck ADG stellt die Strecke $[GT]$ die Dreieckshöhe dar. Dann gilt:

$$\overline{MT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow \overline{MK} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3} + a = a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + 1\right). \text{ Weiter gilt: } \overline{CK} = \frac{1}{2} \cdot a.$$

Im rechtwinkligen Dreieck MKC gilt:

$$r^2 = \left[a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + 1\right) \right]^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^2 = a^2 \cdot \left(\frac{3}{36} + \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 + \frac{1}{4}\right).$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{a^2}{3} (4 + \sqrt{3}) \quad (*)$$

$$\Rightarrow r = a \cdot \sqrt{\frac{4 + \sqrt{3}}{3}} \quad a = 4 \text{ cm: } r \approx 5,53 \text{ cm}.$$

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

- (b) Für die Fläche $A_{\odot}$ des Umkreises gilt dann mit (*):

$$A_{\odot} = \frac{\pi}{3} \cdot a^2 \cdot (4 + \sqrt{3}).$$

Das gleichschenklige Dreieck EDC hat die Schenkellänge a . Es wird durch die Höhe $[LD]$ in die beiden kongruenten rechtwinkligen Dreiecke EDL und LDC zerlegt.

Es gilt: $\sphericalangle CDE = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

$\Rightarrow \sphericalangle LED = \sphericalangle CLD = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$. Somit lassen sich die beiden Hälften des Dreiecks EDC zu einem gleichseitigen Dreieck zusammenfügen, das mit dem gleichseitigen Dreieck ADG kongruent ist.

Um den Flächeninhalt des Logos zu berechnen, musst du also zu dem der drei Quadrate den vierfachen des gleichseitigen Dreiecks ADG im Zentrum addieren. Für A_{Logo} ergibt sich dann:

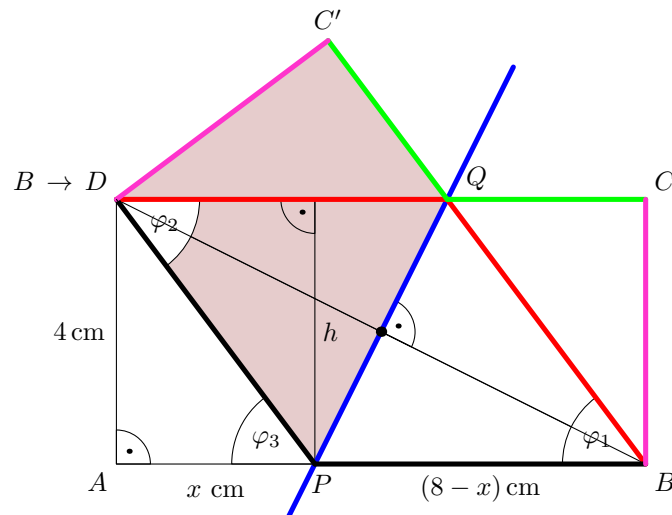
$$A_{Logo} = 3 \cdot a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 3a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(3 + \sqrt{3}).$$

$$\frac{A_{Logo}}{A_{\odot}} = \frac{a^2(3 + \sqrt{3})}{\frac{\pi}{3} \cdot a^2 \cdot (4 + \sqrt{3})} \approx 0,7883 = 78,83\%$$

Knapp 79% des Umkreises werden vom TDK-Logo bedeckt.

20. (a) Klar.

- (b)



- (c) • Jede Faltachse ist gleichzeitig Spiegel- bzw. Symmetrieachse.
 Also gilt: $\triangle PBQ \cong \triangle P Q D \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$.
 Wegen $[AB] \parallel [DC]$ folgt $\varphi_2 = \varphi_3$ (Z-Winkel).
 Also gilt: $\varphi_1 = \varphi_3$ und damit $[BQ] \parallel [PD]$.

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

Weil gleichzeitig $[PB] \parallel [QD]$ gilt, sind die beiden gegenüberliegenden Seiten jeweils parallel: Das Viereck $PBQD$ muss ein Parallelogramm sein.

- Das Parallelogramm $PBQD$ besitzt die Symmetrieachse PQ . Jedes Parallelogramm mit einer Symmetrieachse ist eine Raute.

(d) Es gilt: $\overline{PB} = \overline{PD} = (8 - x) \text{ cm}$.

PYTHAGORAS im Dreieck ABD : $(8 - x)^2 = 4^2 + x^2$.

$$\Leftrightarrow 64 - 16x + x^2 = x^2 + 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

(e) **1. Möglichkeit:** Berechne die Fläche des Teildreiecks PQD .

$$A_{\Delta QPD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DQ} \cdot h$$

Weil jede Raute ein gleichseitiges Viereck ist, gilt $\overline{DQ} = 8 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$.

Also: $A_{\Delta QPD} = \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \right) \text{ cm}^2 = 10 \text{ cm}^2$. Die Raute $PBQD$ ist doppelt so groß wie dieses Teildreieck: $A_{PBQD} = 20 \text{ cm}^2$.

2. Möglichkeit: Schneide vom Rechteck $ABCD$ die beiden kongruenten Dreiecke APD und BCQ ab:

$$A_{PBQD} = (8 \cdot 4) \text{ cm}^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \right) \text{ cm}^2 = 20 \text{ cm}^2$$

(f) Es gilt: $\overline{FQ} = \overline{DQ} - \overline{DF} = 5 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$.

PYTHAGORAS im Dreieck PQF : $\overline{PQ}^2 = (4^2 + 2^2) \text{ cm}^2$

$$\Rightarrow \overline{PQ} = \sqrt{20} \text{ cm}.$$

PYTHAGORAS im Dreieck ABD : $\overline{BD}^2 = (8^2 + 4^2) \text{ cm}^2$

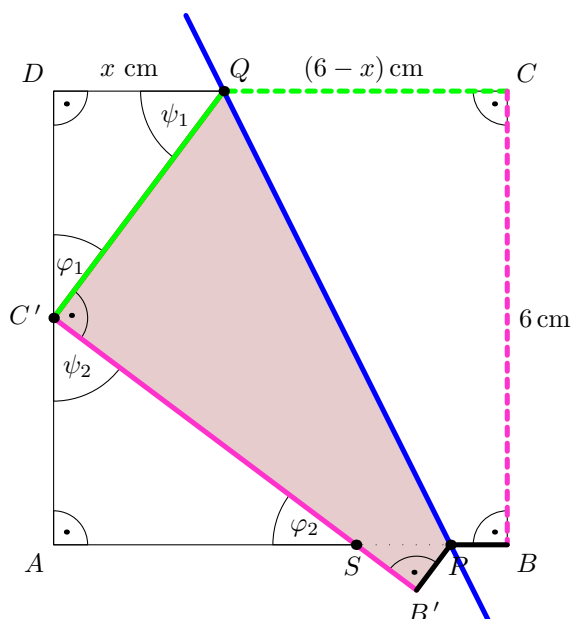
$$\Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{80} \text{ cm}.$$

$$\Rightarrow A_{PBQD} = \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{80} \right) \text{ cm}^2 = 20 \text{ cm}^2.$$

21. (a) Klar.

(b)

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck



- (c) Die Faltachse PQ ist gleichzeitig die Spiegelachse. Jede Achsenspiegelung ist längen- und winkeltreu. Es gilt also $\overline{CQ} = \overline{QC'} = (6 - x)$ cm.

PYTHAGORAS im Dreieck $C'QD$: $\overline{C'Q}^2 = \overline{C'D}^2 + \overline{DQ}^2$:
 $(6 - x)^2 = x^2 + 3^2 \Leftrightarrow 36 - 12x + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow x = 2,25$

(d) $\overline{DQ} : \overline{DC'} = 2,25 : 3 = 0,75 = \frac{3}{4} = 3 : 4$.

- (e) Im Dreieck $C'QD$ gilt: $\varphi_1 + \psi_1 = 90^\circ$ (*).

Am Scheitel C' gilt: $\varphi_1 + 90^\circ + \psi_2 = 180^\circ \Rightarrow \varphi_1 + \psi_2 = 90^\circ$.

Mit (*) folgt $\psi_2 = \psi_1$. Somit stimmen die beiden rechtwinkligen Dreiecke $C'QD$ und ASC' in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck müssen die beiden Dreiecke auch im Maß des dritten Innenwinkels übereinstimmen: $\varphi_1 = \varphi_2$. Also gilt: $\triangle C'QD \sim \triangle ASC'$.

Im Dreieck $SB'P$ gilt: $\sphericalangle B'SP = \varphi_2$ (Scheitelwinkel) $= \varphi_1$. Die beiden Dreiecke ASC' und $SB'P$ sind rechtwinklig. Also sind sie zueinander ähnlich. Also sind alle drei Dreiecke zueinander ähnlich.

- (f) In der Lösung (d) wurde gezeigt, dass $\overline{DQ} : \overline{DC'} = 3 : 4$ gilt.

Wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $C'QD$ und ASC' muss ebenso $\overline{AC'} : \overline{AS} = 3 : 4$ gelten.

Also: $\frac{3}{\overline{AS}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \overline{AS} = 4$ cm.

(g) $A_{\triangle ASC'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AS} \cdot \overline{AC'} = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 3) \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$.

- (h) PYTHAGORAS im Dreieck ASC' :

$\overline{C'S}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{AC'}^2$: $\overline{C'S}^2 = 3^2 \text{ cm}^2 + 4^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow \overline{C'S} = 5 \text{ cm}$

(i) $\overline{SB'} = \overline{C'B'} - \overline{C'S}$

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

Wegen $\overline{C'B'} = \overline{CB} = 6 \text{ cm}$ folgt: $\overline{SB'} = 6 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 1 \text{ cm}$.

Wie vorher in (e) dargelegt, gilt $\triangle ASC' \sim \triangle SB'P$.

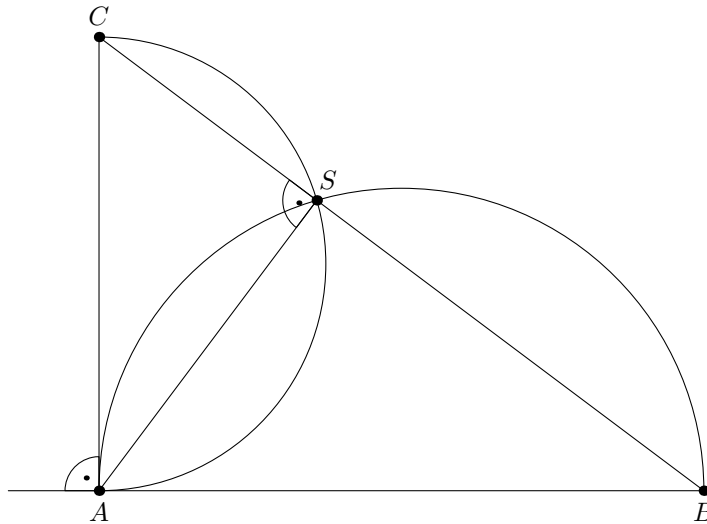
Weiter gilt: $\frac{\overline{SB'}}{\overline{AS}} = \frac{1}{4}$.

Der Streckungsfaktor k beträgt hier also $\frac{1}{4}$.

$$A_{\triangle SB'P} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot A_{\triangle ASC'} \Rightarrow A_{\triangle SB'P} = \frac{1}{16} \cdot 6 \text{ cm}^2 = 0,375 \text{ cm}^2$$

$$\frac{A_{\triangle SB'P}}{A_{ABCD}} = \frac{0,375 \text{ cm}^2}{36 \text{ cm}^2} \approx 0,0104 = 1,04\%.$$

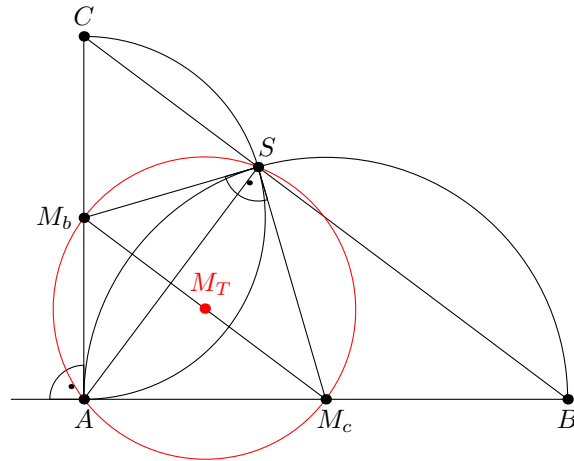
22. (a)



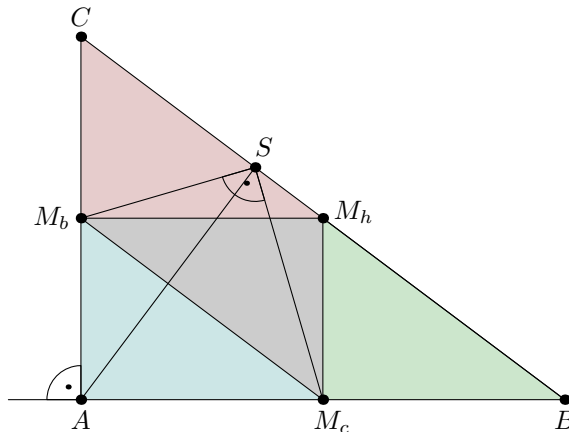
- (b)
- Der Punkt S liegt auf dem THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AC]$. Also gilt: $\sphericalangle CSA = 90^\circ$.
 - Der Punkt S liegt aber auch auf dem THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$.
 $\Rightarrow \sphericalangle ASB = 90^\circ$.
 Also hat der Winkel CSB das Maß 180° . Daher liegt der Punkt S auf der Hypotenuse $[BC]$.

23. (a)

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck



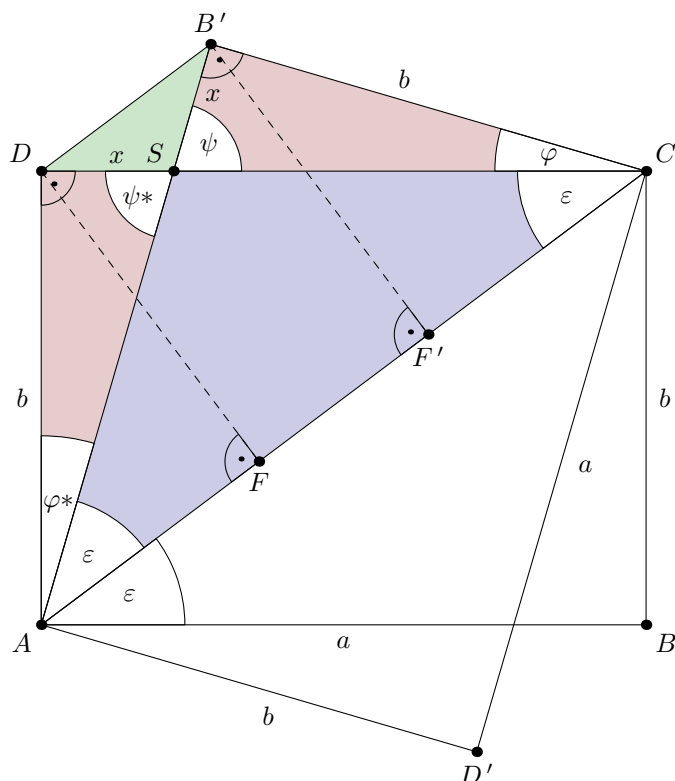
- (b)
- Es gilt: $\overline{M_bS} = \overline{M_bA} = \text{Radius des kleinen Halbkreises}$ und $\overline{M_cS} = \overline{M_cA} = \text{Radius des großen Halbkreises}$.
Wenn in einem Viereck zwei Paare benachbarter Seiten jeweils gleich lang sind, dann ist dieses Viereck ein achsensymmetrischer Drachenviereck.
 - Die beiden kongruenten rechtwinkligen Dreiecke AM_cM_b und M_bM_cS besitzen die gemeinsame Hypotenuse $[BC]$. Diese Hypotenuse muss daher der Durchmesser des THALES-Kreises sein, der auch durch die Punkte A und S verläuft. Damit ist dieser THALES-Kreis der Umkreis des Drachenvierecks AM_cSM_b . Sein Mittelpunkt M_T ist der Mittelpunkt der Diagonalen $[M_cM_b]$.
- (c)
-



- Mit Hilfe der drei Mittelpunkte M_c , M_h und M_b der Seiten des Dreiecks ABC lässt sich dieses Dreieck in vier kongruente Teildreiecke zerlegen. Das halbe Drachenviereck AM_cM_b ist eines dieser Teildreiecke, die jeweils 25% der Fläche des Dreiecks ABC einnehmen. Also nimmt das Drachenviereck AM_cSM_b 50% der Fläche des Dreiecks ABC ein.

24. (a)

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck



- (b) Das Spiegelbild des Rechtecks $ABCD$ ist das kongruente Rechteck $AD'CB'$.
 Also gilt: $\overline{CB} = \overline{CB'} = \overline{AD} = b$.
 Die beiden rechtwinkligen Dreiecke ASD und SCB' stimmen also in der Seitenlänge b überein.
 Weiter gilt: $\psi = \psi^*$ (Scheitelwinkel) $\Rightarrow \varphi = \varphi^*$.
 Damit sind die beiden Dreiecke ASD und SCB' kongruent. Insbesondere gilt dann $\overline{AS} = \overline{CS}$ und $\overline{DS} = \overline{SB'} = x$.

- Einerseits gilt dann im Dreieck SCB' : $\overline{CS} = \sqrt{b^2 + x^2}$
 Andererseits gilt: $\overline{CS} = a - x$

$$\bullet \sqrt{b^2 + x^2} = a - x \quad |^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 + x^2 = a^2 - 2ax + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a^2 - b^2}{2a}$$

(c) $A_{\Delta ACS} = A_{\Delta ACD} - A_{\Delta ASD}$

$$A_{\Delta ACS} = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}bx = \frac{b}{2} \cdot \left(a - \frac{a^2 - b^2}{2a} \right) = \frac{b}{2} \cdot \frac{2a^2 - a^2 + b^2}{2a} = \frac{b}{4a} \cdot (a^2 + b^2)$$

- (d) • Siehe Zeichnung.
 • Aufgrund der Eigenschaften der Achsenspiegelung sind die beiden Dreiecke ACB' und ACD kongruent. Sie besitzen die gemeinsame Hypotenuse $[AC]$. Also sind die beiden Höhen $[DF]$ und $[B'F']$ gleich lang. Das bedeutet, dass die beiden Punkte D und B' den gleichen Abstand zur Strecke $[AC]$ besitzen.
 Also folgt: $[B'D] \parallel [AC]$. Also ist das Viereck $ACB'D$ ein (gleichschenkliges) Trapez.

- (e) Die beiden Dreiecke ACS und DSB' sind zueinander ähnlich; d.h.:

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

$$A_{\Delta DSB'} = k^2 \cdot A_{\Delta ACS} \text{ mit } k = \frac{\overline{DS}}{\overline{CS}}$$

$$k = \frac{x}{a-x} = \frac{a^2-b^2}{2a} : \left(a - \frac{a^2-b^2}{2a}\right) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$A_{\Delta DSB'} = \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 \cdot \frac{b}{4a} \cdot (a^2+b^2) = \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}.$$

(f)

$$\begin{aligned} A_{Trapez} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot b + \frac{b}{4a} \cdot (a^2+b^2) + \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{2b}{4a} \cdot (a^2-b^2) + \frac{b}{4a} \cdot (a^2+b^2) + \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{b}{4a} \cdot \frac{2(a^2-b^2) \cdot (a^2+b^2) + (a^2+b^2)^2 + (a^2-b^2)^2}{a^2+b^2} \\ &= \dots \\ &= \frac{b}{4a} \cdot \frac{4a^4}{a^2+b^2} = ab \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

(g) Es muss gelten: $A_{Trapez} = 0,9 \cdot A_{ABCD}$. Also:

$$ab \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2} = 0,9 \cdot ab \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{a^2+b^2} = 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad 0,1a^2 = 0,9b^2$$

Wegen $a, b > 0$ folgt dann $a = 3 \cdot b$.

(h) Es muss gelten: $ab \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2} = ab \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{a^2+b^2} = 1$.

Ein Bruch hat aber genau dann den Wert 1, wenn Zähler und Nenner gleich sind:

$a^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = 0$ (†). Dann würde das Rechteck zur Strecke entarten; ein solches Trapez gibt es nicht.

(i) Es gilt: $\sphericalangle DCA = \varepsilon$ (Z-Winkel).

Weiter gilt: $\sphericalangle BAS = \psi = 2 \cdot \varepsilon$ (F-Winkel).

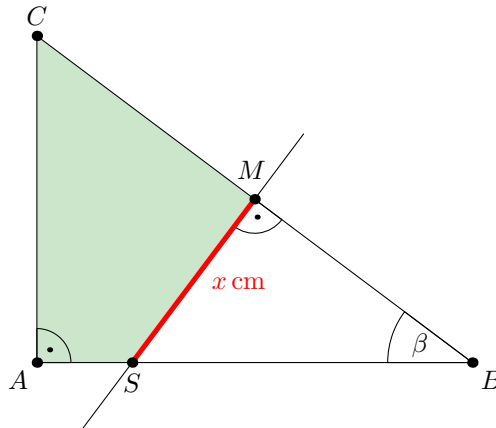
Ebenso folgt: $\varphi = 90^\circ - 2\varepsilon$ (Innenwinkelsumme im Dreieck SCB').

Damit das Trapez $ACB'D$ zum Rechteck wird, muss $\varphi + \varepsilon = 90^\circ$ gelten.

Das bedeutet: $90^\circ - 2\varepsilon + \varepsilon = 90^\circ \Leftrightarrow \varepsilon = 0^\circ$. Wieder würde das Rechteck zur Strecke entarten; d.h. ein solches Trapez gibt es nicht.

25. (a)

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck



In beiden Dreiecken ABC und SBM kommt der Innenwinkel mit dem Maß β vor. Zudem sind beide Dreiecke rechtwinklig. Also müssen beide Dreiecke auch im Maß des dritten Innenwinkels übereinstimmen; also gilt $\triangle SBM \sim \triangle ABC$.

- (b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen.

PYTHAGORAS im Dreieck ABC : $\overline{BC}^2 = 7,2^2 + 5,4^2 \Rightarrow \overline{BC} = 9 \text{ cm}$
 $\Rightarrow \overline{BM} = 4,5 \text{ cm}$.

Vierstreckensatz: $\frac{\overline{MS}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} : \frac{x}{4,5} = \frac{5,4}{7,2} \Leftrightarrow x = 3,375$.

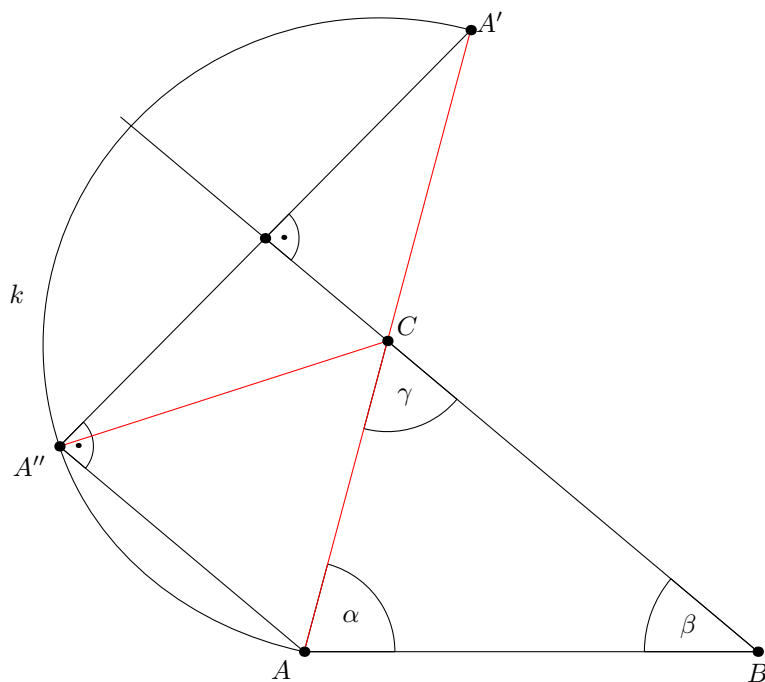
- (c) Berechne den Ähnlichkeitsfaktor: Z.B. $k = \frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{4,5}{7,2} = 0,625$.

Dann gilt $\frac{A_{\triangle SBM}}{A_{\triangle ABC}} = k^2 = 0,625^2 = 0,390625$.

Das bedeutet: Das Dreieck SBM nimmt 39,0625% der Fläche des Dreiecks ABC ein. Dann nimmt das Viereck $ASMC$ $100\% - 39,0625\% = 60,9375\%$ der Fläche des Dreiecks ABC ein.

26. (a)

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

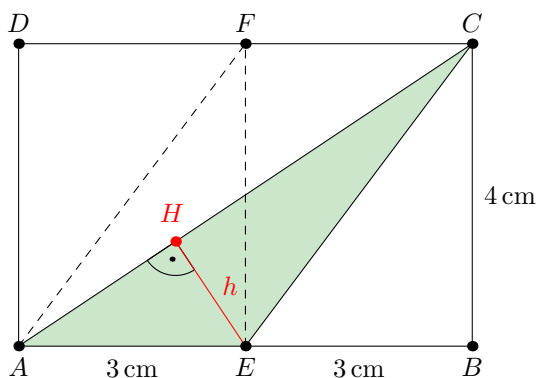


- Siehe Zeichnung.
- Siehe Zeichnung.

(b) Begründe:

- Jede Punktspiegelung ist längentreu. Also gilt: $\overline{CA} = \overline{CA'}$.
Jede Achsenspiegelung ist längentreu. Also gilt: $\overline{CA'} = \overline{CA''}$.
 $\Rightarrow \overline{CA} = \overline{CA''}$. Also ist das Dreieck ACA'' gleichschenkelig.
- Es gilt: $\overline{CA} = \overline{CA''} = \overline{CA'}$. Das bedeutet, dass die drei Punkte A , A' und A'' vom Punkt C gleich weit entfernt sind. Folglich müssen die Punkte A , A' und A'' auf einer Kreislinie k mit dem Mittelpunkt C liegen. Diese Kreislinie ist nun der THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AA']$. Also ist das Dreieck $AA''A'$ wegen $A'' \in k$ rechtwinklig.

27. (a)



7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

(b) **1. Möglichkeit:**

Die Dreiecke AEC und AEF haben die gleiche Grundlinie $[AE]$ und gleichlange Höhen $[BC]$ bzw. $[EF]$. Also besitzen sie den gleichen Flächeninhalt.

Das Dreieck AEF nimmt ein Viertel der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ein, also trifft dies auch für das Dreieck AEC zu.

2. Möglichkeit:

$$A_{AEC} = A_{ABCD} - A_{EBC} - A_{ACD}.$$

$$A_{\Delta EBC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2 \text{ und } A_{\Delta ACD} = 6 \cdot 4 \text{ cm}^2 : 2 = 12 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_{AEC} = 24 \text{ cm}^2 - 6 \text{ cm}^2 - 12 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2.$$

Das ist aber ein Viertel der Fläche des Rechtecks $ABCD$.

(c) Der Abstand eines Punktes zu einer Strecke (oder Geraden) ist immer die kürzeste Entfernung dieses Punktes zur Strecke. Sie wird durch das **Lot** vom Punkt E auf die Strecke $[AC]$ dargestellt.

Wir wissen schon, dass $A_{\Delta AEC} = 6 \text{ cm}^2$ gilt.

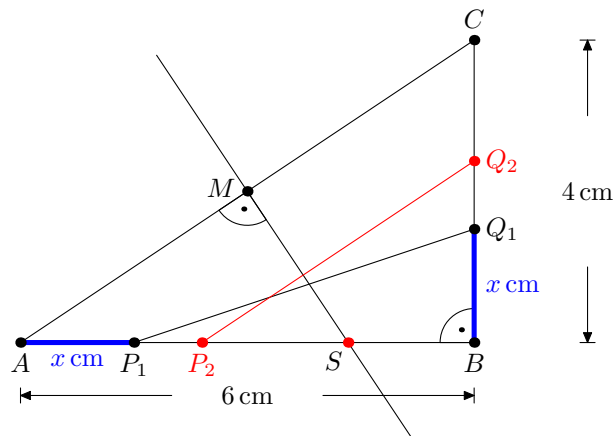
Der gesuchte Abstand h ist die Höhe im Dreieck AEC mit der Grundlinie $[AC]$:

$$A_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h.$$

$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 4^2} \text{ cm} = \sqrt{52} \text{ cm}.$$

$$6 \text{ cm}^2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{52} \text{ cm} \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{12 \text{ cm}^2}{\sqrt{52} \text{ cm}} \approx 1,66 \text{ cm}.$$

28. (a)



(b) Siehe Zeichnung.

(c) Auf der Kathete $[BC]$ kann x nicht länger als 4 cm. werden. Für $x = 0$ und $x = 4$ gibt es kein Viereck. Also: $x \in]0; 4[_{\mathbb{R}}$.

(d) • Ein Viereck, darf sich dann Trapez nennen, wenn es zwei parallele Seiten besitzt. In der Zeichnung ist das Trapez AP_2Q_2C vorhanden. Du siehst, dass die Dreiecke

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

P_2BQ_2 und ABC dann zueinander ähnlich sind. Wende den Vierstreckensatz an, wobei die Variable x mit eingebunden sein muss:

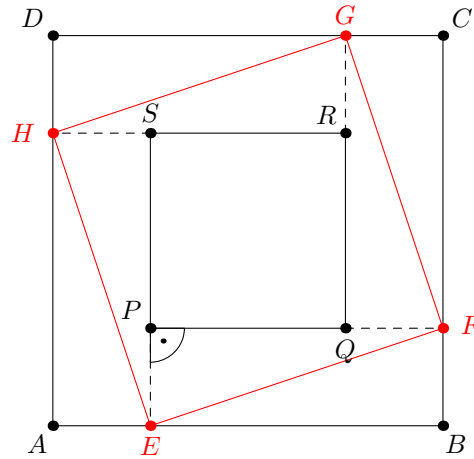
$$\frac{6-x}{x} = \frac{6}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 24 - 4x = 6x \quad \Leftrightarrow \quad 24 = 10x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,4.$$

- Siehe Zeichnung.
- $A_{\Delta P_2BQ_2} = 0,5 \cdot 3,6 \cdot 2,4 \text{ cm}^2 = 4,32 \text{ cm}^2$.
 $A_{\Delta ABC} = 0,5 \cdot 6 \cdot 4 \text{ cm}^2 = 12 \text{ cm}^2$.
 $A_{AP_2Q_2C} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta P_2BQ_2} = 12 \text{ cm}^2 - 4,32 \text{ cm}^2 = 7,68 \text{ cm}^2$.
- $\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 4^2} \text{ cm} = \sqrt{52} \text{ cm} (\approx 7,21 \text{ cm})$.
 $\overline{P_2Q_2} = \sqrt{3,6^2 + 2,4^2} = \sqrt{18,72} \text{ cm} (\approx 4,33 \text{ cm})$.

$$A_{AP_2Q_2C} = \frac{\sqrt{52} \text{ cm} + \sqrt{18,72}}{2} \cdot h = 7,68 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad h \approx 1,33 \text{ cm}.$$

- (e) $A(x) = A_{AP_nQ_nC} = 0,5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} - 0,5 \cdot \overline{P_nB} \cdot \overline{BQ_n}$
 $A(x) = 12 \text{ cm}^2 - 0,5 \cdot (6-x) \cdot x \text{ cm}^2 = (12 - 3x + 0,5x^2) \text{ cm}^2$.
 Also gilt: $A(x) = (0,5x^2 - 3x + 12) \text{ cm}^2$.
- (f) $A(x) = (0,5x^2 - 3x + 12) \text{ cm}^2 = 0,5 \cdot (x^2 - 6x + 3^2 - 9 + 24) \text{ cm}^2$
 $= 0,5 \cdot [(x-3)^2 + 15] \text{ cm}^2 = [-0,5 \cdot (x-3)^2 + 7,5] \text{ cm}^2$.
 $x = 3$ liefert $A_{\min} = 7,5 \text{ cm}^2$.
- (g) Die Symmetrieachse müsste entweder durch zwei Eckpunkte des fraglichen Vierecks oder durch zwei seiner Seitennmittelpunkte verlaufen. Der Verlauf durch zwei Eckpunkte ist offensichtlich ausgeschlossen.
 Im anderen Fall müsste die Symmetrieachse die gemeinsame Mittelsenkrechte zweier Vierecksseiten sein. Diese Vierecksseiten müssten dann aber zueinander parallel sein. Also wäre das gesuchte achsensymmetrische Viereck ein gleichschenkliges Trapez.
 Da es aber nur ein Trapez, nämlich AP_2Q_2C , gibt und $\overline{AP_2} = 2,4 \text{ cm} \neq \overline{CQ_2} = 1,6 \text{ cm}$ gilt, gibt es unter allen Vierecken AP_nQ_nC kein achsensymmetrisches.

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck



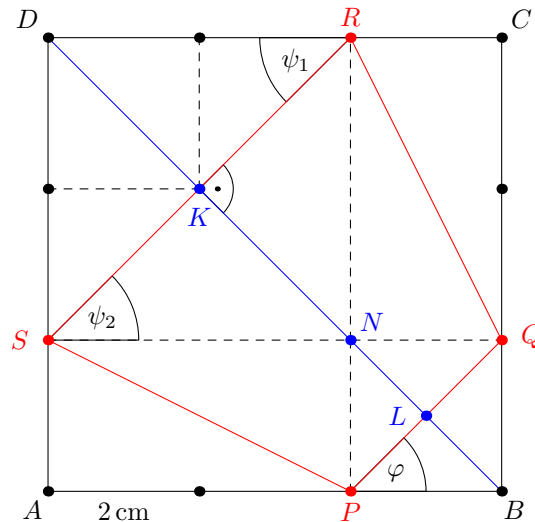
- Es gilt: $\overline{AB} = 81,6 \text{ cm} : 4 = 20,4 \text{ cm}$ und $\overline{PQ} = 34 \text{ cm} : 4 = 8,5 \text{ cm}$.
Dann folgt: $\overline{QF} = \overline{PE} = (20,4 \text{ cm} - 8,5 \text{ cm}) : 2 = 5,95 \text{ cm}$.
Weiter folgt: $\overline{PF} = 8,5 \text{ cm} + 5,95 \text{ cm} = 14,45 \text{ cm}$.
 $\triangle EFP$: $\overline{EF}^2 = A_{EFGH} = \overline{PF}^2 + \overline{PE}^2 = (14,45 \text{ cm})^2 + (5,95 \text{ cm})^2$
 $\Rightarrow A_{EFGH} = 244,205 \text{ cm}^2$.

- **1. Möglichkeit:** $A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{\triangle EBF}$
 $A_{EFGH} = (20,4 \text{ cm})^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45 \text{ cm} \cdot 5,95 \text{ cm} = 244,205 \text{ cm}^2$.

- **2. Möglichkeit:** $A_{EFGH} = A_{PQRS} + 4 \cdot A_{\triangle EFP}$
 $A_{EFGH} = (8,5 \text{ cm})^2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45 \text{ cm} \cdot 5,95 \text{ cm} = 244,205 \text{ cm}^2$.

Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

30. (a)



- (b) Das Dreieck SRD ist gleichschenkelig-rechtwinklig. $\Rightarrow \psi_1 = 45^\circ$.
Dann gilt auch $\psi_2 = 45^\circ$ (Z-Winkel) .

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

Das Dreieck PBQ ist gleichschenkelig-rechtwinklig. $\Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

Also folgt: $[PQ] \parallel [SR]$.

Das Viereck $PQRS$ ist ein (achsensymmetrisches) Trapez..

(c) •

Für die Trapezfläche A gilt: $A_{PQRS} = \frac{\overline{SR} + \overline{PQ}}{2} \cdot \overline{KL}$.

Die Strecke $[SR]$ ist die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 4 cm.

Also folgt: $\overline{SR} = 4\sqrt{2}$ cm.

$[DK]$, $[NB]$ und $[PQ]$ sind jeweils Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge 2 cm.

Also folgt: $\overline{DK} = \overline{NB} = \overline{PQ} = 2\sqrt{2}$ cm und $\overline{LB} = \sqrt{2}$ cm.

Im Quadrat $ABCD$ gilt: $\overline{DB} = 6\sqrt{2}$ cm.

Damit gilt: $\overline{KL} = 6\sqrt{2}$ cm $- 2\sqrt{2}$ cm $- \sqrt{2}$ cm $= 3\sqrt{2}$ cm.

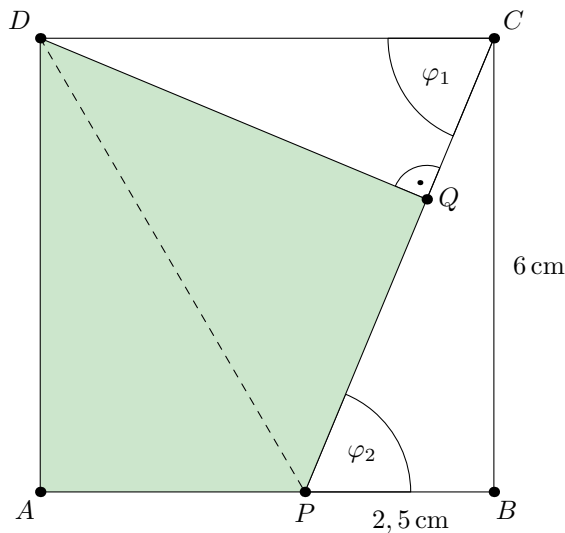
Und damit gilt: $A_{PQRS} = \frac{4\sqrt{2} \text{ cm} + 2\sqrt{2} \text{ cm}}{2} \cdot 3\sqrt{2} \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$.

- Das Trapez $PQRS$ ist von vier rechtwinkligen Dreiecken eingeschlossen. Zwei von ihnen sind kongruent.

$$A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta APS} - A_{\Delta SRD} - A_{\Delta PBQ}.$$

$$A_{PQRS} = 36 \text{ cm}^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \text{ cm}^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \text{ cm}^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \text{ cm}^2 = 18 \text{ cm}^2.$$

31. (a)



- (b) Die Kathete $\overline{AD}$ im rechtwinkligen Dreieck APD besitzt die Länge a . Die Hypotenuse $\overline{DC}$ im rechtwinkligen Dreieck DQC hat ebenfalls die Länge a . Weil aber in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite darstellt, gilt: $\overline{DQ} < a =$

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

$\overline{AD}$. Somit kann die Diagonale $\overline{DP}$ im Viereck $APQD$ nicht Symmetrieachse dieses Vierecks sein.

- (c) In den beiden rechtwinkligen Dreiecken DQC und PBC gilt: $\varphi_1 = \varphi_2$ (Z-Winkel). Damit stimmen die beiden Dreiecke paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck stimmen diese beiden Dreiecke in allen drei Innenwinkelmaßen überein. Also gilt: $\Delta PBC \sim \Delta DQC$.
- (d) Strategie: $A_{APQD} = A_{ABCD} - (A_{\Delta PBC} + A_{\Delta DQC})$.

$$A_{\Delta PBC} = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 6 \text{ cm}^2 = 7,5 \text{ cm}^2.$$

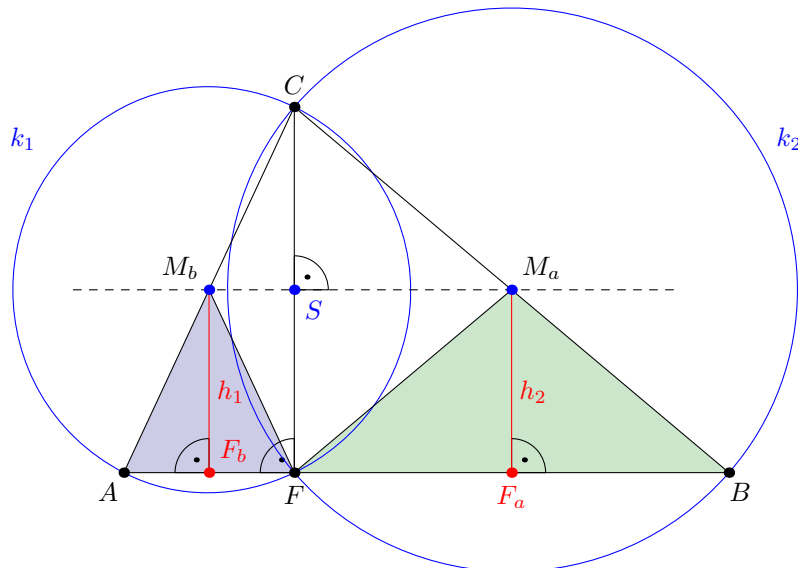
Wegen (c) folgt: $A_{\Delta DQC} = k^2 \cdot A_{\Delta PBC}$ mit dem Streckungsfaktor k .

$$\text{Mit } k = \frac{\overline{DC}}{\overline{PC}} \text{ folgt: } k = \frac{6 \text{ cm}}{\sqrt{2,5^2 + 6^2} \text{ cm}} = \frac{12}{13}.$$

$$\Rightarrow A_{\Delta DQC} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot 7,5 \text{ cm}^2 = \frac{144}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2.$$

$$\begin{aligned} A_{APQD} &= 36 \text{ cm}^2 - \left(7,5 \text{ cm}^2 + \frac{144}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2\right) \\ &= 36 \text{ cm}^2 - \frac{313}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2 \\ \frac{A_{APQD}}{A_{ABCD}} &= \frac{6084 - 2374,5}{169 \cdot 36} = \frac{3709,5}{6084} \approx 0,6094 = 60,94\%. \end{aligned}$$

32. (a)



(b) **1. Möglichkeit:**

Im Kreis k_1 gilt: $\overline{M_b A} = \overline{M_b F} = \overline{M_b C}$.

Im Kreis k_2 gilt: $\overline{M_a B} = \overline{M_a F} = \overline{M_a C}$.

Also sind im Viereck $FM_a CM_b$ zweimal zwei benachbarte Seiten gleich lang. Also handelt es sich um ein achsensymmetrisches Drachenviereck.

2. Möglichkeit:

In jedem rechtwinkligen Dreieck fällt dessen Umkreismittelpunkt mit dem Hypotenusenmittelpunkt zusammen. Also sind die Kreismittelpunkte M_a und M_b gleichzeitig die Mittelpunkte der Seiten $a = [BC]$ bzw. $b = [AC]$.

Die Dreiecke FBC und $F_a BM_a$ sind zueinander ähnlich.

Wegen $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM_a}$ folgt dann $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{F_a M_a} = 2 \cdot \overline{F_b M_b}$.

Also gilt: $h_1 = h_2 = \overline{SF} = \overline{FC}$. Daher liegt die Gerade $M_a M_b$ zur Grundlinie $[AB]$ des Dreiecks ABC parallel. Diese Parallele steht damit auf der Diagonalen des Vierecks $FM_a CM_b$ senkrecht. Gleichzeitig halbiert der Punkt S die Höhe $[CF]$ des Dreiecks ABC . Also ist das Viereck $FM_a CM_b$ ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Die in der 2. Möglichkeit verwendete Argumentation ergibt nun Folgendes:

- Die vier Dreiecke $F_a BM_a$, $FF_a M_a$, $FM_a S$ und $SM_a C$ sind kongruent. Das Dreieck FBM_a besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
Also ist das Dreieck FBM_a halb so groß wie das Teildreieck FBC .
- Die vier Dreiecke $AF_b M_b$, $F_b FM_b$, FSM_b und $M_b SC$ sind kongruent. Das Dreieck AFM_b besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
Also ist das Dreieck AFM_b halb so groß wie das Teildreieck AFC .

Also sind die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a zusammen halb so groß wie das Dreieck ABC .

Oder:

Weil der Schnittpunkt S auf halber Höhe im Dreieck ABC liegt, gilt:

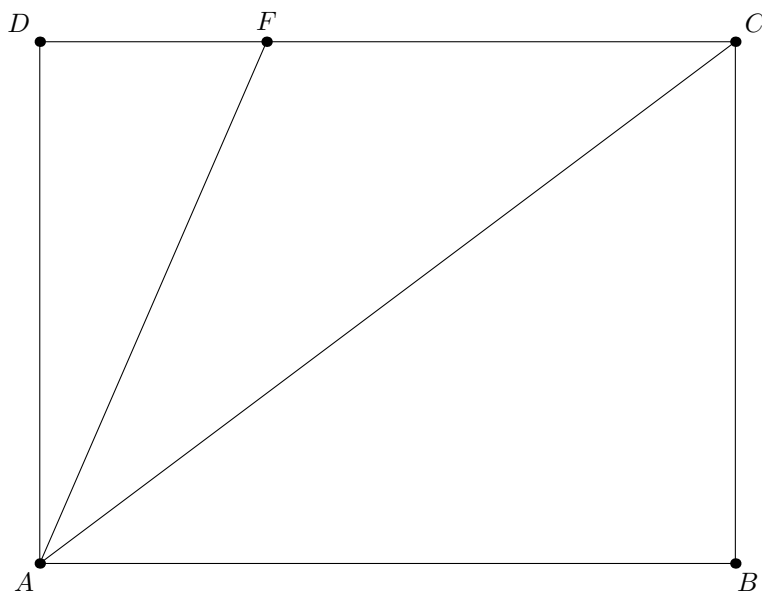
$$A_{\Delta M_b M_a C} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta ABC} \text{ (zentrische Streckung mit } k = \frac{1}{2} \text{)}.$$

Das Viereck $FM_a CM_b$ ist ein achsensymmetrischer Drachen mit der Diagonalen $[M_a M_b]$ als Symmetrieachse.

$$\Rightarrow A_{FM_a CM_b} = 2 \cdot \frac{1}{4} A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta ABC}.$$

Dann muss der Rest, nämlich derjenige, der aus den beiden Dreiecken AFM_b und FBM_a besteht, ebenfalls die Hälfte des Dreiecks ABC einnehmen.

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck



- (b) Im Dreieck ACF gilt die Dreiecksungleichung: Zwei Seitenlängen müssen zusammen mehr ergeben als die Länge der dritten Dreiecksseite; d.h. hier gilt: $\overline{AF} + \overline{FC} > \overline{AC}$.
- (c) $\overline{DF} = 32 \text{ m}$.
 Im Dreieck AFD gilt: $\overline{AF} = \sqrt{32^2 + 69^2} \text{ m} = \sqrt{5785} \text{ m}$.
 Im Dreieck ABC gilt: $\overline{AC} = \sqrt{92^2 + 69^2} \text{ m} = 115 \text{ m}$.
 Wegunterschied: $\sqrt{5785} \text{ m} - 115 \text{ m} \approx 21 \text{ m}$.

8. Berechnungen am Kreis

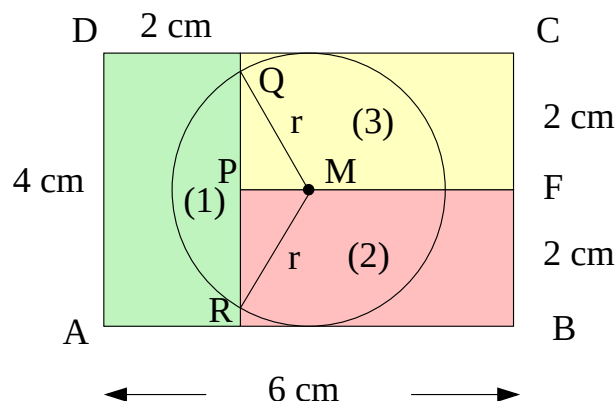
1. (a) ca. 17,91 m
(b) ca. 0,71 m

2. $x = 1,24r$

3. Der Flächeninhalt beträgt 44,33 cm².

- 4.

- (a) Weil alle Rechtecke im Inneren kongruent sind, muss $\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{AE} = 2 \text{ cm} =$ Kreisradius r gelten. $\Rightarrow \overline{BC} = \overline{AD} = 4 \text{ cm}$.



- (b) Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt $A(1)$ des Kreissegmentes (1): (Der Flächeninhalt des Kreises wird später mit $A_{\odot}$ abgekürzt.)
Wegen $\overline{PM} = 1 \text{ cm}$ und $\overline{MQ} = 2 \text{ cm}$ ist das Dreieck PMQ ein halbes gleichseitiges Dreieck. $\Rightarrow \sphericalangle QMR = 120^\circ$
Das Dreieck RMQ ist dann genauso groß wie ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von 2 cm.

$$A(1) = \left(\frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 2^2 \pi - \frac{2^2}{4} \sqrt{3} \right) \text{ cm}^2 \approx 2,46 \text{ cm}^2$$

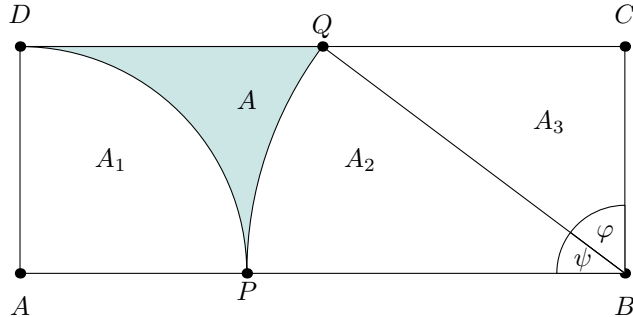
$$A_{\odot} = 2^2 \pi \text{ cm}^2 \approx 12,57 \text{ cm}^2$$

$$\frac{A(1)}{A_{\odot}} \approx \frac{2,46 \text{ cm}^2}{12,57 \text{ cm}^2} \approx 19,57\%$$

8. Berechnungen am Kreis

Und weiter gilt: $\frac{A(2)}{A_{\odot}} = \frac{A(3)}{A_{\odot}} \approx (100\% - 19,57\%) : 2 \approx 40,22\%$

5. (a) Zeichne zuerst den Kreisbogen um den Punkt A mit dem Radius 3 cm. Dadurch erhältst du den Punkt P .
Zeichne dann den zweiten Kreisbogen um den Punkt B mit dem Radius $\overline{BP}$. So erhältst du den Punkt Q .



- (b) Neben dem Kreissektor APD mit dem Flächeninhalt A_1 erzeugt die Hilfslinie $[BQ]$ den Kreissektor BQP mit dem Flächeninhalt A_2 und dazu das Dreieck QBC mit dem Flächeninhalt A_3 .

Es muss gelten: $\overline{AP} = 3 \text{ cm}$ und damit $\overline{BP} = \overline{BQ} = 5 \text{ cm}$.

$$A_1 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2 \cdot \pi \text{ cm}^2 \approx 7,07 \text{ cm}^2$$

$$\triangle BCQ : \cos \varphi = \frac{3}{5} \Rightarrow \varphi \approx 53,13^\circ \Rightarrow \psi \approx 36,87^\circ$$

$$A_2 = \frac{36,87^\circ}{360^\circ} \cdot 5^2 \cdot \pi \text{ cm}^2 \approx 8,04 \text{ cm}^2$$

$$\text{Z.B. PYTHAGORAS im } \triangle QBC: \overline{QC}^2 + 3^2 \text{ cm}^2 = 5^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow \overline{QC} = 4 \text{ cm}.$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$$

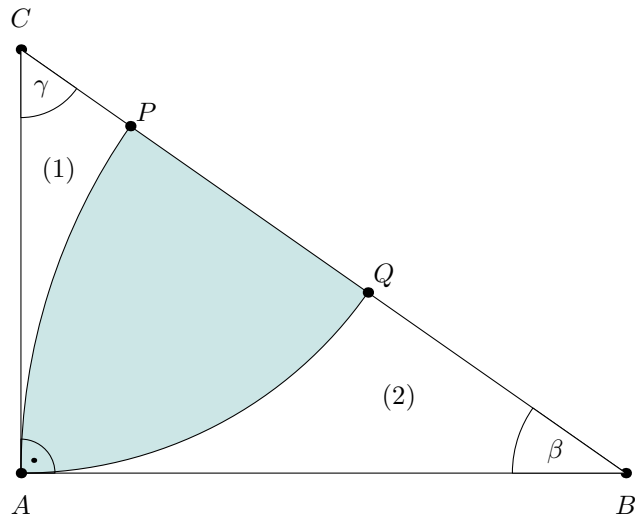
Das Rechteck $ABCD$ hat einen Flächeninhalt von 24 cm^2 .

Für den gesuchten Flächeninhalt A gilt dann: $A = A_{ABCD} - A_1 - A_2 - A_3$

$$A \approx (24 - 7,07 - 8,04 - 6) \text{ cm}^2 \quad A \approx 2,89 \text{ cm}^2.$$

6. (a) • Zeichne die Strecke $[AB]$.
• Trage den rechten Winkel in A , und den Winkel mit dem Maß 35° in B an.
• Der Schnittpunkt der freien Schenkel der beiden Winkel ist C .
- (b)

8. Berechnungen am Kreis



Es gilt: $\gamma = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ und $\tan 35^\circ = \frac{\overline{CA}}{8 \text{ cm}}$.

$\Rightarrow \overline{CA} \approx 5,60 \text{ cm}$.

Für den Inhalt A der grauen Fläche AQP ergibt sich:

$$A_{AQP} = A_{\Delta ABC} - A_{(1)} - A_{(2)} \quad (*)$$

Weiter gilt: $A_{(1)} = A_{\Delta ABC} - A_{\text{Sektor}(35^\circ)}$ und $A_{(2)} = A_{\Delta ABC} - A_{\text{Sektor}(55^\circ)}$

Mit $(*)$ ergibt sich:

$$A_{\Delta ABC} - (A_{\Delta ABC} - A_{\text{Sektor}(35^\circ)}) - (A_{\Delta ABC} - A_{\text{Sektor}(55^\circ)})$$

$$A_{AQP} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta ABC} + A_{\text{Sektor}(35^\circ)} - A_{\Delta ABC} + A_{\text{Sektor}(55^\circ)}$$

$$A_{AQP} = A_{\text{Sektor}(35^\circ)} + A_{\text{Sektor}(55^\circ)} - A_{\Delta ABC} \quad (**)$$

Hinweise:

- Natürlich kann man auch die Inhalte der Teilflächen $A_{(1)}$ und $A_{(2)}$ gleich ausrechnen und diese dann vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC subtrahieren.
- Wie könntest du die obige Gleichung $(**)$ geometrisch deuten?

$$A_{\text{Sektor}(35^\circ)} = \frac{35^\circ}{360^\circ} \cdot 8^2 \cdot \pi \text{ cm}^2 \approx 19,55 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Sektor}(55^\circ)} \approx \frac{55^\circ}{360^\circ} \cdot 5,60^2 \cdot \pi \text{ cm}^2 \approx 15,05 \text{ cm}^2$$

$$A_{ABC} \approx \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 5,60 \text{ cm} = 22,40 \text{ cm}^2$$

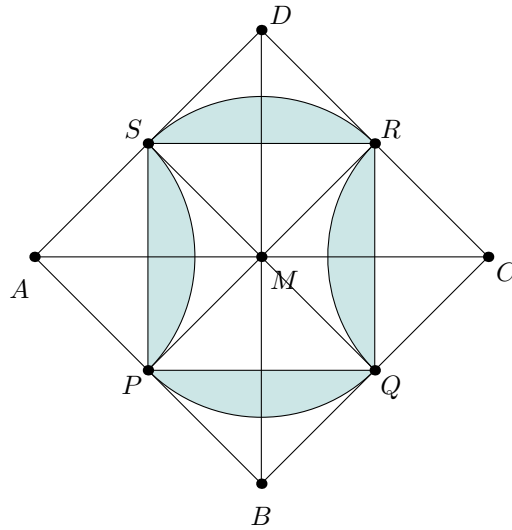
Schließlich ergibt sich: $A_{AQP} \approx (19,55 + 15,05 - 22,40) \text{ cm}^2$

$$\Rightarrow A_{AQP} \approx 12,20 \text{ cm}^2$$

7. (a)
- In jedem Quadrat stehen die beiden Diagonalen aufeinander senkrecht und sie halbieren sich.
Damit kann man das Quadrat $ABCD$ zeichnen.
 - Der Punkt M erzeugt die beiden Kreisbögen oben und unten; die Punkte A und C erzeugen die beiden Kreisbögen links und rechts.

8. Berechnungen am Kreis

(b)



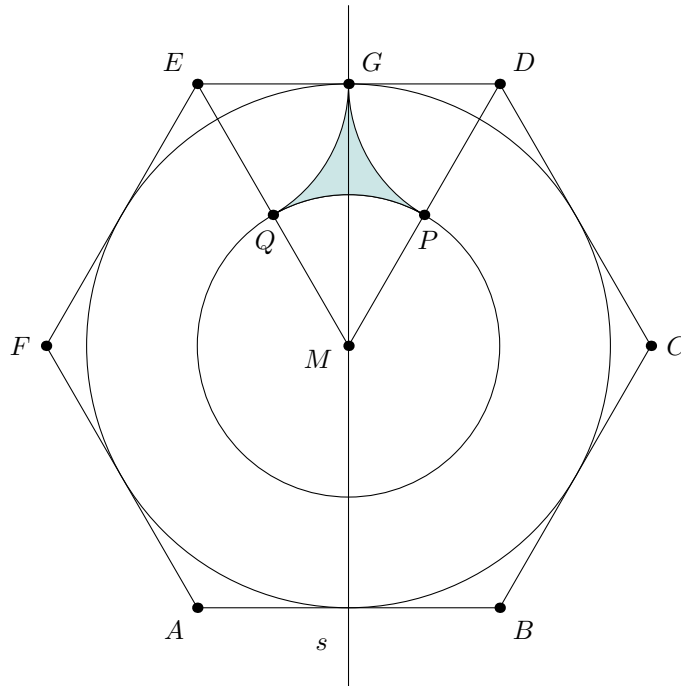
Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat. Mit Hilfe seiner Diagonalen erkennst du, dass das Quadrat $PQRS$ halb so groß wie das Quadrat $ABCD$ ist. Die vier grauen Kreissegmente sind alle kongruent, da sie von kongruenten Kreissektoren mit gleichem Radius und gleichem Öffnungswinkel (90°) stammen.

Zwei dieser Segmente wurden links und rechts aus dem Quadrat $PQRS$ herausgeschnitten, zwei wurden oben und unten an dieses Quadrat angefügt. Somit hat die grau eingefärbte Figur in der Aufgabe den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat $PQRS$; die Figur ist also halb so groß wie das Quadrat $ABCD$. Fritz hat Recht.

8. (a) Am einfachsten erhältst du ein regelmäßiges Sechseck mit einer Seitenlänge von 4 cm, indem du auf einer Kreislinie k den Radius von 4 cm sechsmal abträgst. Damit dieses Sechseck aber mit zwei gegenüber liegenden Seiten (hier: $[ED]$ und $[AB]$) waagrecht liegt, zeichnest du erst die Symmetrieachse s ein und dann wieder durch den Punkt M eine zweite Symmetrieachse, die auf s senkrecht steht. Diese schneidet die Kreislinie k in den Punkten F und C .
Zwei weitere Kreise Radius von 4 cm um F und C schneiden die Kreislinie k in den Punkten E und A bzw. B und D .

(b)

8. Berechnungen am Kreis



Der direkteste Weg der Flächenberechnung führt über den Kreisbogen PQ , so dass ein geschlossener Kreisring entsteht, dem lediglich noch das (grau eingefärbte) Kreisbogendreieck QPG entnommen werden muss.

Jedes regelmäßige Sechseck lässt sich in 6 kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegen. Der große Radius R des Ringes ist so lang wie eine Höhe $[MG]$ des gleichseitigen Dreiecks MDE : $R = \frac{4}{2}\sqrt{3}\text{ cm} = 2\sqrt{3}\text{ cm}$.

Der kleine Radius r des Ringes ist halb so lang wie die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks MDE : $r = 2\text{ cm}$.

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt A_{Ring} des geschlossenen Kreisrings:

$$A_{\text{Ring}} = [(2\sqrt{3})^2 - 2^2 \cdot \pi] \text{ cm}^2$$

Der Flächeninhalt $A_{\text{Kreisbogendreieck}}$ des Kreisbogendreiecks QPG bleibt übrig, wenn man aus dem gleichseitigen Dreieck MDE die drei kongruenten Sektoren EQG , MPQ und DGP mit einem Mittelpunktswinkel von jeweils 60° entfernt:

$$A_{\text{Kreisbogendreieck}} = \left(\frac{4^2}{4} \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \right) \text{ cm}^2 = \left(4\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi \right) \text{ cm}^2$$

Damit ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt:

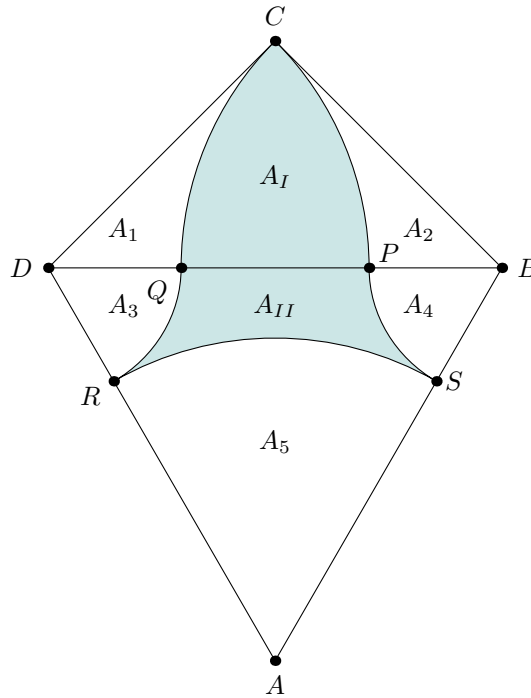
$$A = \left(8\pi - 4\sqrt{3} + \frac{1}{2}\pi \right) \text{ cm}^2 = \frac{17\pi - 8\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 \approx 19,78 \text{ cm}^2$$

Hinweis:

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, den Flächeninhalt des offenen Kreisrings außerhalb des Dreiecks MDE zu berechnen und dann die beiden „Enden“, die im gleichseitigen Dreieck MDE liegen, anzufügen. Doch dies ist offensichtlich wesentlich mühsamer auszurechnen.

8. Berechnungen am Kreis

9. (a) • Zeichne die Dreiecke DBC und ABD .
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ schneidet die Seite $[BD]$ im Punkt Q und der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt D und dem Radius $\overline{DC}$ schneidet die Seite $[BD]$ im Punkt P .
 - Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt D und dem Radius $\overline{DQ}$ schneidet die Seite $[AD]$ im Punkt R und der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BP}$ schneidet die Seite $[AB]$ im Punkt S .
- (b)



$$A_1 = A_{\triangle DBC} - A_{\text{Sektor}BCQ} = A_2$$

$$A_I = A_{\triangle DBC} - (A_1 + A_2) = A_{\triangle DBC} - 2 \cdot (A_{\triangle DBC} - A_{\text{Sektor}BCQ})$$

$$A_I = 2 \cdot A_{\text{Sektor}BCQ} - A_{\triangle DBC}$$

Wie kannst du dieses Ergebnis geometrisch deuten?

Es wird zunächst nur mit Maßzahlen gerechnet: $\overline{BC} = 3\sqrt{2}$

$$A_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9 ; \quad A_{\text{Sektor}BCQ} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot (3\sqrt{2})^2 \pi = 2.25\pi$$

$$\text{Also: } A_I = 4.5\pi - 9 \Rightarrow A_I = \left(\frac{9\pi}{2} - 9 \right) \text{ cm}^2 \quad (\approx 5,14 \text{ cm}^2)$$

Was spielt sich nun unterhalb der Strecke $[DB]$ ab?

$$\overline{DQ} = \overline{BP} = 6 - 3\sqrt{2}$$

$$A_3 = A_4 = \frac{60^\circ}{360^\circ} (6 - 3\sqrt{2})^2 \cdot \pi = \frac{1}{6} (36 - 36\sqrt{2} + 18) \cdot \pi$$

$$A_3 = A_4 = (9 - 6\sqrt{2}) \cdot \pi \quad (\approx 1,62 \text{ cm}^2)$$

$$\overline{AR} = \overline{AS} = 6 - (6 - 3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$$

$$A_5 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot \pi = \frac{18}{6} \cdot \pi = 3\pi \quad (\approx 9,42 \text{ cm}^2)$$

8. Berechnungen am Kreis

$$A_{II} = \frac{6^2}{4}\sqrt{3} - [2 \cdot (9 - 6\sqrt{2})\pi + 3\pi]$$

$$A_{II} = 9\sqrt{3} - (18\pi - 12\sqrt{2}\pi + 3\pi)$$

$$A_{II} = 9\sqrt{3} - (21 - 12\sqrt{2})\pi \quad (\approx 2,93 \text{ cm}^2)$$

Für die Gesamtfläche A des „Fisches“ ergibt sich:

$$A = A_I + A_{II} = \left[\left(\frac{9\pi}{2} - 9 \right) + 9\sqrt{3} - (21 - 12\sqrt{2})\pi \right] \text{ cm}^2$$

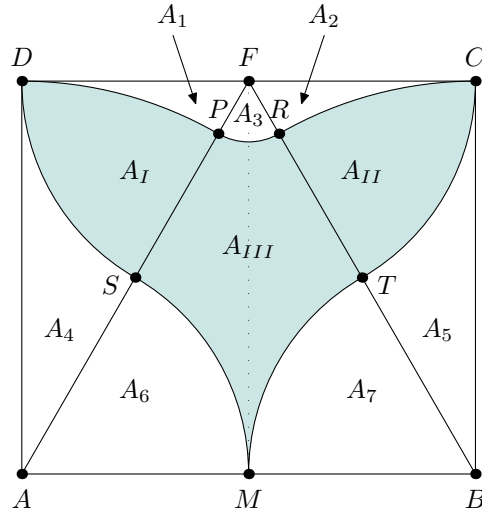
$$A = \left[9(\sqrt{3} - 1) - \pi \cdot \left(21 - 12\sqrt{2} - \frac{9}{2} \right) \right] \text{ cm}^2$$

$$A = \left[9(\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2}\pi(8\sqrt{2} - 11) \right] \text{ cm}^2 \quad (\approx 8,07 \text{ cm}^2)$$

10. (a)
- Zeichne das gleichseitige Dreieck ABF . Die Höhe $[FM]$ dieses Dreiecks ist genau so lang wie die Rechtecksseiten $[AD]$ und $[BC]$.
 - Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{AD}$ schneidet die Seite $[AF]$ im Punkt P und der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ schneidet die Seite $[BF]$ im Punkt R .
 - Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt F und dem Radius $\overline{FP}$ schneidet die Seite $[BF]$ im Punkt R .
 - Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt F und dem Radius $\overline{FD} = 3 \text{ cm}$ schneidet die Seite $[AF]$ im Punkt S , wobei ebenfalls $\overline{FS} = 3 \text{ cm}$ gilt.
 - Nun musst du noch den Kreisbogen um den Punkt A mit dem Radius $\overline{AS}$ zeichnen. Dieser Kreisbogen trifft auf den Punkt M .
Weil die Mittelpunkte F und A der beiden Kreisbögen, die sich im Punkt S treffen, zusammen mit dem Punkt S auf einer Geraden liegen, gehen sie ohne Knick ineinander über.
 - Die entsprechenden Schritte führen rechts der Symmetrieachse MF vom Punkt C über den Punkt T zum Punkt M .

(b)

8. Berechnungen am Kreis



Wir rechnen meist nur mit Maßzahlen:

$$A_{ABCD} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \quad (\approx 31,18 \text{ cm}^2)$$

$$A_{\triangle AFD} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCD} = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{3} \quad (\approx 7,79 \text{ cm}^2)$$

$$A_{\text{Sektor}APD} = A_{\text{Sektor}BCR} = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot (3\sqrt{3})^2 \pi = \frac{9}{4} \pi \quad (\approx 7,07 \text{ cm}^2)$$

$$A_1 = A_2 = A_{\triangle AFD} - A_{\text{Sektor}APD} = \frac{9}{2} \sqrt{3} - \frac{9}{4} \pi \quad (\approx 0,73 \text{ cm}^2)$$

Weiter gilt: $\overline{FP} = 6 - 3\sqrt{3}$.

$$A_3 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot (6 - 3\sqrt{3})^2 \cdot \pi = \frac{36 - 36\sqrt{3} + 27}{6} \pi = \frac{21 - 12\sqrt{3}}{2} \pi$$

$$A_3 = \frac{21}{2} \pi - 6\sqrt{3}\pi \quad (\approx 0,34 \text{ cm}^2)$$

$$A_4 = A_5 = \frac{9}{2} \sqrt{3} - \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2 \cdot \pi = \frac{9}{2} \sqrt{3} - \frac{3}{2} \pi \quad (\approx 3,08 \text{ cm}^2)$$

$$A_6 = A_7 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2 \cdot \pi = \frac{3}{2} \pi \quad (\approx 4,71 \text{ cm}^2)$$

$$A_I = A_{II} = A_{\triangle AFD} - A_1 - A_4$$

$$A_I = \frac{9}{2} \sqrt{3} - \left(\frac{9}{2} \sqrt{3} - \frac{9}{4} \pi \right) - \left(\frac{9}{2} \sqrt{3} - \frac{3}{2} \pi \right)$$

$$A_I = A_{II} = \frac{15}{4} \pi - \frac{9}{2} \sqrt{3} \quad (\approx 3,99 \text{ cm}^2)$$

8. Berechnungen am Kreis

$A_{III} = A_{\triangle ABF} - A_3 - (A_6 + A_7)$, wobei $A_6 = A_7$ gilt.

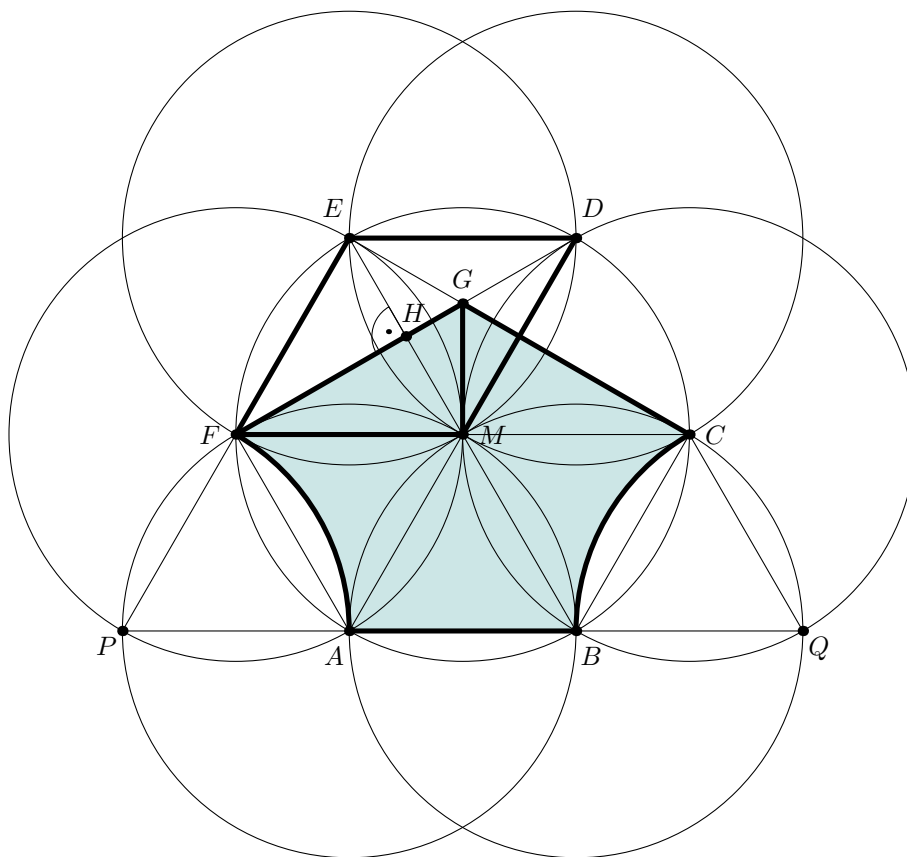
$$A_{III} = 9\sqrt{3} - \left(\frac{21}{2} \pi - 6\sqrt{3} \pi \right) - 2 \cdot \frac{3}{2} \pi = 9\sqrt{3} - \frac{27}{2} \pi + 6\sqrt{3} \pi \quad (\approx 5,83 \text{ cm}^2)$$

Damit ergibt sich als Flächeninhalt A der grau getönten Figur:

$$A = 2 \cdot A_I + A_{III} = 2 \cdot \left(\frac{15}{4} \cdot \pi - \frac{9}{2} \sqrt{3} \right) + \left(9\sqrt{3} - \frac{27}{2} \pi + 6\sqrt{3} \pi \right)$$

$$A = 6\pi(\sqrt{3} - 1) \text{ cm}^2 \approx 13,80 \text{ cm}^2$$

11. (a) Die Strecken $[AB]$, $[BC]$, $\dots$, $[FA]$ sind jeweils 3 cm lang. Also sind die Dreiecke ABM , BCM , $\dots$, FAM gleichseitig und kongruent. Daher haben die Winkel BAF , $CBA, \dots$, EFA alle das Maß 120° . Also ist das Sechseck $ABCDEF$ regelmäßig.
- (b)



Das Viereck $FMDE$ ist aus den beiden kongruenten gleichseitigen Dreiecken FME und MDE zusammengefügt. Also ist das Viereck $FMDE$ eine Raute, deren Diagonalen $[FD]$ und $[EM]$ im Punkt H aufeinander senkrecht stehen. Im Dreieck MDE liegt die Strecke $[MG]$ auf einer Winkelhalbierenden. Der Punkt G

8. Berechnungen am Kreis

ist gleichzeitig der Schwerpunkt in diesem Dreieck, der alle Seitenhalbierenden (hier: $[EC]$ und $[DF]$) und damit alle Höhen im Verhältnis 2:1 teilt.

$$\text{Also gilt : } \overline{MG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{3} \text{ cm} = \sqrt{3} \text{ cm} \quad (\approx 1,73 \text{ cm}).$$

$$\text{Wegen } \overline{FC} = 6 \text{ cm gilt: } A_{\Delta FCG} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2 = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2 (\approx 5,20 \text{ cm}^2)$$

Die Dreiecke FAM , ABM und BCM sind gleichseitig und kongruent:

$$A_{\Delta ABM} = \frac{3^2}{4} \sqrt{3} \text{ cm}^2 = \frac{9}{4} \sqrt{3} \text{ cm}^2 (\approx 3,90 \text{ cm}^2).$$

Von den beiden Dreiecken FAM und BCM musst du jeweils noch das nach innen gewölbte Kreissegment unter der Sehne $[AF]$ bzw. $[BC]$ subtrahieren.

Diese beiden Segmente sind aus Symmetriegründen zu ihrem jeweils darüber liegenden Kreissegment kongruent.

Somit ergibt sich z.B: $A_{\text{Segment}[AF]} = A_{\text{Sektor}MFA} - A_{\Delta MFA}$.

Alle folgenden Berechnungen erfolgen in der Einheit cm^2 .

$$A_{\text{Segment}(AF)} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2 \pi - \frac{3^2}{4} \sqrt{3} = \frac{3}{2} \pi - \frac{9}{4} \sqrt{3} \quad (\approx 0,82 \text{ cm}^2)$$

Für das Flächenstück A^* , das durch die Strecken $[MF]$ und $[MA]$ sowie durch den nach innen gewölbten Kreisbogen AF begrenzt wird, ergibt sich:

$$A^* = \frac{3^2}{4} \sqrt{3} - \frac{3}{2} \pi + \frac{9}{4} \sqrt{3} = \frac{9}{2} \sqrt{3} - \frac{3}{2} \pi \quad (\approx 3,08 \text{ cm}^2)$$

Für den Inhalt A des grauen Flächenstückes ergibt sich damit:

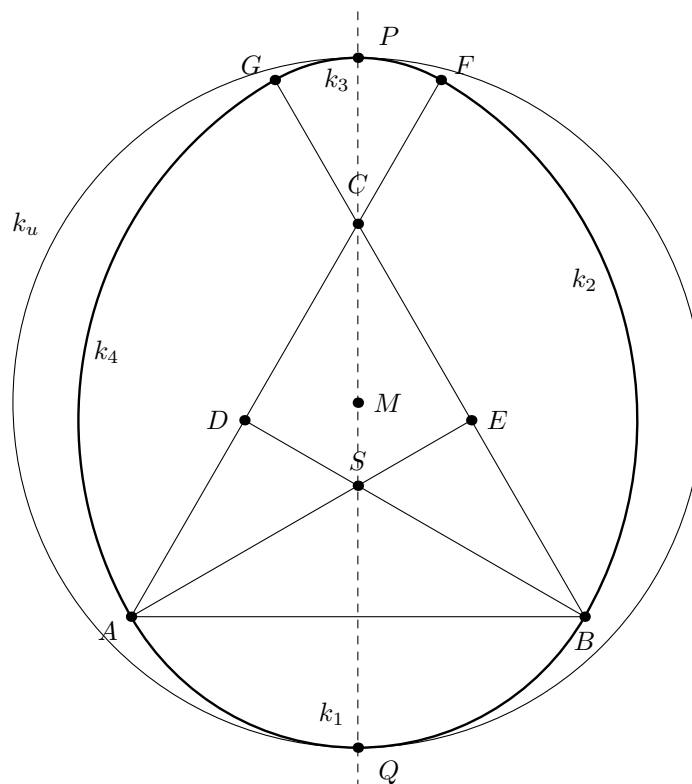
$$A = 3\sqrt{3} + \frac{9}{4} \sqrt{3} + 2 \cdot \left(\frac{9}{2} \sqrt{3} - \frac{3}{2} \pi \right) = \left(3 + \frac{9}{4} + 9 \right) \sqrt{3} - 3\pi.$$

$$A = \left(\frac{57}{4} \sqrt{3} - 3\pi \right) \text{ cm}^2 \quad (\approx 15,26 \text{ cm}^2)$$

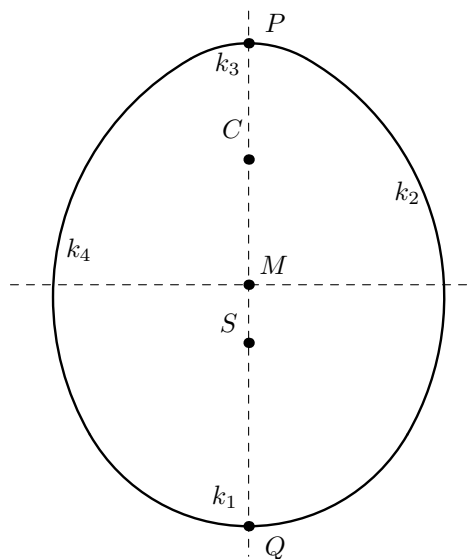
12. (a) • Zeichne das gleichseitige Dreieck ABC . Verlängere dabei die Strecken $[AC]$ und $[BC]$ jeweils über C hinaus.
 $[AE] \cap [BD] = \{S\}$
 Zeichne den Kreisbogen $k_1(S; r_1 = \overline{SA})$.
 $k_2(D; r_2 = \overline{DB}) \cap [AC] = \{F\}$ und $k_3(E; r_3 = \overline{EA}) \cap [BC] = \{G\}$.
 Zeichne den Kreisbogen $k_4(C; r_4 = \overline{CF})$.
 Die Gerade PQ ist die Symmetrieachse der Figur.
 Der Mittelpunkt der Strecke $[PQ]$ ist M .

•

8. Berechnungen am Kreis



(b)



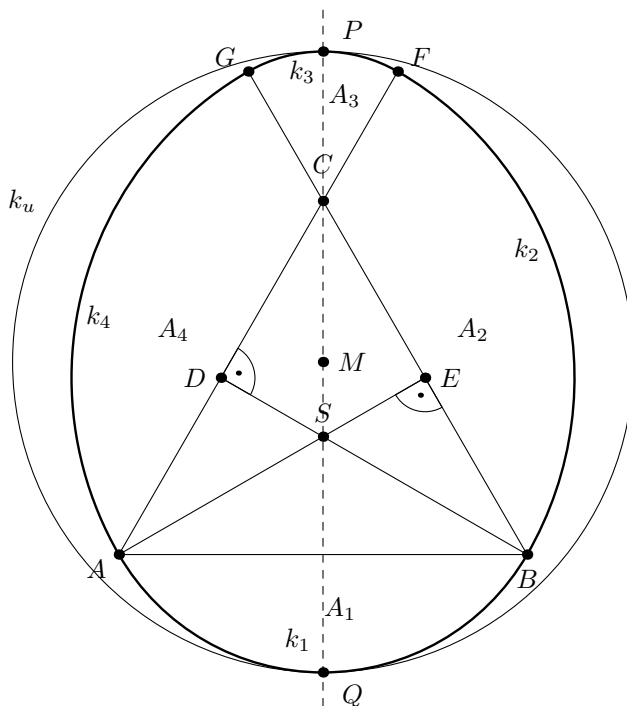
Zwar sind die beiden Kreisbögen k_2 und k_4 kongruent, aber die beiden Kreisbögen k_1 (Radius $\overline{SQ}$) und k_3 (Radius $\overline{CP}$) sind es nicht. Also ist die Senkrechte zur Geraden PQ durch den Punkt M keine Symmetrieachse der Figur. Andere Geraden, die ebenfalls durch M verlaufen, kommen aus dem gleichen Grund nicht als Symmetrieachsen in Betracht.

- (c) Der Schnittpunkt S ist auch der Schwerpunkt des Dreiecks ABC , der die Schwerlinien im Verhältnis $2 : 1$ teilt.

8. Berechnungen am Kreis

Es seien $r_1 = \overline{SA}$, $r_2 = \overline{DB}$ und $r_3 = \overline{CF}$.

Die drei Kreisbögen k_1 , k_2 und k_3 schließen die Kreisteile A_1 , A_2 , A_3 und A_4 außerhalb des gleichseitigen Dreiecks ABC ein, dessen Flächeninhalt kurz A_Δ heißen soll.



$$r_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3} \sqrt{3} \quad ; \quad r_2 = \frac{a}{2} \sqrt{3} = r_4$$

$$A_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{3} \sqrt{3} \right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{3} A_\Delta = \frac{1}{9} a^2 \pi - \frac{1}{3} A_\Delta$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{2} \sqrt{3} \right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} A_\Delta = \frac{3}{16} a^2 \pi - \frac{1}{2} A_\Delta = A_4$$

$$r_3 = \frac{a}{2} \sqrt{3} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} (\sqrt{3} - 1)$$

$$A_3 = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{a}{2} (\sqrt{3} - 1) \right]^2 \cdot \pi - \dots = \frac{1}{6} a^2 \pi - \frac{1}{12} a^2 \sqrt{3} \pi$$

8. Berechnungen am Kreis

$$\begin{aligned}
 A_{Ei} &= \frac{1}{9}a^2\pi - \frac{1}{3}A_{\Delta} + \frac{3}{8}a^2\pi - A_{\Delta} + \frac{1}{6}a^2\pi - \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}\pi + A_{\Delta} \\
 &= a^2\pi \left(\frac{1}{9} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\pi \\
 &= a^2\pi \frac{8+27+12}{72} - a^2\sqrt{3} \cdot \frac{1+\pi}{12} \\
 &= \frac{47}{12}a^2\pi - \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 \cdot (1+\pi)
 \end{aligned}$$

$$A_{Ei} = \frac{a^2}{72} \cdot (47\pi - 6\sqrt{3} - 6\pi\sqrt{3}) \approx 52,31 \text{ cm}^2 \quad \text{für } a = 6 \text{ cm}$$

Für den Durchmesser d_u des Umkreises k_u gilt: $d_u = 2 \cdot r_1 + r_3$.

$$\Rightarrow r_u = \frac{1}{2} \cdot (2r_1 + r_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}a\sqrt{3} + \frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{1}{2}a \right)$$

$$\begin{aligned}
 r_u &= \frac{1}{3}a\sqrt{3} + \frac{1}{4}a\sqrt{3} - \frac{1}{4}a \\
 &= a \left(\frac{7}{12}\sqrt{3} - \frac{1}{4} \right)
 \end{aligned}$$

$$r_u = \frac{1}{12}a(7\sqrt{3} - 3) \approx 4,56 \text{ cm} \quad \text{für } a = 6 \text{ cm}$$

$$r_u^2 = \frac{a^2}{144}(156 - 42\sqrt{3})$$

Für den Flächeninhalt A_u des Umkreises ergibt sich dann:

$$A_u = \frac{a^2}{144}(156 - 42\sqrt{3}) \cdot \pi$$

$$\frac{A_{Ei}}{A_u} = \frac{\frac{a^2}{72} \cdot (47\pi - 6\sqrt{3} - 6\pi\sqrt{3})}{\frac{a^2}{144}(156 - 42\sqrt{3}) \cdot \pi} = 0,7999561666 \dots \approx 0,8 = 80\%$$

Der Verdacht liegt nahe, dass es genau 80% sind. Aber Zähler und Nenner stehen leider im irrationalen Verhältnis (man sagt, „Zähler und Nenner sind inkommensurabel.“). Das liegt z.B. daran, dass sich die Zahl π nicht herauskürzt.

13.

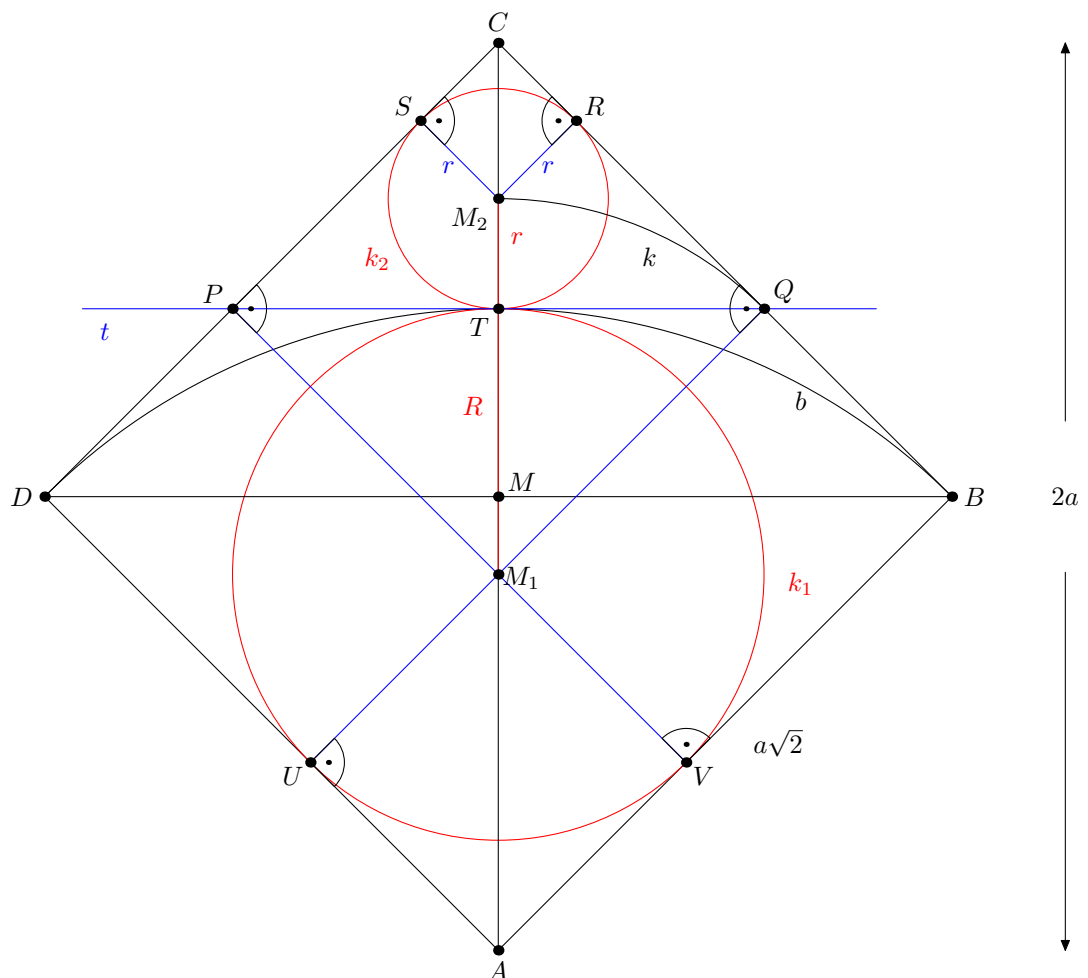
(a) •

– Zeichne Das Quadrat $ABCD$ mit seinen Diagonalen und dem Kreisbogen b

8. Berechnungen am Kreis

- $b \cap [AC] = \{T\}$
- Zeichne die Tangente t an diesen Kreisbogen im Punkt T
- $t \cap [DC] = \{P\}$ und $t \cap [BC] = \{Q\}$
- Die Senkrechten auf die Seiten $[AC]$ und $[BC]$ im Punkt P bzw. Q schneiden sich im Mittelpunkt M_1
- Der Kreis um den Punkt M_1 mit dem Radius $\overline{M_1Q}$ schneidet die Diagonale $[AC]$ im Kreismittelpunkt M_2
- $R = \overline{M_1T}$ und $r = \overline{M_2T}$
- Konstruktion: Die Diagonalen sind $2a = 12$ cm lang, sie stehen aufeinander senkrecht und sie halbieren sich. Die restlichen Konstruktionsschritte sind oben angeführt.

(b)



Das Dreieck PQC ist gleichschenkelig-rechtwinklig.

Dort gilt: $\overline{TC} = \overline{AC} - \overline{AT} = 2a - a\sqrt{2}$.

Das Viereck M_1QCP ist ein Quadrat. Also gilt dort:

8. Berechnungen am Kreis

$$\overline{M_1T} = \overline{TC} = 2a - a\sqrt{2} = R.$$

$$\begin{aligned}\overline{M_1Q} &= \overline{M_1M_2} = \overline{PC} = \overline{TC} \cdot \sqrt{2} = (2a - a\sqrt{2})\sqrt{2} = 2a\sqrt{2} - 2a. \\ r &= \overline{M_2T} = \overline{M_1M_2} - \overline{M_1T} = \overline{M_1M_2} - \overline{TC} = 2a\sqrt{2} - 2a - (2a - a\sqrt{2}) \\ r &= 3a\sqrt{2} - 4a\end{aligned}$$

Die beiden Berührradien r erzeugen das Quadrat M_2RCS . Dann müsste aber gelten:
 $\overline{M_2C} = r\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}\text{Nun ist } \overline{M_2C} &= \overline{M_1C} - \overline{M_1M_2} = 2 \cdot \overline{TC} - \overline{M_1M_2} \\ \Rightarrow \overline{M_2C} &= 2 \cdot (2a - a\sqrt{2}) - (2a\sqrt{2} - 2a) = 4a - 2a\sqrt{2} - 2a\sqrt{2} + 2a \Rightarrow \overline{M_2C} = \\ 6a - 4a\sqrt{2} &= (3a\sqrt{2} - 4a) \cdot \sqrt{2} = r \cdot \sqrt{2}, \text{ was zu zeigen war.}\end{aligned}$$

Analog müsste nun gelten: $\overline{M_1A} = R\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}\overline{M_1A} &= \overline{AC} - \overline{CM_1} = 2a - 2 \cdot \overline{TC} = 2a - 2 \cdot (2a - a\sqrt{2}) = 2a\sqrt{2} - 2a \\ \overline{M_1A} &= (2a - a\sqrt{2})\sqrt{2} = R\sqrt{2}, \text{ was zu zeigen war.}\end{aligned}$$

14. (a) • Die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks beträgt $2x$ m. Die Strecke $[PL]$ stellt eine der Höhen in diesem Dreieck dar.

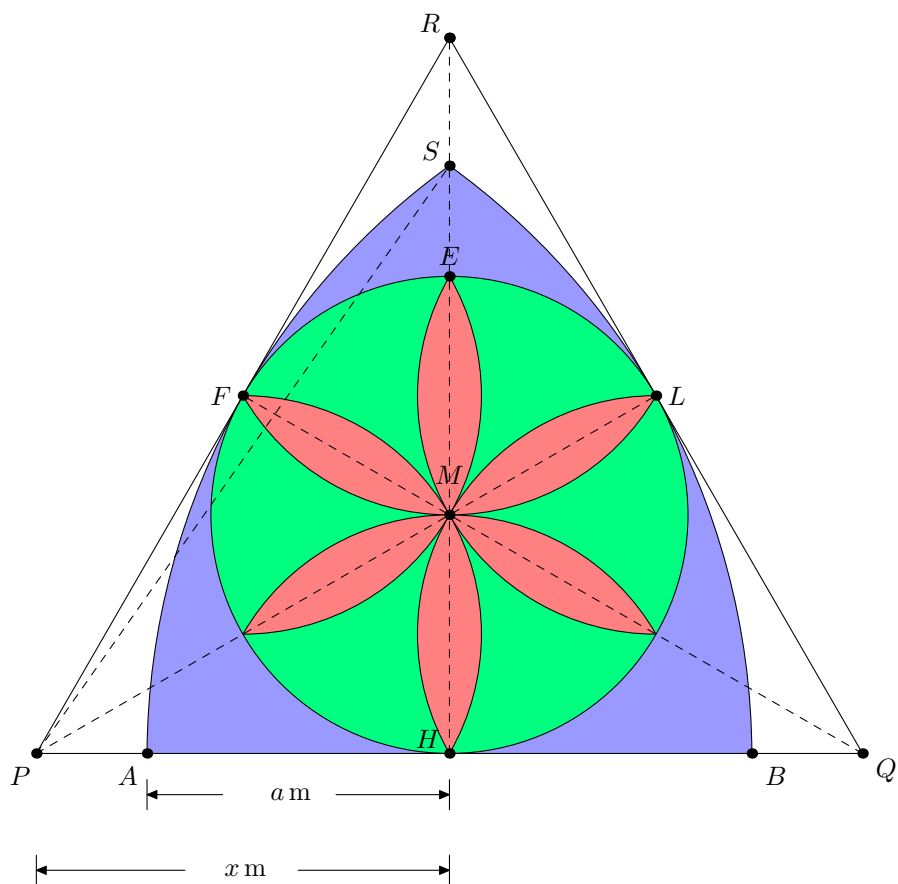
$$\text{Dann gilt } \overline{PL} = \overline{PB} = \left(\frac{2x}{2}\sqrt{3}\right) \text{ m} = (x+a) \text{ m} \Leftrightarrow x\sqrt{3} \text{ m} = (x+a) \text{ m}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{3}+1) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

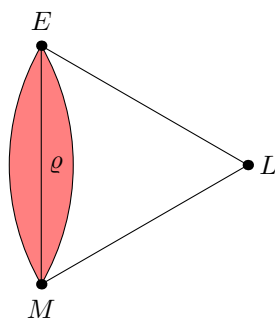
- Der Punkt T ist der Mittelpunkt der Seite $[HB]$, die a m lang ist. Die Strecke $[TU]$ ist eine Höhe in dem gleichseitigen Dreieck HUB mit der Seitenlänge a m.
 $\overline{TU} = \frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ m} = \overline{TQ} \Rightarrow \overline{HQ} = \overline{HT} + \overline{TQ} = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{3}\right) \text{ m} = x \text{ m}.$

- (b) Die Breite des Fensters beträgt $2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$. Im Maßstab 1:25 bedeutet das für deine Zeichnung $\overline{AB} = 200 \text{ cm} : 25 = 8 \text{ cm}$.

8. Berechnungen am Kreis



- Konstruiere x für $a = 4$ cm gemäß der Darstellung in der Aufgabe (a)
 - Konstruiere das Dreieck PQR
 - Der Punkt M ist sowohl der Mittelpunkt des Inkreises dieses Dreiecks als auch der Rosettenmittelpunkt
 - Die Spitzen der Rosette sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks
- (c) In diesem Ausschnitt erkennst du im Zusammenhang mit der vorangegangenen Konstruktion:
Die Punkte E und M teilen die Dreieckshöhe $[RH]$ in drei gleich große Teile. Das Dreieck MLE ist gleichseitig.



8. Berechnungen am Kreis

Für den Inkreisradius $\varrho = \overline{ME}$ gilt:

$$\varrho = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ m} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{3} + 1) \text{ m} = \frac{a}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ m}$$

Die beiden Kreissegmente an der Sehne $[ME]$ sind kongruent. Für den Flächeninhalt A_R eines Blattes der Rosette gilt dann:

$$A_R = 2 \cdot \left(\frac{1}{6} \varrho^2 \pi - \frac{\varrho^2}{4} \sqrt{3} \right) = \varrho^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{a^2}{4} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Für $a = 1$ ist dann $A_R \approx 0,112 \text{ cm}^2 = 11,2 \text{ dm}^2$

und $A_{ges} = 6 \cdot A_R \approx 67,2 \text{ dm}^2$.

Es werden etwa 70 dm^2 rotes Glas für die Rosette benötigt.

(d) Es gilt: $\overline{PS} = \overline{PL} = x\sqrt{3} \text{ m}$.

$$\Delta PHS: \overline{HS}^2 = \overline{PS}^2 - x^2 \text{ m}^2 = (3x^2 - x^2) \text{ m}^2 = 2x^2 \text{ m}^2.$$

$$\Rightarrow \overline{HS} = x\sqrt{2} \text{ m}.$$

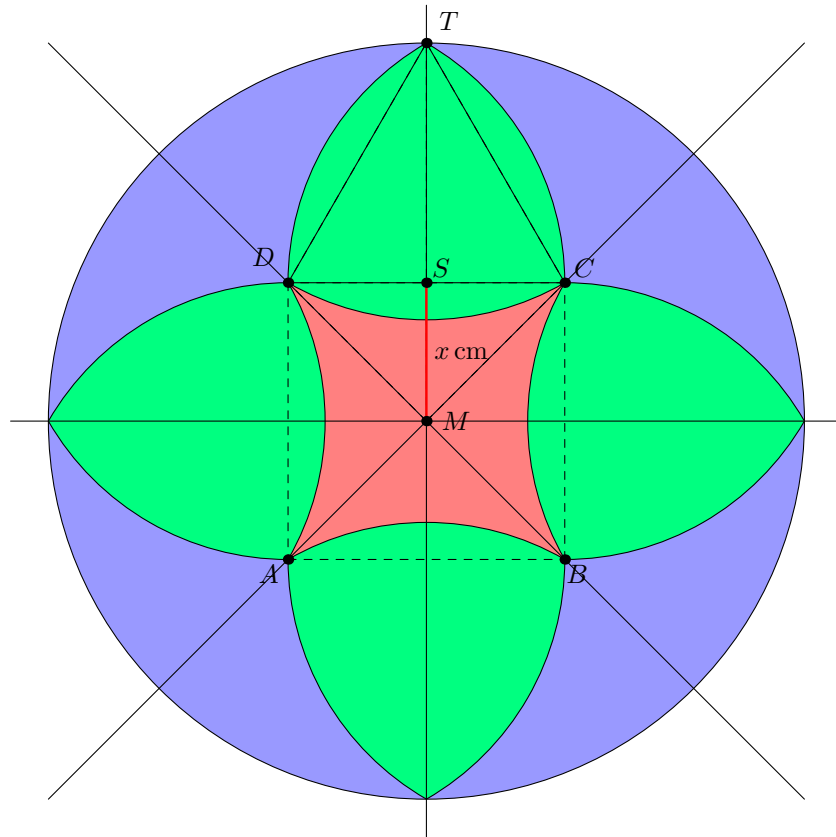
Die Fensterhöhe $\overline{HS}$ ist genauso lang wie die Seite des Quadrates mit der Seitenlänge $x \text{ m}$ (was eine andere Konstruktionsmöglichkeit der Figur eröffnen würde).

$$\text{Mit } x = \frac{a}{2} (\sqrt{3} + 1) \text{ ergibt sich: } \overline{HS} = x\sqrt{2} \text{ m} = \frac{a}{2} (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ m}.$$

Für $a = 1$ ergibt sich: $\overline{HS} \approx 1,93 \text{ m}$.

15. (a)

8. Berechnungen am Kreis



- Zeichne einen Kreis um M mit dem Radius $R = 5$ cm
 - Zeichne die vier Symmetrieachsen der Figur ein; $\Rightarrow$ Punkt T
 - Trage am Punkt T links und rechts einen 30° -Winkel mit dem Schenkel $[TM]$ an
 - Die freien Schenkel dieser Winkel schneiden die im 45° -Winkel stehenden Symmetrieachsen im Punkt D bzw. C . Das Dreieck DCT ist dann gleichseitig.
 - Die Punkte D , C und T sind jeweils die Mittelpunkte der drei Kreisbögen
 - Der Rest kommt durch Punkt- oder Achsenspiegelung zustande
- (b)
- Das Dreieck MCD ist gleichschenkelig-rechtwinklig.
 $\Rightarrow \overline{SM} = \overline{SD} = \overline{SC} = x$ cm und $\overline{CD} = \overline{SC} = 2x$ cm.
 Das Dreieck DCT ist gleichseitig.
 Also gilt für dessen Höhe $\overline{ST} = 2 \cdot \frac{x}{2} \sqrt{3}$ cm $= x\sqrt{3}$ cm.
 $\Rightarrow (x + x\sqrt{3})$ cm $= x(1 + \sqrt{3})$ cm $= R$
 $\Rightarrow x = \frac{R}{(\sqrt{3} + 1)}$ cm
 - x cm $= \frac{R}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{R\sqrt{3} - R}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R}{2}$
- (c) Es gilt $\overline{ME} = \overline{EG} - \overline{MG} = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R}{2}$.

8. Berechnungen am Kreis

16. (a) $\overline{AM_3} = \overline{AE} - \overline{M_3E} = 4r - R$

Wende in den beiden Dreiecken AMM_3 und M_1MM_3 den Satz des PYTHAGORAS an:

$$\begin{aligned} \Delta AMM_3: \quad x^2 &= (4r - R)^2 - (2r)^2 \\ x^2 &= 16r^2 - 8rR + R^2 - 4r^2 \\ x^2 &= 12r^2 - 8rR + R^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_1MM_3: \quad x^2 &= (r + R)^2 - r^2 \\ x^2 &= r^2 + 2rR + R^2 - r^2 \\ x^2 &= R^2 + 2rR \end{aligned} \quad (2)$$

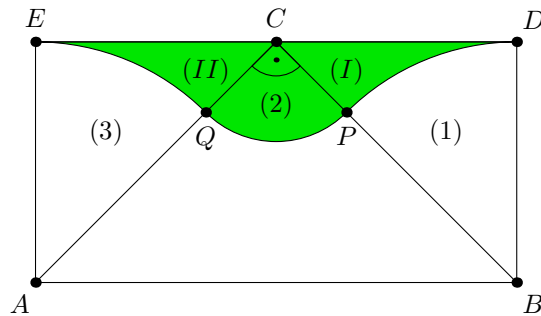
$$\begin{aligned} (1) = (2): \quad 12r^2 - 8rR + R^2 &= R^2 + 2rR \\ \Leftrightarrow \quad 12r^2 - 10Rr &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 2r(6r - 5R) &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow R = 1,2r$$

(b) Flächenunterschied:

$$\Delta A = A_R - A_r = R^2\pi - r^2\pi = (1,2r)^2\pi - r^2\pi = r^2\pi(1,44 - 1) = 0,44r^2\pi$$

$$\frac{\Delta A}{A_r} = \frac{0,44r^2\pi}{r^2\pi} = 0,44 = 44\%$$

17. (a)



(b) Das Dreieck BDC ist ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $\overline{BC} = 5 \text{ cm}$.

Dann ist die Seitenlänge $\overline{BD} = \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ cm} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \text{ cm} = \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$, also $2,5 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \approx 3,54 \text{ cm}$ lang.

(c) $A_{\Delta CBD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ cm}^2 = 6,25 \text{ cm}^2$

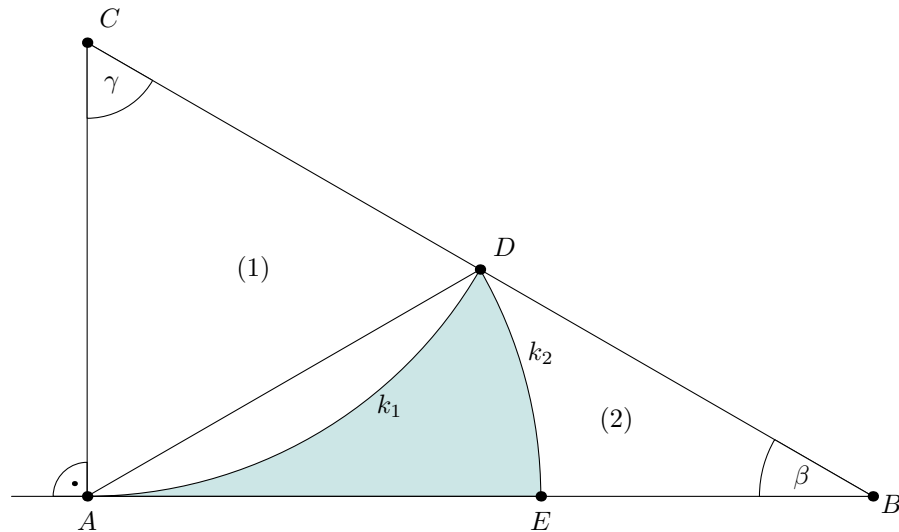
$$A_{(1)} \approx \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot 3,54^2 \cdot \pi \text{ cm}^2 \approx 4,92 \text{ cm}^2 = A_{(3)}$$

$$A_{(I)} = A_{(III)} \approx 6,25 \text{ cm}^2 - 4,92 \text{ cm}^2 = 1,33 \text{ cm}^2$$

$$A_{(2)} \approx \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot (5 - 3,54)^2 \cdot \pi \text{ cm}^2 \approx 1,67 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{gesamt}} = 2 \cdot A_{(I)} + A_{(2)} \approx 2 \cdot 1,33 \text{ cm}^2 + 1,67 \text{ cm}^2 = 4,33 \text{ cm}^2$$

18. (a)



- Zeichne die Strecke $\overline{AC} = 6 \text{ cm}$. Trage am Punkt A einen rechten Winkel an.
 - Zeichne um den Punkt C einen Kreisbogen k_1 mit Radius 6 cm . Zeichne um den Punkt A einen Kreisbogen k_2 mit Radius 6 cm .
 - $k_1 \cap k_2 = \{D\}$. Das Dreieck ADC ist somit gleichseitig mit der Seitenlänge 6 cm .
 $k_2 \cap \{\text{freier Schenkel des rechten Winkels mit dem Scheitel } A\} = \{E\}$.
 - $[CD \cap [AE = \{B\}$.
- (b) Weil das Dreieck ADC gleichseitig ist, folgt $\gamma = 60^\circ$. Weil das Dreieck ABC rechtwinklig ist, folgt $\beta = 30^\circ$.

Der Flächeninhalt A des Dreiecks ABC beträgt somit

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2 \quad (\approx 31,18 \text{ cm}^2).$$

Berechne dann den Flächeninhalt des Kreissektors (1) mit dem Mittelpunkt C und dem Kreisbogen von A nach D :

$$A_{(1)} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 6^2 \pi \text{ cm}^2 = 6\pi \text{ cm}^2 \quad (\approx 18,85 \text{ cm}^2)$$

Den Inhalt $A_{(2)}$ der Fläche (2), die durch die Strecken $[EB]$ und $[BD]$ sowie durch den Kreisbogen von E nach D begrenzt wird, berechnest du, indem du den Inhalt des Kreissektors mit dem Mittelpunkt A und dem Radius 6 cm vom Flächeninhalt des Dreiecks ABD subtrahierst.

Das Dreieck ABC ist ein halbes gleichseitiges Dreieck. Weil $\overline{CD} = 6 \text{ cm}$ gilt, ist der Punkt D damit der Mittelpunkt der Hypotenuse $[BC]$, die ja 12 cm lang sein muss. Deshalb ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABD halb so groß wie der des Dreiecks ABC :

8. Berechnungen am Kreis

$$A_{\Delta ABD} = 0,5 \cdot 18\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2 \quad (\approx 15,59 \text{ cm}^2).$$

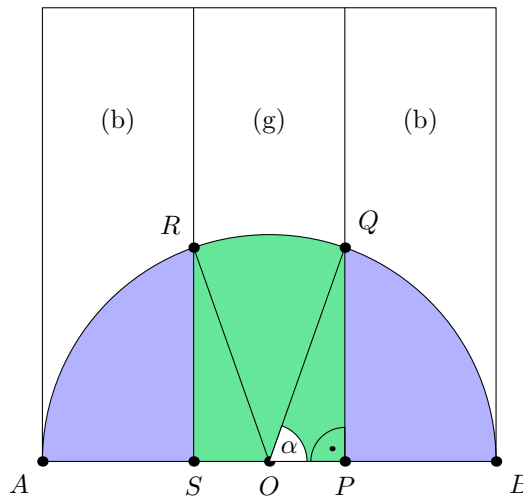
$$\Rightarrow A_{(2)} = \left(9\sqrt{3} - \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot 6^2 \pi \right) \text{ cm}^2 = (9\sqrt{3} - 3\pi) \text{ cm}^2 \quad (\approx 6,16 \text{ cm}^2).$$

Den Inhalt A der getönten Fläche erhältst du, indem du die beiden Flächeninhalte $A_{(1)}$ und $A_{(2)}$ vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC subtrahierst:

$$A = 18\sqrt{3} - [6\pi + (9\sqrt{3} - 3\pi)] \text{ cm}^2 = (9\sqrt{3} - 3\pi) \text{ cm}^2 = A_{(2)} !$$

Das bedeutet z.B. auch, dass der Kreisbogen von E nach D die Fläche halbiert, die von den Strecken $[AB]$ und $[BD]$ sowie vom Kreisbogen von A nach D begrenzt wird.

19. (a)



- (b) Um den Inhalt der blauen Teilfläche $PBQP$ zu berechnen, musst du von der Fläche des Sektors OPQ die des Dreiecks OPQ subtrahieren:

Im rechtwinkligen Dreieck OPQ gilt: $\overline{OP} = 1 \text{ cm}$ und $\overline{OQ} = 3 \text{ cm}$.

$$\text{Also: } \cos \alpha = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70,53^\circ.$$

$$A_{\text{Sektor}} \approx \frac{70,53^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2 \cdot \pi \text{ cm}^2 \approx 5,54 \text{ cm}^2$$

$$A_{\Delta OPQ} \approx 0,5 \cdot 1 \cdot 3 \text{ cm}^2 \approx 1,41 \text{ cm}^2$$

$$A_{PBQP} \approx 5,54 \text{ cm}^2 - 1,41 \text{ cm}^2 = 4,13 \text{ cm}^2$$

$$\text{Geamte blaue Fläche: } A \approx 2 \cdot 4,13 \text{ cm}^2 = 8,26 \text{ cm}^2.$$

- (c) Halbkreis: $A_{HK} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \pi \approx 14,14 \text{ cm}^2$

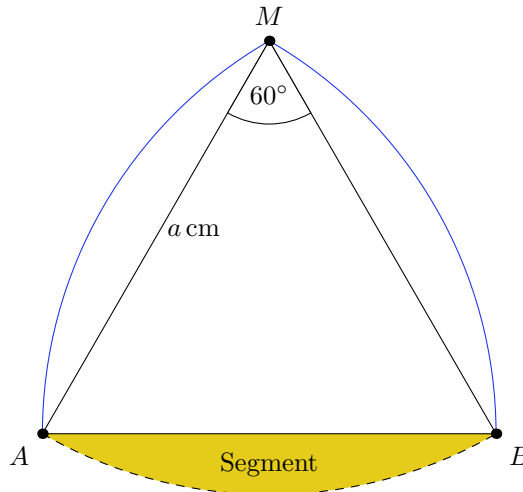
$$\frac{A_{\text{grün}}}{A_{HK}} \approx \frac{14,14 \text{ cm}^2 - 8,26 \text{ cm}^2}{14,14 \text{ cm}^2} \approx 0,4158 = 41,58\%$$

8. Berechnungen am Kreis

Knapp 42% der Halbkreisfläche sind grün eingefärbt.

20. (a) Zeichne zunächst den Umkreis der Figur mit dem Radius $a = 6 \text{ cm}$. Trage dann den Radius 6-mal auf der Kreislinie ab. Beginne dabei mit einem der „waagrechten“ Punkte C oder F . Zeichne dann die 6 Kreisbögen ein.

(b)



Die Ausgangsfigur (AF) enthält drei Kreisbogendreiecke (KBD). Eines davon ist jetzt herausgezeichnet.

Es setzt sich aus einem gleichseitigen Dreieck (D) und drei kongruenten Segmenten (Sg) zusammen.

Den Flächeninhalt der Ausgangsfigur (AF) kannst du berechnen, indem du vom Flächeninhalt des Umkreises (k) der Ausgangsfigur den der drei Kreisbogendreiecke (KBD) subtrahierst:

$$A_{AF} = A_k - 3 \cdot A_{KBD}.$$

Weiter gilt also: $A_{KBD} = A_D + 3 \cdot A_{Sg}$ und $A_{Sg} = A_{SektorMAB} - A_D$.

$$\Rightarrow A_{KBD} = A_D + 3 \cdot (A_{SektorMAB} - A_D).$$

$$\Rightarrow A_{KBD} = 3 \cdot A_{SektorMAB} - 2 \cdot A_D = \left[3 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot a^2 \pi - 2 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \right] \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_{KBD} = \left[\frac{1}{2} a^2 \pi - \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3} \right] \text{ cm}^2$$

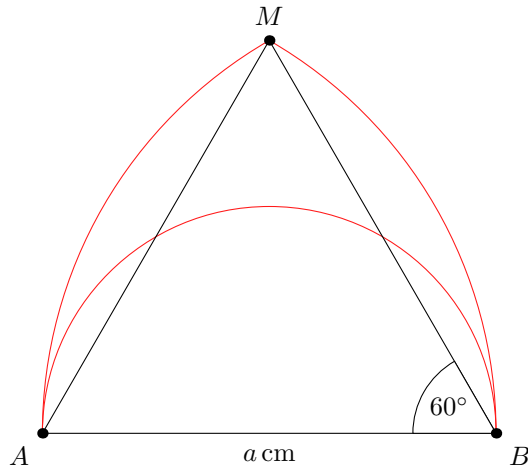
$$A_{AF} = a^2 \pi \text{ cm}^2 - 3 \cdot \left[\frac{1}{2} a^2 \pi - \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3} \right] \text{ cm}^2$$

$$A_{AF} = \left[a^2 \pi - \frac{3}{2} a^2 \pi + \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} \right] \text{ cm}^2 = \frac{a^2}{2} (3\sqrt{3} - \pi) \text{ cm}^2$$

Für $a = 6$ ergibt sich: $A_{AF} \approx 36,98 \text{ cm}^2$.

8. Berechnungen am Kreis

21. (a) Zeichne zunächst den Umkreis der Figur mit dem Radius $a = 6$ cm. Trage dann den Radius 6-mal auf der Kreislinie ab. Beginne dabei mit einem der „waagrechten“ Punkte C oder F . Zeichne dann die 6 Kreisbögen und die 3 Halbkreise ein.
- (b)



Die Figur stellt eines der drei kongruenten Elemente der Ausgangsfigur (AF) dar: An den Schenkeln $[MA]$ und $[MB]$ des gleichseitigen Dreiecks ABC liegen zwei kongruente Segmente (Seg), die zum Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks addiert werden. Davon wird dann der Flächeninhalt des Halbkreises (Hk) subtrahiert. Das Ergebnis wird schließlich noch mit 3 multipliziert.

$$A_{AF} = 3 \cdot (A_{ABC} + 2 \cdot A_{Seg} - A_{Hk}) = 3 \cdot [A_{ABC} + 2 \cdot (A_{Sektor} - A_{ABC}) - A_{Hk}]$$

$$A_{AF} = 6 \cdot A_{Sektor} - 3 \cdot A_{ABC} - 3 \cdot A_{Hk}$$

$$A_{AF} = \left[6 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot a^2 \pi - 3 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \pi \right] \text{ cm}^2$$

$$A_{AF} = \left[a^2 \pi - \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3} - \frac{3}{8} a^2 \pi \right] \text{ cm}^2$$

$$A_{AF} = \left[\frac{5}{8} a^2 \pi - \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3} \right] \text{ cm}^2 = \left[\frac{a^2}{8} \cdot (5\pi - 6\sqrt{3}) \right] \text{ cm}^2$$

Für $a = 6$ ergibt sich: $A_{AF} \approx 23,92 \text{ cm}^2$

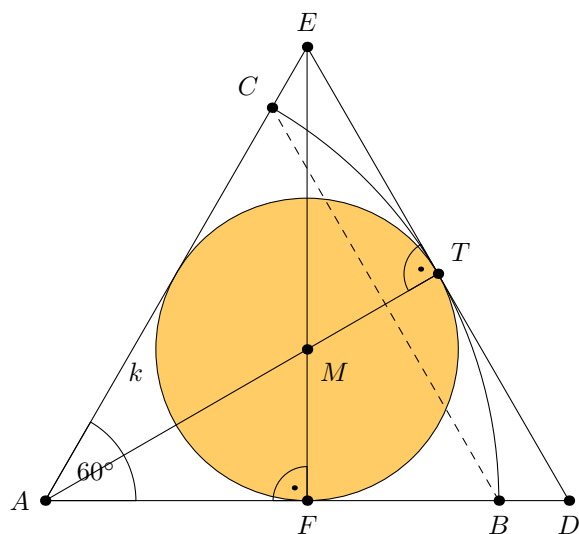
Anmerkung:

$$\text{Es gilt } A_{AF} = \left[\frac{5}{8} a^2 \pi - \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3} \right] \text{ cm}^2 = \left[\frac{225^\circ}{360^\circ} \cdot a^2 \pi - 3 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \right] \text{ cm}^2.$$

Das bedeutet: Die Ausgangsfigur hat den gleichen Flächeninhalt wie ein Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel 225° und dem Radius a cm, dem man 3 gleichseitige Dreiecke mit einer Seitenlänge von jeweils a cm entnommen hat.

8. Berechnungen am Kreis

22. (a)



- (b) Die Gerade $[AT]$ ist eine Symmetrieachse des gleichseitigen Dreiecks ABC und des Dreiecks ADE . Also ist dieses Dreieck ADE ebenfalls gleichseitig. Die Strecke $[MT]$ stellt den Radius des Kreises k dar.

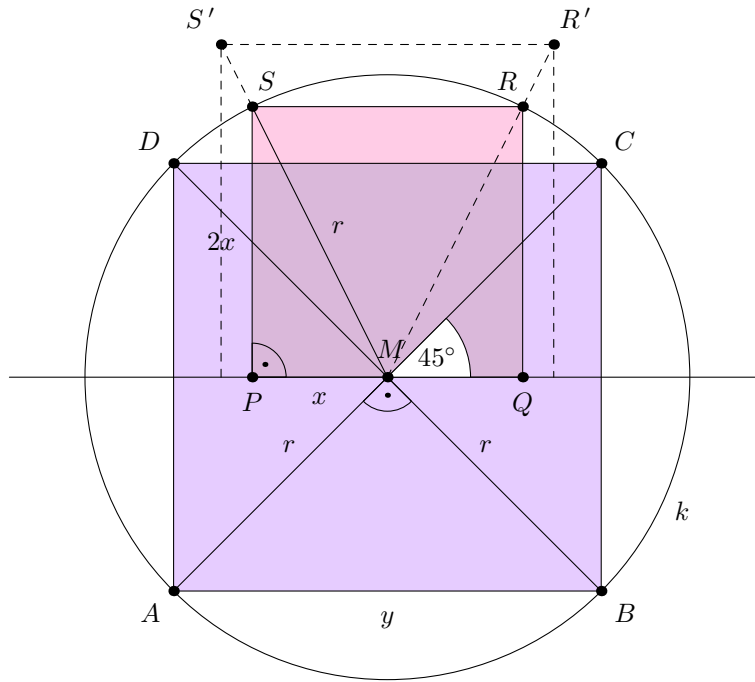
Die $a = 6 \text{ cm}$ lange Strecke $[AT]$ ist eine Höhe im gleichseitigen Dreieck ADE . Der Kreis k ist der Inkreis des Dreiecks ADE . $\Rightarrow [AT] \cap [EF] = M$. Somit stellt die Strecke $[MT]$ den Radius des Kreises k dar.

Weil im gleichseitigen Dreieck die Winkelhalbierenden gleichzeitig die Schwerlinien sind, teilt der Mittelpunkt M die Strecke $[MT]$ im Verhältnis $2 : 1$.

$$\Rightarrow r = \frac{1}{3} a \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{\text{Kreis}}}{A_{\text{Sektor}}} = \frac{\left(\frac{1}{3} \cdot a\right)^2 \pi}{\frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot a^2 \pi} = \frac{1}{9} : \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

23. (a)

8. Berechnungen am Kreis



Zeichne zunächst den Kreis mit dem Mittelpunkt M und seinem waagrecht liegenden Durchmesser. Zeichne dann zwei Geraden ein, die jeweils einen 45° -Winkel mit dieser Waagrechten bilden und sich im Punkt M schneiden. Die Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit der Kreislinie k sind die Eckpunkte des Quadrates $ABCD$.

Um das Quadrat $PQRS$ zu erhalten, zeichnest du am besten erst ein (hier gestrichelt eingezeichnetes) Probequadrat mit den Eckpunkten R' und S' ein. Dann folgt:

$[MR'] \cap k = \{R\}$ und $[MS'] \cap k = \{S\}$.

Die Lote der Eckpunkte R und S auf die Waagrechte liefern die restlichen Quadrat-Eckpunkte Q und P .

- (b) Für die Berechnung kannst du den Radius r verwenden. Es geht jedoch auch, wenn du für r 4 cm einsetzt.

Es gilt: $\overline{AB} = y$ und $\overline{MP} = x$, dann ist $\overline{PS} = 2x$ (siehe Zeichnung).

Das Dreieck ABM ist gleichschenkelig-rechtwinklig und damit ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $y = r\sqrt{2}$. $\Rightarrow A_{ABCD} = y^2 = 2r^2$.

PYTHAGORAS im Dreieck PMS : $x^2 + (2x)^2 = r^2$

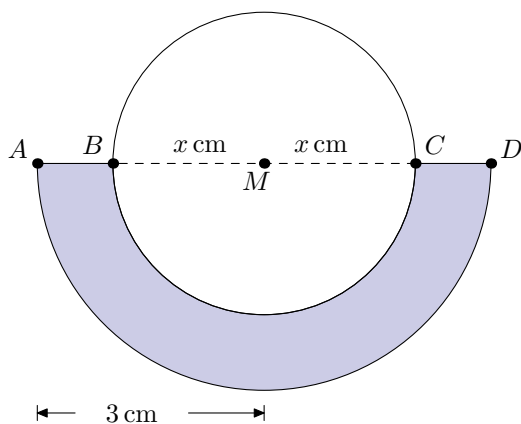
$$\Leftrightarrow 5x^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow 2x = \frac{2r}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow A_{PQRS} = (2x)^2 = \frac{4}{5}r^2$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{4}{5}r^2}{2r^2} = 2 : 5 = \frac{4}{10} = 40\%$$

Das Quadrat $ABCD$ ist um 60% größer als das Quadrat $PQRS$.

24. (a)

8. Berechnungen am Kreis



Beginne am besten mit dem Vollkreis.

$$(b) \quad A_{HR} = \left(\frac{1}{2} \cdot 3^2 \pi - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \pi \right) \text{ cm}^2 = 2,5 \pi \text{ cm}^2 \approx 7,85 \text{ cm}^2$$

(c) Die Maßzahlengleichung für $x \in \mathbb{Q}^+$ heißt:

$$x^2 \pi = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \pi - \frac{1}{2} \cdot x^2 \pi \Leftrightarrow \frac{3}{2} x^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \approx 1,73$$

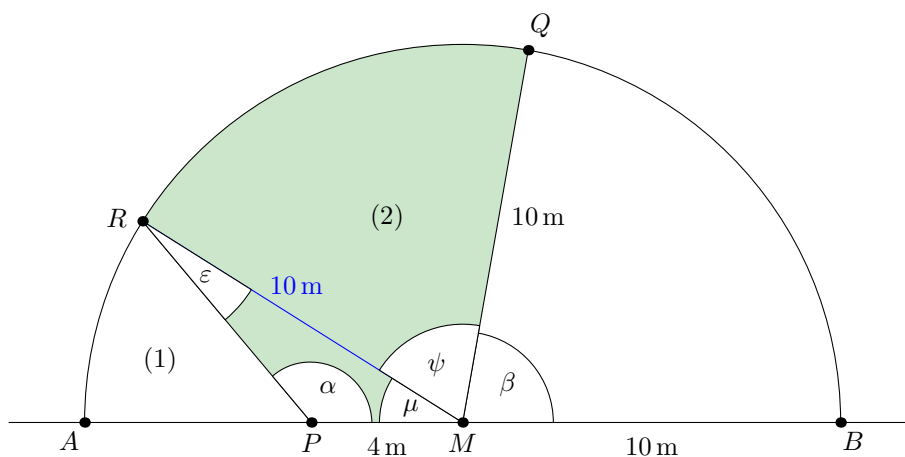
(d) Es gilt $\overline{AB} = \overline{CD} = (3 - x) \text{ cm}$.

$$2 \cdot u_{\text{Vollkreis}} = 2 \cdot 2x\pi \text{ cm} \quad u_{HK} = \left[\frac{1}{2} \cdot 6\pi + 2 \cdot (3 - x) + \frac{1}{2} \cdot 2x\pi \right] \text{ cm}$$

$$\Rightarrow 4x\pi = 3\pi + 6 - 2x + x\pi \Leftrightarrow x(2 + 3\pi) = 6 + 3\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 + 3\pi}{2 + 3\pi} \approx 1,35$$

25. (a)



8. Berechnungen am Kreis

Für deine Zeichnung gilt:

$$20 \text{ m} = 2000 \text{ cm} \Rightarrow \overline{AB} = 2000 \text{ cm} : 200 = 10 \text{ cm}$$

$$4 \text{ m} = 400 \text{ cm} \Rightarrow \overline{PM} = 400 \text{ cm} : 200 = 2 \text{ cm}$$

- (b) Strategie: Addiere den Flächeninhalt des Dreiecks PMR zum Kreissektor (2) mit dem Mittelpunktswinkel ψ . Halbkreisfläche. Die „weiße“ Teilfläche (1) ist **kein Kreissektor**.

Die **Hilfslinie** $[MR]$ ist die Schlüsselstelle auf dem Lösungsweg.

$$A_{\text{Halbkreis}} = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \pi \text{ m}^2 = 50\pi \text{ m}^2 \approx 157,08 \text{ m}^2$$

$$A_1 = A_{\text{Sektor}MRA} - A_{\Delta PMR}$$

$$\text{Sinussatz im Dreieck } PMR: \frac{\sin \varepsilon}{4} = \frac{\sin 130^\circ}{10}$$

$$\Rightarrow \varepsilon \approx 17,84^\circ \Rightarrow \mu \approx 180^\circ - 130^\circ - 17,84^\circ = 32,16^\circ$$

$$A_{\Delta PMR} \approx \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \cdot \sin 32,16^\circ \approx 10,65 \text{ m}^2$$

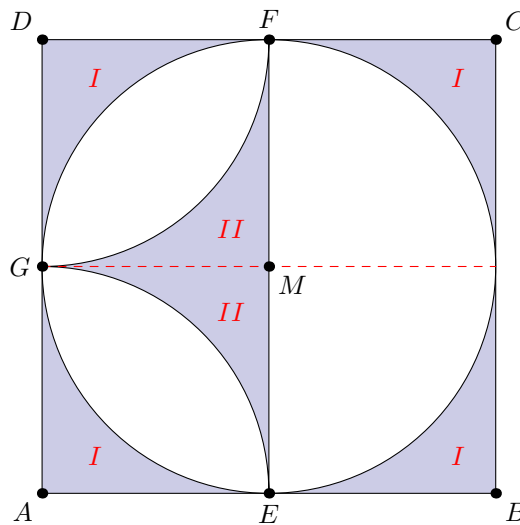
$$\psi \approx 180^\circ - 80^\circ - 32,16^\circ = 67,84^\circ$$

$$A_{(2)} = \left(\frac{67,84^\circ}{360^\circ} \cdot 10^2 \cdot \pi \right) \text{ m}^2 \approx 59,20 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{Farbe}} \approx (10,65 + 59,20) \text{ m}^2 = 69,85 \text{ m}^2$$

$$(c) \frac{A_{\text{Farbe}}}{A_{\text{Halbkreis}}} \approx \frac{69,85 \text{ m}^2}{157,08 \text{ m}^2} \approx 0,44 = \%$$

26. (a)



8. Berechnungen am Kreis

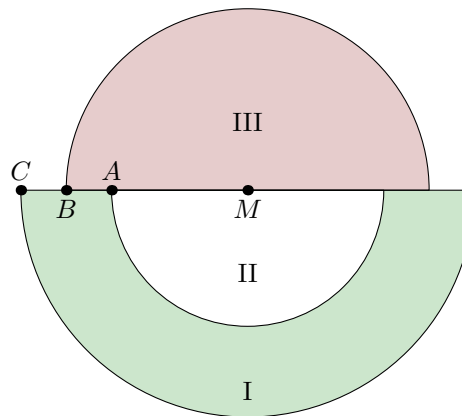
- (b) Aus Symmetriegründen gilt: $A_I = A_{II}$.

$$A_I = \left(3^2 - \frac{1}{4} \cdot 3^2 \cdot \pi\right) \text{ cm}^2 \approx 1,93 \text{ cm}^2.$$

$$A_{\text{gesamt}} = 4 \cdot A_I + 2 \cdot A_{II} = 6 \cdot A_I \approx 11,58 \text{ cm}^2.$$

27. (a) Die Figur 1 ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

Figur 1



- (b) Du hast die drei Halbkreise I, II und III vor dir.
Es müsste gelten: $A_{III} = A_I - A_{II}$. Es wird in der Einheit cm^2 gerechnet.

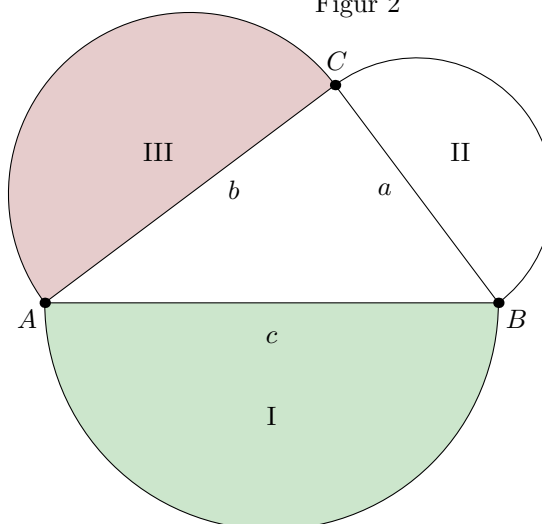
$$\text{Also: } \frac{1}{2} \cdot 4,8^2 \pi = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \pi - \frac{1}{2} \cdot 3,6^2 \pi \quad \Bigg| : \frac{1}{2} \pi$$

$$4,8^2 = 6^2 - 3,6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 23,04 = 36 - 12,96. \text{ Das stimmt, also ist die Behauptung bewiesen.}$$

- (c) • Die Figur 2 ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

8. Berechnungen am Kreis

Figur 2



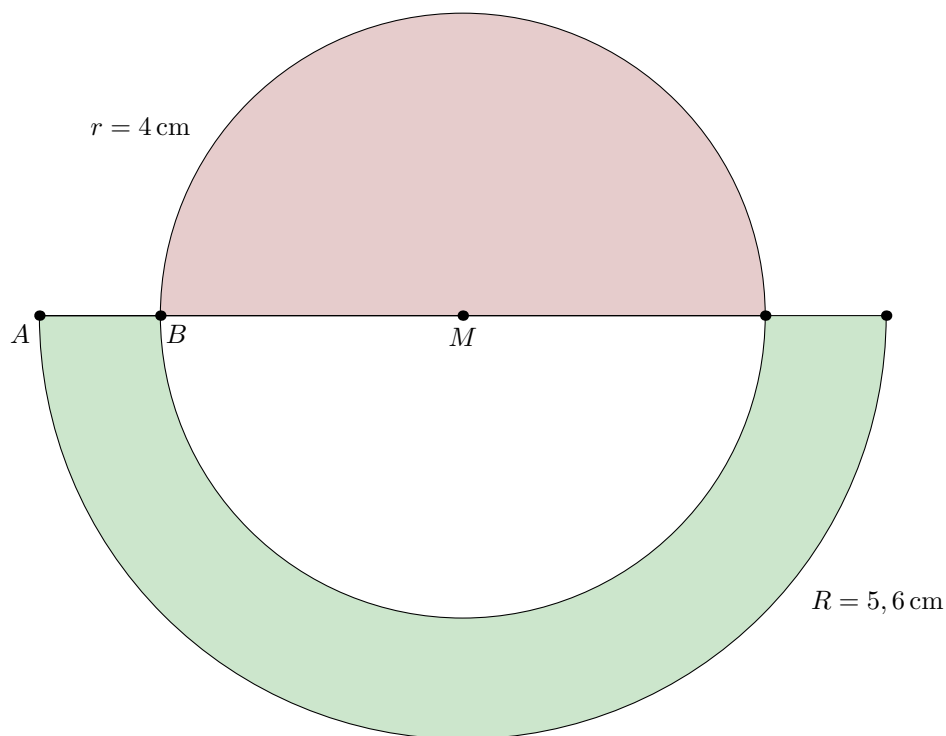
- Für die Maßzahlen müsste gelten:
 $12^2 = 7,2^2 + 9,6^2 \Leftrightarrow 144 = 51,84 + 92,16$. Das stimmt, also ist das Dreieck ABC rechtwinklig.
- Es gilt: $c^2 = a^2 + b^2 \mid \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \pi$.

Das bedeutet: Der Halbkreis I hat den gleichen Flächeninhalt wie die beiden Halbkreise II und III zusammen.

- In der Figur 1 siehst du einen gleich gelagerten Fall: Wenn du den Halbkreis II aus dem Halbkreis I entfernst, ergibt sich: Der Halbkreis I muss genauso groß sein wie die beiden Halbkreise II und III zusammen.
 In der Figur 1 und der Figur 2 haben gleich nummerierte Halbkreise den gleichen Durchmesser; d.h. sie sind kongruent.

28. (a)

8. Berechnungen am Kreis



- (b) **Anmerkung:** Zu allen Flächenmaßzahlen gehört die Einheit „cm²“. Es gilt:

$$A_{\text{Halbkreis(klein)}} = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \pi \quad \text{und} \quad A_{\text{Kreiring}} = \frac{1}{2} \cdot 5,6^2 \pi - A_{\text{Halbkreis(klein)}}.$$

Es muss also gelten: $A_{\text{Halbkreis(groß)}} = 2 \cdot A_{\text{Halbkreis(klein)}}.$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 5,6^2 \pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 \pi \quad \left| : \pi \right. \quad \Leftrightarrow \quad 15,68 \neq 16.$$

(c) $\frac{1}{2} \cdot R^2 \pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{18}^2 \pi \text{ cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 = 36 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad R = 6 \text{ cm}.$

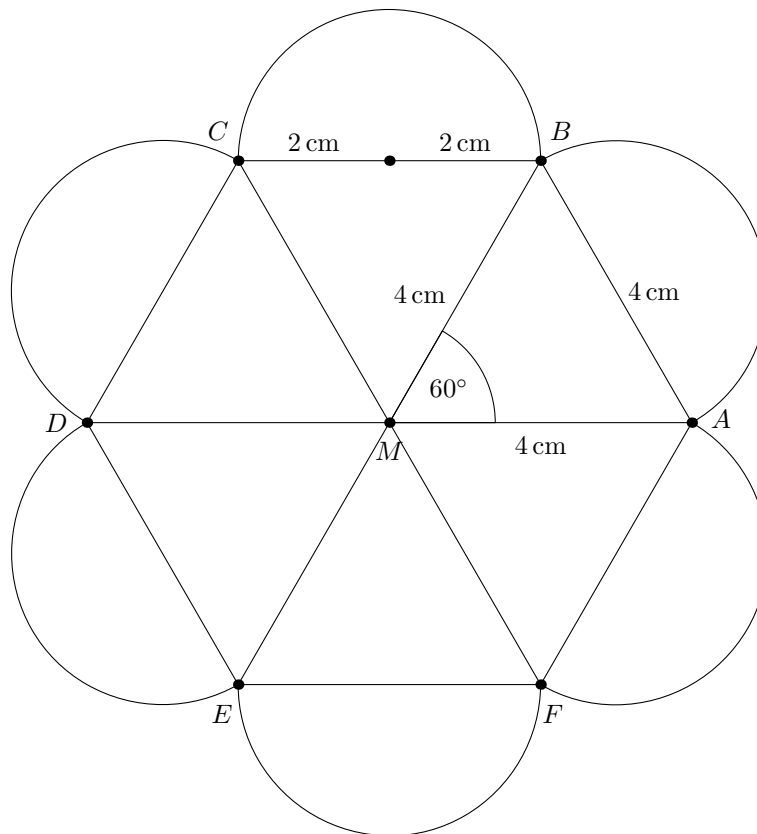
(d) Es muss gelten: $\frac{1}{2} \cdot R^2 \pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \pi \quad \Rightarrow \quad R = r\sqrt{2}.$

Du könntest das auch mit Hilfe der Eigenschaften der zentrischen Streckung begründen:

- Alle Kreise sind zueinander ähnlich.
- Wenn du eine Kreisfläche verdoppelst, dann gilt für den Streckungsfaktor k : $k^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{2}.$

29. (a)

8. Berechnungen am Kreis

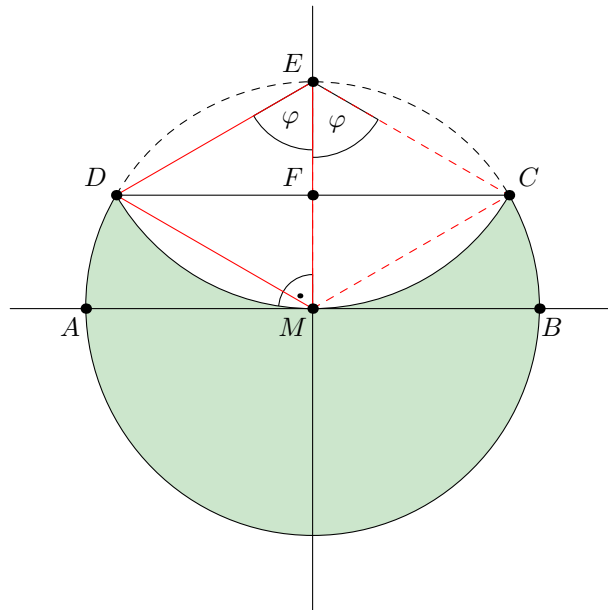


- (b) Die drei Diagonalen zerlegen jedes regelmäßige Sechseck in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke. In unserem Fall hat jedes dieser gleichseitigen Dreiecke eine Seitenlänge von 4 cm .
Die sechs kongruenten Halbkreise lassen sich paarweise zu drei Vollkreisen mit dem Radius $r = 2\text{ cm}$ zusammenfügen.

$$\text{Also: } A = \left(6 \cdot \frac{4^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2^2 \cdot \pi \right) \text{ cm}^2 \approx 79,27 \text{ cm}^2.$$

30. (a)

8. Berechnungen am Kreis



- (b) Von der Kreisscheibe hat Erwin das Kreissegment $CDMC$ heruntergeklappt. Den Flächeninhalt dieses Kreissegmentes erhältst du, indem du vom Flächeninhalt des Kreissektors $EDMCE$ den Flächeninhalt des Dreiecks DCE subtrahierst. Im Dreieck DME gilt: $\overline{ME} = \overline{MD} = \overline{DE} = 3 \text{ cm}$. Also ist das Dreieck DME gleichseitig, und es gilt: $\varphi = 60^\circ$. Das Dreieck DCE hat den gleichen Flächeninhalt wie dieses Dreieck DME .

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2 \cdot \pi \text{ cm}^2 \approx 9,42 \text{ cm}^2.$$

$$A_{\Delta DCE} = \frac{3^2}{4} \text{ cm}^2 \cdot \sqrt{3} \approx 3,90 \text{ cm}^2.$$

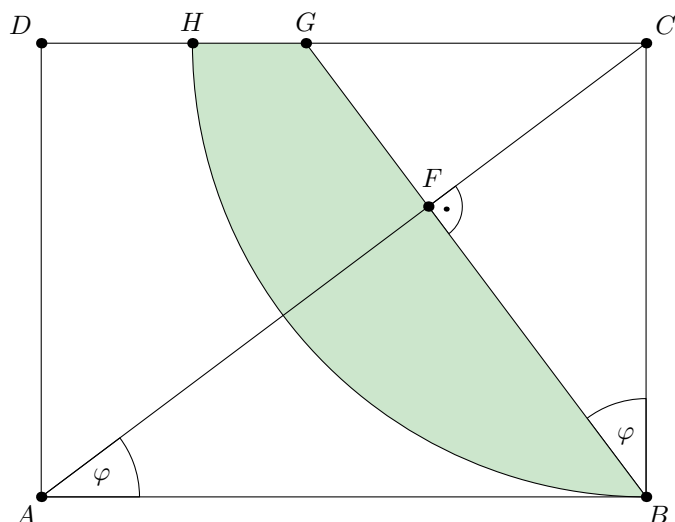
$$A_{\text{Segment}} \approx 9,42 \text{ cm}^2 - 3,90 \text{ cm}^2 = 5,52 \text{ cm}^2.$$

Diese Segmentfläche musst du zwei Mal von der Fläche der Kreisscheibe subtrahieren:
 $A_{\text{gefärbt}} \approx 3^2 \pi \text{ cm}^2 - 2 \cdot 5,52 \text{ cm}^2 \approx 17,23 \text{ cm}^2.$

$$\frac{A_{\text{gefärbt}}}{A_{\text{O}}} = \frac{17,23 \text{ cm}^2}{28,27 \text{ cm}^2} \approx 0,6945 = 69,54\%.$$

31. (a)

8. Berechnungen am Kreis



- (b) Strategie: Subtrahiere den Flächeninhalt des Dreiecks BCG vom Flächeninhalt des Viertelkreises mit dem Mittelpunkt C und dem Radius $r = 6 \text{ cm}$.

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{4} \cdot 6^2 \pi \text{ cm}^2 = 9\pi \text{ cm}^2.$$

Weil sie z.B. im Winkelmaß φ übereinstimmen, sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABC und BCG zueinander ähnlich:

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{CG} = \frac{36 \text{ cm}^2}{8 \text{ cm}} = 4,5 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow A_{\Delta BCG} = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 4,5 \text{ cm} = 13,5 \text{ cm}^2.$$

$$\Rightarrow A = (9\pi - 13,5) \text{ cm}^2 \approx 14,77 \text{ cm}^2.$$

32. (a) Klar.

- (b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$5^2\pi - r^2\pi = 0,19 \cdot 5^2\pi$$

$$r^2\pi = 0,81 \cdot 5^2\pi$$

$$r = 0,9 \cdot 5 \text{ cm} = 4,5 \text{ cm}$$

- (c) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

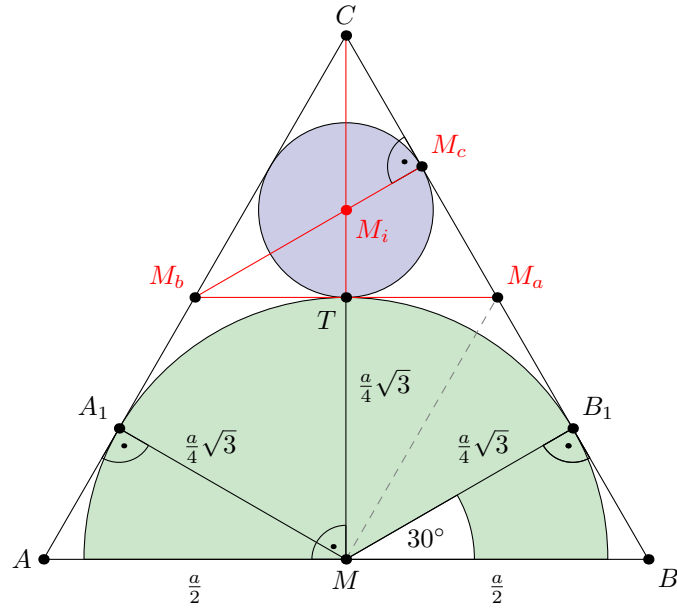
$$3,5^2\pi = (R^2 - 3,5^2)\pi$$

$$R^2\pi = 2 \cdot 3,5^2\pi$$

$$R = 3,5 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \approx 4,95 \text{ cm}$$

33. (a)

8. Berechnungen am Kreis



Wir bezeichnen die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ABC mit a .

- (b) Die Dreiecke AMA_1 und MBB_1 sind halbe gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}$. Aus Symmetriegründen sind diese beiden Dreiecke zudem kongruent.

Das Dreieck MBB_1 ist (ebenso wie das Dreieck AMA_1) ein halbes gleichseitiges Dreieck mit der Dreieckshöhe $\overline{MB_1} (= \overline{MA_1}) = \frac{a}{4}\sqrt{3}$.

Weil der Punkt T auf der Halbkreislinie liegt, gilt ebenso $\overline{MT} = \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MC}$.

M_a und M_b sind also zwei Seitenmittelpunkte des gleichseitigen Dreiecks ABC .

Dann gilt $[M_a M_b] \parallel [AB]$.

Demnach beträgt der Inkreisradius ρ_i des Dreiecks $M_b M_a C$ ein Viertel von dem des Dreiecks ABC .

Für den Inkreisradius ρ_g des gleichseitigen Dreiecks gilt: $\rho_g = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

$$\Rightarrow \rho_i = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{24}\sqrt{3}.$$

Für den Flächeninhalt A_k des kleinen Kreises gilt dann:

$$A_k = \left(\frac{a}{24}\sqrt{3} \right)^2 \cdot \pi = \frac{a^2}{96} \cdot \pi.$$

Für den Flächeninhalt A_{HK} des Halbkreises gilt dann:

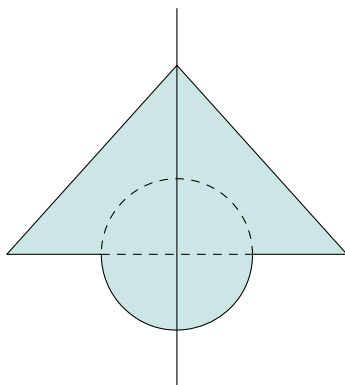
$$A_{HK} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{4}\sqrt{3} \right)^2 \cdot \pi = \frac{3a^2}{32} \cdot \pi.$$

Für das fragliche Flächenverhältnis ergibt sich dann:

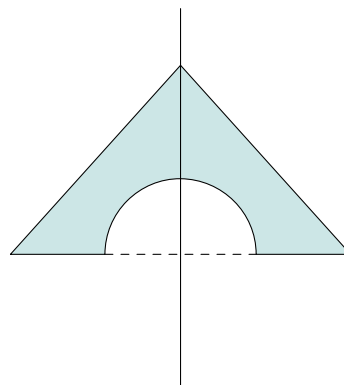
$$\frac{A_k}{A_{HK}} = \left[\frac{a^2}{96} \cdot \pi \right] : \left[\frac{3a^2}{32} \cdot \pi \right] = \frac{32}{96} = \frac{1}{3}.$$

9. Raumgeometrie

1. (a) $A = 12,73 \text{ cm}^2$
(b) - -
2. (a) $V(x) = (-8x^2 + 28x + 120) \text{ cm}^3$
(b) $V_{\max} = 144,5 \text{ cm}^3$ für $x = 1,75$
(c) $x_1 = 3,10 \quad x_2 = 0,40$
3. $V = 375 \text{ ml}$
4. (a) Am besten zeichnest du dir erst einmal die Axialschnitte der beiden Rotationskörper hin:



Zur Figur 1



Zur Figur 2

- (b) Der zur Figur 1 gehörende Rotationskörper R_1 besteht aus einem Kegel, an dessen Grundfläche eine Halbkugel hängt. Aus dem Kegel des Rotationskörpers R_2 ist eine Halbkugel mit dem gleichen Radius herausgebohrt worden. Beide Kegel von R_1 und R_2 sind kongruent.

Also unterscheiden sich die entsprechenden Rauminhalte V_1 und V_2 der beiden Rotationskörper lediglich um das Volumen einer Kugel mit Radius 2 cm :

$$V_1 - V_2 = \Delta V = \frac{4}{3} \cdot 2^3 \cdot \pi \text{ cm}^3 = \frac{32}{3} \cdot \pi \text{ cm}^3 \approx 33,51 \text{ cm}^3.$$

9. Raumgeometrie

- (c) Die Oberflächen O_1 und O_2 der Rotationskörper R_1 und R_2 bestehen aus paarweise kongruenten Teilflächen:

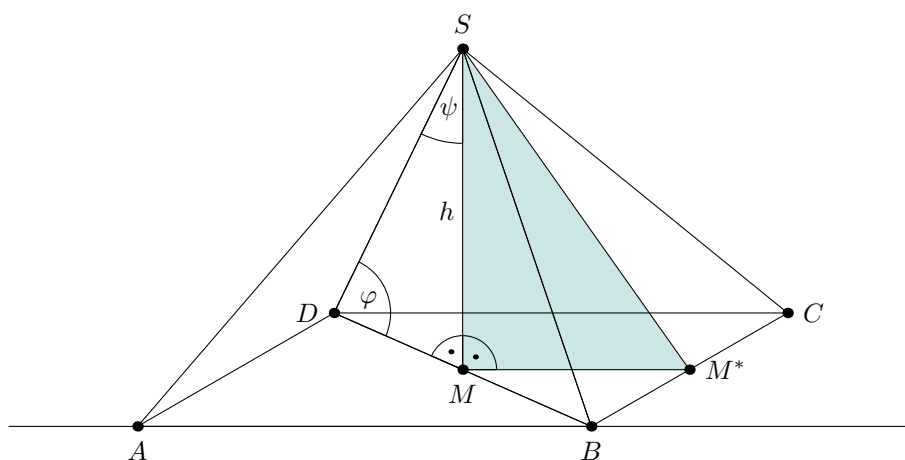
- Zwei Kreisringe mit dem Durchmesser 9cm, die jeweils 2,5cm breit sind
- Zwei Kegelmäntel
- Zwei Halbkugeln mit dem Durchmesser 4cm

Folglich hat Maria Recht: $O_1 = O_2$.

Anmerkung: Natürlich kannst du die Oberflächen auch jeweils berechnen, aber dadurch verzögerst du nur die Entscheidung, ob Maria Recht hat.

5. (a) $h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ wird in (b) gezeigt.

(b)



Im rechtwinkligen Dreieck MM^*S gilt:

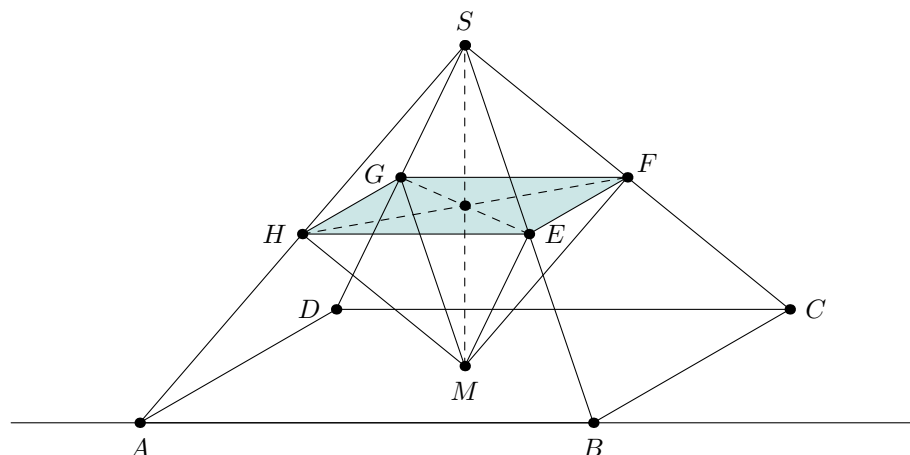
$$\overline{MS}^2 = \overline{M^*S}^2 - \overline{M^*M}^2, \text{ also } h^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

- (c) Der Mittelpunkt M halbiert die Quadratdiagonale $[BD]$. Also gilt:

$\overline{MD} = \frac{a}{2}\sqrt{2} = h$. dann muss das Dreieck DMS gleichschenkelig-rechtwinklig mit $\varphi = \psi = 45^\circ$ sein. Weil die beiden Dreiecke DMS und MBS kongruent sind, ist auch das Dreieck DBS gleichschenkelig-rechtwinklig.

- (d) •



- Du siehst z.B., dass die Seitenkante $[EH]$ der kleinen Pyramide halb so lang wie die Seitenkante $[BA]$ der großen Pyramide ist. Alle anderen Seitenkanten der kleinen Pyramide und deren Höhe sind ebenfalls halb so lang wie die entsprechenden Seitenkanten der großen Pyramide bzw. deren Höhe.
Wenn aber die entsprechenden Seitenkanten im Verhältnis $1 : 2$ stehen, dann müssen die Seitenflächen der kleinen und der großen Pyramide jeweils im Verhältnis $(1 : 2)^2$ stehen. Damit stehen die Oberflächen der beiden Pyramiden im Verhältnis $1 : 4$.
- Wenn die entsprechenden Seitenkanten im Verhältnis $1 : 2$ stehen, dann müssen die Rauminhalte der beiden Pyramide im $(1 : 2)^3$ stehen. Damit stehen die Rauminhalte der beiden Pyramiden im Verhältnis $1 : 8$.

Hinweis: Du hättest auch das Volumen und die Oberfläche der beiden Pyramiden in Abhängigkeit von a einzeln berechnen können. Doch für die kleine Pyramide $EFGHM$ hättest du mehrfach Ähnlichkeitssätze anwenden müssen, die aber für ähnliche Körper, wie es diese beiden Pyramiden nun einmal sind, allgemein gelten: $O' = k^2 \cdot O$ und $V' = k^3 \cdot V$ (hier mit $k = 0,5$).

Das jeweilige Ergebnis wäre das gleiche.

6. $0,5 \text{ kg} = 500 \text{ g}$. Wenn für 100 g Spaghetti ein Liter Wasser benötigt wird, müssen also zunächst $5 \text{ Liter} = 5000 \text{ cm}^3$ Wasser in den Topf.

Zusätzlich muss noch diejenige Wassermenge berücksichtigt werden, die während des Kochvorgangs verdampft.

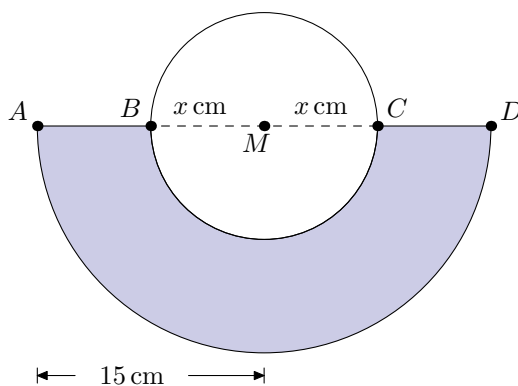
Insgesamt müssen sich dann $5000 \text{ cm}^3 \cdot 1,15 = 5750 \text{ cm}^3$ Wasser im Topf sein.

Die Wassermenge im Topf hat eine zylindrische Form mit einem Radius von 10 cm und der Einfüllhöhe h : $5750 \text{ cm}^3 = (10 \text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot h \Rightarrow h \approx 18,3 \text{ cm}$

Das Wasser im Topf muss knapp 20 cm hoch stehen.

7. (a)

9. Raumgeometrie



Für die Zeichnung gilt: Kugelradius $r = (7,5 : 5) \text{ cm} = 1,5 \text{ cm}$ und äußerer Radius der Halbkugelschale $R = (15 : 5) \text{ cm} = 3 \text{ cm}$.

Beginne am besten mit dem Vollkreis.

(b) Äußere Halbkugel: $O_a = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15^2 \pi \text{ cm}^2 = 250\pi \text{ cm}^2$

Innere Halbkugel: $O_i = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7,5^2 \pi \text{ cm}^2 = 112,5\pi \text{ cm}^2$

Kreisring aus $[AB]$ bzw. $[CD]$: $A_{KR} = (15^2 \pi - 7,5^2 \pi) \text{ cm}^2 = 168,25 \text{ cm}^2$

Somit ergibt sich für die Oberfläche der Halbkugelschale in diesem Fall:

$$O_{HKS} = 531,25\pi \text{ cm}^2 \approx 1668,97 \text{ cm}^2 \approx 1669 \text{ cm}^2 \approx 16,7 \text{ dm}^2.$$

(c) • Äußere Halbkugel: $O_a = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15^2 \pi \text{ cm}^2 = 250\pi \text{ cm}^2$

Innere Halbkugel: $O_i = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x^2 \pi \text{ cm}^2 = 2x^2 \pi \text{ cm}^2$

Kreisring aus $[AB]$ bzw. $[CD]$: $A_{KR} = (15^2 \pi - x^2 \pi) \text{ cm}^2 = (225\pi - x^2 \pi) \text{ cm}^2$

Somit ergibt sich: $O(x) = (250 + 2x^2 + 225 - x^2) \pi \text{ cm}^2 = (x^2 + 475) \pi \text{ cm}^2$.

• $O(7,5) = (7,5^2 + 475) \pi \text{ cm}^2 = 531,25\pi \text{ cm}^2$, siehe Lösung (b).

(d) Die Maßzahlengleichung für $x \in \mathbb{R}^+$ heißt:

$$5 \cdot 4x^2 \pi = (x^2 + 475) \pi \Leftrightarrow 19x^2 = 475 \Leftrightarrow x = 5$$

(e) $V = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 15^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 7,5^3 \right) \text{ cm}^3 = 1968,75\pi \text{ cm}^3 \approx 6185 \text{ cm}^3 \approx 6,2 \text{ dm}^3$

(f) • $V(x) = \frac{2}{3} \pi (15^3 - x^3) \text{ cm}^3 = \left(2250 - \frac{2}{3} x^3 \right) \pi \text{ cm}^3$

9. Raumgeometrie

- $V(7,5) = \left(2250 - \frac{2}{3} \cdot 7,5^3\right) \pi = 1968,75\pi \text{ cm}^3$, siehe Lösung (e).

(g) In der Angabe steht, dass die Halbkugelschale und die Vollkugel aus dem gleichen Material sind. Wenn das Volumen der beiden Körper identisch ist, dann müssen auch die zugehörigen Massen gleich sein. Daraus ergibt sich die zugehörige Maßzahlengleichung mit $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\left(2250 - \frac{2}{3}x^3\right) \pi = \frac{4}{3}x^3\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2250 = 2 \cdot x^3 \quad \Rightarrow \quad x \approx 10,40$$

8. Aus $A_{Kreis} = 6400 \pi \text{ mm}^2$ folgt $r = 80 \text{ mm}$.

Wegen $M_{Kegel} = r \cdot \pi \cdot s$ folgt dann $M_{Kegel} = 80 \cdot \pi \cdot 60 \text{ mm}^2 = 4800 \pi \text{ mm}^2$ und nicht wie angegeben $4000 \pi \text{ mm}^2$. Also passen Grundkreis und Mantelfläche des Kegels nicht zusammen.

9. Für den Kreisradius r gilt: $r^2\pi = 6400 \cdot \pi \text{ mm}^2 \Rightarrow r = 80 \text{ mm}$.

Nach der Formelgleichung für den Kegelmantel muss gelten:

$$80 \text{ mm} \cdot \pi \cdot 60 \text{ mm} = 4000 \cdot \pi \text{ mm}^2, \text{ was falsch ist.}$$

Also passen die beiden Flächenstücke nicht zusammen.

10. $101 = 10 \text{ dm}^3 = 10^4 \text{ cm}^3 = 10^7 \text{ mm}^3$.

Für den Innenradius r_i des Gefäßes gilt dann:

$$\frac{2}{3}r_i^3 = 10^7 \text{ mm}^3 \Rightarrow r_i \approx 168,4 \text{ mm}.$$

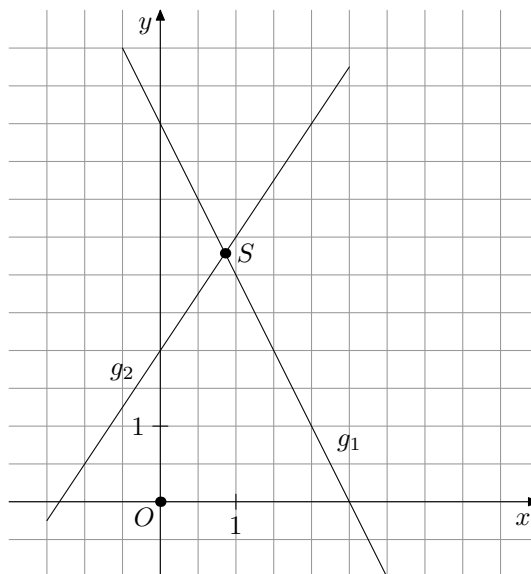
$$\Rightarrow d_i \approx 337 \text{ mm} \Rightarrow d_a \approx 347 \text{ mm}.$$

Teil II.

Wahlpflichtfächergruppe II/III

10. Lineare Funktionen

1. $g_1(t) : y = -x + t$ und $g_2(t) : y = \frac{1}{3}x + t$
2. (a) „... mit sich selbst multiplizierst, dann erhältst du den y -Wert“.
 (b) Erwin hat recht. Z.B.: $2^2 = 4$ und $0,5^2 = 0,25$.
 (c) Z.B.: $y = x^2$.
 (d)
 - In beiden Relationen tauchen die gleichen x -Werte auf. Wenn du jeweils den x -Wert mit sich selbst multiplizierst und dann 1 dazuzählst, erhältst du den y -Wert.
 - Z.B.: $y = x^2 + 1$
3. (a) Bevor du die Gerade g_1 zeichnen kannst, musst du erst ihre Gleichung nach y auflösen:
 $y = -2x + 5$.



(b)

$$\begin{array}{rclcl}
 1,5x + 2 & = & -2x + 5 & & \\
 3,5x & = & 3 & & x \approx -0,86 \quad \text{in } g_1: y \approx 1,5 \cdot 0,86 + 2 \\
 & & & & y \approx 3,29 \quad \Rightarrow \quad S(0,86 \mid 3,29)
 \end{array}$$

- (c) In der Zeichenebene muss jede Gerade h , welche die Gerade g_2 nicht schneidet, zu dieser **parallel** verlaufen; d.h. die Gleichungen der Geraden g_2 und h müssen **den**

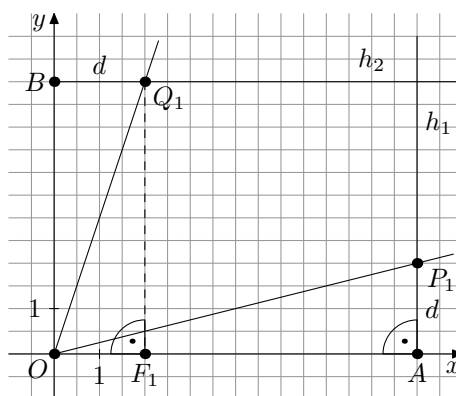
gleichen Steigungsfaktor besitzen.

Dann lautet z.B. die Gleichung einer Geraden h : $y = 1,5x - 11\frac{13}{17}$.

- (d) Grundsätzlich müsstest du die Koordinaten des Punktes A in die Gleichung der Geraden g_2 einsetzen und dann entscheiden, ob die Gleichung eine wahre oder falsche Aussage liefert. Das wäre aber mit erheblichem Rechenaufwand verbunden. „Leider“ helfen herkömmliche Taschenrechner im Moment (im Jahre 2008) auch nicht weiter, weil sie nicht so viele Stellen verarbeiten können. Also muss es noch einen anderen Lösungsweg geben:

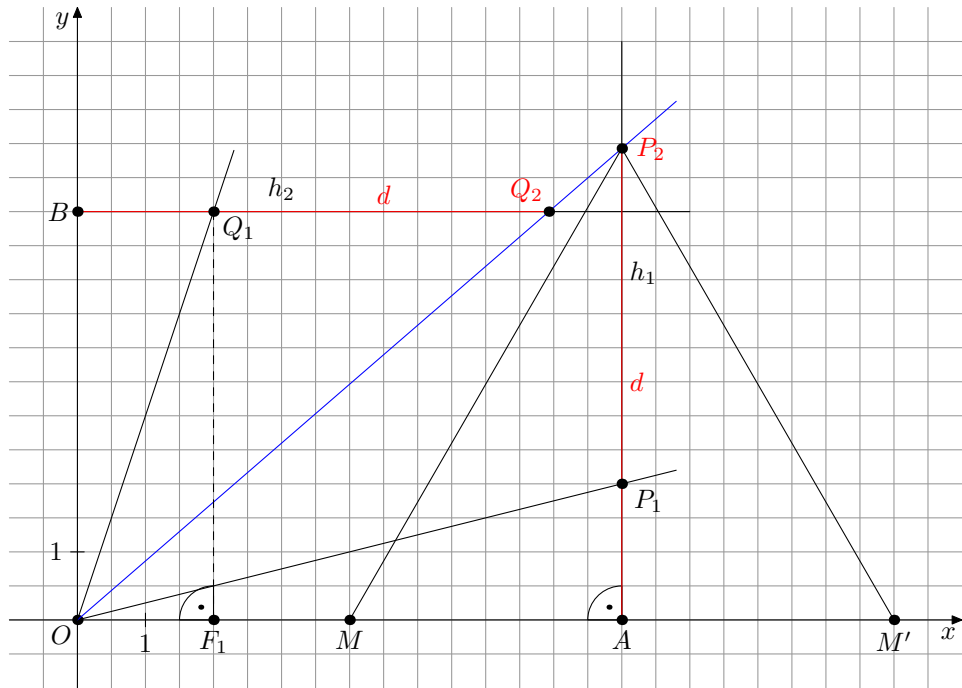
Der Punkt A liegt im IV. Quadranten. Die Gerade g_2 verläuft aber offenbar nicht durch diesen Quadranten. Also liegt der Punkt A nicht auf der Geraden g_2 .

4. (a)



- (b) Der Steigungsfaktor in den beiden Steigungsdreiecken OF_1Q und OAP_1 muss der gleiche sein:
 $\frac{6}{d} = \frac{d}{8} \Leftrightarrow d^2 = 48 \Rightarrow d = 4\sqrt{3} \approx 6,93$.
- (c) Die Maßzahl $d = 4\sqrt{3}$ lässt sich als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $A = 8$ cm deuten:

10. Lineare Funktionen



Der Punkt M' ist durch Spiegelung des Mittelpunktes M der Strecke $[OA]$ am Punkt A entstanden. Über der Strecke MM' wird nun das gleichseitige Dreieck $MM'P_2$ errichtet, dessen Höhe $[AP_2]$ die gesuchte Länge von $\frac{8}{2}\sqrt{3}\text{ cm}$ besitzt.

11. Gleichungssysteme

1. (a) $L = \{(-3 \mid 5)\}$
(b) - -
2. (a) $L = \{(\frac{1}{3}a + 2 \mid \frac{5}{3}a + 1)\}$
(b) Die beiden Gleichungen liefern identische Geraden, also folgt:
 $L = \{(x \mid y) \mid y = 2x - 9\}$
3. $L = \{(-4 \mid 2)\}$
4. $L = \{(5 \mid 2, 5)\}$
5. (a) - -
(b) $S(3, 6 \mid 2, 1)$
(c) Es gibt keine eindeutige Lösung; eine mehr oder weniger geschickte Wahl aus dem Geradenbüschel bleibt den Schülern überlassen.
(d) Jede Gerade, welche die Gerade h nicht schneidet, muss zu dieser parallel sein. Weil g aber nicht parallel zu h liegt, muss g auch alle Parallelen zu h schneiden.
6. (a) - -
(b) $g : y = \frac{1}{3}x + 1,5$
(c) $S(-1, 5 \mid 1)$
(d) Es gibt keine eindeutige Lösung.
(e) Jede Gerade, welche die Gerade h nicht schneidet, muss zu dieser parallel sein. Weil g aber nicht parallel zu h liegt, muss g auch alle Parallelen zu h schneiden.
7. (a) - -
(b) $g_3 : y = 4,25x - 4,5$
(c) $S(3, 6 \mid 2, 1)$

11. Gleichungssysteme

(d) $g_4 : y = x + 500$

(e) $A = 8,1 \text{ FE}$

8. Die Zahlen heißen 12 und 65.

9. - -

10.

- Die Gleichung (1) besagt, dass die Summe aus zwei Zahlen x und y den Wert 1 ergeben soll.

Gleichzeitig soll nach der Gleichung (2) die Summe aus denselben Zahlen x und y den Wert -37 ergeben. Das ist ein Widerspruch. Also gilt $L = \emptyset$.

- Wenn du die Gleichung (2) spaltenweise von der Gleichung (1) subtrahierst, ergibt sich in ausführlicher Schreibweise die Gleichung

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 38$$

Weil die linke Seite der Gleichung stets Null ergibt, steht hier eine stets falsche Aussage; d.h. $L = \emptyset$.

11. (a) „Da müssten wir ja die beiden Gleichungen nach x oder nach y auflösen, und das wird schwierig, weil wir am Ende eine Gleichung durch 7 oder durch 9 teilen müssten. Dann entstehen aber Brüche oder periodische Dezimalzahlen. Dadurch wird die Lösung unnötig erschwert.“

- (b) Hier eignet sich das **Additionsverfahren** zur Lösung:

$$\begin{array}{rclclcl}
 & 3x & - & 7y & = & -27 & (1) \mid \cdot 5 \\
 \wedge & -5x & + & 9y & = & 37 & (2) \mid \cdot 3 \\
 \hline
 & 15x & - & 35y & = & -135 & (1)' \\
 \wedge & -15x & + & 27y & = & 111 & (2)' \\
 \hline
 (1)' + (2)' : & & & -8y & = & -24 &
 \end{array}$$

$$\Rightarrow y = 3, \text{ z.B. in } (1) : x = -2 \quad L = \{(-2 \mid 3)\}$$

12. Anzahl der Goldhamster: x und Anzahl der Zwergkaninchen: y .

Zahl der verkauften Tiere: $10 + x + y = 23$

Einnahmen in €: $10 \cdot 2,5 + 4 \cdot x + 8 \cdot y = 97$.

Damit erhältst du das folgende Gleichungssystem:

11. Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rclcl}
 & x & + & y & = & 13 & (1) \mid \cdot (-4) \\
 \wedge & 4x & + & 8y & = & 72 & (2) \\
 \hline
 & -4x & - & 4y & = & -52 & (1)' \\
 \wedge & 4x & + & 8y & = & 72 & (2)' \\
 \hline
 (1)' + (2)': & & & 4y & = & 20 & \mid : 4
 \end{array}$$

Also: $y = 5$ in (1) : $x = 8$.

Es wurden acht Goldhamster und fünf Zwergkaninchen verkauft.

13. (a) Hier gilt: $63 \text{ cm} = 2 \cdot h + t$.

(b) Z.B.:

$$h_1 = 20 \text{ cm} \Rightarrow t_1 = 23 \text{ cm}$$

$$h_1 = 18 \text{ cm} \Rightarrow t_1 = 27 \text{ cm}.$$

- (c) Es gilt: $h = (63 \text{ cm} - t) : 2$

$$\begin{aligned}
 h = (63 \text{ cm} - t) : 2 &\leq 16 \text{ cm} \mid \cdot 2 \\
 63 \text{ cm} - t &\leq 32 \text{ cm} \mid -63 \text{ cm} \\
 -t &\leq -31 \text{ cm} \mid \cdot (-1) \\
 t &\geq 31 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Die Stufentiefe muss also mindestens 31 cm betragen.

- (d) In der Formelgleichung gilt dann $h = t$: $63 \text{ cm} = 3t$ $t = 21 \text{ cm}$.
Eine Stufentiefe von nur 21 cm wäre für ältere Leute zu gefährlich.

- (e) Es werden 1, 20 m : 15 = 120 cm : 15 cm = 8 Stufen benötigt.

$$63 \text{ cm} = 2 \cdot 15 \text{ cm} + t \Rightarrow t = 33 \text{ cm}.$$

$$33 \text{ cm} \cdot 8 = 264 \text{ cm} = 2,64 \text{ m}.$$

Die gesamte Treppenlänge beträgt also 2,64 m.

14. (a) Wegen $\mathbb{T}_{77} = \{1; 7; 11; 77\}$ folgt

entweder:

$$\begin{array}{rclcl}
 & a & + & b & = & 11 & (1) \\
 \wedge & a & - & b & = & 7 & (2) \\
 \hline
 (1) + (2) : & 2a & & & = & 18
 \end{array}$$

$$\Rightarrow a = 9 \quad \text{z.B. in (2): } b = 2$$

$$\text{Probe: } 9^2 - 2^2 = 81 - 4 = 77, \text{ stimmt.}$$

oder:

$$\begin{array}{rclcl}
 & a & + & b & = & 77 & (1) \\
 \wedge & a & - & b & = & 1 & (2) \\
 \hline
 (1) + (2) : & 2a & & & = & 78
 \end{array}$$

$$\Rightarrow a = 39 \quad \text{z.B. in (2): } b = 38$$

$$\text{Probe: } 39^2 - 38^2 = 1521 - 1444 = 77, \text{ stimmt.}$$

11. Gleichungssysteme

$$\Rightarrow L = \{(9 \mid 2); (39 \mid 38)\}$$

- (b) 83 ist eine Primzahl. Wegen $T_{83} = \{1; 83\}$ folgt

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 83 \quad (1) \\ \wedge & & \\ a - b & = & 1 \quad (2) \\ \hline (1) + (2) : & 2a & = 84 \end{array}$$

$$\Rightarrow a = 42 \quad \text{z.B. in (2): } b = 41$$

$$\text{Probe: } 42^2 - 41^2 = 1764 - 1681 = 83, \text{ stimmt.}$$

- (c) Wegen $T_{38} = \{1; 2; 19; 38\}$ folgt z.B.

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 19 \quad (1) \\ \wedge & & \\ a - b & = & 2 \quad (2) \\ \hline (1) + (2) : & 2a & = 21 \quad \Rightarrow a \notin \mathbb{N} \quad \Rightarrow b \notin \mathbb{N} \end{array}$$

$$\text{Damit folgt: } L = \emptyset.$$

- (d) Das folgende Gegenbeispiel zeigt, dass Edwin Unrecht hat:

$$a^2 - b^2 = 44. \text{ Daraus wird z.B.:}$$

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 22 \quad (1) \\ \wedge & & \\ a - b & = & 2 \quad (2) \\ \hline (1) + (2) : & 2a & = 24 \end{array}$$

$$\Rightarrow a = 12 \text{ und } b = 10.$$

$$\text{In der Tat ist } 12^2 - 10^2 = 144 - 100 = 44.$$

Für $a^2 - b^2 = 2^n \cdot p$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $p \in \mathbb{P}$ ist die Lösungsmenge nie leer.

12. Reelle Zahlen

1. Vereinfache jeweils den Term so weit wie möglich ohne mit dem Taschenrechner zu runden. Es muss ein logischer Rechenweg zum Ergebnis führen.

(a) $\sqrt{(\sqrt{1000} + \sqrt{999}) \cdot (\sqrt{1000} - \sqrt{999})}$

(b) $(\sqrt{3}^2 - 3) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})^{3876}$

(a) 1

(b) 0

2. (a) Bei der Basis 1 kann der Exponent heißen, wie er will: Der Potenzwert ist immer 1.
 $(3 + 1^{9876534212345}) \cdot (7\sqrt{2} - 3\sqrt{2})^2 = 4 \cdot (4\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 16 \cdot 2 = 128$

- (b) Jede Potenz mit der Basis 0 und einem natürlichen Exponenten hat den Wert 0.

$$\left(\frac{185}{37} - 0^{555666777888999}\right) : \left(\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} + 95\right) =$$

$$= 5 : \left(\sqrt{\frac{50}{2}} + 95\right) = 5 : 100 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

(c) $\sqrt{9\frac{1}{4}} : \sqrt{4\frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{37}{4}} : \sqrt{\frac{37}{8}} = \sqrt{\frac{37}{4} \cdot \frac{8}{37}} = \sqrt{2}$

- (d) Der Term stellt ein Produkt aus drei Faktoren dar: In jedem Klammernpaar steht einer davon.

Ein Produkt hat dann den Wert 0, wenn mindestens ein Faktor den Wert 0 hat. Du siehst:

$$\underbrace{\left(\sqrt{12} + 13^{1000}\right)}_{>0} \cdot \left(\sqrt{1}^{777555333111} - \frac{1}{2} : \frac{3}{6}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{9888777666555}{9888777666554} + 14^{-87}\right)}_{>0}$$

Dann muss der Faktor in der Mitte den Wert 0 besitzen:

$\sqrt{1} = 1$. Nach Lösung (a) ist also $\sqrt{1}^{9876534212345} = 1$

und $\frac{1}{2} : \frac{3}{6} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$.

Somit vereinfacht sich der mittlere Faktor zu $1 - 1 = 0$. Damit ist der ganze Produktwert 0.

3. $\sqrt{9\frac{1}{4}}$ ist ausführlich geschrieben $\sqrt{9 + \frac{1}{4}}$.

Claudia hat also über einem **Pluszeichen** die Wurzel in zwei einzelne Wurzeln zerlegt. Das darfst du aber nur bei **Punktrechnungen** tun.

Der richtige Weg wäre: $\sqrt{9\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$. Spätestens hier erkennst du, dass die Wurzel „nicht aufgeht“; d.h. das Ergebnis ist nicht rational.

Und tatsächlich: $\frac{\sqrt{37}}{2} \approx 3,041381265$.

4. Wenn $\sqrt{2} = 1,414213562$ wäre, dann müsste umgekehrt $1,414213562^2 = 1,414213562 \cdot 1,414213562 = 2$ gelten.

Wenn man aber eine Zahl mit einer anderen Zahl multipliziert, dann ist die Endziffer des Produktwertes die letzte Ziffer des Produktwertes der beiden Endziffern der beiden Faktoren.

Beispiel: $109457 \cdot 5620003$ liefert das Produkt der Endziffern $7 \cdot 3 = 21$.

Also endet der Produktwert aus $109457 \cdot 5620003$ mit der Ziffer 1. Bei Dezimalzahlen gilt diese Regel natürlich auch.

Der Produktwert $1,414213562 \cdot 1,414213562$ besitzt $9 + 9 = 18$ Stellen nach dem Komma, wobei die letzte Ziffer nicht 0 sein kann, denn dann wäre ja schon nach 17 Ziffern Schluss. Die letzte Ziffer ist $2 \cdot 2 = 4$.

Der ETR rundet also auf 9 Stellen nach dem Komma.

Anmerkung:

Es ist $1,414213562 \cdot 1,414213562 = 1,999999998944727844$, also treten die vorhergesagten 18 Stellen nach dem Komma auf.

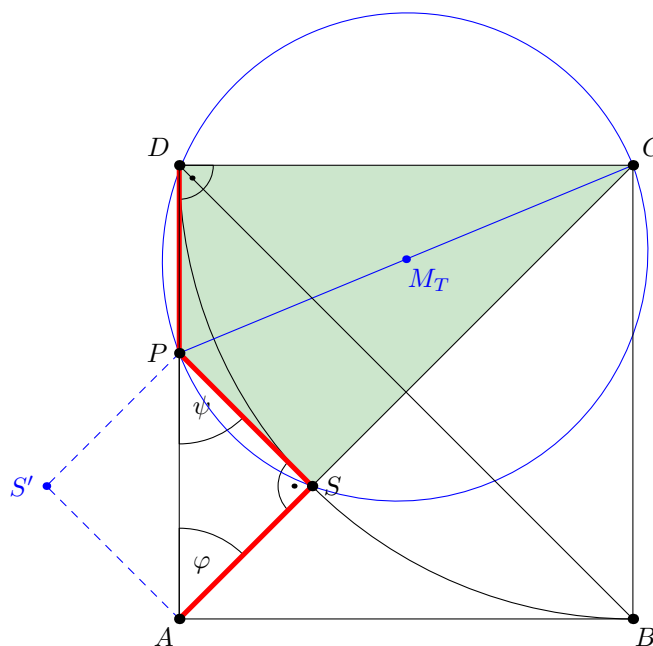
Der ETR zeigt aber nur 9 Stellen nach dem Komma an. Also muss er runden: Die 10. Ziffer im Ergebnis ist eine 9. Also wird die 9. Ziffer nach dem Komma, nämlich die 8, zur 9. Dann müsste der ETR eigentlich für $\sqrt{2}^2$ das Ergebnis 1,999999999 anzeigen.

Das macht er aber nur, wenn du $1,414213562 \cdot 1,414213562$ oder $1,414213562^2$ per Hand eingibst.

Wenn du dagegen „ $\sqrt{2}$ “ eingibst, und das Ergebnis mit der „ x^2 “-Taste quadrierst, dann erscheint „glatt“ 2 im Fenster. Daraus kannst du schließen, dass der ETR bei $\sqrt{2}$ anders rundet als bei der „Handeingabe“.

$$\begin{aligned}
 5. \quad & \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}} \right)^{444} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} \right)^{444} = \left(\frac{(\sqrt{5}-1) \cdot (\sqrt{5}+1)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \right)^{444} = \left(\frac{\sqrt{5}^2 - 1^2}{\sqrt{2}^2} \right)^{444} = \\
 & = \left(\frac{4}{2} \right)^{444} = 2^{444} = 2^{4 \cdot 111} = (2^4)^{111} = 16^{111}.
 \end{aligned}$$

6. (a)



- (b) • Es gilt: $\overline{CS} = \overline{CD}$. (*)
 Die Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ sind Halbierende der betreffenden rechten Innenwinkel.
 Also folgt $\varphi = 45^\circ$.
 Wegen der Innenwinkelsumme im rechtwinkligen Dreieck ASP gilt dann $\psi = 45^\circ$.
 Also ist das Dreieck ASP gleichschenkelig. Damit gilt:
 $\overline{AS} = \overline{AC} - \overline{SC} = \overline{SP} = (6\sqrt{2} - 6) \text{ cm}$.

Der Punkt S' ist das Spiegelbild des Punktes S an der Strecke $[AP]$. Das Dreieck ASP ist somit die Hälfte eines Quadrates mit der Diagonalen $[AP]$.

Somit gilt: $\overline{AP} = \overline{AS} \cdot \sqrt{2} = (12 - 6\sqrt{2}) \text{ cm}$.

$\Rightarrow \overline{DP} = \overline{AD} - \overline{AP} = [6 - (12 - 6\sqrt{2})] \text{ cm} = (6\sqrt{2} - 6) \text{ cm} = \overline{PS} = \overline{AS}$.

Mit (*) ist erwiesen, dass es sich um einen achsensymmetrischen Drachen handelt.

- Die Diagonale $[PC]$ des Drachens $SCDP$ zerlegt dieses Viereck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke. Somit liegen die Eckpunkte S , C , D und P dieses Vierecks auf dem THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[SC]$. Dieser Kreis ist also der Umkreis des Drachenvierecks.

7. (a) $x = 6$.

(b) Gleichung (2):

Da der Nenner stets von 0 verschieden ist, hat der Bruch den Wert 0, wenn der Zähler den Wert 0 hat. Das ist wieder wie in (1) für $x = 6$ der Fall.

Gleichung (3):

Für die Definitionsmenge D gilt: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Der Zähler verschwindet für $x = 6$.

12. Reelle Zahlen

Also ist die Lösung wieder die gleiche wie in (1).

Gleichung (4):

Der Nenner wird 0, wenn $x = 6$ gilt. Also folgt $D = \mathbb{R} \setminus \{6\}$.

Der Zähler hat nur eine einzige Nullstelle, nämlich $x = 6 \notin D$. Die Lösungsmenge ist im Gegensatz zu (1) **leer**.

Gleichung (5):

Wieder gilt $D = \mathbb{R} \setminus \{6\}$.

$$36 - x^2 = (6 - x)(6 + x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 \notin D \vee x = -6 \in D.$$

Also ist $x = -6$ die einzige Lösung. Sie stimmt nicht mit der Lösung von (1) überein.

Gleichung (6):

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-6\}.$$

$$0,5x^2 - 6x + 18 = 0,5(x - 6)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 \in D.$$

Die Gleichung (6) besitzt die gleiche Lösung wie die Gleichung (1).

Gleichung (7):

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

$$= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \in D \vee x = 6 \in D.$$

Eine der Lösungen der Gleichung (7) ist zwar mit der der Gleichung (1) identisch, aber die Gleichung (7) besitzt noch eine zweite Lösung, die in (1) nicht auftaucht. (1) und (7) haben also **verschiedene Lösungsmengen**.

Gleichung (8):

$$(-1, 1)^{17} \cdot (\sqrt{2x} + 2\sqrt{3}) \cdot 17\frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2x} - \sqrt{12}) =$$

$$(-1, 1)^{17} \cdot 17\frac{1}{3} \cdot [(\sqrt{2x})^2 - (\sqrt{12})] = (-1, 1)^{17} \cdot 17\frac{1}{3} \cdot [2x - 12] = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 6 \in D.$$

Also ist die Lösung wieder die gleiche wie in (1).

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

1. (a) - -
 (b) $A_{PQRS} = 9 \text{ cm}^2$
 (c) $\beta = 14,04^\circ$

2. (a) 9 cm, 18 cm
 (b) $d = \sqrt{405} \text{ cm} \approx 20,12 \text{ cm}$

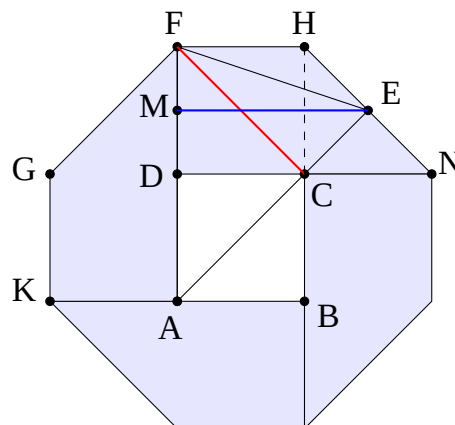
3. $x = 5$.

4. $x = 5,8$

5. $\overline{CD} = 2,8 \text{ cm}$

6. (a) $e = 4 \text{ cm}$
 (b) $u = 4 \cdot \sqrt{40} \text{ cm} \approx 25,28 \text{ cm}$

7. (a) $[FG]$ ist genauso lang wie die Diagonale $[AC]$ des Quadrates $ABCD$.
 Also gilt: $a\sqrt{2} = 3,2 \Rightarrow a = \frac{3,2}{\sqrt{2}} \approx 2,26$.
 Für die Zeichnung: $\overline{AF} = \overline{KB} = 2a \text{ cm} \approx 5,52 \text{ cm}$.



(b) $A(ABCD) = a^2 \text{ cm}^2 = \left(\frac{3,2}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ cm}^2 = 5,12 \text{ cm}^2$

- (c) • Wegen $\overline{CE} = 0,5 \cdot \overline{AC}$ müsste gelten:

$$2a = 1,5a\sqrt{2} \quad (a \neq 0) \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}.$$

Weil aber $\sqrt{2}$ irrational ist, liegt hier ein Widerspruch vor.

Dieser Widerspruch lässt sich auch durch Vergrößerung oder Verkleinerung der Figur nicht auflösen: Jede Vergrößerung oder Verkleinerung ist eine winkeltreue Abbildung. Wenn in der Ausgangsfigur keine zwei Winkel maßgleich sind, dann wird dies auch bei einer Größenänderung nicht anders.

- Es wird nur mit Maßzahlen gerechnet.

1. Möglichkeit:

$$A(AEF) = 0,5 \overline{AE} \cdot \overline{FC} = 0,5 \cdot 1,5a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 1,5a^2.$$

2. Möglichkeit:

$$A(AEF) = 0,5 \cdot \overline{AF} \cdot \overline{EM} = 0,5 \cdot 2a \cdot 1,5a = 1,5a^2.$$

3. Möglichkeit:

Das Lot $[FC]$ zerlegt das Dreieck AEF in die beiden rechtwinkligen Teildreiecke ACF und CEF .

Das Dreieck ACF ist so groß wie das Quadrat $ABCD$: $A(ACF) = a^2$.

Weil $[FC] \parallel [HN]$ ist, folgt $A(CEF) = A(FCH) = 0,5a^2$.

$$\Rightarrow A(AEF) = a^2 + 0,5a^2 = 1,5a^2.$$

8. Der Flächeninhalt beträgt $8,625 \text{ cm}^2$.

9. (a) –

(b)

$$A_T(x) = \frac{8+x}{2} \cdot \frac{x}{2} \text{ cm}^2 = \frac{x^2+8x}{4} \text{ cm}^2 = (0,25x^2 + 2x) \text{ cm}^2$$

- (c) 1. Möglichkeit (mühsam):

$$0,25x^2 + 2x = 33 \Leftrightarrow 0,25(x+4)^2 = 37 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 148(*)$$

Wegen $x \in \mathbb{R}^+$ ist (*) gleichwertig mit $x = 2\sqrt{37} - 4 > 8$, was wegen $\overline{EF} = x \text{ cm} \leq \overline{AB} = 8 \text{ cm}$ nicht geht.

2. Möglichkeit:

Damit das Dreieck AED existiert, muss $x < 8$ gelten. Das Trapez $ABFE$ nimmt stets weniger als die Hälfte des Rechtecks $ABCD$ ein. Also muss stets $A_T < 32 \text{ cm}^2$ sein und damit kann dieser Flächeninhalt nicht größer als 32 cm^2 (nämlich 33 cm^2) sein.

- (d) Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ muss dreimal so groß sein wie der Flächeninhalt des Trapezes $ABFE$:

$$3 \cdot (0,25x^2 + 2x) = 8x \Rightarrow 0,75x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(0,75x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \dagger$$

$$\text{wegen } x \in \mathbb{R}^+ \quad \vee \quad 0,75x - 2 = 0 \Rightarrow x \approx 2,67$$

- (e) Es muss gelten:

$$8 - x = \frac{x}{2}\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{16}{2 + \sqrt{3}} \Leftrightarrow x \approx 4,29$$

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

- (f) Es muss gelten:

$$x + \frac{x}{2} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 1,5x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 5,33$$

10.

- (a) –

- (b) $\triangle RQC \cong \triangle APS \quad \wedge \quad \triangle SRD \cong \triangle PBQ$.

Damit sind je zwei gegenüber liegende Seiten des Vierecks $PQRS$ gleich lang. Also handelt es sich um ein Parallelogramm.

- (c) Der gesuchte Flächeninhalt ergibt sich z.B. dadurch, dass man an den Eckpunkten des Rechtecks $ABCD$ die vier jeweils paarweise kongruenten rechtwinkligen Dreiecke abschneidet.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \overline{RD} &= 0,5(a-x) \text{ cm} = \overline{PB} \quad \wedge \quad \overline{SD} = 0,5(b-x) \text{ cm} = \overline{BQ}. \\ A(SRD) + A(PBQ) &= 2 \cdot [0,5 \cdot 0,5(a-x) \cdot 0,5(b-x)] \text{ cm}^2 \\ &= 0,25(a-x)(b-x) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Weiter gilt: } \overline{RC} &= 0,5(b+x) \text{ cm} = \overline{AP} \quad \wedge \quad \overline{CQ} = 0,5(a+x) \text{ cm} = \overline{AS}. \\ A(RQC) + A(APS) &= 2 \cdot [0,5 \cdot 0,5(b+x) \cdot 0,5(a+x)] \text{ cm}^2 \\ &= 0,25(a+x)(b+x) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Im Folgenden wird nur mit Maßzahlen gerechnet.

$$\begin{aligned} A(PQRS) &= ab - [0,25(a-x)(b-x) + 0,25(a+x)(b+x)] \\ &= ab - 0,25[ab - ax - bx + x^2 + ab + ax + bx + x^2] \\ &= ab - 0,5ab - 0,5x^2 \\ A(PQRS) &= 0,5(ab - x^2), \text{ was zu zeigen war.} \end{aligned}$$

- (d) Für die Maßzahlen gilt:

$$\frac{ab - 0,5x^2}{2} = 0,5ab - 0,25x^2$$

Wegen $0,25x^2 > 0$ (für alle $x \in \mathbb{R}^+$) folgt:

$$\frac{ab - 0,5x^2}{2} < \frac{ab}{2} = 0,5ab = 0,5 \cdot A(ABCD).$$

11. (a) Die Katheten der Dreiecke sind jeweils zu einer der Koordinatenachsen parallel. Ihre Längen können deshalb mit Hilfe der Koordinaten der Eckpunkte einfach bestimmt werden.

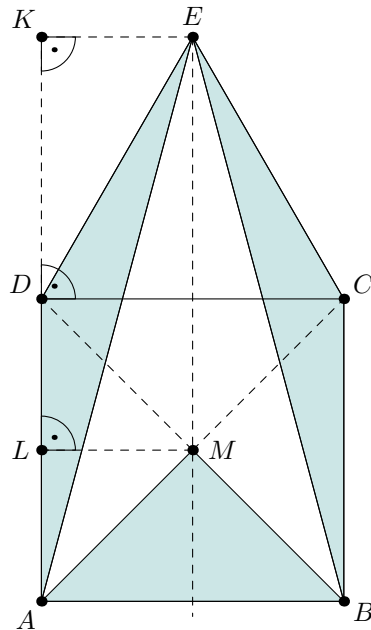
- (b) $A_{ABCD} = 26 \text{ cm}^2$

- (c) –

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

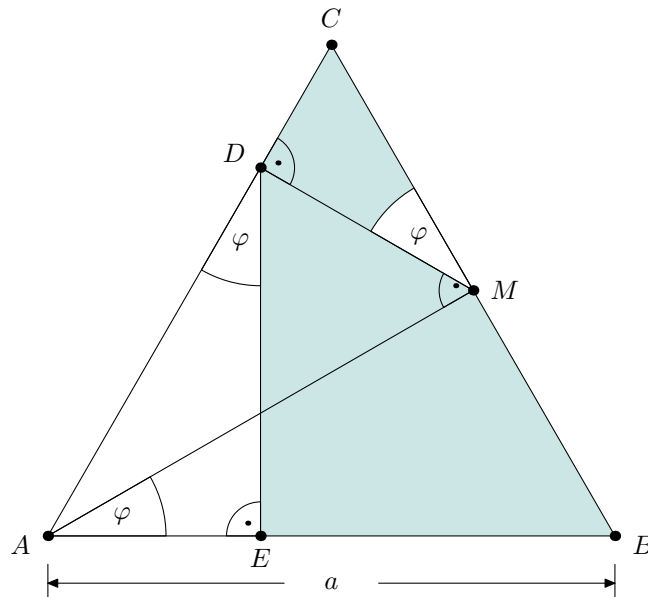
12. (a) -.-
(b) -.-
(c) $x = 6$: Das Dreieck entartet zur Strecke.
 $x = 7$: Das betreffende Dreieck erhält den falschen Drehsinn.
(d) Es gibt zwei solche Dreiecke: Man errichte im Punkt A und im Punkt B jeweils eine Senkrechte zur Strecke AB .
(e) g^* muss so zu AB parallel liegen, dass der korrekte Drehsinn gewahrt bleibt.
13. $d = 6,3 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \approx 8,91 \text{ cm}$
14. (a) - -
(b) - -
(c) Ergebnis: $A_{\triangle ABC} = 10 \text{ cm}^2$
(d) - -
15. $x = 5$.
16. $x = 5,8$
17. (a) -.-
(b) -.-
(c) $x = 6$: Das Dreieck entartet zur Strecke.
 $x = 7$: Das betreffende Dreieck erhält den falschen Drehsinn.
(d) Es gibt zwei solche Dreiecke: Man errichte im Punkt A und im Punkt B jeweils eine Senkrechte zur Strecke AB .
(e) g^* muss so zu AB parallel liegen, dass der korrekte Drehsinn gewahrt bleibt.
18. $d = 6,3 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \approx 8,91 \text{ cm}$
19. (a)

13. Flächeninhalt ebener Vielecke



- (b) In der Figur ist die Gerade EM die Symmetrieachse. Deshalb sind die beiden Dreiecke AED und BCE kongruent, insbesondere also flächengleich. Der Flächeninhalt der Dreiecke ABM und AMD ist ebenfalls gleich. Die Dreiecke AMD und AED besitzen dieselbe Grundseite $[AD]$. Außerdem sind die zugehörigen Höhen $[LM]$ bzw. $[KE]$ gleich lang. Also besitzen die beiden Dreiecke AMD und AED und damit auch das Dreieck ABM den gleichen Flächeninhalt, nämlich 25% der Quadratfläche.

20. (a)



- (b) In einem gleichseitigen Dreieck hat jeder Innenwinkel das Maß 60° .

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

Das bedeutet hier: $\varphi = 30^\circ$. Somit sind die Dreiecke ABM , DMC und AED **halbe gleichseitige Dreiecke**.

$$\Rightarrow \overline{BM} = \overline{MC} = 0,5a$$

$$\Rightarrow \overline{DC} = 0,5 \cdot \overline{MC} = 0,5 \cdot 0,5a = 0,25a$$

$$\Rightarrow \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{DC} = a - 0,25a = 0,75a$$

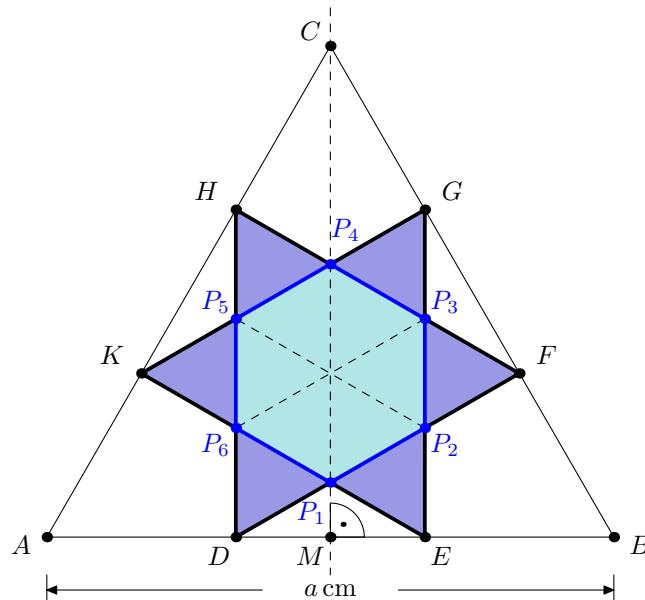
Weiter gilt: $\triangle AED \sim \triangle ABM$. Streckungsfaktor $k = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{0,75a}{a} = 0,75$.

Es ist hier also gleichgültig, wie lang die Seite des Grundstückes ist.

$$\text{Nun gilt: } A_{\triangle AED} = 0,75^2 \cdot A_{\triangle ABM} \Rightarrow \frac{A_{\triangle AED}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2} \cdot 0,5625 = 28,125\%.$$

Das ist der prozentuale Anteil der asphaltierten Fläche an der Gesamtfläche (100%). Die Rasenfläche nimmt also knapp 72% des Grundstückes ABC ein.

21. (a)



(b) Die Gerade $[CM]$ ist eine Symmetrieachse des Dreiecks ABC , die auf der Basis $[AB]$ senkrecht steht.

Nun gilt $\overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$ und $\overline{DM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD}$, weil ja z.B. der Punkt D die Strecke $[AB]$ drittelt.

Also teilt der Punkt D die Strecke $[AM]$ im Verhältnis $2 : 1$. Dasselbe Streckenverhältnis erzeugt aber auch der Punkt H auf der Strecke $[AC]$. Also sind die beiden Dreiecke AMC und ADH zueinander ähnlich.

$$\Rightarrow [DH] \parallel [MC] \Rightarrow \angle HDA = 90^\circ.$$

Aus Symmetriegründen sind die Punkte E , F , G , H und K ebenfalls Scheitel von rechten Winkeln.

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

- (c) Wir rechnen meist ohne die Einheiten „cm“ bzw. „cm²“.

Das Dreieck DBF ist rechtwinklig: $\overline{DF}^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot a\right)^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot a\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot a^2$.

Die Dreiecke DBF , HFC und ADH sind kongruent. $\Rightarrow \overline{DF} = \overline{FH} = \overline{HD}$.

Die Dreiecke EBG , KGC und AEK sind kongruent. $\Rightarrow \overline{EG} = \overline{GK} = \overline{KE}$.

Also sind die beiden Dreiecke DFH und EGK gleichseitig. Die sechs kleinen Dreiecke über den Sechsecksseiten $\overline{P_1P_2} \dots \overline{P_6P_1}$ sind ebenfalls gleichseitig und kongruent. Das Sechseck $P_1 \dots P_6$ ist damit regelmäßig.

$$A_{\Delta DFH} = \frac{1}{4} \cdot \overline{DF}^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Weil z.B. $\overline{P_1P_2} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DF}$ gilt, folgt:

$$A_{\Delta EP_2P_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot A_{\Delta DFH} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{108} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Der Stern besteht z.B. aus den Dreieck DFH , an das drei kleine Dreiecke vom Typ EP_2P_1 angefügt worden sind:

$$A_{\text{Stern}} = \left(\frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{108} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\right) = \frac{1}{9} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$k_1 = \frac{A_{\text{Stern}}}{A_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1}{9} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\right) : \left(\frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\right) = \frac{4}{9}$$

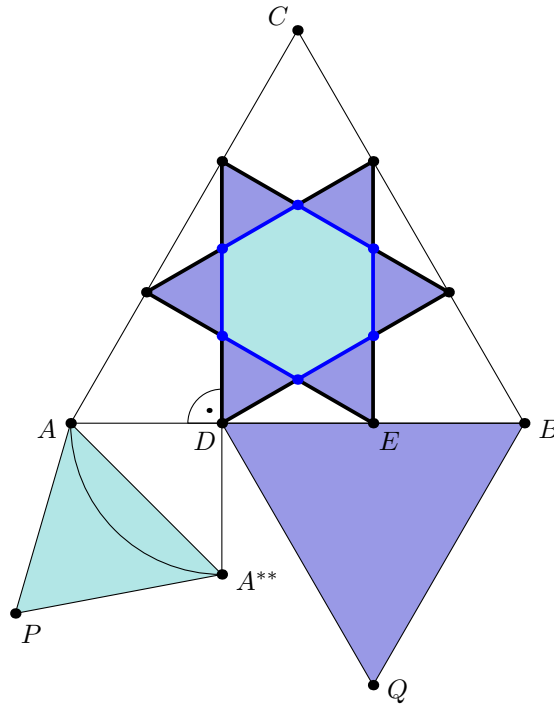
- (d) Die gesuchten Hilfslinien sind die Diagonalen des Sechsecks. Durch sie wird dieses Sechseck in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegt.

Wenn Du diese sechs kongruenten gleichseitigen Dreieck nach außen klappst, hast du den Stern erzeugt. Also besteht der Stern insgesamt aus 12 solcher Dreiecke. Damit ist der Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks $P_1 \dots P_6$ im Inneren halb so groß wie der des Sterns:

$$k_2 = 0,5 \cdot k_1 = \frac{2}{9}.$$

Anmerkung: Eine Begründung muss also nicht unbedingt rechnerisch erfolgen. Trotzdem kannst du auch wieder das Verhältnis als Bruch von Flächeninhalten herleiten. Das ist aber umständlicher.

- (e)



- Für das gesuchte Dreieck „ Δ^* “ mit der Seitenlänge a^* cm gilt:

$$A_{\Delta^*} = A_{\text{Stern}} = \frac{4}{9} \cdot A_{\Delta ABC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot A_{\Delta ABC}$$

$$\Rightarrow a^* = \frac{2}{3} \cdot a.$$

Errichte also z.B. unter der Strecke $[DB]$ das gesuchte Dreieck DQB mit der Seitenlänge $\overline{DB} = a^*$. (Siehe Zeichnung oben.)

- Für das gesuchte Dreieck „ Δ^{**} “ mit der Seitenlänge a^{**} cm gilt:

$$A_{\Delta^{**}} = A_{\text{Sechseck}} = \frac{2}{9} \cdot A_{\Delta ABC} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot A_{\Delta ABC}$$

$$\Rightarrow a^{**} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a = \left(\frac{1}{3} \cdot a\right) \sqrt{2}.$$

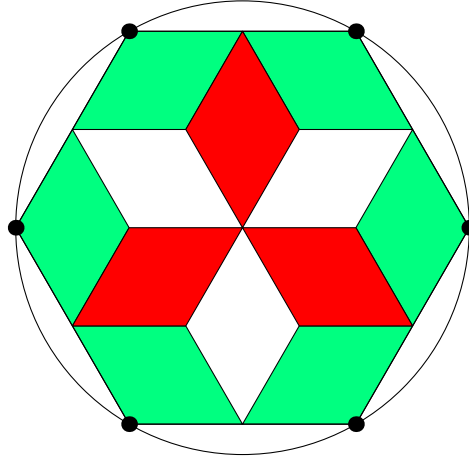
Der Term $\left(\frac{1}{3} \cdot a\right) \sqrt{2}$ lässt sich als Diagonalenlänge eines Quadrates mit der Seitenlänge $\frac{1}{3} \cdot a$ deuten.

In der Zeichnung oben ist das Dreieck $AA^{**}D$ ein halbes Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AD} = \frac{1}{3} \cdot a$. Damit hat die Diagonale $[AA^{**}]$ die Länge $\left(\frac{1}{3} \cdot a\right) \sqrt{2} \text{ cm} = a^{**} \text{ cm}$. Also ist das Dreieck APA^{**} das gesuchte.

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

Das dunkel getönte gleichseitige Dreieck DQB hat den doppelten Flächeninhalt wie das hell getönte Dreieck APA^{**} .

22. (a)

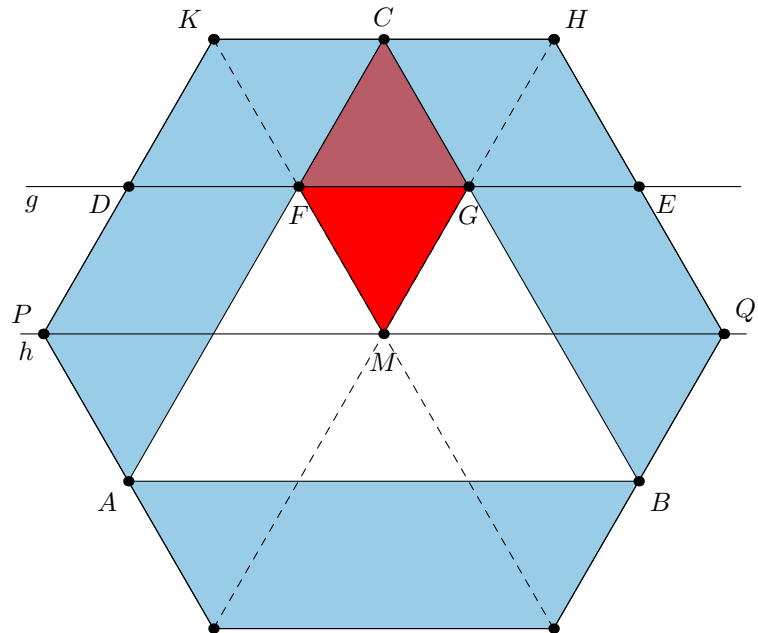


Das Bild ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

Zeichne zunächst einen Kreis mit Radius 6 cm. Um die Eckpunkte auf der Kreislinie zu erhalten, trägst du den Kreisradius 6-Mal auf der Kreislinie ab. Beginne am linken oder am rechten Eckpunkt, dann liegen die oberste und die unterste Seite des Sechsecks waagrecht. Verbinde dann dünn mit dem Bleistift immer zwei entsprechende Seitenmittelpunkte miteinander, so wie es die Zeichnung darstellt.

Damit bist du praktisch fertig. Es gilt jetzt nur noch, die entstandenen Teilflächen entsprechend auszumalen.

(b)



13. Flächeninhalt ebener Vielecke

Die beiden gestrichelten Linien und die Zentrale h zerlegen das regelmäßige Seckseck in 6 kongruente gleichseitige Dreiecke.

Also sind die Vierecke $PMHK$ und $MQHK$ kongruente Rauten. Weil die Punkte D und E Seitenmittelpunkte des Sechsecks sind, schneidet die Gerade g die Rautendiagonalen $[KM]$ bzw. $[MH]$ in den Rautenmittelpunkten F und G .

Damit sind die Punkte F und G Seitenmittelpunkte des Dreiecks MHK . Also gilt: $\triangle FGC \cong \triangle MGF$. Das Viereck $MGCF$ ist eine Raute.

Durch Drehung um 120° lässt sich ein rotes Viereck mit einem anderen zur Deckung bringen.

- (c) Betrachte erneut die Figur in der Lösung der Aufgabe (b):

Die drei gefärbeten Trapeze sind kongruent. Also ist das Dreieck ABC gleichseitig. Aus Symmetriegründen müssen dann alle 3 weißen, alle drei roten und alle sechs grünen Rauten in der Ausgangsfigur kongruent sein.

Das Seckseck enthält 12 Rauten, der Stern enthält 6 Rauten und die Mitsubishi-Figur enthält 3 Rauten.

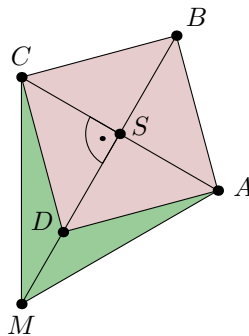
Prozentualer Anteil des Sterns am Sechseck: $\frac{6 \text{ Rauten}}{12 \text{ Rauten}} = 0,5 = 50\%$.

- (d) Prozentualer Anteil des Logos am Sechseck: $\frac{3 \text{ Rauten}}{12 \text{ Rauten}} = 0,25 = 25\%$.

23. (a) Zeichne zunächst einen Kreis mit Radius 6 cm. Um die Eckpunkte auf der Kreislinie zu erhalten, trägst du den Kreisradius 6-mal auf der Kreislinie ab. Beginne am oberen, dann am unteren Eckpunkt.

Um die Quadrate zu konstruieren, zeichnest du am besten einen THALES-Kreis, dessen Durchmesser irgendeine Seite des regelmäßigen Sechsecks ist. Ein solcher ist schon in der Darstellung oben gestrichelt eingezeichnet. Beachte sodann, dass die Diagonalen in jedem Quadrat gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen. Die Eckpunkte der restlichen Quadrate erhältst du z.B. durch Punkt- bzw. Achsenspiegelungen.

- (b)



Dieser Ausschnitt der Gesamtfigur ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

- (c) Die Diagonalenlänge jedes der 6 Quadrate beträgt 6 cm.

$$\Rightarrow A_{\text{Quadrat}} = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \text{ cm}^2 = 18 \text{ cm}^2$$

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

- (d) Berechne zunächst den Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks. Es besteht aus 6 kongruenten gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge 6 cm.

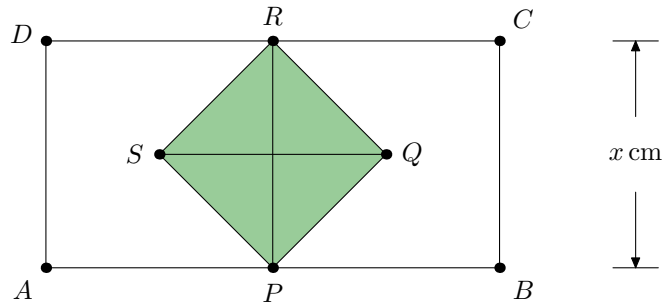
$$\Rightarrow A_{\text{Sechseck}} = 6 \cdot \frac{6^2}{4} \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2 = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 93,53 \text{ cm}^2.$$

Um den Stern zu erhalten, musst du aus diesem Sechseck 6 halbe Quadrate ausschneiden.

Die Fläche des Sterns erhältst du also dadurch, dass du von seinem Flächeninhalt den von 3 Quadraten subtrahierst:

$$A_{\text{Stern}} = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2 - 3 \cdot 18 \text{ cm}^2 = 18(3\sqrt{3} - 4) \text{ cm}^2 \approx 21,53 \text{ cm}^2.$$

24. (a) • $x = 3$:



- In jedem Quadrat stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht. Außerdem sind sie gleich lang, und sie halbieren sich. Also gilt $\overline{PR} = \overline{SQ} = 3 \text{ cm}$.

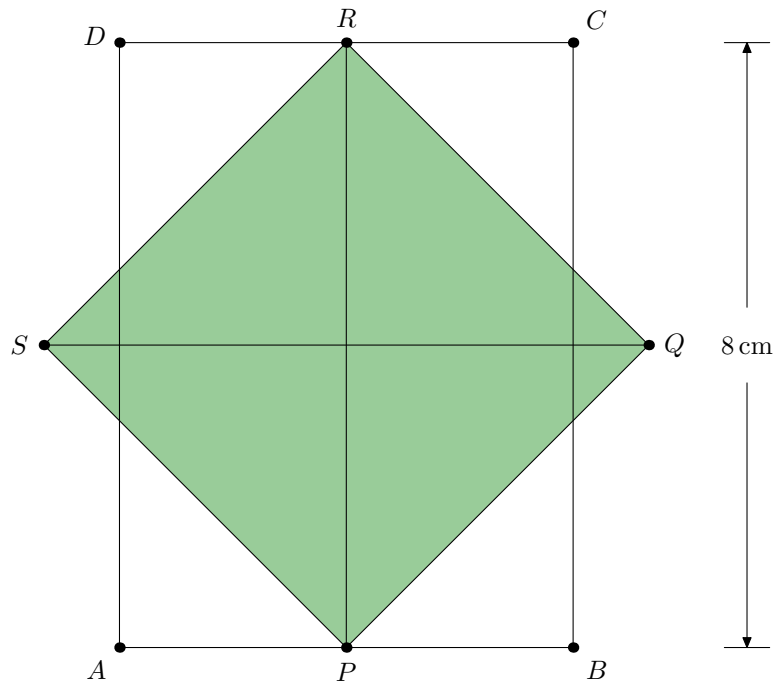
$$\text{Flächeninhalt des Quadrates: } A_Q = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \text{ cm}^2 = 4,5 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Flächeninhalt des Rechtecks: } A_R = 6 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Flächenanteil: } \frac{A_Q}{A_R} = \frac{4,5 \text{ cm}^2}{18 \text{ cm}^2} = 0,25 = 25\%.$$

- (b) • $x = 8$:

13. Flächeninhalt ebener Vielecke



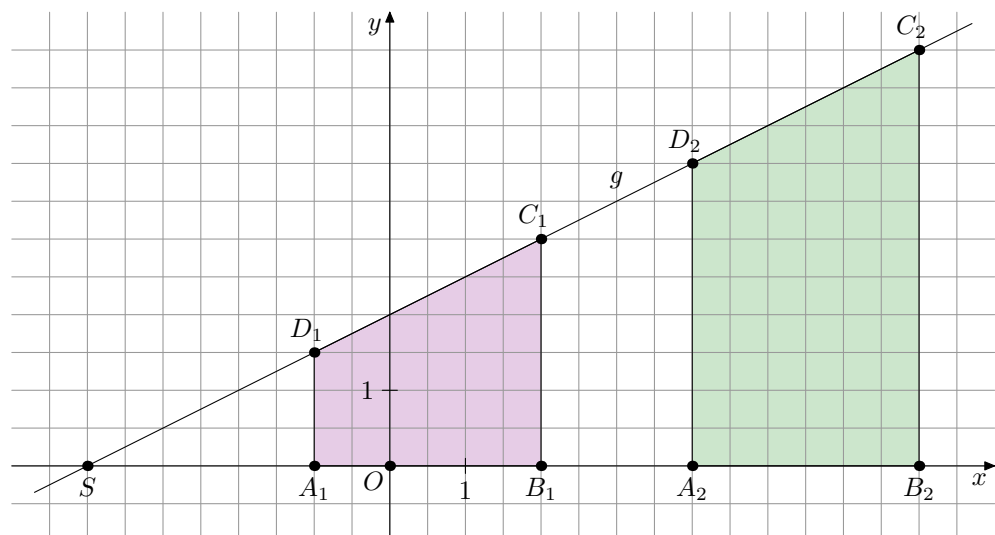
- Es muss gelten: $\overline{SQ} = x \text{ cm} \leq 6 \text{ cm}$, also $x \leq 6$. (Dann wird das Rechteck $ABCD$ selbst zum Quadrat.)

(c)

$$\frac{A_Q}{A_R} = \frac{0,5 \cdot x^2}{6x} = 40\% = 0,4 \text{ mit } x \in \mathbb{R}^+.$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,5 \cdot x}{6} = 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4,8.$$

25. (a)



13. Flächeninhalt ebener Vielecke

- (b) Die Gerade g schneidet die x -Achse im Punkt S . Wenn einer der Punkte D_n auf S liegt, dann entartet das betreffende Trapez zum Dreieck; es ist also kein Trapez mehr. Falls einer der Punkte D_n im III. Quadranten liegt, wird der Umlaufsinn der Trapeze $A_n B_n C_n D_n$ falsch.

$$g \cap \{x - \text{Achse}\} = \{S\} : \Rightarrow 0,5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

Also gibt es nur für $x > -4$ solche Trapeze $A_n B_n C_n D_n$.

- (c) Wegen $C_n \in g$ gilt: $C_n(x_C \mid 0,5x_C + 2) \wedge x_C = x + 3$
 $\Rightarrow C_n(x + 3 \mid 0,5 \cdot (x + 3) + 2) = (x + 3 \mid 0,5x + 3,5).$

$$(d) A_{A_n B_n C_n D_n} = \frac{\overline{A_n B_n} + \overline{D_n C_n}}{2} \cdot \overline{A_n B_n}$$

$$A(x) = \left[\frac{(0,5x + 2) + (0,5x + 3,5)}{2} \right] \cdot 3 \text{ FE}$$

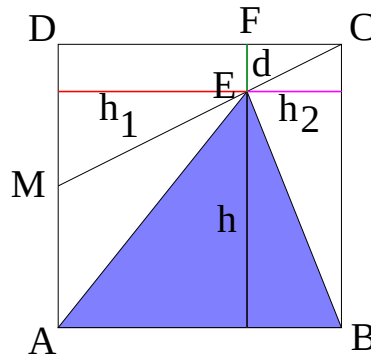
$$A(x) = (1,5x + 8,25) \text{ FE}$$

$$(e) 1,5x + 8,25 = 53,25 \Leftrightarrow x = 30.$$

$$(f) \overline{B_n C_n} = 5 \cdot \overline{A_n D_n} \Leftrightarrow 0,5x + 3,5 = 5 \cdot (0,5x + 2) \Leftrightarrow x = -3,25$$

Anmerkung: Zur Veranschaulichung der Lösung gibt es die Datei 09eh065.gxt.

26.



$$(a) A_{\triangle DMC} = 0,5 \cdot \overline{DC} \cdot \overline{DM} = 0,5 \cdot 6 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} = 9 \text{ m}^2$$

- (b) Zeichne zunächst die beiden genannten Abstände ein. (Hier: h_1 und h_2)
 Den Flächeninhalt von Dreiecken berechnest du gewöhnlich mit dem Term

$$0,5 \cdot \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}$$

Wähle als Grundlinie in den beiden Dreiecken AEM und BCE die Strecken $[AM]$ bzw. $[CN]$. Es gilt hier $\overline{AM} = 3 \text{ m}$ und $\overline{CN} = 6 \text{ m}$.

Weil die beiden Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben, muss zum Ausgleich die zugehörige Höhe h_1 doppelt so groß wie die Höhe h_2 sein:

$$h_1 = 4 \text{ m} \text{ und } h_2 = 2 \text{ m}.$$

- (c) Zeichne zunächst den Abstand d des Punktes E zur Seite $[BC]$ mit dem Fußpunkt F und die Höhe h des Dreiecks ABE ein.

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

Die beiden Dreiecke MCD und ECF sind zueinander ähnlich:

Die Strecke $[DF]$ ist doppelt so lang wie die Strecke $[FC]$. Das bedeutet:

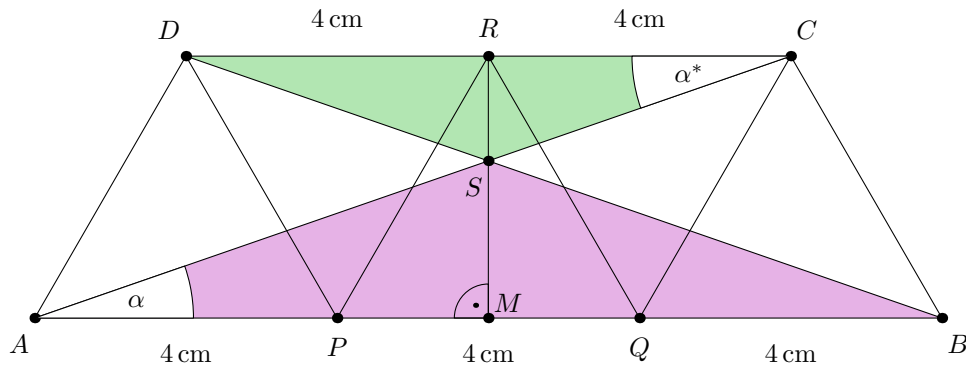
$$\overline{FC} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DC}.$$

Wegen der Ähnlichkeit muss dieses Verhältnis auch für die beiden anderen Katheten der Dreiecke MCD und ECF gelten:

$$\overline{FD} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DM} = 1 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad h = 5 \text{ m}.$$

$$\Rightarrow A_{ABE} = 0,5 \cdot 6 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 15 \text{ m}^2$$

27. (a)



(b) Die beiden Dreiecke ABS und DSC sind zueinander ähnlich: Es gilt z.B.: $\alpha = \alpha^*$ (Z-Winkel).

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{AB}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{DSC}}{A_{ABS}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

(c) Es muss gelten: $\overline{RS} : \overline{SM} = 2 : 3$. (Siehe Lösung (a).)

(d) Für die Trapezhöhe $[RM]$ gilt: $\overline{RM} = \frac{4}{2}\sqrt{3} \text{ cm} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.

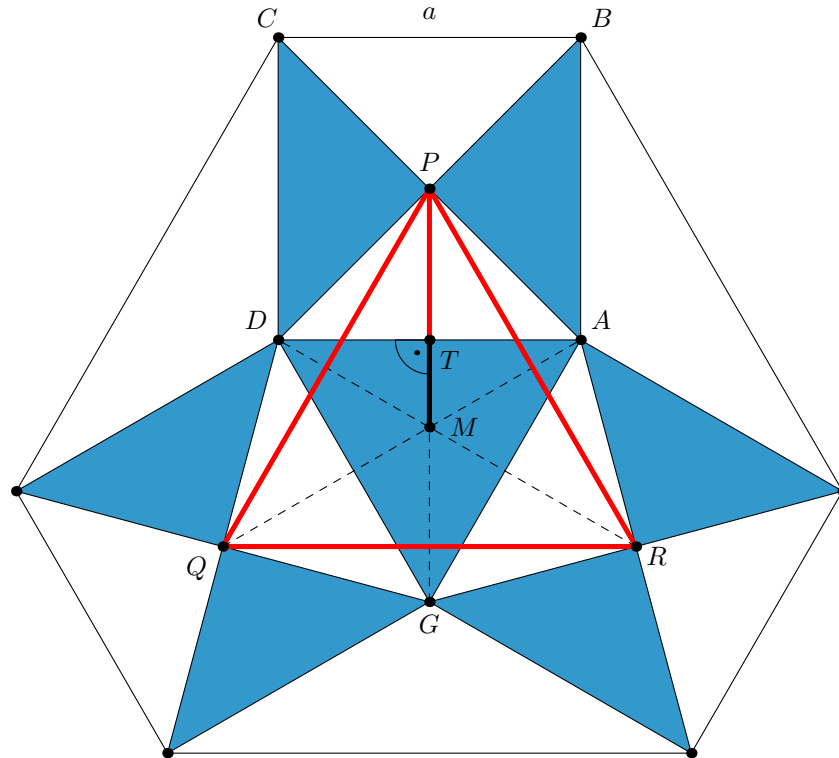
Wegen des Teilverhältnisses von $2 : 3$ teilst du gedanklich $[RM]$ in $2 + 3 = 5$ gleiche Teile. 3 Teile davon entfallen auf die Strecke $[SM]$ und 2 Teile davon entfallen auf die Strecke $[RS]$. Also:

$$\overline{RS} = \frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{3} \text{ cm} = 0,8\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \overline{SM} = \frac{3}{5} \cdot 2\sqrt{3} \text{ cm} = 1,2\sqrt{2}.$$

$$\frac{A_{DSC}}{A_{ABCD}} = \frac{0,5 \cdot 8 \text{ cm} \cdot 0,8\sqrt{2} \text{ cm}}{0,5 \cdot (12 + 8) \text{ cm} \cdot 2\sqrt{2} \text{ cm}} = \frac{4}{25} = 16\%$$

28. (a)

13. Flächeninhalt ebener Vielecke



- Am besten beginnst du mit dem gleichseitigen Dreieck ADG im Zentrum.
 - Errichte dann die drei Quadrate über den Seiten dieses Dreiecks ADG .
- (b) Der Punkt M ist das Zentrum des Logos und gleichzeitig der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks ADG .

Die Strecke $[MT]$ stellt ein Drittel der Höhe h dieses gleichseitigen Dreiecks dar:

$$\overline{MT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3}$$

Für die Strecke $[MP]$ gilt: $\overline{MP} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3} + \frac{1}{2}a = \frac{a}{6}(\sqrt{3} + 3)$.

Die Strecke $[MP]$ stellt zwei Drittel der Höhe h^* des gleichseitigen Dreiecks PQR dar:

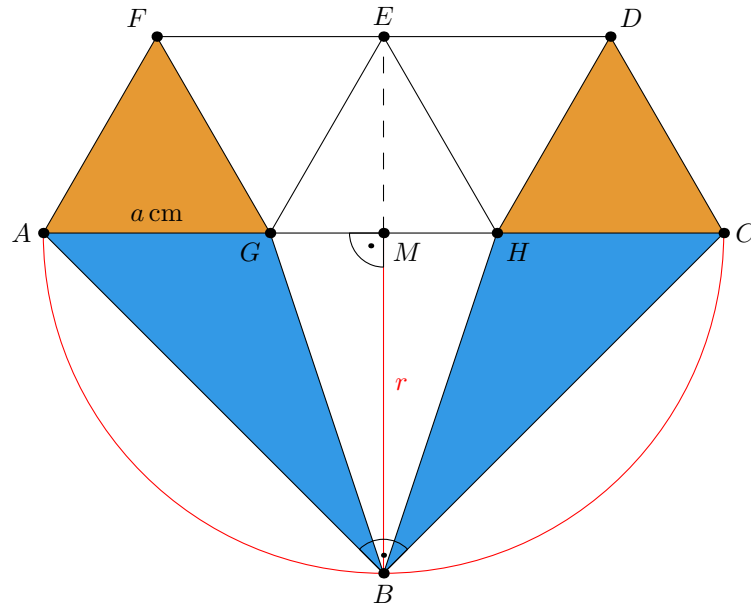
$$\frac{2}{3} \cdot h^* = \frac{a}{6}(\sqrt{3} + 3) \quad \Rightarrow \quad h^* = \frac{a}{4}(\sqrt{3} + 3)$$

$$\text{Nun gilt: } \frac{A_{ADG}}{A_{PQR}} = \left(\frac{h}{h^*} \right)^2 = \left(\frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{4}(\sqrt{3} + 3)} \right)^2 \approx 0,5359 = 53,59\%$$

Das bedeutet: Das Dreieck PQR besitzt knapp 54% des Flächeninhaltes des Dreiecks ADG .

29. (a)

13. Flächeninhalt ebener Vielecke



- (b) Das Viereck $BHEG$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, der sich aus den beiden Dreiecken BHG und GHE zusammensetzt.
Der THALES-Halbkreis mit dem Durchmesser $[AC]$ und dem Radius r macht deutlich, dass $\overline{AM} = \overline{MB} = 1,5 a$ cm gilt.

$$A_1(a) = \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot 1,5 a + \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \right) \text{ cm}^2 = \left(\frac{3}{4} a^2 + \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \right) \text{ cm}^2$$

$$A_1(a) = \frac{a^2}{4} (\sqrt{3} + 3) \text{ cm}^2$$

- (c) • Die Dreiecke AGF und GHE sind kongruent, also flächengleich. Die beiden Dreiecke ABG und BHG haben gleich lange Grundlinien: $\overline{AG} = \overline{GH}$.
Der Kreisradius r stellt die gemeinsame Höhe auf die beiden genannten Grundlinien dar (im Dreieck ABG liegt diese Höhe außerhalb). Also sind beide Dreiecke flächengleich. Damit sind auch beide Vierecke flächengleich.
- Die beiden Vierecke $ABGF$ und $BCDH$ sind aus Symmetriegründen kongruent, also flächengleich. Daher sind im Fünfeck $ABCDF$ drei Vierecke von der Größe des Vierecks $BHEG$ und zusätzlich noch die beiden gleichseitigen Dreiecke AGF und HCD enthalten.
Also bedeckt das Viereck $BHEF$ weniger als ein Drittel der Fläche des Fünfecks $ABCDF$.

(d) $A_2(a) = \left(5 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 1,5a \right) \text{ cm}^2 = \frac{a^2}{4} (5\sqrt{3} + 9) \text{ cm}^2$

(e) $\frac{A_1(a)}{A_2(a)} = \frac{\frac{a^2}{4} (\sqrt{3} + 3) \text{ cm}^2}{\frac{a^2}{4} (5\sqrt{3} + 9) \text{ cm}^2} \approx 0,2679 = 26,79\%$

Das Viereck $BHEG$ bedeckt also etwas mehr als 25% der Fünfecksfläche.

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

30. (a) Klar.

- (b) Bei dem Viereck $ACDF$ handelt es sich um ein achsensymmetrisches Trapez. Dessen Flächenterm könntest du zwar ohne Weiteres aufstellen, aber die Summe der Flächeninhalte der fünf gleichseitigen Dreiecke ist bequemer:

$$A_{ACDF} = 5 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2 = \frac{a^2}{4} \cdot 5 \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Das Dreieck ABC ist ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $\overline{AC} = 3a$ cm:

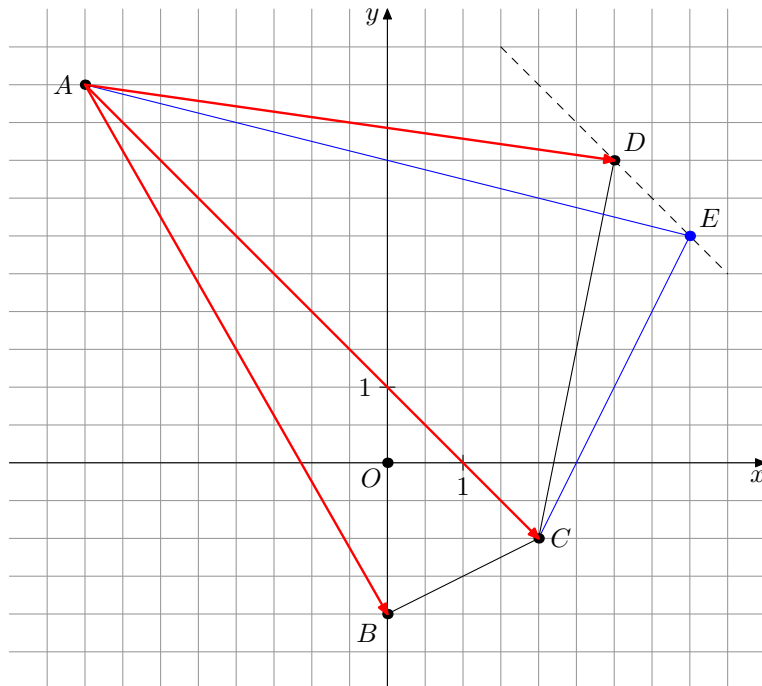
$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3a)^2 \text{ cm}^2 = \frac{a^2}{4} \cdot 9 \text{ cm}^2$$

Der Faktor $\frac{a^2}{4}$ taucht in beiden Flächentermen auf.

Also musst du nur noch den Rest vergleichen, nämlich $5\sqrt{3}$ mit 9:

$5\sqrt{3} < 8,67 < 9$. Also ist der Flächeninhalt des Trapezes $ACDF$ kleiner als der des Dreiecks ABC . (Das Trapez ist jedoch nur um knapp 4% kleiner als das Dreieck.)

31. (a)



- (b)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0+4 \\ -2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{ABCD} = \left[\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & -6 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \right] \text{ cm}^2 = 27 \text{ cm}^2$$

(c) Z.B.: $E(4 \mid 3)$ (siehe Zeichnung).

Anmerkungen:

Wenn der Punkt D seine Lage verändert, dann bleibt der Flächeninhalt des Dreiecks ABC konstant. Also musst du nur darauf achten, dass der Punkt D so platziert wird, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ACD unverändert bleibt.

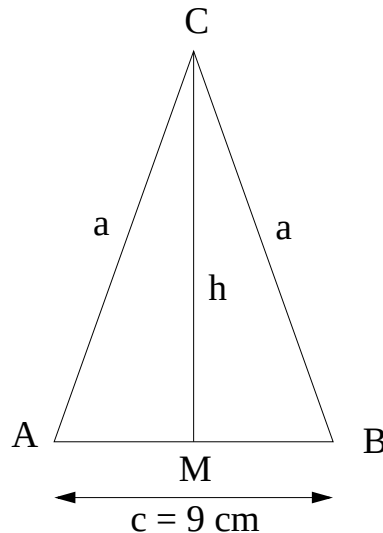
Egal, wo du den Punkt D hinlegst: Die Grundlinie $[AC]$ des Dreiecks ACD bleibt erhalten. Damit sich der Flächeninhalt dieses Dreiecks nicht ändert, muss also die Höhe und damit der Abstand des Punktes D zur Grundlinie $[AC]$ unverändert bleiben.

Der gesuchte Punkt E muss sich dann auf der Parallelen (siehe gestrichelte Linie) zur Diagonalen $[AC]$ durch den Punkt D aufhalten, weil alle Punkte auf dieser Parallelen den gleichen Abstand zur Grundlinie $[AC]$ besitzen. Es gibt daher beliebig viele Lösungen.

32. Es gilt: $3,6^2 + 4,8^2 = 6^2$ Also ist das Dreieck rechtwinklig.

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \text{ cm} \cdot 4,8 \text{ cm} = 8,64 \text{ cm}^2.$$

33. (a)



$$\text{Es gilt also: } 27 \text{ cm}^2 = 0,5 \cdot 9 \text{ cm} \cdot h \Leftrightarrow h = 6 \text{ cm}.$$

$$(b) \text{ Hier gilt: } 9 \text{ cm} + 2a = 24 \text{ cm} \Leftrightarrow a = 7,5 \text{ cm}.$$

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

- (c) Für das z.B. x cm breite und y cm hohe Rechteck gilt dann:
 $x \cdot y = 27$. Es könnte also z.B. 9 cm breit und 3 cm hoch sein oder 20 cm breit und 1,35 cm hoch sein oder ...

34. (a) • Figur 1: $\pi \approx \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \approx 3,162\,227\,766\dots$

• Taschenrechner: $\pi \approx 3,141\,592\,654\dots$

$$\frac{3,162\,227\,766 - 3,141\,592\,654}{3,141\,592\,654} \approx 0,0066 = 0,66\%$$

(b) • $\triangle BAC$: $\overline{AC} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
 $\triangle ADC$: $\overline{DE} = \overline{AD} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
 Also $\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3,146\,264\,37\dots$

- Beim Näherungswert für π in der Figur 1 stimmt die erste Kommastelle und in der Figur 2 stimmen die erste und die zweite Kommastelle.

• ARCHIMEDES: $\frac{22}{7} = 3,142\,857\,143\dots$
 Taschenrechner: $\pi = 3,141\,592\,654\dots$
 Figur 2: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,146\,264\,37\dots$

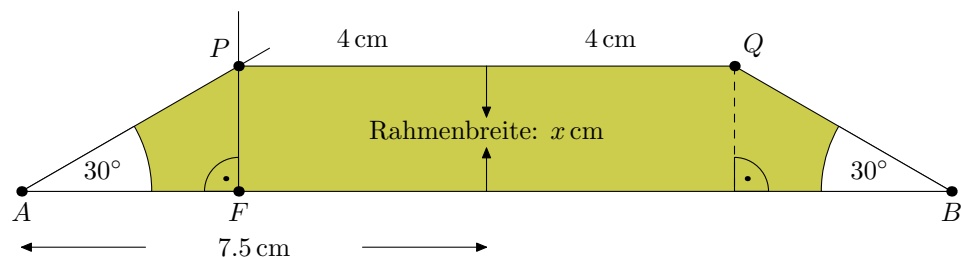
(c) • $l_1 = 2 \cdot 6378,388 \text{ km} \cdot 3,146 \approx 40\,132,871 \text{ km}$
 • $l_2 = 2 \cdot 6378,388 \text{ km} \cdot 3,142 \approx 40\,081,790 \text{ km}$
 • $\Delta l \approx 51 \text{ km}$.

- Dieser Unterschied ist praktisch bedeutungslos, weil der Erdäquator nur näherungsweise eine Kreislinie darstellt.
 Außerhalb der Meeresoberfläche führt die Äuatorlinie z.B. in Ecuador in Südamerika über die Andenkette hinweg oder in Kenia in Afrika dicht an dem über 5000 m Mount Kenia vorbei.

Auch die Ozeane bilden keine einheitliche Oberfläche. Der Meeresspiegel variiert global in seiner Höhe bis zu 200 m.

35. falsch, falsch, richtig, richtig

36. (a)



13. Flächeninhalt ebener Vielecke

Die Seiten der beiden gleichseitigen Dreiecke sind in deiner Zeichnung 15 cm bzw. 8 cm lang. Alle drei Teilstücke des Rahmens sind kongruente gleichschenklige Trapeze.

1. Zeichne zunächst $[AB]$.
2. Trage am Punkt A den 30° -Winkel an.
3. Weiter muss gelten: $\overline{AF} = 7,5 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 3,5 \text{ cm}$. Zeichne den Punkt F .
3. Errichte im Punkt F die Senkrechte zu $[AB]$.
4. Dort, wo sich diese Senkrechte mit dem freien Schenkel des 30° -Winkels schneidet, liegt der Punkt P . Der Punkt Q liegt symmetrisch zum Punkt P . Jedes deiner gezeichneten Trapeze müsste etwa 2 cm hoch sein.

(b) Flächeninhalt des Holzrahmens beträgt:

$$A_{\text{Rahmen}} = \left(\frac{150^2}{4} \cdot \sqrt{3} - \frac{80^2}{4} \cdot \sqrt{3} \right) \text{ cm}^2$$

Der Flächeninhalt eines Teilstückes beträgt dann

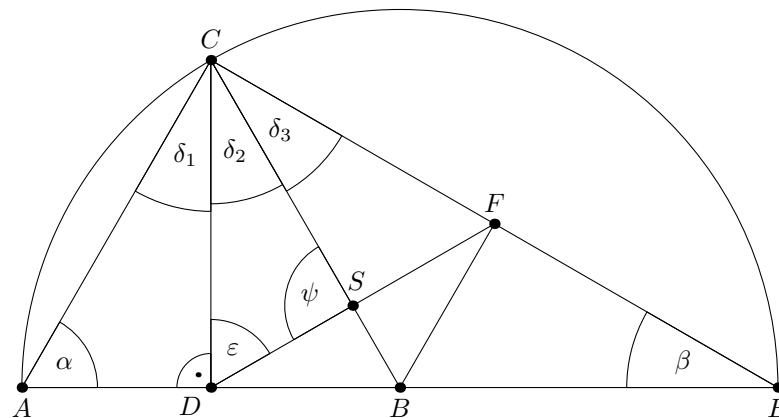
$$A_{\text{Trapez}} = \left[\left(\frac{150^2}{4} \cdot \sqrt{3} - \frac{80^2}{4} \cdot \sqrt{3} \right) : 3 \right] \text{ cm}^2 = \frac{4025\sqrt{3}}{3} \approx 2323,83 \text{ cm}^2$$

Nach der Flächenformel für Trapeze gilt dann für die Rahmenbreite $x \text{ cm}$ (= Trapezhöhe, siehe Zeichnung):

$$\frac{150 + 80}{2} \cdot x \approx 2323,83 \quad \Rightarrow \quad x \approx 20,21.$$

Meister Sägebricht fertigt also einen Rahmen mit einer Breite von 20,2 cm an. Holz kann er nicht auf hundertstel Millimeter genau bearbeiten, daher fällt in der Praxis die „1“ an der zweiten Kommastelle weg.

37.



- (a) Siehe oben.
- (b) Siehe oben.

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

- (c) • Es gilt: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle ACE = 90^\circ$.
 Wegen $\alpha = 60^\circ$ folgt $\beta = 30^\circ = \delta_3$.
 $\Rightarrow \overline{BE} = \overline{BC} = \overline{BA} = a$. Also sind die Punkte A , C und E vom Punkt B gleichweit entfernt. Also liegen sie auf einer Kreislinie mit dem Mittelpunkt B . Diese Kreislinie ist der THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$.
- Wegen $\varepsilon = 60^\circ$ und $\delta_2 = 30^\circ$ folgt $\psi = 90^\circ$.
 Also halbiert der Punkt S die Basis des gleichseitigen Dreiecks DEC . Also ist die Halbgerade $[CB]$ die Symmetrieachse des Vierecks $DBFC$. Also ist das Viereck $DBFC$ ein achsensymmetrischer Drachen.
- **Ohne Rechnung:**
 Der halbe Drachen DBC bildet die Hälfte des Dreiecks DBC . Also ist der ganze Drachen genauso groß wie das Dreieck ABC .
- Mit Rechnung:**

$$A_{DBFC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DF} \cdot \overline{CB}$$

$$\overline{DF} = \overline{DC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a \text{ und } \overline{DC} = a.$$

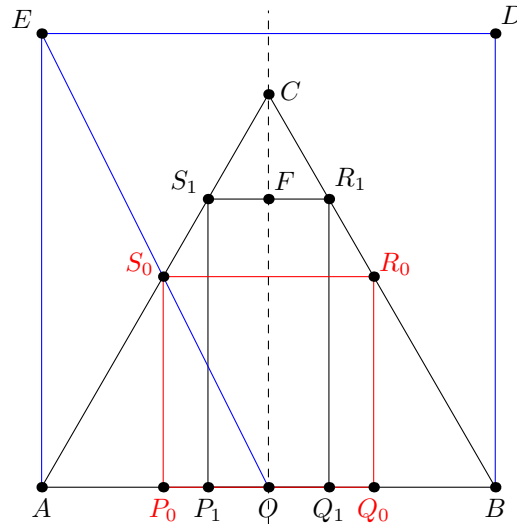
$$\Rightarrow A_{DBFC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = A_{\triangle ABC}.$$

38. (a) Vom großen Würfel sind zwei Seitenflächen voll sichtbar: $A_1 = 2 \cdot 1,2^2 \text{ m}^2$.
 Von der vorderen Seitenfläche sind $A_2 = (1,2^2 - x^2) \text{ m}^2$ zu sehen.
 Vom kleinen Würfel sind vier Seitenflächen sichtbar: $A_3 = 4 \cdot x^2 \text{ m}^2$.
 Es muss gelten: $A_1 + A_2 = A_3$:
 $2 \cdot 1,2^2 + (1,2^2 - x^2) = 4 \cdot x^2 \Leftrightarrow 3 \cdot 1,2^2 = 5 \cdot x^2$
 $\Leftrightarrow x = 1,2 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 0,24 \cdot \sqrt{15}.$

(b) $\frac{V_{\text{klein}}}{V_{\text{groß}}} = \frac{(0,24 \cdot \sqrt{15})^3}{1,2^3} \approx 0,4648 = 46,48\%$

39.

13. Flächeninhalt ebener Vielecke



(a) $x \in]0; 6[\mathbb{R}$

(b) In diesem Fall geht es auch ohne Vierstreckensatz:

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke AP_nS_n und Q_nBR_n lassen sich zu einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $y = 2 \cdot (3 - \frac{x}{2}) \text{ cm} = (6 - x) \text{ cm}$ zusammenfügen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A_{P_nQ_nR_nS_n} &= A_{\Delta ABC} - 2 \cdot A_{\Delta AP_nS_n} - A_{\Delta S_nR_nC} \\ &= \left[\frac{6^2}{4} \sqrt{3} - \frac{(6-x)^2}{4} \sqrt{3} - \frac{x^2}{4} \sqrt{3} \right] \text{ cm}^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (36 - 36 + 12x - x^2 - x^2) \text{ cm}^2 \\ A(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4} (-2x^2 + 12x) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$(c) \frac{A(x)}{A_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (-2x^2 + 12x)}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2} \text{ cm}^2 = \frac{1}{18} (-x^2 + 6x) \text{ cm}^2$$

$$(d) \text{ Es gilt: } \frac{1}{18} (-x^2 + 6x) = 32\% = 0,32 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5,76 = 0 \\ \Rightarrow x_1 = 1,2 \text{ und } x_2 = 4,8$$

(e) • Siehe Zeichnung oben: Zeichne zunächst ein Probequadrat, z.B. das Quadrat $ABDE$.

Weil alle Quadrate und damit alle halben Quadrate zueinander ähnlich sind, muss z.B. der gesuchte Punkt S_0 der Schnittpunkt der Strecken $[AC]$ und $[EO]$ sein. Die Lage der restlichen gesuchten Punkte ist dann klar.

• Die Dreiecke ABC und S_nR_nC sind zueinander ähnlich. Also gilt:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{S_nR_n}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CF}} \Leftrightarrow \frac{6}{x} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - x} \Leftrightarrow x = \frac{18\sqrt{3}}{6 + 3\sqrt{3}} = 12\sqrt{3} - 18.$$

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

Andererseits gilt nach (b): $A(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4}(-x^2 + 6x) \text{ cm}^2$.

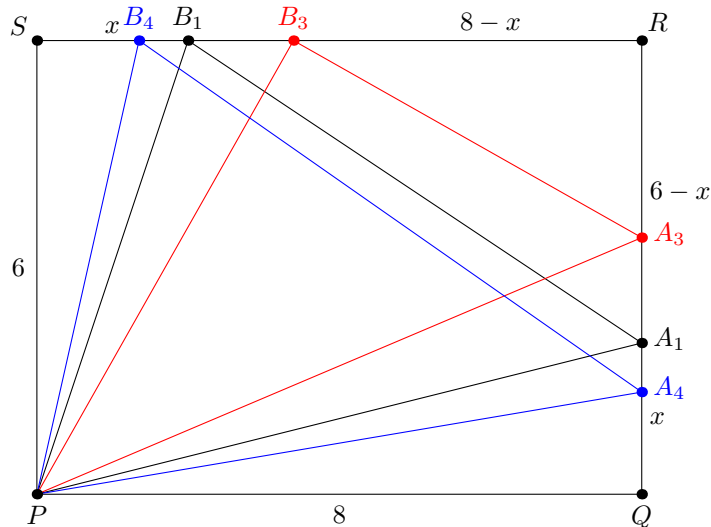
$$A(x) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot (x-3)^2 + \frac{9}{4}\sqrt{3} \right] \text{ cm}^2.$$

Einerseits beträgt die Seitenlänge des Quadrates $P_0Q_0R_0S_0$ $(12\sqrt{3} - 18) \text{ cm} \approx 2,78 \text{ cm}$.

Andererseits beträgt die Seitenlänge des maximalen Rechtecks 3 cm.

Also ist das maximale Rechteck kein Quadrat.

40. (a)



(b) $x \in [0; 6]_{\mathbb{R}}$

(c) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned} A_{\Delta PA_n B_n} &= A_{PQRS} - A_{\Delta PQA_n} - A_{\Delta A_n RB_n} - A_{\Delta PB_n S} \\ &= 48 - 0,5 \cdot 8 \cdot x - 0,5 \cdot (8-x) \cdot (6-x) - 0,5 \cdot 6 \cdot x \\ &= 48 - 4x - 24 + 4x + 3x - 0,5x^2 - 3x \\ A(x) &= (24 - 0,5x^2) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

(d) $24 - 0,5x^2 = 0,3464 \cdot 48 \Rightarrow x = 3,84$

(e) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned} \overline{PA_n}^2 &= \overline{AB_n}^2 + \overline{PB_n}^2 \\ 8^2 + x^2 &= (6-x)^2 + (8-x)^2 + 6^2 + x^2 \\ 64 + x^2 &= 36 - 12x + x^2 + 64 - 16x + x^2 + 36 + x^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x^2 - 14x + 36 = 0 \quad D = 52 \quad \sqrt{D} = 2\sqrt{13}$. Es scheint sogar zwei Dreiecke zu geben. Aber:

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

$$x_1 = 7 + \sqrt{13} \approx 10,61 \notin [0; 6] \quad x_2 = 7 - \sqrt{13} \approx 3,39 \in [0; 6]$$

$$\Rightarrow L = \{7 - \sqrt{13}\}, \text{ siehe „rotes“ Dreieck.}$$

(f) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

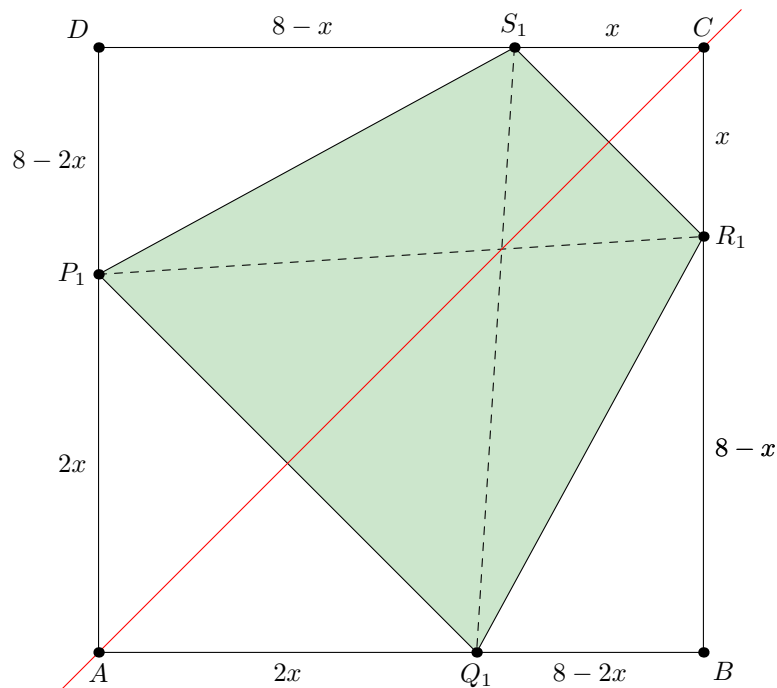
$$\begin{aligned} \overline{PA_n} &= \overline{A_nB_n} \\ 8^2 + x^2 &= (6-x)^2 + (8-x)^2 \\ 64 + x^2 &= 36 - 12x + x^2 + 64 - 16x + x^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x^2 - 28x + 36 = 0 \quad D = 640 \quad \sqrt{D} = 8\sqrt{10}$. Wieder scheint es zwei Dreiecke zu geben.

$$x_1 = 14 + 4\sqrt{10} \approx 26,65 \notin [0; 6] \quad x_2 = 14 - \sqrt{10} \approx 1,35 \in [0; 6]$$

$$\Rightarrow L = \{14 - \sqrt{10}\}, \text{ siehe „blaues“ Dreieck.}$$

41. (a)



(b) Es muss gelten: $2x \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 4$.

(c) • Es muss gelten: $\overline{Q_2B} = \overline{CS_2} \Rightarrow 8 - 2x = x \Leftrightarrow x = 2, \overline{6}$.

- Alle Trapeze $P_nQ_nR_nS_n$ besitzen die Gerade AC als Symmetrieachse. Sie schließt mit den Quadratseiten jeweils einen 45° -Winkel ein.
Wenn $[S_2Q_2]$ an AC gespiegelt wird, dann erhältst du die Diagonale $[P_2R_2]$, die dann parallel zu $[AB]$ bzw. $[CD]$ liegt.
Also gilt: $[P_2R_2] \perp [S_2Q_2]$.

(d)

$$\begin{aligned} A_{P_n Q_n R_n S_n} &= A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta P_n S_n D} - A_{\Delta A Q_n P_n} - A_{\Delta C S_n R_n} \\ A(x) &= [8 \cdot 8 - 2 \cdot 0,5 \cdot (8 - 2x)(8 - x) - 0,5 \cdot (2x)^2 - 0,5 \cdot x^2] \text{ cm}^2 \\ &= [64 - 64 + 8x + 16x - 2x^2 - 0,5x^2 - 2x^2] \text{ cm}^2 \\ A(x) &= (-4,5x^2 + 24x) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

(e) • $a = -4,5 \quad b = 24 \quad c = 0$:

$$x_S = -\frac{24}{2 \cdot (-4,5)} = \frac{8}{3} = 2, \overline{6}. \text{ Siehe Lösung (c).}$$

$$\bullet \quad y_S = 0 - \frac{24^2}{4 \cdot (-4,5)} = 32; \text{ das ist aber die Hälfte (= 50\%) der Quadratfläche.}$$

(f) **1. Möglichkeit:**

Die maximale Trapezfläche beträgt 32 cm^2 . Dann gibt es kein Trapez, das noch größer, nämlich $41,07 \text{ cm}^2$ ist.

2. Möglichkeit:

$$-4,5x^2 + 24x = 41,07 \quad \Leftrightarrow \quad -4,5x^2 + 24x - 41,07 = 0$$

$$\text{Diskriminante } D = 24^2 - 4 \cdot (-4,5) \cdot (-41,07) = -163,26 < 0 (\dagger)$$

Also gibt es keine reelle Lösung und damit kein Trapez mit einem solchen Flächeninhalt.

42. (a) Klar.

(b) Das Dreieck APD ist ein halbes Quadrat. $\Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

Die drei Winkel mit dem Scheitel P ergeben einen gestreckten Winkel:

$$\varphi + 90^\circ + \psi = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \psi = 45^\circ.$$

(c) **Wir rechnen im Folgenden ab und zu nur mit Maßzahlen.**

$$\overline{PB} = 8 - 5 = 3 \text{ cm.} \quad 3 = \frac{\overline{PQ}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{3}{\sqrt{2}} = 1,5 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} = \overline{SR} = \overline{DS}.$$

$$\overline{PD} = 5 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{PS} = 5\sqrt{2} - 1,5\sqrt{2} = 3,5\sqrt{2} \text{ cm}.$$

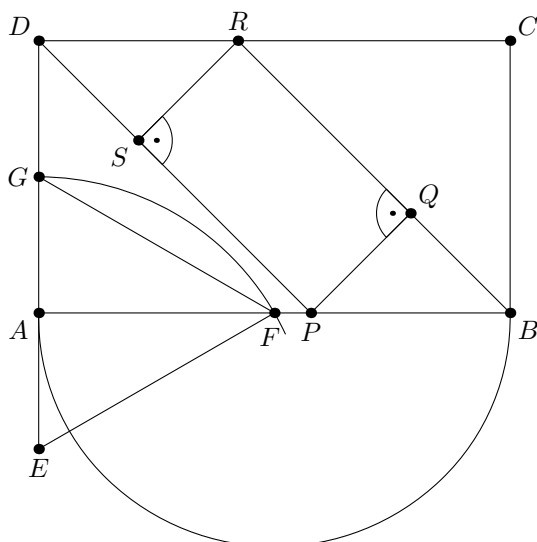
$$A_{PQRS} = \overline{PQ} \cdot \overline{RS} = 1,5\sqrt{2} \cdot 3,5\sqrt{2} = 10,5 \text{ cm}^2.$$

$$A_{ABCD} = 40 \text{ cm}^2.$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{10,5 \text{ cm}^2}{40 \text{ cm}^2} = 0,2625 = 26,25\%.$$

(d)

13. Flächeninhalt ebener Vielecke



- Klar.
- Die Strecke $[AF]$ stellt die Höhe des gleichseitigen Dreiecks EFG mit einer Seitenlänge von 6 cm dar. Also gilt:
 $\overline{AF} = 3\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow a = 2 \cdot \overline{AF} = 6\sqrt{3} \text{ cm}.$
 $\overline{PB} = 6\sqrt{3} - 6 = 6 \cdot (\sqrt{3} - 1) \text{ cm}.$

$$\overline{PQ} = \frac{\overline{PB}}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ cm} = \overline{DS}.$$

$$\overline{PS} = 6\sqrt{2} - 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = (9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}) \text{ cm}.$$

$$A_{PQRS} = 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot (9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}) = (72\sqrt{3} - 108) \text{ cm}^2.$$

$$A_{ABCD} = 6 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(72\sqrt{3} - 108) \text{ cm}^2}{36\sqrt{3} \text{ cm}^2} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,26795 \approx 26,80\%.$$

(e) Es gilt allgemein: $\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (a - b) \cdot (3b - a)}{ab} = -\frac{1}{2} \cdot \left(3\frac{b}{a} - 4 + \frac{a}{b} \right).$

Setzen wir $\frac{b}{a} = k$, so ergibt sich weiter: $\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = -\frac{1}{2} \cdot \left(3k - 4 + \frac{1}{k} \right) = T(k).$

•

$$\begin{aligned}
 T^*(k) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k} \right)^2 + 2 - \sqrt{3} \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - 2\sqrt{3} + 3k \right) + 2 - \sqrt{3} \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - 2\sqrt{3} + 3k - 4 + 2\sqrt{3} \right) \\
 T^*(k) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} + 3k - 4 \right) = T(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k} \right)^2 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k} = 0 \\
 \Leftrightarrow \quad 1 &= k\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{b}{a}.
 \end{aligned}$$

$$T(k)_{max} = T\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 - \sqrt{3} \approx 0,26795 \approx 26,80\%.$$

$$\bullet \text{ Es gilt } \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad a = b\sqrt{3}$$

In der Aufgabe (d) hattest du mit $b = 6 \text{ cm}$ konstruiert. Für die Höhe im gleichseitigen Dreieck EFG der Konstruktion (d) ergibt sich dann $\overline{AF} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$. Weil der Punkt F gleichzeitig Mittelpunkt des Halbkreises ist, gilt $a = 2 \cdot 3\sqrt{3} \text{ cm} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$. Also ergibt sich:

$$k = \frac{b}{a} = \frac{6 \text{ cm}}{6\sqrt{3} \text{ cm}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ wie in der Lösung (e) schon errechnet.}$$

43. (a) Klar.

(b) $x \in]0, 5[_{\mathbb{R}}$.

(c) Wir rechnen mit der Formel: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}$: In den Dreiecken AP_nQ_n bzw AQ_nS_n gilt:

$$A_{AP_nQ_n} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (b - x) = \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}x^2 \quad (13.1)$$

$$A_{AQ_nS_n} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (a - x) = \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}x^2 \quad (13.2)$$

$$(1) + (2): \quad A_{AP_nQ_nS_n} = \frac{1}{2}(a + b) \cdot x - x^2 \quad (13.3)$$

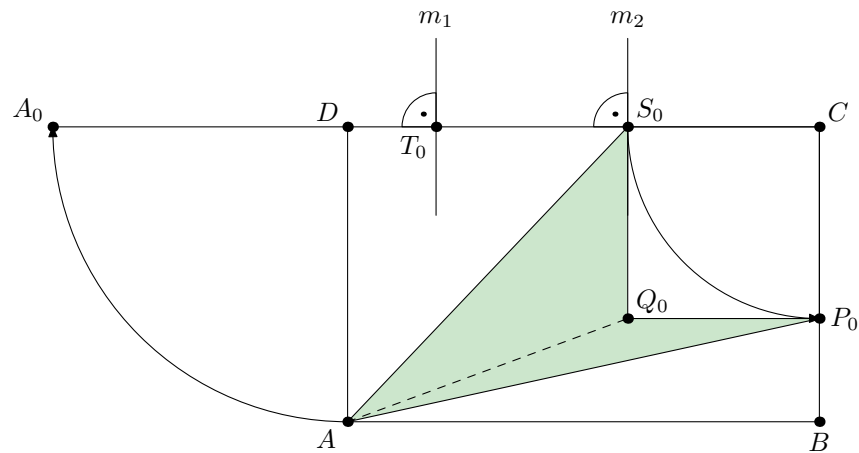
Die Gleichung (3) ist die geforderte.

(d)

$$\begin{aligned}
 A(x) &= -x^2 + \frac{1}{2}(a+b) \cdot x \\
 &= -\left[x^2 - \frac{1}{2}(a+b) \cdot x + \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2\right] \\
 &= -\left[\left(x - \frac{1}{4}(a+b)\right)^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2\right] \\
 A(x) &= -\left(x - \frac{1}{4}(a+b)\right)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2
 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{4}(a+b) \text{ liefert } A_{\max} = \frac{(a+b)^2}{16}.$$

(e)



Hier gilt $\overline{A_0C} = a + b$.

Der Punkt T_0 halbiert die Strecke $[A_0C]$: $\overline{T_0C} = \frac{a+b}{2}$.

Der Punkt S_0 halbiert die Strecke $[T_0C]$: $\overline{S_0C} = \frac{a+b}{4} = x$.

44. (a) Gleicher Umfang: $5a = 3x \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}a$.

(b) $A_{\text{Trapez}} = 3 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.

$$A_{\Delta PQR} = \frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\left(\frac{5}{3}a\right)^2}{4}\sqrt{3} = \frac{25}{36}a^2\sqrt{3}.$$

$$\frac{A_{\Delta PQR}}{A_{\text{Trapez}}} = \frac{\frac{25}{36}a^2\sqrt{3}}{\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}} = \frac{25}{36} \cdot \frac{4}{3} = \frac{100}{108} \left(= \frac{25}{27} \right).$$

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

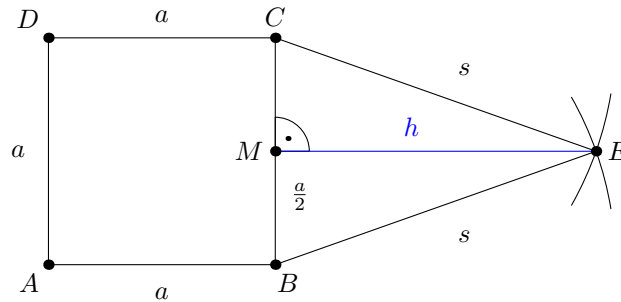
(c) $A_{\triangle PQR} \hat{=} 100\%$.

Nach Lösung (b) gilt $A_{\text{Trapez}} \hat{=} 108\%$.

Dann ist also der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ um 8% größer als der des Dreiecks PQR .

45. (a) $u_{BEC} = a + s + s = 2s + a$ $u_{ABCD} = 4a$
 $2s + a = 4a \Leftrightarrow s = 1,5a$.

(b)



Die beiden Kreisbögen mit dem Radius $r = 1,5 \cdot 3 \text{ cm} = 4,5 \text{ cm}$ und den Mittelpunkten B bzw. C schneiden sich im Punkt E .

(c) $\triangle BEM$: $h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (1,5a)^2 - (0,5a)^2 = 2,25a^2 - 0,25a^2 = 2a^2$
 $\Rightarrow h = a\sqrt{2}$

$$A_{\triangle BEC} = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2}{2}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad A_{ABCD} = a^2.$$

$$\frac{A_{\triangle BEC}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{a^2}{2}\sqrt{2}}{a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071 = 70,71\%$$

(d) $h^2 = s^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}}$.

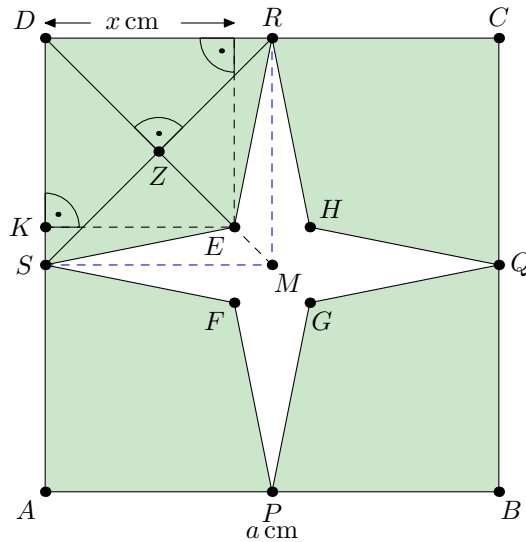
$$A_{\triangle BEC} = A_{ABCD} : \frac{a}{2}\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} = a^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} = a \quad \Bigg|^2$$

$$\Rightarrow s^2 - \frac{a^2}{4} = 4a^2 \Leftrightarrow s^2 = \frac{16a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow s = \frac{a}{2}\sqrt{17} \approx 2,06 \cdot a.$$

46. (a)

13. Flächeninhalt ebener Vielecke



- (b) Das Viereck $SMRD$ ist ein Quadrat, dessen Diagonalen $[DM]$ und $[SR]$ folgende Eigenschaften besitzen:

- $[SR] \perp [DM]$. Wegen $E \in [DM]$ folgt $[SR] \perp [DE]$.
- DM ist sowohl die Symmetrieachse des Quadrates $SMRD$ als auch die des Vierecks $SERD$.

Also ist das Viereck $SERD$ ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) $A_{SERD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SR} \cdot \overline{DE}$. (*)

$[SR]$ ist eine Diagonale des Quadrates $SMRD$ mit der Seitenlänge 3 cm: $\Rightarrow \overline{SR} = 3\sqrt{2}$ cm.

$[DE]$ ist eine Diagonale des Quadrates mit der Seitenlänge $\overline{KD} = x$ cm und der Diagonale $[DE]$: $\Rightarrow \overline{DE} = x\sqrt{2}$ cm.

Mit (*) folgt dann:

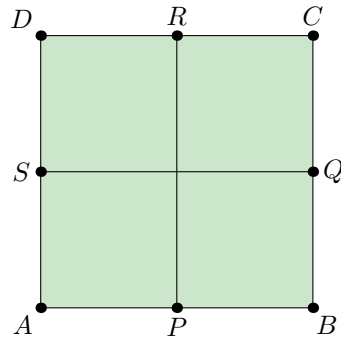
$$A_{SERD} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2} \text{ cm}^2 = 3x \text{ cm}^2.$$

$$A_{\text{Stern}} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{SERD} = 36 \text{ cm}^2 - 4 \cdot 3x \text{ cm}^2 = (36 - 12x) \text{ cm}^2.$$

- (d) • $A(3) = (36 - 12 \cdot 3) \text{ cm}^2 = 0 \text{ cm}^2$.

Für $x = 3$ deckt sich das Drachenviereck $SERD$ mit dem Quadrat $SMRD$. Das geschieht auf die gleiche Weise mit den drei restlichen Drachenvierecken. Dann sieht die Figur so aus:

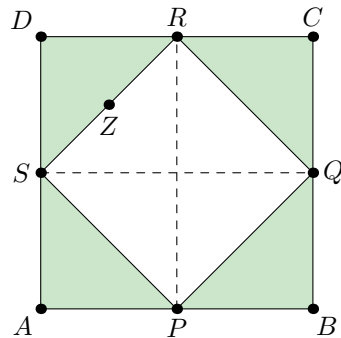
13. Flächeninhalt ebener Vielecke



D.h. der Stern entartet zu zwei gekreuzten Strecken $[PR]$ und $[SQ]$, deren Flächeninhalt 0 ist.

- $A(1, 5) = (36 - 12 \cdot 1, 5) \text{ cm}^2 = 18 \text{ cm}^2$.

Für $x = 1,5$ kommt der Punkt E auf den Diagonalschnittpunkt Z des Drachenvierecks $SERD$ zu liegen; d.h. das Drachenviereck entartet zum gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck SRD . Damit wird der Stern zu einem eingeschriebenen Quadrat dessen Eckpunkte jeweils auf einem Mittelpunkt der Seiten des Quadrates $ABCD$ fallen. Dann sieht die Figur so aus:

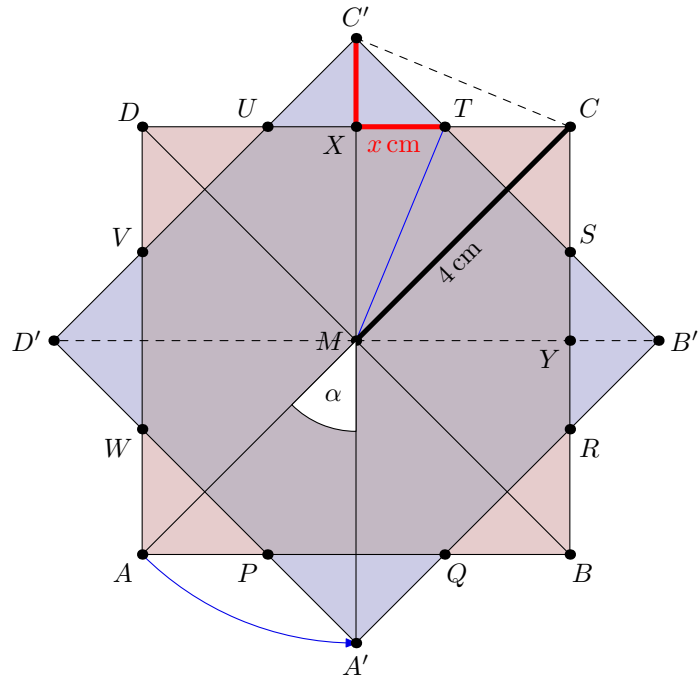


Anhand der gestrichelten Diagonalen des zum Quadrat $PQRS$ entarteten Sterns erkennst du, dass dieses Quadrat halb so groß wie das äußere Quadrat $ABCD$ ausfällt, was auch die obige Rechnung bestätigt.

$$(e) \quad 36 - 12x = 3,6 \quad \Leftrightarrow \quad 32,4 = 12x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,7.$$

47. (a)

13. Flächeninhalt ebener Vielecke



(b) $\alpha = 45^\circ$.

Es gilt z.B.: $MD' \perp MA'$. Die Diagonale $[AC]$ halbiert diesen rechten Winkel.

- (c) • Aus Symmetriegründen sind die vier Dreiecke, die über das Quadrat $ABCD$ hinausragen und die vier Dreiecke, die über das gedrehte Quadrat $A'B'C'D'$ hinausragen, alle kongruent. Also sind alle Seiten des fraglichen Achtecks gleich lang.

Die Diagonalen der Quadrate $ABCD$ und $A'B'C'D'$ schließen paarweise einen 45° -Winkel ein. Also haben alle Innenwinkel des Achtecks das Maß $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Also ist das Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig.

- Subtrahierst du vom gedrehten Quadrat $A'B'C'D'$ die Flächen der vier Dreiecke, die über das Quadrat $ABCD$ hinausragen, dann erhältst du den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUVW$.

Betrachte z.B. das Dreieck UTC' . Aus Symmetriegründen muss es gleichschenkelig-rechtwinklig sein. Also gilt: $\overline{XT} = \overline{XC'} = x \text{ cm}$.

Das Dreieck $MCXC'$ ist gleichschenkelig: $\overline{MC} = \overline{MC'} = 4 \text{ cm}$.

Damit gilt einerseits: $\overline{MX} = (4 - x) \text{ cm}$. (*)

Das Viereck $MYCX$ ist ein Quadrat, dessen Diagonale 4 cm lang ist. Damit gilt andererseits: $\overline{MX} = \frac{4}{\sqrt{2}} \text{ cm}$.

Mit (*) ergibt sich:

$$4 - x = \frac{4}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = 4 - \frac{4}{\sqrt{2}} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}.$$

Das Dreieck UTC' ist genauso groß wie ein Quadrat mit der Seitenlänge $x \text{ cm}$.

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

$$A_{UTC'} = x^2 \text{ cm}^2 = \left(4 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ cm}^2 = 16 \cdot \frac{2-2\sqrt{2}+1}{2} \text{ cm}^2.$$

$$A_{UTC'} = 8 \cdot (3 - 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2.$$

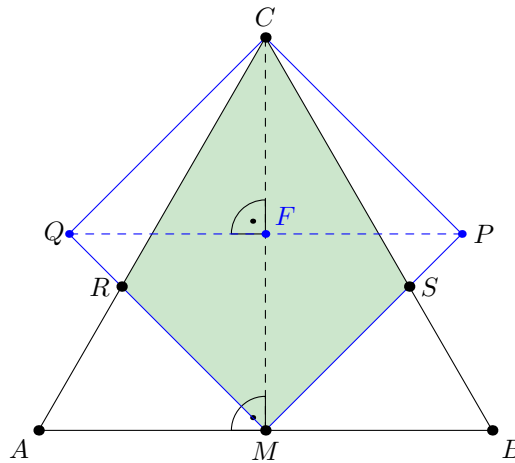
Wegen $A_{PQRSTUUVW} = A_{A'B'C'D'} - 4 \cdot A_{UTC'}$ folgt:

$$A_{PQRSTUUVW} = \frac{1}{2} \cdot 8^2 \text{ cm}^2 - 4 \cdot 8 \cdot (3 - 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2$$

$$A_{PQRSTUUVW} = 32 \cdot [1 - (3 - 2\sqrt{2})] \text{ cm}^2 = 32 \cdot [2\sqrt{2} - 2] \text{ cm}^2$$

$$A_{PQRSTUUVW} = 64 \cdot (\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2 \approx 26,51 \text{ cm}^2.$$

48. (a)



(b) Flächeninhalt A_{Δ} des Dreiecks ABC : $A_{\Delta} = \frac{6^2}{4} \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2 = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Jedes Quadrat darf sich auch „Drachenviereck“ nennen. Am einfachsten kommst du mit der Flächenformel für das Drachenviereck zum Ziel:

$$\text{Hier: } A_{MPCQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MC}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2 \text{ cm}^2 = 13,5 \text{ cm}^2.$$

$$\frac{13,5 \text{ cm}^2}{9\sqrt{3}} \text{ cm}^2 \approx 0,8660 = 86,60\%$$

$100\% - 86,60\% = 13,40\%$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist etwa um 13,40% größer als der des Quadrates $MPCQ$.

(c) Das Viereck $MSCR$ ist ein achsensymmetrisches Drachenviereck.

Begründung:

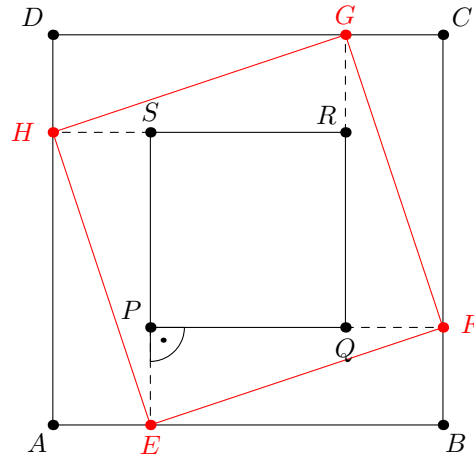
- Seine Diagonalen stehen (wie auch die des Quadrates $MPCQ$) aufeinander senkrecht.

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

- Die Gerade MC ist die Symmetrieachse des Drachenvierecks.

(d) $u = 4 \cdot \overline{MP} = 4 \cdot \overline{MF} \sqrt{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{2} \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \text{ cm} = 6\sqrt{6} \text{ cm}.$

49.



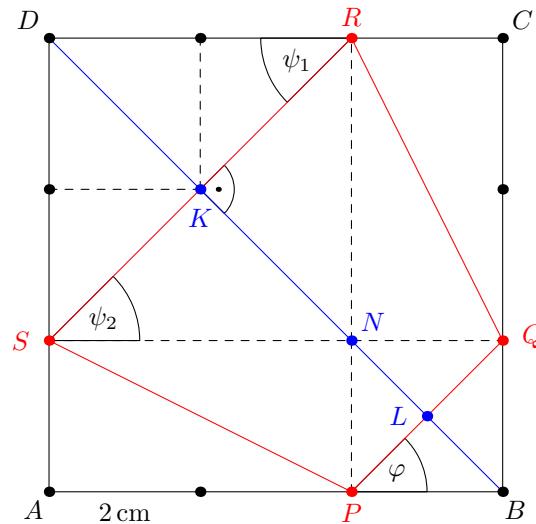
- Es gilt: $\overline{AB} = 81,6 \text{ cm} : 4 = 20,4 \text{ cm}$ und $\overline{PQ} = 34 \text{ cm} : 4 = 8,5 \text{ cm}.$
Dann folgt: $\overline{QF} = \overline{PE} = (20,4 \text{ cm} - 8,5 \text{ cm}) : 2 = 5,95 \text{ cm}.$
Weiter folgt: $\overline{PF} = 8,5 \text{ cm} + 5,95 \text{ cm} = 14,45 \text{ cm}.$
 $\triangle EFP: \overline{EF}^2 = A_{EFGH} = \overline{PF}^2 + \overline{PE}^2 = (14,45 \text{ cm})^2 + (5,95 \text{ cm})^2$
 $\Rightarrow A_{EFGH} = 244,205 \text{ cm}^2.$
- 1. Möglichkeit:** $A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{\triangle EBF}$
 $A_{EFGH} = (20,4 \text{ cm})^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45 \text{ cm} \cdot 5,95 \text{ cm} = 244,205 \text{ cm}^2.$

2. Möglichkeit: $A_{EFGH} = A_{PQRS} + 4 \cdot A_{\triangle EFP}$
 $A_{EFGH} = (8,5 \text{ cm})^2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45 \text{ cm} \cdot 5,95 \text{ cm} = 244,205 \text{ cm}^2.$

Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

50. (a)

13. Flächeninhalt ebener Vielecke



- (b) Das Dreieck SRD ist gleichschenkelig-rechtwinklig. $\Rightarrow \psi_1 = 45^\circ$.
 Dann gilt auch $\psi_2 = 45^\circ$ (Z-Winkel).
 Das Dreieck PBQ ist gleichschenkelig-rechtwinklig. $\Rightarrow \varphi = 45^\circ$.
 Also folgt: $[PQ] \parallel [SR]$.
 Das Viereck $PQRS$ ist ein (achsensymmetrisches) Trapez..

(c) •

Für die Trapezfläche A gilt: $A_{PQRS} = \frac{\overline{SR} + \overline{PQ}}{2} \cdot \overline{KL}$.

Die Strecke $[SR]$ ist die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 4 cm.

Also folgt: $\overline{SR} = 4\sqrt{2}$ cm.

$[DK]$, $[NB]$ und $[PQ]$ sind jeweils Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge 2 cm.

Also folgt: $\overline{DK} = \overline{NB} = \overline{PQ} = 2\sqrt{2}$ cm und $\overline{LB} = \sqrt{2}$ cm.

Im Quadrat $ABCD$ gilt: $\overline{DB} = 6\sqrt{2}$ cm.

Damit gilt: $\overline{KL} = 6\sqrt{2}$ cm $- 2\sqrt{2}$ cm $- \sqrt{2}$ cm $= 3\sqrt{2}$ cm.

Und damit gilt: $A_{PQRS} = \frac{4\sqrt{2} \text{ cm} + 2\sqrt{2} \text{ cm}}{2} \cdot 3\sqrt{2} \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$.

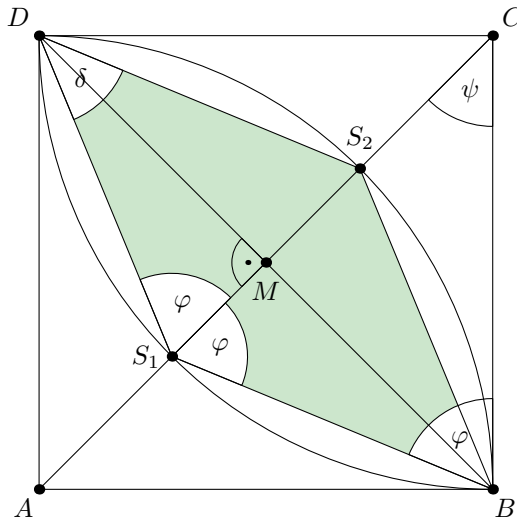
- Das Trapez $PQRS$ ist von vier rechtwinkligen Dreiecken eingeschlossen. Zwei von ihnen sind kongruent.

$$A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta APS} - A_{\Delta SRD} - A_{\Delta PBQ}.$$

$$A_{PQRS} = 36 \text{ cm}^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \text{ cm}^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \text{ cm}^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \text{ cm}^2 = 18 \text{ cm}^2.$$

51. (a)

13. Flächeninhalt ebener Vielecke



Das Viereck S_1BS_2D ist ein achsensymmetrischer Drachen.

- (b) Im Quadrat $ABCD$ halbiert die Diagonale $[AC]$ den rechten Winkel DCB . Also gilt:
 $\psi = 45^\circ$.

Das Dreieck S_1BC ist gleichschenkelig. $\Rightarrow \varphi = (180^\circ - 45^\circ) : 2 = 67,5^\circ$.

$\Rightarrow \sphericalangle BS_1D = 2 \cdot \varphi = 135^\circ = \sphericalangle DS_2B$.

$\Rightarrow \delta = \sphericalangle S_1DS_2 = \sphericalangle S_2BS_1 = (360^\circ - 4 \cdot 67,5^\circ) : 2 = 45^\circ$.

(c) $A_{\text{Drachen}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{S_1S_2}$.

$$\overline{BD} = 6 \cdot \sqrt{2} \text{ cm } (\approx 8,49 \text{ cm}).$$

Wegen $\overline{S_1C} = 6 \text{ cm}$ folgt $\overline{AS_1} = \overline{CS_2} = (6 \cdot \sqrt{2} - 6) \text{ cm } (\approx 2,49 \text{ cm})$.

Dann ist $\overline{S_1S_2} = [6 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot (6 \cdot \sqrt{2} - 6)] \text{ cm} = (12 - 6\sqrt{2}) \text{ cm } (\approx 3,51 \text{ cm})$.

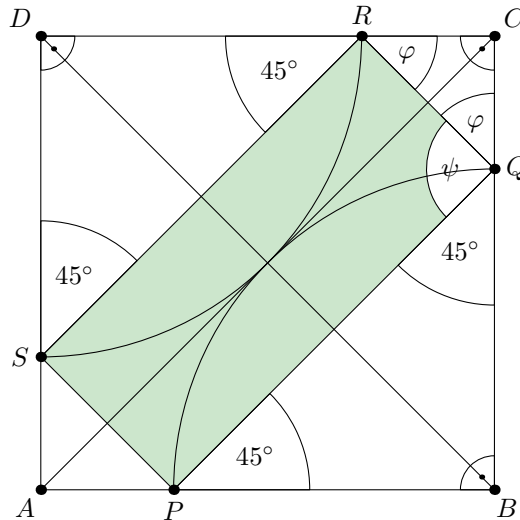
$$A_{\text{Drachen}} = \frac{1}{2} \cdot [6\sqrt{2} \cdot (12 - 6\sqrt{2})] \text{ cm}^2.$$

$$A_{\text{Drachen}} = (36\sqrt{2} - 36) \text{ cm}^2 (\approx 14,91 \text{ cm}^2).$$

$$\frac{A_{\text{Drachen}}}{A_{\text{Quadrat}}} = \frac{(36\sqrt{2} - 36) \text{ cm}^2}{36 \text{ cm}^2} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142 = 41,42\%.$$

52. (a)

13. Flächeninhalt ebener Vielecke



- (b) Die beiden Dreiecke PBQ und SRD sind gleichschenkelig-rechtwinklig. Also haben ihre spitzen Innenwinkel das Maß 45° .
 Weiter gilt: $\overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{BQ} = \overline{DC} - \overline{DR} = \overline{CR}$. Also ist auch das Dreieck RQC gleichschenkelig-rechtwinklig. Dann gilt $\varphi = 45^\circ$.
 Am Punkt Q gilt somit: $45^\circ + \psi + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \psi = 90^\circ$.
 Aus Symmetriegründen sind dann auch die drei restlichen Innenwinkel des Vierecks $PQRS$ rechte Winkel. Also handelt es sich hierbei um ein Rechteck.
- (c) Eine mögliche Strategie: $A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot (A_{\triangle PBQ} + A_{\triangle RQC})$

$$A_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2.$$

$$A_{\triangle RQC} = \frac{1}{2} \cdot (6 - 3\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2 = (27 - 18\sqrt{2}) \text{ cm}^2.$$

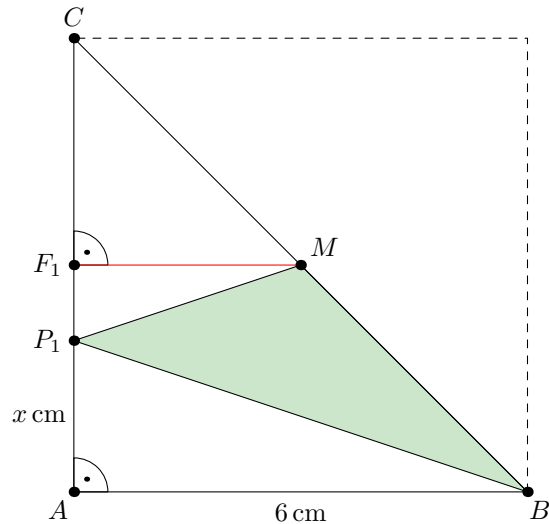
$$A_{PQRS} = 36 \text{ cm}^2 - 2 \cdot [9 \text{ cm}^2 + (27 - 18\sqrt{2}) \text{ cm}^2] = (36\sqrt{2} - 36) \text{ cm}^2.$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(36\sqrt{2} - 36) \text{ cm}^2}{36 \text{ cm}^2} = \frac{(36(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2)}{36 \text{ cm}^2}$$

$$= \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142 = 41,42\%$$

54. (a)

13. Flächeninhalt ebener Vielecke



- (b) Für $x = 0$ ergibt sich das maximale Dreieck. Für $x = 6$ entartet das betreffende Dreieck zur Doppelstrecke $[BC]$.
Also gibt es Dreiecke für $x \in [0; 6[\mathbb{R}$.
- (c) Eine mögliche Strategie: Berechne jeweils den Flächeninhalt der Dreiecke ABP_n und P_nMC in Abhängigkeit von x . Subtrahiere die beiden Flächeninhalte dann vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2.$$

$$A_{\Delta ABP_n} = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm} \cdot x \text{ cm} = 3x \text{ cm}^2.$$

$$A_{\Delta P_nMC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_nC} \cdot \overline{F_nM} = \frac{1}{2} \cdot (6 - x) \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = (9 - 1,5x) \text{ cm}^2.$$

$$A(x) = [18 - 3x - (9 - 1,5x)] \text{ cm}^2 = (9 - 1,5x) \text{ cm}^2 = A_{\Delta P_nMC}.$$

Kommentar: Die Flächeninhalte der Dreiecke BCP_n werden ständig durch deren Seitenhalbierende $[P_nM]$ halbiert.

(d) $9 - 1,5x = 6,6 \Leftrightarrow x = 1,6.$

(e) Es muss gelten: $\overline{CP_n} = \overline{CM}$.
 $\overline{CP_n} = (6 - x) \text{ cm}.$

Das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck ABC ist ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $\overline{BC} = 6\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow \overline{CM} = 3\sqrt{2} \text{ cm}.$

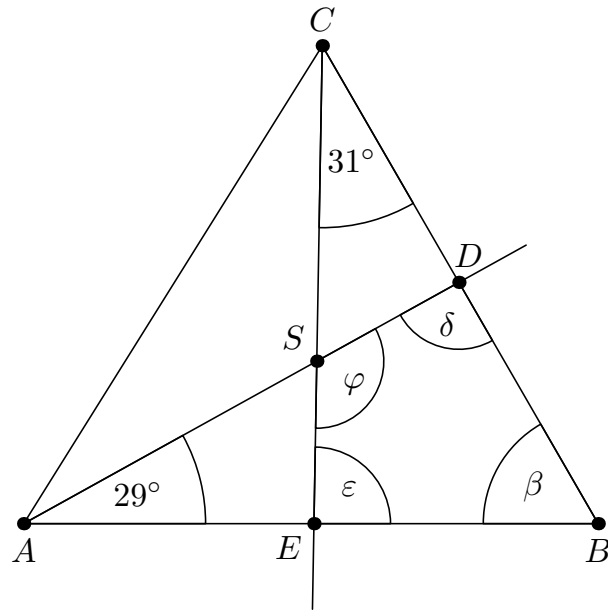
Damit muss gelten: $6 - x = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 6 - 3\sqrt{2} \approx 1,76.$

(f) $20\% = 0,2.$

$$(9 - 1,5x) \text{ cm}^2 = 0,2 \cdot 18 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow 9 - 1,5x = 3,6 \Leftrightarrow x = 3,6.$$

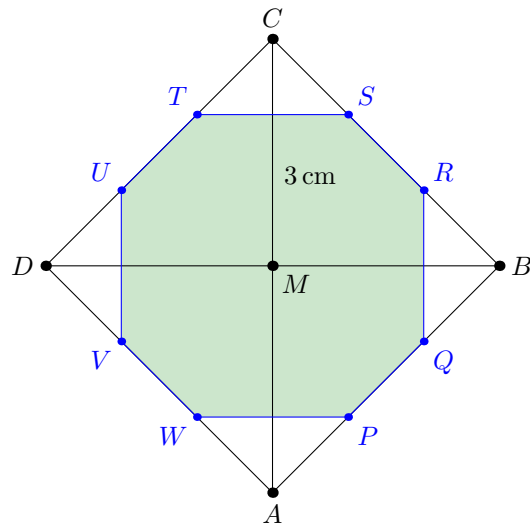
55. (a)

13. Flächeninhalt ebener Vielecke



- $\triangle ABC$: $\beta = 180^\circ - 58^\circ - 62^\circ = 60^\circ$.
 $\triangle EBC$: $\varepsilon = 180^\circ - 31^\circ - 60^\circ = 89^\circ$.
- $\triangle ABD$: $\delta = 180^\circ - 29^\circ - 60^\circ = 91^\circ \neq 89^\circ$.
 Also ist das Viereck $EBDF$ kein achsensymmetrischer Drachen.
- Im Viereck $EBDF$ gilt: $\varepsilon + \delta = 180^\circ \Rightarrow \varphi + \beta = 180^\circ$. Also ist das Viereck $EBDF$ ein Sehnenviereck; d.h. es besitzt einen Umkreis.

56. (a)



- (b) Es gilt: $\triangle TSC \sim \triangle DBC$.
 Weil z.B. $\overline{TC} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DC}$ gilt, folgt dann $\overline{TS} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DB} = \frac{1}{3} \cdot 6 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$.
 Andererseits gilt z.B.:

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

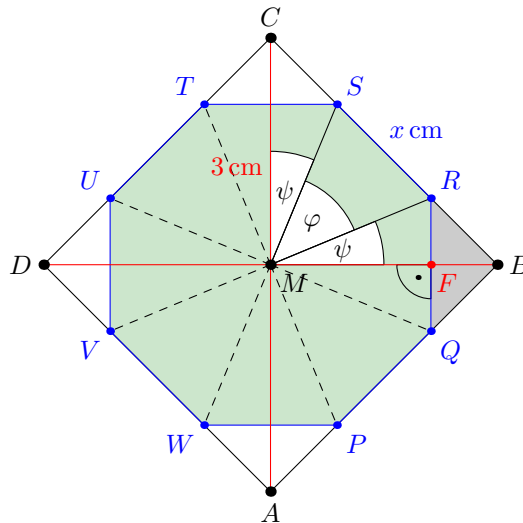
$$\overline{BC} = 3 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow \overline{SR} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BC} = \sqrt{2} \text{ cm} < 2 \text{ cm}.$$

Also ist das Achteck nicht regelmäßig.

- (c) Den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUUV$ kannst du am einfachsten dadurch berechnen, dass du vom Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ die Flächeninhalte der vier kongruenten weißen Dreiecke an seinen Eckpunkten subtrahierst. Den Flächeninhalt A jedes dieser Dreiecke berechnest du am besten mit der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.
 $A_{PQRSTUUV} = \frac{1}{2} \cdot (6 \text{ cm})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2 - 4 \text{ cm}^2 = 14 \text{ cm}^2$

$$\frac{A_{PQRSTUUV}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{14 \text{ cm}^2}{18 \text{ cm}^2} = 0,7 \approx 77,78\%.$$

57. (a)



Die Mittelpunktswinkel aller Teildreiecke dieses regelmäßigen Achtecks haben alle das gleiche Maß $\varphi = 360^\circ : 8 = 45^\circ$. Aus Symmetriegründen gilt dann $\psi = 45^\circ : 2 = 22,5^\circ$.

Damit entsteht die Figur so, wie sie in der Angabe dargestellt ist.

- (b) Das Dreieck MBC ist gleichschenkelig-rechtwinklig, also ein halbes Quadrat. $\Rightarrow \overline{BC} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$.

Das Dreieck QBR ist gleichschenkelig-rechtwinklig, also ein halbes Quadrat. Es sei $\overline{RQ} = x \text{ cm}$. $\Rightarrow \overline{RB} = \frac{x}{\sqrt{2}} \text{ cm} = \overline{SC}$.

$$\Rightarrow \overline{BC} = 3\sqrt{2} \text{ cm} = \left(2 \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} + x\right) \text{ cm} \quad \left| \cdot \frac{\sqrt{2}}{\text{cm}} \right.$$

$$\Leftrightarrow 6 = 2x + x\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow x = \frac{6}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

$$x = 3(2 - \sqrt{2}).$$

(*)

Dann ist $u_8 = 24(2 - \sqrt{2}) \text{ cm} \approx 14,06 \text{ cm}$.

- (c) Berechne zunächst den Flächeninhalt eines Teildreiecks z.B. ΔMQR :

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

$$A_{\Delta MQR} = \frac{1}{2} \cdot \overline{RQ} \cdot \overline{MF} \text{ mit } \overline{MF} = \overline{MB} - \overline{FB}, \text{ wobei } \overline{MB} = 3 \text{ cm gilt.}$$

Weil das Dreieck QBR gleichschenkelig-rechtwinklig ist, gilt:

$$\overline{FB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{RQ} = \frac{1}{2} \cdot x \text{ cm} \Rightarrow \overline{MF} = \left(3 - \frac{1}{2} \cdot x\right) \text{ cm} .$$

$$\Rightarrow A_{\Delta MQR} = \frac{1}{2} \cdot x \text{ cm} \cdot \overline{MF} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(3 - \frac{1}{2} \cdot x\right) \text{ cm}^2 .$$

Mit (*) aus der Lösung b) erhalten wir:

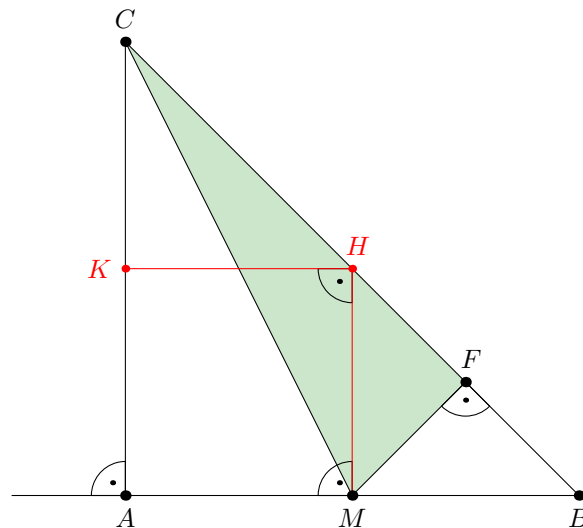
$$\begin{aligned} A_{\Delta MQR} &= \frac{1}{2} \cdot 3(2 - \sqrt{2}) \cdot \left[3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (2 - \sqrt{2})\right] \text{ cm}^2 \\ &= \frac{3(2 - \sqrt{2})}{2} \cdot \left[3 - 3 \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right] \text{ cm}^2 = \frac{6 - 3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\Delta MQR} &= \frac{9}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2 \\ A_{PQRSTUWV} &= 8 \cdot A_{\Delta MQR} = 8 \cdot \frac{9}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2 = 36 \cdot (\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$$

$$\frac{A_{PQRSTUWV}}{A_{ABCD}} = \frac{36 \cdot (\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2}{18 \text{ cm}^2} = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \approx 0,8284 = 82,84\% .$$

58. (a)



- (b) Die beiden Dreiecke MBH und KHC sind kongruente gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke. Zusammen sind sie so groß wie das Quadrat $AMHK$.

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

Das bedeutet, dass der Flächeninhalt des Dreiecks MBH ein Viertel des Flächeninhalts des Dreiecks ABC beträgt. Das Dreieck MBF ist halb so groß wie das Dreieck MBH .

Also gilt: $A_{\Delta MBF} = \frac{1}{8} \cdot A_{\Delta ABC}$.

Die Dreiecke AMC und MBC haben den gleichen Flächeninhalt, weil ihre Grundlinien und Höhen jeweils gleich lang sind. Damit sind sie jeweils halb so groß wie das Dreieck ABC .

$$\Rightarrow A_{\Delta MFC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta ABC} - \frac{1}{8} \cdot A_{\Delta ABC} = \frac{3}{8} \cdot A_{\Delta ABC} = 0,375 \cdot A_{\Delta ABC}.$$

Der Flächenanteil beträgt somit 37,5%.

- (c) Nimm an, dass die Halbgerade $[CM$ den Winkel ACB halbiert.

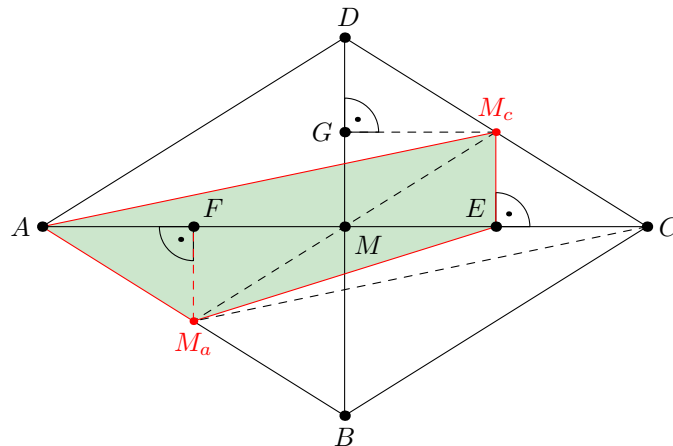
Der Punkt M würde dann ebenfalls auf der Winkelhalbierenden liegen. Dann müsste sein Abstand zum Schenkel $[CA$ der gleiche sein wie zum Schenkel $[CB$. Es müsste also gelten $\overline{AF} = \overline{AM}$.

Im rechtwinkligen Dreieck MBF ist $[MB]$ die Hypotenuse; d.h.

$$\overline{MF} < \overline{MB} = \overline{AM}.$$

Also wird der Winkel ACB nicht von der Halbgeraden $[CM$ halbiert.

59. (a)



- (b) Die gestrichelten Hilfslinien in der Eingangsfigur machen dir klar, dass $A_{\Delta ECM_c} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta MCD}$ gilt.
Aus Symmetriegründen folgt dann: $A_{\Delta ECM_c} = \frac{1}{16} \cdot A_{ABCD}$.

Die Strecke $[AM_c]$ stellt im Dreieck ACD eine Seitenhalbierende dar.

Also gilt: $A_{\Delta ACM_c} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta ACD}$.

Dann ist $A_{\Delta ACM_c} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCD}$.

Wegen $A_{\Delta AEM_c} = A_{\Delta ACM_c} - A_{\Delta ECM_c}$ folgt dann:

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

$$A_{\Delta AEM_c} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCD} - \frac{1}{16} \cdot A_{ABCD} = \frac{3}{16} \cdot A_{ABCD}.$$

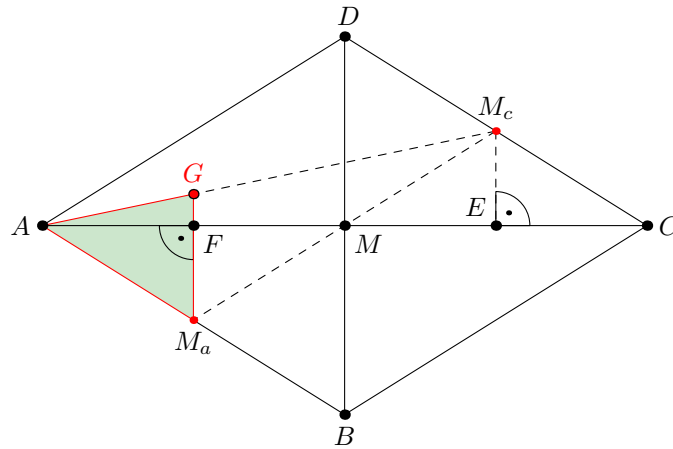
Die beiden Dreiecke AM_aE und AEM_c besitzen die gleiche Grundlinie $[AE]$. Wegen $\overline{FM_a} = \overline{EM_c}$ sind ihre Höhen gleich lang. Folglich gilt:

$$A_{\Delta AM_aE} = A_{\Delta AEM_c} = \frac{3}{16} \cdot A_{ABCD}.$$

$$\text{Damit ist } A_{AM_aEM_c} = 2 \cdot \frac{3}{16} \cdot A_{ABCD} = \frac{3}{8} \cdot A_{ABCD}.$$

$$\Rightarrow \frac{A_{AM_aEM_c}}{A_{ABCD}} = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\%.$$

60. (a)



(b) Den Flächeninhalt A des Dreiecks AM_aG kannst du mit

$$A_{\Delta AM_aG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{M_aG} \cdot \overline{FA}. \quad (*)$$

berechnen.

$$\text{Nun ist } \overline{M_aG} = \overline{M_aF} + \overline{FG}. \quad (**)$$

$$\text{Es gilt offensichtlich } \overline{FA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AC}.$$

$$\text{Analog gilt } \overline{M_aF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{4} \cdot \overline{BD}.$$

Weiter machen dir die gestrichelten Hilfslinien anhand der Ähnlichkeitssätze Folgendes klar:

$$\overline{AF} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AC} \text{ und } \overline{AF} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AE}$$

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

Dann gilt: $\overline{FG} = \frac{1}{3} \cdot \overline{EM_c} = \frac{1}{3} \cdot \overline{M_aF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{12} \cdot \overline{BD}$.

Mit (**) ergibt sich dann $\overline{M_aG} = \frac{1}{4} \cdot \overline{BD} + \frac{1}{12} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BD}$.

Mit (*) ergibt sich schließlich

$$A_{\Delta AM_aG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{BD} \cdot \frac{1}{4} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}.$$

Mit $A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}$ folgt:

$$\frac{A_{\Delta AM_aG}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}} = \frac{1}{12} = 0,08\overline{3} = 8,3\%.$$

14. Abbildung durch zentrische Streckung

1. Es gibt mehrere Möglichkeiten: z.B. über Steigungsdreiecke, Vektoren, Geradengleichungen.
Antwort: Nein, aber ziemlich knapp.

2. Z.B. über Steigungsdreiecke oder die Länge von Strecken.
Antwort: Um 50%.

3. $E^*(2, 6|3, 1)$.

4.

(a) $\triangle LGD \sim \triangle HKL \sim \triangle KBF \sim \triangle EBL \sim \triangle DAB \sim \triangle DBC$

(b) Es sei $\overline{AD} = x$ cm.

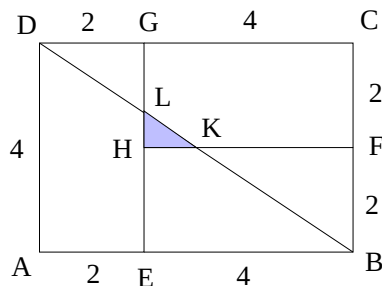
Weil alle Rechtecke im Inneren flächengleich sind, muss $\overline{DG} = \overline{BF} = \overline{FC} = 0,5x$ cm gelten.

Dann ist $\overline{EB} = (6 - 0,5x)$ cm = $\overline{AD} = x$ cm.

$\Rightarrow 6 = 1,5x$ $\overline{AD} = 4$ cm; d.h. alle inneren Rechtecke sind sogar **kongruent**.

Nun kannst du die Figur zeichnen.

(c)



$\triangle DLG \sim \triangle DBC$:

$$\frac{\overline{GL}}{2} = \frac{4}{6} \Rightarrow \overline{GL} = \frac{4}{3}$$

14. Abbildung durch zentrische Streckung

$$\overline{HL} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} = 0,5 \cdot \overline{GL}$$

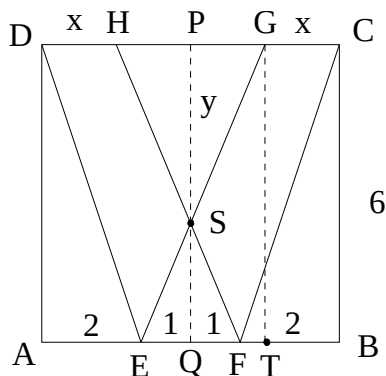
Aus (a): $\triangle HKL \sim \triangle LGD$ mit dem Ähnlichkeitsfaktor $k = 0,5$.

$$\Rightarrow A(HKL) = 0,5^2 \cdot A(LGD) = 0,25 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \text{ cm}^2 = \frac{2}{3} \text{ cm}^2$$

$$\frac{A(HKL)}{A(ABCD)} = \frac{2}{3} : 24 = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$$

5. (a) –

(b)



Wenn y zunimmt (abnimmt), dann wird x größer (kleiner).

(c) **1. Möglichkeit** (mit der Hilfslinie $\overline{GT}$):

Wegen $\overline{EB} = 4 \text{ cm}$ folgt $\overline{ET} = (4 - x) \text{ cm}$.

$\triangle PSG \sim \triangle ETG$:

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PG}} = \frac{\overline{GT}}{\overline{ET}} \Rightarrow \frac{y}{3-x} = \frac{6}{4-x}.$$

Damit ergibt sich der gewünschte Ausdruck.

2. Möglichkeit (ohne die Hilfslinie $\overline{GT}$):

Es gilt: $\overline{QS} = (6 - y) \text{ cm}$ und $\triangle PSG \sim \triangle ETG$:

$$\frac{\overline{SP}}{\overline{PG}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{EQ}} \Rightarrow \frac{y}{3-x} = \frac{6-y}{1}.$$

$\Rightarrow y = (3-x)(6-y) = 18 - 3y - 6x + xy \Leftrightarrow y(x-4) = 6x - 18$, woraus die obige Beziehung folgt.

(d) **1. Möglichkeit** (elegant):

Es gilt $\triangle EFS \sim \triangle HSG$. Wenn das Dreieck HSG doppelt so groß wie das Dreieck EFS ist, dann muss für die entsprechenden Seitenlängen der Streckungsfaktor den Wert $\sqrt{2}$ besitzen.

Es muss z.B. gelten:

$$\overline{HG} = \sqrt{2} \cdot \overline{EF}, \text{ also } 6 - 2x = \sqrt{2} \cdot 2. \text{ Damit ergibt sich } x = 3 - \sqrt{2} \approx 1,59.$$

2. Möglichkeit (aufwändig):

Es muss gelten: $A(HSG) = 2 \cdot A(EFS)$. Also: $\frac{1}{2} \cdot \overline{HG} \cdot \overline{PS} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{QS}$

14. Abbildung durch zentrische Streckung

$$(3-x) \cdot y = 2 \cdot (6-y) \Leftrightarrow y = \frac{12}{5-x}.$$

Mit dem Ergebnis der Aufgabe (b) folgt dann

$$\frac{6 \cdot (3-x)}{(4-x)} = \frac{12}{5-x}$$

Diese Bruchgleichung führt dann auf die quadratische Gleichung

$$x^2 - 6x + 7 = 0 \quad \text{mit} \quad G =]0; 3[_{\mathbb{R}} \Rightarrow x_{1;2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Das Pluszeichen entfällt wegen $3 + \sqrt{2} > 3$.

6. Der Turm ist 290 m hoch.

7. $\overline{DE} = 6,25 \text{ m}$

8. 7,0 m

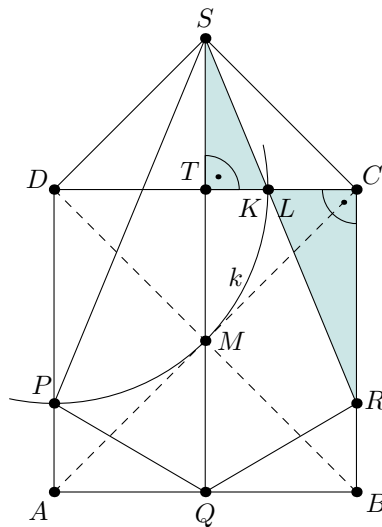
9. (a) - -

(b) Der Fahrer erreicht 1,1 Promille um 2.40 Uhr, 0,5 Promille um 6.40 Uhr und 0,3 Promille um 8.00 Uhr.

(c) Morgens um 7.40 Uhr hat der Fahrer 0,35 Promille.

(d) - -

10. (a)



14. Abbildung durch zentrische Streckung

- (b) Es gilt: $\overline{DC} = 2a$ und $\overline{TS} = a$ (Das ist die Dreieckshöhe.)

$$A_{ABCS D} = A_{ABCD} + A_{DCS} = (2a)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = 5a^2$$

$$A_{PQRS} = \overline{QS} \cdot \overline{PR} = \frac{1}{2} \cdot (2a + a) \cdot 2a = 3a^2$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCS D}} = \frac{3a^2}{5a^2} = \frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$$

- (c) Das Dreieck DCS ist ein halbes Quadrat, dessen Seite jetzt $14,5 \text{ cm}$ lang wäre. Also würde gelten: $A_{DCS} = \frac{1}{2} \cdot 14,5^2 \text{ cm}^2 = 105,125 \text{ cm}^2$.

Mit Hilfe der gestrichelten Linien erkennst du: Das Quadrat $ABCD$ ist in vier kongruente Dreiecke zerlegt worden, die zum Dreieck DCS kongruent sind.

Das Quadrat $ABCD$ hätte also einen Flächeninhalt von $4 \cdot 105,125 \text{ cm}^2 = 420,5 \text{ cm}^2$.

- (d) Es sei K der Schnittpunkt der Strecke $[SR]$ mit der Strecke $[TC]$.

$$\text{Es gilt dann: } \overline{KC} = \overline{DC} - \overline{DK} = 2a - a\sqrt{2} = a(2 - \sqrt{2})$$

$$\text{Weiter gilt: } \overline{TK} = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1)$$

Dann gilt für Das Teilverhältnis

$$\frac{\overline{KC}}{\overline{TK}} = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{a(\sqrt{2} - 1)} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}^2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)}{1 \cdot (\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2}$$

Natürlich kämst du mit $\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$ zum selben Resultat.

Es sei L der Schnittpunkt des Kreisbogens k mit der Strecke $[TC]$. Zwar liegen die Punkte K und L in der Zeichnung aufeinander, aber ist das auch tatsächlich so?

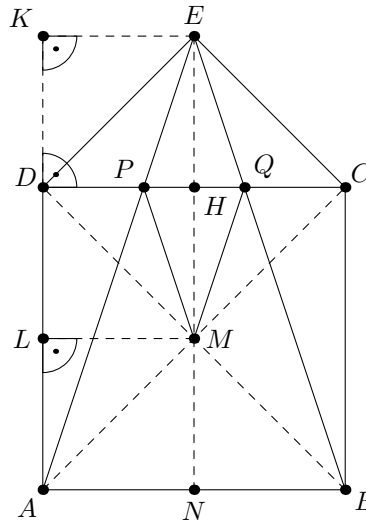
Die Dreiecke LRC und TLS sind beide rechtwinklig und sie besitzen im Punkt L maßgleiche Scheitelwinkel. Also sind die beiden Dreiecke zueinander ähnlich und du kannst den Vierstreckensatz anwenden:

$$\frac{\overline{LC}}{\overline{TL}} = \frac{\overline{RC}}{\overline{TS}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{TS}} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

Also teilt der Punkt L die Strecke $[TC]$ im gleichen Verhältnis wie der Punkt K . Dann müssen aber die beiden Punkte K und L aufeinander liegen; d.h. der Kreisbogen k verläuft tatsächlich durch den Schnittpunkt der Strecke $[SR]$ mit der Strecke $[TC]$.

11. (a)

14. Abbildung durch zentrische Streckung



- (b) Offensichtlich passt das Dreieck DCE fünfmal in die Figur hinein.
Die Dreiecke AMD und AED besitzen die gleiche Grundseite $[AD]$. Ihre Höhen $[ML]$ bzw. $[EK]$ sind gleich lang. Also sind diese beiden Dreiecke flächengleich.
Daher gilt: $A_{\triangle AED} = \frac{1}{5} \cdot A_{ABCEDE}$.
Aus Symmetriegründen folgt: $A_{\triangle ABE} = A_{ABCEDE} - 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot A_{ABCEDE} = \frac{3}{5} A_{ABCEDE}$.
$$\Rightarrow \frac{A_{\triangle ABE}}{A_{ABCEDE}} = \frac{3}{5} = 60\%$$
- (c) Aus Symmetriegründen muss das Viereck $MQEP$ eine Raute sein. Die Dreiecke ANE und PHE sind zueinander ähnlich:

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{EN}} = \frac{1}{3}$$

Daraus ergibt sich übrigens, dass die Strecke $[CD]$ von den Punkten P und Q in drei gleiche Teile geteilt wird.

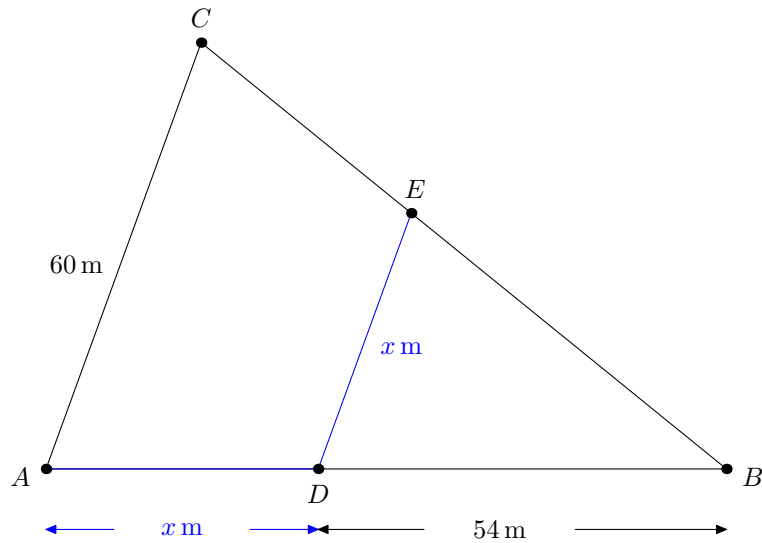
$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{A_{\Delta PHE}}{A_{\Delta ANE}} &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = \frac{A_{\Delta PQE}}{A_{\Delta ABE}} \\ \Rightarrow \frac{A_{PQME}}{A_{\Delta ABE}} &= \frac{2}{9} \approx 22,22\% \end{aligned}$$

12. Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in allen drei Innenwinkelmaßen übereinstimmen.

Der dritte Innenwinkel im ursprünglichen Dreieck hat das Maß $180^\circ - 73,47^\circ - 41,26^\circ = 65,27^\circ$. In ihm hat also der dritte Innenwinkel das Maß $65,27^\circ$.

Das andere Dreieck besitzt dieses Innenwinkelmaß ebenfalls. Also kann dieses Dreieck (wenn auch die beiden anderen Innenwinkel paarweise übereinstimmen) zu ersten Dreieck ähnlich sein.

13. (a)



Das Viereck $ADEC$ ist ein Trapez. Also ist $[AC] \parallel [DE]$.

Daher gilt: $\triangle DBE \sim \triangle ABC$. Nach einem Vierstreckensatz folgt:

$$\frac{x}{60} = \frac{54}{54+x} \Leftrightarrow x^2 + 54x - 3240 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung besitzt die Lösungen 36 und -90 , wobei -90 natürlich ausscheidet.

Also ist der Zaun 36 m lang.

(b) Für den Ähnlichkeitsmaßstab k gilt z.B.: $k = \frac{x \text{ m}}{60 \text{ m}} = \frac{36 \text{ m}}{60 \text{ m}} = 0,6$

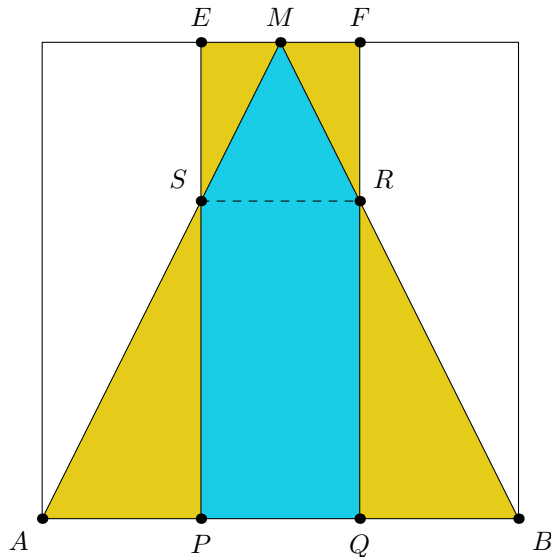
Für Lenis Anteil DBE gilt: $A_{\triangle DBE} = 0,6^2 \cdot A_{\triangle ABC}$.

Weiter folgt: $\frac{A_{\triangle DBE}}{A_{\triangle ABC}} = 0,6^2 = 0,36 = 36\%$.

Also bekommt Sarah den restlichen Anteil von 100%, nämlich 64%.

14. (a)

14. Abbildung durch zentrische Streckung



- (b) Die Dreiecke APS und SME sind zueinander ähnlich.

Es gilt z.B.: $\overline{AP} : \overline{EM} = 1 : 2 = \overline{PS} : \overline{SE}$.

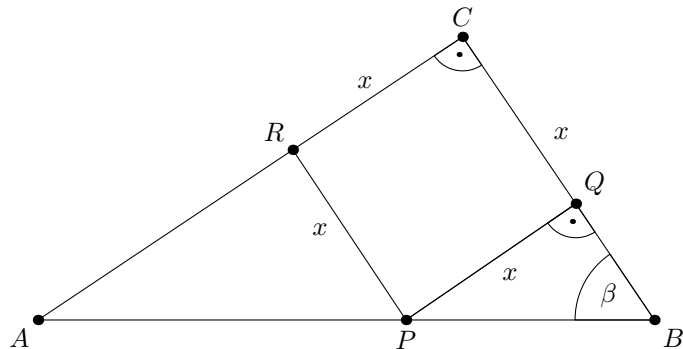
Die Strecke $[PE]$ ist 6,3 cm lang. Nach dem obigen Seitenverhältnis von 1 : 2 folgt: $\overline{PS} = 4,2$ cm und $\overline{SE} = 2,1$ cm = $\overline{SR}$. Das Viereck $SRFE$ ist ein Quadrat.

Für den Flächeninhalt A der Figur $PQRMSP$ gilt dann:

$$A = 2,1 \text{ cm} \cdot 4,2 \text{ cm} + 0,5 \cdot 2,1^2 \text{ cm}^2 = 11,025 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Flächenanteil: } \frac{11,025 \text{ cm}^2}{6,3^2 \text{ cm}^2} = 0,2\overline{7} = \frac{2}{10} + \frac{7}{90} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}.$$

15. (a)



Die Figur wurde im Maßstab 2 : 3 gezeichnet.

- (b) Die beiden Dreiecke PBQ und ABC sind rechtwinklig. Ein Winkel hat jeweils das Maß β . Also stimmen diese Dreiecke wegen der Innenwinkelsumme von 180° in allen drei Innenwinkeln überein. Also sind sie zueinander ähnlich.

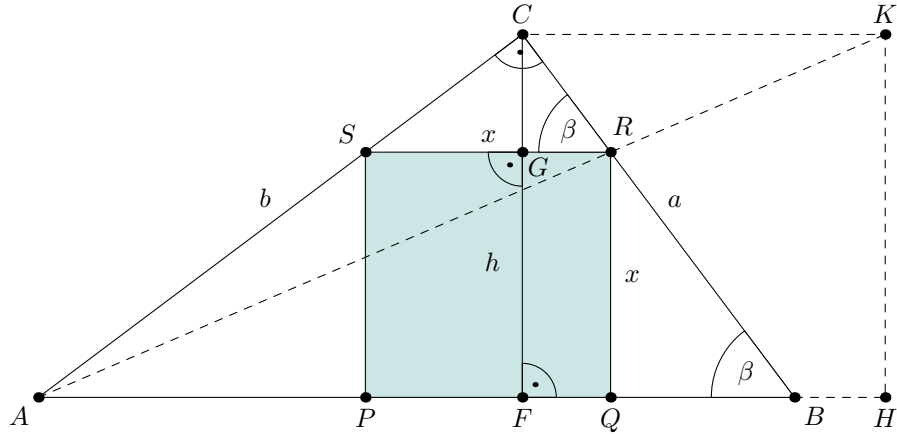
(c) $A_{\Delta PBQ} \sim A_{\Delta ABC}$ Vierstreckensatz: $\frac{\overline{BQ}}{x} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{6-x}{x} = \frac{6}{9}$

14. Abbildung durch zentrische Streckung

$$\Leftrightarrow 54 - 9x = 6x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3,6$$

$$(d) \quad \frac{A_{PQCR}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{3,6^2 \text{ cm}^2}{0,5 \cdot 6 \cdot 9 \text{ cm}^2} = 0,48 = 48\%$$

16. (a)



Zeichne z.B. das Probequadrat $QHKC$ mit der Seitenlänge $h [= 4,8 \text{ cm}]$.
 $[AK] \cap [BC] = \{R\}$. Zeichne dann das Quadrat mit der Seite $[RQ]$ fertig.

- (b) Aus der Zeichnung in (a) ist ersichtlich, dass beide Dreiecke rechtwinklig sind. Außerdem taucht in beiden Dreiecken der Winkel mit dem Maß β auf. Also stimmen die beiden Dreiecke sogar in allen drei Innenwinkeln überein. Also sind sie zueinander ähnlich.

- (c) Wegen $\triangle FBC \sim \triangle ABC$ gilt:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h}{a} = \frac{b}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad h = \frac{ab}{c}. \quad \text{Mit } c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ cm folgt die Behauptung.}$$

Für $a = 6 \text{ cm}$ und $b = 8 \text{ cm}$ ergibt sich $h = 4,8 \text{ cm}$.

- (d) In beiden Dreiecken tauchen Stufenwinkel mit dem Maß β auf. Also sind die beiden Dreiecke zueinander ähnlich.

- (e) Wegen $\triangle SRC \sim \triangle ABC$ verhalten sich die Längen der Hypotenusen wie die entsprechenden Höhen in beiden Dreiecken:

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{c} = \frac{h-x}{h} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{hc}{h+c}$$

Mit $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ cm}$ und $c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ cm}$ ergibt sich:

14. Abbildung durch zentrische Streckung

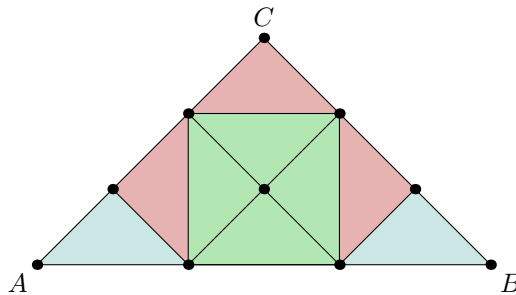
$$x = \frac{ab}{\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Erweitert man den Bruch mit $\sqrt{a^2 + b^2}$, so ergibt sich die Behauptung.

(f) • In diesem Fall gilt $b = a$. $\Rightarrow x = \frac{a^3\sqrt{2}}{3a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

$$\Rightarrow \frac{A_{PQRS}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{x^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{\frac{a^2 \cdot 2}{3^2}}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{4}{9} = 0,\bar{4} = 44,\bar{4}\%$$

•



Das Dreieck ABC lässt sich in neun kongruente gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck zerlegen. Vier davon nimmt das einbeschriebene Quadrat ein. Also beträgt der Flächennateil dieses Quadrates am Dreieck ABC

$$\frac{4}{9} = 0,\bar{4} = 44,\bar{4}\%$$

17. (a) Klar.

(b) $A_1 = A_2 = 1,5^2\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow A_1 + A_2 = 2 \cdot 1,5^2\pi \text{ cm}^2 (\approx 14,14 \text{ cm}^2)$

Der Durchmesser d des großen Kreises ist genauso lang wie die Diagonale $[BD]$ des Quadates $ABCD$.

$$\Rightarrow d = 3\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow r_3 = 1,5\sqrt{2} \text{ cm}.$$

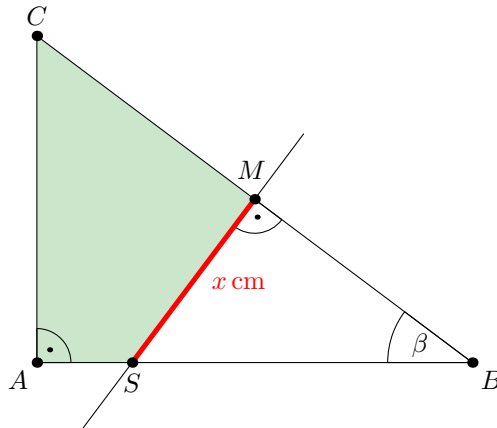
$$\Rightarrow A_3 = (1,5\sqrt{2})^2\pi \text{ cm}^2 = 2 \cdot 1,5^2\pi \text{ cm}^2 = A_1 + A_2.$$

Also sind die beiden kleinen Kreise zusammen genauso groß wie der große Kreis.

Oder kürzer: Der Durchmesser des großen Kreises ist $\sqrt{2}$ – mal so groß wie der Durchmesser eines kleinen Kreises. Also ist der Flächeninhalt des großen Kreises doppelt $(= (\sqrt{2})^2)$ so groß wie der eines kleinen Kreises.

18. (a)

14. Abbildung durch zentrische Streckung



In beiden Dreiecken ABC und SBM kommt der Innenwinkel mit dem Maß β vor. Zudem sind beide Dreiecke rechtwinklig. Also müssen beide Dreiecke auch im Maß des dritten Innenwinkels übereinstimmen; also gilt $\triangle SBM \sim \triangle ABC$.

- (b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen.

PYTHAGORAS im Dreieck ABC : $\overline{BC}^2 = 7,2^2 + 5,4^2 \Rightarrow \overline{BC} = 9 \text{ cm}$
 $\Rightarrow \overline{BM} = 4,5 \text{ cm}$.

Vierstreckensatz: $\frac{\overline{MS}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} : \frac{x}{4,5} = \frac{5,4}{7,2} \Leftrightarrow x = 3,375$.

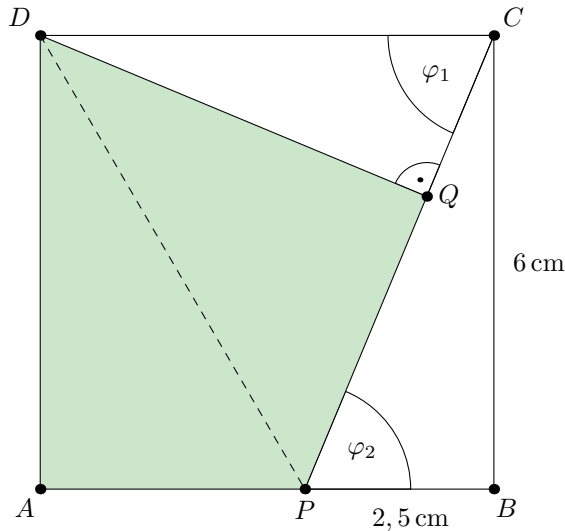
- (c) Berechne den Ähnlichkeitsfaktor: Z.B. $k = \frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{4,5}{7,2} = 0,625$.

Dann gilt $\frac{A_{\triangle SBM}}{A_{\triangle ABC}} = k^2 = 0,625^2 = 0,390625$.

Das bedeutet: Das Dreieck SBM nimmt 39,0625% der Fläche des Dreiecks ABC ein. Dann nimmt das Viereck $ASMC$ $100\% - 39,0625\% = 60,9375\%$ der Fläche des Dreiecks ABC ein.

19. (a)

14. Abbildung durch zentrische Streckung



- (b) Die Kathete $\overline{AD}$ im rechtwinkligen Dreieck APD besitzt die Länge a . Die Hypotenuse $\overline{DC}$ im rechtwinkligen Dreieck DQC hat ebenfalls die Länge a . Weil aber in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite darstellt, gilt: $\overline{DQ} < a = \overline{AD}$. Somit kann die Diagonale $\overline{DP}$ im Viereck $APQD$ nicht Symmetrieachse dieses Vierecks sein.
- (c) In den beiden rechtwinkligen Dreiecken DQC und PBC gilt: $\varphi_1 = \varphi_2$ (Z-Winkel). Damit stimmen die beiden Dreiecke paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck stimmen diese beiden Dreiecke in allen drei Innenwinkelmaßen überein. Also gilt: $\triangle PBC \sim \triangle DQC$.
- (d) Strategie: $A_{APQD} = A_{ABCD} - (A_{\triangle PBC} + A_{\triangle DQC})$.

$$A_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 6 \text{ cm}^2 = 7,5 \text{ cm}^2.$$

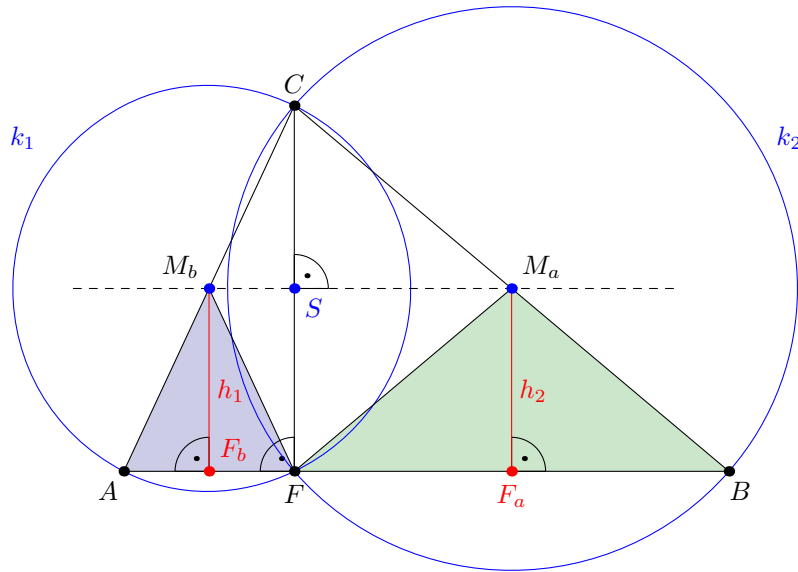
Wegen (c) folgt: $A_{\triangle DQC} = k^2 \cdot A_{\triangle PBC}$ mit dem Streckungsfaktor k .

$$\text{Mit } k = \frac{\overline{DC}}{\overline{PC}} \text{ folgt: } k = \frac{6 \text{ cm}}{\sqrt{2,5^2 + 6^2} \text{ cm}} = \frac{12}{13}.$$

$$\Rightarrow A_{\triangle DQC} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot 7,5 \text{ cm}^2 = \frac{144}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2.$$

$$\begin{aligned} A_{APQD} &= 36 \text{ cm}^2 - \left(7,5 \text{ cm}^2 + \frac{144}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2\right) \\ &= 36 \text{ cm}^2 - \frac{313}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2 \\ \frac{A_{APQD}}{A_{ABCD}} &= \frac{6084 - 2374,5}{169 \cdot 36} = \frac{3709,5}{6084} \approx 0,6094 = 60,94\%. \end{aligned}$$

20. (a)



(b) **1. Möglichkeit:**

Im Kreis k_1 gilt: $\overline{M_bA} = \overline{M_bF} = \overline{M_bC}$.

Im Kreis k_2 gilt: $\overline{M_aB} = \overline{M_aF} = \overline{M_aC}$.

Also sind im Viereck FM_aCM_b zweimal zwei benachbarte Seiten gleich lang. Also handelt es sich um ein achsensymmetrisches Drachenviereck.

2. Möglichkeit:

In jedem rechtwinkligen Dreieck fällt dessen Umkreismittelpunkt mit dem Hypotenusenmittelpunkt zusammen. Also sind die Kreismittelpunkte M_a und M_b gleichzeitig die Mittelpunkte der Seiten $a = [BC]$ bzw. $b = [AC]$.

Die Dreiecke FBC und F_aBM_a sind zueinander ähnlich.

Wegen $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM_a}$ folgt dann $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{F_aM_a} = 2 \cdot \overline{F_bM_b}$.

Also gilt: $h_1 = h_2 = \overline{SF} = \overline{FC}$. Daher liegt die Gerade M_aM_b zur Grundlinie $[AB]$ des Dreiecks ABC parallel. Diese Parallele steht damit auf der Diagonalen des Vierecks FM_aCM_b senkrecht. Gleichzeitig halbiert der Punkt S die Höhe $[CF]$ des Dreiecks ABC . Also ist das Viereck FM_aCM_b ein achsensymmetrischer Drach.

(c) Die in der 2. Möglichkeit verwendete Argumentation ergibt nun Folgendes:

- Die vier Dreiecke F_aBM_a , FF_aM_a , FM_aS und SM_aC sind kongruent. Das Dreieck FBM_a besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.

Also ist das Dreieck FBM_a halb so groß wie das Teildreieck FBC .

- Die vier Dreiecke AF_bM_b , F_bFM_b , FSM_b und M_bSC sind kongruent. Das Dreieck AFM_b besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.

Also ist das Dreieck AFM_b halb so groß wie das Teildreieck AFC .

Also sind die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a zusammen halb so groß wie das Dreieck ABC .

Oder:

Weil der Schnittpunkt S auf halber Höhe im Dreieck ABC liegt, gilt:

$$A_{\Delta M_bM_aC} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta ABC} \text{ (zentrische Streckung mit } k = \frac{1}{2} \text{)}.$$

Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drach mit der Diagonalen

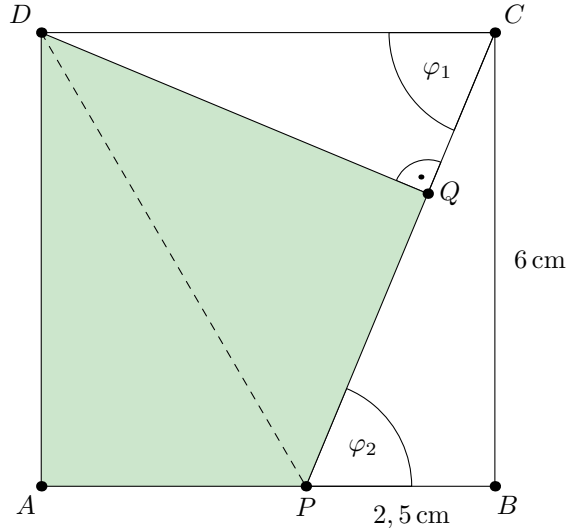
14. Abbildung durch zentrische Streckung

$[M_a M_b]$ als Symmetrieachse.

$$\Rightarrow A_{FM_a CM_b} = 2 \cdot \frac{1}{4} A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta ABC}.$$

Dann muss der Rest, nämlich derjenige, der aus den beiden Dreiecken AFM_b und FBM_a besteht, ebenfalls die Hälfte des Dreiecks ABC einnehmen.

21. (a)



- (b) Die Kathete $\overline{AD}$ im rechtwinkligen Dreieck APD besitzt die Länge a . Die Hypotenuse $\overline{DC}$ im rechtwinkligen Dreieck DQC hat ebenfalls die Länge a . Weil aber in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite darstellt, gilt: $\overline{DQ} < a = \overline{AD}$. Somit kann die Diagonale $\overline{DP}$ im Viereck $APQD$ nicht Symmetrieachse dieses Vierecks sein.
- (c) In den beiden rechtwinkligen Dreiecken DQC und PBC gilt: $\varphi_1 = \varphi_2$ (Z-Winkel). Damit stimmen die beiden Dreiecke paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck stimmen diese beiden Dreiecke in allen drei Innenwinkelmaßen überein. Also gilt: $\Delta PBC \sim \Delta DQC$.
- (d) Strategie: $A_{APQD} = A_{ABCD} - (A_{\Delta PBC} + A_{\Delta DQC})$.

$$A_{\Delta PBC} = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 6 \text{ cm}^2 = 7,5 \text{ cm}^2.$$

Wegen (c) folgt: $A_{\Delta DQC} = k^2 \cdot A_{\Delta PBC}$ mit dem Streckungsfaktor k .

$$\text{Mit } k = \frac{\overline{DC}}{\overline{PC}} \text{ folgt: } k = \frac{6 \text{ cm}}{\sqrt{2,5^2 + 6^2} \text{ cm}} = \frac{12}{13}.$$

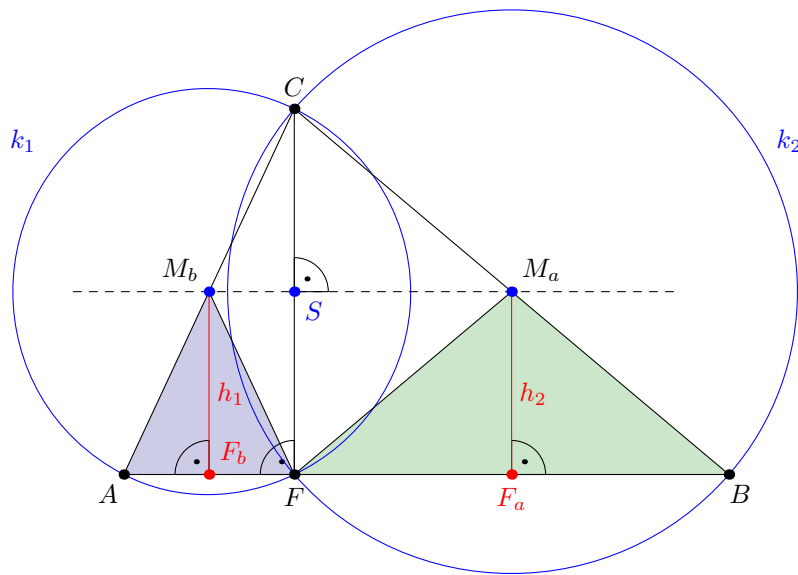
14. Abbildung durch zentrische Streckung

$$\Rightarrow A_{\Delta DQC} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot 7,5 \text{ cm}^2 = \frac{144}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2.$$

$$\begin{aligned} A_{APQD} &= 36 \text{ cm}^2 - \left(7,5 \text{ cm}^2 + \frac{144}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2\right) \\ &= 36 \text{ cm}^2 - \frac{313}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{A_{APQD}}{A_{ABCD}} = \frac{6084 - 2374,5}{169 \cdot 36} = \frac{3707,5}{6084} \approx 0,6094 = 60,94\%.$$

22. (a)



(b) **1. Möglichkeit:**

Im Kreis k_1 gilt: $\overline{M_bA} = \overline{M_bF} = \overline{M_bC}$.

Im Kreis k_2 gilt: $\overline{M_aB} = \overline{M_aF} = \overline{M_aC}$.

Also sind im Viereck FM_aCM_b zweimal zwei benachbarte Seiten gleich lang. Also handelt es sich um ein achsensymmetrisches Drachenviereck.

2. Möglichkeit:

In jedem rechtwinkligen Dreieck fällt dessen Umkreismittelpunkt mit dem Hypotenusenmittelpunkt zusammen. Also sind die Kreismittelpunkte M_a und M_b gleichzeitig die Mittelpunkte der Seiten $a = [BC]$ bzw. $b = [AC]$.

Die Dreiecke FBC und F_aBM_a sind zueinander ähnlich.

Wegen $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM_a}$ folgt dann $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{F_aM_a} = 2 \cdot \overline{F_bM_b}$.

Also gilt: $h_1 = h_2 = \overline{SF} = \overline{FC}$. Daher liegt die Gerade M_aM_b zur Grundlinie $[AB]$ des Dreiecks ABC parallel. Diese Parallele steht damit auf der Diagonalen des Vierecks FM_aCM_b senkrecht. Gleichzeitig halbiert der Punkt S die Höhe $[CF]$ des Dreiecks ABC . Also ist das Viereck FM_aCM_b ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Die in der 2. Möglichkeit verwendete Argumentation ergibt nun Folgendes:

14. Abbildung durch zentrische Streckung

- Die vier Dreiecke $F_a B M_a$, $F F_a M_a$, $F M_a S$ und $S M_a C$ sind kongruent. Das Dreieck $F B M_a$ besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
Also ist das Dreieck $F B M_a$ halb so groß wie das Teildreieck $F B C$.
- Die vier Dreiecke $A F_b M_b$, $F_b F M_b$, $F S M_b$ und $M_b S C$ sind kongruent. Das Dreieck $A F M_b$ besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
Also ist das Dreieck $A F M_b$ halb so groß wie das Teildreieck $A F C$.

Also sind die beiden Dreiecke $A F M_b$ und $F B M_a$ zusammen halb so groß wie das Dreieck $A B C$.

Oder:

Weil der Schnittpunkt S auf halber Höhe im Dreieck $A B C$ liegt, gilt:

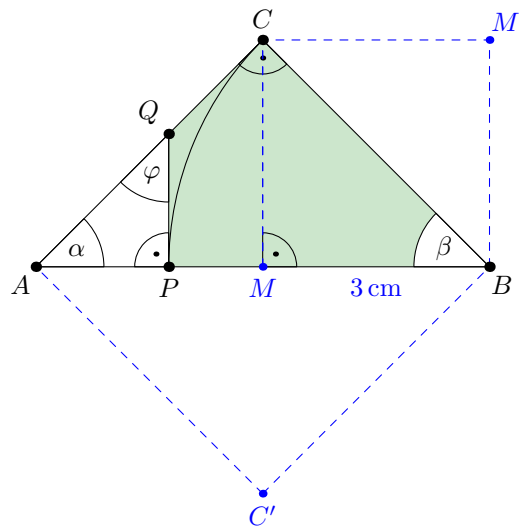
$$A_{\Delta M_b M_a C} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta A B C} \text{ (zentrische Streckung mit } k = \frac{1}{2} \text{)}.$$

Das Viereck $F M_a C M_b$ ist ein achsensymmetrischer Drachen mit der Diagonalen $[M_a M_b]$ als Symmetrieachse.

$$\Rightarrow A_{F M_a C M_b} = 2 \cdot \frac{1}{4} A_{\Delta A B C} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta A B C}.$$

Dann muss der Rest, nämlich derjenige, der aus den beiden Dreiecken $A F M_b$ und $F B M_a$ besteht, ebenfalls die Hälfte des Dreiecks $A B C$ einnehmen.

23. (a)



- (b) Es gilt $\alpha = \beta = 45^\circ$. Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck $A P Q$ gilt aber auch $\alpha = \varphi = 45^\circ$. Also stimmen die beiden Dreiecke $A B C$ und $A P Q$ paarweise in ihren Innenwinkelmaßen überein. Damit sind sie zueinander ähnlich.
- (c) Weil die beiden Dreiecke $A B C$ und $A P Q$ zueinander ähnlich sind, gilt für den Ähnlichkeitsfaktor k z.B.:

$$k = \frac{\overline{AP}}{\overline{BC}}.$$

Das Dreieck $M B C$ ist ein halbes Quadrat mit der Daigonalenlänge $\overline{BC} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$.

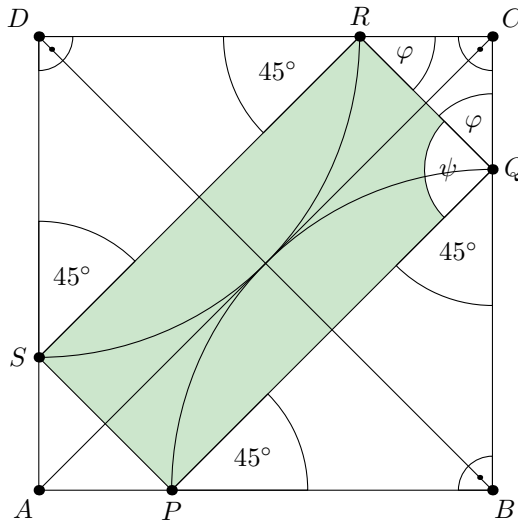
14. Abbildung durch zentrische Streckung

$$\overline{AP} = \overline{BA} - \overline{BP} = \overline{BA} - \overline{BC} = (6 - 3\sqrt{2}) \text{ cm}.$$

$$\text{Damit folgt } k = \frac{(6 - 3\sqrt{2}) \text{ cm}}{6 \text{ cm}}.$$

$$\text{Und } \frac{A_{\Delta APQ}}{A_{\Delta ABC}} = k^2 = \left[\frac{(6 - 3\sqrt{2}) \text{ cm}}{(3\sqrt{2}) \text{ cm}} \right]^2 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,1716 = 17,16\%.$$

24. (a)



- (b) Die beiden Dreiecke PBQ und SRD sind gleichschenkelig-rechtwinklig. Also haben ihre spitzen Innenwinkel das Maß 45° .

Weiter gilt: $\overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{BQ} = \overline{DC} - \overline{DR} = \overline{CR}$. Also ist auch das Dreieck RQC gleichschenkelig-rechtwinklig. Dann gilt $\varphi = 45^\circ$.

Am Punkt Q gilt somit: $45^\circ + \psi + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \psi = 90^\circ$.

Aus Symmetriegründen sind dann auch die drei restlichen Innenwinkel des Vierecks $PQRS$ rechte Winkel. Also handelt es sich hierbei um ein Rechteck.

- (c) Eine mögliche Strategie: $A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot (A_{\Delta PBQ} + A_{\Delta RQC})$

$$A_{\Delta PBQ} = \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2.$$

$$A_{\Delta RQC} = \frac{1}{2} \cdot (6 - 3\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2 = (27 - 18\sqrt{2}) \text{ cm}^2.$$

$$A_{PQRS} = 36 \text{ cm}^2 - 2 \cdot [9 \text{ cm}^2 + (27 - 18\sqrt{2}) \text{ cm}^2] = (36\sqrt{2} - 36) \text{ cm}^2.$$

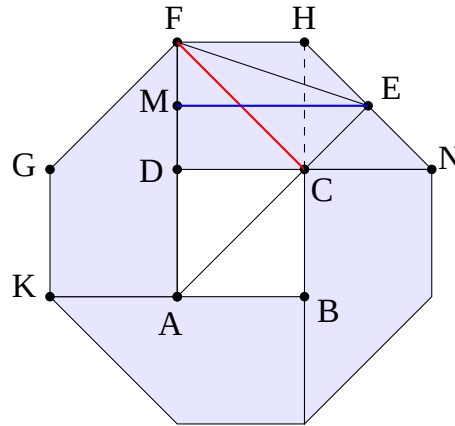
$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(36\sqrt{2} - 36) \text{ cm}^2}{36 \text{ cm}^2} = \frac{(36(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2)}{36 \text{ cm}^2}$$

$$= \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142 = 41,42\%$$

15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

1. - -
2. (a) 9 cm, 18 cm
(b) $d = \sqrt{405} \text{ cm} \approx 20,12 \text{ cm}$
3. (b) $60^\circ, 120^\circ$
(c) $A_1 = 2,75 \cdot \sqrt{90,75} \text{ cm}^2 \approx 26,20 \text{ cm}^2$ $A_2 = 1,375 \cdot \sqrt{90,75} \text{ cm}^2 \approx 13,10 \text{ cm}^2$
 $A_3 = A_2$
(d) $d = 2,75 \cdot \sqrt{3} \text{ cm} \approx 4,76 \text{ cm}$
4. Es gibt mehrere Möglichkeiten: z.B. über Steigungsdreiecke, Vektoren, Geradengleichungen.
Antwort: Nein, aber ziemlich knapp.
5. Z.B. über Steigungsdreiecke oder die Länge von Strecken.
Antwort: Um 50%.
6. $E^*(2,6|3,1)$.
7. $d = 6,3 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \approx 8,91 \text{ cm}$
8. (b) $u = 14 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \approx 19,80 \text{ cm}$
9. $x = 1,24 r$
10. (a) $[FG]$ ist genauso lang wie die Diagonale $[AC]$ des Quadrates $ABCD$.
Also gilt: $a\sqrt{2} = 3,2 \Rightarrow a = \frac{3,2}{\sqrt{2}} \approx 2,26$.
Für die Zeichnung: $\overline{AF} = \overline{KB} = 2a \text{ cm} \approx 5,52 \text{ cm}$.

15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck



(b) $A(ABCD) = a^2 \text{ cm}^2 = \left(\frac{3,2}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ cm}^2 = 5,12 \text{ cm}^2$

- (c) • Wegen $\overline{CE} = 0,5 \cdot \overline{AC}$ müsste gelten:
 $2a = 1,5a\sqrt{2} \quad (a \neq 0) \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}.$

Weil aber $\sqrt{2}$ irrational ist, liegt hier ein Widerspruch vor.

Dieser Widerspruch lässt sich auch durch Vergrößerung oder Verkleinerung der Figur nicht auflösen: Jede Vergrößerung oder Verkleinerung ist eine winkeltreue Abbildung. Wenn in der Ausgangsfigur keine zwei Winkel maßgleich sind, dann wird dies auch bei einer Größenänderung nicht anders.

- Es wird nur mit Maßzahlen gerechnet.

1. Möglichkeit:

$$A(AEF) = 0,5 \overline{AE} \cdot \overline{FC} = 0,5 \cdot 1,5a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 1,5a^2.$$

2. Möglichkeit:

$$A(AEF) = 0,5 \cdot \overline{AF} \cdot \overline{EM} = 0,5 \cdot 2a \cdot 1,5a = 1,5a^2.$$

3. Möglichkeit:

Das Lot $[FC]$ zelegt das Dreieck AEF in die beiden rechtwinkligen Teildreiecke ACF und CEF .

Das Dreieck ACF ist so groß wie das Quadrat $ABCD$: $A(ACF) = a^2$.

Weil $[FC] \parallel [HN]$ ist, folgt $A(CEF) = A(FCH) = 0,5a^2$.

$$\Rightarrow A(AEF) = a^2 + 0,5a^2 = 1,5a^2.$$

11. Der Umfang beträgt 32 m.

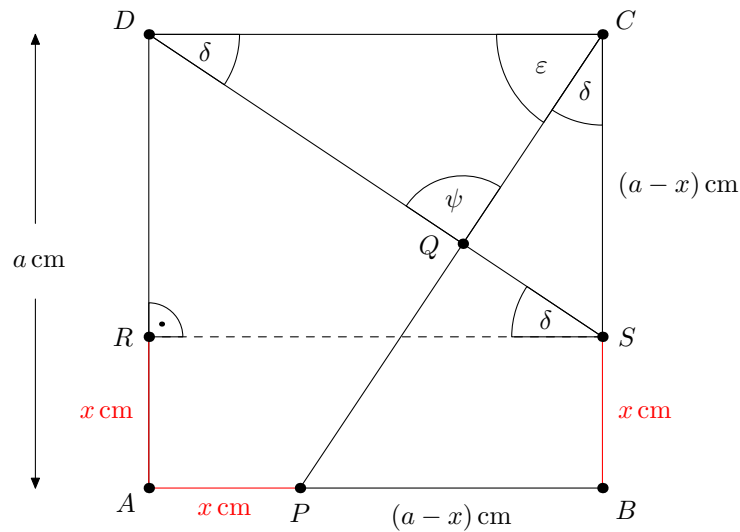
12. Der Treffpunkt ist 17 m vom Brunnen entfernt.

13. $\overline{BC} = 21 \text{ cm}$

14. Die große Pizza hat einen Durchmesser von 32,5 cm.

15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

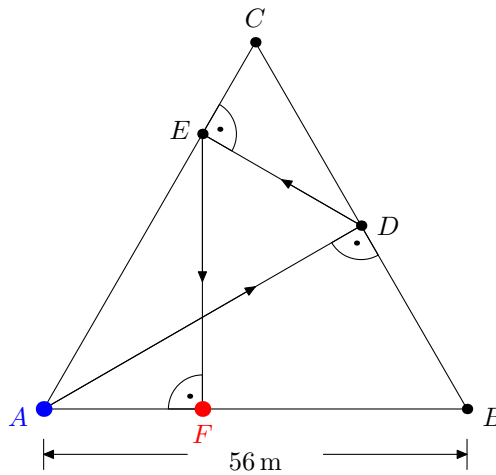
15. (a)



- (b) Am Punkt C gilt: $\varepsilon + \delta = 90^\circ$. (*)
 Die rechtwinkligen Dreiecke PBC und RSD sind kongruent, denn es gilt: $\overline{PB} = \overline{RD} = (a - x)$ cm und $\overline{BC} = \overline{RS} = a$ cm.
 Also folgt $\sphericalangle DSR = \delta = \sphericalangle SDC$ (Z-Winkel).
 Wegen (*) gilt im Dreieck DQC : $\psi = 90^\circ$.

16. (a) Die kürzeste Entfernung eines Punktes zu einer Strecke (Geraden) ist das Lot von diesem Punkt auf die Strecke (Gerade). Aber hier steht z.B. die Strecke $[AD]$ offensichtlich nicht auf der Dreiecksseite $[BC]$ senkrecht.

(b)



- (c) Der Punkt D halbiert die Seite $[BC]$. $\Rightarrow \overline{DC} = 28$ m.
 Das Dreieck EDC ist ein halbes gleichseitiges Dreieck mit $\overline{EC} = 0,5 \cdot \overline{DC} = 14$ m.
 $\Rightarrow \overline{AE} = 56 \text{ m} - 14 \text{ m} = 42 \text{ m}$.
 Das Dreieck AFE ist wieder ein halbes gleichseitiges Dreieck: $\overline{AF} = 21$ m.

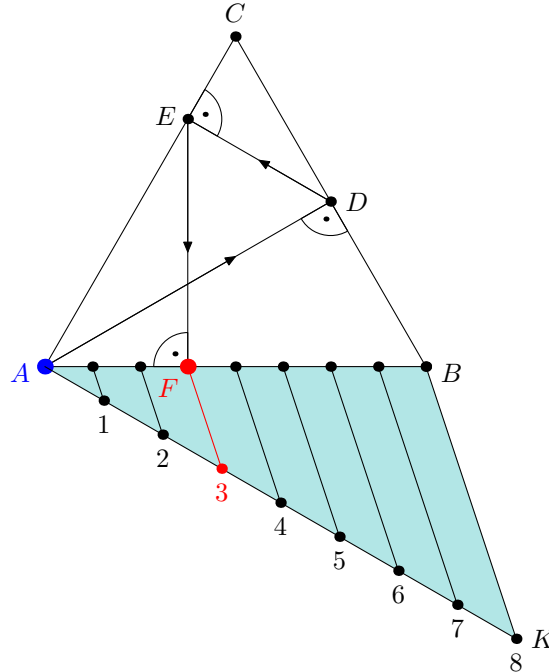
15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

$$\Rightarrow \overline{FB} = 56 \text{ m} - 21 \text{ m} = 35 \text{ m}.$$

$$\frac{21 \text{ m}}{35 \text{ m}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \overline{AF} : \overline{FB} = 3 : 5.$$

- (d) Wähle z.B. eine 8 cm lange Strecke $[AK]$ und teile sie in 8 gleiche Teile. Zeichne die zugehörigen Hilfslinien parallel zu $[BK]$ ein. Der Winkel, den die Strecken $[AK]$ und $[AB]$ einschließen, spielt zwar keine Rolle; du solltest ihn aber wegen der Zeichengenauigkeit nicht zu spitz wählen. Es folgt dann: Der Punkt F teilt die Strecke $[AB]$ im Verhältnis $3 : 8$.

Damit gilt: $\overline{AF} : \overline{FB} = 3 : 5$.



17.

Weg a)

Er besteht aus 5 gleich langen Strecken, denn jede Strecke stellt die Diagonale eines rechteckigen Gitterkästchens dar:

$110,5 \text{ m} : 5 = 22,1 \text{ m}$. So lang ist die Diagonale eines Gitterkästchens.

Weg b)

Er enthält 3 gleich lange Rechtecksdiagonalen eines Gitterkästchens. Der Rest dieses Weges ist dreimal so lang wie Breite eines Gitterkästchens. Für die Breite eines Gitterkästchens gilt dann:

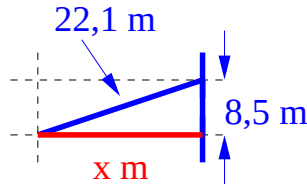
$$(91,8 \text{ m} - 3 \cdot 22,1 \text{ m}) : 3 = 8,5 \text{ m}.$$

15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

Weg c)

Von einem Gitterkästchen kennst du nun dessen Diagonalenlänge (22,1 m) und dessen Breite (8,5 m).

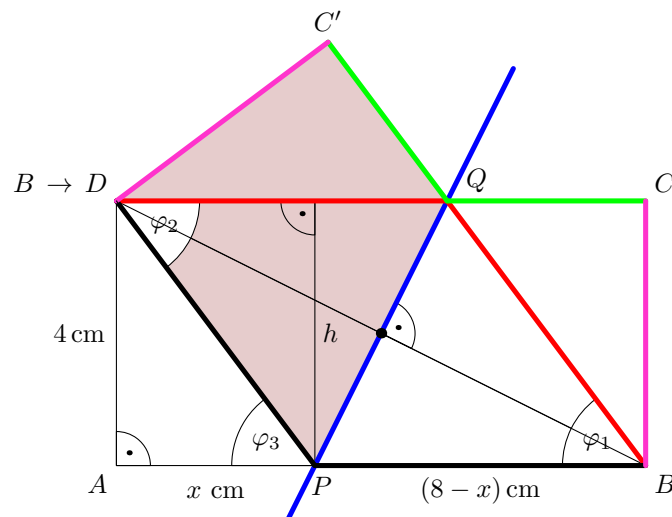
Dann lässt sich mit dem Satz des PYTHAGORAS die Höhe eines Gitterkästchens ausrechnen. (Das Gitterkästchen ist hier aus Platzgründen waagrecht gelegt):



Hier gilt: $x^2 + 8,5^2 = 22,1^2 \Rightarrow x = 20,4$. Für die Länge des Weges c) ergibt sich dann: $3 \cdot 8,5 \text{ m} + 2 \cdot 22,1 \text{ m} + 2 \cdot 20,4 \text{ m} = 110,5 \text{ m}$; d.h. die Wege a) und c) sind gleich lang.

18. (a) Klar.

(b)



- (c)
- Jede Faltachse ist gleichzeitig Spiegel- bzw. Symmetrieachse.
Also gilt: $\triangle PBQ \cong \triangle PQD \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$.
Wegen $[AB] \parallel [CD]$ folgt $\varphi_2 = \varphi_3$ (Z-Winkel).
Also gilt: $\varphi_1 = \varphi_3$ und damit $[BQ] \parallel [PD]$.
Weil gleichzeitig $[PB] \parallel [QD]$ gilt, sind die beiden gegenüberliegenden Seiten jeweils parallel: Das Viereck $PBQD$ muss ein Parallelogramm sein.
 - Das Parallelogramm $PBQD$ besitzt die Symmetrieachse PQ . Jedes Parallelogramm mit einer Symmetrieachse ist eine Raute.
- (d) Es gilt: $\overline{PB} = \overline{PD} = (8 - x) \text{ cm}$.
PYTHAGORAS im Dreieck ABD : $(8 - x)^2 = 4^2 + x^2$.
 $\Leftrightarrow 64 - 16x + x^2 = x^2 + 16 \Leftrightarrow x = 3$.

15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

- (e) **1. Möglichkeit:** Berechne die Fläche des Teildreiecks PQD .

$$A_{\Delta QPD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DQ} \cdot h$$

Weil jede Raute ein gleichseitiges Viereck ist, gilt $\overline{DQ} = 8\text{ cm} - 3\text{ cm} = 5\text{ cm}$.

Also: $A_{\Delta QPD} = \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4\right) \text{ cm}^2 = 10 \text{ cm}^2$. Die Raute $PBQD$ ist doppelt so groß wie dieses Teildreieck: $A_{PBQD} = 20 \text{ cm}^2$.

2. Möglichkeit: Schneide vom Rechteck $ABCD$ die beiden kongruenten Dreiecke APD und BCQ ab:

$$A_{PBQD} = (8 \cdot 4) \text{ cm}^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \right) \text{ cm}^2 = 20 \text{ cm}^2$$

- (f) Es gilt: $\overline{FQ} = \overline{DQ} - \overline{DF} = 5 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$.

PYTHAGORAS im Dreieck PQF : $\overline{PQ}^2 = (4^2 + 2^2) \text{ cm}^2$

$$\Rightarrow \overline{PQ} = \sqrt{20} \text{ cm}.$$

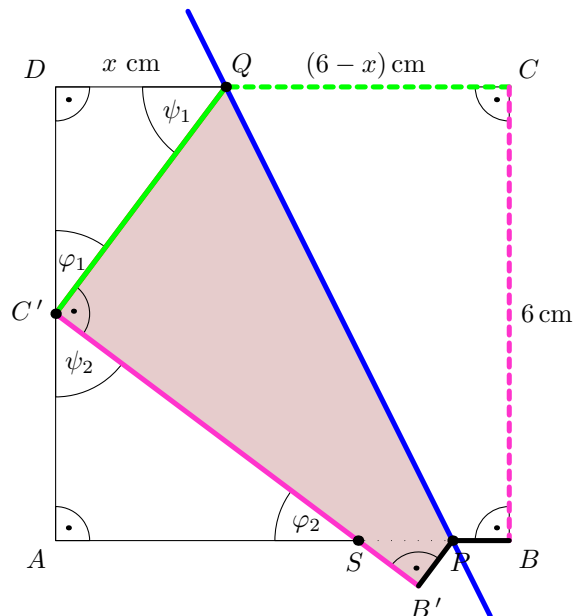
PYTHAGORAS im Dreieck ABD : $\overline{BD}^2 = (8^2 + 4^2) \text{ cm}^2$

$$\Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{80} \text{ cm}.$$

$$\Rightarrow A_{PBQD} = \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{80} \right) \text{ cm}^2 = 20 \text{ cm}^2.$$

19. (a) Klar.

- (b)



- (c) Die Faltachse PQ ist gleichzeitig die Spiegelachse. Jede Achsenspiegelung ist längen- und winkeltreu. Es gilt also $\overline{CQ} = \overline{QC'} = (6 - x) \text{ cm}$.

15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

PYTHAGORAS im Dreieck $C'QD$: $\overline{C'Q}^2 = \overline{C'D}^2 + \overline{DQ}^2$:

$$(6-x)^2 = x^2 + 3^2 \Leftrightarrow 36 - 12x + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow x = 2,25$$

(d) $\overline{DQ} : \overline{DC'} = 2,25 : 3 = 0,75 = \frac{3}{4} = 3 : 4$.

(e) Im Dreieck $C'QD$ gilt: $\varphi_1 + \psi_1 = 90^\circ$ (*).

Am Scheitel C' gilt: $\varphi_1 + 90^\circ + \psi_2 = 180^\circ \Rightarrow \varphi_1 + \psi_2 = 90^\circ$.

Mit (*) folgt $\psi_2 = \psi_1$. Somit stimmen die beiden rechtwinkligen Dreiecke $C'QD$ und ASC' in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck müssen die beiden Dreiecke auch im Maß des dritten Innenwinkels übereinstimmen: $\varphi_1 = \varphi_2$. Also gilt: $\Delta C'QD \sim \Delta ASC'$.

Im Dreieck $SB'P$ gilt: $\sphericalangle B'SP = \varphi_2$ (Scheitelwinkel) $= \varphi_1$. Die beiden Dreiecke ASC' und $SB'P$ sind rechtwinklig. Also sind sie zueinander ähnlich. Also sind alle drei Dreiecke zueinander ähnlich.

(f) In der Lösung (d) wurde gezeigt, dass $\overline{DQ} : \overline{DC'} = 3 : 4$ gilt.

Wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $C'QD$ und ASC' muss ebenso $\overline{AC'} : \overline{AS} = 3 : 4$ gelten.

Also: $\frac{3}{\overline{AS}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \overline{AS} = 4 \text{ cm}$.

(g) $A_{\Delta ASC'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AS} \cdot \overline{AC'} = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 3) \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$.

(h) PYTHAGORAS im Dreieck ASC' :

$$\overline{C'S}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{AC'}^2: \quad \overline{C'S}^2 = 3^2 \text{ cm}^2 + 4^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow \overline{C'S} = 5 \text{ cm}$$

(i) $\overline{SB'} = \overline{C'B'} - \overline{C'S}$

Wegen $\overline{C'B'} = \overline{CB} = 6 \text{ cm}$ folgt: $\overline{SB'} = 6 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 1 \text{ cm}$.

Wie vorher in (e) dargelegt, gilt $\Delta ASC' \sim \Delta SB'P$.

Weiter gilt: $\frac{\overline{SB'}}{\overline{AS}} = \frac{1}{4}$.

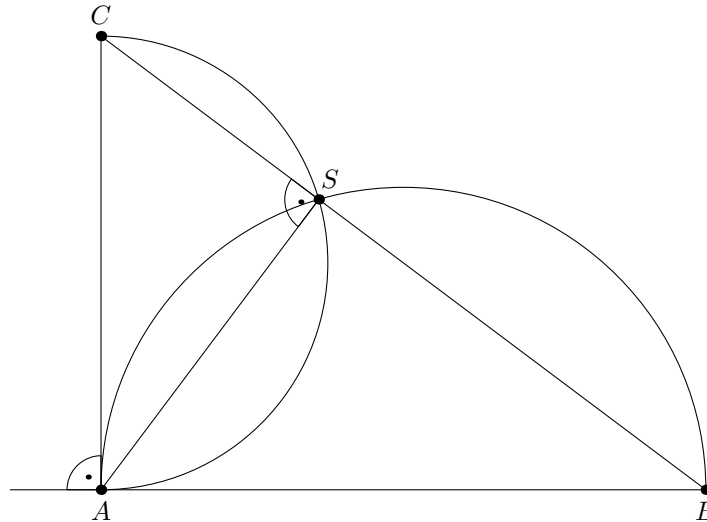
Der Streckungsfaktor k beträgt hier also $\frac{1}{4}$.

$$A_{\Delta SB'P} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot A_{\Delta ASC'} \Rightarrow A_{\Delta SB'P} = \frac{1}{16} \cdot 6 \text{ cm}^2 = 0,375 \text{ cm}^2$$

$$\frac{A_{\Delta SB'P}}{A_{ABCD}} = \frac{0,375 \text{ cm}^2}{36 \text{ cm}^2} \approx 0,0104 = 1,04\%.$$

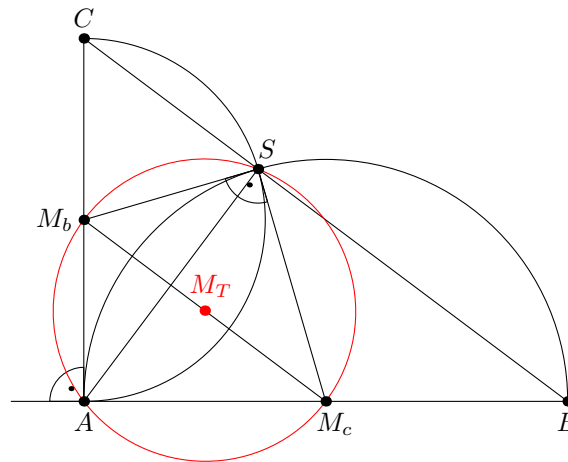
20. (a)

15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck



- (b)
- Der Punkt S liegt auf dem THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AC]$. Also gilt: $\sphericalangle CSA = 90^\circ$.
 - Der Punkt S liegt aber auch auf dem THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$.
 $\Rightarrow \sphericalangle ASB = 90^\circ$.
 Also hat der Winkel CSB das Maß 180° . Daher liegt der Punkt S auf der Hypotenuse $[BC]$.

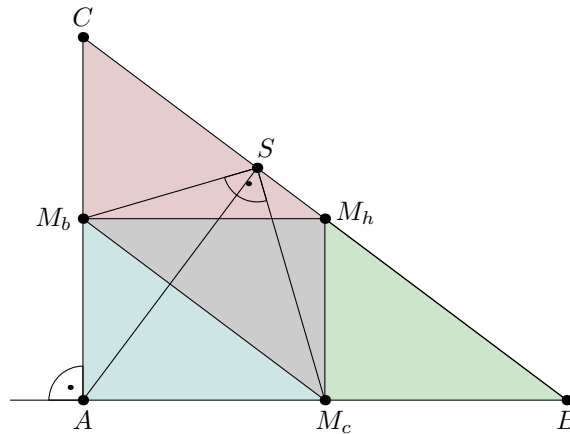
21. (a)



- (b)
- Es gilt: $\overline{M_bS} = \overline{M_bA} = \text{Radius des kleinen Halbkreises}$ und $\overline{M_cS} = \overline{M_cA} = \text{Radius des großen Halbkreises}$.
 Wenn in einem Viereck zwei Paare benachbarter Seiten jeweils gleich lang sind, dann ist dieses Viereck ein achsensymmetrischer Drachen.
 - Die beiden kongruenten rechtwinkligen Dreiecke AM_cM_b und M_bM_cS besitzen die gemeinsame Hypotenuse $[BC]$. Diese Hypotenuse muss daher der Durchmesser des THALES-Kreises sein, der auch durch die Punkte A und S verläuft. Damit ist dieser THALES-Kreis der Umkreis des Drachenvierecks AM_cSM_b . Sein Mittelpunkt M_T ist der Mittelpunkt der Diagonalen $[M_cM_b]$.

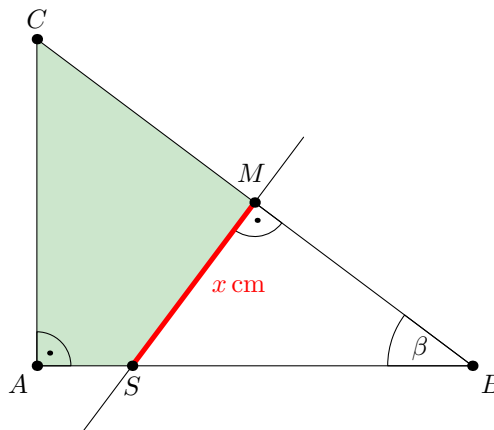
15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

(c) •



- Mit Hilfe der drei Mittelpunkte M_c , M_h und M_b der Seiten des Dreiecks ABC lässt sich dieses Dreieck in vier kongruente Teildreiecke zerlegen. Das halbe Drachenviereck AM_cM_b ist eines dieser Teildreiecke, die jeweils 25% der Fläche des Dreiecks ABC einnehmen. Also nimmt das Drachenviereck AM_cSM_b 50% der Fläche des Dreiecks ABC ein.

22. (a)



In beiden Dreiecken ABC und SBM kommt der Innenwinkel mit dem Maß β vor. Zudem sind beide Dreiecke rechtwinklig. Also müssen beide Dreiecke auch im Maß des dritten Innenwinkels übereinstimmen; also gilt $\triangle SBM \sim \triangle ABC$.

(b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen.

PYTHAGORAS im Dreieck ABC : $\overline{BC}^2 = 7,2^2 + 5,4^2 \Rightarrow \overline{BC} = 9 \text{ cm}$
 $\Rightarrow \overline{BM} = 4,5 \text{ cm}$.

Vierstreckensatz: $\frac{\overline{MS}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} : \frac{x}{4,5} = \frac{5,4}{7,2} \Leftrightarrow x = 3,375$.

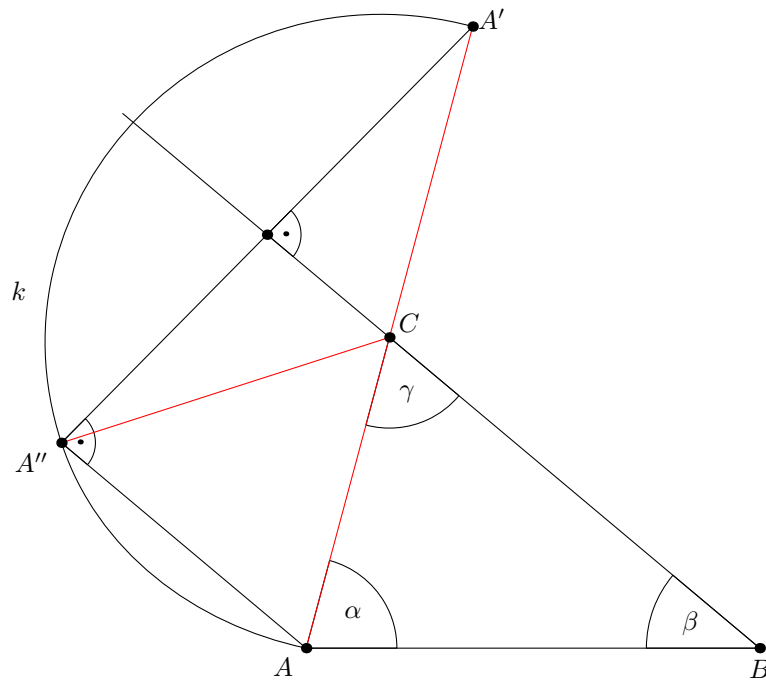
15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

- (c) Berechne den Ähnlichkeitsfaktor: Z.B. $k = \frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{4,5}{7,2} = 0,625$.

Dann gilt $\frac{A_{\Delta SBM}}{A_{\Delta ABC}} = k^2 = 0,625^2 = 0,390625$.

Das bedeutet: Das Dreieck SBM nimmt 39,0625% der Fläche des Dreiecks ABC ein. Dann nimmt das Viereck $ASMC$ $100\% - 39,0625\% = 60,9375\%$ der Fläche des Dreiecks ABC ein.

23. (a)



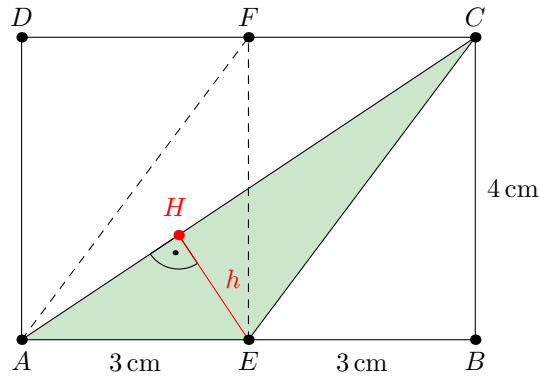
- Siehe Zeichnung.
- Siehe Zeichnung.

(b) Begründe:

- Jede Punktspiegelung ist längentreu. Also gilt: $\overline{CA} = \overline{CA'}$.
Jede Achsenspiegelung ist längentreu. Also gilt: $\overline{CA'} = \overline{CA''}$.
 $\Rightarrow \overline{CA} = \overline{CA''}$. Also ist das Dreieck ACA'' gleichschenkelig.
- Es gilt: $\overline{CA} = \overline{CA''} = \overline{CA'}$. Das bedeutet, dass die drei Punkte A , A' und A'' vom Punkt C gleich weit entfernt sind. Folglich müssen die Punkte A , A' und A'' auf einer Kreislinie k mit dem Mittelpunkt C liegen. Diese Kreislinie ist nun der THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AA']$. Also ist das Dreieck $AA''A'$ wegen $A'' \in k$ rechtwinklig.

24. (a)

15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck



(b) **1. Möglichkeit:**

Die Dreiecke AEC und AEF haben die gleiche Grundlinie $[AE]$ und gleichlange Höhen $[BC]$ bzw. $[EF]$. Also besitzen sie den gleichen Flächeninhalt.

Das Dreieck AEF nimmt ein Viertel der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ein, also trifft dies auch für das Dreieck AEC zu.

2. Möglichkeit:

$$A_{AEC} = A_{ABCD} - A_{EBC} - A_{ACD}.$$

$$A_{\Delta EBC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2 \text{ und } A_{\Delta ACD} = 6 \cdot 4 \text{ cm}^2 : 2 = 12 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_{AEC} = 24 \text{ cm}^2 - 6 \text{ cm}^2 - 12 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2.$$

Das ist aber ein Viertel der Fläche des Rechtecks $ABCD$.

- (c) Der Abstand eines Punktes zu einer Strecke (oder Geraden) ist immer die kürzeste Entfernung dieses Punktes zur Strecke. Sie wird durch das **Lot** vom Punkt E auf die Strecke $[AC]$ dargestellt.

Wir wissen schon, dass $A_{\Delta AEC} = 6 \text{ cm}^2$ gilt.

Der gesuchte Abstand h ist die Höhe im Dreieck AEC mit der Grundlinie $[AC]$:

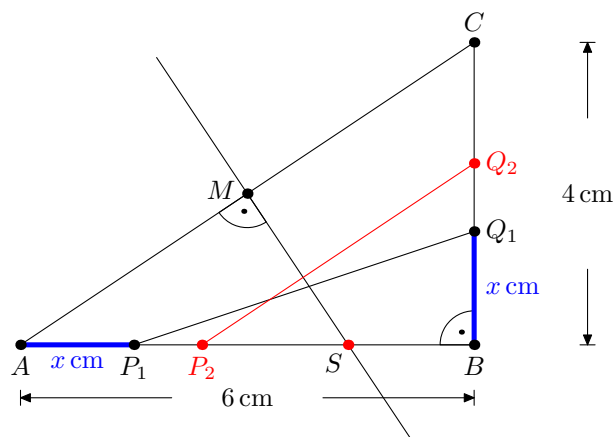
$$A_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h.$$

$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 4^2} \text{ cm} = \sqrt{52} \text{ cm}.$$

$$6 \text{ cm}^2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{52} \text{ cm} \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{12 \text{ cm}^2}{\sqrt{52} \text{ cm}} \approx 1,66 \text{ cm}.$$

25. (a)

15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck



- (b) Siehe Zeichnung.
- (c) Auf der Kathete $[BC]$ kann x nicht länger als 4 cm. werden. Für $x = 0$ und $x = 4$ gibt es kein Viereck. Also: $x \in]0; 4[_{\mathbb{R}}$.
- (d)
 - Ein Viereck, darf sich dann Trapez nennen, wenn es zwei parallele Seiten besitzt. In der Zeichnung ist das Trapez AP_2Q_2C vorhanden. Du siehst, dass die Dreiecke P_2BQ_2 und ABC dann zueinander ähnlich sind. Wende den Vierstreckensatz an, wobei die Variable x mit eingebunden sein muss:

$$\frac{6-x}{x} = \frac{6}{4} \Leftrightarrow 24 - 4x = 6x \Leftrightarrow 24 = 10x \Leftrightarrow x = 2,4.$$

- Siehe Zeichnung.
- $A_{\Delta P_2 B Q_2} = 0,5 \cdot 3,6 \cdot 2,4 \text{ cm}^2 = 4,32 \text{ cm}^2$.
 $A_{\Delta ABC} = 0,5 \cdot 6 \cdot 4 \text{ cm}^2 = 12 \text{ cm}^2$.
 $A_{AP_2 Q_2 C} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta P_2 B Q_2} = 12 \text{ cm}^2 - 4,32 \text{ cm}^2 = 7,68 \text{ cm}^2$.
- $\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 4^2} \text{ cm} = \sqrt{52} \text{ cm} (\approx 7,21 \text{ cm})$.
 $\overline{P_2 Q_2} = \sqrt{3,6^2 + 2,4^2} = \sqrt{18,72} \text{ cm} (\approx 4,33 \text{ cm})$.

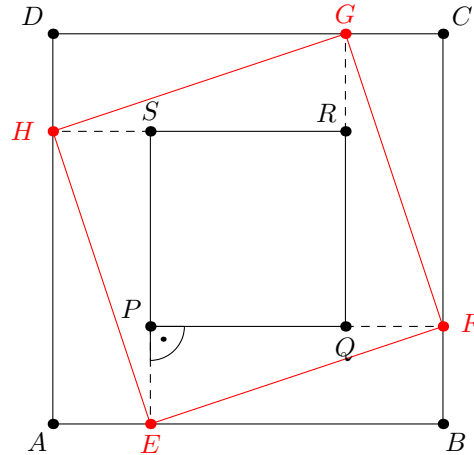
$$A_{AP_2Q_2C} = \frac{\sqrt{52} \text{ cm} + \sqrt{18,72}}{2} \cdot h = 7,68 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad h \approx 1,33 \text{ cm}.$$

- (e) $A(x) = A_{AP_n Q_n C} = 0.5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} - 0.5 \cdot \overline{P_n B} \cdot \overline{BQ_n}$
 $A(x) = 12 \text{ cm}^2 - 0.5 \cdot (6 - x) \cdot x \text{ cm}^2 = (12 - 3x + 0,5x^2) \text{ cm}^2$.
 Also gilt: $A(x) = (0,5x^2 - 3x + 12) \text{ cm}^2$.
- (f) $A(x) = (0,5x^2 - 3x + 12) \text{ cm}^2 = 0.5 \cdot (x^2 - 6x + 3^2 - 9 + 24) \text{ cm}^2$
 $= 0.5 \cdot [(x - 3)^2 + 15] \text{ cm}^2 = [-0.5 \cdot (x - 3)^2 + 7,5] \text{ cm}^2$.
 $x = 3$ liefert $A_{\min} = 7,5 \text{ cm}^2$.
- (g) Die Symmetrieachse müsste entweder durch zwei Eckpunkte des fraglichen Vierecks oder durch zwei seiner Seitennmittelpunkte verlaufen. Der Verlauf durch zwei Eckpunkte ist offensichtlich ausgeschlossen.
 Im anderen Fall müsste die Symmetrieachse die gemeinsame Mittelsenkrechte zweier Vierecksseiten sein. Diese Vierecksseiten müssten dann aber zueinander parallel sein.

15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

Also wäre das gesuchte achsensymmetrische Viereck ein gleichschenkliges Trapez.
Da es aber nur ein Trapez, nämlich AP_2Q_2C , gibt und $\overline{AP_2} = 2,4 \text{ cm} \neq \overline{CQ_2} = 1,6 \text{ cm}$ gilt, gibt es unter allen Vierecken AP_nQ_nC kein achsensymmetrisches.

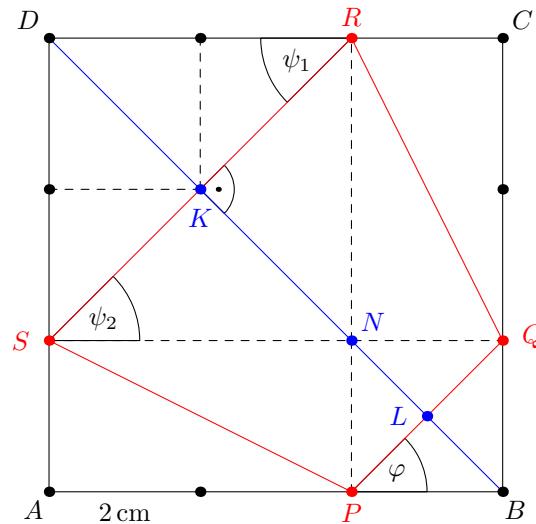
26.



- Es gilt: $\overline{AB} = 81,6 \text{ cm} : 4 = 20,4 \text{ cm}$ und $\overline{PQ} = 34 \text{ cm} : 4 = 8,5 \text{ cm}$.
Dann folgt: $\overline{QF} = \overline{PE} = (20,4 \text{ cm} - 8,5 \text{ cm}) : 2 = 5,95 \text{ cm}$.
Weiter folgt: $\overline{PF} = 8,5 \text{ cm} + 5,95 \text{ cm} = 14,45 \text{ cm}$.
 $\triangle EFP$: $\overline{EF}^2 = A_{EFGH} = \overline{PF}^2 + \overline{PE}^2 = (14,45 \text{ cm})^2 + (5,95 \text{ cm})^2$
 $\Rightarrow A_{EFGH} = 244,205 \text{ cm}^2$.
- **1. Möglichkeit:** $A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{\triangle EBF}$
 $A_{EFGH} = (20,4 \text{ cm})^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45 \text{ cm} \cdot 5,95 \text{ cm} = 244,205 \text{ cm}^2$.
- **2. Möglichkeit:** $A_{EFGH} = A_{PQRS} + 4 \cdot A_{\triangle EFP}$
 $A_{EFGH} = (8,5 \text{ cm})^2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45 \text{ cm} \cdot 5,95 \text{ cm} = 244,205 \text{ cm}^2$.
Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke.

27. (a)

15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck



- (b) Das Dreieck SRD ist gleichschenkelig-rechtwinklig. $\Rightarrow \psi_1 = 45^\circ$.
 Dann gilt auch $\psi_2 = 45^\circ$ (Z-Winkel).
 Das Dreieck PBQ ist gleichschenkelig-rechtwinklig. $\Rightarrow \varphi = 45^\circ$.
 Also folgt: $[PQ] \parallel [SR]$.
 Das Viereck $PQRS$ ist ein (achsensymmetrisches) Trapez..

(c) •

Für die Trapezfläche A gilt: $A_{PQRS} = \frac{\overline{SR} + \overline{PQ}}{2} \cdot \overline{KL}$.

Die Strecke $[SR]$ ist die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 4 cm.

Also folgt: $\overline{SR} = 4\sqrt{2}$ cm.

$[DK]$, $[NB]$ und $[PQ]$ sind jeweils Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge 2 cm.

Also folgt: $\overline{DK} = \overline{NB} = \overline{PQ} = 2\sqrt{2}$ cm und $\overline{LB} = \sqrt{2}$ cm.

Im Quadrat $ABCD$ gilt: $\overline{DB} = 6\sqrt{2}$ cm.

Damit gilt: $\overline{KL} = 6\sqrt{2}$ cm $- 2\sqrt{2}$ cm $- \sqrt{2}$ cm $= 3\sqrt{2}$ cm.

Und damit gilt: $A_{PQRS} = \frac{4\sqrt{2}$ cm $+ 2\sqrt{2}$ cm}{2} $\cdot 3\sqrt{2}$ cm $= 18$ cm².

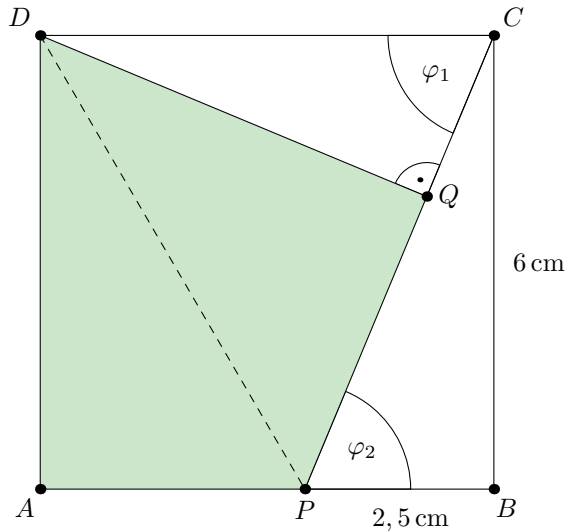
- Das Trapez $PQRS$ ist von vier rechtwinkligen Dreiecken eingeschlossen. Zwei von ihnen sind kongruent.

$$A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta APS} - A_{\Delta SRD} - A_{\Delta PBQ}.$$

$$A_{PQRS} = 36 \text{ cm}^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \text{ cm}^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \text{ cm}^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \text{ cm}^2 = 18 \text{ cm}^2.$$

28. (a)

15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck



- (b) Die Kathete $\overline{AD}$ im rechtwinkligen Dreieck APD besitzt die Länge a . Die Hypotenuse $\overline{DC}$ im rechtwinkligen Dreieck DQC hat ebenfalls die Länge a . Weil aber in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite darstellt, gilt: $\overline{DQ} < a = \overline{AD}$. Somit kann die Diagonale $\overline{DP}$ im Viereck $APQD$ nicht Symmetrieachse dieses Vierecks sein.
- (c) In den beiden rechtwinkligen Dreiecken DQC und PBC gilt: $\varphi_1 = \varphi_2$ (Z-Winkel). Damit stimmen die beiden Dreiecke paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck stimmen diese beiden Dreiecke in allen drei Innenwinkelmaßen überein. Also gilt: $\triangle PBC \sim \triangle DQC$.
- (d) Strategie: $A_{APQD} = A_{ABCD} - (A_{\triangle PBC} + A_{\triangle DQC})$.

$$A_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 6 \text{ cm}^2 = 7,5 \text{ cm}^2.$$

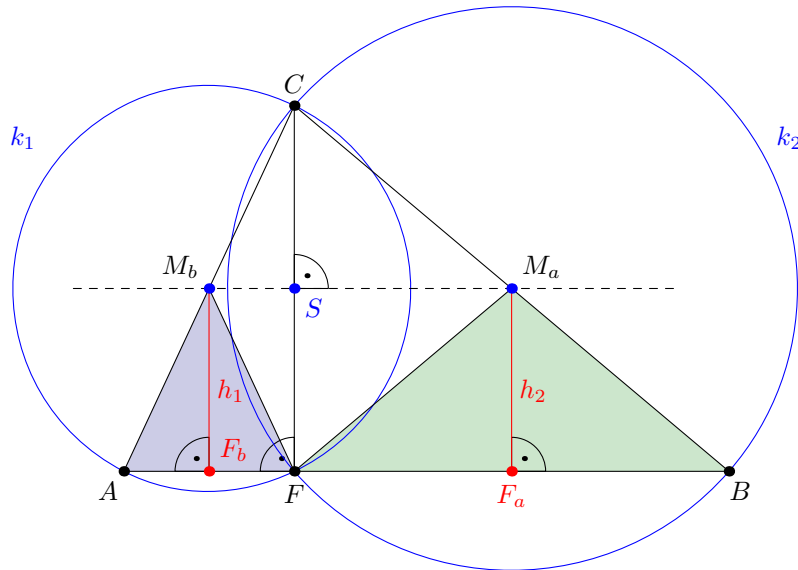
Wegen (c) folgt: $A_{\triangle DQC} = k^2 \cdot A_{\triangle PBC}$ mit dem Streckungsfaktor k .

$$\text{Mit } k = \frac{\overline{DC}}{\overline{PC}} \text{ folgt: } k = \frac{6 \text{ cm}}{\sqrt{2,5^2 + 6^2} \text{ cm}} = \frac{12}{13}.$$

$$\Rightarrow A_{\triangle DQC} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot 7,5 \text{ cm}^2 = \frac{144}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2.$$

$$\begin{aligned} A_{APQD} &= 36 \text{ cm}^2 - \left(7,5 \text{ cm}^2 + \frac{144}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2\right) \\ &= 36 \text{ cm}^2 - \frac{313}{169} \cdot 7,5 \text{ cm}^2 \\ \frac{A_{APQD}}{A_{ABCD}} &= \frac{6084 - 2374,5}{169 \cdot 36} = \frac{3707,5}{6084} \approx 0,6094 = 60,94\%. \end{aligned}$$

29. (a)



(b) **1. Möglichkeit:**

Im Kreis k_1 gilt: $\overline{M_bA} = \overline{M_bF} = \overline{M_bC}$.

Im Kreis k_2 gilt: $\overline{M_aB} = \overline{M_aF} = \overline{M_aC}$.

Also sind im Viereck FM_aCM_b zweimal zwei benachbarte Seiten gleich lang. Also handelt es sich um ein achsensymmetrisches Drachenviereck.

2. Möglichkeit:

In jedem rechtwinkligen Dreieck fällt dessen Umkreismittelpunkt mit dem Hypotenusenmittelpunkt zusammen. Also sind die Kreismittelpunkte M_a und M_b gleichzeitig die Mittelpunkte der Seiten $a = [BC]$ bzw. $b = [AC]$.

Die Dreiecke FBC und F_aBM_a sind zueinander ähnlich.

Wegen $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM_a}$ folgt dann $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{F_aM_a} = 2 \cdot \overline{F_bM_b}$.

Also gilt: $h_1 = h_2 = \overline{SF} = \overline{FC}$. Daher liegt die Gerade M_aM_b zur Grundlinie $[AB]$ des Dreiecks ABC parallel. Diese Parallele steht damit auf der Diagonalen des Vierecks FM_aCM_b senkrecht. Gleichzeitig halbiert der Punkt S die Höhe $[CF]$ des Dreiecks ABC . Also ist das Viereck FM_aCM_b ein achsensymmetrischer Drach.

(c) Die in der 2. Möglichkeit verwendete Argumentation ergibt nun Folgendes:

- Die vier Dreiecke F_aBM_a , FF_aM_a , FM_aS und SM_aC sind kongruent. Das Dreieck FBM_a besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.

Also ist das Dreieck FBM_a halb so groß wie das Teildreieck FBC .

- Die vier Dreiecke AF_bM_b , F_bFM_b , FSM_b und M_bSC sind kongruent. Das Dreieck AFM_b besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.

Also ist das Dreieck AFM_b halb so groß wie das Teildreieck AFC .

Also sind die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a zusammen halb so groß wie das Dreieck ABC .

Oder:

Weil der Schnittpunkt S auf halber Höhe im Dreieck ABC liegt, gilt:

$$A_{\Delta M_bM_aC} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta ABC} \text{ (zentrische Streckung mit } k = \frac{1}{2} \text{)}.$$

Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drach mit der Diagonalen

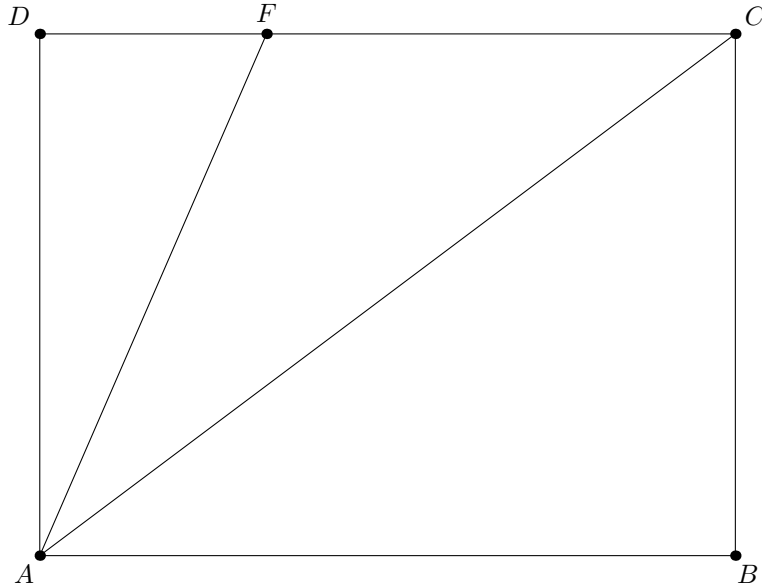
15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

$[M_a M_b]$ als Symmetrieachse.

$$\Rightarrow A_{FM_a CM_b} = 2 \cdot \frac{1}{4} A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta ABC}.$$

Dann muss der Rest, nämlich derjenige, der aus den beiden Dreiecken AFM_b und FBM_a besteht, ebenfalls die Hälfte des Dreiecks ABC einnehmen.

30. (a)



(b) Im Dreieck ACF gilt die Dreiecksungleichung: Zwei Seitenlängen müssen zusammen mehr ergeben als die Länge der dritten Dreiecksseite; d.h. hier gilt: $\overline{AF} + \overline{FC} > \overline{AC}$.

(c) $\overline{DF} = 32 \text{ m}$.

Im Dreieck AFD gilt: $\overline{AF} = \sqrt{32^2 + 69^2} \text{ m} = \sqrt{5785} \text{ m}$.

Im Dreieck ABC gilt: $\overline{AC} = \sqrt{92^2 + 69^2} \text{ m} = 115 \text{ m}$.

Wegunterschied: $\sqrt{5785} \text{ m} - 115 \text{ m} \approx 21 \text{ m}$.

16. Raumgeometrie

1. (a) $A = 12,73 \text{ cm}^2$
(b) - -