SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Jahrgangsstufe 9 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

Teil I.
Wahlpflichtfächergruppe I

1. Lineare Gleichungssysteme

1. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{lll} & 2(x-7) & = & y-25 \\ \wedge & 3y-2(x-7) & = & 35 \end{array} \right.$$

   (a) Berechne die Lösungsmenge mit einem selbst gewählten Verfahren.

   (b) Begründe, weshalb du gerade dieses und kein anderes Verfahren gewählt hast.

2. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{llll} & 3y+ax & = & 5a+3 \\ \wedge & 2x-y & = & 3-a \end{array} \right.$$

   (a) Berechne die Lösungsmenge in Abhängigkeit von a. Vereinfache dein Ergebnis so weit wie möglich.

   (b) Wenn du richtig gerechnet hast, dann stellt $a = -6$ einen Sonderfall dar. Begründe dies und berechne die Lösungsmenge für diese Belegung von a.

3. Löse das Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren auf zwei verschiedene Arten:

$$\left| \begin{array}{llll} & 3,5x-4y & = & -22 \\ \wedge & 2x+3y & = & -2 \end{array} \right.$$

4. Löse das Gleichungssystem mit dem Determinantenverfahren:

$$\left| \begin{array}{llll} & 1,2x+0,4y-7 & = & 0 \\ \wedge & 6,4x-1,6y & = & 28 \end{array} \right.$$

5. Gegeben sind die beiden Geraden
   $g: y = -0,25x + 3$ und
   $h: y = x - 1,5$.

(a) Zeichne die beiden Geraden in ein Koordinatensystem.
Platzbedarf: $0 \leqq x \leqq 7$ und $-3 \leqq y \leqq 9$

(b) Berechne exakt die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Geraden.

(c) Zeichne eine Gerade g^* ein, die durch den Punkt $Q(2 \mid 6)$ verläuft und gib ihre Gleichung an.

(d) Begründe: Jede weitere Gerade, welche die Gerade h nicht schneidet, muss die Gerade g irgendwo schneiden.

6. Gegeben sind eine Gerade g durch die Punkte $P(3 \mid 2,5)$ und $Q(-4,5 \mid 0)$ und eine Gerade $h : y = -x - 0,5$.

   (a) Zeichne die beiden Geraden g und h in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-6 \leqq x \leqq 4$ und $-3 \leqq y \leqq 4$

   (b) Berechne die Gleichung der Geraden g.

   (c) Die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt S.
   Zeichne diesen Punkt ein, lies seine Koordinaten ab und weise rechnerisch nach, dass dieser Punkt tatsächlich auf den beiden Geraden g und h liegt.

   (d) Schreibe die Gleichung der Geraden h^* hin, welche die Gerade h nicht schneidet und die nicht durch den dritten Quadranten verläuft.

   (e) Begründe jemandem, der die Zeichnung nicht kennt, dass die Gerade h die Gerade g schneiden muss.

7. Gegeben sind die beiden Geraden $g_1 : y = -0,25x + 3$ und $g_2 : y = x - 1,5$. Eine weitere Gerade g_3 verläuft durch die Punkte $P(2 \mid 4)$ und $Q(0 \mid -4,5)$.

   (a) Zeichne die drei Geraden in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-7 \leqq x \leqq 7$ und $-6 \leqq y \leqq 7$

   (b) Berechne die Gleichung der Geraden g_3.

   (c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g_1 mit der Geraden g_2 .

   (d) Durch den Punkt $A(-300 \mid 200)$ verläuft die Gerade g_4, die zur Geraden g_2 parallel ist.
   Berechne die Gleichung dieser Geraden g_4.

   (e) Die Gerade g_1 schneidet die y-Achse im Punkt R. Die Gerade g_2 schneidet die y-Achse im Punkt Q.
   Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks QRS möglichst genau.

8. Addierst du zu einer ganzen Zahl das Doppelte einer zweiten Zahl, so erhälst du 142. Als Ergebnis erhälst du aber 5, wenn du das 5-fache der ersten Zahl von der zweiten Zahl subtrahierst.
   Wie heißen die beiden Zahlen?

9. Klaus verkauft auf dem Flohmarkt seine alten Comic-Hefte für 0,50 € pro Stück.
   (a) Stelle den Zusammenhang zwischen der Anzahl der verkauften Hefte x und den Einnahmen y graphisch dar.
   (b) Als Standgebühr muss Klaus 2,50 € bezahlen. Zeichne dazu den entsprechenden Graphen in dasselbe Koordinatensystem ein.

10. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcrl} & x+y & = & 1 & (1) \\ \wedge & x+y & = & -37 & (2) \\ \hline \end{array}$$

    Begründe auf verschiedene Weise: Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems ist leer.

11.

$$\begin{array}{rrcrcrl} & 3x & - & 7y & = & -27 & (1) \\ \wedge & -5x & + & 9y & = & 37 & (2) \\ \hline \end{array}$$

    Else und Erwin sollen das obige Gleichungssystem lösen. Erwin entscheidet: „Wir nehmen das Gleichsetzungsverfahren.“ Else widerspricht: „Da müssten wir ja die beiden Gleichungen ..., und das wird schwierig, weil wir am Ende ...“
    (a) Was hat Else gemeint?
    (b) Löse das Gleichungssystem mit einem anderen Verfahren, das dir geeignet erscheint.

12. Gegeben sind die beiden Geraden g_1 und g_2 durch die Gleichungen
    $g_1 : y + 2x - 5 = 0$ und $g_2 : y = 1,5x + 2$.
    (a) Zeichne diese beiden Geraden in ein Koordinatensystem.
        Platzbedarf: $-2 \leqq x \leqq 5$ und $-1 \leqq y \leqq 6$
    (b) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Geraden. Runde das Ergebnis.
    (c) Gib die Gleichung einer Geraden h an, welche die Gerade g_2 nicht schneidet.

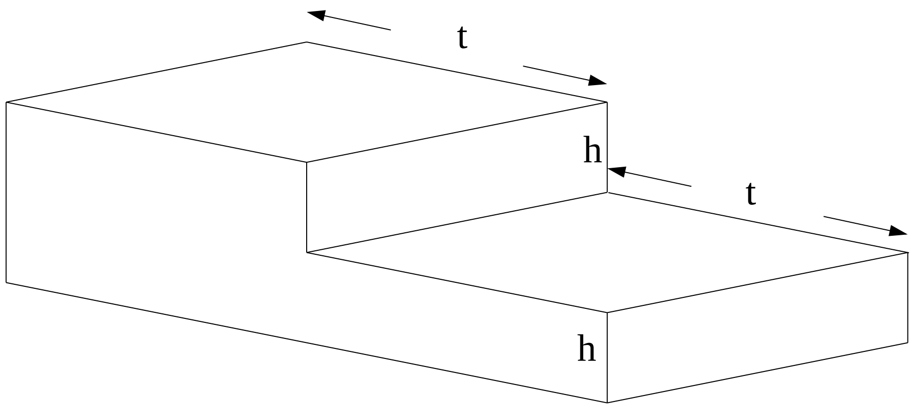
(d) Überprüfe, ob der Punkt $A(111222333999,4 \mid -999888777666555,1)$ auf der Geraden g_2 liegt.

13. In einer Zoohandlung wurden zehn Mäuse zu je 2,50 €, Goldhamster zu je 4,00 € und Zwergkaninchen zu je 8 € verkauft (siehe Tabelle).

Tierart	Mäuse	Goldhamster	Zwergkaninchen
Preis pro Stück in €	$2,50$	$4,00$	8,00
Anzahl	10		

Insgesamt wurden 23 Tiere verkauft. Die Einnahmen betrugen 97 €. Berechne, wie viele Goldhamster und Zwergkaninchen verkauft wurden.

14.



„Die magische Zahl für Treppen lautet 63 Zenimeter. So viel beträgt das Schrittmaß, das für eine gute Begehbarkeit steht. ... Das Schrittmaß errechnet sich nach folgender Formel: Zweimal die Stufenhöhe h plus einmal die Stufentiefe t gleich 63 Zentimeter.“
Quelle: Nordbayerischer Kurier vom 12. Sept 2010, S. 22

(a) Stelle eine Formelgleichung auf, die das Schrittmaß von 63 cm im Zusammenhang mit der Stufenhöhe h und der Stufentiefe t beschreibt.

(b) Herr Feust will nach dieser Formelgleichung eine Steintreppe vom Haus zum Garten anlegen. Er meint: „Je niedriger die Stufenhöhe wird, desto länger fällt nach dieser Formelgleichung die Stufentiefe aus.“
Bestätige diesen Sachverhalt mit einem Zahlenbeispiel.

(c) Im Haus der Familie Feust wohnen auch die schon etwas gebrechlichen Eltern von Frau Feust. Daher wird festgelegt, dass die Stufenhöhe 16 cm nicht überschreiten darf. Berechne das zugehörige Mindestmaß der Stufentiefe.

(d) Während der Arbeiten schaut Nachbar Tufes, der alles besser weiß, interessiert zu: „Ich hätte einfach Stufentiefe = Stufenhöhe gewählt.“ Was meinst du dazu? Begründe deine Antwort.

(e) Wie lang wird die gesamte Treppe, wenn sie bei einer Stufenhöhe von 15 cm vom Haus bis in den Garten eine Höhendifferenz von 1,20 m überwindet?

15. In einem Lehrbuch steht zum Thema „Gleichungssysteme“ eine Aufgabe mit der Musterlösung:
„Es sind a und b natürliche Zahlen. Berechne a und b so, dass $a^2 - b^2 = 15$ gilt.“

Musterlösung

$$a^2 - b^2 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)(a+b) = 15\,.$$

Wegen $\mathbb{T}_{15} = \{1;\ 3;\ 5;\ 15\}$ und $a + b > a - b$ folgt

entweder:

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a & + & b & = & 15 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 1 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 16 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 8 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 7$
Probe: $8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$, stimmt.

oder:

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a & + & b & = & 5 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 3 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 8 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 4 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 1$
Probe: $4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$, stimmt.

$$\Rightarrow \quad L = \{(4 \mid 1);\ (8 \mid 7)\}$$

(a) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 77$ und mache die Probe..

(b) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 83$ und mache die Probe..

(c) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 38$ und mache die Probe..

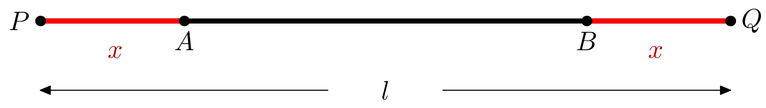
(d) Edwin behauptet: „Wenn der Wert der Differenz aus den Quadraten von a und b gerade ist, dann ist die Lösungsmeng leer.“
Begründe, dass Edwin nicht Recht hat.

2. Reelle Zahlen

1. Vereinfache jeweils den Term so weit wie möglich ohne mit dem Taschenrechner zu runden. Es muss ein logischer Rechenweg zum Ergebnis führen.

   (a) $\sqrt{\left(\sqrt{1000}+\sqrt{999}\right)\cdot\left(\sqrt{1000}-\sqrt{999}\right)}$

   (b) $\left(\sqrt{3}^{\,2}-3\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^{3876}$

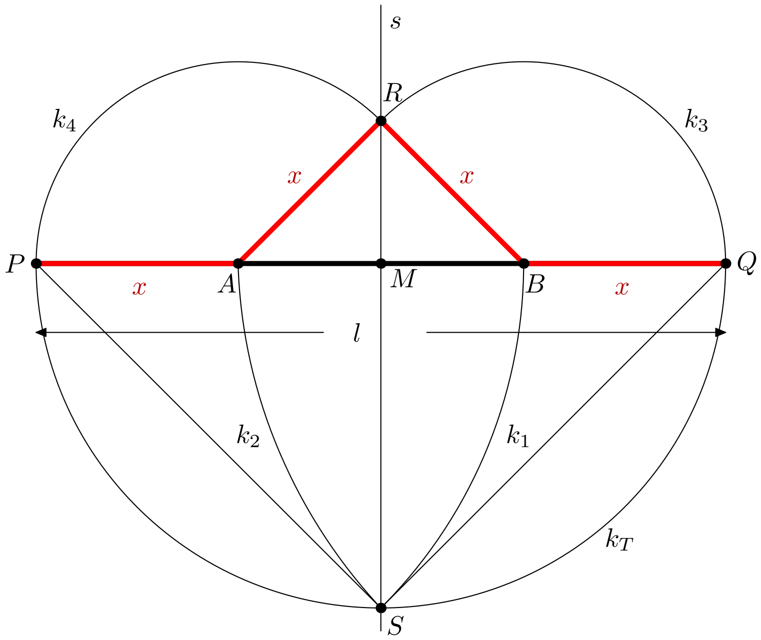
2. 

   Ein Metallstab mit der Länge l soll an den Punkten A und B so abgeknickt werden, dass ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck entsteht. Die Stabenden P und Q sollen sich dabei berühren.

   (a) Zeige: Dann muss gelten: $x = \dfrac{l}{2+\sqrt{2}}$

   (b) • Begründe: $\dfrac{l}{2+\sqrt{2}} = l - \dfrac{l}{2}\sqrt{2}$

   • Eine Möglichkeit, die Länge $x = l - \frac{l}{2}\sqrt{2}$ aus der vorgegebenen Stablänge l und damit die Knickpunkte A und B zu konstruieren, ist zusammen mit dem sich ergebenden gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABR unten dargestellt:



Begründe, dass in dieser Konstruktion $x = l - \frac{l}{2}\sqrt{2}$ gilt.

- Konstruiere die Knickpunkte A und B und das fertige Dreieck ABR für eine Stablänge von $2,40\,\text{m}$ im Maßstab 1:20. Beschreibe die Konstruktion.

3. Zeige ohne Verwendung des ETR:
   (a) $(3 + 1^{9876534212345}) \cdot (7\sqrt{2} - 3\sqrt{2})^2 = 128$
   (b) $\left(\frac{185}{37} - 0^{555666777888999}\right) : \left(\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} + 95\right) = \frac{1}{20}$
   (c) $\sqrt{9\frac{1}{4}} : \sqrt{4\frac{5}{8}} = \sqrt{2}$
   (d) $\left(\sqrt{12} + 13^{1000}\right) \cdot \left(\sqrt{1}^{777555333111} - \frac{1}{2} : \frac{3}{6}\right) \cdot \left(\frac{9888777666555}{9888777666554} + 14^{-87}\right) = 0$

4. Erwin und Claudia sollen den Term $\sqrt{9\frac{1}{4}}$ vereinfachen. Claudia meint: „Das haben wir gleich:

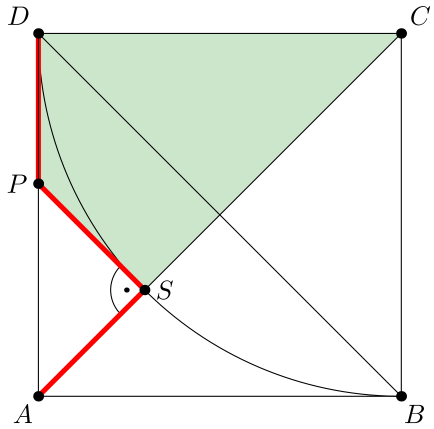
   $\sqrt{9} = 3$ und $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, also kommt $3,5$ heraus.“

   Erwin überprüft Claudias Ergebnis mit dem Taschenrechner: „Ich bekomme $3,041381265$ heraus“.
   Claudia überlegt: „Aber es kann ja nur ein Ergebnis richtig sein.“
   Wo liegt der Fehler? Begründe deine Antwort.

5. Karin hat im Taschenrechner $\sqrt{2}$ eingeben. Er zeigt $1,414213562$ an. Sie meint dazu: „Das muss ein gerundeter Wert sein.“ Begründe, dass sie Recht hat.

6. Begründe: $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right)^{444} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^{444} = 16^{\,111}$.

7.



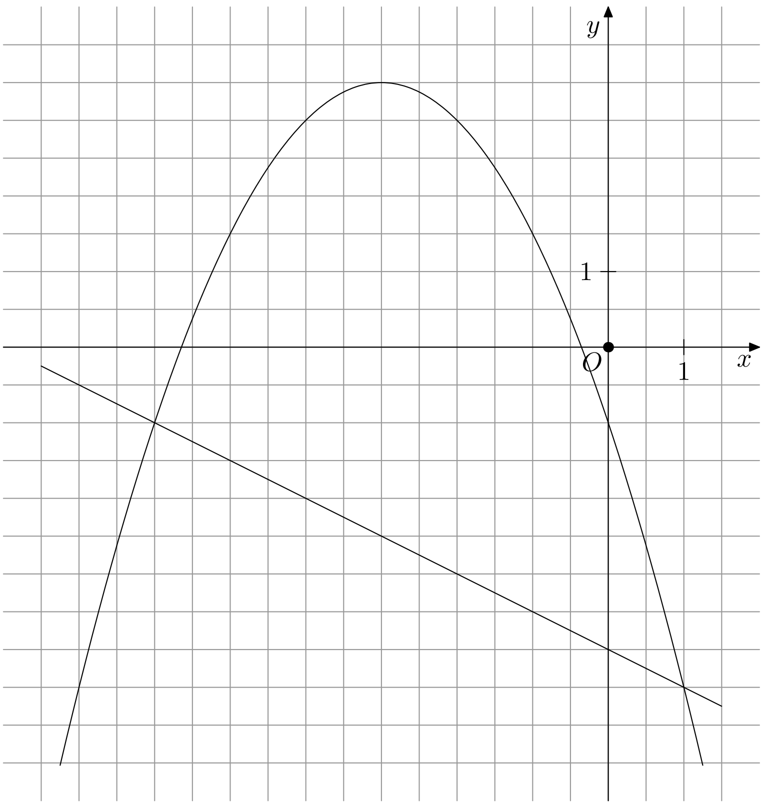
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt C .

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b)
- Begründe rechnerisch: Das Viereck $SCDP$ ist ein achsensymmetrischer Drachen.
- Besitzt dieses Drachenviereck einen Umkreis? Begründe deine Antwort.

3. Quadratische Funktionen

1. Gegeben sind die Parabel $p : y = -0,5x^2 - 3x - 1$ und die Gerade $g : y = -0,5x - 4$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
   Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:

   Auf der Parabel p wandern sowohl Punkte $A_n(x \mid -0,5x^2-3x-1)$ als auch Punkte C_n. Dabei ist der Abszissenwert der Punkte C_n stets um 3 größer als der Abszissenwert x der Punkte A_n.

   (a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der Parabel p mit der Geraden g.

   (b) Berechne die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit vom x-Wert der Punkte A_n.
   [Ergebnis: $C_n(x + 3 \mid -0,5x^2 - 6x - 14,5)$]

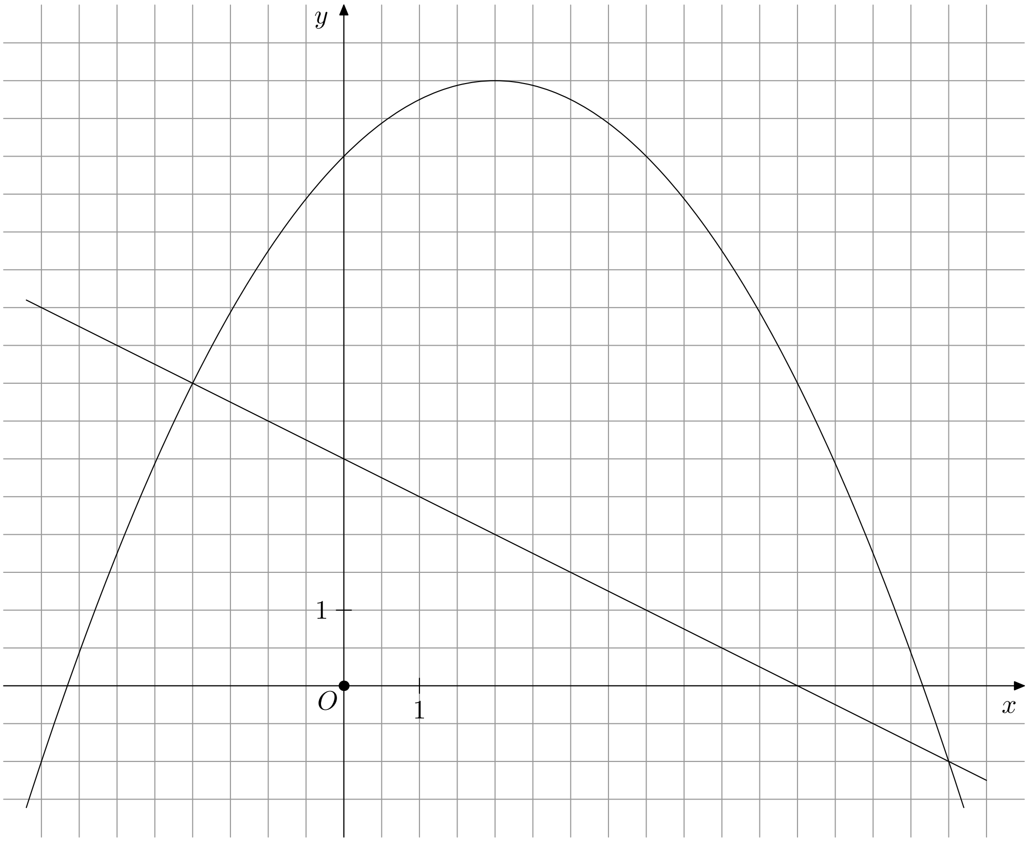
   (c) Zusammen mit dem Punkt $B(-4|-2)$ werden zwischen Gerade und Parabel Dreiecke A_nBC_n erzeugt.
   Zeichne für $A_1(-5|y_1)$ das Dreieck A_1BC_1 in obiges Koordinatensystem ein.

(d) Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke A_nBC_n in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A(x) = (0,75x^2 + 8,25x + 28,5)\,\mathrm{cm}^2$]

(e) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es eines, das einen minimalen Flächeninhalt aufweist. Berechne dieses Minimum und die zugehörige Belegung von x.

(f) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es das Dreieck A_3BC_3, so dass $\sphericalangle A_3BP = \sphericalangle BA_3C_3$ gilt. Berechne den zugehörigen Abszissenwert x.

2. Gegeben sind die Parabel p und die Gerade g durch die Gleichungen:
$p: y = -0,25x^2 + x + 7$ und $g: y = -0,5x + 3$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



(a) Ermittle die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der Parabel p mit der Geraden g. Der Punkt P soll dabei nicht im IV. Quadranten liegen.

(b) Die Punkte $A_n(x \mid -0,25x^2 + x + 7)$ auf der Parabel p und die Punkte B_n auf der Geraden g besitzen jeweils den gleichen Abszissenwert.
Die Punkte A_n und B_n sind Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken $A_nB_nC_n$ mit den Basen $[A_nB_n]$. Die Höhen auf diese Basen sind stets 4 cm lang. Die Punkte C_n sollen stets rechts von den Basen $[A_nB_n]$ liegen.
Zeichne für $x = -1$ das Dreieck $A_1B_1C_1$ ein.

(c) Zeichne für $C_2(7,5 \mid y_2)$ das Dreieck $A_2B_2C_2$ ein.
Berechne die Koordinaten des Punktes A_2.

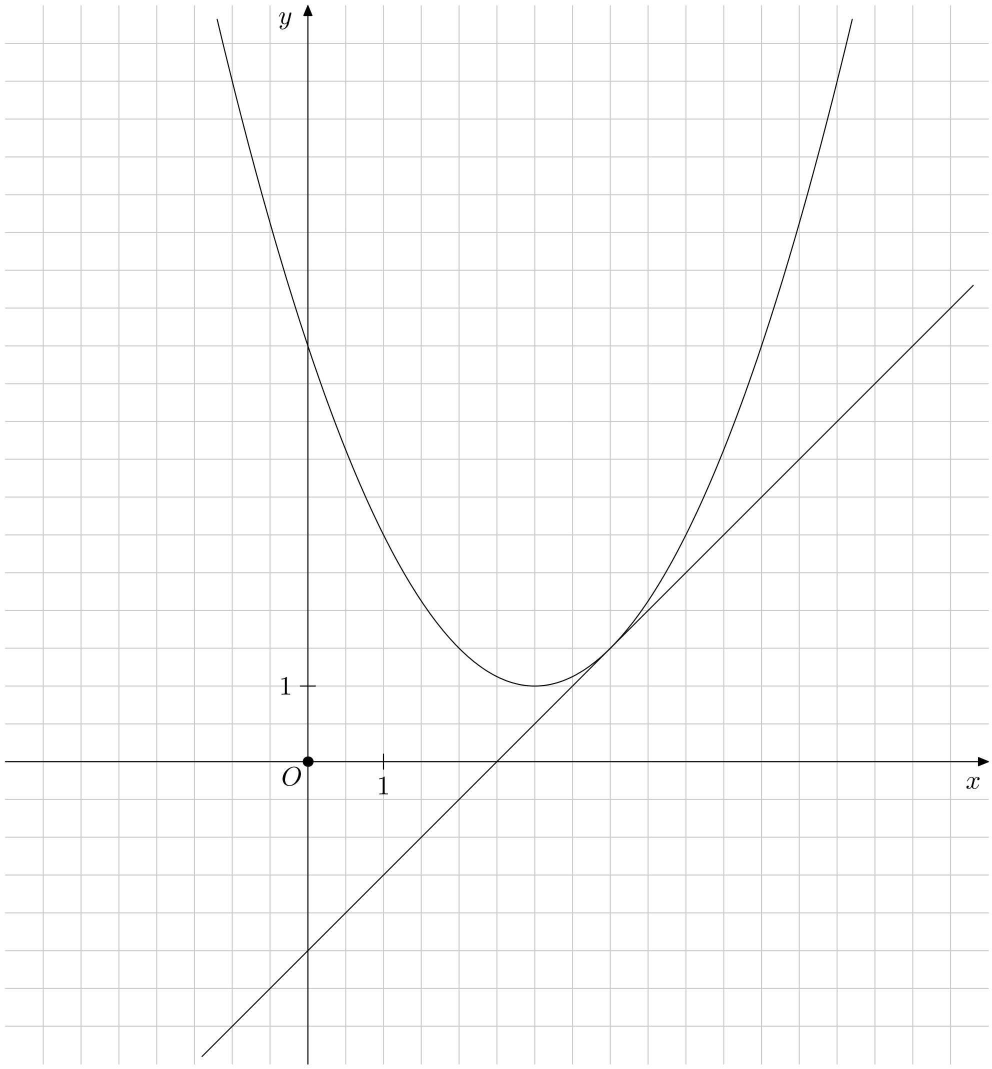
(d) Zeige durch Rechnung: Für den Flächeninhalt A dieser Dreiecke $A_nB_nC_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = (-0,5x^2 + 3x + 8)\,\text{cm}^2$$

(e) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es eines, das einen maximalen Flächeninhalt aufweist. Berechne dieses Maximum und die zugehörige Belegung von x.

(f) Gibt es unter allen Dreiecken A_nBC_n ein Dreeick $A_3B_3C_3$, dessen Eckpunkt C_3 auf der y-Achse liegt? Begründe deine Antwort.

3. Die Parabel p besitzt die Scheitelkoordinaten $S(3 \mid 1)$ und sie verläuft durch einen Punkt mit den Koordinaten $(5 \mid 3)$. Außerdem ist eine Gerade g durch die Gleichung $y = x - 2,5$ gegeben.
Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt.
Auf der Geraden g liegen Punkte $A_n(x \mid x-2,5)$ und auf der Parabel p liegen Punkte C_n, die jeweils denselben Abszissenwert wie die Punkte A_n besitzen.
Damit werden Rauten $A_nB_nC_nD_n$ erzeugt, deren Diagonalen $[B_nD_n]$ stets 4 cm lang sind.



(a) Zeige: Die Parabel p besitzt die Gleichung $y = 0,5x^2 - 3x + 5,5$.

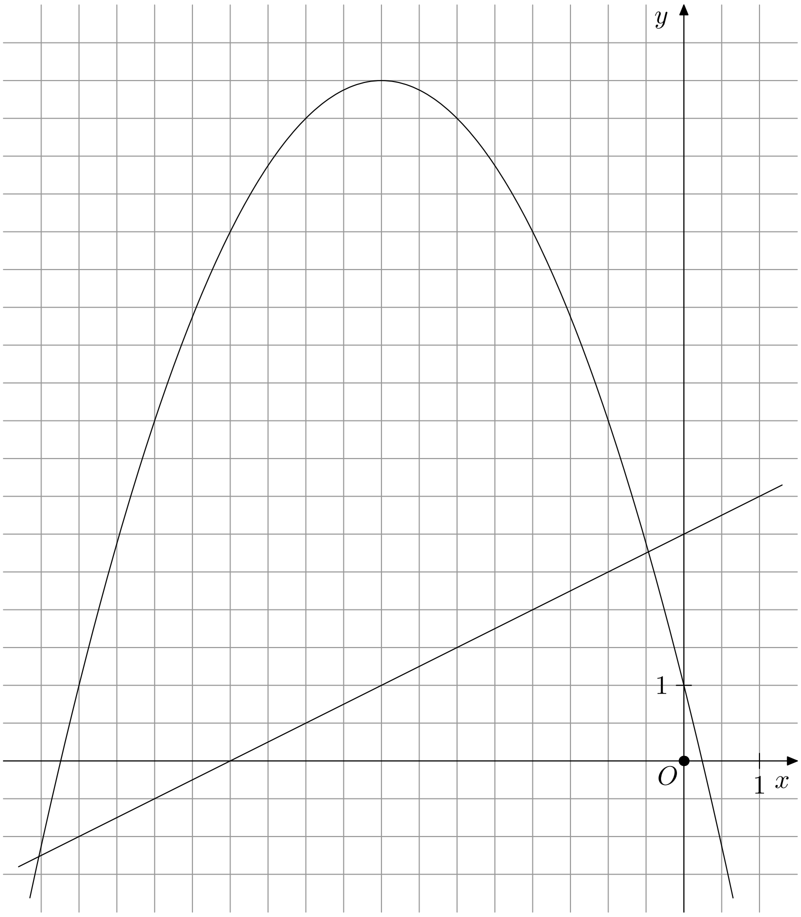
(b) Begründe rechnerisch: Die Gerade g ist eine Tangente an die Parabel p.

(c)
- Zeichne für $x = -1$ die Raute $A_1B_1C_1D_1$ ein.
- Zeichne für $D_2(4 \mid y_{D_2})$ die Raute $A_2B_2C_2D_2$ ein.

(d)
- Für die Diagonalenlängen $\overline{A_nC_n}$ gilt in Abhängigkeit von x:
  $\overline{A_nC_n}(x) = (0,5x^2 - 4x + 8)\,\text{cm}$.
  Ermittle damit alle Belegungen von x, für die es solche Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt.
- Für den Flächeninhalt A der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gilt in Abhängigkeit von x:
  $A(x) = (x^2 - 8x + 16)\,\text{cm}^2$.
  Bestätige damit das Ergebnis der vorherigen Aufgabe.
- Bestätige mit dem Ergebnis der Aufgabe (b) das Ergebnis der vorherigen Aufgabe.

(e) Unter allen Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt es auch Quadrate.
   - Jeweils ein Eckpunkt dieser Quadrate muss auf der Geraden g liegen. Warum?
   - Wie viele solcher Quadrate gibt es? Begründe deine Antwort.

4. Gegeben sind eine Parabel p und eine Gerade g durch die Gleichungen:
$P : y = -0,5x^2 - 4x + 1$ und $g : y = 0,5x + 3$.
Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



Auf der Parabel p liegen dort, wo die Parabel **oberhalb** der Geraden verläuft, Punkte $P_n(x \mid -0,5x^2 - 4x + 1)$.
Auf der Geraden g liegen Punkte Q_n jeweils mit dem gleichen Abszissenwert x wie die Punkte P_n. Zudem liegen auf der Geraden g Punkte R_n, deren Abszissenwert jeweils um 2 größer als der Abszissenwert der Punkte P_n bzw. Q_n ist .
Dadurch werden Dreiecke $P_nQ_nR_n$ erzeugt.

(a) Zeichne für $x = -4,5$ das Dreieck $P_1Q_1R_1$ ein.

(b) Zeige: Die Streckenlängen $\overline{P_nQ_n}$ lassen sich in Abhängigkeit von x wie folgt darstellen:

$$\overline{P_nQ_n}(x) = (-0,5x^2 - 4,5x - 2)\,\text{cm}$$

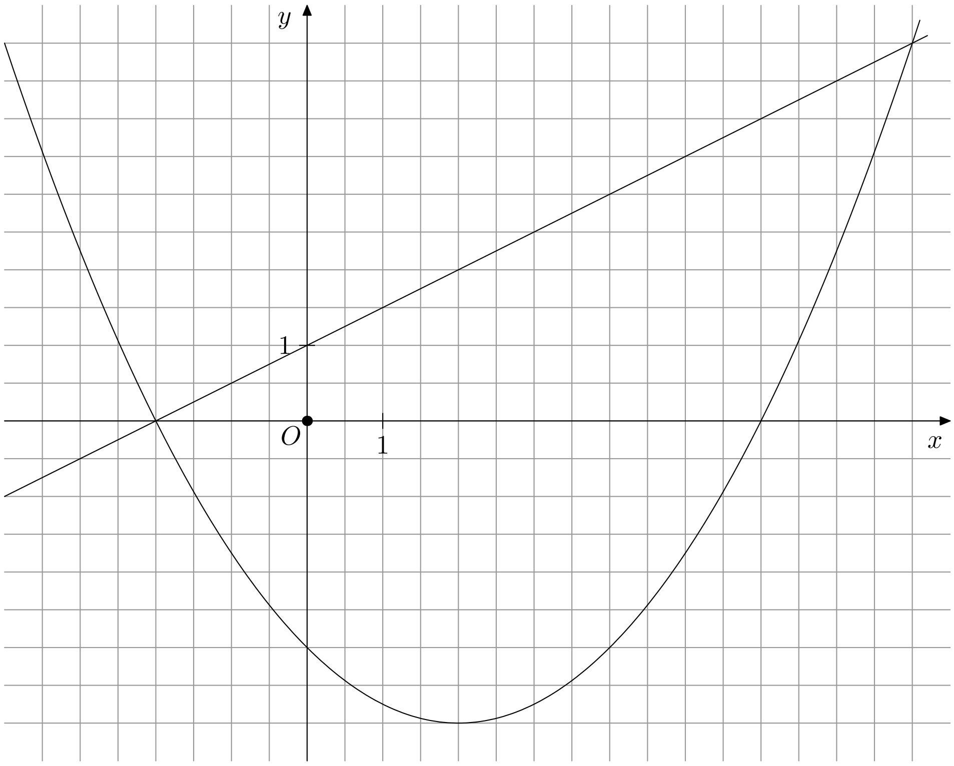
(c) Begründe: Die längste unter allen Streckenlängen $\overline{P_nQ_n}$ erzeugt gleichzeitig das flächengrößte unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$

(d) Untersuche rechnerisch, ob es unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$ gleichschenklige gibt, deren Basis jeweils eine der Strecken $[P_nQ_n]$ ist.

(e)
- Zeichne für $x = -7$ das Dreieck $P_2Q_2R_2$ ein.
  Weise rechnerisch nach, dass dieses Dreieck rechtwinklig ist.
- Berechne das Maß eines der spitzen Innenwinkel dieses Dreiecks.
- Es gibt ein weiteres Dreieck $P_3Q_3R_3$, das zum Dreieck $P_2Q_2R_2$ kongruent ist.
  Konstruiere den Eckpunkt P_3 dieses Dreiecks (die Konstruktionslinie muss deutlich sichtbar sein) und begründe deine Vorgehensweise.
  Zeichne dieses Dreieck $P_3Q_3R_3$ ein.

(f) Unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$ gibt es noch zwei rechtwinklige Dreiecke $P_4Q_4R_4$ und $P_5Q_5R_5$ mit den Hypotenusen $[Q_4R_4]$ bzw. $[Q_5R_5]$. Berechne die zugehörigen x-Werte.

5. Gegeben ist Parabel p mit der Gleichung $p : y = ax^2 - x - 3$, die durch den Punkt $P(-3 \mid 2,25)$ verläuft.
   Außerdem ist eine Gerade g durch die Gleichung $g : y = 0,5x + 1$ gegeben.
   Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



(a)
- Berechne die Scheitelkoordinaten der Parabel p.

  [Teilergebnis: $p : y = 0,25x^2 - x - 3$]
- Untersuche, ob die Gerade h mit der Gleichung $h : y = 0,5x - 5,26$ die Parabel p berührt.

(b) Auf der Parabel p liegen Punkte $B_n(x \mid 0,25x^2 - x - 3)$. Auf der Geraden g liegen Punkte $C_n(x \mid 0,5x+1)$ mit dem gleichen Abszissenwert x wie die Punkte B_n.
Für $x \in]-2;8[_{\mathbb{R}}$ erzeugen die Punkte A_n zusammen mit den Punkten B_n und C_n rechtwinklige Dreiecke $A_nB_nC_n$ mit den Hypotenusen $[A_nC_n]$. Dabei sind die Katheten $[A_nB_n]$ stets 4 cm lang.
Zeichne für $x = -1$ und $x = 5$ die beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ ein.

(c) Berechne die Länge der Katheten $[B_nC_n]$ in Abhängigkeit von x.

[Ergebnis: $\overline{B_nC_n}(x) = (-0,25x^2 + 1,5x + 4)$ cm]

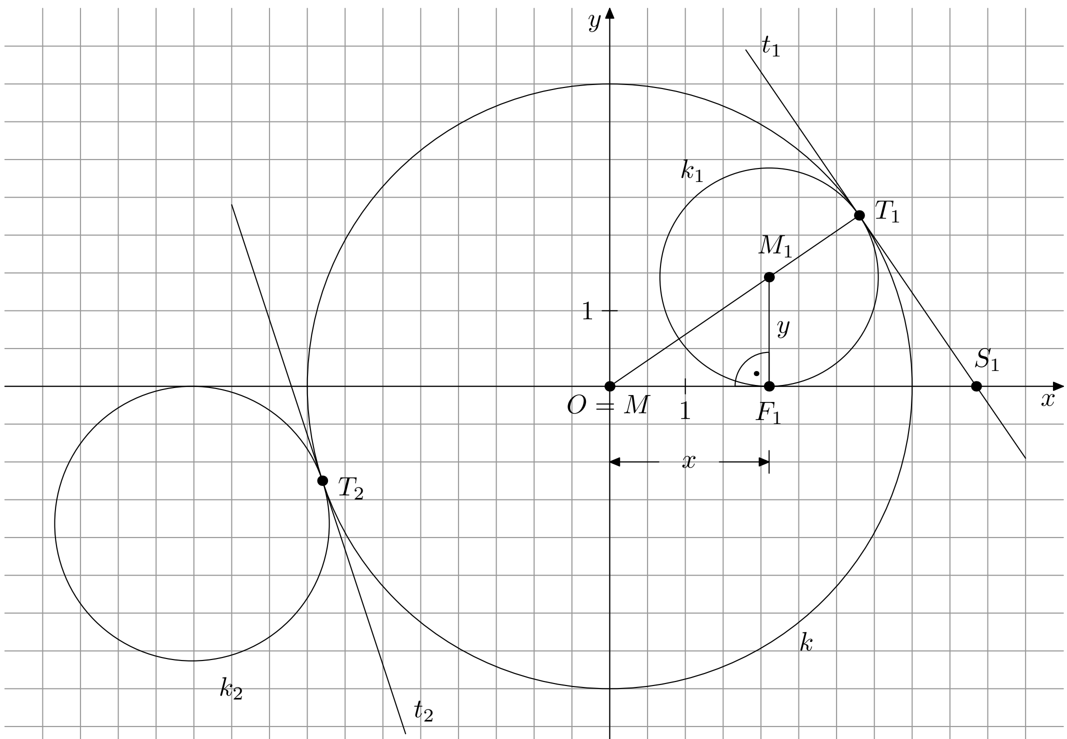
(d) Unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ gibt es eines mit maximalem Flächeninhalt. berechne dieses Maximum und die zugehörige Belegung von x.

(e) Unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ gibt es zwei Dreiecke $A_3B_3C_3$ und $A_4B_4C_4$, so dass der Winkel $A_3C_3B_3$ bzw. $A_4C_4B_4$ das Maß $45°$ besitzt. Berechne die zugehörigen Belegungen von x.

(f) Untersuche rechnerisch, ob es unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ eines gibt, deren Hypotenuse auf der Geraden g liegt.

6. Gegeben ist die Parabel p_0 durch die Gleichung $y = 0,5x^2 + 2x + 1000$.
   (a) Gib die Gleichung einer Parabel p_1 an, welche die gleichen Scheitelkoordinaten wie die Parabel p_0 besitzt, die aber nicht zur Parabel p_0 kongruent ist.
   (b) Gib die Gleichung einer Parabel p_2 an, die zur Parabel p_0 kongruent ist und deren Scheitel gleichzeitig auf der x-Achse liegt.
   (c) Es gibt beliebig viele Parabeln, welche die Parabel p_0 meiden und deren Scheitel im II. Quadranten liegen. Gib die Gleichung einer dieser Parabeln an und führe den Nachweis.
   (d) Es gibt beliebig viele Parabeln, welche mit der Parabel p_0 nur einen Punkt gemeinsam haben. Gib die Gleichung einer dieser Parabeln an und führe den Nachweis.

7.



Auf der Kreislinie k mit dem Mittelpunkt $M(0 \mid 0)$ und dem Radius 4 cm liegen Punkte T_n, die Berührpunkte von Kreisen k_n mit dem Mittelpunkt $M_n(x \mid y)$ sind. Alle diese Kreise k_n berühren jeweils auch die x-Achse.
Liegen die Punkte T_n über der x-Achse, dann sollen die Berührkreise k_n innerhalb des Kreises k liegen. Befinden sich die Punkte T_n unter der x-Achse, dann sollen die Berührkreise k_n außerhalb des Kreises k liegen.
In der obigen Darstellung sind zwei Berührkreise k_1 und k_2 mit den Berührpunkten

T_1 und T_2 eingezeichnet. Am Berührpunkt T_1 ist die zugehörige Kreistangente t_1 und am Berührpunkt T_2 ist die zugehörige Kreistangente t_2 eingezeichnet.

(a)
- Begründe: Der Mittelpunkt M_1 des Berührkreises k_1 muss auf der Halbierenden des Winkels T_1S_1M liegen.
- Weise durch die Konstruktion dieser Winkelhalbierenden w_1 nach, dass der Punkt M_1 richtig eingezeichnet ist.

(b) Konstruiere den Mittelpunkt M_2 der Kreislinie k_2.

(c) Für welche der Berührpunkte T_n gibt es nur entartete Berührkreise?

(d) Alle Kreismittelpunkte M_n liegen auf einer Parabel p.
- Beschreibe ohne Rechnung die Lage und die Eigenschaften der Parabel p möglichst genau.
- Leite die Parabelgleichung aufgrund der Lage besonderer Punkte auf ihr her.

  [Ergebnis: $p : y = -0,125x^2 + 2$]
- Bestätige diese Parabelgleichung durch Rechnung mit Hilfe des Dreiecks MF_1M_1 als Stellvertreter aller begleitenden rechtwinkligen Dreiecke MF_nM_n.

(e) Wie viel Prozent des Flächeninhalts des Kreises k wird von einem der Berührkreise bedeckt, dessen Mittelpunkt auf der Winkelhalbierendendes I. Quadranten liegt?

8. Gegeben ist eine Parabel durch die Gleichung:
$$y = -10x^2 - 19x + 2 \qquad .$$
Untersuche, ob die Parabel durch alle vier Quadranten verläuft.

9. Gegeben ist die Parabelschar $p(a)$ mit der Gleichung $y = (x - 2a)^2 - a^2 + 3$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

(a) Begründe: Alle Parabeln der Schar sind Normalparabeln.

(b) Zeichne für $a \in \{-1; 0; 2\}$ die zugehörigen Parabeln in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-6 \leqq x \leqq 8$ und $-3 \leqq y \leqq 7$

(c) Berechne die nach y aufgelöste Gleichung des Trägergraphen aller Scheitelpunkte.

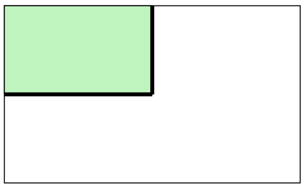
[Ergebnis: $y = 0,25x^2 - 3$]

(d) Die Parabel p_4 besitzt die Gleichung $y = (x + 1)^2 + 2,75$.
Die Parabel p_5 besitzt die Gleichung $y = x^2 - 6x + 8,75$.
Die Parabel p_6 besitzt die Gleichung $y = x^2 + 10x + 28,75$.
Untersuche, ob diese drei Parabeln der Schar angehören oder nicht.

(e) Wie viele Parabeln enthält die Schar $p(a)$, welche die x-Achse berühren? Begründe.

10. Gegeben ist eine Parabelschar $p(a)$ mit der Gleichung $y = ax^2 + x - a$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
    (a) Berechne die Scheitelkoordinaten in Abhängigkeit von a.
    $$\left[\text{Ergebnis: } S\left(-\frac{1}{2a}\,\middle|\, -a - \frac{1}{4a}\right)\right]$$
    (b) Begründe: In der Schar gibt es keine Parabel, deren Scheitel auf der y-Achse liegt.
    (c) Begründe: In der Schar gibt es keine Parabel, deren Scheitel im II. Quadranten liegt.
    (d) Tabellarisiere die Scheitelkoordinaten für $a \in \{-1;\ -0,5;\ 0,5;\ 1\}$. Zeichne die zugehörigen Parabeln in ein Koordinatensystem.
    Platzbedarf: $-5 \leqq x \leqq 5$ und $-4 \leqq y \leqq 4$
    (e) Berechne die Gleichung des Trägergraphen aller Scheitelpunkte $S(x_S \mid y_S)$.
    $$\left[\text{Ergebnis: } y_S = \frac{1}{2x_S} + \frac{x_S}{2}\right]$$
    (f) Begründe: Zu jeder Parabel p der Schar mit dem Scheitel $S(x_S \mid y_S)$ gibt es in der Schar eine kongruente Parabel p' mit dem Scheitel $S'(-x_s \mid -y_S)$.
    (g) Zeige: Jede Parabel der Schar schneidet die x-Achse zwei Punkten.

11.



Familie Taerkot hat auf ihrem eingezäunten Grundstück einen $140\,\mathrm{m}^2$ großen Garten angelegt. Er wurde zusätzlich mit einem $25,5\,\mathrm{m}$ langen Maschendrahtzaun abgegrenzt.
    (a) Berechne Länge und Breite.
    (b) Hätte Familie Taerkot mit $25,5\,\mathrm{m}$ Maschendraht auf die in der Abbildung dargestellte Weise eine noch größere Gartenfläche abgrenzen können?

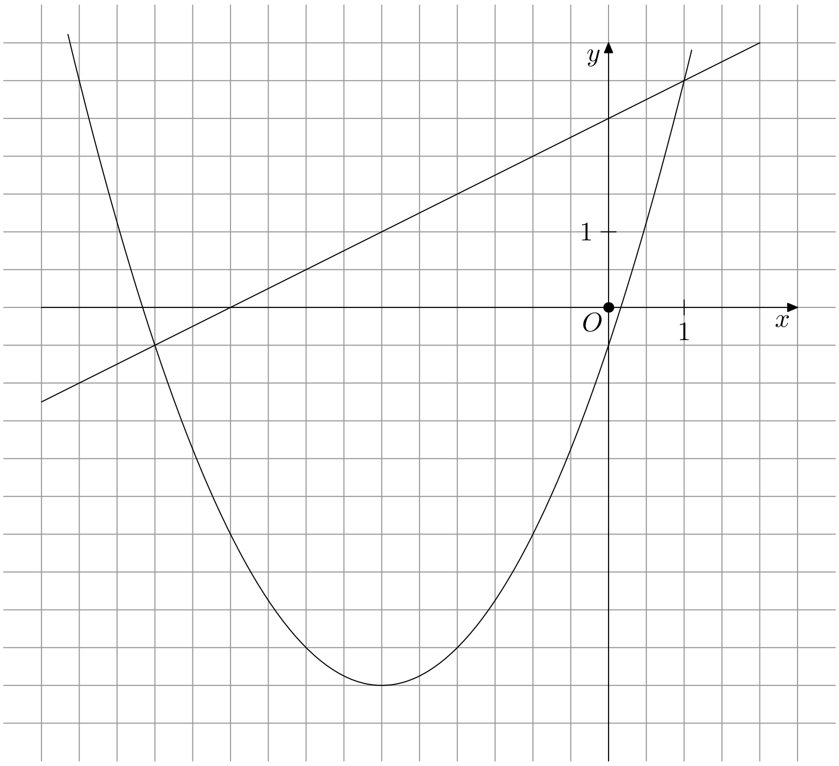
12. Ursula und Hans wollen die folgenden quadratischen Gleichungen lösen:

$$\begin{array}{ccccccccc} x^2 & + & 0,5x & - & 14 & = & 0 & (1) \\ x & + & 2x^2 & - & 28 & = & 0 & (2) \end{array}$$

(a) Hans bekommt für die Gleichung (1) die Lösungsmenge $\{-4;\ 3,6\}$ heraus. Überprüfe das.

(b) Danach schaut sich Ursula die Gleichung (2) genauer an. Sie meint schließlich: „Da brauchen wir die Lösungsformel gar nicht. Die beiden Gleichungen müssen dieselben Lösungen haben.“ Wie hat Ursula das erkannt?

13.



Für die Gleichung einer Parabel p gilt $a = 0,5$. Die Punkte $P(-4 \mid -4,5)$ und $Q(1 \mid 3)$ liegen auf dieser Parabel. Die Parabel p und die Gerade g mit der Gleichung $y = 0,5x + 2$ sind in Ausschnitten dargestellt.

(a) Zeige durch Rechnung: Die Parabel p hat die Gleichung $y = 0,5x^2 + 3x - 0,5$.

(b) Berechne die Scheitelkoordinaten der Parabel.

(c) Es werden nun rechtwinklige Dreiecke $A_nB_nC_n$ mit den folgenden Eigenschaften erzeugt:

- Die Punkte A_n liegen auf der Geraden g.
- Die Punkte C_n liegen auf der Parabel p.
- Die Punkte A_n sind die Scheitel der rechten Winkel aller Dreiecke $A_nB_nC_n$.
- Die Punkte C_n haben den gleichen Abszissenwert wie die Punkte A_n.

- Der Abszissenwert der Punkte B_n ist stets um 3 kleiner als der Abszissenwert der Punkte C_n.

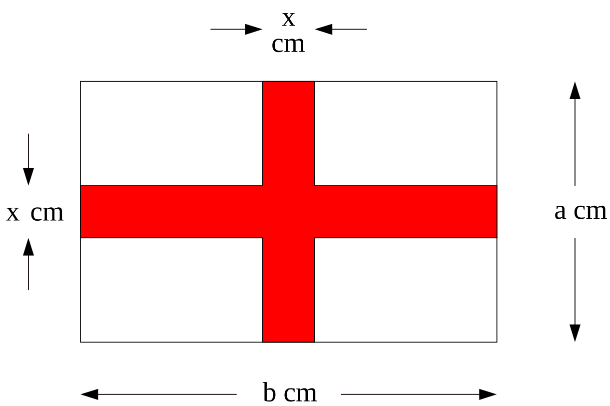
Zeichne oben für $x = 2$ das Dreieck $A_1B_1C_1$ ein.

(d) Gib zwei x-Werte an, für die es kein Dreieck gibt. Begründe deine Wahl.

(e) Begründe: Unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ gibt es keines, das zu einem Punkt entartet.

4. Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

1. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



   (a) Zeichne die Figur für $a = 11$, $b = 16$ und $x = 2$ im Maßstab 1:2.

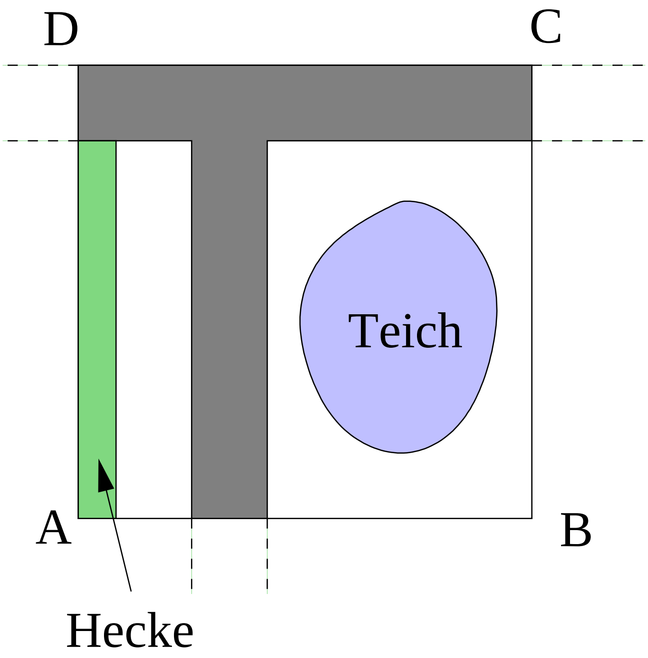
   (b) Zeige rechnerisch:

   - Für den Flächeninhalt A_w des weißen Anteils dieser Flagge gilt in Abhängigkeit von x:
   $$A_w(x) = (x^2 - 27x + 176)\,\mathrm{cm}^2$$
   - Für den Flächeninhalt A_k des Kreuzes in dieser Flagge gilt in Abhängigkeit von x:
   $$A_k(x) = (-x^2 + 27x)\,\mathrm{cm}^2$$

   (c) Berechne x so, dass die Fläche des Kreuzes 30% der Gesamtfläche ausmacht.

   (d) Berechne x so, dass die Inhalte von weißer Fläche und Kreuzfläche gleich sind.

2.

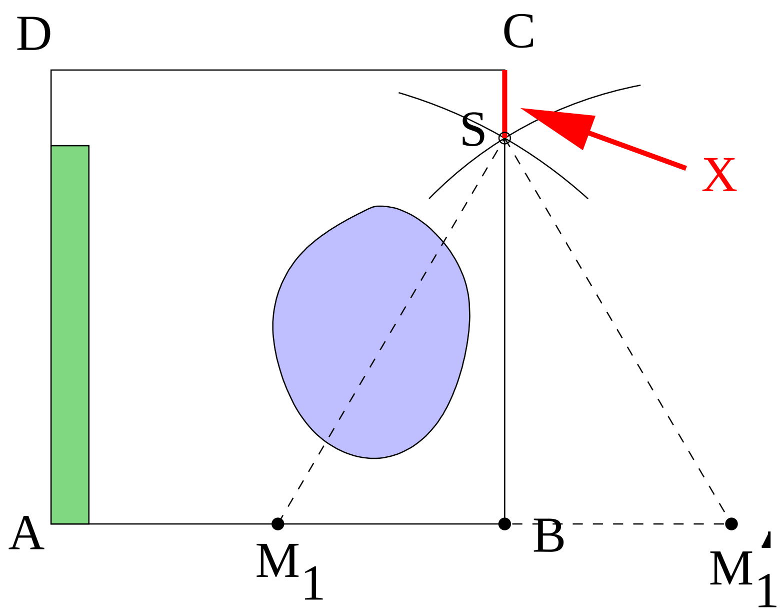


Der Plan zeigt ein quadratisches Biotop $ABCD$ mit einer Seitenlänge von 15 m. Es ist beabsichtigt, dass dort zwei geteerte Abschnitte von gleich breiten Radwegen im rechten Winkel aufeinander stoßen.
Die Naturschützer legen Wert darauf, dass die beiden Abschnitte für die Radwege höchstens 25% an Biotopfläche verbrauchen dürfen.

(a) In welchem Maßstab wurde der Plan erstellt?

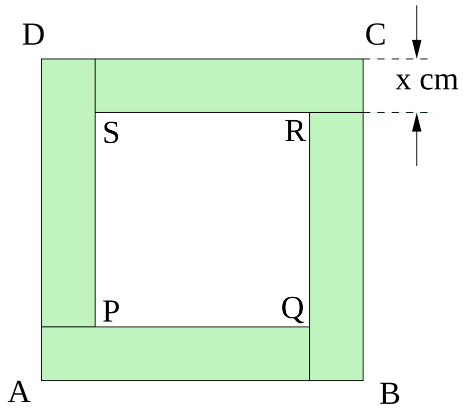
(b)
- Zeige, dass dem Verlangen der Naturschützer im vorliegenden Plan nicht Rechnung getragen worden ist.
- Zeige: Wenn jeder der beiden Radwege x m breit ist, dann muss
$$x \leqq 15 - \frac{15}{2}\sqrt{3}$$
werden.

(c) In einem neuen Plan wurde die höchstens zulässige Radwegbreite x konstruiert: Der Punkt M_1 ist der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$. Er wurde am Punkt B gespiegelt. Dadurch entstand der Punkt M_1'.
Die beiden Punkte M_1 und M_1' sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.



- Erläutere den weiteren Konstruktionsweg.
- Können sich die Naturschützer zufrieden geben?

3.



Das Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ ist aus vier kongruenten Rechtecken und dem Quadrat $PQRS$ zusammengefügt worden. Die kürzere Seite jedes Rechtecks ist $x\,\text{cm}$ lang.

(a) Zeichne die Figur für $x = 1$.

(b) Berechne x auf drei verschiedene Arten so, dass alle fünf Teilflächen, die das Quadrat $ABCD$ bedecken, gleich groß sind.

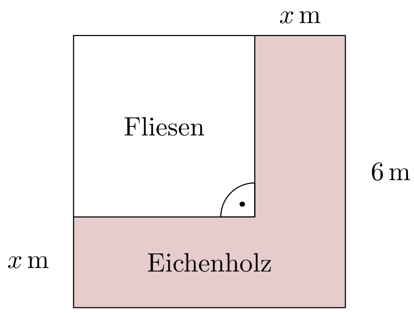
(c) • Zeige: Wenn das Quadrat $PQRS$ ein Drittel der Fläche des Quadrates $ABCD$ einnehmen soll, dann muss

$$x = 3 - \sqrt{3} = \frac{6}{2} - \frac{2}{2}\sqrt{3}$$

gelten.

- Konstruiere die Figur für diesen x-Wert.
  Tipp: $\frac{2}{2}\sqrt{3}$ ist so lang wie die Höhe in einem bestimmten gleichseitigen Dreieck.

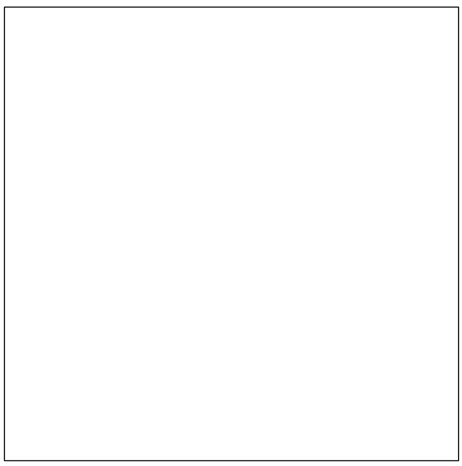
4.



Der quadratische Boden eines Badezimmers mit einer Seitenlänge von 6 m ist einerseits gefliest, anderserseits mit Eichenbrettern L-förmig verlegt worden. Das „L“ hat eine Breite von x m .
Die Fläche aus Holz ist halb so groß wie die gesamte Bodenfläche.

(a) Zeige: $x = 6 - 3\sqrt{2}$.

(b) •

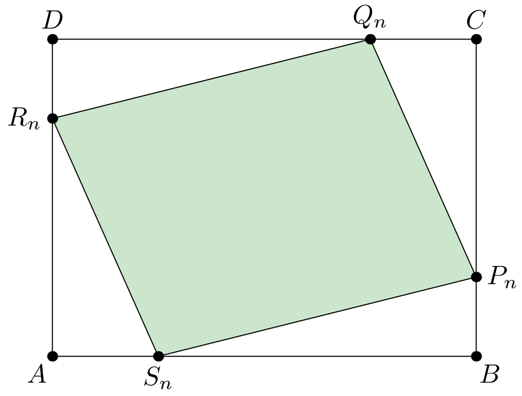


In welchem Maßstab ist der Grundriss des Badezimmers in der obigen Figur dargestellt?

- Konstruiere mit Zirkel und Lineal in diesen Grundriss maßstabgerecht die Streckenlänge $x\,\text{m} = (6 - 3\sqrt{2})\,\text{m}$.
  Tipp: $6 - 3\sqrt{2} = 6 - 0,5 \cdot 6\sqrt{2}$.

- Vervollständige damit die Flächenaufteilung des Badezimmers.

5.



In das Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$ werden Parallelogramme $P_nQ_nR_nS_n$ einbeschrieben, wobei gilt: $\overline{BP_n} = \overline{DR_n} = 6k\,\text{cm}$ und $\overline{AS_n} = \overline{CQ_n} = 8k\,\text{cm}$ mit $k \in]0;\, 1[_{\mathbb{R}}$.

(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ und für $k = 0,25$ das Parallelogramm $P_1Q_1R_1S_1$.

(b) Zeige: Für das Verhältnis q der Flächeninhalte der Parallelogramme $P_nQ_nR_nS_n$ zum Rechteck $ABCD$ gilt in Abhängigkeit von k:

$$q(k) = \frac{A_{P_nQ_nR_nS_n}}{A_{ABCD}} = 1 - 2k(1-k)\,.$$

(c) $k = 0,4$ erzeugt das Parallelogramm $P_2Q_2R_2S_2$. Wie viel Prozent der Fläche des Rechtecks $ABCD$ wird von diesem Parallelogramm eingenommen?

(d) Unter allen Parallelogrammen $P_nQ_nR_nS_n$ gibt es die Parallelogramme $P_3Q_3R_3S_3$ und $P_4Q_4R_4S_4$, die jeweils 58% der Fläche des Rechtecks $ABCD$ einnehmen. Berechne die zugehörigen Belegungen von k.

(e) Für $k = 0,5$ wird das Parallelogramm $P_5Q_5R_5S_5$ erzeugt.

- Zeichne dieses Parallelogramm in einer anderen Farbe ein.
- Um welches besondere Parallelogramm handelt es sich hier? Begründe deine Antwort.
- Zeige: Unter allen Parallelogrammen $P_nQ_nR_nS_n$ besitzt dieses Parallelogramm $P_5Q_5R_5S_5$ den kleinsten Flächeninhalt.

6. Gegeben sind die folgenden Gleichungen mit $G = \mathbb{R}$:

$$-5x + 30 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{x-6}{17,2} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{x-6}{x+3} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{x-6}{-3x+18} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{36-x^2}{x-6} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{0,5x^2-6x+18}{x+6} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{x^2-4x-12}{2x-6} = 0 \tag{7}$$

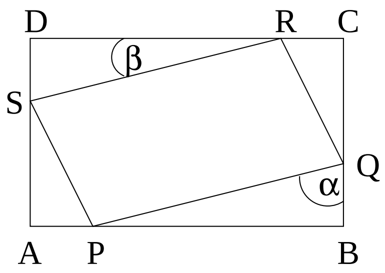
$$(-1,1)^{17} \cdot (\sqrt{2x} + 2\sqrt{3}) \cdot 17\frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2x} - \sqrt{12}) = 0 \tag{8}$$

(a) Ermittle die Lösung der Gleichung (1).

(b) Untersuche, ob die Gleichungen (2) bis (8) die gleiche Lösungsmenge wie die Gleichung (1) besitzen. Begründe jeweils deine Antwort.

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

1. In einem Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = \overline{CD} = 5\,\mathrm{cm}$ und $\overline{BC} = \overline{DA} = 3\,\mathrm{cm}$.
   Weiter gilt: $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = \overline{DS} = 1\,\mathrm{cm}$

   (a) Übertrage die Zeichnung auf dein Blatt.

   (b) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ möglichst exakt.

   (c) Es gilt $\alpha = 75{,}96°$. Berechne das Winkelmaß β auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

2. Die eine Seite eines Rechtecks $PQRS$ ist doppelt so lang wie die andere Rechtecksseite. Das Rechteck besitzt einen Flächeninhalt von $1{,}62\,\mathrm{dm}^2$.

   (a) Berechne die beiden Seitenlängen des Rechtecks.

   (b) Berechne die Länge einer Diagonalen.

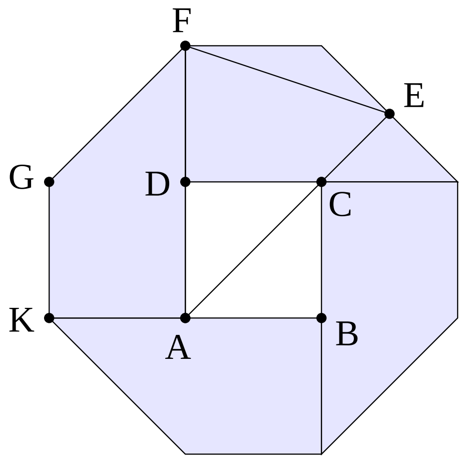
3. Von einem Trapez $ABCD$ weiß man: $A(1|1)$, $B(9|5)$, $C(x|7{,}5)$ und $D(2|6)$. Außerdem gilt: $[AB] \parallel [CD]$.
   Zeichne das Trapez und berechne x.

4. Ein Trapez $ABCD$ besitzt die Höhe $h = 4{,}2\,\mathrm{cm}$ und die beiden parallelen Seiten $[AB]$ und $[CD]$. Dabei gilt: $\overline{AB} = 8{,}5\,\mathrm{cm}$ und $\overline{CD} = x\,\mathrm{cm}$
   Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ $30{,}03\,\mathrm{cm}^2$ groß ist.

5. In einem Trapez $ABCD$, dessen Flächeninhalt $13\,\text{cm}^2$ beträgt, sind die beiden Seiten $[AB]$ und $[CD]$ parallel.
   Weiter gilt: Das Trapez ist $3,25\,\text{cm}$ hoch und $\overline{AB} = 5,2\,\text{cm}$.
   Berechne die Länge der Strecke $[CD]$.

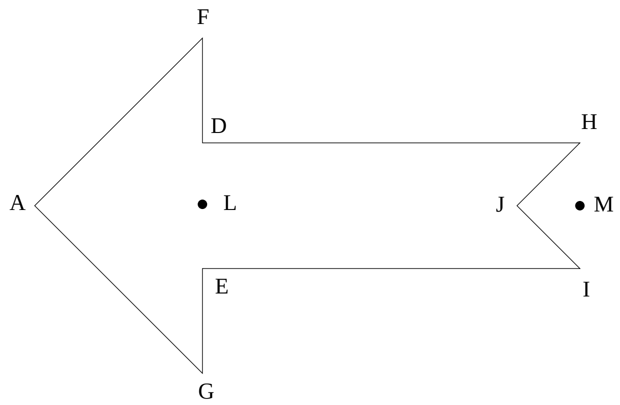
6. Eine Raute $PQRS$ besitzt einen Flächeninhalt von $24\,\text{cm}^2$. Eine Diagonale ist $12\,\text{cm}$ lang.
   (a) Berechne die Länge der zweiten Diagonalen.
   (b) Berechne den Umfang dieser Raute.

7. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das weiße Viereck ist ein Quadrat. Es gilt $\overline{AB} = \overline{DF} = a\,\text{cm}$. Zusätzlich ist hier das Dreieck AEF eigezeichnet.

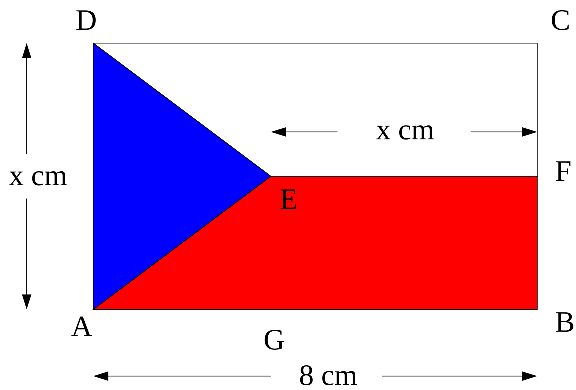


   (a) Zeichne die Figur für $\overline{FG} = 3,2\,\text{cm}$ so, dass die Strecke $[KB]$ waagrecht liegt.
   (b) Berechne in deiner Zeichnung den Flächeninhalt Quadrates $ABCD$.
   (c)
   - Untersuche ohne Verwendung des Taschenrechners, ob das Dreieck AEF gleichschenklig ist. Gilt dein Ergebnis auch dann noch, wenn die Figur verkleinert oder vergrößert wird? Begründe deine Ansicht.
   - Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks auf drei verschiedene Arten in Abhängigkeit von a.

8. Berechne den Flächeninhalt des unten skizzierten Pfeiles.
   Dabei gilt: $\overline{AM} = 6\,\text{cm}$, $\overline{AL} = 2\,\text{cm}$, $\overline{FG} = 3\,\text{cm}$, $\overline{HI} = 1,5\,\text{cm}$, $\overline{AJ} = 5,5\,\text{cm}$



9. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = \overline{EF} = x\,\text{cm}$ mit $x \in \mathbb{R}^+$.
Hinweis: Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne die Figur für $x = 4,5$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABFE$ in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A_T(x) = (0,25x^2 + 2x)\,\text{cm}^2$]

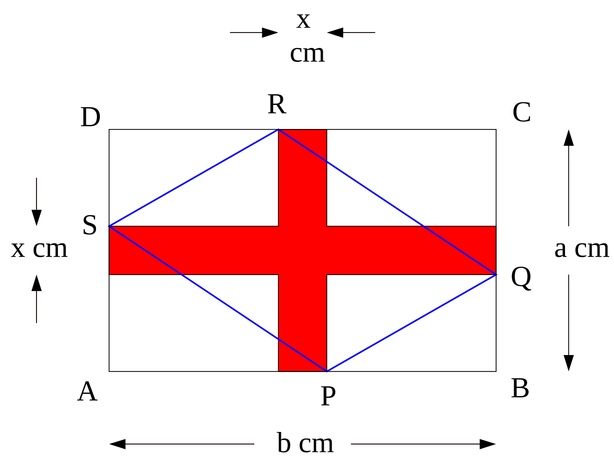
(c) Untersuche auf verschiedene Weise, ob es eine Belegung für x gibt, so dass der Flächeninhalt des Trapezes $ABFE$ den Wert $33\,\text{cm}^2$ annimmt.

(d) Berechne x so, dass die Inhalte aller drei Teilflächen im Inneren des Rechtecks $ABCD$ gleich groß sind.

(e) Berechne x so, dass das Dreieck AED gleichseitig wird.

(f) Berechne x so, dass das Dreieck AED gleichschenklig-rechtwinklig wird.

10. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England. Zusätzlich ist noch das Viereck $PQRS$ eingezeichnet.



(a) Zeichne die Figur für $a = 5$, $b = 8$ und $x = 1$.

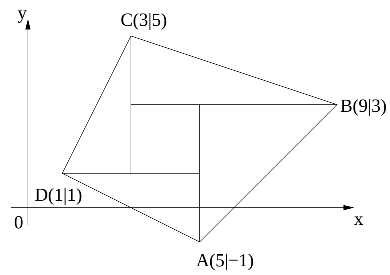
(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Parallelogramm.

(c) Zeige: Die Berechnung des Flächeninhalts A der Vierecke $PQRS$ in Abhängigkeit von a, b und x ergibt:

$$A(x) = \frac{ab - 0,5x^2}{2} \text{ cm}^2.$$

(d) Begründe: Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt: $A(PQRS) < 0,5 \cdot A(ABCD)$.

11. Klaus will den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ berechnen. Er hat dazu in das Viereck Strecken eingezeichnet.



(a) Weshalb hat Klaus diese Einteilung vorgenommen? Kann er auf diese Weise den Flächeninhalt exakt berechnen? Begründe deine Antwort.

(b) Zeichne das Viereck und berechne seinen Flächeninhalt auf eine andere Weise.

(c) Zeichne ein Drachenviereck, das denselben Flächeninhalt wie das Viereck A_{ABCD} besitzt.

12. Gegeben sind die Punkte $A(-1|4)$ und $B(2|1)$ sowie die Gerade $g : y = -2x + 9$. Punkte C_n wandern auf der Geraden g, so dass laufend Dreiecke ABC_n erzeugt werden.
    (a) Zeichne die Gerade g und für $C_1(x_1|7)$ das Dreieck ABC_1 in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-2 \leqq x \leqq 7$ und $-4 \leqq y \leqq 10$
    (b) Zeige, dass für den Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von x gilt:
    $$A(x) = (9 - 1,5\,x)\,\text{cm}^2$$
    (c) Gib zwei Belegungen von x an, für die es keines dieser Dreiecke ABC_n gibt. Begründe deine Wahl, z.B. anhand deiner Zeichnung.
    (d) Untersuche zeichnerisch, ob es unter allen Dreiecken ABC_n rechtwinklige gibt, welche die Seite $[AB]$ als Kathete besitzen.
    (e) Angenommen, die Punkte C_n würden nicht auf der Geraden g, sondern auf einer anderen Geraden g^* wandern. Diese Gerade g^* soll so liegen, dass dann der Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n konstant bleibt.
    Zeichne eine solche Gerade g^* ein.

13. Ein Quadrat besitzt einen Flächeninhalt von $39,69\,\text{cm}^2$.
    Berechne die Länge einer Diagonalen.

14. Gegeben ist das Dreieck ABC durch $A(4 \mid 1)$, $B(-2 \mid 5)$ und $C(-4 \mid 3)$.
    (a) Zeichne das Dreieck ABC in ein Koordinatensystem.
    Platzbedarf: $-5 \leqq x \leqq 5$ und $-1 \leqq y \leqq 6$
    (b) Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks, indem du seine Grundlinie und seine Höhe abmisst.
    (c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC exakt mit Hilfe eines geeigneten Rechtecks, das du einzeichnest. [Ergebnis: $A_{\triangle ABC} = 10\,\text{cm}^2$]
    (d) Zeichne zwei rechtwinklige Dreiecke, die zwar jeweils den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck ABC besitzen, die aber nicht kongruent sind.

15. Von einem Trapez $ABCD$ weiß man: $A(1|1)$, $B(9|5)$, $C(x|7,5)$ und $D(2|6)$. Außerdem gilt: $[AB] \parallel [CD]$.
    Zeichne das Trapez und berechne x.

16. Ein Trapez $ABCD$ besitzt die Höhe $h = 4,2\,\text{cm}$ und die beiden parallelen Seiten $[AB]$ und $[CD]$. Dabei gilt: $\overline{AB} = 8,5\,\text{cm}$ und $\overline{CD} = x\,\text{cm}$
    Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ $30,03\,\text{cm}^2$ groß ist.

17. Gegeben sind die Punkte $A(-1|4)$ und $B(2|1)$ sowie die Gerade $g : y = -2x + 9$. Punkte C_n wandern auf der Geraden g, so dass laufend Dreiecke ABC_n erzeugt werden.

    (a) Zeichne die Gerade g und für $C_1(x_1|7)$ das Dreieck ABC_1 in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-2 \leqq x \leqq 7$ und $-4 \leqq y \leqq 10$

    (b) Zeige, dass für den Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von x gilt:
    $$A(x) = (9 - 1,5\,x)\,\text{cm}^2$$

    (c) Gib zwei Belegungen von x an, für die es keines dieser Dreiecke ABC_n gibt. Begründe deine Wahl, z.B. anhand deiner Zeichnung.

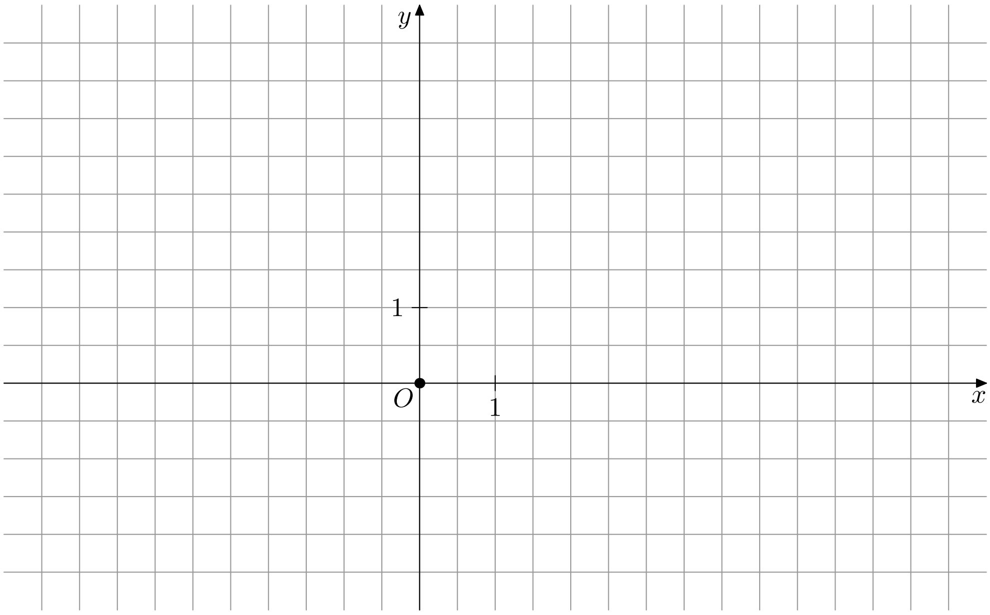
    (d) Untersuche zeichnerisch, ob es unter allen Dreiecken ABC_n rechtwinklige gibt, welche die Seite $[AB]$ als Kathete besitzen.

    (e) Angenommen, die Punkte C_n würden nicht auf der Geraden g, sondern auf einer anderen Geraden g^* wandern. Diese Gerade g^* soll so liegen, dass dann der Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n konstant bleibt.
    Zeichne eine solche Gerade g^* ein.

18. Ein Quadrat besitzt einen Flächeninhalt von $39,69\,\text{cm}^2$.
    Berechne die Länge einer Diagonalen.

19. Gegeben sind die beiden Geraden g_1 und g_2 durch die Gleichungen
    $$g_1 : y = 0,5x \text{ und } g_2 : y = -0,5x + 2.$$
    Die Punkte $A_n(x \mid 0,5x)$ auf der Geraden g_1 erzeugen zusammen mit den Punkten B_n auf der Geraden g_2 Kreise k_n mit dem Durchmesser $[A_nB_n]$. Die Abszisse der Punkte B_n ist stets um 2 größer als die Abszisse x der Punkte A_n.

    (a)
    - Zeichne die beiden Geraden g_1 und g_2 und deren Schnittpunkt S in das Koordinatensystem.
    - Zeichne für $x = 5$ den Kreis k_1 mit seinem Durchmesser $[A_1B_1]$ und für $x = -3$ den Kreis k_2 mit seinem Durchmesser $[A_2B_2]$ ein.



(b) Zeige, dass $B_n(x+2 \mid -0,5x+1)$ gilt.

(c) Begründe auf verschiedene Weise, dass der Durchmesser $[A_2B_2]$ auf der Geraden g_2 senkrecht steht.

(d) Es gibt einen Kreis k_3, der die Gerade g_1 berührt. Berechne den zugehörigen x-Wert.

(e) Berechne die Gleichung der Ortslinie der Mittelpunkte M_n.

(f) Zeige: Für die Länge der Durchmesser $[A_nB_n]$ gilt in Abhängigkeit von x:
$$\overline{A_nB_n}(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}\ \text{cm}$$

(g) Fritz behauptet: „Wenn die Kreisfläche minimal wird, dann liegt der betreffende Kreismittelpunkt dem Geradenschnittpunkt S am nächsten.“ Begründe auf verschiedene Weise, dass Fritz Recht hat.

(h) Unter allen Kreisen k_n gibt es zwei, welche einen Flächeninhalt von $17\,\pi\,\text{cm}^2$ aufweisen. Berechne die zugehörigen Abszissenwerte.

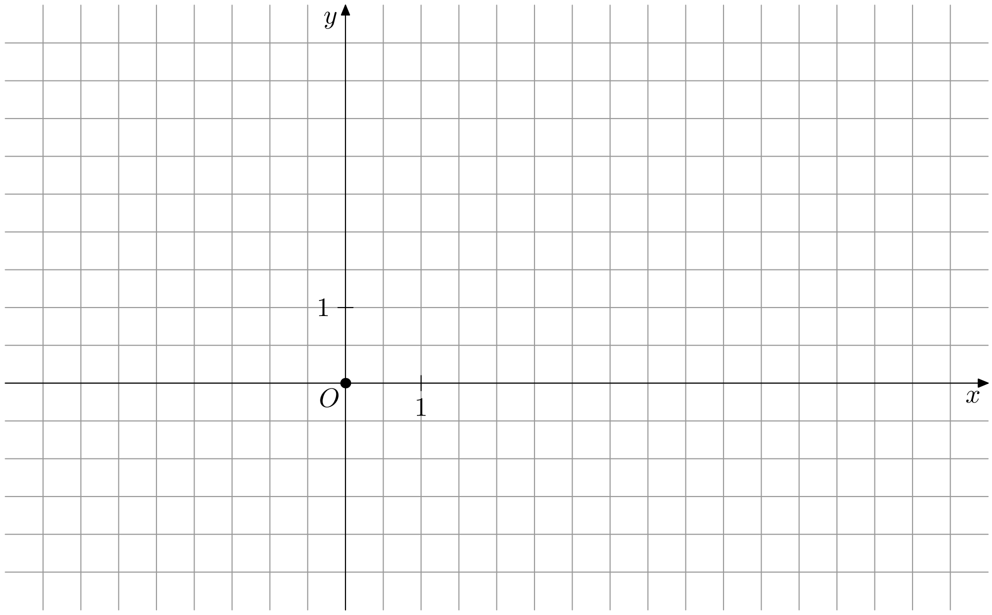
(i) Unter allen Kreisen k_n gibt es zwei, welche die y-Achse berühren. Berechne die zugehörigen x-Werte.

20. Gegeben sind die beiden Geraden g_1 und g_2 durch die Gleichungen
$$g_1 : y = -\frac{1}{3}x + 2,5 \text{ und } g_2 : y = \frac{2}{3}x - 0,5.$$

Punkte $A_n(x \mid -\frac{1}{3}x + 2,5)$ auf der Geraden g_1 erzeugen zusammen mit Punkten C_n auf der Geraden g_2 Rauten $A_nB_nC_nD_n$ mit dem jeweiligen Mittelpunkt M_n.
Die Punkte A_n und C_n haben dabei stets den gleichen Abszissenwert und die Diagonalen $[B_nD_n]$ sind stets 4 cm lang.

(a) • Zeichne die beiden Geraden g_1 und g_2 und deren Schnittpunkt S in das Koordinatensystem.

• Zeichne für $x = 6$ die Raute $A_1B_1C_1D_1$ und für $x = -1,5$ die Raute $A_2B_2C_2D_2$ ein.



(b) Für welche Belegungen von x erhält man solche Rauten $A_nB_nC_nD_n$?

(c) • Zeige: Für die Diagonalenlängen $\overline{A_nC_n}$ erhält man in Abhängigkeit von x:

$$\overline{A_nC_n}(x) = \mid x - 3 \mid \text{ cm}.$$

• Bestätige mit diesem Ergebnis das Ergebnis der Aufgabe (b).

(d) Berechne x so, dass die entsprechenden Rauten Quadrate sind.

(e) Unter allen Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt es solche, deren Flächeninhalt $20\,\text{cm}^2$ beträgt. Berechne die zugehörigen x-Werte.

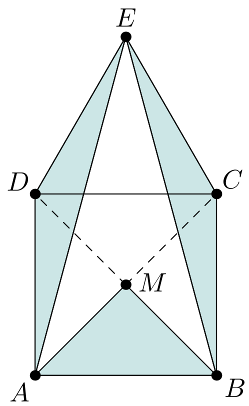
(f) Berechne die Koordinaten der Mittelpunkte M_n in Abhängigkeit von x.

$$\left[\text{Ergebnis: } M_n \left(x \mid \frac{1}{6}x + 1 \right) \right].$$

(g) Unter allen Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt es eine Raute $A_0B_0C_0D_0$, deren Mittelpunkt M_0 dem Koordinatenursprung am nächsten liegt. Berechne den zugehörigen x-Wert und die minimale Distanz.

(h) Unter allen Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt es die Raute $A_3B_3C_3D_3$, deren Diagonale $[B_3D_3]$ auf der x-Achse liegt. Berechne die Koordinaten der Eckpunkte dieser Raute auf verschiedene Weise.

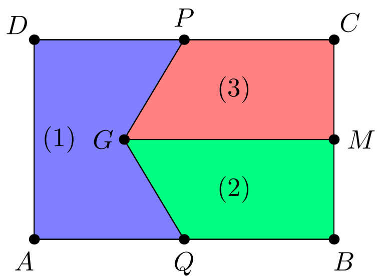
21. An das Quadrat $ABCD$ ist das gleichseitige Dreieck DCE angefügt worden:



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die getönten Dreiecke besitzen den gleichen Flächeninhalt.

22.

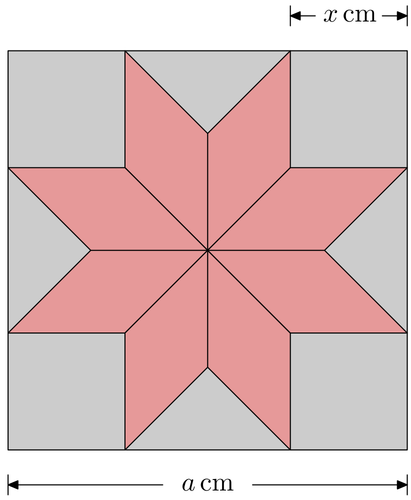


Das Königreich Al'Gebr besteht aus drei gleich großen Provinzen. Das Bild seiner Nationalflagge ist oben dargestellt.
(1): Küstenregion, (2): Südregion und (3): Nordregion. Die Punkte P, Q und M sind Seitenmittelpunkte.
Der König von Al'Gebr hat den Eindruck, dass die drei Provinzen im Flaggenbild nicht gleich groß dargestellt sind. Er möchte das geändert haben.

(a)
- Zeichne die Flagge für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = \overline{GM} = 4\,\text{cm}$.
- Begründe, dass der König mit seinem Eindruck in diesem Fall Recht hätte.

(b) Er beauftragt seine Rechenmeister und Designer, den Punkt G bei sonst unveränderlicher Aufteilung so zu legen, dass die drei farbigen Flächen im Flaggenbild gleich groß sind.
- Es gilt $\overline{GM} = x\,\text{cm}$. Zeige: Für den Flächeninhalt der Südregion gilt: $A_2 = (x+3)\,\text{cm}^2$
- Berechne x so, dass alle drei Teilflächen gleich groß sind.
  Wie sieht die Flagge dann aus?

23.

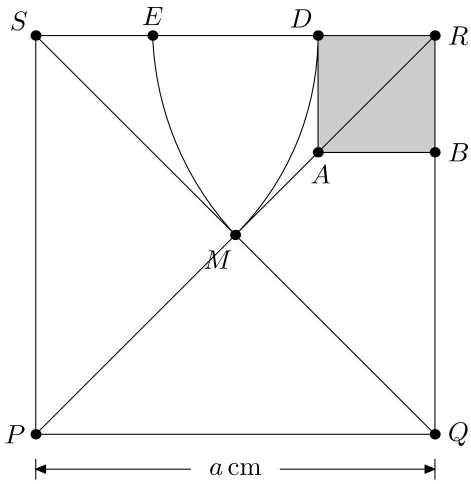


Im Baumarkt werden quadratische Fliesen wie oben abgebildet angeboten.
Das Quadrat mit der Seitenlänge a cm ist aus jeweils kongruenten Rauten, Dreiecken und kleineren Quadraten mit der Seitenlänge x cm zusammengefügt.

(a) Begründe: Die Dreiecke müssen gleichschenklig-rechtwinklig sein.

(b)
- Zeige, dass $x = \dfrac{a}{2+\sqrt{2}}$ gilt.
- Zeige, dass $x = a - \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$ gilt.

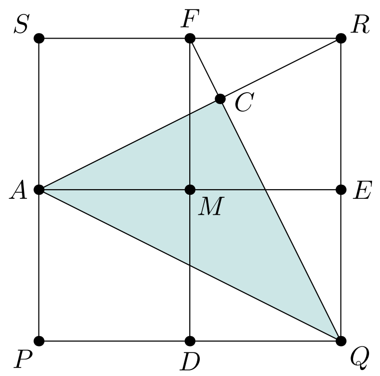
(c)



Die Punkte R und S sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen. Begründe, dass das so konstruierte Quadrat $ABRD$ eines der kleinen Quadrate in der Fliese darstellt.

(d) Konstruiere die Figur für $a = 8$ cm.

24.



Das Quadrat $PQRS$ wird durch die Strecken $[AE]$ und $[DF]$ in vier gleiche Quadrate aufgeteilt.

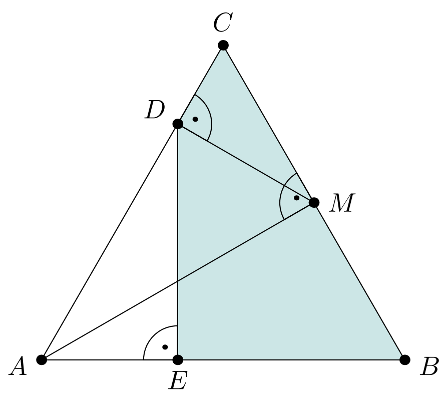
(a) • Zeichne die Figur für $\overline{PQ} = 8\,\text{cm}$.
 • Begründe: Das Dreieck AQC ist rechtwinklig.

(b) Es sei jetzt $\overline{PQ} = 2a\,\text{cm}$.
Wie viel Prozent der Fläche des Quadrates $PQRS$ wird vom Dreieck AQC bedeckt? Vergleiche dazu die Flächeninhalte der Dreiecke FCR und CQR.

(c) In welchem Verhältnis teilt der Punkt C die Strecke $[AR]$? Zeichne dazu im Dreieck ARS eine geeignete Hilfslinie ein.

(d) In welchem Verhältnis teilt der Punkt C die Strecke $[QF]$?

25.

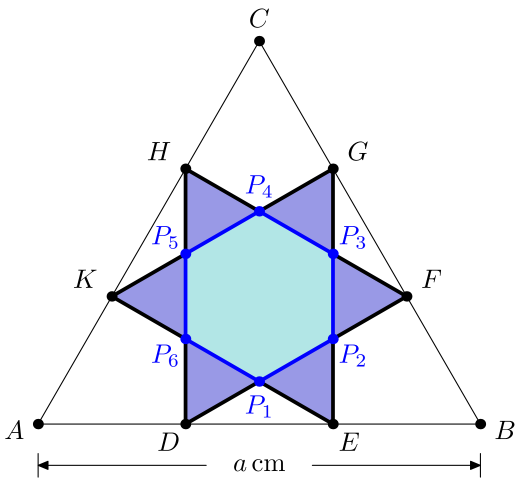


Das Grundstück ABC hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit einer Seitenlänge $a = 75\,\text{m}$. Die Grundstücksfläche $BCDE$ ist ein Rasenspielfeld. Der Rest ist asphaltiert. Es gilt: $\overline{MB} = \overline{MC}$.

(a) Zeichne die Figur mit den Punkten E, M und D im Maßstab $1 : 1000$.

(b) Berechne den Anteil der Rasenfläche am Grundstück ABC in Prozent.

26.



Das Dreieck ABC ist gleichseitig mit der Seitenlänge a cm. Die Punkte D, E, F, G, H und K dritteln jeweils die Dreiecksseite, auf der sie liegen.

(a) Zeichne die Figur für $a = 7,5$.

(b) Begründe: Die Punkte D, E, F, G, H und K sind Scheitel von rechten Winkeln. Zeichne dazu den Mittelpunkt M der Basis $[AB]$ sowie die Gerade CM ein und vergleiche die Teilverhältnisse auf den Strecken $[AM]$ und $[AC]$.

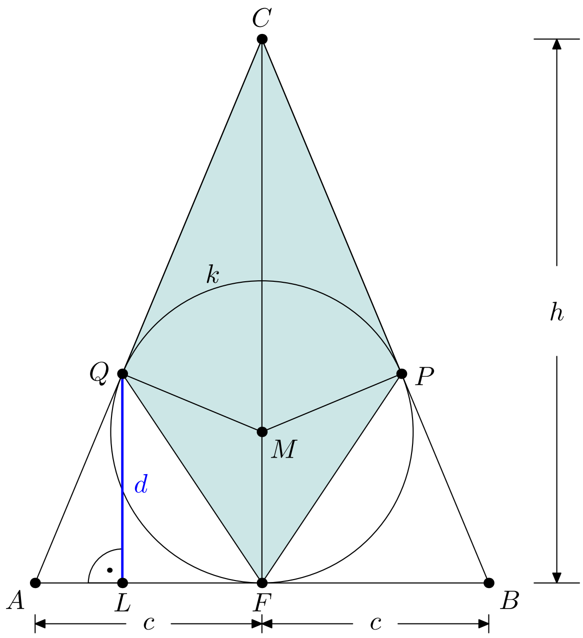
(c) Berechne das Verhältnis k_1 der Flächeninhalte des sechszackigen Sterns und des Dreiecks ABC.

$$[\text{ Ergebnis: } k_1 = \frac{4}{9}\ ]$$

(d) Begründe: Das Verhältnis k_2 der Flächeninhalte des inneren Sechsecks $P_1 \dots P_6$ und des Dreiecks ABC ist halb so groß wie k_1. Zeichne dazu im Sechseck geeignete Hilfslinien ein.

(e)
- Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, das denselben Flächeninhalt aufweist wie der sechszackige Stern.
- Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, das denselben Flächeninhalt aufweist wie das innere Sechseck $P_1 \dots P_6$.

27.



Für die Figur gilt: $\overline{AC} = \overline{BC}$. Die Kreislinie k berührt die Seiten des Dreiecks ABC in den Punkten F, P und Q.

(a) Zeichne die Figur für $c = 5\,\text{cm}$ und $h = 12\,\text{cm}$.

(b) Zeige: $d = \dfrac{h \cdot c}{\sqrt{h^2 + c^2}}$.

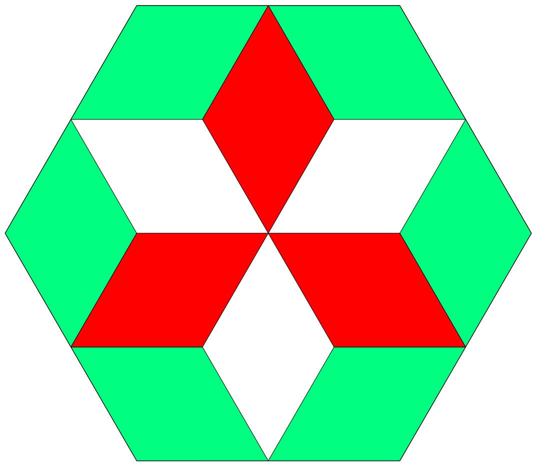
(c) Zeige: Für den Flächeninhalt des Dreiecks AFQ gilt: $A_{AFQ} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{h \cdot c^2}{\sqrt{h^2 + c^2}}$.

(d) Es seien A_{FPCQ} der Flächeninhalt des Vierecks $FPCQ$ und A_{ABC} der Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Zeige: $\dfrac{A_{FPCQ}}{ABC} = 1 - \dfrac{c}{\sqrt{h^2 + c^2}}$.

(e) In welchem Verhältnis müssen die Höhe h des Dreiecks ABC und dessen Basislänge $\overline{AB}$ stehen, damit das Viereck $FPCQ$ 40% der Fläche des Dreiecks ABC ausmacht?

(f) Markus meint: „Wenn das Dreieck ABC gleichseitig wäre, dann wäre der Flächenanteil des Vierecks $FPCQ$ am Dreieck ABC genau ...“.
Was hat Markus erkannt? Wie würdest du seine Entdeckung auf verschiedene Weise begründen?

28.



In das regelmäßige Seckseck mit der Seitenlänge $a = 6\,\text{cm}$ ist ein sechszackiger Stern einbeschrieben, in dem das Mitsubishi-Logo („Drei Diamanten“) eingebettet ist. Wenn du das Bild lange genug betrachtest, entdeckst du auch 3 schräge Würfel.

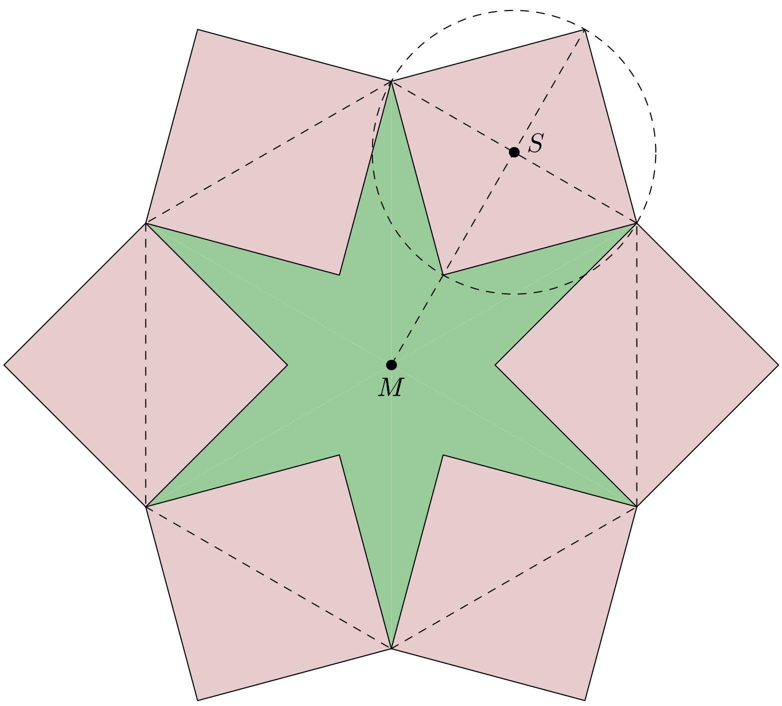
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Die drei „Mitsubishi-Vierecke“ sind kongruente Rauten.

(c) Ermittle den prozentualen Anteil des Sterns am Seckseck.

(d) Ermittle den prozentualen Anteil des Mitsubishi-Logos am Seckseck.

29.



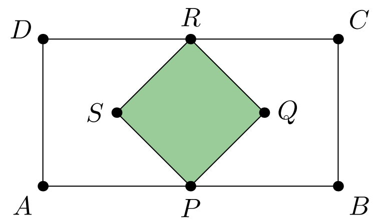
Die Figur ist dem Logo eines Verlages in München nachempfunden. Ihr liegt ein regelmäßiges Sechseck zugrunde. Die sechs Seiten sind jeweils die Diagonalen der Quadrate. Im Inneren ist ein Stern zu sehen.

(a) Zeichne zunächst das regelmäßige Sechseck mit einer Seitenlänge von 6 cm. Füge dann die Quadrate hinzu.

(b) Berechne den Flächeninhalt eines Quadrates.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Sterns.

30.



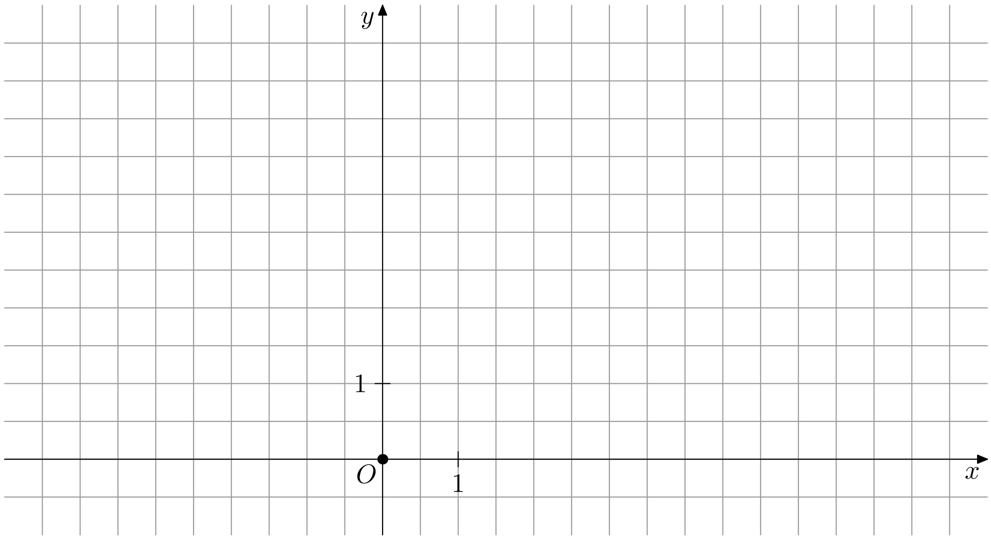
Die Seite [AB] des Rechtecks $ABCD$ ist 6 cm und die Seite [BC] ist x cm lang. Die Punkte P und R sind die Mittelpunkte der betreffenden Rechtecksseiten. Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat.

(a)
- Zeichne die Figur für $x = 3$.
- Wie viel Prozent der Rechtecksfläche nimmt das Quadrat jetzt ein?

(b)
- Zeichne die Figur für $x = 8$.
- Für welche Belegungen von x liegen die Punkte S und Q des Quadrates nicht außerhalb des Rechtecks? Begründe.

(c) Berechne x so, dass das Quadrat 40% der Rechtecksfläche bedeckt.

31.



Die Punkte D_n liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 0,5x + 2$. Sie besitzen jeweils den gleichen Abszissenwert x wie die Punkte $A_n(x \mid 0)$. Zusammen mit den Punkten B_n und C_n entstehen dadurch Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ wobei Folgendes gilt: $C_n \in g$, $\overline{A_nB_n} = 3\,\text{LE}$ und $[A_nD_n] \parallel [B_nC_n]$.

(a) Zeichne die Gerade g und für $x = -1$ und $x = 4$ die beiden Trapeze $A_1B_1C_1D_1$ bzw. $A_2B_2C_2D_2$ in das obige Koordinatensystem.

(b) Berechne alle Belegungen von x, für die es Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ gibt.

(c) Zeige: $C_n(x + 3 \mid 0,5x + 3,5)$.

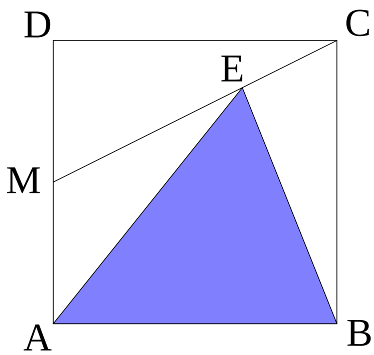
(d) Zeige: Für den Flächeninhalt A aller Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ gilt in Anhängigkeit von x:

$$A(x) = (1,5x + 8,25)\,\text{FE}$$

(e) Unter allen Trapezen $A_nB_nC_nD_n$ gibt es eines, das einen Flächeninhalt von $53,25\,\text{FE}$ aufweist. Berechne x.

(f) Unter allen Trapezen $A_nB_nC_nD_n$ gibt es das Trapez $A_3B_3C_3D_3$, dessen Seite $[B_3C_3]$ fünf Mal so lang ist wie die Seite $[A_3D_3]$. Berechne x.

32.



Die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ beträgt 6 m. Der Punkt M halbiert die Seite $[AD]$. Die Dreiecke AEM und BCE sind flächengleich.

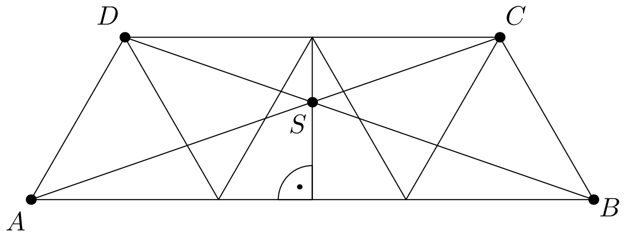
(a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks DMC.

(b) Begründe: Der Abstand des Punktes E zur Seite $[AD]$ ist doppelt so groß wie der zur Seite BC.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABE.

Quelle: Bayerischer Mathematiktest 1998

33.



Fünf gleichseitige Dreiecke wurden zu dem Trapez $ABCD$ zusammengefügt.

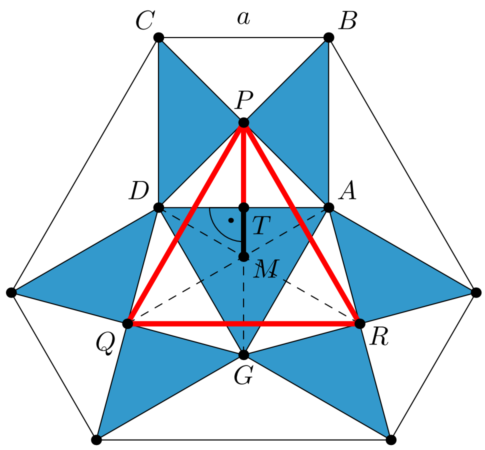
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 12\,\text{cm}$.

(b) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke DSC und ABS.

(c) In welchem Verhältnis teilt der Diagonalenschnittpunkt S die Trapezhöhe?

(d) Berechne den prozentualen Anteil der Fläche des Dreiecks DSC am Trapez $ABCD$.

34.

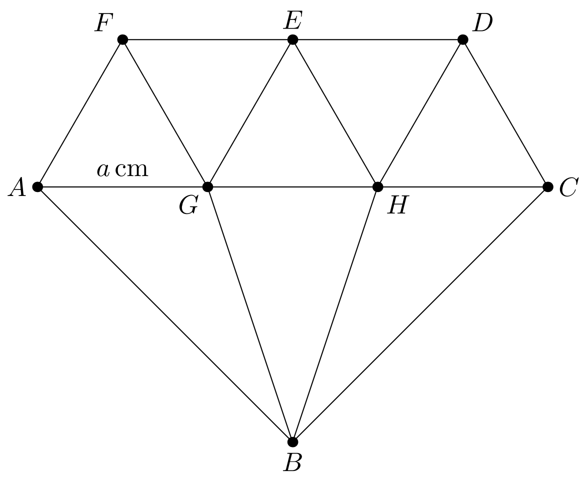


Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Im Zentrum befindet sich das gleichseitige Dreieck ADG. Das Dreieck PQR und die gestrichelten Strecken wurden zusätzlich eingezeichnet. Die Länge der Quadratseite $\overline{BC}$ ist a.

(a) Zeichne die Figur für $a = 4\,\text{cm}$.

(b) Vergleiche den Flächeninhalt der beiden gleichseitigen Dreiecke ADG und PQR in Prozent.

35.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Viereck $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken mit der jeweiligen Seitenlänge $a\,\text{cm}$ zusammensetzt.

(a) Zeichne die Figur für $a = 3$.

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A_1 des Vierecks $BHEG$ gilt in Abhängigkeit von a:

$$A_1(a) = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3} + 3\right)\ \text{cm}^2$$

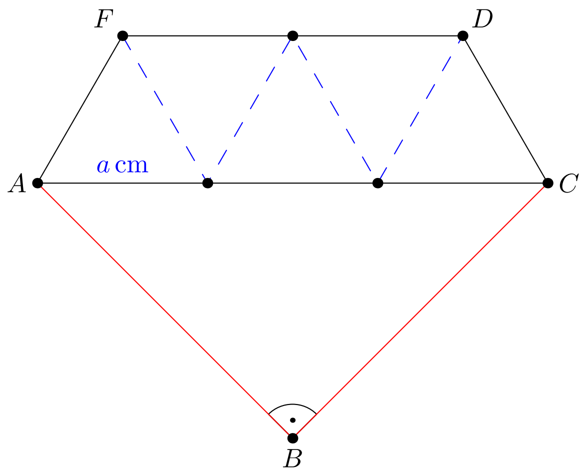
(c)
- Begründe: Das Viereck $ABGF$ besitzt den gleichen Flächeninhalt wie das Viereck $BHEG$.
- Begründe: Das Viereck $BHEG$ bedeckt weniger als ein Drittel der Fläche des Fünfecks $ABCDF$.

(d) Zeige: Für den Flächeninhalt A_2 des Vierecks $BHEG$ gilt in Abhängigkeit von a:

$$A_2(a) = \frac{a^2}{4}\left(5\sqrt{3} + 9\right)\ \text{cm}^2$$

(e) Wie viel Prozent der Fläche des Fünfecks $ABCDF$ wird vom Viereck $BHEG$ eingenommen?

36.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Viereck $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken mit der jeweiligen Seitenlänge a cm zusammensetzt.

(a) Zeichne die Figur für $a = 3$.

(b) Vergleiche den Flächeninhalt des Vierecks $ACDF$ mit dem des Dreiecks ABC.

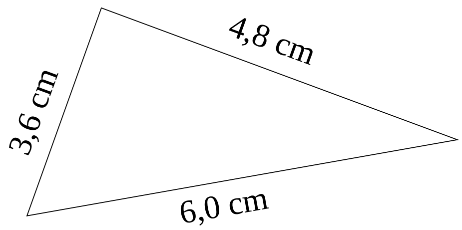
37. Gegeben ist das Viereck $ABCD$ durch $A(-4 \mid 5), B(0 \mid -2), C(2 \mid -1)$ und $D(3 \mid 4)$.

(a) Zeichne dieses Viereck in ein Koordinatensystem.
Platzbedarf: $-5 \leqq x \leqq 4$ und $-3 \leqq y \leqq 6$

(b) Berechne den Flächeninhalt dieses Vierecks.

(c) Ersetze in der Zeichnung den Punkt D durch einen anderen Punkt E, so dass das Viereck $ABCE$ den gleichen Flächeninhalt aufweist wie das Viereck $ABCD$.

38.

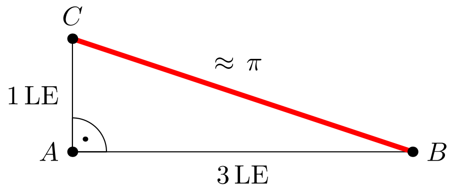


Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.

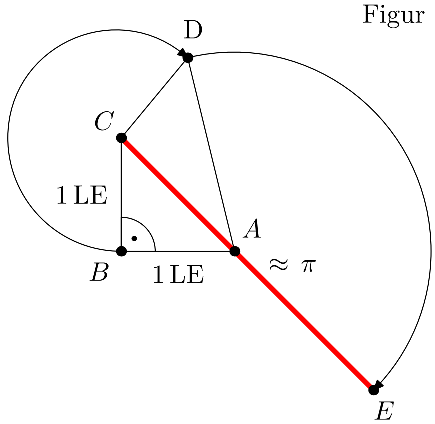
39. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC besitzt einen Flächeninhalt von $27\,\text{cm}^2$. Die Basis $[AB]$ ist $9\,\text{cm}$ lang.
    (a) Fertige eine Skizze an. Berechne die Länge der Höhe auf die Basis.
    (b) Der Umfang dieses Dreiecks ist $24\,\text{cm}$ lang. Berechne die Länge der Schenkel.
    (c) Welche Abmessungen könnte ein Rechteck haben, das denselben Flächeninhalt wie dieses Dreieck aufweist?

40.

Figur 1



Figur 2



Im Jahre 1882 bewies der deutsche Mathematiker Ferdinand LINDEMANN, dass die Konstruktion einer Strecke mit der Länge π LE nicht möglich ist, wenn man nur Zirkel und Lineal verwendet.
Die Konstruktion einer solchen Streckenlänge kann also mit Zirkel und Lineal nur näherungsweise erfolgen:
Die Streckenlängen $\overline{BC}$ in der Figur 1 und $\overline{CE}$ in der Figur 2 stellen zwei Ergebnisse von Näherungskonstruktionen einer Strecke mit der Maßzahl π LE dar, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit die Konstruktion rechter Winkel mit Zirkel und Lineal weggelassen worden ist.

(a)
- Berechne den Näherungswert für π in der Figur 1.
- Berechne die prozentuale Abweichung dieses Näherungswertes vom Taschenrechnerwert für π auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

(b)
- Berechne die Streckenlänge $\overline{CE}$ in der Figur 2.
- Vergleiche die beiden Näherungen für π in der Figur 1 und in der Figur 2.
- ARCHIMEDES benutzte für π den Wert $\frac{22}{7}$. Vergleiche diesen Wert mit π auf deinem Taschenrechner und mit dem Wert aus der Figur 2.

(c) Laut einem Tabellenwerk ist der Äquatorradius r der Erde $6378{,}388\,\text{km}$ lang. Beachte für die Lösung der folgenden Aufgaben, dass immer nur drei Nachkommastellen verwendet werden dürfen, weil der Erdradius auch auf drei Nachkommastellen angegeben ist (warum eigentlich?).

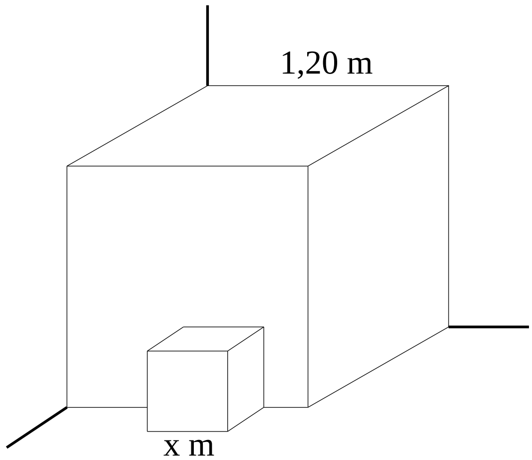
- Berechne die Äquatorlänge l_1 mit Hilfe des Näherungswertes $\overline{CE}$.
- Berechne die Äquatorlänge l_2 mit Hilfe von π auf deinem Taschenrechner.
- Wie groß ist die Differenz dieser beiden Ergebnisse?
- Für wie schwerwiegend hältst du diesen Unterschied? Begründe.

41. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = x^2 - 9$ und der Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Entscheide, ob folgende Aussagen über den Graphen von f jeweils richtig oder falsch sind.

	richtig	falsch
Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt. (0|9)	[ ]	[ ]
Der Punkt (4|6) liegt auf dem Graphen.	[ ]	[ ]
Für $x \in]-3;3[$ verläuft der Graph unterhalb der x-Achse.	[ ]	[ ]
Der Graph ist zur y-Achse symmetrisch.	[ ]	[ ]

Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2005

42.

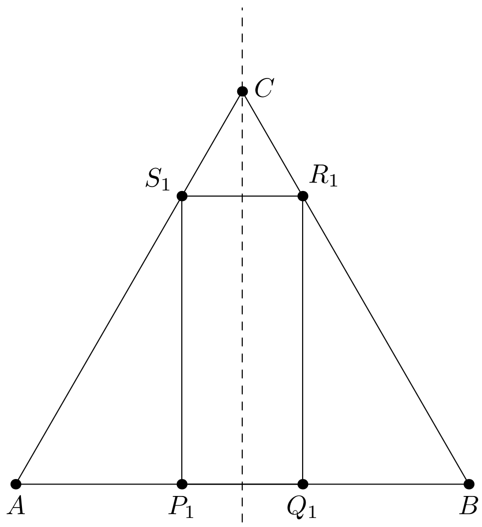


Familie Subku zieht um. In einer Zimmerecke ihrer neuen Wohnung steht ein würfelförmiger Karton mit einer Kantenlänge von 1, 20 m.
Die Möbelpacker haben ihm einen kleineren Karton mit der Kantenlänge x m entnommen und so hingestellt, dass sich eine Seitenfläche des großen und eine des kleinen Kartons berühren. Es stellt sich heraus, dass die einsehbare Oberfläche des großen und die einsehbare Oberfläche des kleinen Würfels übereinstimmen.

(a) Zeige: Es muss dann $x = 0,24 \cdot \sqrt{15}$ gelten.

(b) Wie viel Prozent des Volumens großen Würfels nimmt der kleine Würfel ein?

43.



In das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Setenlänge $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ werden Rechtecke $P_nQ_nR_nS_n$ mit $\overline{P_nQ_n} = x\,\text{cm}$ so einbeschrieben, wie es die Darstellung anhand des Beispielrechtecks $P_1Q_1R_1S_1$ für $x = 1,6$ zeigt.

(a) Für welche Belegungen von x gibt es solche Rechtecke $P_nQ_nR_nS_n$?

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Rechtecke $P_nQ_nR_nS_n$ gilt in Abhängigkeit von x:
$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-2x^2 + 12x\right)\,\text{cm}^2$$

(c) Zeige: $\dfrac{A(x)}{A_{\Delta\,ABC}} = (-0,08x^2 + 0,4x)\,\text{cm}^2$

(d) Unter allen Rechtecken $P_nQ_nR_nS_n$ gibt die Rechtecke $P_2Q_2R_2S_2$ und $P_3Q_3R_3S_3$, die 32% der Fläche des Dreiecks ABC einnehmen. Berechne die zugehörigen Belegungen von x.

(e) Unter allen Rechtecken $P_nQ_nR_nS_n$ gibt es das Quadrat $P_0Q_0R_0S_0$.
- Zeichne dieses Quadrat farbig ein.
- Untersuche, ob das Quadrat $P_0Q_0R_0S_0$ unter allen möglichen Rechtecken $P_nQ_nR_nS_n$ das flächengrößte ist.

44. In ein Rechteck $PQRS$ mit den Seitenlängen $\overline{PQ} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{QR} = 6\,\text{cm}$ werden Dreiecke PA_nB_n einbeschrieben. Dabei gilt:
- $A_n \in [QR]$ und $B_n \in [RS]$
- $\overline{Q_nA} = \overline{SB_n} = x\,\text{cm}$

(a) Zeichne das Rechteck $PQRS$ und für $x = 2$ das Dreieck PA_1B_1.

(b) Für welche Belegungen von x gibt es solche Dreiecke PA_nB_n?

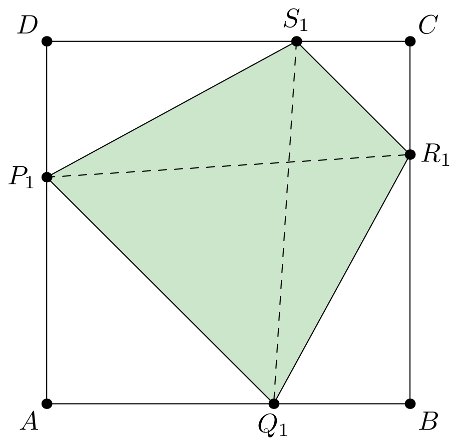
(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Dreiecke PA_nB_n gilt in Abhängigkeit von x:
$$A(x) = (24 - 0,5x^2)\,\text{cm}^2$$

(d) Unter allen Dreiecken PA_nB_n gibt es das Dreieck PA_2B_2, dessen Fläche $34,64\%$ des Rechtecks $PQRS$ bedeckt. Berechne x.

(e) Unter allen Dreiecken PA_nB_n gibt es das rechtwinklige Dreieck PA_3B_3 mit der Hypotenuse $[PA_3]$. Berechne x.

(f) Unter allen Dreiecken PA_nB_n gibt es das gleichschenklige Dreieck PA_4B_4 mit der Basis $[PB_4]$. Berechne x.

45.



In das Quadrat $ABCD$ werden Trapeze $P_nQ_nR_nS_n$ auf die oben dargestellte Weise einbeschrieben.
Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{CR_n} = \overline{CS_n} = x\,\text{cm}$ und $\overline{AP_n} = \overline{AQ_n} = 2x\,\text{cm}$.

(a) Zeichne das Quadrat $ABCD$ und für $x = 2,5$ das Trapez $P_1Q_1R_1S_1$.

(b) Für welche Belegungen von x existieren solche Trapeze $P_nQ_nR_nS_n$?

(c)
- Zeige durch Rechnung: Für $x = 2,\overline{6}$ liegt die Diagonale $[S_2Q_2]$ im Trapez $P_2Q_2R_2S_2$ parallel zur Quadratseite $[BC]$ bzw. $[AD]$.
- Begründe: Die Diagonalen des Trapezes $P_2Q_2R_2S_2$ stehen senkrecht aufeinander.

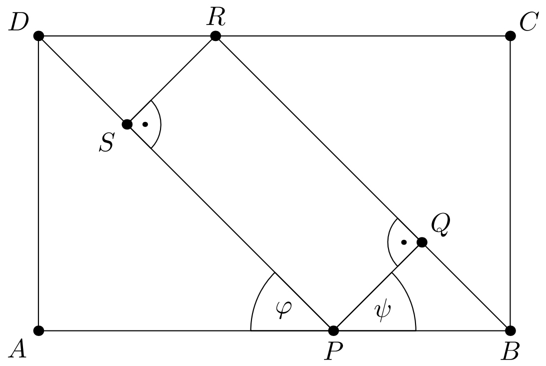
(d) Berechne den Flächeninhalt A der Trapeze $P_nQ_nR_nS_n$ in Abhängigkeit von x, indem du von der Quadratfläche bestimmte Teilflächen subtrahierst.
[Ergebnis: $A(x) = (-4,5x^2 + 24x)\,\text{cm}^2$]

(e)
- Begründe durch Rechnung: Unter allen Trapezen $P_nQ_nR_nS_n$ ist das Trapez $P_2Q_2R_2S_2$, das flächengrößte.

- Begründe: Das flächengößte Trapez $P_2Q_2R_2S_2$ nimmt 50% der Quadratfläche ein.

(f) Untersuche auf verschiedene Weise, ob es unter allen Trapezen $P_nQ_nR_nS_n$ eines gibt, dessen Flächeninhalt $41,07\,\text{cm}^2$ beträgt.

46.



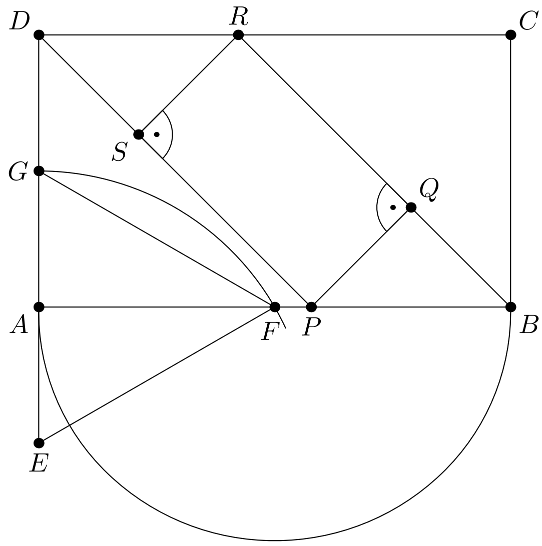
Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ und $\overline{BC} = \overline{AD} = b$. Für das einbeschriebene Rechteck $PQRS$ gilt: $\overline{AP} = \overline{RC} = b$.

(a) Zeichne die Figur für $a = 8\,\text{cm}$, und $b = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: $\varphi = \psi = 45°$.

(c) Berechne in deiner Zeichnung den Anteil der Fläche des Rechtecks $PQRS$ am Rechteck $ABCD$ in Prozent.

(d)



In der obigen Figur gilt:
– Der Punkt G halbiert die Seite $[AD]$.

– Das Dreieck EFG ist gleichseitig.
– Der Punkt E ist der Mittelpunkt des Kreisbogens durch den Punkt F.
– Der Punkt F ist der Mittelpunkt des Halbkreises mit dem Durchmesser $[AB]$.

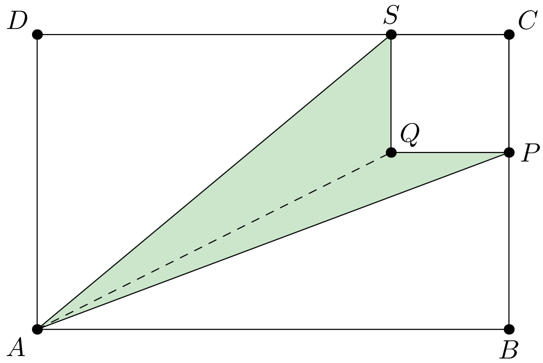
- Zeichne die Figur für $b = 6\,\text{cm}$.
- Berechne erneut den Flächenanteil des Rechtrecks $PQRS$ am Rechteck $ABCD$ in Prozent.

(e) Es gilt allgemein: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot(a-b)\cdot(3b-a)}{ab} = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(3\dfrac{b}{a} - 4 + \dfrac{a}{b}\right)$.

Setzen wir $\dfrac{b}{a} = k$, so ergibt sich weiter: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(3k - 4 + \dfrac{1}{k}\right) = T(k)$.

- Zeige, dass der Term $T^*(k) = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k}\right)^2 + 2 - \sqrt{3}$ und $T(k)$ äquivalent sind.
- Berechne diejenige Belegung von k, für die das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Rechtecke $PQRS$ und $ABCD$ maximal wird. Gib das maximale Flächenverhältnis in Prozent an.
- Begründe: Die Konstruktion in der Aufgabe (d) liefert dieses Maximum.

47.



Aus dem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ und $\overline{BC} = \overline{AD} = b$ werden Quadrate mit der Seitenlänge x herausgeschnitten. Dadurch entstehen Vierecke $AP_nQ_nS_n$.

(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ für $a = 8\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ und das Viereck $AP_1Q_1S_1$ für $x = 2\,\text{cm}$.

(b) Gib alle Belegungen von x an, für die es solche Vierecke $AP_nQ_nS_n$ gibt.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Vierecke $AP_nQ_nS_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

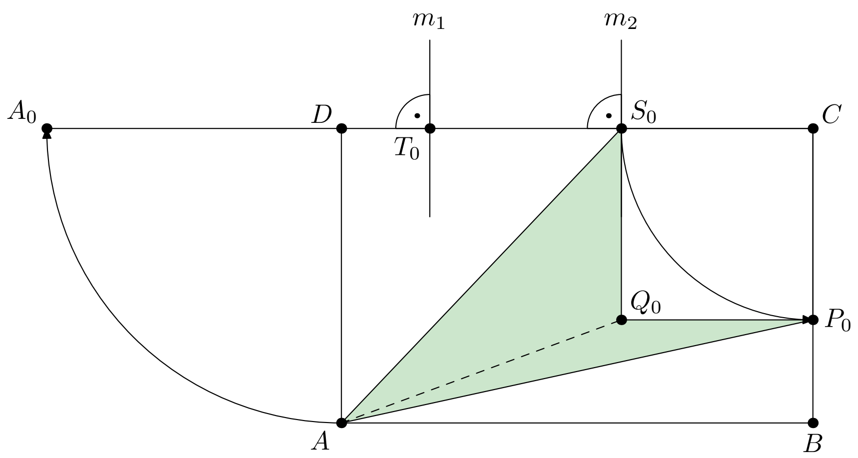
$$A(x) = -x^2 + \frac{1}{2}(a+b) \cdot x$$

Tipp: Deute die Strecken $[P_nQ_n]$ und $[Q_nS_n]$ jeweils als Grundlinien der Teildreiecke AP_nQ_n bzw. AQ_nS_n.

(d) Unter allen Vierecken $AP_nQ_nS_n$ gibt es das Viereck $AP_0Q_0S_0$, dessen Flächeninhalt maximal ist.

Zeige, dass $x = \frac{1}{4}(a+b)$ das Viereck $AP_0Q_0S_0$ liefert.

(e)

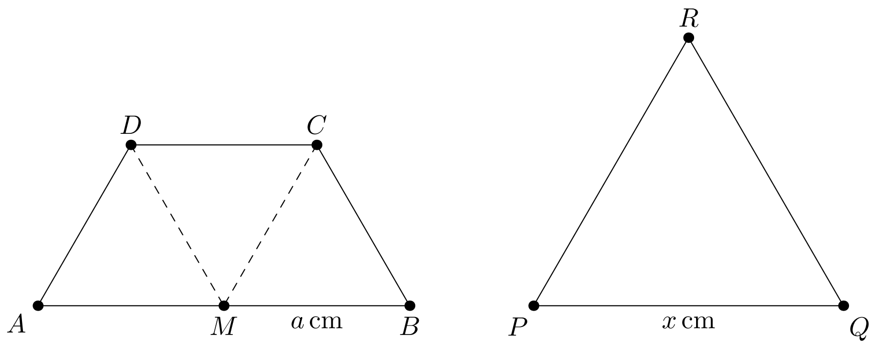


In der obigen Figur gilt:

- Der Punkt D ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von Punkt A zum Punkt A_0.
- Der Punkt C ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von Punkt P_0 zum Punkt S_0.
- Der Punkt T_0 ist der Mittelpunkt der Strecke $[A_0C]$.
- Der Punkt S_0 ist der Mittelpunkt der Strecke $[T_0C]$.

Begründe anhand dieser Konstruktion, dass das Viereck $AP_0Q_0S_0$ dasjenige mit dem maximalen Flächeninhalt ist.

48.



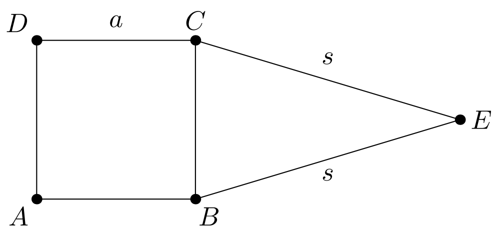
Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ ist aus drei kongruenten gleichseitigen Dreiecken mit der jeweiligen Seitenlänge von a cm zusammengefügt worden. Dieses Trapez und das gleichseitige Dreieck PQR mit der Seitenlänge x cm sollen den gleichen Umfang besitzen.

(a) Zeige, dass dann $x = \frac{5}{3}a$ gilt.

(b) Berechne das Verhältnis der Flächen der beiden Figuren.

(c) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ größer als der des Dreiecks PQR?

49.



Die Figur $ABECD$ setzt sich aus dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a und dem gleichschenkligen Dreieck BEC mit $\overline{BE} = \overline{CE} = s$ zusammen. Das Dreieck BEC und das Quadrat $ABCD$ haben den gleichen Umfang.

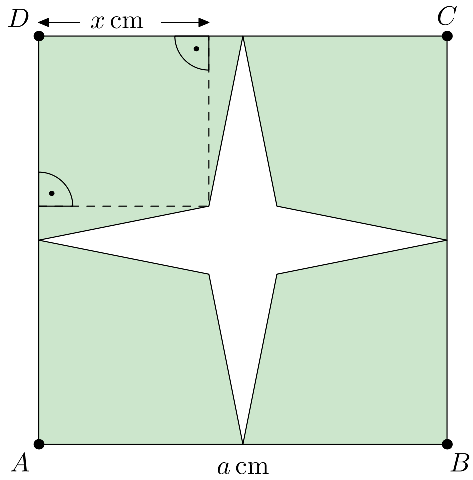
(a) Zeige: Es muss $s = 1,5a$ gelten.

(b) Zeichne die Fgur für $a = 3$ cm.

(c) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte des Dreiecks BEC und des Quadrates $ABCD$ in Prozent.

(d) Wie lang müsste die Schenkellänge s sein, damit die Flächeninhalte des Quadrates $ABCD$ und des Dreiecks BEC gleich groß werden?

50.



Schneidet man aus dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a cm die vier getönten kongruenten Vierecke weg, so bleibt der weiße Stern im Zentrum übrig.

(a) Zeichne die obige Figur für $a = 6$ und $x = 2,5$.

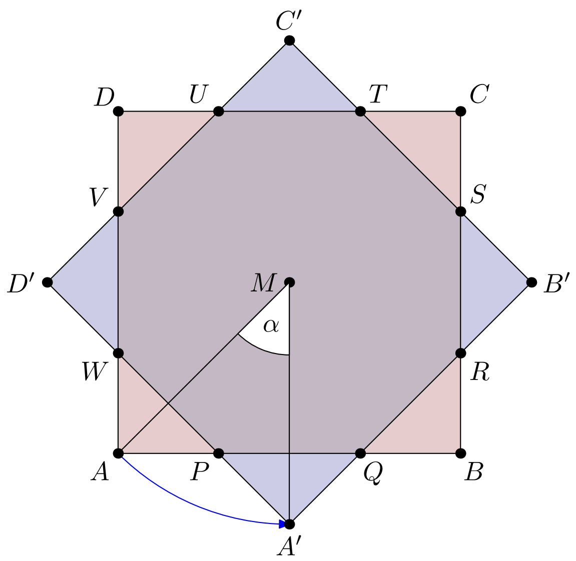
(b) Begründe: Jedes dieser vier getönten kongruenten Vierecke ist ein Drachenviereck.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A des weißen Sterns gilt in Abhängigkeit von x:
$$A(x) = (36 - 12x)\,\text{cm}^2$$
.

(d)
- Berechne $A(3)$ und deute dein Ergebnis mit Hilfe der Zeichnung.
- Berechne $A(1,5)$ und deute dein Ergebnis mit Hilfe der Zeichnung.

(e) Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Sterns $3,6\,\text{cm}^2$ beträgt.

51.



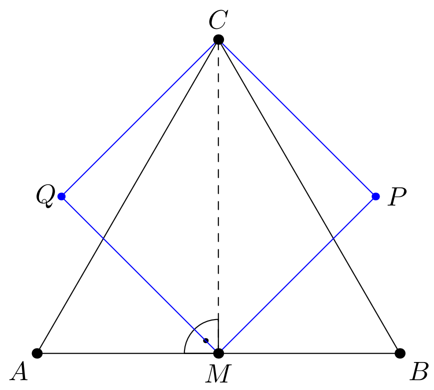
Das Quadrat $A'B'C'D'$ ist dadurch entstanden, dass das Quadrat $ABCD$ um seinen Mittelpunkt M um einen Winkel mit dem Maß α so gedreht worden ist, dass bestimmte Symmetrieachsen vom Ur- und vom Bildquadrat zur Deckung kommen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$.

(b) Wie groß ist α? Begründe deine Antwort.

(c)
- Ist das Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig?
- Berechne den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUVW$.

52.



Das Dreieck ABC ist gleichseitig. Das Viereck $MPCQ$ ist ein Quadrat.

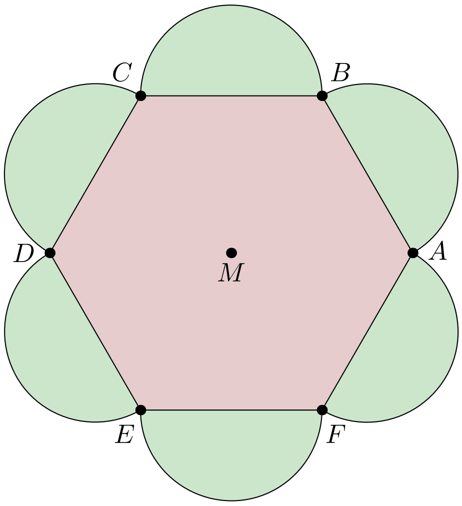
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC größer als der des Quadrates $MPCQ$?

(c) Im Inneren des Dreiecks ABC liegt ein Viereck.
Um welches besondere Viereck handelt es sich? Begründe deine Antwort.

(d) Zeige: Für den Umfang u des gezeichneten Quadrates $MPCQ$ gilt:
$u = 6\sqrt{6}\,\text{cm}$.

53.

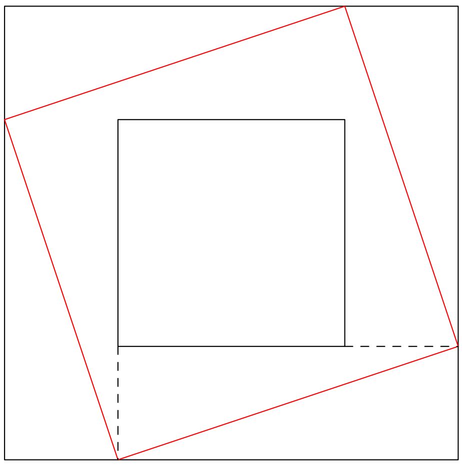


Das Sechseck $ABCDEF$ mit dem Mittelpunkt M ist regelmäßig.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AD} = 8\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A der Figur. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

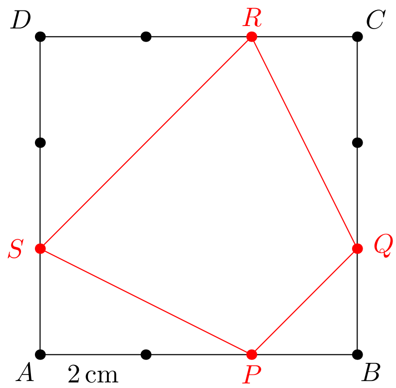
54.



Das große Quadrat hat einen Umfang von $81,6\,\text{cm}$ und das kleine Quadrat hat einen Umfang von $34\,\text{cm}$. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Berechne den Flächeninhalt des mittleren Quadrates auf verschiedene Weise:

- Mit Hilfe der Berechnung der Seitenlänge des mittleren Quadrates
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

55.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Jede Quadratseite ist in drei Abschnitte eingeteilt, die jeweils 2cm lang sind. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

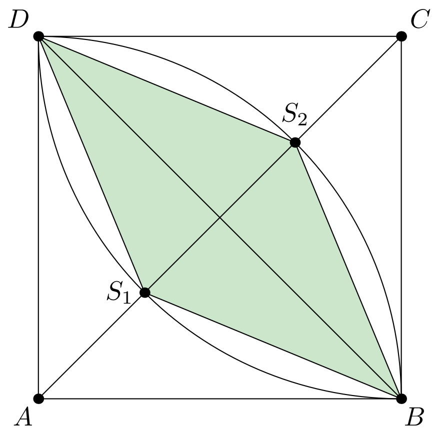
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ besitzt zwei parallele Seiten.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ auf zwei verschiedene Arten:

- Mit Hilfe der Berechnung der zugehörigen Formelgleichung
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

56.



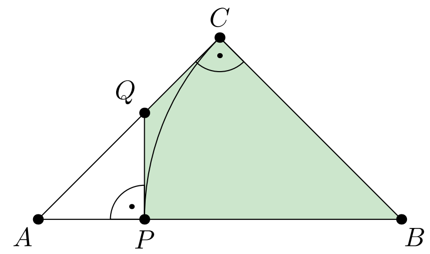
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte A und C .

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Vierecks S_1BS_2D.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck S_1BS_2D ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

57.



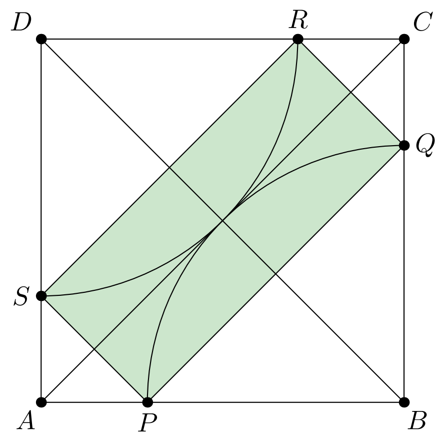
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt B .

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke ABC und APQ sind zueinander ähnlich.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC nimmt das Dreieck APQ ein? Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

58.



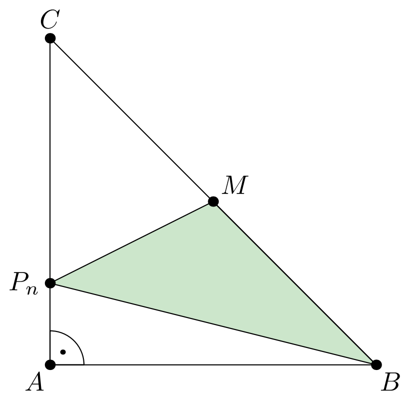
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte B und D .

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Rechteck.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck $PQRS$ ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

59.



Der Punkt M halbiert die Hypotenuse $[BC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC .
Punkte P_n mit $\overline{AP_n} = x\,\text{cm}$ wandern auf der Kathete $[AC]$, so dass laufend Dreiecke BMP_n erzeugt werden.

(a) Zeichne das Dreieck ABC für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ zusammen mit dem Dreieck BMP_1 für $x = 2$.

(b) Für welche Belegungen von x gibt es solche Dreiecke BMP_n ?

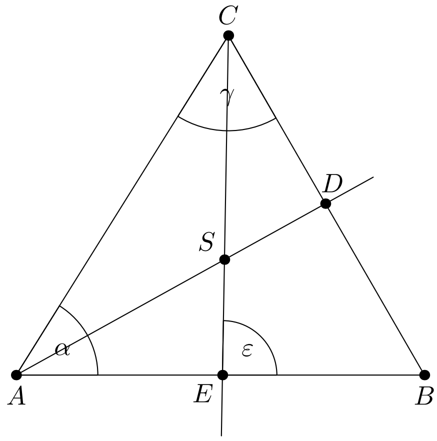
(c) Berechne den Flächeninhalt A der Dreiecke BMP_n in Abhängigkeit von x .
Ergebnis: $A(x) = (9 - 1,5x)\,\text{cm}^2$
Tipp: Fälle das Lot von M auf $[AC]$.

(d) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das Dreieck BMP_2, dessen Flächeninhalt $6,6\,\text{cm}^2$ beträgt. Berechne die zugehörige Belegung von x.

(e) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das gleichschenklige Dreieck BMP_3 mit der Basis $[MP_3]$. Berechne die zugehörige Belegung von x. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

(f) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das Dreieck BMP_3, dessen Flächeninhalt 20% der Fläche des Dreiecks ABC einnimmt. Berechne die zugehörige Belegung von x .

60.

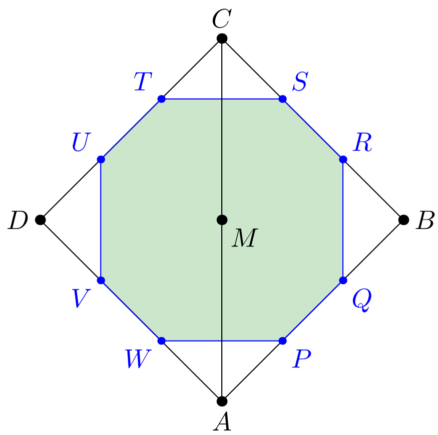


In der Figur gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 58°$ und $\gamma = 62°$.
Die Halbgeraden $[CE$ und $[AD$ halbieren α und γ .

(a) Zeichne die Figur.

(b)
- Begründe: $\varepsilon = 89°$.
- Begründe: Das Viereck $EBDF$ ist kein achsensymmetrischer Drachen.
- Untersuche, ob das Viereck $EBDF$ ein Sehnenviereck ist.

61.



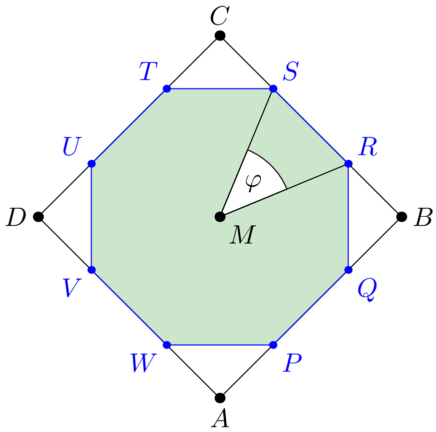
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. In dieses Quadrat ist das Achteck $PQRSTUV$ einbeschrieben worden.
Die Punktepaare (P, Q), (R, S), (T, U) und (V, W) teilen jeweils die Länge der Seite, auf der sie liegen, in drei gleiche Teile.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Untersuche rechnerisch, ob das einbeschriebene Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig ist.

(c) Berechne den Anteil der Fläche, den das Achteck am der Fläche des Quadrates $ABCD$ einnimmt, in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

62.



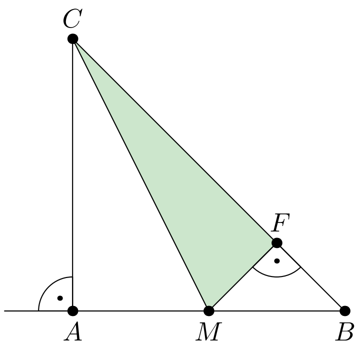
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. In dieses Quadrat ist das regelmäßige Achteck $PQRSTUV$ einbeschrieben worden.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Umfang u_8 dieses regelmäßigen Achtecks $PQRSTUV$. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

(c) Berechne den Anteil der Fläche, den das Achteck am der Fläche des Quadrates $ABCD$ einnimmt, in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

63.



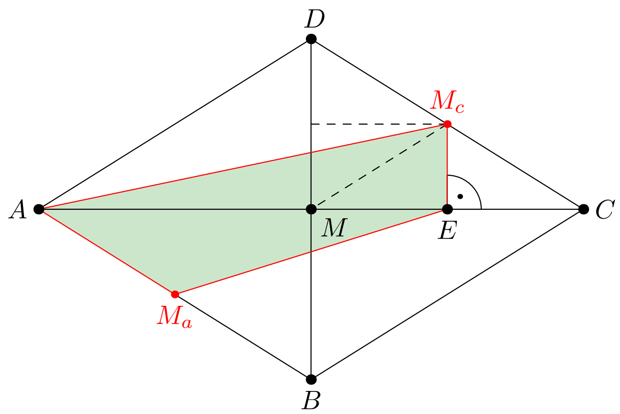
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Der Punkt M halbiert die Kathete $[AB]$.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\mathrm{cm}$.

(b) Berechne den Flächenanteil des getönten Dreiecks MFC am Dreieck ABC in Prozent.
Tipp: Zeichne geeignete Hilfslinien ein, die parallel zu den Katheten $[AB]$ bzw. $[AC]$ verlaufen.

(c) Untersuche, ob der Winkel ACB von CM halbiert wird.

64.

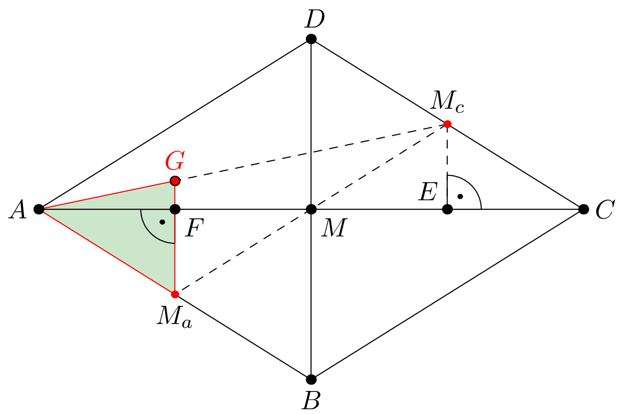


Das Viereck $ABCD$ ist eine Raute. Die Punkte M_a und M_c sind Seitenmittelpunkte.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 8\,\mathrm{cm}$ und $\overline{BD} = 5\,\mathrm{cm}$.

(b) Berechne den Flächenanteil des getönten Vierecks AM_aEM_c am Viereck $ABCD$ in Prozent.

65.



Das Viereck $ABCD$ ist eine Raute. Die Punkte M_a und M_c sind Seitenmittelpunkte.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BD} = 5\,\text{cm}$.

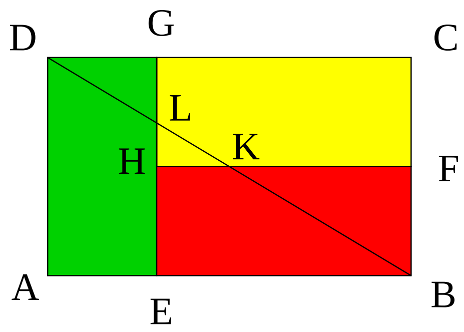
(b) Berechne den Flächenanteil des getönten Dreiecks AM_aG am Viereck $ABCD$ in Prozent.

6. Abbildung durch zentrische Streckung

1. Untersuche, ob die Punkte $P(0|0)$, $Q(6|2,5)$ und $R(11|4,5)$ auf einer Geraden liegen.

2. Gegeben sind die Punkte $A(3|-2)$ und $B(1|2)$.
   Um wie viel Prozent muss man die Strecke $[AB]$ mindestens verlängern, bis man auf die y-Achse trifft? Löse die Aufgabe auf verschiedene Weise.

3. Verlängere die Strecke $[DE]$ mit $D(-4|2)$ und $E(2|3)$ um 10% ihrer Länge über den Punkt E hinaus bis zum Punkt E^*.
   Berechne die Koordinaten des Punktes E^*.

4. 

   Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.
   Zusätzlich ist noch die Diagonale $[DB]$ eingezeichnet. Alle drei Rechtecke im Inneren haben den gleichen Flächeninhalt.

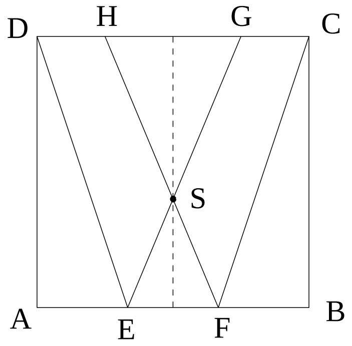
   (a) Gib alle zueinander ähnlichen Dreiecke an.

   (b) Berechne für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ die Länge der Strecke $[AD]$. Zeichne dann die zugehörige Figur.

   [Teilergebnis: $\overline{AD} = 4\,\text{cm}$]

   (c) Berechne den Flächenanteil des Dreiecks HKL am Rechteck $ABCD$.

5.



In der obigen Figur ist $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm. Es gilt: $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$.
Die Punkte G und H sind auf $[CD]$ beweglich und es gilt $\overline{DH} = \overline{GC} = x$ cm.

(a) Zeichne die Figur für $x = 1,2$.

(b) Der Abstand des Punktes S von der Seite $[CD]$ sei y cm.
Zeige auf verschiedene Weise, dass für y gilt:

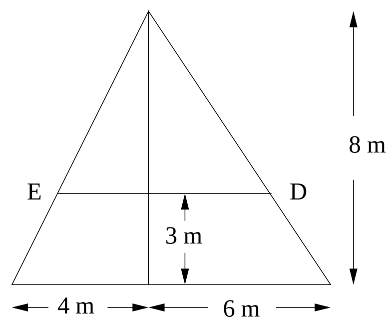
$$y = \frac{6 \cdot (3 - x)}{(4 - x)}.$$

Hinweis für eine Möglichkeit: Zeichne vom Punkt G ausgehend eine Hilfslinie ein und betrachte ähnliche Dreiecke.

(c) Berechne x auf verschiedene Weise so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks HSG doppelt so groß wie der des Dreiecks EFS wird.

6. Am 10. August wirft der Olympiaturm in München einen 406 m langen Schatten. Gleichzeitig wirft ein 2 m hoher Stab einen 2,8 m langen Schatten. Bestimme die Höhe des Olympiaturmes.

7. Gegeben ist die Schnittzeichnung eines Dachstuhles. In 3 m Höhe soll ein Balken von E nach D eingesetzt werden. Wie lang ist der Balken?



8. Alkohol und Autofahren passen nicht zusammen. Das leuchtet ein. Aber die wenigsten wissen, wie langsam der Alkohol im Körper abgebaut wird. Der durchschnittliche Abbauwert beträgt lediglich 0,15 Promille stündlich. Weder Schlaf noch Mocca können dies beschleunigen. Wer z.B. nach einer Feier um Mitternacht einen Alkoholspiegel von 1,5 Promille erreicht hat, kann sich leicht ausrechnen, wann er/sie wieder restlos nüchtern ist. Denn bereits bei 0,3 Promille kann man sich durch auffälliges Fahrverhalten strafbar machen. Ab 0,5 Promille macht man sich strafbar, auch wenn nichts passiert ist, und ab 1,1 Promille ist man absolut fahruntauglich; es liegt eine Straftat vor.

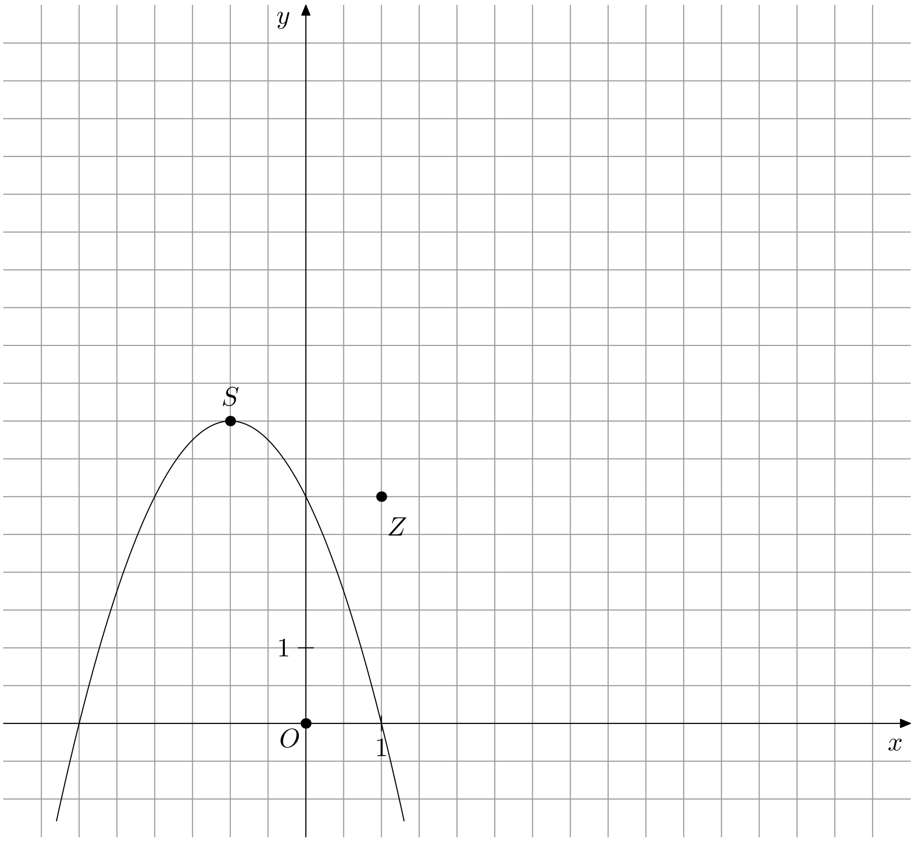
   (a) Zeichne den zugehörigen Graphen. (Hinweis: Tragt zunächst auf der x-Achse die Uhrzeit ab: der Nullpunkt entspricht 24.00 Uhr - jede weitere Stunde entspricht 3 Kästchen. Tragt auf der y-Achse den Promillegehalt ab: $0,1$ Promille entspricht dabei 2 Kästchen.)

   (b) Um wie viel Uhr sind $1,1$ Promille, $0,5$ Promile und $0,3$ Promille erreicht?

   (c) Welche Promillezahl hat der Fahrer/die Fahrerin morgens um 7.40 Uhr?

   (d) Wenn du einen Fahrzeugführer vor den Gefahren des Autofahrens unter Alkoholeinfluss warnen möchtest, würdest du ihm den Text oder die Graphik in die Hand geben? (Begründe deine Antwort!)

9. Die Parabel p mit Gleichung $p : y = -x^2 - 2x + 3$ wird einer zentrischen Streckung am Zentrum $Z(1 \mid 3)$ mit dem Streckungsfaktor $k = -1,5$ unterworfen, so dass eine Bildparabel p' entsteht. Ein Ausschnitt der Parabel p ist mit ihrem Scheitel S und dem Zentrum Z im Koordinatensystem dargestellt.
   Auf der Parabel p wandern Punkte $C_n(x \mid -x^2 - 2x + 3)$, die zusammen mit den Punkten $A(-3 \mid 0)$ und $B(0 \mid -1)$ Dreiecke $A_nB_nC_n$ erzeugen.



(a)
- Zeichne das Bild p' der Parabel p mit dem Scheitel S' ein.
- Zeichne für $x = -2,5$ das Dreieck ABC_1 ein.

(b) Berechne die Funktionsgleichung der Bildparabel p'.

[Ergebnis: $y = \frac{2}{3} \cdot (x-4)^2 + 1,5$]

(c) Die Gerade g mit der Gleichung $y = -2x + 3$ ist eine Tangente an die Parabel p.
Diese Tangente wird am Punkt Z auf die gleiche Weise zentrisch gestreckt, wie vorher die Parabel p. Dadurch entsteht die Bildgerade g'.
- Zeichne die Geraden g und g' ein.
- Weise nach, dass die Gerade g' eine Tangente an die Parabel p' ist.

(d) Das Dreieck ABC_1 hat einen Flächeninhalt von $2,875\,\text{cm}^2$. Mit der gleichen zentrischen Streckung wird dieses Dreieck ABC_1 auf das Dreieck $A'B'C_1{}'$ abgebildet.
- Zeichne das Dreieck $A'B'C_1{}'$ ein.
- Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C_1{}'$.

(e) Alle möglichen Dreiecke ABC_n werden durch die vorliegende zentrische Streckung auf die Dreiecke $A'B'C_n{}'$ abgebildet. Der Flächeninhalt A'_Δ der Dreiecke $A'B'C_n{}'$ lässt sich in Abhängigkeit vom Abszissenwert x der Punkte C_n auf die folgende

Weise darstellen:

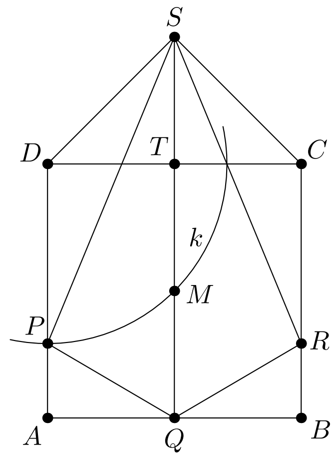
$$A'_{\Delta}(x) = (-3,375x^2 - 5,625x + 13,5)\,\mathrm{cm}^2$$

Zeige: Für den Flächeninhalt $A_{\Delta}(x)$ der Dreiecke ABC_n gilt in Abhängigkeit von x:

$$A_{\Delta}(x) = (-1,5x^2 - 2,5x + 6)\,\mathrm{cm}^2$$

(f) Begründe: Unter allen Bilddreiecken $A'B'C_n{}'$ ist das Dreieck $A'B'S'$ nicht das flächengrößte.

10. An das Quadrat $ABCD$ ist das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck DCS angefügt worden.
Der Punkt D ist der Mittelpunkt des Kreisbogens k durch den Quadratmittelpunkt M. Dadurch entsteht der achsensymmetrische Drachen $PQRS$.



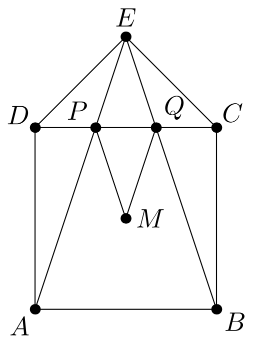
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\mathrm{cm}$.

(b) Für die Länge der Seite $[AB]$ soll jetzt gelten: $\overline{AB} = 2a$.
Berechne damit den Anteil des Flächeninhalts der Drachenfigur $PQRS$ an der Gesamtfläche der Figur $ABCSD$ als Bruch und in Prozent.

(c) Welchen Flächeninhalt hätte das Quadrat $ABCD$, wenn die Dreiecksseite $[DS]$ $14,5\,\mathrm{cm}$ lang wäre?

(d) Es sieht so aus, als ob der Kreisbogen k durch den Schnittpunkt der Strecke $[SR]$ mit der Strecke $[TC]$ verlaufen würde. Trügt der Anschein? Rechne wieder mit $\overline{AB} = 2a$.

11. An das Quadrat $ABCD$ mit dem Mittelpunkt M ist das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck DCE angefügt worden:



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Wie viel Prozent der Figur wird vom Dreieck ABE eingenommen?

(c) Wie viel Prozent der Fläche des Dreiecks ABE wird vom Viereck $MQEP$ eingenommen?

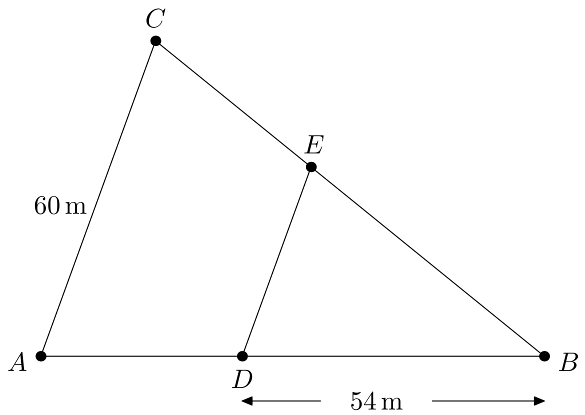
12. Die Parabel p mit der Gleichung $y = 2,5x^2$ wird durch zentrische Streckung am Zentrum Z mit dem Streckungsfaktor k auf die Parabel p' mit der Gleichung $y = -0,5x^2$ abgebildet.

(a) Begründe: Z kann nur im Koordinatenursprung liegen.

(b) Berechne k.

13. Die Maße zweier Innenwinkel in einem Dreieck betragen $73,47°$ und $41,26°$.
Kann dieses Dreieck zu einem anderen Dreieck ähnlich sein, in dem ein Innenwinkel das Maß $65,27°$ besitzt? Begründe deine Antwort.

14.

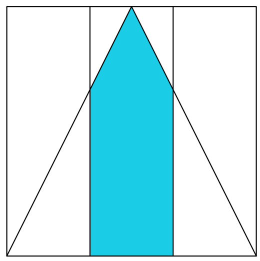


Frau Kermel vererbt ihr Grundstück ABC, das durch den Zaun $[DE]$ unterteilt ist, an ihre beiden Töchter Leni und Sarah. Dieser Zaun $[DE]$ ist genauso lang wie der Abstand der Punkte A und D.
Sarah bekommt den trapezförmigen Teil $ADEC$.

(a) Berechne die Länge des Zaunes.

(b) Wie viel Prozent der gesamten Grundstücksfläche nimmt Sarahs Anteil ein?

15.

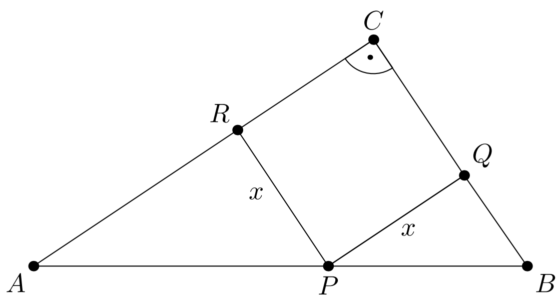


Das ist ein Bild des Logos der Baufirma „Fix & Fertig“. Es besteht aus einem Quadrat, das aus drei kongruenten Streifen zusammengesetzt ist. Das einbeschriebene Dreieck ist gleichschenklig.

(a) Zeichne die Figur, so dass die Quadratseite $6,3\,\text{cm}$ lang ist.

(b) Berechne den Anteil der eingefärbten Fläche am Quadrat als Bruch.

16.



In das rechtwinklige Dreieck ABC ist das Quadrat $PQCR$ mit der Seitenlänge $x\,\text{cm}$ einbeschrieben.

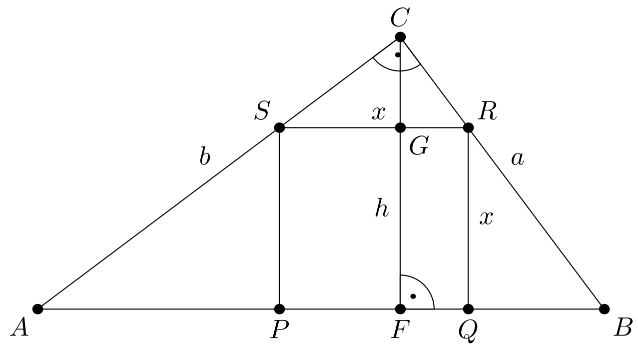
(a) Zeichne die Figur für $\overline{BC} = a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = b = 9\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke PBQ und ABC sind zueinander ähnlich.

(c) Zeige: $x = 3,6$.

(d) Berechne den prozentualen Anteil der Fläche des Quadrates $PQCS$ an der Fläche des Dreiecks ABC.

17.



In das rechtwinklige Dreieck ABC ist das Quadrat $PQRS$ mit der Seitenlänge x cm einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{BC} = a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = b = 8\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke FBC und ABC sind zueinander ähnlich.

(c) Zeige: Für die Dreieckshöhe h gilt:

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ \text{cm}.$$

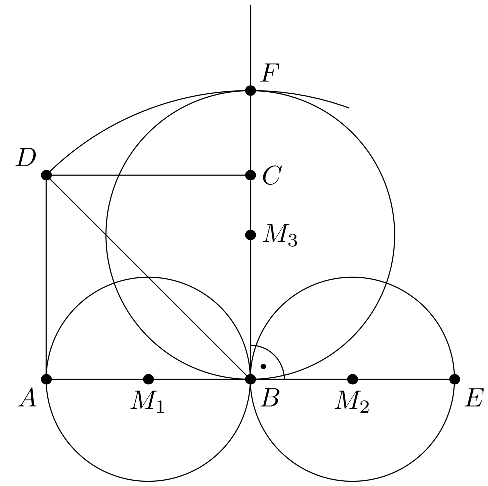
(d) Begründe: Die Dreiecke SRC und ABC sind zueinander ähnlich.

(e) Zeige:

$$x = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + ab + b^2}.$$

(f)
- Berechne mit Hilfe des Ergebnisses der Aufgabe (e) den prozentualen Anteil der Fläche des Quadrates $PQRS$ an der Fläche des Dreiecks ABC für den Fall, dass das Dreieck ABC gleichschenklig-rechtwinklig ist.
- Begründe dein Ergebnis elementargeometrisch mit Hilfe einer entsprechenden Zeichnung.

18.

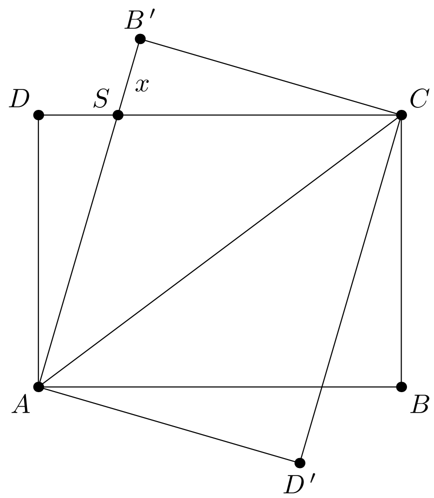


Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Punkt B ist der Mittelpunkt des Kreisbogens, der durch die Punkte D und F verläuft. M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der beiden kleinen Kreise, während der große Kreis den Mittelpunkt M_3 besitzt.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AE} = 6\,\text{cm}$.

(b) Vergleiche Die Flächeninhalte A_1 und A_2 der beiden kleinen Kreise mit dem Flächeninhalt A_3 des großen Kreises.

19.



Das Rechteck $ABCD$ wurde an seiner Diagonalen $[AC]$ gespiegelt. Dadurch ist das Viereck $AD'CB'$ entstanden. Es gilt: $x = \overline{SB'}$.

(a) Zeichne die Figur für $a = \overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $b = \overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b)
- Berechne die Seitelänge $\overline{SC}$ in Abhängigkeit von x auf verschiedene Weise.
- Zeige dann:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A des Dreiecks ACS gilt:

$$A_{\Delta ACS} = \frac{b}{4a} \cdot (a^2 + b^2).$$

(d)
- Zeichne die Strecke $[B'D]$ ein.
- Begründe: Das Viereck $ACB'D$ ist ein Trapez.

(e) Zeige: Für den Flächeninhalt A des Dreiecks DSB' gilt:

$$A_{\Delta DSB'} = \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}.$$

(f) Zeige: Für den Flächeninhalt A des Trapezes $ACB'D$ gilt:

$$A_{ACB'D} = ab \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

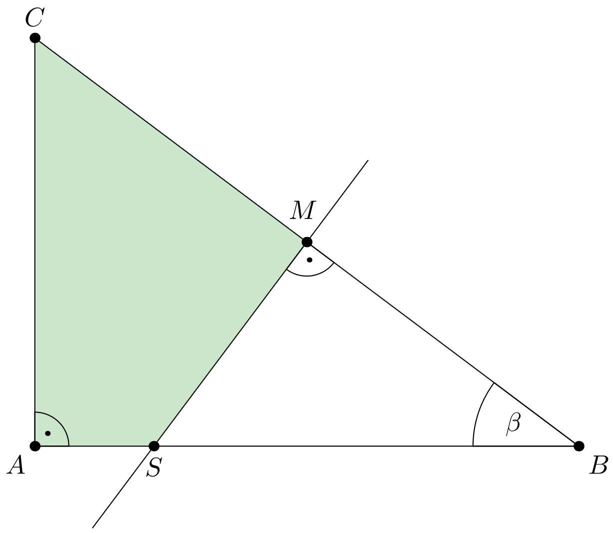
Tipps:
- Das Trapez wird durch seine beiden Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt.
- Zwei Dreiecke davon sind kongruent, die beiden anderen sind zueinander ähnlich.
- Den Flächeninhalt des Trapezes $ACB'D$ erhältst du aus der Summe der Flächeninhalte der vier Teildreiecke.

(g) In welchem Verhältnis müssen die Seitenlängen a und b des Rechtecks $ABCD$ stehen, damit der Flächeninhalt des Trapezes $ACB'D$ um 10% kleiner als der des Rechtecks $ABCD$ wird?

(h) Untersuche, ob der Flächeninhalt des Trapezes $ACB'D$ genau so groß wie der des Rechtecks $ABCD$ werden kann.

(i) Untersuche rein elementargeometrisch anhand des Winkels BAC mit dem Maß ε, ob das Trapez $ACB'D$ auch zum Rechteck werden kann.

20.



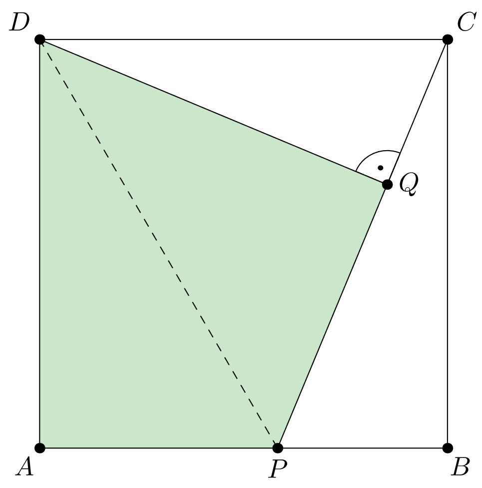
Der Hypotenusenmittelpunkt des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist der Punkt M. In der Figur gilt weiter: $\overline{AB} = 7,2\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 5,4\,\text{cm}$.

(a) Begründe: Die beiden Dreiecke SBM und ABC sind zueinander ähnlich.

(b) Zeige: $\overline{MS} = 3,375\,\text{cm}$.

(c) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $ASMC$ am Dreieck ABC in Prozent.

21.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a.

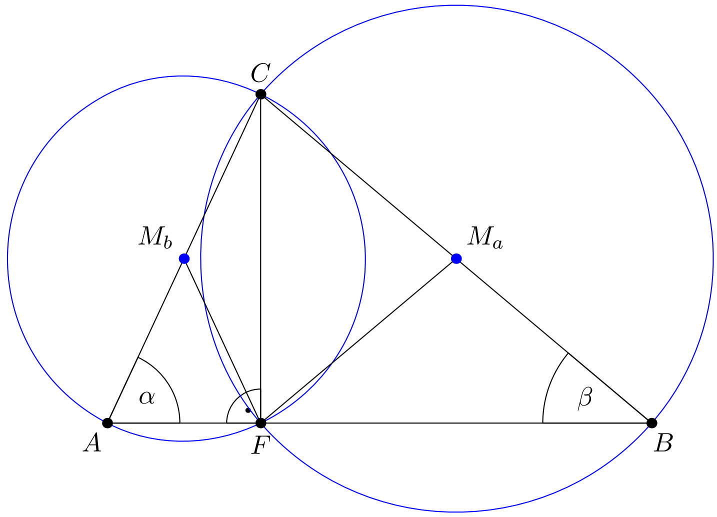
(a) Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{PB} = 2,5\,\text{cm}$.

(b) Begründe ohne Messung: Die Diagonale $[DP]$ ist keine Symmetrieachse im Viereck $APQD$.

(c) Begründe: Die beiden Dreiecke PBC und DQC sind zueinander ähnlich.

(d) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $APQD$ an der Fläche des Quadrates $ABCD$ in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

22.



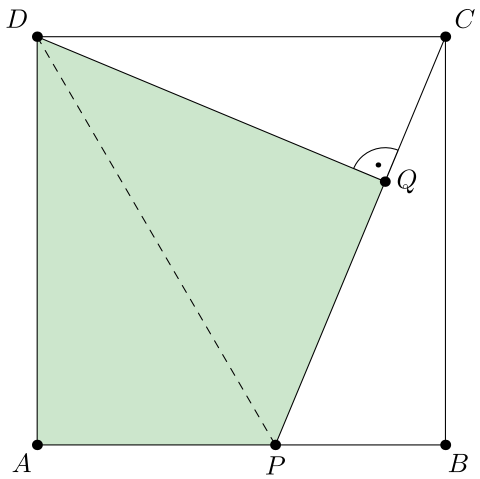
Im Dreieck ABC mit der Höhe $[CF]$ sind die Punkte M_a und M_b die Mittelpunkte der Umkreise der Teildreiecke FBC bzw. AFC.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe auf verschiedene Weise: Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Begründe: Zusammen bedecken die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a die Hälfte des Dreiecks ABC.

23.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a.

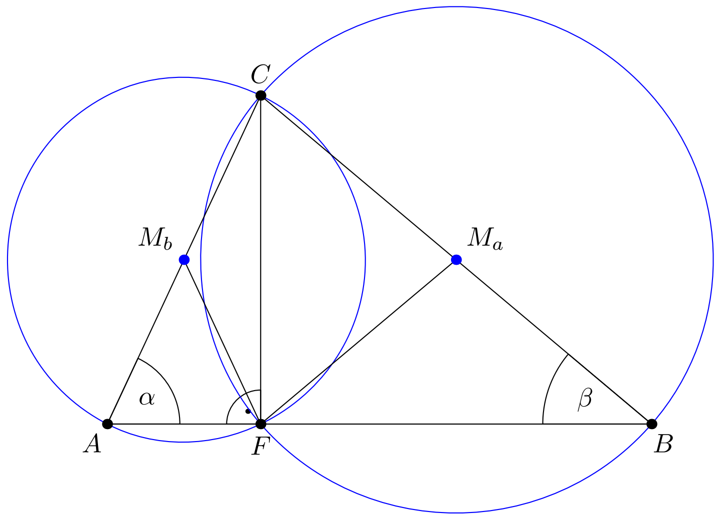
(a) Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{PB} = 2,5\,\text{cm}$.

(b) Begründe ohne Messung: Die Diagonale $[DP]$ ist keine Symmetrieachse im Viereck $APQD$.

(c) Begründe: Die beiden Dreiecke PBC und DQC sind zueinander ähnlich.

(d) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $APQD$ an der Fläche des Quadrates $ABCD$ in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

24.



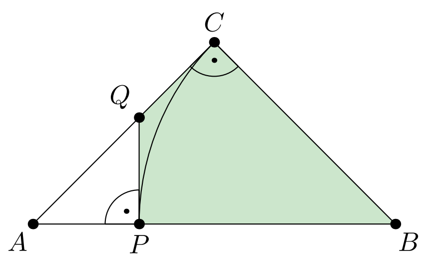
Im Dreieck ABC mit der Höhe $[CF]$ sind die Punkte M_a und M_b die Mittelpunkte der Umkreise der Teildreiecke FBC bzw. AFC.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe auf verschiedene Weise: Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Begründe: Zusammen bedecken die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a die Hälfte des Dreiecks ABC.

25.



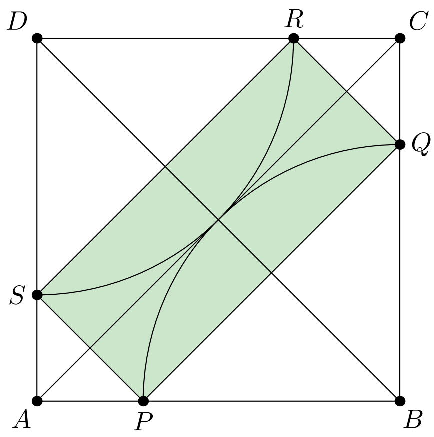
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt B.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke ABC und APQ sind zueinander ähnlich.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC nimmt das Dreieck APQ ein? Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

26.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte B und D.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Rechteck.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck $PQRS$ ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

1. Es gibt Dreiecke mit einem Flächeninhalt von $24\,\text{cm}^2$. Zeichne zwei solche Dreiecke, die diesen Flächeninhalt aufweisen, die aber nicht kongruent zueinander sind.

2. Die eine Seite eines Rechtecks $ABCD$ ist halb so lang wie die andere Rechtecksseite. Der Umfang des Rechtecks ist $54\,\text{cm}$ lang.
   (a) Berechne die beiden Seitenlängen des Rechtecks.
   (b) Berechne die Länge einer Diagonalen.

3. In einem Rechteck $EFGH$ sind die beiden Diagonalen zusammen $22\,\text{cm}$ lang. Eine Seite dieses Rechtecks ist $5,5\,\text{cm}$ lang.
   (a) Zeichne dieses Rechteck.
   (b) Bestimme sämtliche Winkelmaße am Diagonalenschnittpunkt.
   (c) Berechne jeweils den Flächeninhalt sämtlicher Teildreiecke in diesem Rechteck. Es gibt mehrere Möglichkeiten.
   (d) Berechne den Abstand eines Eckpunktes zur entsprechenden Diagonalen.

4. Untersuche, ob die Punkte $P(0|0)$, $Q(6|2,5)$ und $R(11|4,5)$ auf einer Geraden liegen.

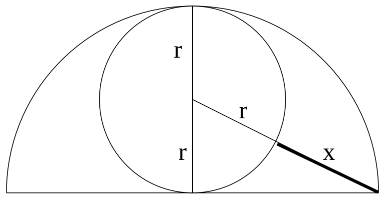
5. Gegeben sind die Punkte $A(3|-2)$ und $B(1|2)$.
   Um wie viel Prozent muss man die Strecke $[AB]$ mindestens verlängern, bis man auf die y-Achse trifft? Löse die Aufgabe auf verschiedene Weise.

6. Verlängere die Strecke $[DE]$ mit $D(-4|2)$ und $E(2|3)$ um 10% ihrer Länge über den Punkt E hinaus bis zum Punkt E^*.
   Berechne die Koordinaten des Punktes E^*.

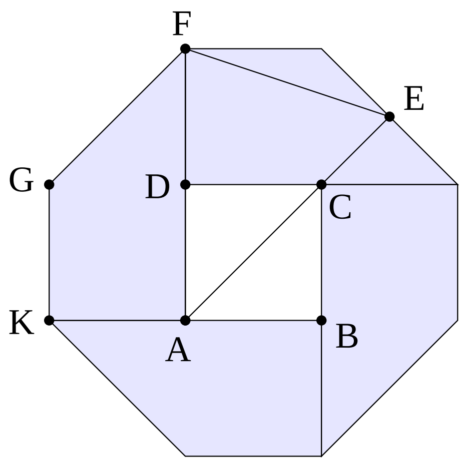
7. Ein Quadrat besitzt einen Flächeninhalt von $39,69\,\mathrm{cm}^2$.
   Berechne die Länge einer Diagonalen.

8. Die Diagonale eines Quadrates ist 7 cm. lang.
   (a) Zeichne dieses Quadrat.
   (b) Berechne den Umfang dieses Quadrates.

9. Berechne auf Grund der Skizze die Länge der Strecke x in Abhängigkeit vom Radius r.



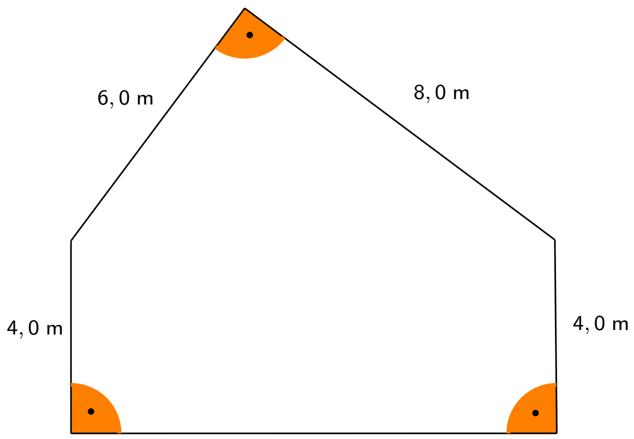
10. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das weiße Viereck ist ein Quadrat. Es gilt $\overline{AB} = \overline{DF} = a\,\mathrm{cm}$. Zusätzlich ist hier das Dreieck AEF eigezeichnet.



   (a) Zeichne die Figur für $\overline{FG} = 3,2\,\mathrm{cm}$ so, dass die Strecke $[KB]$ waagrecht liegt.
   (b) Berechne in deiner Zeichnung den Flächeninhalt Quadrates $ABCD$.
   (c) • Untersuche ohne Verwendung des Taschenrechners, ob das Dreieck AEF gleichschenklig ist. Gilt dein Ergebnis auch dann noch, wenn die Figur verkleinert oder vergrößert wird? Begründe deine Ansicht.

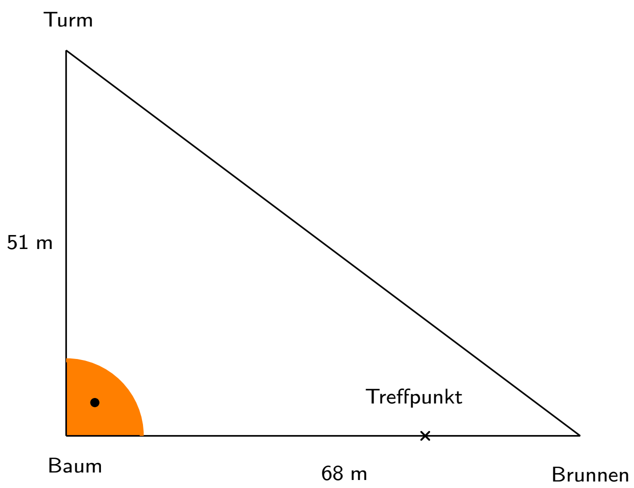
- Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks auf drei verschiedene Arten in Abhängigkeit von a.

11.



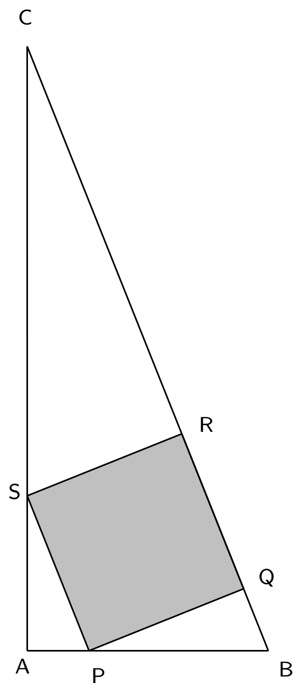
Berechne den Umfang des Fünfecks.

12.



Der Brunnen ist 68 m und der Turm 51 m vom Baum entfernt. Beim Turm laufen Sabrina und Daniel gleichzeitig mit derselben Geschwindigkeit los. Daniel läuft zuerst zum Baum und dann Richtung Brunnen. Sabrina geht zuerst zum Brunnen und dann Richtung Baum. Berechne den Abstand vom Treffpunkt zum Brunnen.

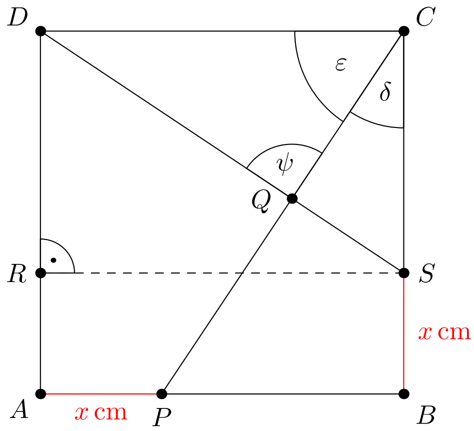
13.



Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC und das einbeschriebene Quadrat $PQRS$. Es gilt: $\overline{AP} = 2,0\,\text{cm}$ und $\overline{AS} = 5,0\,\text{cm}$.
Berechne Länge der Hypotenuse $[BC]$.

14. Eine kleine Pizza hat einen Durchmesser von $23,0\,\text{cm}$. Berechne den Durchmesser einer großen Pizza, die den doppelten Flächeninhalt hat.

15.

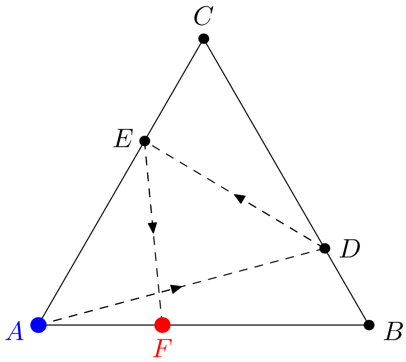


Die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ ist a cm lang.

(a) Zeichne die Figur für $a = 6$ und x = 2.

(b) Begründe: $\psi = 90°$.

16.



Herr Theo Lith ist als Platzwart für das Spielfeld ABC verantwortlich, das die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit einer Seitenlänge von 56 m besitzt.
Auf einem Kontrollgang startet er vom Eingang A auf dem kürzesten Weg zur Seite $[BC]$. Von dort aus läuft er wieder auf dem kürzesten Weg zur Seite $[AC]$. Dann begibt er sich erneut auf dem kürzesten Weg zur Grundstücksseite $[AB]$ und trifft dort auf den Fahnenmasten F.

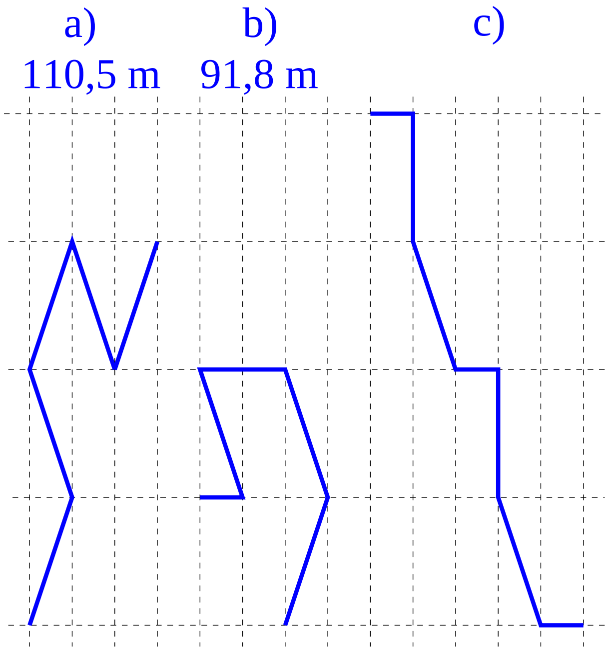
(a) Der gestrichelt eingezeichnete Kontrollweg von Herrn Lith in der obigen Zeichnung ist falsch eingetragen. Was ist daran verkehrt?

(b) Zeichne die Figur mit dem richtigen Weg im Maßstab 1 : 1000. Trage dann den Weg von Herrn Lith und die Punkte D, E und F korrekt ein.

(c) Zeige: $\overline{AF} : \overline{FB} = 3 : 5$.

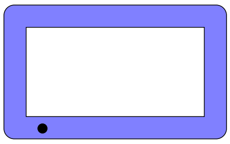
(d) Bestätige mit Hilfe der Angabe (c) die Position des Fahnenmastes durch eine weitere Konstruktion in deiner Zeichnung.

17.



Die Längen der zwei Wege a) und b) sind angegeben. Wie lang ist der Weg c)?

18.

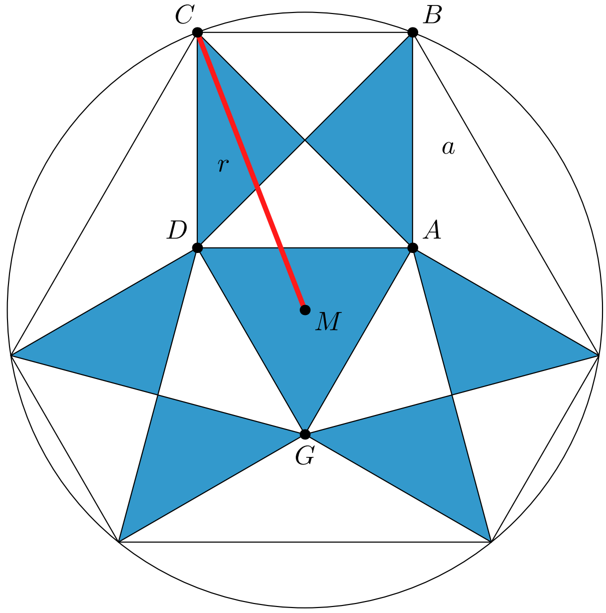


Das ursprüngliche Format des Fernsehbildes von 4 : 3 wird mehr und mehr auf das Format 16 : 9 umgestellt.

(a) Berechne die Seitenlängen des sichtbaren Bildes im alten und neuen Format bei einer 77 cm langen Bildschirmdiagonalen.

(b) Vergleiche die zugehörigen Flächeninhalte der beiden Fernsehbilder in den verschiedenen Formaten bei der 77 cm langen Bildschirmdiagonalen.

19.

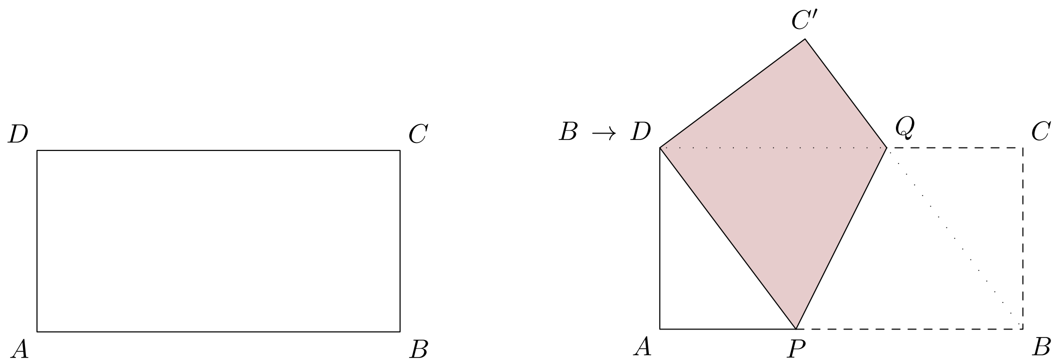


Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Im Zentrum befindet sich das gleichseitige Dreieck ADG. Der Umkreis mit dem Mittelpunkt M wurde zusammen mit dem Umkreisradius r zusätzlich eingezeichnet. Die Länge der Quadratseite $\overline{AB}$ ist a.

(a) Berechne den Umkreisradius r für $a = 4$.

(b) Wie viel Prozent der Umkreisfläche wird von dem sechseckigen Logo bedeckt?

20.



Das dargestellte Rechteck $ABCD$ wird so gefaltet, dass der Eckpunkt B auf den Eckpunkt D zu liegen kommt. Dadurch entsteht die Faltkante $[PQ]$.

(a) Schneide aus kariertem Papier ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$ aus. Falte es auf die oben beschriebene Weise.

(b) Zeichne die Figur oben rechts für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

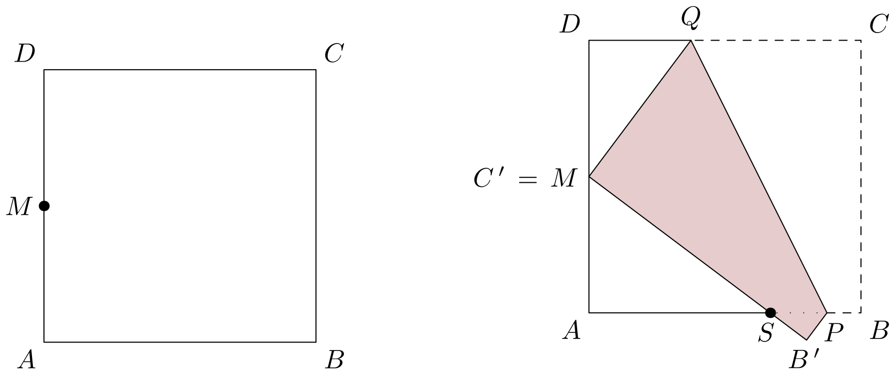
(c) • Begründe mit Hilfe von Winkelmaßen: Das Viereck $PBQD$ ist ein Parallelogramm.
  • Begründe: Das Viereck $PBQD$ ist sogar eine Raute.

(d) Es sei $\overline{AP} = x\,\text{cm}$. Zeige rechnerisch: $x = 3$.

(e) Berechne den Flächeninhalt der Raute $PBQD$ auf zwei verschiedene Arten mit Hilfe von Teildreiecken.

(f) Berechne erneut den Flächeninhalt der Raute $PBQD$ mit Hilfe ihrer Diagonalenlängen.

21.



Das dargestellte Quadrat $ABCD$ wird so gefaltet, dass der Eckpunkt C auf den Mittelpunktpunkt M der Seite $[AD]$ zu liegen kommt. Dadurch entsteht die Faltkante $[PQ]$.

(a) Schneide aus kariertem Papier ein Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ aus. Falte es auf die oben beschriebene Weise.

(b) Zeichne die Figur oben rechts für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(c) Es sei $\overline{DQ} = x\,\text{cm}$. Zeige rechnerisch: $x = 2,25$.

(d) Zeige: $\overline{DQ} : \overline{DC'} = 3 : 4$.

(e) Begründe: Die Dreiecke $C'QD$, ASC' und $SB'P$ sind zueinander ähnlich.

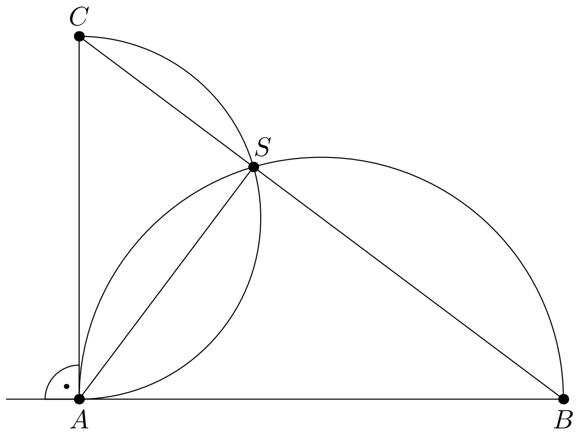
(f) Berechne $\overline{AS}$.

(g) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ASC'.

(h) Berechne $\overline{C'S}$. [Ergebnis: $\overline{C'S} = 5\,\text{cm}$]

(i) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ liegt nach dem Falten unter der Kante $[AB]$?

22.



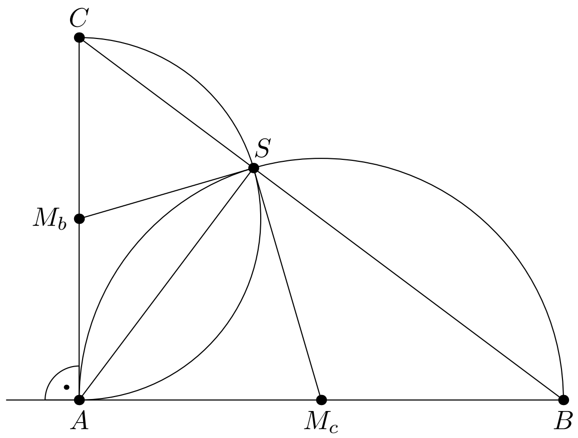
Die zwei Halbkreise haben die beiden Katheten $[AB]$ bzw. $[AC]$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC als Durchmesser. Die Halbkreise schneiden sich im Punkt S.
Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$

(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe:

- Das Dreieck ASC ist rechtwinklig.
- Der Schnittpunkt S liegt auf der Hypotenuse $[BC]$.

23.



Die zwei Mittelpunkte M_b und M_c der beiden Katheten $[AC]$ bzw. $[AB]$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC sind auch die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen. Die Halbkreise schneiden sich im Punkt S, der gleichzeitig auf der Hypotenuse $[BC]$ liegt.
Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$

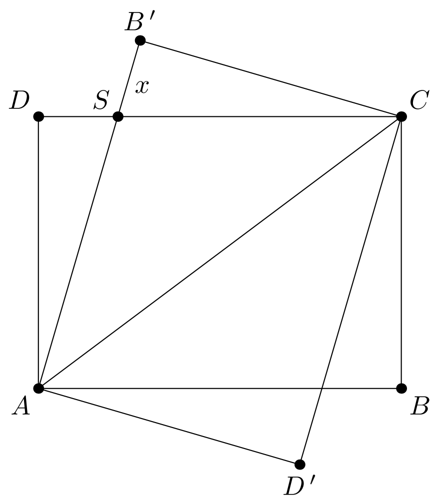
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe:

- Das Viereck AM_cSM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.
- Das Viereck AM_cSM_bbesitzt einen Umkreis.
  Tipp: Zeichne die Strecke M_cM_b ein.

(c)
- Zeichne das Dreieck ABC mit dem Drachenviereck AM_cSM_b erneut.
- Berechne den Flächenanteil des Vierecks AM_cSM_b am Dreieck ABC in Prozent.
  Tipp: Betrachte den Flächenanteil des Dreiecks AM_cM_b am Dreieck ABC. Zeichne auch den Hypotenusenmittelpunkt M_h ein.

24.



Das Rechteck $ABCD$ wurde an seiner Diagonalen $[AC]$ gespiegelt. Dadurch ist das Viereck $AD'CB'$ entstanden. Es gilt: $x = \overline{SB'}$.

(a) Zeichne die Figur für $a = \overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $b = \overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b)
- Berechne die Seitelänge $\overline{SC}$ in Abhängigkeit von x auf verschiedene Weise.
- Zeige dann:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A des Dreiecks ACS gilt:

$$A_{\Delta ACS} = \frac{b}{4a} \cdot (a^2 + b^2).$$

(d)
- Zeichne die Strecke $[B'D]$ ein.
- Begründe: Das Viereck $ACB'D$ ist ein Trapez.

(e) Zeige: Für den Flächeninhalt A des Dreiecks DSB' gilt:

$$A_{\Delta DSB'} = \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}.$$

(f) Zeige: Für den Flächeninhalt A des Trapezes $ACB'D$ gilt:

$$A_{ACB'D} = ab \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

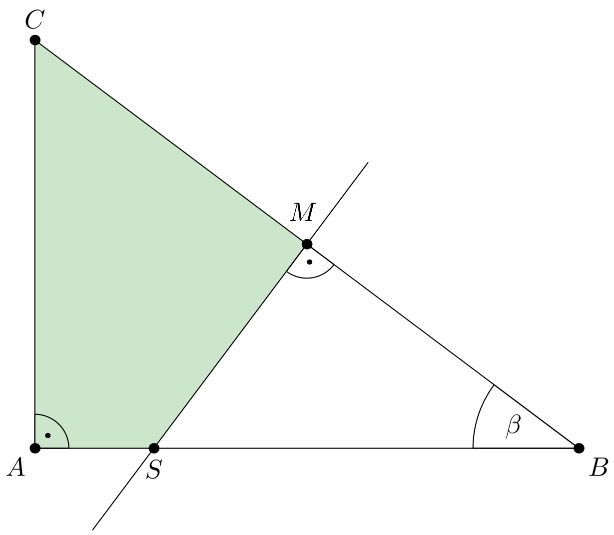
Tipps:
- Das Trapez wird durch seine beiden Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt.
- Zwei Dreiecke davon sind kongruent, die beiden anderen sind zueinander ähnlich.
- Den Flächeninhalt des Trapezes $ACB'D$ erhältst du aus der Summe der Flächeninhalte der vier Teildreiecke.

(g) In welchem Verhältnis müssen die Seitenlängen a und b des Rechtecks $ABCD$ stehen, damit der Flächeninhalt des Trapezes $ACB'D$ um 10% kleiner als der des Rechtecks $ABCD$ wird?

(h) Untersuche, ob der Flächeninhalt des Trapezes $ACB'D$ genau so groß wie der des Rechtecks $ABCD$ werden kann.

(i) Untersuche rein elementargeometrisch anhand des Winkels BAC mit dem Maß ε, ob das Trapez $ACB'D$ auch zum Rechteck werden kann.

25.



Der Hypotenusenmittelpunkt des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist der Punkt M. In der Figur gilt weiter: $\overline{AB} = 7{,}2\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 5{,}4\,\text{cm}$.

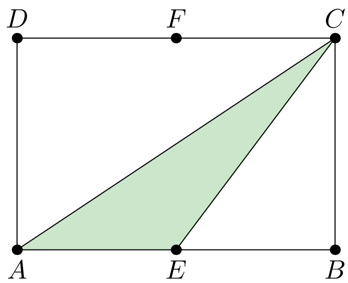
(a) Begründe: Die beiden Dreiecke SBM und ABC sind zueinander ähnlich.

(b) Zeige: $\overline{MS} = 3{,}375\,\text{cm}$.

(c) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $ASMC$ am Dreieck ABC in Prozent.

26. (a) Zeichne ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 75^\circ$ und $\beta = 40^\circ$.
    (b)
      - Spiegle den Punkt A am Punkt C. Sein Spiegelbild ist der Punkt A'.
      - Spiegle den Punkt A' an der Halbgeraden $[BC$. Sein Spiegelbild ist der Punkt A''.
    (c) Begründe:
      - Das Dreieck ACA'' ist gleichschenklig.
      - Das Dreieck $AA'A''$ ist rechtwinklig.

27.



Für das Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.
Die Punkte E und F sind die Mittelpunkte der Seite $[AB]$ bzw. $[CD]$.
    (a) Zeichne die Figur.
    (b) Welchen Bruchteil der Rechtecksfläche nimmt das Dreieck AEC ein? Löse die Aufgabe auf zwei verschiedene Arten.
    (c) Berechne den Abstand des Punktes E von der Strecke $[AC]$. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

28. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.
    (a) Zeichne dieses Dreieck, so dass die Kathete $[AB]$ waagrecht liegt.
    (b) Punkte P_n wandern auf der Seite $[AB]$ und Punkte Q_n wandern gleichzeitig auf der Seite $[BC]$, wobei $\overline{AP_n} = \overline{BQ_n} = x\,\text{cm}$ gilt. Dadurch entstehen Vierecke AP_nQ_nC.
    Zeichne für $x = 1,5$ das Viereck AP_1Q_1C ein.
    (c) Gib die Menge aller möglichen Belegungen von x an.
    (d) Unter allen Vierecken AP_nQ_nC gibt es das Trapez AP_2Q_2C.
      - Berechne die zugehörige Belegung von x.

[Ergebnis: $x = 2,4$]

- Zeichne dieses Trapez in anderer Farbe ein.
- Berechne den Flächeninhalt dieses Trapezes. **Tipp:** Berechne zunächst den Flächeninhalt des Dreiecks P_2BQ_2 .
- Berechne die Höhe h dieses Trapezes AP_2Q_2C . Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

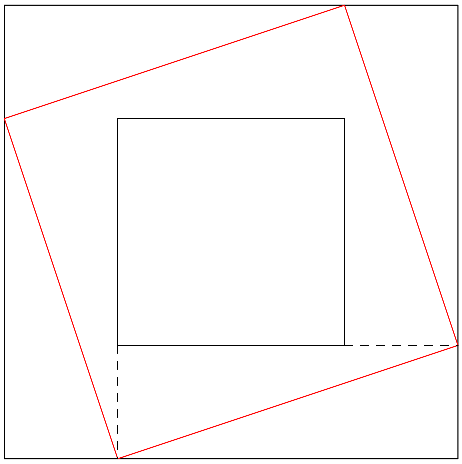
(e) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Vierecke AP_nQ_nC gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = (0,5x^2 - 3x + 12)\,\mathrm{cm}^2 \; .$$

(f) Unter allen Vierecken AP_nQ_nC gibt es das Viereck AP_2Q_2C, das den minimalen Flächeninhalt besitzt.
Berechne dieses Minimum und die zugehörige Belegung von x .

(g) Untersuche, ob es unter allen Vierecken AP_nQ_nC achsensymmetrische gibt.

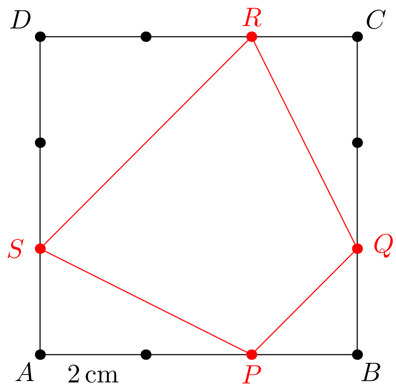
29.



Das große Quadrat hat einen Umfang von $81,6\,\mathrm{cm}$ und das kleine Quadrat hat einen Umfang von $34\,\mathrm{cm}$. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Berechne den Flächeninhalt des mittleren Quadrates auf verschiedene Weise:

- Mit Hilfe der Berechnung der Seitenlänge des mittleren Quadrates
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

30.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Jede Quadratseite ist in drei Abschnitte eingeteilt, die jeweils 2cm lang sind. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

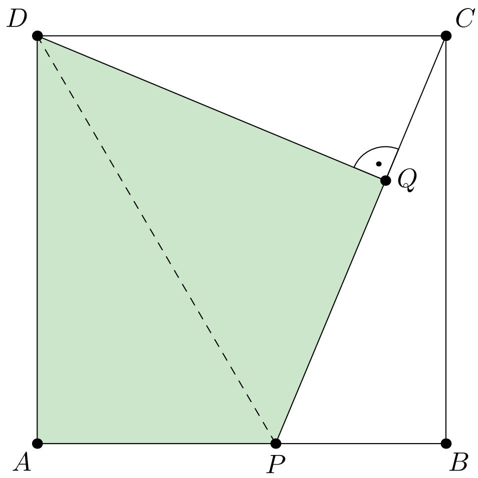
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ besitzt zwei parallele Seiten.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ auf zwei verschiedene Arten:

- Mit Hilfe der Berechnung der zugehörigen Formelgleichung
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

31.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a .

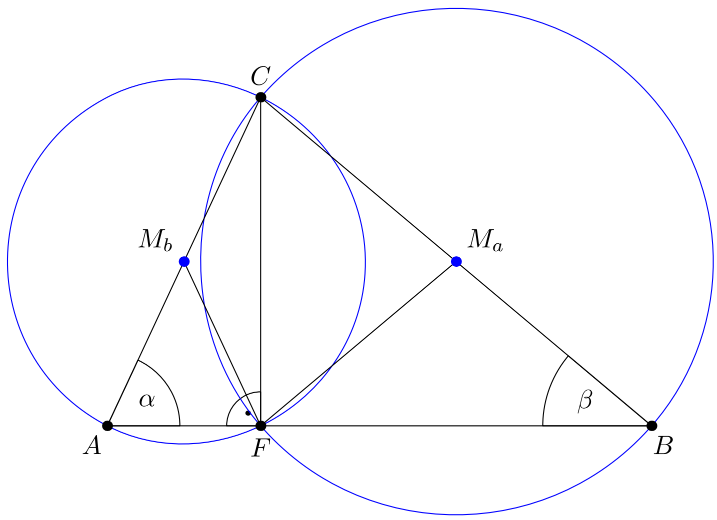
(a) Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{PB} = 2,5\,\text{cm}$.

(b) Begründe ohne Messung: Die Diagonale $[DP]$ ist keine Symmetrieachse im Viereck $APQD$.

(c) Begründe: Die beiden Dreiecke PBC und DQC sind zueinander ähnlich.

(d) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $APQD$ an der Fläche des Quadrates $ABCD$ in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

32.



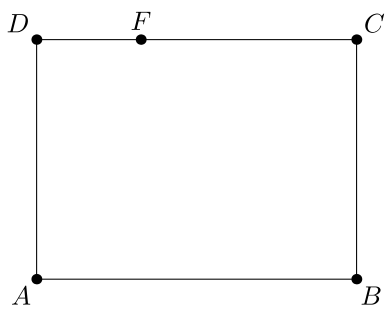
Im Dreieck ABC mit der Höhe $[CF]$ sind die Punkte M_a und M_b die Mittelpunkte der Umkreise der Teildreiecke FBC bzw. AFC .

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe auf verschiedene Weise: Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Begründe: Zusammen bedecken die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a die Hälfte des Dreiecks ABC .

33.



Die beiden Freunde Hans und Michael wollen ein Bundesligaspiel besuchen. Auf ihrem Weg dorthin gelangen sie vor dem Stadion an einen rechteckigen Parkplatz $ABCD$.

Sie befinden sich am Punkt A und wollen den Platz diagonal zum Punkt C überqueren. Michael entdeckt jedoch einen Kameraden, der am Punkt F steht und läuft erst geradewegs zu ihm. Dann begeben sich die beiden direkt zum Punkt C, an dem schon Hans wartet.

(a) Es soll gelten $\overline{AB} = 92\,\mathrm{m}$, $\overline{BC} = 69\,\mathrm{m}$ und $\overline{FC} = 60\,\mathrm{m}$.
Fertige eine Zeichnung im Maßstab 1 : 1000 an.

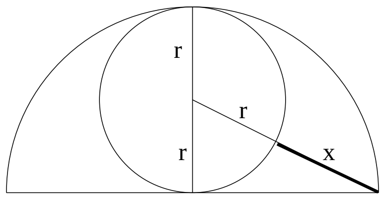
(b) Begründe ohne Messung: Michael muss einen längeren Weg von A über F nach C zurücklegen als Hans.

(c) Berechne die Streckenlänge, die Michael mehr als Hans zurücklegen muss. Runde auf ganze Meter.

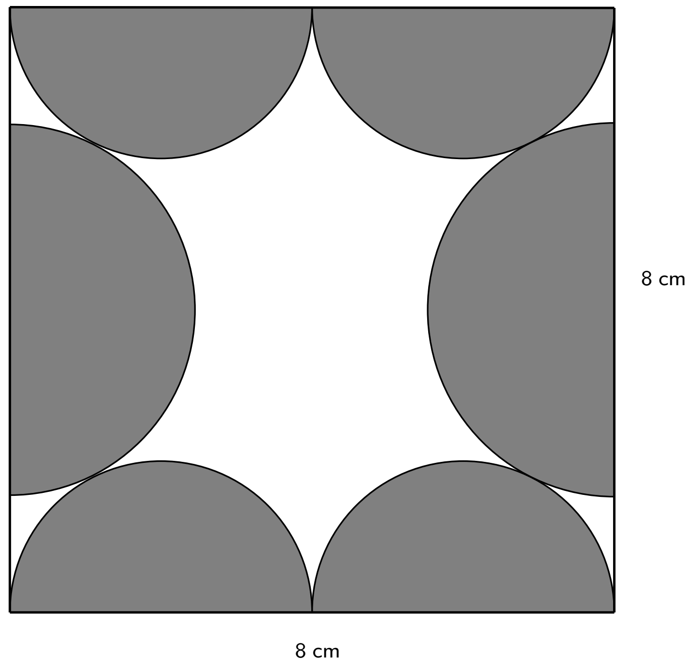
8. Berechnungen am Kreis

1. Der Minutenzeiger einer Kirchturmuhr ist $0,95\,\mathrm{m}$ und der Stundenzeiger $0,45\,\mathrm{m}$ lang.
   (a) Berechne den Weg, den die Spitze des Minutenzeigers in 3 Stunden zurücklegt.
   (b) Berechne den Weg, den die Spitze des Stundenzeigers in der selben Zeit zurücklegt.

2. Berechne auf Grund der Skizze die Länge der Strecke x in Abhängigkeit vom Radius r.

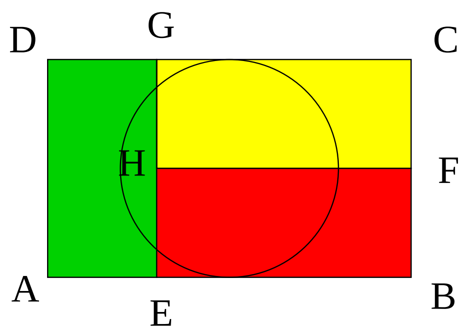


3.



Gegeben ist das Quadrat mit 8 cm Seitenlänge und die sechs Halbkreise. Berechne den Flächeninhalt der hellen Fläche.

4.

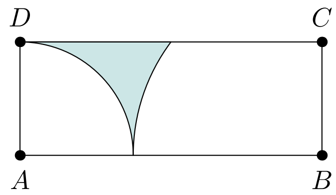


Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet. Alle drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Außerdem gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.
Zusätzlich ist noch ein Kreis eingezeichnet, dessen Mittelpunkt M der Mittelpunkt des Rechtecks $ABCD$ ist.

(a) Begründe: Es muss $\overline{AD} = 4\,\text{cm}$ gelten. Zeichne dann die obige Figur.

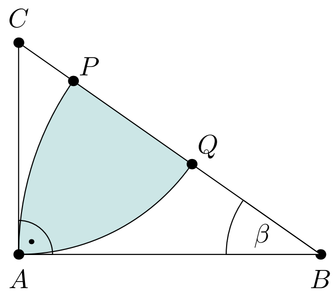
(b) Berechne jeweils den Anteil der drei Rechtecke im Inneren an der Kreisfläche in Prozent. Runde auf zwei Stellen nach dem Komma.

5. Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 3\,\text{cm}$. Die Punkte A und B sind Kreismittelpunkte.



   (a) Zeichne die skizzierte Figur gemäß den obigen Angaben.
   (b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

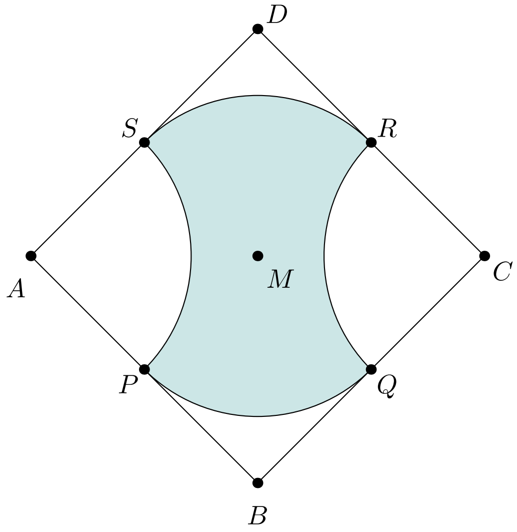
6.



Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 35°$. Die Punkte B und C sind Kreismittelpunkte.

   (a) Zeichne die Figur gemäß den obigen Angaben.
   (b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

7.

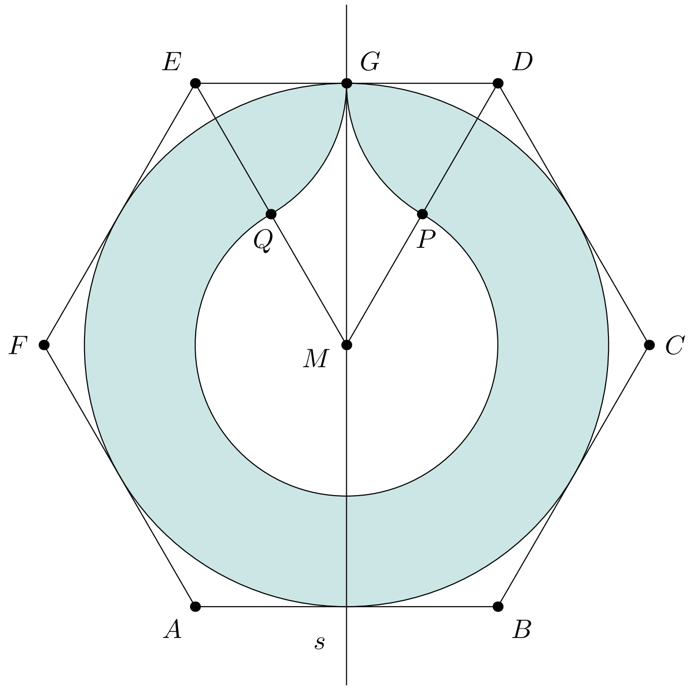


Der Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$ ist der Punkt M. Die Punkte P, Q, R und S sind die Mittelpunkte der jeweiligen Quadratseiten.
Die Mittelpunkte der vier Kreisbögen, welche die grau getönte Figur im Inneren des Quadrates $ABCD$ begrenzen, sind die Punkte A, C und M.

(a) Zeichne die Figur für die Diagonalenlänge $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Fritz behauptet: „Der Inhalt der grauen Fläche ist halb so groß wie der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$.“
Maria meint: „Der Inhalt der grauen Fläche kleiner als die Hälfte des Quadrates. Das sieht man doch!“
Wer hat Recht? Begründe deine Antwort.

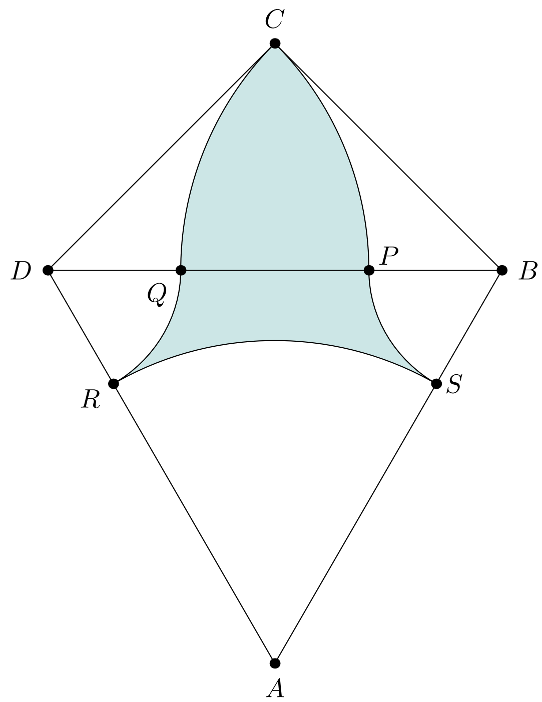
8. Das regelmäßige Sechseck $ABCDEF$ besitzt den Mittelpunkt M und die Symmetrieachse s.
Der Mittelpunkt des Inkreises dieses regelmäßigen Sechsecks ist M . D und E sind die Mittelpunkte der Kreisbögen, die sich in G berühren.



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Berechne für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ den Flächeninhalt des grau eingefärbten Ringes.

9.

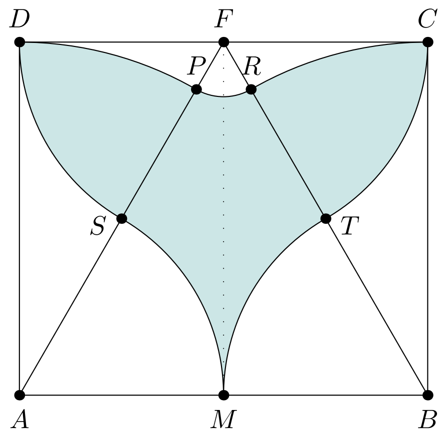


Das Viereck $ABCD$ ist aus einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck und einem gleichseitigen Dreieck zusammengefügt. Die Mittelpunkte der Kreisbögen sind die Punkte B, D und A.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{BD} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

10.

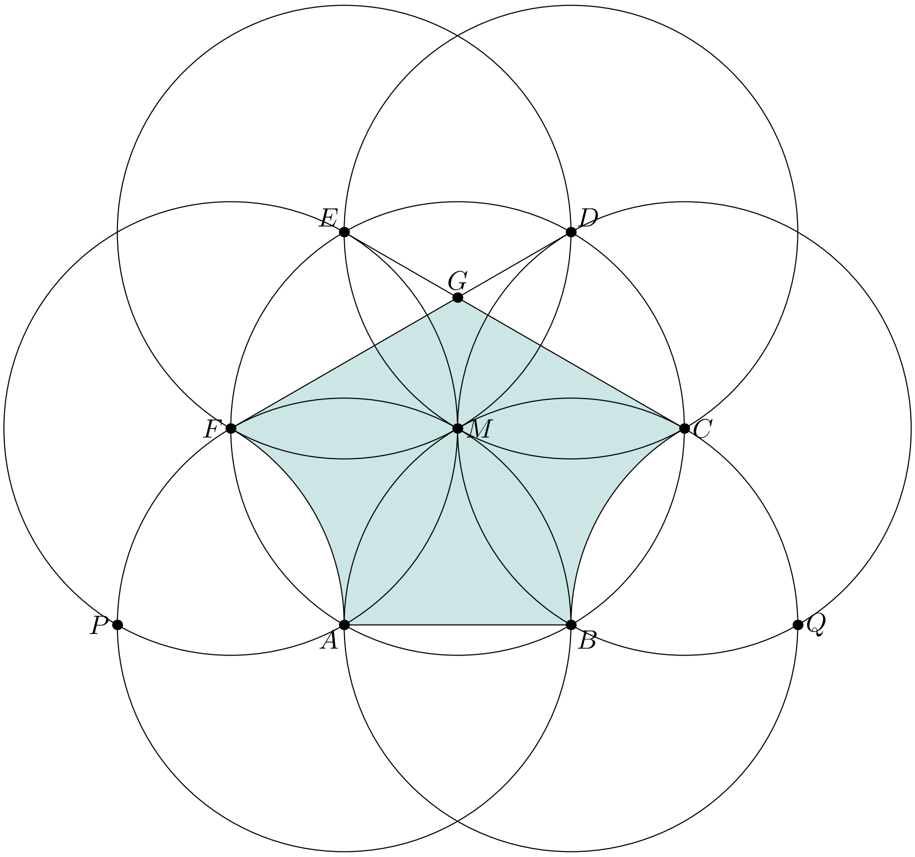


In das Rechteckeck $ABCD$ ist ein gleichseitiges Dreieck ABF einbeschrieben. Die Mittelpunkte der sieben Kreisbögen sind die Punkte A, B und F.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

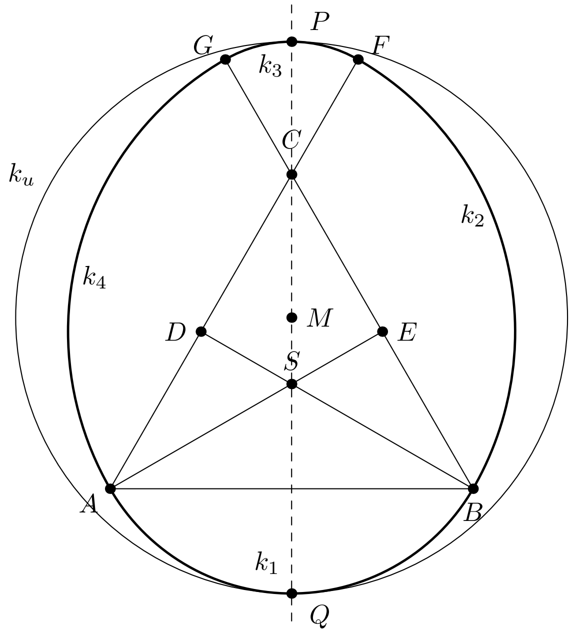
11. In der Abbildung gilt: $\overline{AB} = 3\,\text{cm}$.
Der Punkt M und die Punkte A, B, C, D, E, und F sind Kreismittelpunkte.
Die Punkte P und Q sind die Mittelpunkte der Kreisbögen AF und CB, die sich in das Innere des Kreises mit dem Mittelpunkt M wölben.



(a) Begründe: Das Sechseck $ABCDEF$ ist regelmäßig.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.
Hinweis: Zeichne ausgehend von Punkt M geeignete Hilfslinien ein.

12.



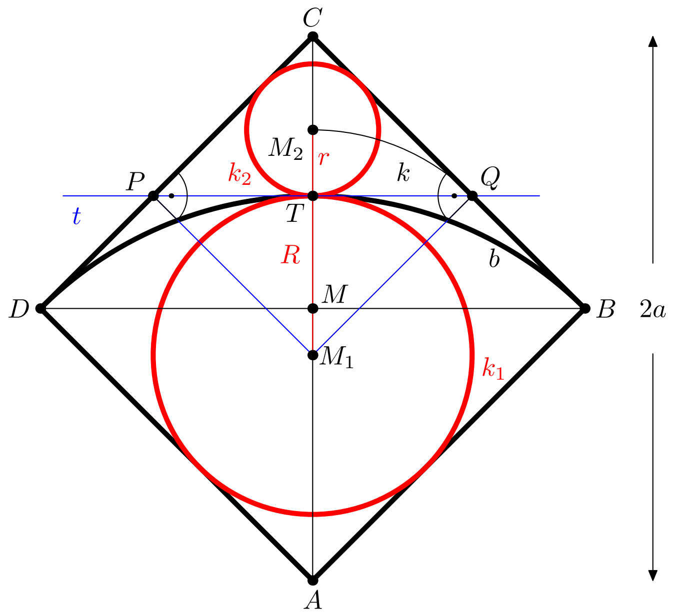
Die Punkte D und E sind zwei Seitenmittelpunkte des gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge a.
Die Punkte S, D, C und E sind die Mittelpunkte der Kreisbögen k_1, k_2, k_3 und k_4, welche die eiförmige Figur bilden. Der Punkt M ist der Mittelpunkt des Umkreises k_u dieser Eilinie.

(a)
- Beschreibe, wie du diese Figur zeichnest.
- Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Neben der Symmetrieachse PQ besitzt die Eilinie keine weitere.

(c) Wie viel Prozent der Fläches des Umkreises k_u bedeckt die eiförmige Fläche?

13.

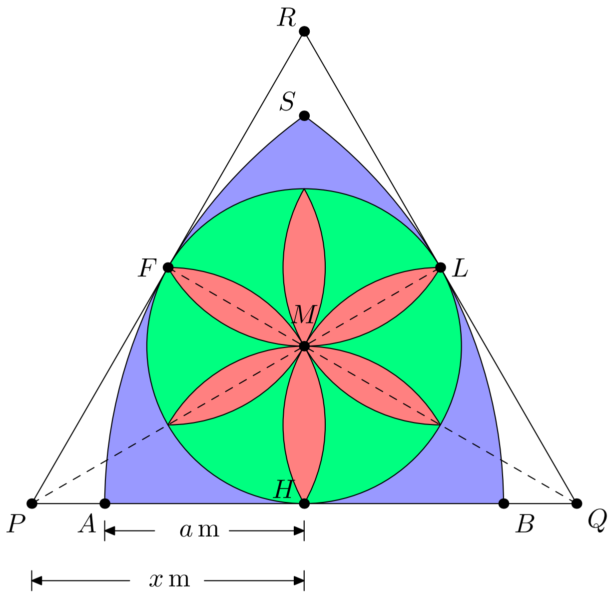


Der Kreisbogen b von B nach D im Quadrat $ABCD$ mit der Diagonalenlänge $2a$ besitzt den Mittelpunkt A.
In der Figur ist eine Möglichkeit dargestellt, wie die Mittelpunkte M_1 und M_2 der beiden einbeschriebenen Kreise k_1 und k_2 mit den Radien R bzw. r konstruiert werden können.

(a) • Beschreibe die einzelnen Konstruktionsschritte in der richtigen Reihenfolge.
   • Konstruiere die Figur mit den einbeschriebenen Kreisen k_1 und k_2 für $a = 6\,\text{cm}$.

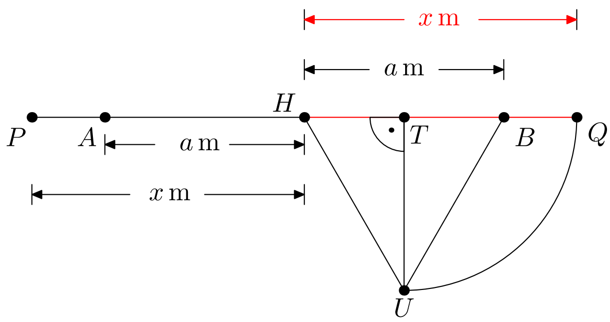
(b) Berechne die Kreisradien R und r in Abhängigkeit von a. Bestätige damit, dass diese Konstruktion der einbeschriebenen Kreise korrekt ist.
Tipp: Zeichne die Berührradien der Kreisline k_2 an die Seiten $[BC]$ und $[DC]$ ein.

14.



Das ist die Planfigur für den oberen Teil eines Kirchenfensters.
Das gleichseitige Hilfsdreieck PQR berührt die Kreisbögen von B nach S und von S nach A in den Punkten L bzw. F. Die Punkte P und Q sind die beiden Mittelpunkte dieser Kreisbögen.
Die Punkte F und L sind gleichzeitig die Berührpunkte des einbeschriebenen Kreises mit den beiden Kreisbögen.

(a)
- Zeige: $\overline{PQ} = (a + a\sqrt{3})\,\text{m}$; d.h. $x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$.
-



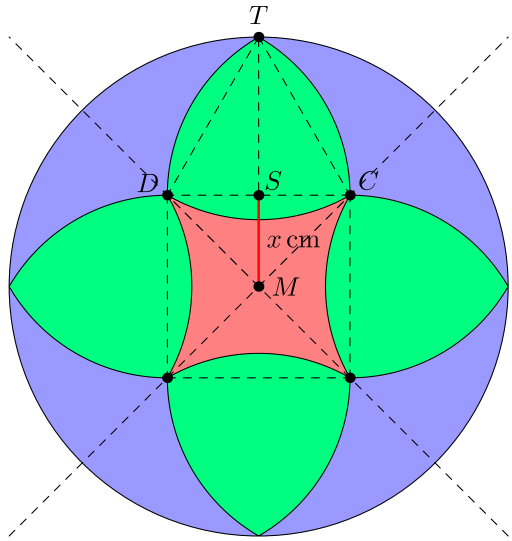
Der Mittelpunkt der Strecke $[PQ]$ bzw. der Strecke $[AB]$ ist H. Das Dreieck HUB ist gleichseitig.
Begründe: Diese Konstruktion ergibt $\overline{HQ} = \overline{PH} = x\,\text{m}$.

(b) Die Breite $\overline{AB}$ des Kirchenfensters soll $2\,\text{m}$ betragen. Konstruiere die vollständige Figur im Maßstab 1:25.

(c) Wie viele Quadratdezimeter rotes Glas werden für die Rosette ungefähr gebraucht?

(d) Wie hoch wird dieser Teil des Kirchenfensters?

15.

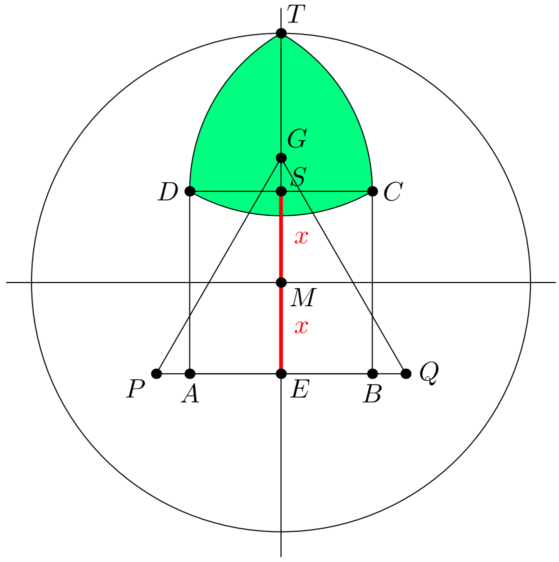


Das ist das Bild eines Fensters, das sich in der Zisterzienserabtei Hauterive in Fribourg (Schweiz) befindet.
Der Radius des Umkreises dieser Figur sei R cm. Der Radius der kleinen Kreisbögen sei jeweils r cm.
Die gestrichelten Linien erzeugen im Inneren ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck.

(a) Konstruiere die Figur für $R = 5$ cm.

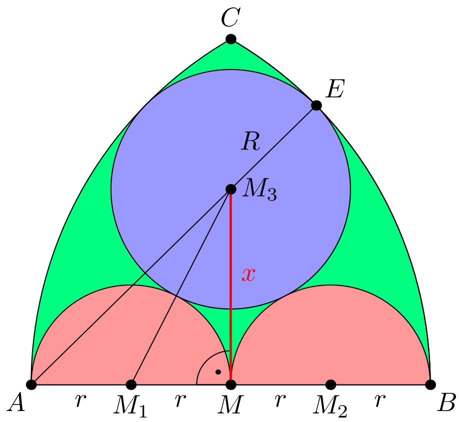
(b)
- Zeige: $\overline{MS} = x = \dfrac{R}{(\sqrt{3}+1)\,\text{cm}}$
- Zeige: $x\,\text{cm} = \dfrac{R}{2}\sqrt{3} - \dfrac{R}{2}$

(c) Hier ist eine recht umständlichere Möglichkeit dargestellt, die Figur zu konstruieren:



Der Mittelpunkt der Strecke $[MT]$ ist der Punkt G. Das Dreieck PQG ist gleichseitig und es besitzt die Seitenlänge R cm.
Begründe: Diese Konstruktion ergibt $\overline{ME} = \overline{MS} = x\,\text{cm} = \dfrac{R}{2}\sqrt{3} - \dfrac{R}{2}$.

16.

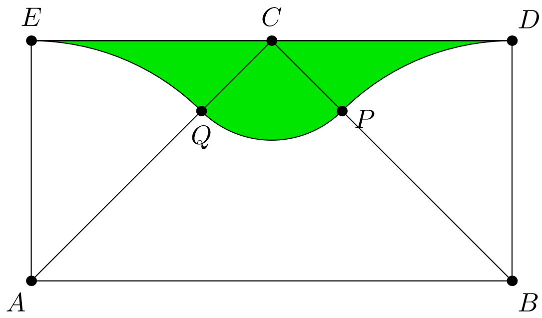


Die Punkte A und B sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen, welche die beiden Halbkreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 (Radius r) sowie den Kreis um M_3 mit dem Radius R berühren.
Der Kreis um M_3 mit dem Radius R berührt den Kreisbogen von B nach C im Punkt E.

(a) Zeige: $R = 1,2r$.

(b) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt A_R des Kreises um M_3 größer als der Flächeninhalt A_r der beiden Halbkreise zusammen?

17.



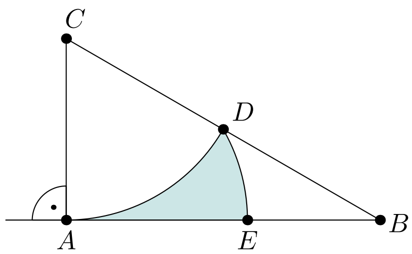
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig mit $\overline{AC} = \overline{BC} = 5\,\text{cm}$. Das Viereck $ABDE$ ist ein Rechteck. Die Punkte A, C und B sind die Mittelpunkte der drei Kreisbögen, die sich zu der geschwungenen Linie von E über Q und P nach D zusammenfügen.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Zeige: $\overline{BP} = 2,5 \cdot \sqrt{5}\,\text{cm}$.

(c) Berechne den Inhalt der Fläche, die von der geschwungenen Linie und der oberen Rechtecksseite $[ED]$ umrandet wird.

18.

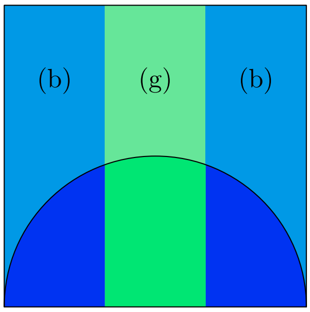


Die Eckpunkte A und C des rechtwinkligen Dreiecks ABC sind die Mittelpunkte der Kreisbögen von E nach D bzw. von A nach D. Die Radien der Kreisbögen sind gleich lang.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt der getönten Fläche.

19.



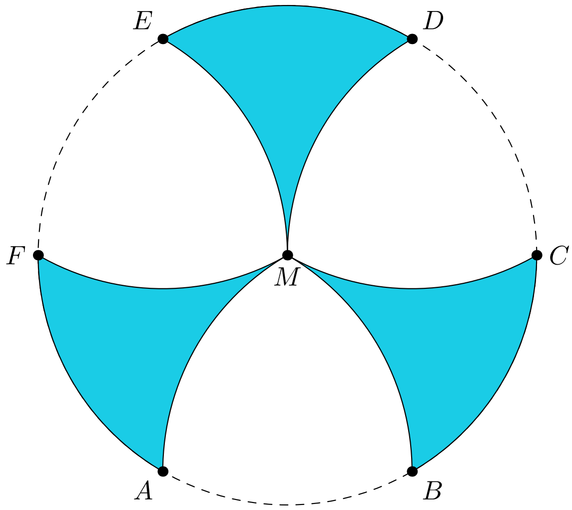
Das ist der Entwurf eines Logos für die Firma „Sun & Brown". Es besteht aus einem Quadrat, das aus drei kongruenten Streifen blau (b) und grün (g) zusammengesetzt ist. Außerdem ist dem Quadrat ein Halbkreis einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur, so dass die Quadratseite 6 cm lang ist.

(b) Berechne den Inhalt der blauen Fläche im Halbkreis.

(c) Wie viel Prozent der Halbkreisfläche sind grün eingefärbt?

20.

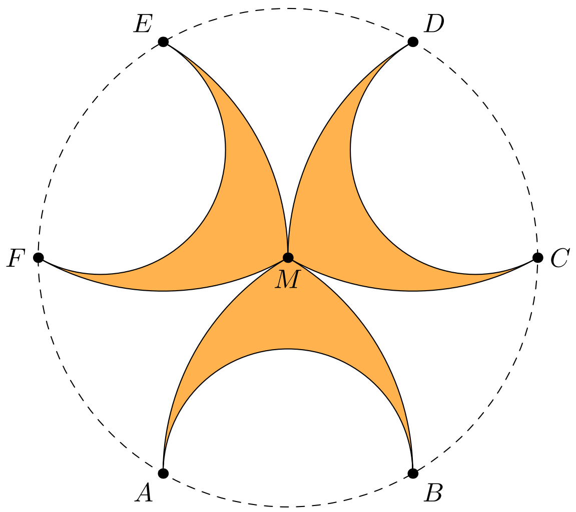


Die Punkte A, B, C, D, E und F sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge a cm. Diese Punkte sind auch die Mittelpunkte der Kreisbögen im Inneren.

(a) Zeichne die Figur für $a = 6$.

(b) Berechne den Flächeninhalt der getönten Figur in deiner Zeichnung.

21.

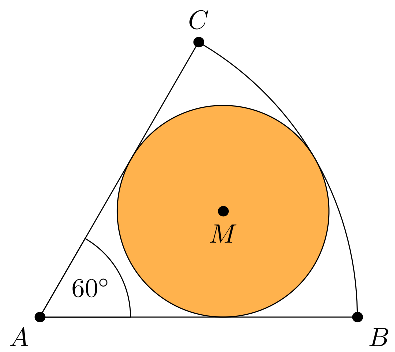


Die Punkte A, B, C, D, E und F sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge a cm. Diese Punkte sind auch die Mittelpunkte der Kreisbögen im Inneren. Die Strecken $[AB]$, $[CD]$ und $[EF]$ sind jeweils die Durchmesser der drei Halbkreise im Inneren.

(a) Zeichne die Figur für $a = 6$.

(b) Berechne den Flächeninhalt der getönten Figur in deiner Zeichnung.

22.

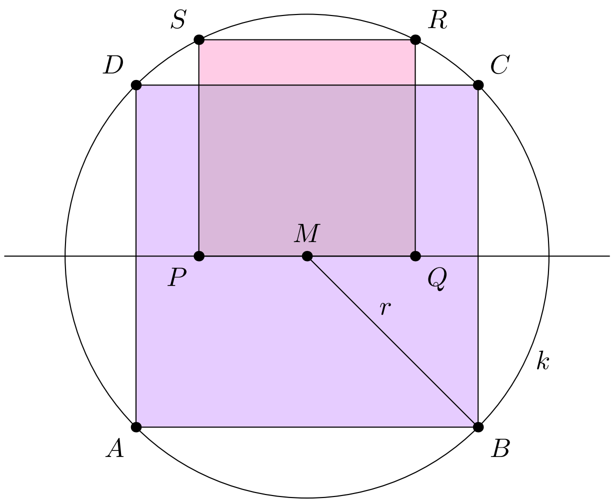


Der gefärbte Kreis mit dem Mittelpunkt M ist dem Kreissektor ABC mit dem Mittelpunkt A und einem Öffnungswinkel von $60°$ einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur für den Sektorradius $\overline{AB} = a = 6\,\text{cm}$.
Tipp: Die beiden Kreislinien berühren sich in einem Punkt T. Durch diesen Punkt verläuft die gemeinsame Tangente an die beiden Kreislinien. Zeichne diesen Punkt T und die Tangente ein.

(b) Welchen Bruchteil der Sektorfläche nimmt der Kreis ein?

23.

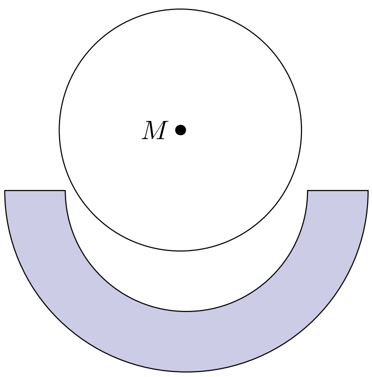


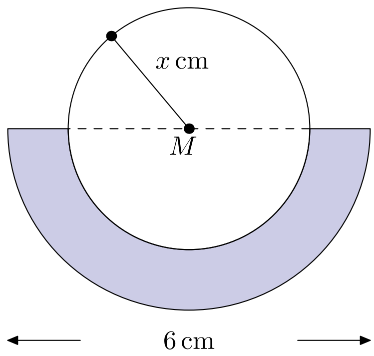
In den Kreis k mit dem Radius r ist das Quadrat $ABCD$ und in seinen Halbkreis ist das Quadrat $PQRS$ einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur für $r = 4\,\text{cm}$.

(b) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Quadrate.

24.





In dem Bild eines Firmenlogos wird der Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $x\,\text{cm}$ ($x < 3$) in einen dunkel gefärbten Halbkreisring eingebettet, dessen äußerer Durchmesser $6\,\text{cm}$ beträgt (siehe Abbildung oben rechts).

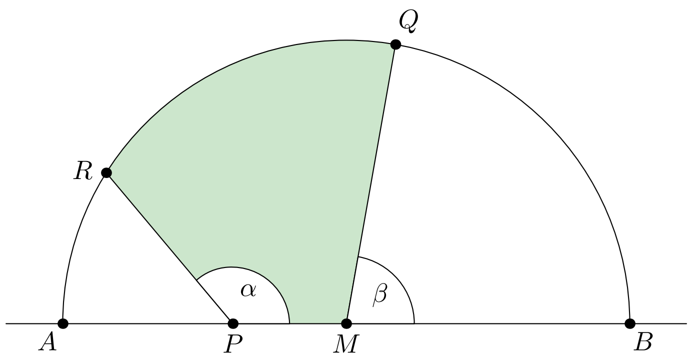
(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

(b) Berechne für $x = 2$ den Flächeninhalt des Halbkreisringes.

(c) Berechne x so, dass der Inhalt der Kreisfläche genauso groß wie der des Halkreisringes ist.

(d) Berechne x so, dass der Halbkreisring den doppelten Umfang wie der Vollkreis besitzt.

25.



Die Figur stellt den Entwurf einer halbkreisförmigen Bühnenfläche dar. Der Durchmesser $[AB]$ soll 20 m und die Länge der Strecke $[PM]$ soll 4 m betragen.
Die von den Strecken $[RP]$, $[PM]$, $[MQ]$ und dem Kreisbogen von Q nach R begrenzte Teilfläche soll farbig von der restlichen Fläche abgesetzt werden.

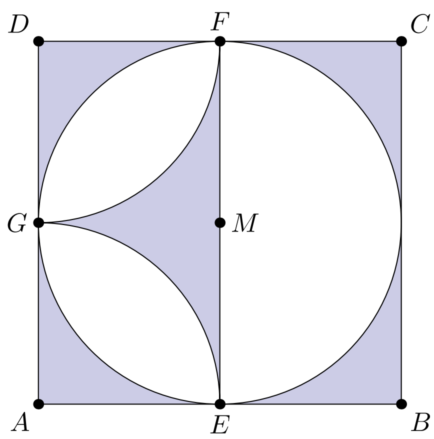
(a) Zeichne die Bühne im Maßstab 1 : 200 für $\alpha = 130°$ und $\beta = 80°$.

(b) Berechne den Inhalt der farbig abgesetzten Teilfläche.

[Ergebnis: $A_{Farbe} \approx 69,85\,\text{m}^2$]

(c) Berechne den prozentualen Anteil der farbigen Fläche an der Gesamtfläche der Bühne.

26.



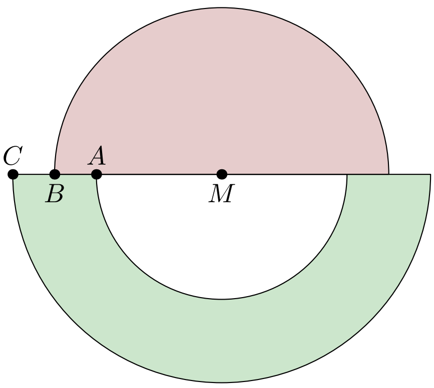
Das ist das Logo einer Firma, die Elektrogeräte herstellt.
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit dem Mittelpunkt M. Die Punkte A und D sind die Mittelpunkte der Kreisbögen von E nach G bzw. von G nach F.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

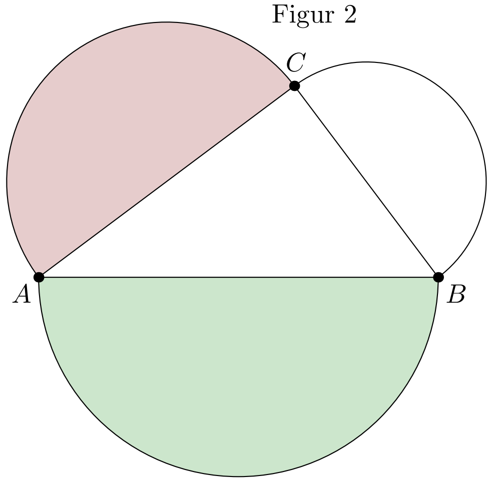
(b) Berechne die Summe der Flächeninhalte der getönten Teilflächen in der Figur.

27.

Figur 1



Figur 2

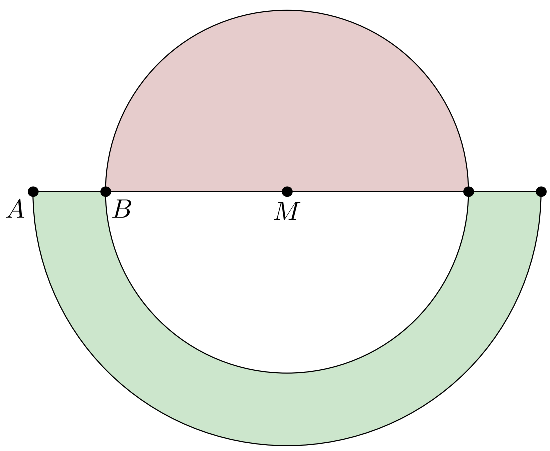


(a) Zeichne die Figur 1 für $\overline{MA} = 3,6\,\text{cm}$, $\overline{MB} = 4,8\,\text{cm}$ und $\overline{MC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Zeige ohne zu runden, dass der untere Kreisring und der obere Halbkreis den gleichen Flächeninhalt besitzen.

(c)
- Zeichne die Figur 2 für $c = \overline{AB} = 12\,\text{cm}$, $a = \overline{BC} = 7,2\,\text{cm}$ und $b = \overline{AC} = 9,6\,\text{cm}$.
- Begründe: Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.
- Notiere den Zusammenhang zwischen den drei Halbkreisflächen in der Figur 2 in Form einer Gleichung.
- Was hat die Figur 2 mit der Figur 1 zu tun? Beschreibe deine Idee.

28.



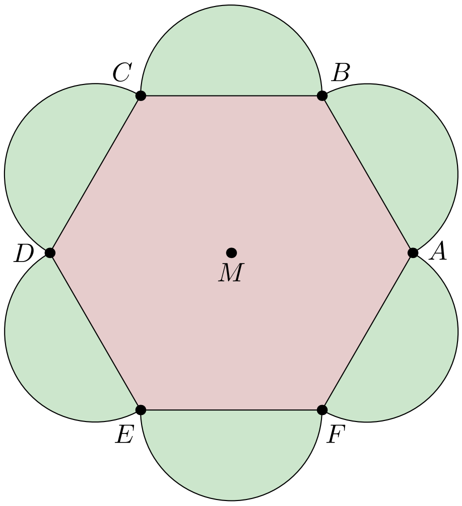
(a) Zeichne die Figur für $R = \overline{MA} = 5{,}6\,\text{cm}$ und $r = \overline{MB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Zeige, dass der untere Kreisring und der obere Halbkreis nicht denselben Flächeninhalt besitzen.

(c) Jetzt sei $r = \sqrt{18}\,\text{cm}$.
Berechne R so, dass der Inhalt der beiden getönten Flächen gleich ist.

(d) Welcher Zusammenhang muss zwischen R und r bestehen, damit die getönten Flächen gleichen Inhalt besitzen?

29.

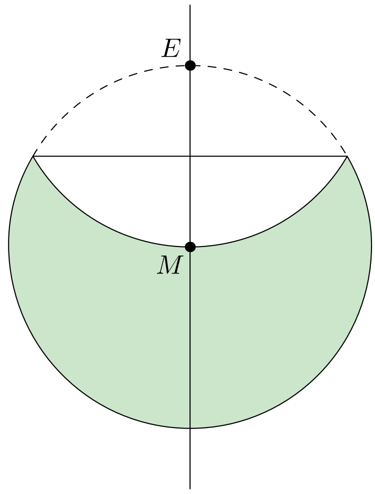


Das Sechseck $ABCDEF$ mit dem Mittelpunkt M ist regelmäßig.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AD} = 8\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A der Figur. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

30.

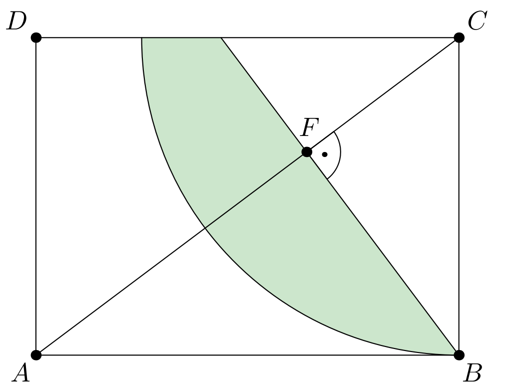


Erwin hat einen Kreis aus Papier ausgeschnitten. Er faltet nun die Kreisscheibe so, dass der Punkt E auf den Kreismittelpunkt M zu liegen kommt.

(a) Zeichne die Figur mit einem Kreisdurchmesser von $6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Anteil der eingefärbten Fläche an der gesamten Kreisfläche in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

31.

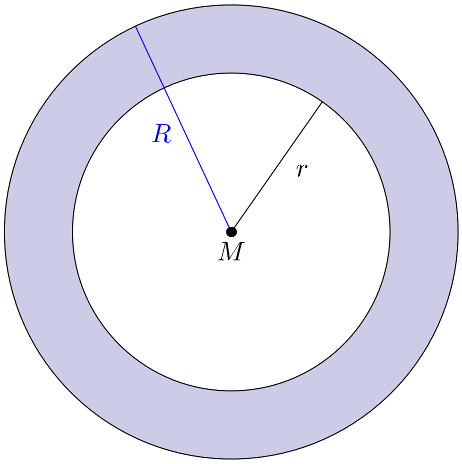


Der Punkt C des Rechtecks $ABCD$ ist der Mittelpunkt des Kreisbogens.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt A der eingefärbten Fläche. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

32.

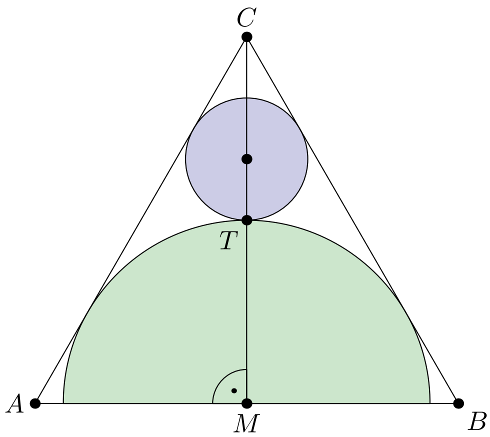


(a) Zeichne die Figur für $R = 5\,\text{cm}$ und $r = 3,5\,\text{cm}$.

(b) Berechne für $R = 5\,\text{cm}$ den Kreisradius r so, dass der Kreisring 19% der großen Kreisfläche einnimmt.

(c) Berechne für $r = 3,5\,\text{cm}$ den Kreisradius R so, dass der Flächeninhalt des Kreisringes genauso groß wird wie der des kleinen Kreises.

33.



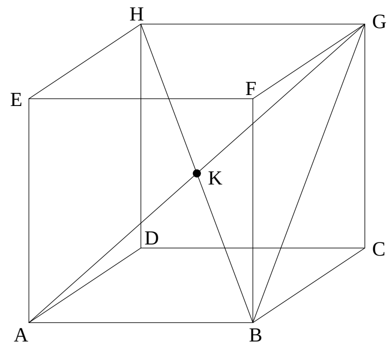
Im gleichseitigen Dreieck ABC ist M der Basismittelpunkt.
Diesem gleichseitigen Dreieck sind ein Halbkreis und ein kleinerer Kreis einbeschrieben worden. Die beiden Kreislinien berühren sich im Punkt T.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$.

(b) Berechne das Verhältnis des Flächeninhaltes des kleinen Kreises zu dem des Halbkreises.

9. Raumgeometrie

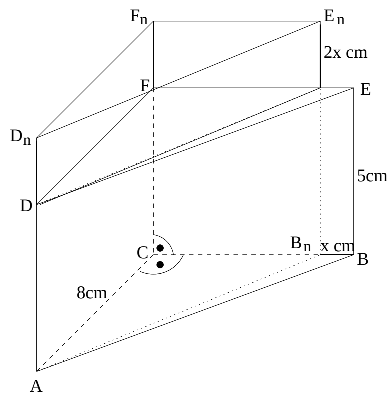
1. Die folgende Skizze stellt das Schrägbild eines Würfels mit einer Kantenlänge von 6 cm dar.



   (a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABK. Runde das Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

   (b) Vergleiche den Flächeninhalt des Dreiecks ABK mit dem des Dreiecks BGK. Begründe deine Antwort.

2. Das rechtwinklige Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$, $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$, $\overline{CB} = 6\,\text{cm}$ ist Grundfläche eines geraden Prismas mit der Höhe 5 cm. Verkürzt man die Seite $[BC]$ um x cm und verlängert man die Höhe des Prismas um $2x$ cm, so ergeben sich neue Prismen mit der Grundfläche AB_nC. (Siehe Schrägbild)

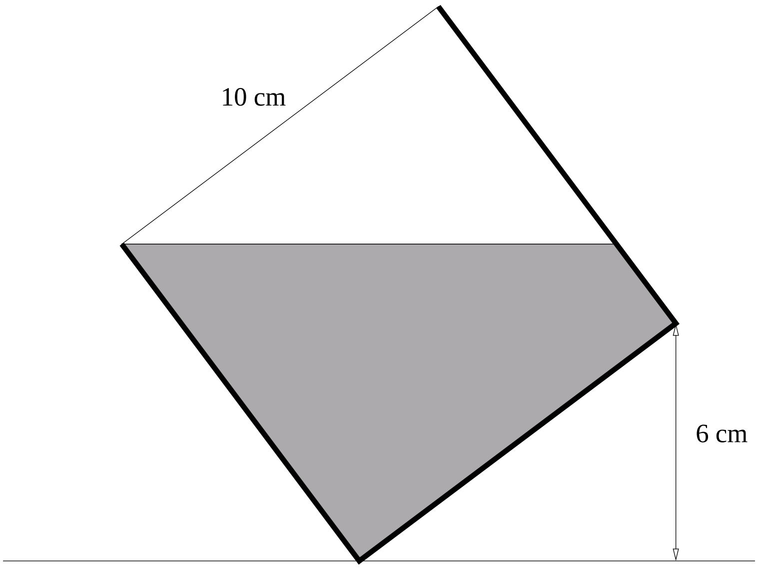


   (a) Berechne das Volumen der Prismen $AB_nCD_nE_nF_n$ in Abhängigkeit von x. [Ergebnis: $V(x) = (-8x^2 + 28x + 120)\,\text{cm}^3$]

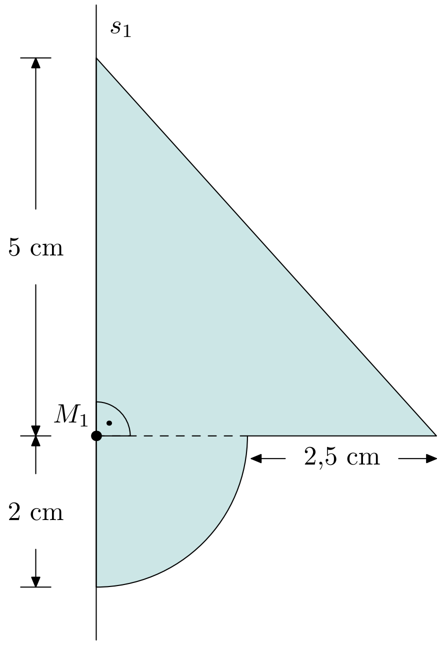
(b) Berechne das maximal mögliche Volumen und gib den zugehörigen $x-$Wert an.

(c) Berechne die $x-$Werte, bei denen Prismen das Volumen $V = 130\,\text{cm}^3$ besitzen.

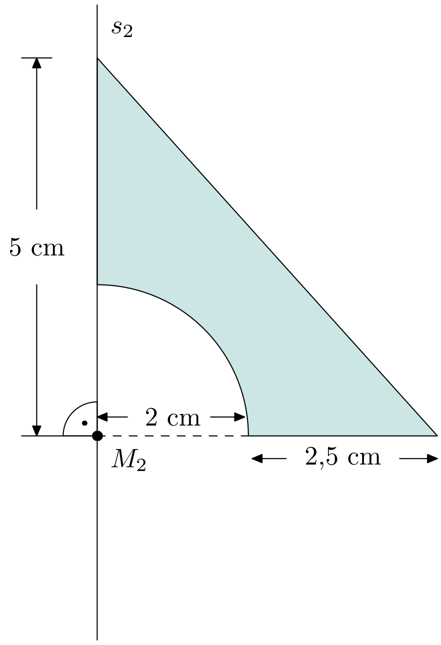
3. Gegeben ist eine würfelförmige Wanne mit der Seitenlänge 10 cm die bis zum Rand mit Wasser gefüllt ist. Kippt man sie längs einer Kante, sodass die gegenüberliegende Grundkante auf 6 cm angehoben wird, so läuft Wasser aus.
Wie viel ml laufen aus? Die Dicke der Wanne ist zu vernachlässigen.



4. In der Figur 1 und in der Figur 2 sind die Punkte M_1 und M_2 die Mittelpunkte der zugehörigen Kreisbögen.
Jede der beiden grau getönten Flächen rotiert um die betreffende Achse s_1 bzw. s_2.



Figur 1



Figur 2

(a) Berechne den Unterschied der Rauminhalte der beiden Rotationskörper.

(b) Maria behauptet: „Die Oberflächen der beiden Rotationskörper sind gleich groß.“ Hat Maria Recht? Begründe deine Antwort.

5. Die Mantelfläche einer geraden quadratischen Pyramide $ABCDS$ mit der Spitze S besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge a cm. Der Mittelpunkt der Grundfläche ist M.

   (a) Skizziere eine solche Pyramide.
   Zeige: Für die Pyramidenhöhe h gilt in Abhängigkeit von a: $h = \frac{a}{2}\sqrt{2}\,\text{cm}$.

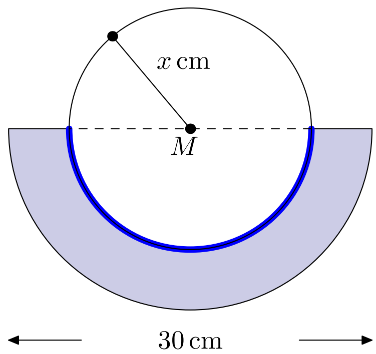
   (b) Zeichne für $q = 0,5$ und $\omega = 30°$ ein Schrägbild der Pyramide mit $a = 6$. Dabei soll $[AB]$ auf der Schrägbildachse liegen.

   (c) Untersuche das Dreieck DBS auf seine Besonderheiten.

   (d)
   - Verbinde die Mittelpunkte der vier Seitenkanten sowohl untereinander zu dem Viereck $EFGH$ als auch mit dem Mittelpunkt M. Dadurch entsteht eine einbeschriebene Pyramide $EFGHS$.
   - Berechne das Verhältnis der Oberflächen der beiden Pyramiden $EFGHS$ und $ABCDS$.
   - Berechne das Verhältnis der Rauminhalte der beiden Pyramiden $EFGHS$ und $ABCDS$.

6. Frau Lunde will für ihre Familie $0,5\,\text{kg}$ Spaghetti in einem Topf mit $20\,\text{cm}$ Durchmesser kochen. In der Anleitung steht: „Für $100\,\text{g}$ Spaghetti rechnet man einen Liter Wasser.“
   Wie hoch muss das Wasser nach dieser Anleitung im Topf anfangs stehen, wenn 15% der eingefüllten Wassermenge während des Kochvorgangs verdampfen?

7.



Die Darstellung zeigt den Axialschnitt eines Zimmerbrunnens: Eine Kugel aus Marmor mit dem Radius $r = x\,\text{cm}$ ist in eine unbewegliche Halbkugelschale mit einem äußeren Durchmesser von $30\,\text{cm}$ aus dem gleichen Material eingepasst. Ein dünner Wasserfilm in der Berührfläche der beiden Körper bewirkt, dass die Kugel fast reibungsfrei rotieren kann.

(a) Zeichne die Figur für $x = 7,5$ im Maßstab $1 : 5$.

(b) Berechne für $x = 7,5$ die Oberfläche der Halbkugelschale in der Einheit dm^2.

(c)
- Zeige: Für die Oberfläche O der Kugelschale gilt in Abhängigkeit von x:

$$O(x) = (x^2 + 475) \cdot \pi\,\text{cm}^2$$

- Bestätige damit dein Ergebnis der Aufgabe (b).

(d) Berechne x so, dass die Oberfläche der Halbkugelschale fünfmal so groß wie die der Vollkugel ist.

(e) Berechne für $x = 7,5$ das Volumen der Halbkugelschale in der Einheit dm^3.

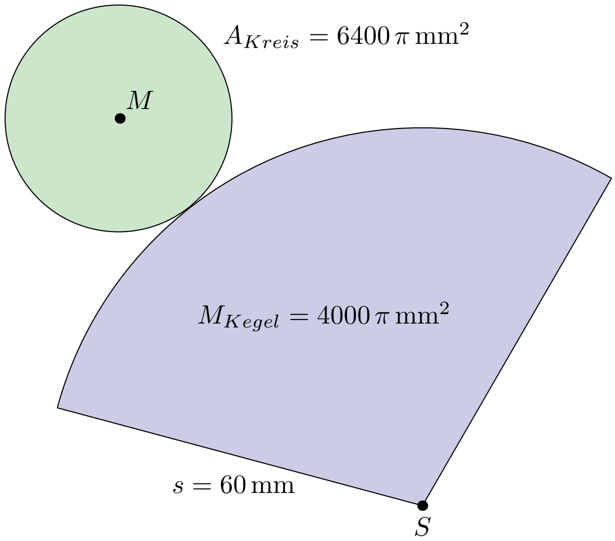
(f)
- Zeige: Für das Volumen V der Kugelschale gilt in Abhängigkeit von x:

$$V(x) = (2250 - \frac{2}{3}x^3) \cdot \pi\,\text{cm}^3$$

- Bestätige damit dein Ergebnis der Aufgabe (e).

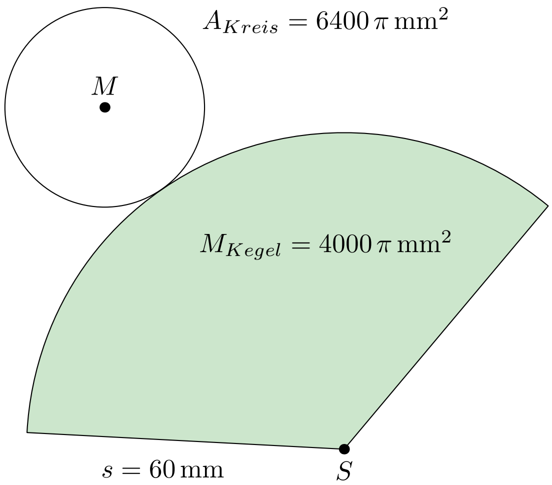
(g) Berechne x so, dass die Halbkugelschale genau so schwer wie die Vollkugel ist.

8.



Egon hat die Mantelfläche eines Kegels und dessen Grundfläche aus Papier ausgeschnitten. Zeige durch Rechnung, dass er die die beiden Teile nicht lückenlos und nicht bündig zu einem Kegel zusammenfügen kann.

9.



Erich hat die Mantelfläche eines Kegels und einen Kreis ausgeschnitten. Zeige rechnerisch, dass die Mantelfläche des Kegels und der Kreis als dessen Grundfläche nicht lückenlos und bündig zusammengefügt werden können.

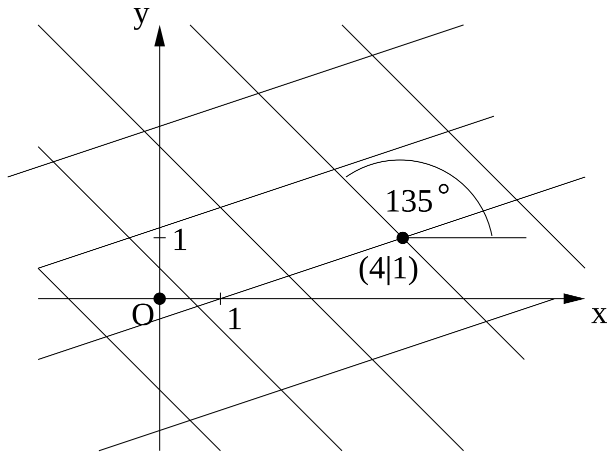
10. Ein halbkugelförmiges Glasgefäß mit einer Wandstärke von 5 mm hat ein Fassungsvermögen von 10 l.
Berechne den Außendurchmesser des Gefäßes in mm.

Teil II.

Wahlpflichtfächergruppe II/III

10. Lineare Funktionen

1. Gib die Gleichungen der beiden Parallelenscharen an, mit deren Hilfe man das unten abgebildete Muster zeichnen kann:



2. Eva Fritz und Erwin sollen die Relation R_1 untersuchen:

$$R_1 = \{(2 \mid 4);\ (0,5 \mid 0,25);\ (0 \mid 0);\ (-1 \mid 1)\,\}$$

Eva meint: „Immer, wenn du den x-Wert verdoppelst, erhältst du den y-Wert.“
Fritz widerspricht:„Wenn du den y-Wert mit sich selbst multiplizierst, dann erhältst du den x-Wert.“
Erwin entgegnet: „Es ist genau umgekehrt: Wenn du den x-Wert ... “

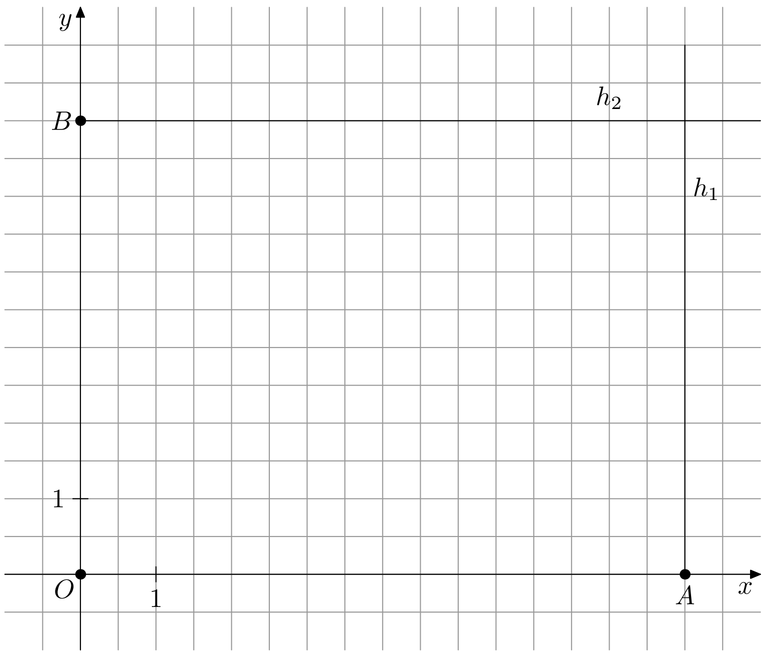
   (a) Vollende Erwins Satz sinnvoll.
   (b) Wer hat recht? Begründe deine Antwort anhand von zwei Beispielen.
   (c) Schreibe die richtige Gleichung mit x und y hin.
   (d) Aus der Relation R_1 ist die Relation R_2 entstanden:

$$R_2 = \{(2 \mid 5);\ (0,5 \mid 1,25);\ (0 \mid 1);\ (-1 \mid 2)\,\}$$

   - Beschreibe den Zusammenhang zwischen den beiden Relationen in Worten.
   - Schreibe die richtige Gleichung mit x und y hin, die immer in R_2 gilt.

3. Gegeben sind die beiden Geraden g_1 und g_2 durch die Gleichungen $g_1 : y + 2x - 5 = 0$ und $g_2 : y = 1,5x + 2$.
   (a) Zeichne diese beiden Geraden in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-2 \leqq x \leqq 5$ und $-1 \leqq y \leqq 6$
   (b) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Geraden. Runde das Ergebnis.
   (c) Gib die Gleichung einer Geraden h an, welche die Gerade g_2 nicht schneidet.
   (d) Überprüfe, ob der Punkt $A(111222333999,4 \mid -999888777666555,1)$ auf der Geraden g_2 liegt.

4.



Die beiden Halbgeraden h_1 und h_2 mit den Anfangspunkten $A(8 \mid 0)$ bzw. $B(0 \mid 6)$ stehen auf der x- bzw. y-Achse senkrecht.
Auf der Halbgeraden h_1 wandern Punkte P_n und auf der Halbgeraden h_2 wandern Punkte Q_n. Dabei gilt: $\overline{AP_n} = \overline{BQ_n} = d\,\text{cm}$.

(a) Zeichne für $d = 2$ die beiden Ursprungshalbgeraden $[OP_1$ und $[OQ_1$ in obiges Koordinatensystem ein.

(b) Berechne d so, dass die zugehörigen Ursprungshalbgeraden $[OP_2$ und $[OQ_2$ aufeinander fallen.

[Ergebnis: $d = 4\sqrt{3}$]

(c) Konstruiere die Punkte P_2 und Q_2 und zeichne die zugehörigen Ursprungshalbgeraden $[OP_2$ und $[OQ_2$ ein

11. Gleichungssysteme

1. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{|lll} & 2(x-7) & = & y-25 \\ \wedge & 3y-2(x-7) & = & 35 \\ \hline \end{array}$$

   (a) Berechne die Lösungsmenge mit einem selbst gewählten Verfahren.

   (b) Begründe, weshalb du gerade dieses und kein anderes Verfahren gewählt hast.

2. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{|llll} & 3y+ax & = & 5a+3 \\ \wedge & 2x-y & = & 3-a \\ \hline \end{array}$$

   (a) Berechne die Lösungsmenge in Abhängigkeit von a. Vereinfache dein Ergebnis so weit wie möglich.

   (b) Wenn du richtig gerechnet hast, dann stellt $a=-6$ einen Sonderfall dar. Begründe dies und berechne die Lösungsmenge für diese Belegung von a.

3. Löse das Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren auf zwei verschiedene Arten:

$$\begin{array}{|llll} & 3,5x-4y & = & -22 \\ \wedge & 2x+3y & = & -2 \\ \hline \end{array}$$

4. Löse das Gleichungssystem mit dem Determinantenverfahren:

$$\begin{array}{|llll} & 1,2x+0,4y-7 & = & 0 \\ \wedge & 6,4x-1,6y & = & 28 \\ \hline \end{array}$$

5. Gegeben sind die beiden Geraden
   $g: y=-0,25x+3$ und
   $h: y=x-1,5$.

(a) Zeichne die beiden Geraden in ein Koordinatensystem.
Platzbedarf: $0 \leqq x \leqq 7$ und $-3 \leqq y \leqq 9$

(b) Berechne exakt die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Geraden.

(c) Zeichne eine Gerade g^* ein, die durch den Punkt $Q(2 \mid 6)$ verläuft und gib ihre Gleichung an.

(d) Begründe: Jede weitere Gerade, welche die Gerade h nicht schneidet, muss die Gerade g irgendwo schneiden.

6. Gegeben sind eine Gerade g durch die Punkte $P(3 \mid 2,5)$ und $Q(-4,5 \mid 0)$ und eine Gerade $h: y = -x - 0,5$.

   (a) Zeichne die beiden Geraden g und h in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-6 \leqq x \leqq 4$ und $-3 \leqq y \leqq 4$

   (b) Berechne die Gleichung der Geraden g.

   (c) Die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt S.
   Zeichne diesen Punkt ein, lies seine Koordinaten ab und weise rechnerisch nach, dass dieser Punkt tatsächlich auf den beiden Geraden g und h liegt.

   (d) Schreibe die Gleichung der Geraden h^* hin, welche die Gerade h nicht schneidet und die nicht durch den dritten Quadranten verläuft.

   (e) Begründe jemandem, der die Zeichnung nicht kennt, dass die Gerade h die Gerade g schneiden muss.

7. Gegeben sind die beiden Geraden $g_1: y = -0,25x + 3$ und $g_2: y = x - 1,5$. Eine weitere Gerade g_3 verläuft durch die Punkte $P(2 \mid 4)$ und $Q(0 \mid -4,5)$.

   (a) Zeichne die drei Geraden in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-7 \leqq x \leqq 7$ und $-6 \leqq y \leqq 7$

   (b) Berechne die Gleichung der Geraden g_3.

   (c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g_1 mit der Geraden g_2 .

   (d) Durch den Punkt $A(-300 \mid 200)$ verläuft die Gerade g_4, die zur Geraden g_2 parallel ist.
   Berechne die Gleichung dieser Geraden g_4.

   (e) Die Gerade g_1 schneidet die y-Achse im Punkt R. Die Gerade g_2 schneidet die y-Achse im Punkt Q.
   Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks QRS möglichst genau.

8. Addierst du zu einer ganzen Zahl das Doppelte einer zweiten Zahl, so erhälst du 142. Als Ergebnis erhälst du aber 5, wenn du das 5-fache der ersten Zahl von der zweiten Zahl subtrahierst.
   Wie heißen die beiden Zahlen?

9. Klaus verkauft auf dem Flohmarkt seine alten Comic-Hefte für 0, 50 € pro Stück.
   (a) Stelle den Zusammenhang zwischen der Anzahl der verkauften Hefte x und den Einnahmen y graphisch dar.
   (b) Als Standgebühr muss Klaus 2, 50 € bezahlen. Zeichne dazu den entsprechenden Graphen in dasselbe Koordinatensystem ein.

10. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcrl} & x+y & = & 1 & (1) \\ \wedge & x+y & = & -37 & (2) \\ \hline \end{array}$$

Begründe auf verschiedene Weise: Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems ist leer.

11.

$$\begin{array}{rrcrcrl} & 3x & - & 7y & = & -27 & (1) \\ \wedge & -5x & + & 9y & = & 37 & (2) \\ \hline \end{array}$$

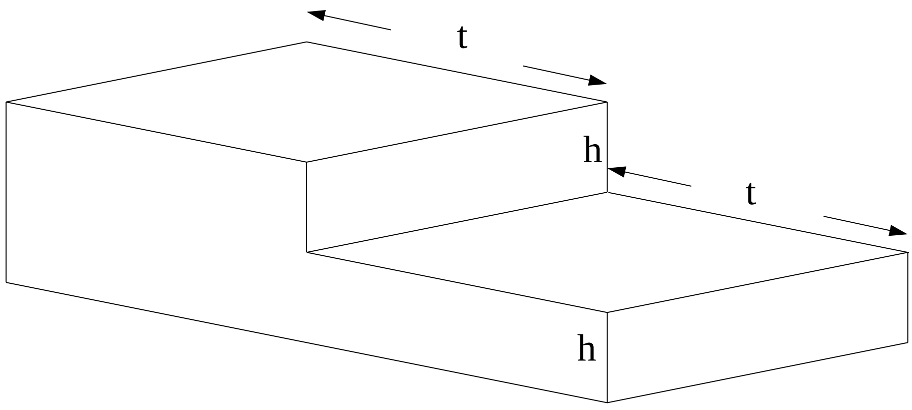
Else und Erwin sollen das obige Gleichungssystem lösen. Erwin entscheidet: „Wir nehmen das Gleichsetzungsverfahren.“ Else widerspricht: „Da müssten wir ja die beiden Gleichungen ..., und das wird schwierig, weil wir am Ende ... “
   (a) Was hat Else gemeint?
   (b) Löse das Gleichungssystem mit einem anderen Verfahren, das dir geeignet erscheint.

12. In einer Zoohandlung wurden zehn Mäuse zu je 2,50 €, Goldhamster zu je 4,00 € und Zwergkaninchen zu je 8 € verkauft (siehe Tabelle).

Tierart	Mäuse	Goldhamster	Zwergkaninchen
Preis pro Stück in €	2, 50	4, 00	8,00
Anzahl	10		

Insgesamt wurden 23 Tiere verkauft. Die Einnahmen betrugen 97 €. Berechne, wie viele Goldhamster und Zwergkaninchen verkauft wurden.

13.



„Die magische Zahl für Treppen lautet 63 Zenimeter. So viel beträgt das Schrittmaß, das für eine gute Begehbarkeit steht. ... Das Schrittmaß errechnet sich nach folgender Formel: Zweimal die Stufenhöhe h plus einmal die Stufentiefe t gleich 63 Zentimeter.“ Quelle: Nordbayerischer Kurier vom 12. Sept 2010, S. 22

(a) Stelle eine Formelgleichung auf, die das Schrittmaß von 63 cm im Zusammenhang mit der Stufenhöhe h und der Stufentiefe t beschreibt.

(b) Herr Feust will nach dieser Formelgleichung eine Steintreppe vom Haus zum Garten anlegen. Er meint: „Je niedriger die Stufenhöhe wird, desto länger fällt nach dieser Formelgleichung die Stufentiefe aus.“
Bestätige diesen Sachverhalt mit einem Zahlenbeispiel.

(c) Im Haus der Familie Feust wohnen auch die schon etwas gebrechlichen Eltern von Frau Feust. Daher wird festgelegt, dass die Stufenhöhe 16 cm nicht überschreiten darf. Berechne das zugehörige Mindestmaß der Stufentiefe.

(d) Während der Arbeiten schaut Nachbar Tufes, der alles besser weiß, interessiert zu: „Ich hätte einfach Stufentiefe = Stufenhöhe gewählt.“ Was meinst du dazu? Begründe deine Antwort.

(e) Wie lang wird die gesamte Treppe, wenn sie bei einer Stufenhöhe von 15 cm vom Haus bis in den Garten eine Höhendifferenz von $1,20$ m überwindet?

14. In einem Lehrbuch steht zum Thema „Gleichungssysteme“ eine Aufgabe mit der Musterlösung:
„Es sind a und b natürliche Zahlen. Berechne a und b so, dass $a^2 - b^2 = 15$ gilt.“

Musterlösung

$$a^2 - b^2 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)(a+b) = 15\,.$$

Wegen $\mathbb{T}_{15} = \{1;\, 3;\, 5;\, 15\}$ und $a + b > a - b$ folgt

entweder:

$$\begin{array}{lcccccl} & a & + & b & = & 15 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 1 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 16 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 8 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 7$

Probe: $8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$, stimmt.

oder:

$$\begin{array}{lcccccl} & a & + & b & = & 5 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 3 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 8 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 4 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 1$

Probe: $4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$, stimmt.

$$\Rightarrow \quad L = \{(4 \mid 1);\, (8 \mid 7)\}$$

(a) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 77$ und mache die Probe..

(b) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 83$ und mache die Probe..

(c) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 38$ und mache die Probe..

(d) Edwin behauptet: „Wenn der Wert der Differenz aus den Quadraten von a und b gerade ist, dann ist die Lösungsmeng leer.“
Begründe, dass Edwin nicht Recht hat.

12. Reelle Zahlen

1. Vereinfache jeweils den Term so weit wie möglich ohne mit dem Taschenrechner zu runden. Es muss ein logischer Rechenweg zum Ergebnis führen.
   (a) $\sqrt{\left(\sqrt{1000}+\sqrt{999}\right)\cdot\left(\sqrt{1000}-\sqrt{999}\right)}$
   (b) $\left(\sqrt{3}^{\,2}-3\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^{3876}$

2. Zeige ohne Verwendung des ETR:
   (a) $(3+1^{9876534212345})\cdot(7\sqrt{2}-3\sqrt{2})^2=128$
   (b) $\left(\frac{185}{37}-0^{555666777888999}\right):\left(\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}+95\right)=\frac{1}{20}$
   (c) $\sqrt{9\frac{1}{4}}:\sqrt{4\frac{5}{8}}=\sqrt{2}$
   (d) $\left(\sqrt{12}+13^{1000}\right)\cdot\left(\sqrt{1}^{777555333111}-\frac{1}{2}:\frac{3}{6}\right)\cdot\left(\frac{9888777666555}{9888777666554}+14^{-87}\right)=0$

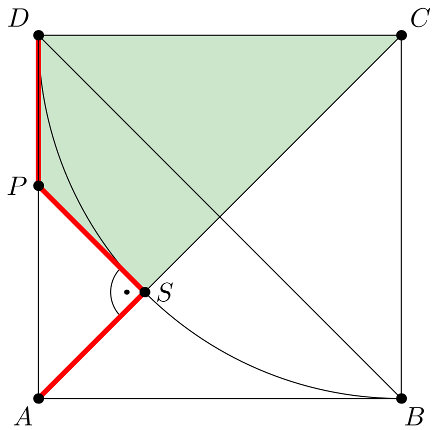
3. Erwin und Claudia sollen den Term $\sqrt{9\frac{1}{4}}$ vereinfachen. Claudia meint: „Das haben wir gleich:
   $\sqrt{9}=3$ und $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$, also kommt $3,5$ heraus."

   Erwin überprüft Claudias Ergebnis mit dem Taschenrechner: „Ich bekomme $3,041381265$ heraus".
   Claudia überlegt: „Aber es kann ja nur ein Ergebnis richtig sein."
   Wo liegt der Fehler? Begründe deine Antwort.

4. Karin hat im Taschenrechner $\sqrt{2}$ eingeben. Er zeigt $1,414213562$ an. Sie meint dazu: „Das muss ein gerundeter Wert sein." Begründe, dass sie Recht hat.

5. Begründe: $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right)^{444}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^{444}=16^{\,111}$.

6.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b)
- Begründe rechnerisch: Das Viereck $SCDP$ ist ein achsensymmetrischer Drachen.
- Besitzt dieses Drachenviereck einen Umkreis? Begründe deine Antwort.

7. Gegeben sind die folgenden Gleichungen mit $G = \mathbb{R}$:

$$-5x + 30 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{x-6}{17,2} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{x-6}{x+3} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{x-6}{-3x+18} = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{36-x^2}{x-6} = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{0,5x^2-6x+18}{x+6} = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{x^2-4x-12}{2x-6} = 0 \qquad (7)$$

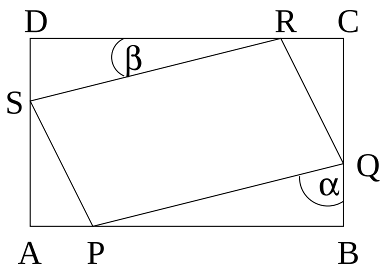
$$(-1,1)^{17} \cdot (\sqrt{2x} + 2\sqrt{3}) \cdot 17\frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2x} - \sqrt{12}) = 0 \qquad (8)$$

(a) Ermittle die Lösung der Gleichung (1).

(b) Untersuche, ob die Gleichungen (2) bis (8) die gleiche Lösungsmenge wie die Gleichung (1) besitzen. Begründe jeweils deine Antwort.

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

1. In einem Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = \overline{CD} = 5\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = \overline{DA} = 3\,\text{cm}$.
   Weiter gilt: $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = \overline{DS} = 1\,\text{cm}$

   (a) Übertrage die Zeichnung auf dein Blatt.

   (b) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ möglichst exakt.

   (c) Es gilt $\alpha = 75{,}96°$. Berechne das Winkelmaß β auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

2. Die eine Seite eines Rechtecks $PQRS$ ist doppelt so lang wie die andere Rechtecksseite. Das Rechteck besitzt einen Flächeninhalt von $1{,}62\,\text{dm}^2$.

   (a) Berechne die beiden Seitenlängen des Rechtecks.

   (b) Berechne die Länge einer Diagonalen.

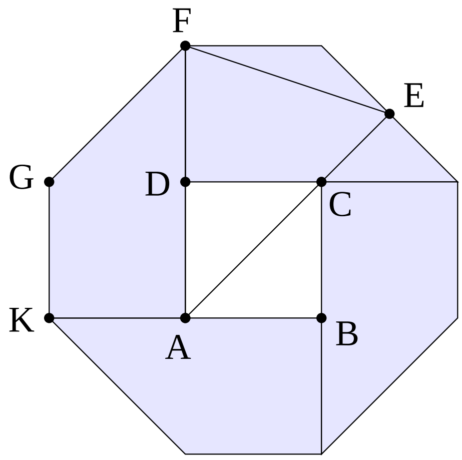
3. Von einem Trapez $ABCD$ weiß man: $A(1|1)$, $B(9|5)$, $C(x|7{,}5)$ und $D(2|6)$. Außerdem gilt: $[AB] \parallel [CD]$.
   Zeichne das Trapez und berechne x.

4. Ein Trapez $ABCD$ besitzt die Höhe $h = 4{,}2\,\text{cm}$ und die beiden parallelen Seiten $[AB]$ und $[CD]$. Dabei gilt: $\overline{AB} = 8{,}5\,\text{cm}$ und $\overline{CD} = x\,\text{cm}$
   Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ $30{,}03\,\text{cm}^2$ groß ist.

5. In einem Trapez $ABCD$, dessen Flächeninhalt $13\,\text{cm}^2$ beträgt, sind die beiden Seiten $[AB]$ und $[CD]$ parallel.
   Weiter gilt: Das Trapez ist $3,25\,\text{cm}$ hoch und $\overline{AB} = 5,2\,\text{cm}$.
   Berechne die Länge der Strecke $[CD]$.

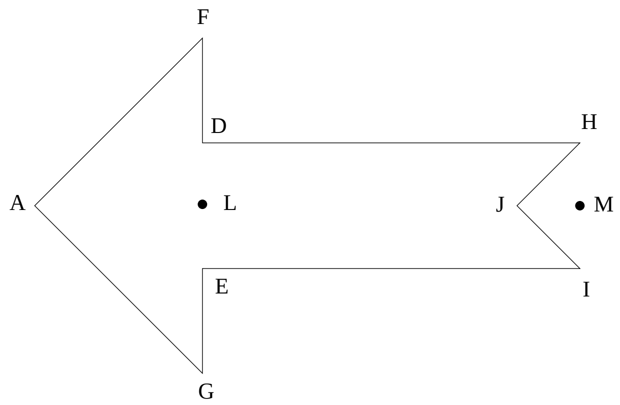
6. Eine Raute $PQRS$ besitzt einen Flächeninhalt von $24\,\text{cm}^2$. Eine Diagonale ist $12\,\text{cm}$ lang.
   (a) Berechne die Länge der zweiten Diagonalen.
   (b) Berechne den Umfang dieser Raute.

7. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das weiße Viereck ist ein Quadrat. Es gilt $\overline{AB} = \overline{DF} = a\,\text{cm}$. Zusätzlich ist hier das Dreieck AEF eigezeichnet.

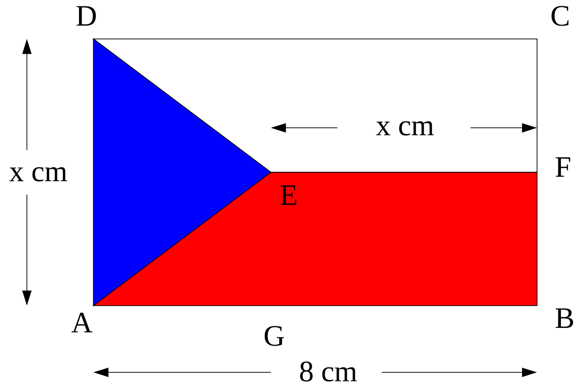


   (a) Zeichne die Figur für $\overline{FG} = 3,2\,\text{cm}$ so, dass die Strecke $[KB]$ waagrecht liegt.
   (b) Berechne in deiner Zeichnung den Flächeninhalt Quadrates $ABCD$.
   (c)
   - Untersuche ohne Verwendung des Taschenrechners, ob das Dreieck AEF gleichschenklig ist. Gilt dein Ergebnis auch dann noch, wenn die Figur verkleinert oder vergrößert wird? Begründe deine Ansicht.
   - Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks auf drei verschiedene Arten in Abhängigkeit von a.

8. Berechne den Flächeninhalt des unten skizzierten Pfeiles.
   Dabei gilt: $\overline{AM} = 6\,\text{cm}$, $\overline{AL} = 2\,\text{cm}$, $\overline{FG} = 3\,\text{cm}$, $\overline{HI} = 1,5\,\text{cm}$, $\overline{AJ} = 5,5\,\text{cm}$



9. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = \overline{EF} = x\,\text{cm}$ mit $x \in \mathbb{R}^+$.
Hinweis: Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne die Figur für $x = 4,5$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABFE$ in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A_T(x) = (0,25x^2 + 2x)\,\text{cm}^2$]

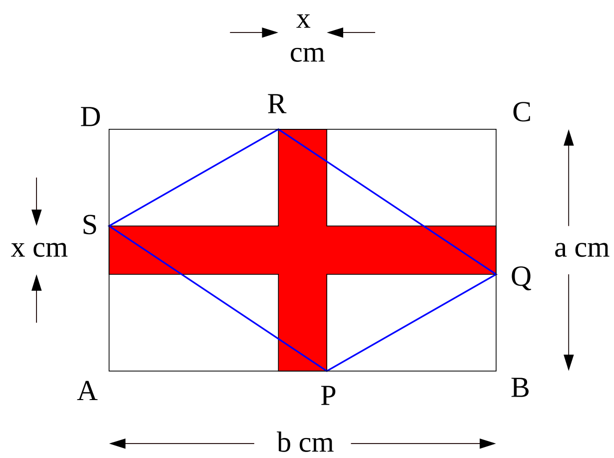
(c) Untersuche auf verschiedene Weise, ob es eine Belegung für x gibt, so dass der Flächeninhalt des Trapezes $ABFE$ den Wert $33\,\text{cm}^2$ annimmt.

(d) Berechne x so, dass die Inhalte aller drei Teilflächen im Inneren des Rechtecks $ABCD$ gleich groß sind.

(e) Berechne x so, dass das Dreieck AED gleichseitig wird.

(f) Berechne x so, dass das Dreieck AED gleichschenklig-rechtwinklig wird.

10. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England. Zusätzlich ist noch das Viereck $PQRS$ eingezeichnet.



(a) Zeichne die Figur für $a = 5$, $b = 8$ und $x = 1$.

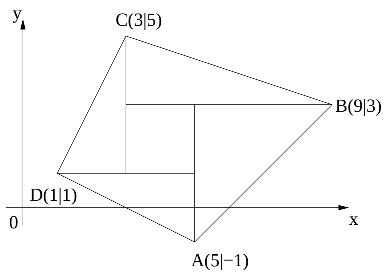
(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Parallelogramm.

(c) Zeige: Die Berechnung des Flächeninhalts A der Vierecke $PQRS$ in Abhängigkeit von a, b und x ergibt:

$$A(x) = \frac{ab - 0,5x^2}{2} \text{ cm}^2.$$

(d) Begründe: Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt: $A(PQRS) < 0,5 \cdot A(ABCD)$.

11. Klaus will den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ berechnen. Er hat dazu in das Viereck Strecken eingezeichnet.



(a) Weshalb hat Klaus diese Einteilung vorgenommen? Kann er auf diese Weise den Flächeninhalt exakt berechnen? Begründe deine Antwort.

(b) Zeichne das Viereck und berechne seinen Flächeninhalt auf eine andere Weise.

(c) Zeichne ein Drachenviereck, das denselben Flächeninhalt wie das Viereck A_{ABCD} besitzt.

12. Gegeben sind die Punkte $A(-1|4)$ und $B(2|1)$ sowie die Gerade $g : y = -2x + 9$. Punkte C_n wandern auf der Geraden g, so dass laufend Dreiecke ABC_n erzeugt werden.
    (a) Zeichne die Gerade g und für $C_1(x_1|7)$ das Dreieck ABC_1 in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-2 \leqq x \leqq 7$ und $-4 \leqq y \leqq 10$
    (b) Zeige, dass für den Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von x gilt:
    $$A(x) = (9 - 1,5\,x)\,\mathrm{cm}^2$$
    (c) Gib zwei Belegungen von x an, für die es keines dieser Dreiecke ABC_n gibt. Begründe deine Wahl, z.B. anhand deiner Zeichnung.
    (d) Untersuche zeichnerisch, ob es unter allen Dreiecken ABC_n rechtwinklige gibt, welche die Seite $[AB]$ als Kathete besitzen.
    (e) Angenommen, die Punkte C_n würden nicht auf der Geraden g, sondern auf einer anderen Geraden g^* wandern. Diese Gerade g^* soll so liegen, dass dann der Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n konstant bleibt.
    Zeichne eine solche Gerade g^* ein.

13. Ein Quadrat besitzt einen Flächeninhalt von $39,69\,\mathrm{cm}^2$.
    Berechne die Länge einer Diagonalen.

14. Gegeben ist das Dreieck ABC durch $A(4 \mid 1)$, $B(-2 \mid 5)$ und $C(-4 \mid 3)$.
    (a) Zeichne das Dreieck ABC in ein Koordinatensystem.
    Platzbedarf: $-5 \leqq x \leqq 5$ und $-1 \leqq y \leqq 6$
    (b) Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks, indem du seine Grundlinie und seine Höhe abmisst.
    (c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC exakt mit Hilfe eines geeigneten Rechtecks, das du einzeichnest. [Ergebnis: $A_{\triangle ABC} = 10\,\mathrm{cm}^2$]
    (d) Zeichne zwei rechtwinklige Dreiecke, die zwar jeweils den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck ABC besitzen, die aber nicht kongruent sind.

15. Von einem Trapez $ABCD$ weiß man: $A(1|1)$, $B(9|5)$, $C(x|7,5)$ und $D(2|6)$. Außerdem gilt: $[AB] \parallel [CD]$.
    Zeichne das Trapez und berechne x.

16. Ein Trapez $ABCD$ besitzt die Höhe $h = 4,2\,\mathrm{cm}$ und die beiden parallelen Seiten $[AB]$ und $[CD]$. Dabei gilt: $\overline{AB} = 8,5\,\mathrm{cm}$ und $\overline{CD} = x\,\mathrm{cm}$
    Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ $30,03\,\mathrm{cm}^2$ groß ist.

17. Gegeben sind die Punkte $A(-1|4)$ und $B(2|1)$ sowie die Gerade $g : y = -2x + 9$. Punkte C_n wandern auf der Geraden g, so dass laufend Dreiecke ABC_n erzeugt werden.

   (a) Zeichne die Gerade g und für $C_1(x_1|7)$ das Dreieck ABC_1 in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-2 \leqq x \leqq 7$ und $-4 \leqq y \leqq 10$

   (b) Zeige, dass für den Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von x gilt:
   $$A(x) = (9 - 1{,}5\,x)\,\text{cm}^2$$

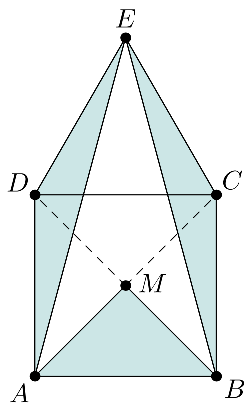
   (c) Gib zwei Belegungen von x an, für die es keines dieser Dreiecke ABC_n gibt. Begründe deine Wahl, z.B. anhand deiner Zeichnung.

   (d) Untersuche zeichnerisch, ob es unter allen Dreiecken ABC_n rechtwinklige gibt, welche die Seite $[AB]$ als Kathete besitzen.

   (e) Angenommen, die Punkte C_n würden nicht auf der Geraden g, sondern auf einer anderen Geraden g^* wandern. Diese Gerade g^* soll so liegen, dass dann der Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n konstant bleibt.
   Zeichne eine solche Gerade g^* ein.

18. Ein Quadrat besitzt einen Flächeninhalt von $39{,}69\,\text{cm}^2$.
   Berechne die Länge einer Diagonalen.

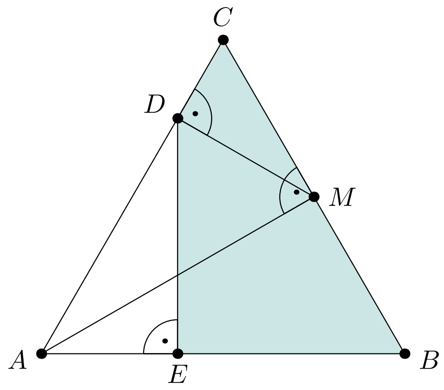
19. An das Quadrat $ABCD$ ist das gleichseitige Dreieck DCE angefügt worden:



   (a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

   (b) Begründe: Die getönten Dreiecke besitzen den gleichen Flächeninhalt.

20.

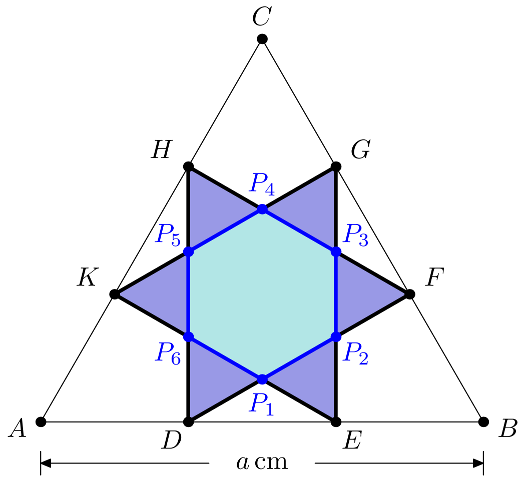


Das Grundstück ABC hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit einer Seitenlänge $a = 75\,\text{m}$. Die Grundstücksfläche $BCDE$ ist ein Rasenspielfeld. Der Rest ist asphaltiert. Es gilt: $\overline{MB} = \overline{MC}$.

(a) Zeichne die Figur mit den Punkten E, M und D im Maßstab $1 : 1000$.

(b) Berechne den Anteil der Rasenfläche am Grundstück ABC in Prozent.

21.



Das Dreieck ABC ist gleichseitig mit der Seitenlänge $a\,\text{cm}$. Die Punkte D, E, F, G, H und K dritteln jeweils die Dreiecksseite, auf der sie liegen.

(a) Zeichne die Figur für $a = 7,5$.

(b) Begründe: Die Punkte D, E, F, G, H und K sind Scheitel von rechten Winkeln. Zeichne dazu den Mittelpunkt M der Basis $[AB]$ sowie die Gerade CM ein und vergleiche die Teilverhältnisse auf den Strecken $[AM]$ und $[AC]$.

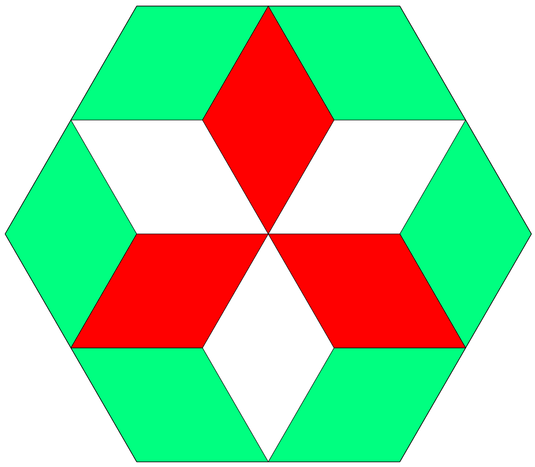
(c) Berechne das Verhältnis k_1 der Flächeninhalte des sechszackigen Sterns und des Dreiecks ABC.

$$[\text{ Ergebnis: } k_1 = \frac{4}{9} \;]$$

(d) Begründe: Das Verhältnis k_2 der Flächeninhalte des inneren Sechsecks $P_1 \ldots P_6$ und des Dreiecks ABC ist halb so groß wie k_1. Zeichne dazu im Sechseck geeignete Hilfslinien ein.

(e)
- Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, das denselben Flächeninhalt aufweist wie der sechszackige Stern.
- Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, das denselben Flächeninhalt aufweist wie das innere Sechseck $P_1 \ldots P_6$.

22.



In das regelmäßige Seckseck mit der Seitenlänge $a = 6\,\text{cm}$ ist ein sechszackiger Stern einbeschrieben, in dem das Mitsubishi-Logo („Drei Diamanten“) eingebettet ist. Wenn du das Bild lange genug betrachtest, entdeckst du auch 3 schräge Würfel.

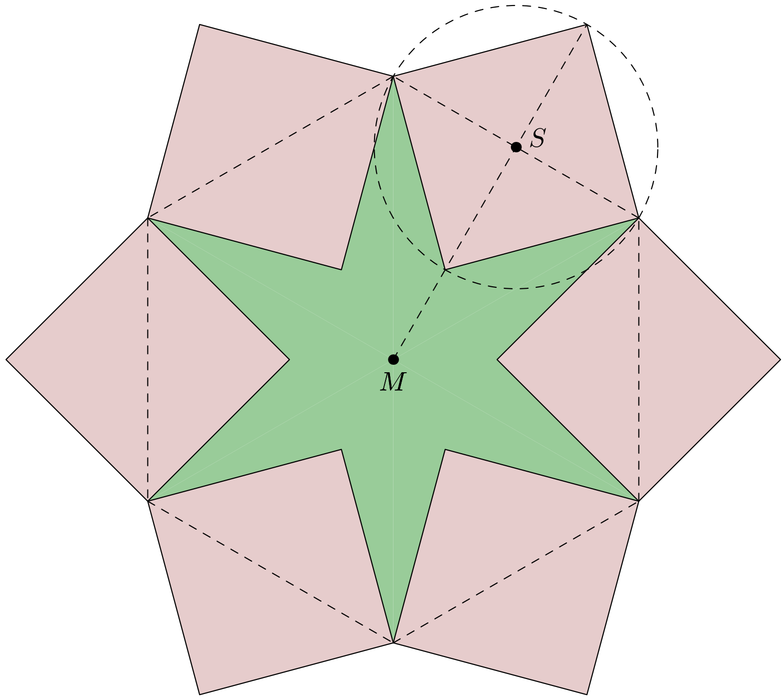
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Die drei „Mitsubishi-Vierecke“ sind kongruente Rauten.

(c) Ermittle den prozentualen Anteil des Sterns am Seckseck.

(d) Ermittle den prozentualen Anteil des Mitsubishi-Logos am Seckseck.

23.



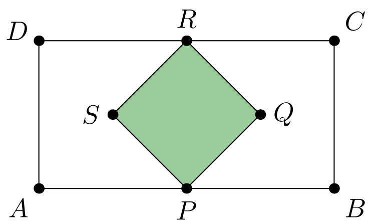
Die Figur ist dem Logo eines Verlages in München nachempfunden. Ihr liegt ein regelmäßiges Sechseck zugrunde. Die sechs Seiten sind jeweils die Diagonalen der Quadrate. Im Inneren ist ein Stern zu sehen.

(a) Zeichne zunächst das regelmäßige Sechseck mit einer Seitenlänge von 6 cm. Füge dann die Quadrate hinzu.

(b) Berechne den Flächeninhalt eines Quadrates.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Sterns.

24.



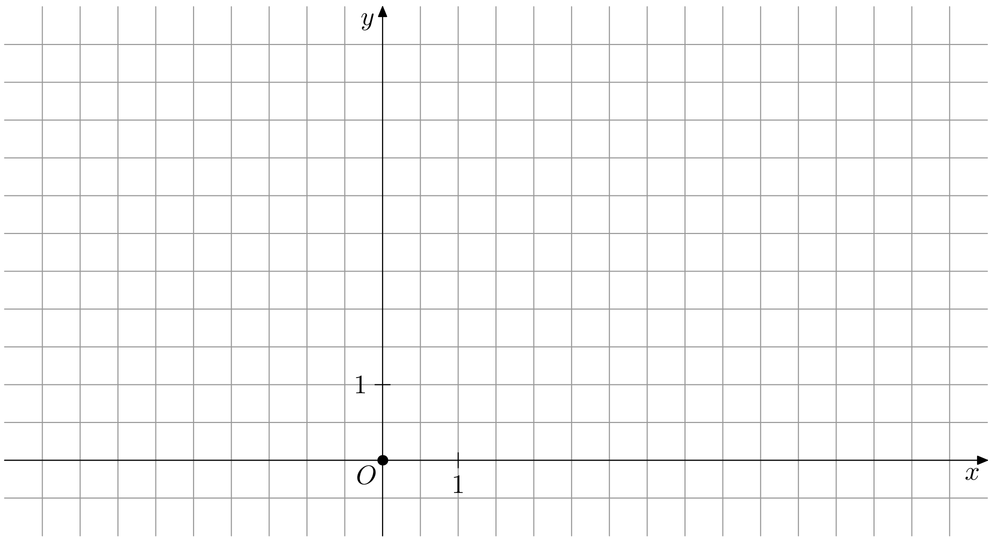
Die Seite [AB] des Rechtecks $ABCD$ ist 6 cm und die Seite [BC] ist x cm lang. Die Punkte P und R sind die Mittelpunkte der betreffenden Rechtecksseiten. Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat.

(a)
- Zeichne die Figur für $x = 3$.
- Wie viel Prozent der Rechtecksfläche nimmt das Quadrat jetzt ein?

(b) • Zeichne die Figur für $x = 8$.
  • Für welche Belegungen von x liegen die Punkte S und Q des Quadrates nicht außerhalb des Rechtecks? Begründe.

(c) Berechne x so, dass das Quadrat 40% der Rechtecksfläche bedeckt.

25.



Die Punkte D_n liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 0,5x + 2$. Sie besitzen jeweils den gleichen Abszissenwert x wie die Punkte $A_n(x \mid 0)$. Zusammen mit den Punkten B_n und C_n entstehen dadurch Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ wobei Folgendes gilt: $C_n \in g$, $\overline{A_nB_n} = 3\,\text{LE}$ und $[A_nD_n] \parallel [B_nC_n]$.

(a) Zeichne die Gerade g und für $x = -1$ und $x = 4$ die beiden Trapeze $A_1B_1C_1D_1$ bzw. $A_2B_2C_2D_2$ in das obige Koordinatensystem.

(b) Berechne alle Belegungen von x, für die es Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ gibt.

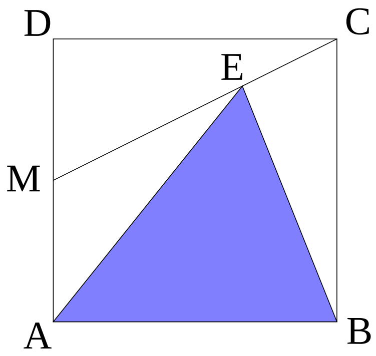
(c) Zeige: $C_n(x + 3 \mid 0,5x + 3,5)$.

(d) Zeige: Für den Flächeninhalt A aller Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ gilt in Anhängigkeit von x:
$$A(x) = (1,5x + 8,25)\,\text{FE}$$

(e) Unter allen Trapezen $A_nB_nC_nD_n$ gibt es eines, das einen Flächeninhalt von $53,25\,\text{FE}$ aufweist. Berechne x.

(f) Unter allen Trapezen $A_nB_nC_nD_n$ gibt es das Trapez $A_3B_3C_3D_3$, dessen Seite $[B_3C_3]$ fünf Mal so lang ist wie die Seite $[A_3D_3]$. Berechne x.

26.



Die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ beträgt 6 m. Der Punkt M halbiert die Seite $[AD]$. Die Dreiecke AEM und BCE sind flächengleich.

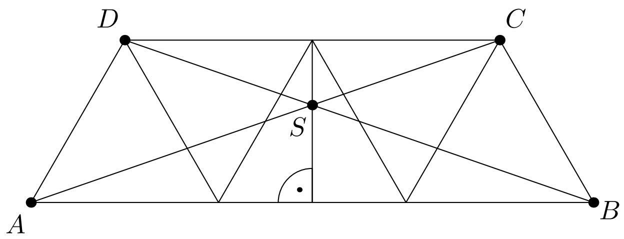
(a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks DMC.

(b) Begründe: Der Abstand des Punktes E zur Seite $[AD]$ ist doppelt so groß wie der zur Seite BC.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABE.

Quelle: Bayerischer Mathematiktest 1998

27.



Fünf gleichseitige Dreiecke wurden zu dem Trapez $ABCD$ zusammengefügt.

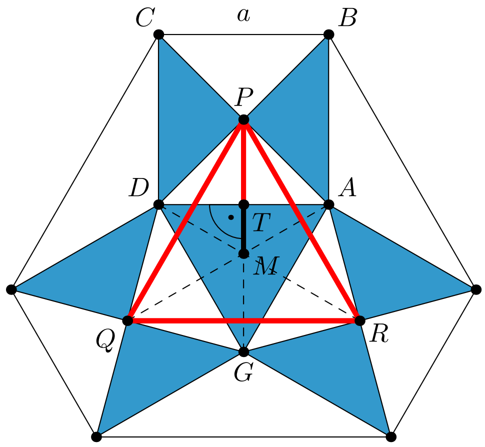
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 12\,\text{cm}$.

(b) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke DSC und ABS.

(c) In welchem Verhältnis teilt der Diagonalenschnittpunkt S die Trapezhöhe?

(d) Berechne den prozentualen Anteil der Fläche des Dreiecks DSC am Trapez $ABCD$.

28.

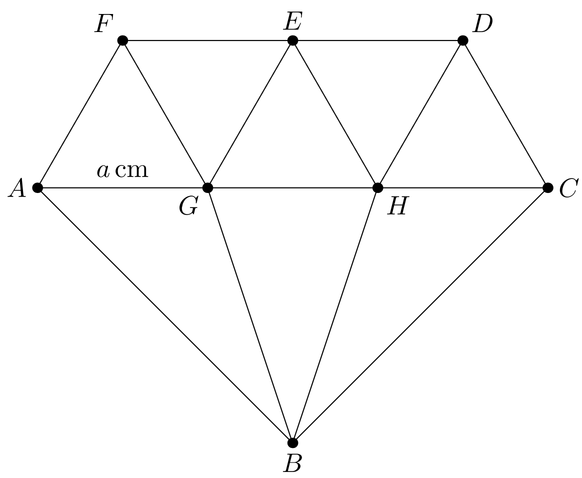


Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Im Zentrum befindet sich das gleichseitige Dreieck ADG. Das Dreieck PQR und die gestrichelten Strecken wurden zusätzlich eingezeichnet. Die Länge der Quadratseite $\overline{BC}$ ist a.

(a) Zeichne die Figur für $a = 4\,\text{cm}$.

(b) Vergleiche den Flächeninhalt der beiden gleichseitigen Dreiecke ADG und PQR in Prozent.

29.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Viereck $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken mit der jeweiligen Seitenlänge $a\,\text{cm}$ zusammensetzt.

(a) Zeichne die Figur für $a = 3$.

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A_1 des Vierecks $BHEG$ gilt in Abhängigkeit von a:

$$A_1(a) = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3}+3\right)\ \mathrm{cm}^2$$

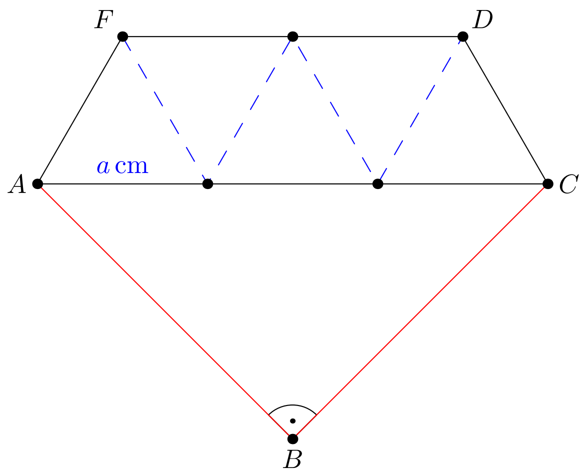
(c)
- Begründe: Das Viereck $ABGF$ besitzt den gleichen Flächeninhalt wie das Viereck $BHEG$.
- Begründe: Das Viereck $BHEG$ bedeckt weniger als ein Drittel der Fläche des Fünfecks $ABCDF$.

(d) Zeige: Für den Flächeninhalt A_2 des Vierecks $BHEG$ gilt in Abhängigkeit von a:

$$A_2(a) = \frac{a^2}{4}\left(5\sqrt{3}+9\right)\ \mathrm{cm}^2$$

(e) Wie viel Prozent der Fläche des Fünfecks $ABCDF$ wird vom Viereck $BHEG$ eingenommen?

30.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Viereck $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken mit der jeweiligen Seitenlänge a cm zusammensetzt.

(a) Zeichne die Figur für $a = 3$.

(b) Vergleiche den Flächeninhalt des Vierecks $ACDF$ mit dem des Dreiecks ABC.

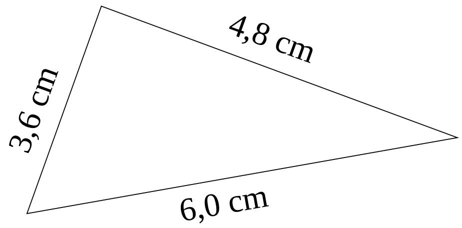
31. Gegeben ist das Viereck $ABCD$ durch $A(-4 \mid 5), B(0 \mid -2), C(2 \mid -1)$ und $D(3 \mid 4)$.

(a) Zeichne dieses Viereck in ein Koordinatensystem.
Platzbedarf: $-5 \leqq x \leqq 4$ und $-3 \leqq y \leqq 6$

(b) Berechne den Flächeninhalt dieses Vierecks.

(c) Ersetze in der Zeichnung den Punkt D durch einen anderen Punkt E, so dass das Viereck $ABCE$ den gleichen Flächeninhalt aufweist wie das Viereck $ABCD$.

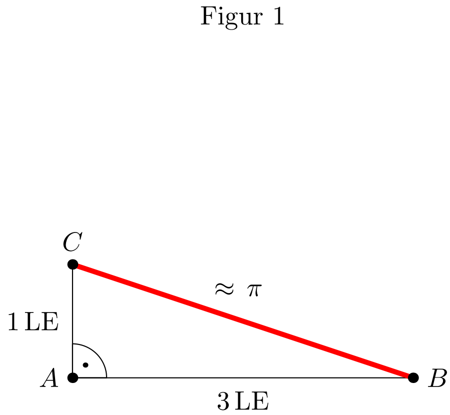
32.

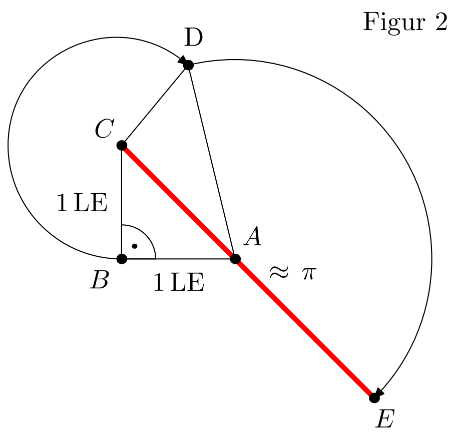


Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.

33. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC besitzt einen Flächeninhalt von $27\,\text{cm}^2$. Die Basis $[AB]$ ist $9\,\text{cm}$ lang.
   (a) Fertige eine Skizze an. Berechne die Länge der Höhe auf die Basis.
   (b) Der Umfang dieses Dreiecks ist $24\,\text{cm}$ lang. Berechne die Länge der Schenkel.
   (c) Welche Abmessungen könnte ein Rechteck haben, das denselben Flächeninhalt wie dieses Dreieck aufweist?

34.





Im Jahre 1882 bewies der deutsche Mathematiker Ferdinand LINDEMANN, dass die Konstruktion einer Strecke mit der Länge π LE nicht möglich ist, wenn man nur Zirkel und Lineal verwendet.
Die Konstruktion einer solchen Streckenlänge kann also mit Zirkel und Lineal nur näherungsweise erfolgen:
Die Streckenlängen $\overline{BC}$ in der Figur 1 und $\overline{CE}$ in der Figur 2 stellen zwei Ergebnisse von Näherungskonstruktionen einer Strecke mit der Maßzahl π LE dar, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit die Konstruktion rechter Winkel mit Zirkel und Lineal weggelassen worden ist.

(a) • Berechne den Näherungswert für π in der Figur 1.
- Berechne die prozentuale Abweichung dieses Näherungswertes vom Taschenrechnerwert für π auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

(b) • Berechne die Streckenlänge $\overline{CE}$ in der Figur 2.
- Vergleiche die beiden Näherungen für π in der Figur 1 und in der Figur 2.
- ARCHIMEDES benutzte für π den Wert $\frac{22}{7}$. Vergleiche diesen Wert mit π auf deinem Taschenrechner und mit dem Wert aus der Figur 2.

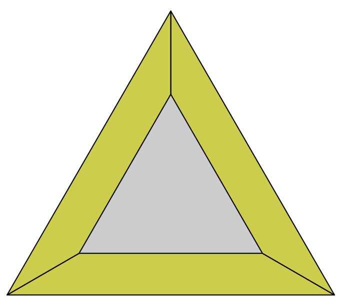
(c) Laut einem Tabellenwerk ist der Äquatorradius r der Erde $6378,388\,\text{km}$ lang. Beachte für die Lösung der folgenden Aufgaben, dass immer nur drei Nachkommastellen verwendet werden dürfen, weil der Erdradius auch auf drei Nachkommastellen angegeben ist (warum eigentlich?).
- Berechne die Äquatorlänge l_1 mit Hilfe des Näherungswertes $\overline{CE}$.
- Berechne die Äquatorlänge l_2 mit Hilfe von π auf deinem Taschenrechner.
- Wie groß ist die Differenz dieser beiden Ergebnisse?
- Für wie schwerwiegend hältst du diesen Unterschied? Begründe.

35. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = x^2 - 9$ und der Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Entscheide, ob folgende Aussagen über den Graphen von f jeweils richtig oder falsch sind.

	richtig	falsch
Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt. (0|9)	[ ]	[ ]
Der Punkt (4|6) liegt auf dem Graphen.	[ ]	[ ]
Für $x \in]-3;3[$ verläuft der Graph unterhalb der x-Achse.	[ ]	[ ]
Der Graph ist zur y-Achse symmetrisch.	[ ]	[ ]

Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2005

36.



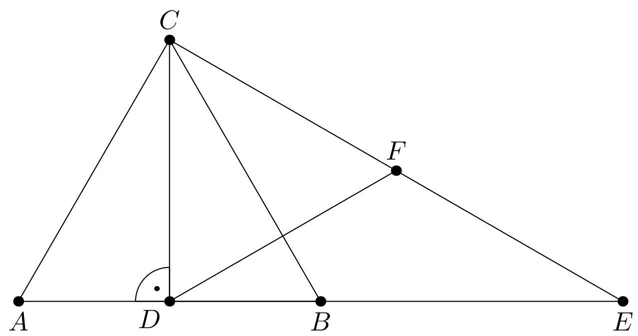
Schreinermeister Sägebricht fertigt den Holzrahmen für einen Spiegel in Form eines gleichseitigen Dreiecks an. Die Seitenlänge des äußeren Dreiecks beträgt $1,50\,\text{m}$, die des inneren Dreiecks $0,80\,\text{m}$.

(a) Zeichne die drei Teilstücke des Rahmens im Maßstab $1 : 10$. Schneide sie aus und klebe sie richtig zusammengefügt in dein Heft.

(b) Berechne die Rahmenbreite.
Du könntest dabei folgendermaßen vorgehen:

- Berechne den Flächeninhalt eines der drei Teilstücke des Rahmens aus den Flächeninhalten der beiden gleichseitigen Dreiecke.
- Berechne daraus die Rahmenbreite.

37.



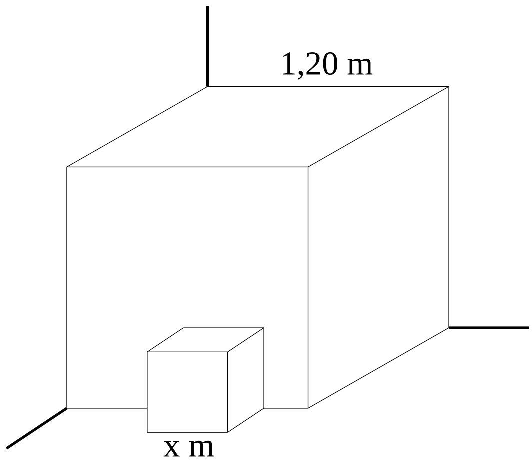
Die beiden Dreiecke ABC und DFC sind gleichseitig.

(a) Zeichne die Figur für $a = \overline{AB} = 5\,\text{cm}$.

(b) Zeichne die Strecke $[FB]$ ein.

(c)
- Begründe: Die Punkte C und E liegen auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius a.
- Begründe: Das Viereck $DBFC$ ist ein achsensymmetrischer Drachen.
- Begründe sowohl mit als auch ohne Rechnung: Das Drachenviereck $DBFC$ besitzt den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck ABC.

38.

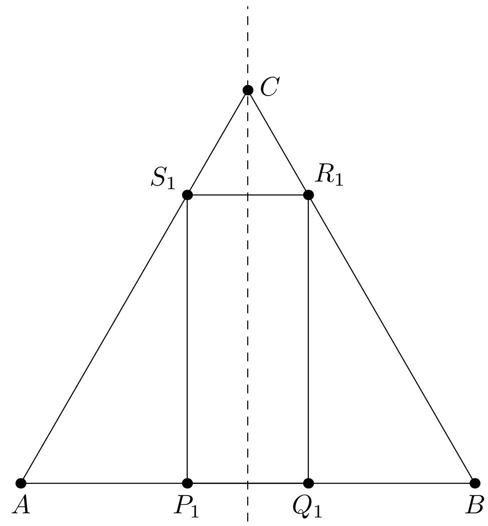


Familie Subku zieht um. In einer Zimmerecke ihrer neuen Wohnung steht ein würfelförmiger Karton mit einer Kantenlänge von $1,20\,\text{m}$.
Die Möbelpacker haben ihm einen kleineren Karton mit der Kantenlänge $x\,\text{m}$ entnommen und so hingestellt, dass sich eine Seitenfläche des großen und eine des kleinen Kartons berühren. Es stellt sich heraus, dass die einsehbare Oberfläche des großen und die einsehbare Oberfläche des kleinen Würfels übereinstimmen.

(a) Zeige: Es muss dann $x = 0,24 \cdot \sqrt{15}$ gelten.

(b) Wie viel Prozent des Volumens großen Würfels nimmt der kleine Würfel ein?

39.



In das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Setenlänge $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ werden Rechtecke $P_nQ_nR_nS_n$ mit $\overline{P_nQ_n} = x\,\text{cm}$ so einbeschrieben, wie es die Darstellung anhand des Beispielrechtecks $P_1Q_1R_1S_1$ für $x = 1,6$ zeigt.

(a) Für welche Belegungen von x gibt es solche Rechtecke $P_nQ_nR_nS_n$?

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Rechtecke $P_nQ_nR_nS_n$ gilt in Abhängigkeit von x:
$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-2x^2 + 12x\right)\,\mathrm{cm}^2$$

(c) Zeige: $\dfrac{A(x)}{A_{\Delta\, ABC}} = (-0{,}08x^2 + 0{,}4x)\,\mathrm{cm}^2$

(d) Unter allen Rechtecken $P_nQ_nR_nS_n$ gibt die Rechtecke $P_2Q_2R_2S_2$ und $P_3Q_3R_3S_3$, die 32% der Fläche des Dreiecks ABC einnehmen. Berechne die zugehörigen Belegungen von x.

(e) Unter allen Rechtecken $P_nQ_nR_nS_n$ gibt es das Quadrat $P_0Q_0R_0S_0$.
- Zeichne dieses Quadrat farbig ein.
- Untersuche, ob das Quadrat $P_0Q_0R_0S_0$ unter allen möglichen Rechtecken $P_nQ_nR_nS_n$ das flächengrößte ist.

40. In ein Rechteck $PQRS$ mit den Seitenlängen $\overline{PQ} = 8\,\mathrm{cm}$ und $\overline{QR} = 6\,\mathrm{cm}$ werden Dreiecke PA_nB_n einbeschrieben. Dabei gilt:
- $A_n \in [QR]$ und $B_n \in [RS]$
- $\overline{Q_nA} = \overline{SB_n} = x\,\mathrm{cm}$

(a) Zeichne das Rechteck $PQRS$ und für $x = 2$ das Dreieck PA_1B_1.

(b) Für welche Belegungen von x gibt es solche Dreiecke PA_nB_n?

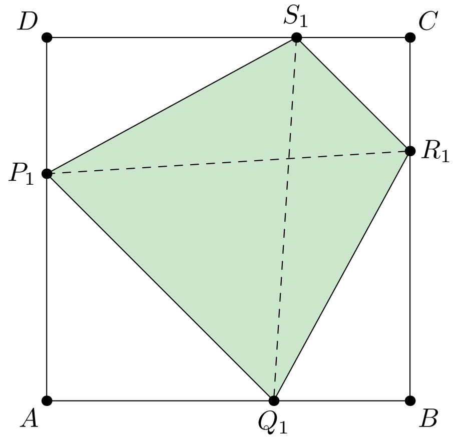
(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Dreiecke PA_nB_n gilt in Abhängigkeit von x:
$$A(x) = (24 - 0{,}5x^2)\,\mathrm{cm}^2$$

(d) Unter allen Dreiecken PA_nB_n gibt es das Dreieck PA_2B_2, dessen Fläche 34,64% des Rechtecks $PQRS$ bedeckt. Berechne x.

(e) Unter allen Dreiecken PA_nB_n gibt es das rechtwinklige Dreieck PA_3B_3 mit der Hypotenuse $[PA_3]$. Berechne x.

(f) Unter allen Dreiecken PA_nB_n gibt es das gleichschenklige Dreieck PA_4B_4 mit der Basis $[PB_4]$. Berechne x.

41.



In das Quadrat $ABCD$ werden Trapeze $P_nQ_nR_nS_n$ auf die oben dargestellte Weise einbeschrieben.
Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{CR_n} = \overline{CS_n} = x\,\text{cm}$ und $\overline{AP_n} = \overline{AQ_n} = 2x\,\text{cm}$.

(a) Zeichne das Quadrat $ABCD$ und für $x = 2,5$ das Trapez $P_1Q_1R_1S_1$.

(b) Für welche Belegungen von x existieren solche Trapeze $P_nQ_nR_nS_n$?

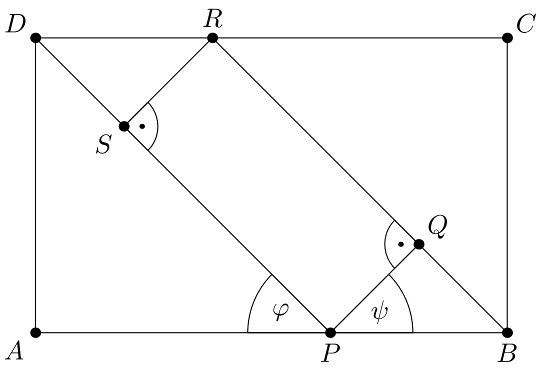
(c)
- Zeige durch Rechnung: Für $x = 2,\overline{6}$ liegt die Diagonale $[S_2Q_2]$ im Trapez $P_2Q_2R_2S_2$ parallel zur Quadratseite $[BC]$ bzw. $[AD]$.
- Begründe: Die Diagonalen des Trapezes $P_2Q_2R_2S_2$ stehen senkrecht aufeinander.

(d) Berechne den Flächeninhalt A der Trapeze $P_nQ_nR_nS_n$ in Abhängigkeit von x, indem du von der Quadratfläche bestimmte Teilflächen subtrahierst.
[Ergebnis: $A(x) = (-4,5x^2 + 24x)\,\text{cm}^2$]

(e)
- Begründe durch Rechnung: Unter allen Trapezen $P_nQ_nR_nS_n$ ist das Trapez $P_2Q_2R_2S_2$, das flächengrößte.
- Begründe: Das flächengößte Trapez $P_2Q_2R_2S_2$ nimmt 50% der Quadratfläche ein.

(f) Untersuche auf verschiedene Weise, ob es unter allen Trapezen $P_nQ_nR_nS_n$ eines gibt, dessen Flächeninhalt $41,07\,\text{cm}^2$ beträgt.

42.



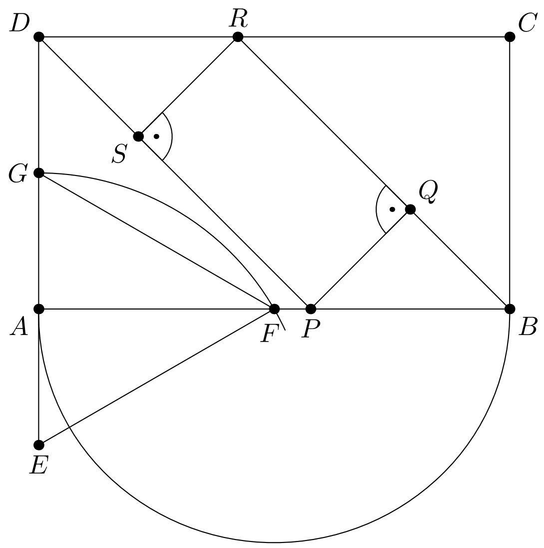
Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ und $\overline{BC} = \overline{AD} = b$. Für das einbeschriebene Rechteck $PQRS$ gilt: $\overline{AP} = \overline{RC} = b$.

(a) Zeichne die Figur für $a = 8\,\text{cm}$, und $b = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: $\varphi = \psi = 45°$.

(c) Berechne in deiner Zeichnung den Anteil der Fläche des Rechtecks $PQRS$ am Rechteck $ABCD$ in Prozent.

(d)



In der obigen Figur gilt:
– Der Punkt G halbiert die Seite $[AD]$.
– Das Dreieck EFG ist gleichseitig.
– Der Punkt E ist der Mittelpunkt des Kreisbogens durch den Punkt F.
– Der Punkt F ist der Mittelpunkt des Halbkreises mit dem Durchmesser $[AB]$.

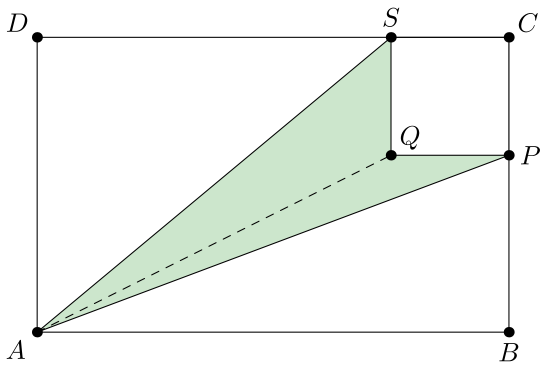
- Zeichne die Figur für $b = 6\,\text{cm}$.
- Berechne erneut den Flächenanteil des Rechtrecks $PQRS$ am Rechteck $ABCD$ in Prozent.

(e) Es gilt allgemein: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot(a-b)\cdot(3b-a)}{ab} = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(3\dfrac{b}{a} - 4 + \dfrac{a}{b}\right)$.

Setzen wir $\dfrac{b}{a} = k$, so ergibt sich weiter: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(3k - 4 + \dfrac{1}{k}\right) = T(k)$.

- Zeige, dass der Term $T^*(k) = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k}\right)^2 + 2 - \sqrt{3}$ und $T(k)$ äquivalent sind.
- Berechne diejenige Belegung von k, für die das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Rechtecke $PQRS$ und $ABCD$ maximal wird. Gib das maximale Flächenverhältnis in Prozent an.
- Begründe: Die Konstruktion in der Aufgabe (d) liefert dieses Maximum.

43.



Aus dem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ und $\overline{BC} = \overline{AD} = b$ werden Quadrate mit der Seitenlänge x herausgeschnitten. Dadurch entstehen Vierecke $AP_nQ_nS_n$.

(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ für $a = 8\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ und das Viereck $AP_1Q_1S_1$ für $x = 2\,\text{cm}$.

(b) Gib alle Belegungen von x an, für die es solche Vierecke $AP_nQ_nS_n$ gibt.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Vierecke $AP_nQ_nS_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

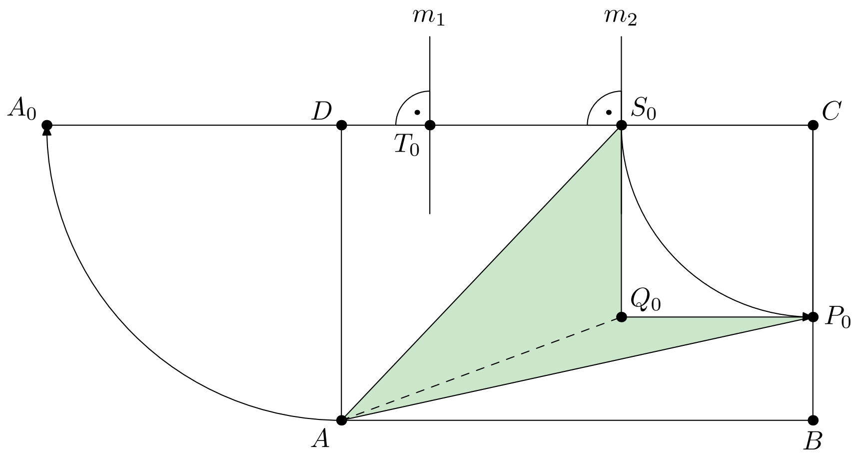
$$A(x) = -x^2 + \frac{1}{2}(a+b)\cdot x$$

Tipp: Deute die Strecken $[P_nQ_n]$ und $[Q_nS_n]$ jeweils als Grundlinien der Teildreiecke AP_nQ_n bzw. AQ_nS_n.

(d) Unter allen Vierecken $AP_nQ_nS_n$ gibt es das Viereck $AP_0Q_0S_0$, dessen Flächeninhalt maximal ist.

Zeige, dass $x = \dfrac{1}{4}(a+b)$ das Viereck $AP_0Q_0S_0$ liefert.

(e)

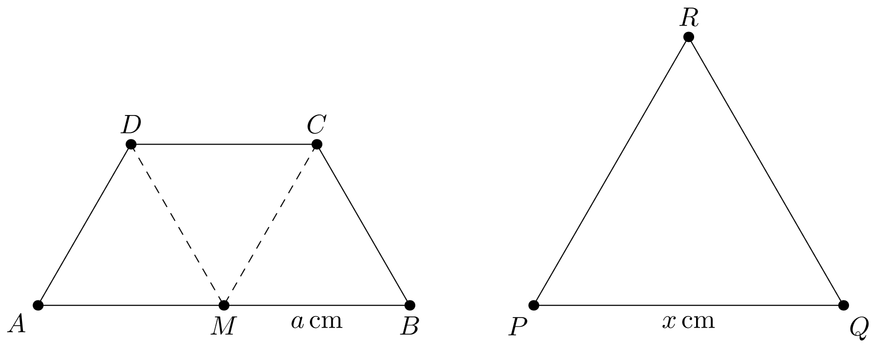


In der obigen Figur gilt:

- Der Punkt D ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von Punkt A zum Punkt A_0.
- Der Punkt C ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von Punkt P_0 zum Punkt S_0.
- Der Punkt T_0 ist der Mittelpunkt der Strecke $[A_0C]$.
- Der Punkt S_0 ist der Mittelpunkt der Strecke $[T_0C]$.

Begründe anhand dieser Konstruktion, dass das Viereck $AP_0Q_0S_0$ dasjenige mit dem maximalen Flächeninhalt ist.

44.



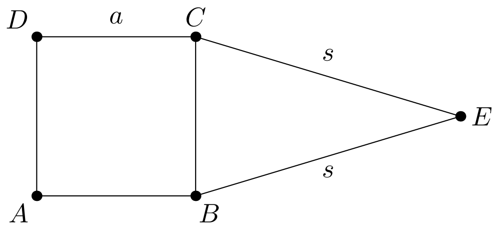
Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ ist aus drei kongruenten gleichseitigen Dreiecken mit der jeweiligen Seitenlänge von a cm zusammengefügt worden. Dieses Trapez und das gleichseitige Dreieck PQR mit der Seitenlänge x cm sollen den gleichen Umfang besitzen.

(a) Zeige, dass dann $x = \frac{5}{3}a$ gilt.

(b) Berechne das Verhältnis der Flächen der beiden Figuren.

(c) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ größer als der des Dreiecks PQR?

45.



Die Figur $ABECD$ setzt sich aus dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a und dem gleichschenkligen Dreieck BEC mit $\overline{BE} = \overline{CE} = s$ zusammen. Das Dreieck BEC und das Quadrat $ABCD$ haben den gleichen Umfang.

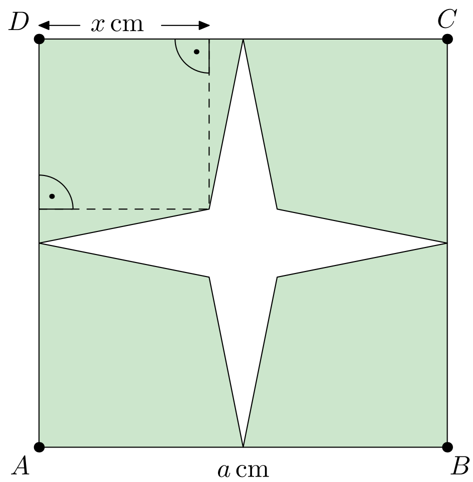
(a) Zeige: Es muss $s = 1,5a$ gelten.

(b) Zeichne die Fgur für $a = 3\,\text{cm}$.

(c) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte des Dreiecks BEC und des Quadrates $ABCD$ in Prozent.

(d) Wie lang müsste die Schenkellänge s sein, damit die Flächeninhalte des Quadrates $ABCD$ und des Dreiecks BEC gleich groß werden?

46.



Schneidet man aus dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a cm die vier getönten kongruenten Vierecke weg, so bleibt der weiße Stern im Zentrum übrig.

(a) Zeichne die obige Figur für $a = 6$ und $x = 2,5$.

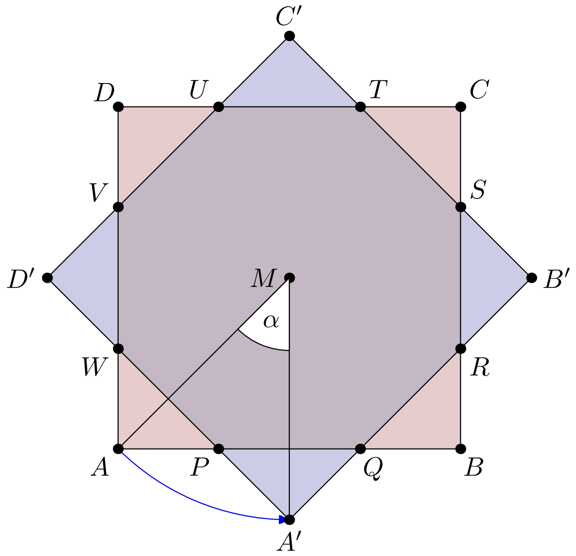
(b) Begründe: Jedes dieser vier getönten kongruenten Vierecke ist ein Drachenviereck.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A des weißen Sterns gilt in Abhängigkeit von x:
$$A(x) = (36 - 12x)\,\mathrm{cm}^2 .$$

(d)
- Berechne $A(3)$ und deute dein Ergebnis mit Hilfe der Zeichnung.
- Berechne $A(1,5)$ und deute dein Ergebnis mit Hilfe der Zeichnung.

(e) Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Sterns $3,6\,\mathrm{cm}^2$ beträgt.

47.



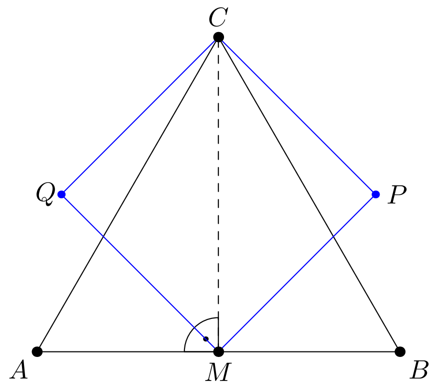
Das Quadrat $A'B'C'D'$ ist dadurch entstanden, dass das Quadrat $ABCD$ um seinen Mittelpunkt M um einen Winkel mit dem Maß α so gedreht worden ist, dass bestimmte Symmetrieachsen vom Ur- und vom Bildquadrat zur Deckung kommen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 8\,\mathrm{cm}$.

(b) Wie groß ist α? Begründe deine Antwort.

(c)
- Ist das Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig?
- Berechne den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUVW$.

48.



Das Dreieck ABC ist gleichseitig. Das Viereck $MPCQ$ ist ein Quadrat.

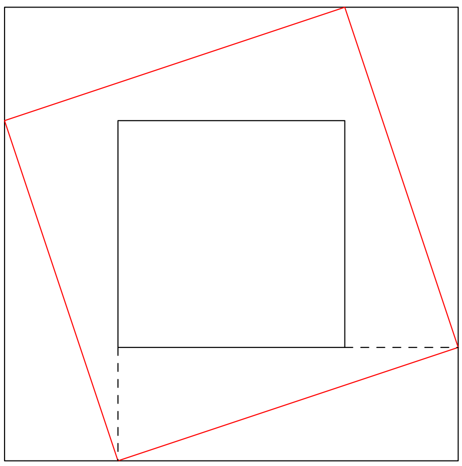
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC größer als der des Quadrates $MPCQ$?

(c) Im Inneren des Dreiecks ABC liegt ein Viereck.
Um welches besondere Viereck handelt es sich? Begründe deine Antwort.

(d) Zeige: Für den Umfang u des gezeichneten Quadrates $MPCQ$ gilt:
$u = 6\sqrt{6}\,\text{cm}$.

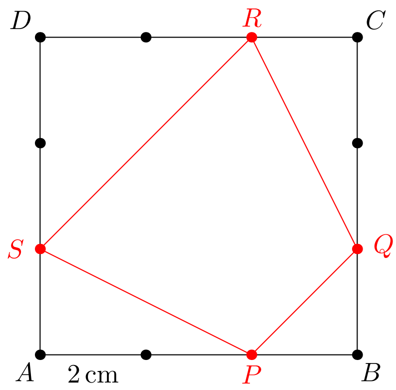
49.



Das große Quadrat hat einen Umfang von $81,6\,\text{cm}$ und das kleine Quadrat hat einen Umfang von $34\,\text{cm}$. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Berechne den Flächeninhalt des mittleren Quadrates auf verschiedene Weise:

- Mit Hilfe der Berechnung der Seitenlänge des mittleren Quadrates
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

50.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Jede Quadratseite ist in drei Abschnitte eingeteilt, die jeweils 2cm lang sind. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

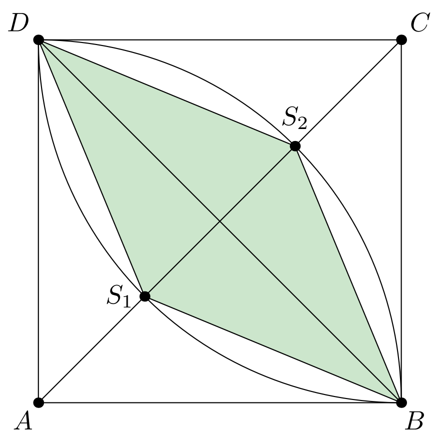
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ besitzt zwei parallele Seiten.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ auf zwei verschiedene Arten:

- Mit Hilfe der Berechnung der zugehörigen Formelgleichung
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

51.



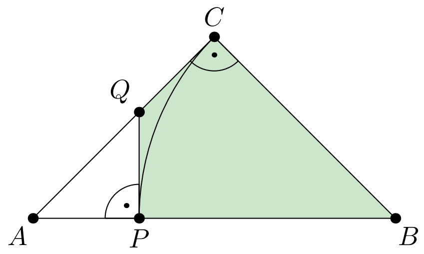
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte A und C .

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Vierecks S_1BS_2D.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck S_1BS_2D ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

52.



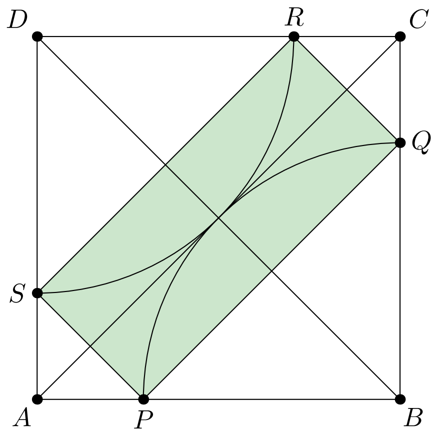
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt B .

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke ABC und APQ sind zueinander ähnlich.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC nimmt das Dreieck APQ ein? Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

53.



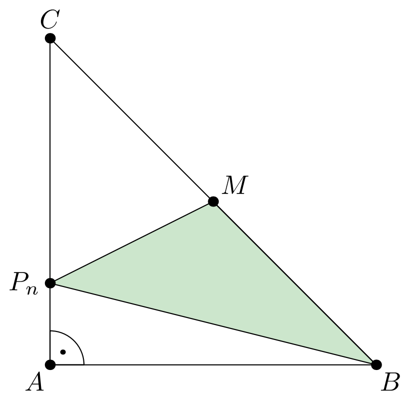
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte B und D .

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Rechteck.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck $PQRS$ ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

54.



Der Punkt M halbiert die Hypotenuse $[BC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC.
Punkte P_n mit $\overline{AP_n} = x\,\text{cm}$ wandern auf der Kathete $[AC]$, so dass laufend Dreiecke BMP_n erzeugt werden.

(a) Zeichne das Dreieck ABC für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ zusammen mit dem Dreieck BMP_1 für $x = 2$.

(b) Für welche Belegungen von x gibt es solche Dreiecke BMP_n?

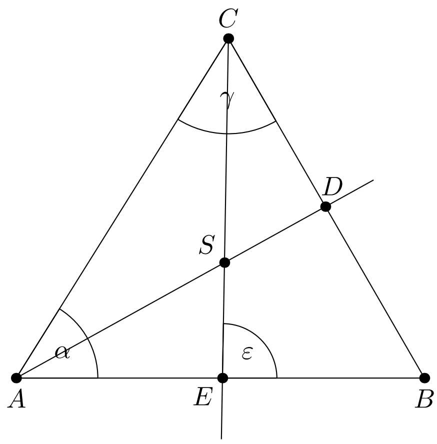
(c) Berechne den Flächeninhalt A der Dreiecke BMP_n in Abhängigkeit von x.
Ergebnis: $A(x) = (9 - 1,5x)\,\text{cm}^2$
Tipp: Fälle das Lot von M auf $[AC]$.

(d) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das Dreieck BMP_2, dessen Flächeninhalt $6,6\,\text{cm}^2$ beträgt. Berechne die zugehörige Belegung von x.

(e) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das gleichschenklige Dreieck BMP_3 mit der Basis $[MP_3]$. Berechne die zugehörige Belegung von x. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

(f) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das Dreieck BMP_3, dessen Flächeninhalt 20% der Fläche des Dreiecks ABC einnimmt. Berechne die zugehörige Belegung von x.

55.

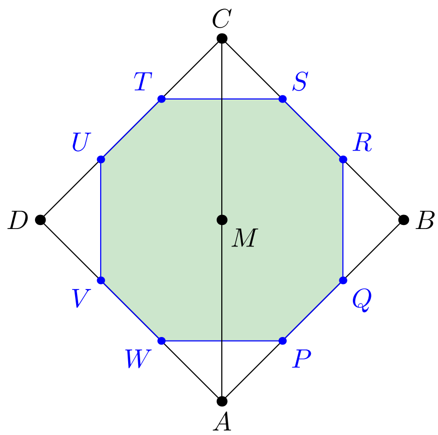


In der Figur gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 58°$ und $\gamma = 62°$.
Die Halbgeraden $[CE$ und $[AD$ halbieren α und γ.

(a) Zeichne die Figur.

(b)
- Begründe: $\varepsilon = 89°$.
- Begründe: Das Viereck $EBDF$ ist kein achsensymmetrischer Drachen.
- Untersuche, ob das Viereck $EBDF$ ein Sehnenviereck ist.

56.



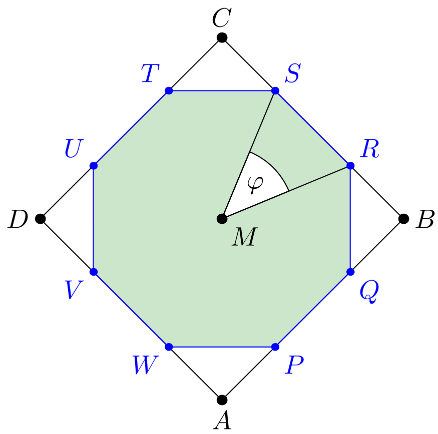
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. In dieses Quadrat ist das Achteck $PQRSTUV$ einbeschrieben worden.
Die Punktepaare (P, Q), (R, S), (T, U) und (V, W) teilen jeweils die Länge der Seite, auf der sie liegen, in drei gleiche Teile.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Untersuche rechnerisch, ob das einbeschriebene Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig ist.

(c) Berechne den Anteil der Fläche, den das Achteck am der Fläche des Quadrates $ABCD$ einnimmt, in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

57.



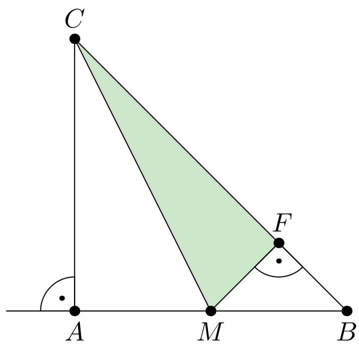
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. In dieses Quadrat ist das regelmäßige Achteck $PQRSTUV$ einbeschrieben worden.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Umfang u_8 dieses regelmäßigen Achtecks $PQRSTUV$. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

(c) Berechne den Anteil der Fläche, den das Achteck am der Fläche des Quadrates $ABCD$ einnimmt, in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

58.



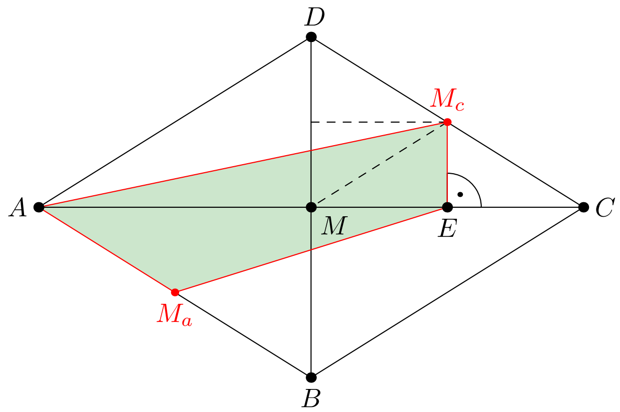
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Der Punkt M halbiert die Kathete $[AB]$.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächenanteil des getönten Dreiecks MFC am Dreieck ABC in Prozent.
Tipp: Zeichne geeignete Hilfslinien ein, die parallel zu den Katheten $[AB]$ bzw. $[AC]$ verlaufen.

(c) Untersuche, ob der Winkel ACB von CM halbiert wird.

59.

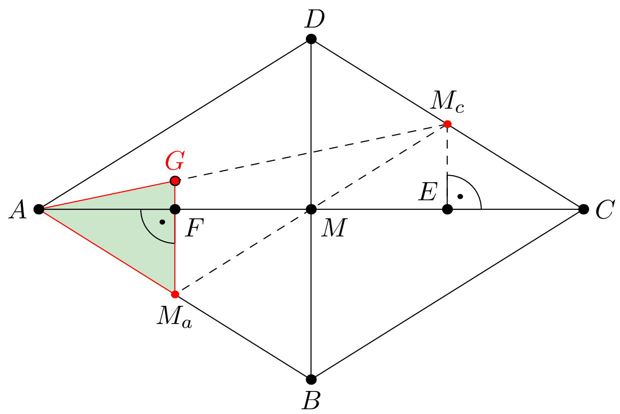


Das Viereck $ABCD$ ist eine Raute. Die Punkte M_a und M_c sind Seitenmittelpunkte.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BD} = 5\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächenanteil des getönten Vierecks AM_aEM_c am Viereck $ABCD$ in Prozent.

60.



Das Viereck $ABCD$ ist eine Raute. Die Punkte M_a und M_c sind Seitenmittelpunkte.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 8\,\mathrm{cm}$ und $\overline{BD} = 5\,\mathrm{cm}$.

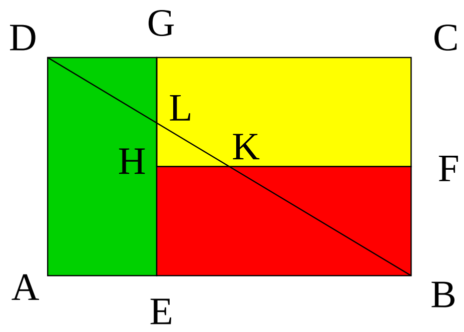
(b) Berechne den Flächenanteil des getönten Dreiecks AM_aG am Viereck $ABCD$ in Prozent.

14. Abbildung durch zentrische Streckung

1. Untersuche, ob die Punkte $P(0|0)$, $Q(6|2,5)$ und $R(11|4,5)$ auf einer Geraden liegen.

2. Gegeben sind die Punkte $A(3|-2)$ und $B(1|2)$.
   Um wie viel Prozent muss man die Strecke $[AB]$ mindestens verlängern, bis man auf die y-Achse trifft? Löse die Aufgabe auf verschiedene Weise.

3. Verlängere die Strecke $[DE]$ mit $D(-4|2)$ und $E(2|3)$ um 10% ihrer Länge über den Punkt E hinaus bis zum Punkt E^*.
   Berechne die Koordinaten des Punktes E^*.

4. 

   Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.
   Zusätzlich ist noch die Diagonale $[DB]$ eingezeichnet. Alle drei Rechtecke im Inneren haben den gleichen Flächeninhalt.

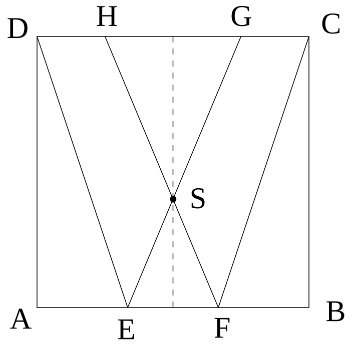
   (a) Gib alle zueinander ähnlichen Dreiecke an.

   (b) Berechne für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ die Länge der Strecke $[AD]$. Zeichne dann die zugehörige Figur.

   [Teilergebnis: $\overline{AD} = 4\,\text{cm}$]

   (c) Berechne den Flächenanteil des Dreiecks HKL am Rechteck $ABCD$.

5.



In der obigen Figur ist $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm. Es gilt: $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$.
Die Punkte G und H sind auf $[CD]$ beweglich und es gilt $\overline{DH} = \overline{GC} = x$ cm.

(a) Zeichne die Figur für $x = 1,2$.

(b) Der Abstand des Punktes S von der Seite $[CD]$ sei y cm.
Zeige auf verschiedene Weise, dass für y gilt:

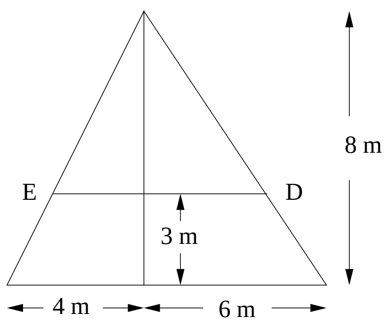
$$y = \frac{6 \cdot (3 - x)}{(4 - x)}.$$

Hinweis für eine Möglichkeit: Zeichne vom Punkt G ausgehend eine Hilfslinie ein und betrachte ähnliche Dreiecke.

(c) Berechne x auf verschiedene Weise so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks HSG doppelt so groß wie der des Dreiecks EFS wird.

6. Am 10. August wirft der Olympiaturm in München einen 406 m langen Schatten. Gleichzeitig wirft ein 2 m hoher Stab einen 2,8 m langen Schatten. Bestimme die Höhe des Olympiaturmes.

7. Gegeben ist die Schnittzeichnung eines Dachstuhles. In 3 m Höhe soll ein Balken von E nach D eingesetzt werden. Wie lang ist der Balken?



8. Ein Baum ist vom Objektiv einer Kamera 42 m entfernt. Auf der Bildebene, die 15 cm vom Objektiv entfernt ist, entsteht ein $2,5$ cm großes Bild.

   Fertige eine Skizze an und berechne die Höhe des Baumes.

9. Alkohol und Autofahren passen nicht zusammen. Das leuchtet ein. Aber die wenigsten wissen, wie langsam der Alkohol im Körper abgebaut wird. Der durchschnittliche Abbauwert beträgt lediglich 0,15 Promille stündlich. Weder Schlaf noch Mocca können dies beschleunigen. Wer z.B. nach einer Feier um Mitternacht einen Alkoholspiegel von 1,5 Promille erreicht hat, kann sich leicht ausrechnen, wann er/sie wieder restlos nüchtern ist. Denn bereits bei 0,3 Promille kann man sich durch auffälliges Fahrverhalten strafbar machen. Ab 0,5 Promille macht man sich strafbar, auch wenn nichts passiert ist, und ab 1,1 Promille ist man absolut fahruntauglich; es liegt eine Straftat vor.

   (a) Zeichne den zugehörigen Graphen. (Hinweis: Tragt zunächst auf der x-Achse die Uhrzeit ab: der Nullpunkt entspricht 24.00 Uhr - jede weitere Stunde entspricht 3 Kästchen. Tragt auf der y-Achse den Promillegehalt ab: $0,1$ Promille entspricht dabei 2 Kästchen.)

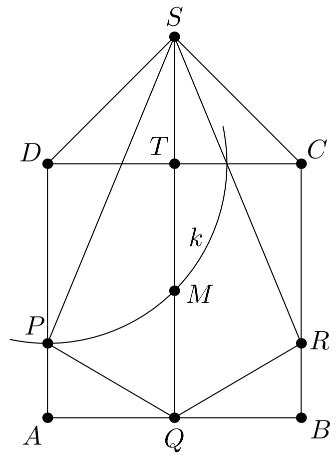
   (b) Um wie viel Uhr sind $1,1$ Promille, $0,5$ Promile und $0,3$ Promille erreicht?

   (c) Welche Promillezahl hat der Fahrer/die Fahrerin morgens um 7.40 Uhr?

   (d) Wenn du einen Fahrzeugführer vor den Gefahren des Autofahrens unter Alkoholeinfluss warnen möchtest, würdest du ihm den Text oder die Graphik in die Hand geben? (Begründe deine Antwort!)

10. An das Quadrat $ABCD$ ist das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck DCS angefügt worden.

    Der Punkt D ist der Mittelpunkt des Kreisbogens k durch den Quadratmittelpunkt M. Dadurch entsteht der achsensymmetrische Drachen $PQRS$.



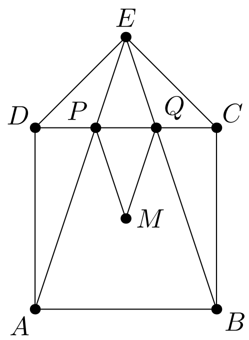
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Für die Länge der Seite $[AB]$ soll jetzt gelten: $\overline{AB} = 2a$.
Berechne damit den Anteil des Flächeninhalts der Drachenfigur $PQRS$ an der Gesamtfläche der Figur $ABCSD$ als Bruch und in Prozent.

(c) Welchen Flächeninhalt hätte das Quadrat $ABCD$, wenn die Dreiecksseite $[DS]$ $14{,}5\,\text{cm}$ lang wäre?

(d) Es sieht so aus, als ob der Kreisbogen k durch den Schnittpunkt der Strecke $[SR]$ mit der Strecke $[TC]$ verlaufen würde. Trügt der Anschein? Rechne wieder mit $\overline{AB} = 2a$.

11. An das Quadrat $ABCD$ mit dem Mittelpunkt M ist das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck DCE angefügt worden:



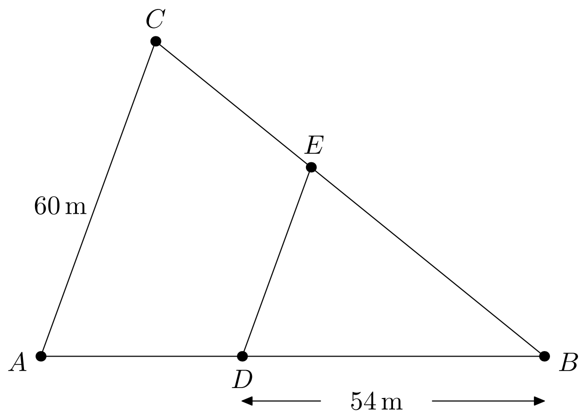
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Wie viel Prozent der Figur wird vom Dreieck ABE eingenommen?

(c) Wie viel Prozent der Fläche des Dreiecks ABE wird vom Viereck $MQEP$ eingenommen?

12. Die Maße zweier Innenwinkel in einem Dreieck betragen $73{,}47°$ und $41{,}26°$.
Kann dieses Dreieck zu einem anderen Dreieck ähnlich sein, in dem ein Innenwinkel das Maß $65{,}27°$ besitzt? Begründe deine Antwort.

13.

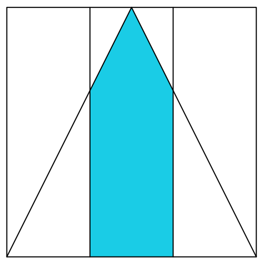


Frau Kermel vererbt ihr Grundstück ABC, das durch den Zaun $[DE]$ unterteilt ist, an ihre beiden Töchter Leni und Sarah. Dieser Zaun $[DE]$ ist genauso lang wie der Abstand der Punkte A und D.
Sarah bekommt den trapezförmigen Teil $ADEC$.

(a) Berechne die Länge des Zaunes.

(b) Wie viel Prozent der gesamten Grundstücksfläche nimmt Sarahs Anteil ein?

14.

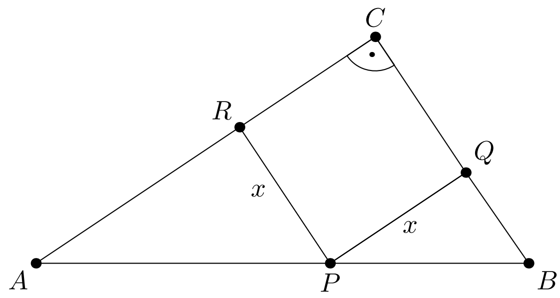


Das ist ein Bild des Logos der Baufirma „Fix & Fertig“. Es besteht aus einem Quadrat, das aus drei kongruenten Streifen zusammengesetzt ist. Das einbeschriebene Dreieck ist gleichschenklig.

(a) Zeichne die Figur, so dass die Quadratseite $6{,}3\,\text{cm}$ lang ist.

(b) Berechne den Anteil der eingefärbten Fläche am Quadrat als Bruch.

15.



In das rechtwinklige Dreieck ABC ist das Quadrat $PQCR$ mit der Seitenlänge x cm einbeschrieben.

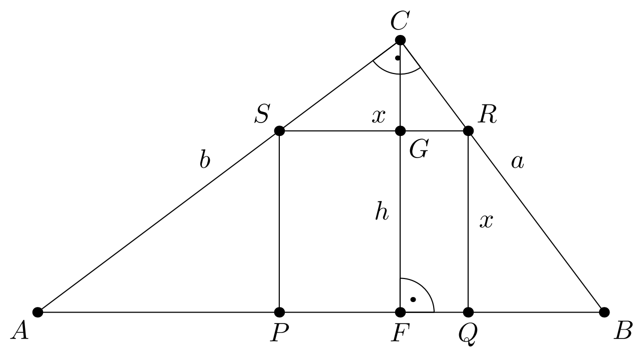
(a) Zeichne die Figur für $\overline{BC} = a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = b = 9\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke PBQ und ABC sind zueinander ähnlich.

(c) Zeige: $x = 3,6$.

(d) Berechne den prozentualen Anteil der Fläche des Quadrates $PQCS$ an der Fläche des Dreiecks ABC.

16.



In das rechtwinklige Dreieck ABC ist das Quadrat $PQRS$ mit der Seitenlänge x cm einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{BC} = a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = b = 8\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke FBC und ABC sind zueinander ähnlich.

(c) Zeige: Für die Dreieckshöhe h gilt:

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ \text{cm}.$$

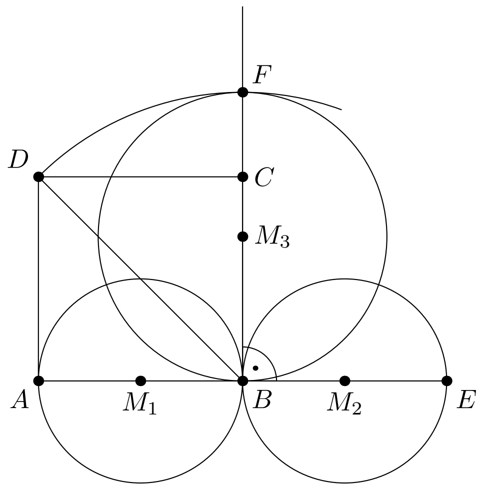
(d) Begründe: Die Dreiecke SRC und ABC sind zueinander ähnlich.

(e) Zeige:

$$x = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + ab + b^2}.$$

(f)
- Berechne mit Hilfe des Ergebnisses der Aufgabe (e) den prozentualen Anteil der Fläche des Quadrates $PQRS$ an der Fläche des Dreiecks ABC für den Fall, dass das Dreieck ABC gleichschenklig-rechtwinklig ist.
- Begründe dein Ergebnis elementargeometrisch mit Hilfe einer entsprechenden Zeichnung.

17.

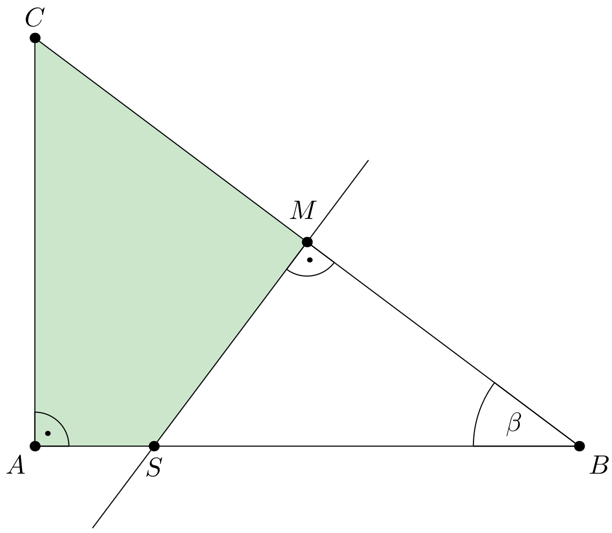


Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Punkt B ist der Mittelpunkt des Kreisbogens, der durch die Punkte D und F verläuft. M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der beiden kleinen Kreise, während der große Kreis den Mittelpunkt M_3 besitzt.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AE} = 6\,\text{cm}$.

(b) Vergleiche Die Flächeninhalte A_1 und A_2 der beiden kleinen Kreise mit dem Flächeninhalt A_3 des großen Kreises.

18.



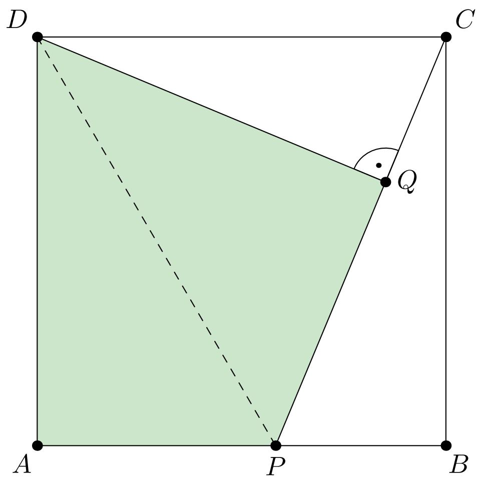
Der Hypotenusenmittelpunkt des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist der Punkt M. In der Figur gilt weiter: $\overline{AB} = 7{,}2\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 5{,}4\,\text{cm}$.

(a) Begründe: Die beiden Dreiecke SBM und ABC sind zueinander ähnlich.

(b) Zeige: $\overline{MS} = 3{,}375\,\text{cm}$.

(c) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $ASMC$ am Dreieck ABC in Prozent.

19.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a.

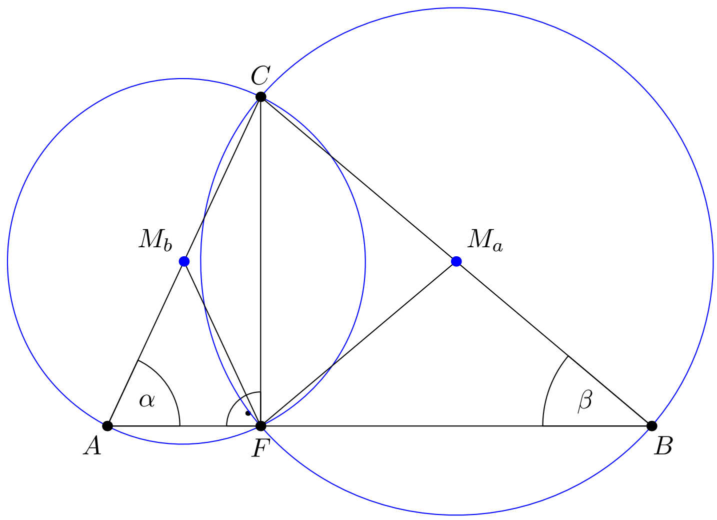
(a) Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{PB} = 2{,}5\,\text{cm}$.

(b) Begründe ohne Messung: Die Diagonale $[DP]$ ist keine Symmetrieachse im Viereck $APQD$.

(c) Begründe: Die beiden Dreiecke PBC und DQC sind zueinander ähnlich.

(d) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $APQD$ an der Fläche des Quadrates $ABCD$ in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

20.



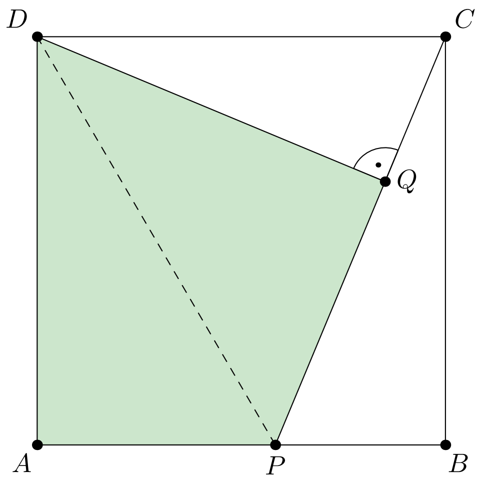
Im Dreieck ABC mit der Höhe $[CF]$ sind die Punkte M_a und M_b die Mittelpunkte der Umkreise der Teildreiecke FBC bzw. AFC .

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe auf verschiedene Weise: Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Begründe: Zusammen bedecken die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a die Hälfte des Dreiecks ABC .

21.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a.

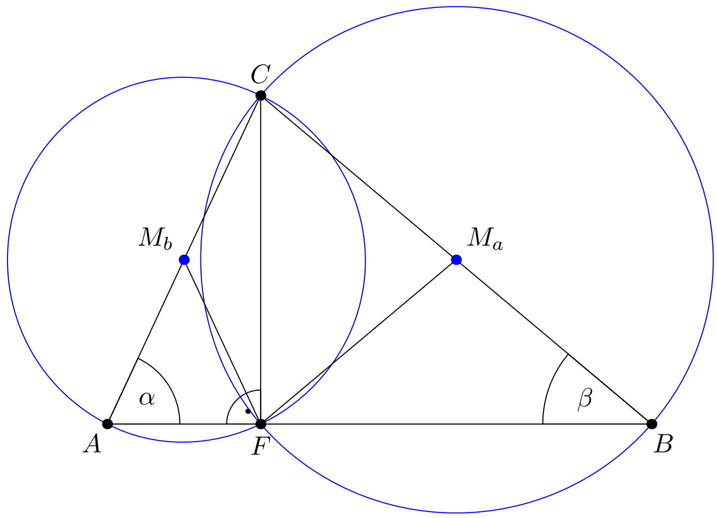
(a) Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{PB} = 2,5\,\text{cm}$.

(b) Begründe ohne Messung: Die Diagonale $[DP]$ ist keine Symmetrieachse im Viereck $APQD$.

(c) Begründe: Die beiden Dreiecke PBC und DQC sind zueinander ähnlich.

(d) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $APQD$ an der Fläche des Quadrates $ABCD$ in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

22.



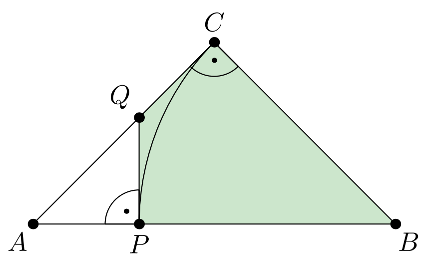
Im Dreieck ABC mit der Höhe $[CF]$ sind die Punkte M_a und M_b die Mittelpunkte der Umkreise der Teildreiecke FBC bzw. AFC.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe auf verschiedene Weise: Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Begründe: Zusammen bedecken die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a die Hälfte des Dreiecks ABC.

23.



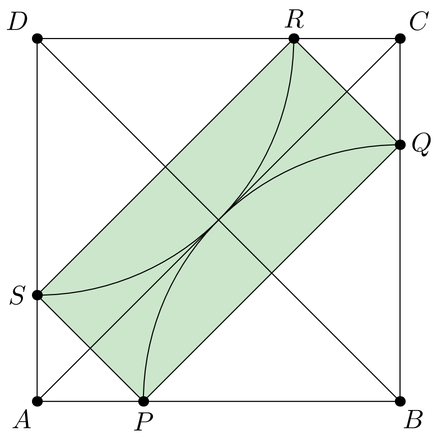
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt B.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke ABC und APQ sind zueinander ähnlich.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC nimmt das Dreieck APQ ein? Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

24.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte B und D.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Rechteck.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck $PQRS$ ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

1. Es gibt Dreiecke mit einem Flächeninhalt von $24\,\text{cm}^2$. Zeichne zwei solche Dreiecke, die diesen Flächeninhalt aufweisen, die aber nicht kongruent zueinander sind.

2. Die eine Seite eines Rechtecks $ABCD$ ist halb so lang wie die andere Rechtecksseite. Der Umfang des Rechtecks ist $54\,\text{cm}$ lang.
   (a) Berechne die beiden Seitenlängen des Rechtecks.
   (b) Berechne die Länge einer Diagonalen.

3. In einem Rechteck $EFGH$ sind die beiden Diagonalen zusammen $22\,\text{cm}$ lang. Eine Seite dieses Rechtecks ist $5,5\,\text{cm}$ lang.
   (a) Zeichne dieses Rechteck.
   (b) Bestimme sämtliche Winkelmaße am Diagonalenschnittpunkt.
   (c) Berechne jeweils den Flächeninhalt sämtlicher Teildreiecke in diesem Rechteck. Es gibt mehrere Möglichkeiten.
   (d) Berechne den Abstand eines Eckpunktes zur entsprechenden Diagonalen.

4. Untersuche, ob die Punkte $P(0|0)$, $Q(6|2,5)$ und $R(11|4,5)$ auf einer Geraden liegen.

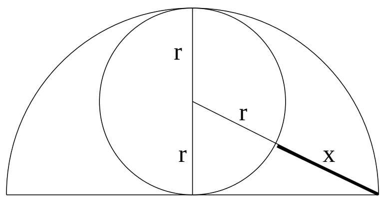
5. Gegeben sind die Punkte $A(3|-2)$ und $B(1|2)$.
   Um wie viel Prozent muss man die Strecke $[AB]$ mindestens verlängern, bis man auf die y-Achse trifft? Löse die Aufgabe auf verschiedene Weise.

6. Verlängere die Strecke $[DE]$ mit $D(-4|2)$ und $E(2|3)$ um 10% ihrer Länge über den Punkt E hinaus bis zum Punkt E^*.
   Berechne die Koordinaten des Punktes E^*.

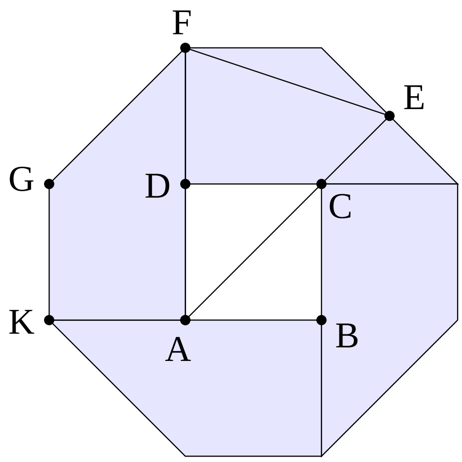
7. Ein Quadrat besitzt einen Flächeninhalt von $39,69\,\text{cm}^2$.
   Berechne die Länge einer Diagonalen.

8. Die Diagonale eines Quadrates ist 7 cm. lang.
   (a) Zeichne dieses Quadrat.
   (b) Berechne den Umfang dieses Quadrates.

9. Berechne auf Grund der Skizze die Länge der Strecke x in Abhängigkeit vom Radius r.



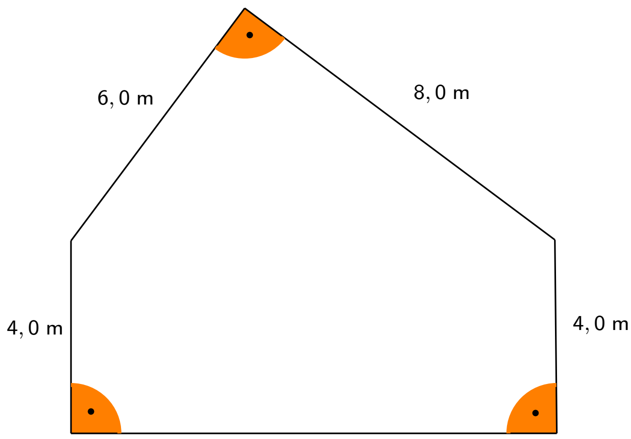
10. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das weiße Viereck ist ein Quadrat. Es gilt $\overline{AB} = \overline{DF} = a\,\text{cm}$. Zusätzlich ist hier das Dreieck AEF eigezeichnet.



   (a) Zeichne die Figur für $\overline{FG} = 3,2\,\text{cm}$ so, dass die Strecke $[KB]$ waagrecht liegt.
   (b) Berechne in deiner Zeichnung den Flächeninhalt Quadrates $ABCD$.
   (c) • Untersuche ohne Verwendung des Taschenrechners, ob das Dreieck AEF gleichschenklig ist. Gilt dein Ergebnis auch dann noch, wenn die Figur verkleinert oder vergrößert wird? Begründe deine Ansicht.

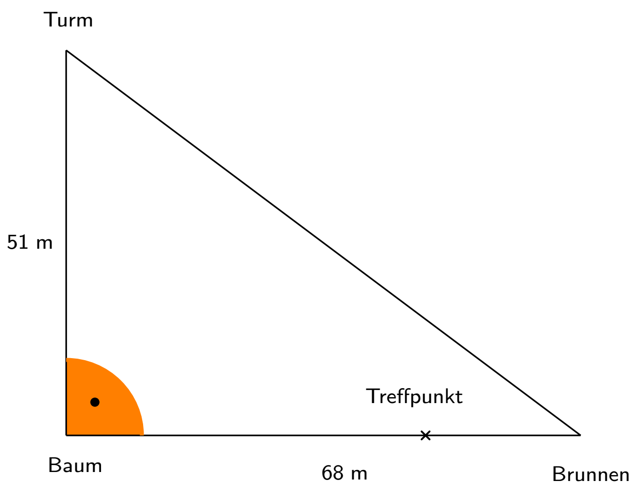
- Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks auf drei verschiedene Arten in Abhängigkeit von a.

11.



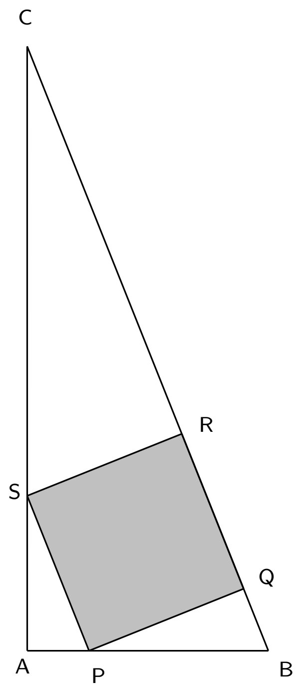
Berechne den Umfang des Fünfecks.

12.



Der Brunnen ist 68 m und der Turm 51 m vom Baum entfernt. Beim Turm laufen Sabrina und Daniel gleichzeitig mit derselben Geschwindigkeit los. Daniel läuft zuerst zum Baum und dann Richtung Brunnen. Sabrina geht zuerst zum Brunnen und dann Richtung Baum. Berechne den Abstand vom Treffpunkt zum Brunnen.

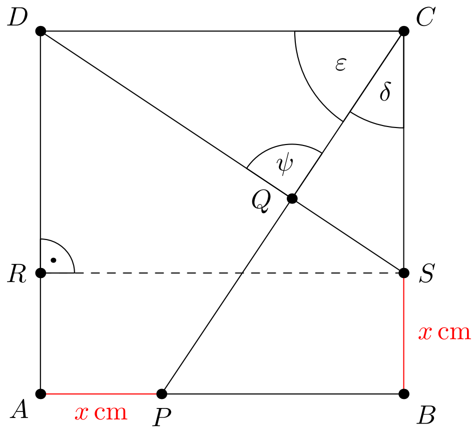
13.



Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC und das einbeschriebene Quadrat $PQRS$.
Es gilt: $\overline{AP} = 2,0\,\text{cm}$ und $\overline{AS} = 5,0\,\text{cm}$.
Berechne Länge der Hypotenuse $[BC]$.

14. Eine kleine Pizza hat einen Durchmesser von $23,0\,\text{cm}$. Berechne den Durchmesser einer großen Pizza, die den doppelten Flächeninhalt hat.

15.

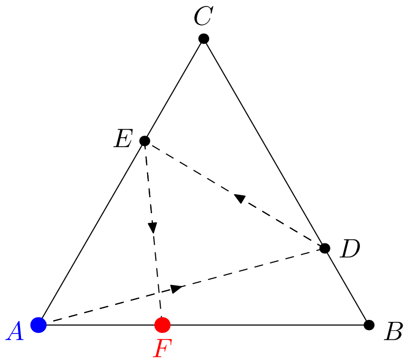


Die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ ist a cm lang.

(a) Zeichne die Figur für $a = 6$ und x = 2.

(b) Begründe: $\psi = 90°$.

16.



Herr Theo Lith ist als Platzwart für das Spielfeld ABC verantwortlich, das die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit einer Seitenlänge von 56 m besitzt.
Auf einem Kontrollgang startet er vom Eingang A auf dem kürzesten Weg zur Seite $[BC]$. Von dort aus läuft er wieder auf dem kürzesten Weg zur Seite $[AC]$. Dann begibt er sich erneut auf dem kürzesten Weg zur Grundstücksseite $[AB]$ und trifft dort auf den Fahnenmasten F.

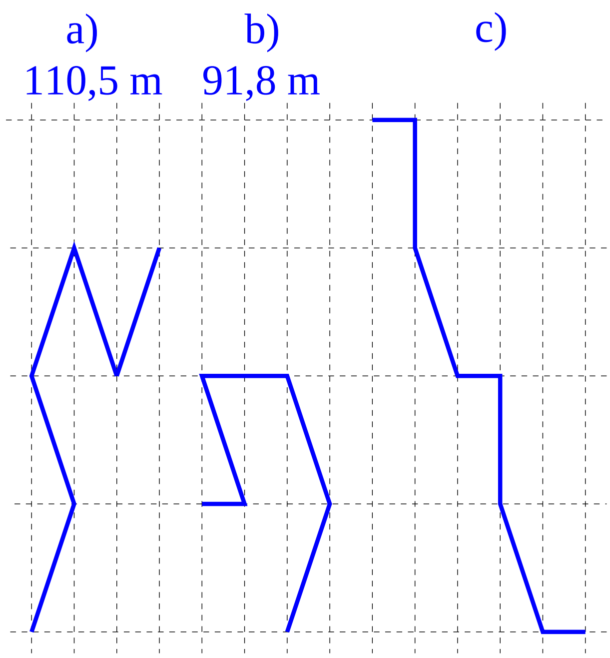
(a) Der gestrichelt eingezeichnete Kontrollweg von Herrn Lith in der obigen Zeichnung ist falsch eingetragen. Was ist daran verkehrt?

(b) Zeichne die Figur mit dem richtigen Weg im Maßstab 1 : 1000. Trage dann den Weg von Herrn Lith und die Punkte D, E und F korrekt ein.

(c) Zeige: $\overline{AF} : \overline{FB} = 3 : 5$.

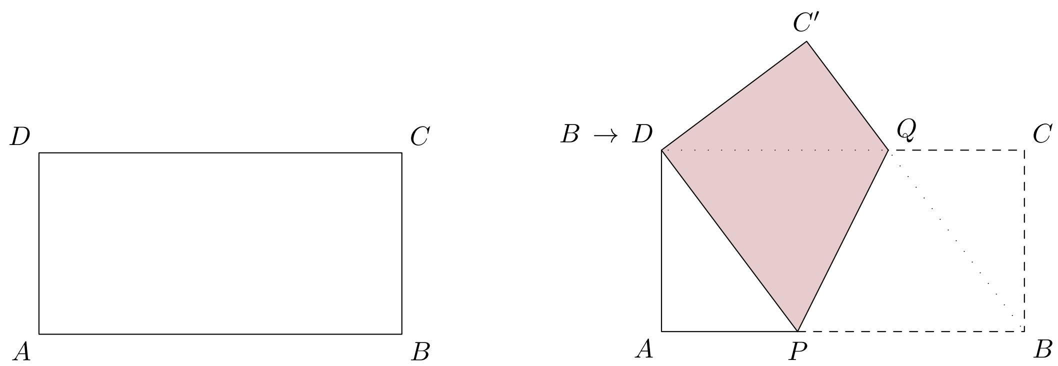
(d) Bestätige mit Hilfe der Angabe (c) die Position des Fahnenmastes durch eine weitere Konstruktion in deiner Zeichnung.

17.



Die Längen der zwei Wege a) und b) sind angegeben. Wie lang ist der Weg c)?

18.



Das dargestellte Rechteck $ABCD$ wird so gefaltet, dass der Eckpunkt B auf den Eckpunkt D zu liegen kommt. Dadurch entsteht die Faltkante $[PQ]$.

(a) Schneide aus kariertem Papier ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$ aus. Falte es auf die oben beschriebene Weise.

(b) Zeichne die Figur oben rechts für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

(c) • Begründe mit Hilfe von Winkelmaßen: Das Viereck $PBQD$ ist ein Parallelogramm.

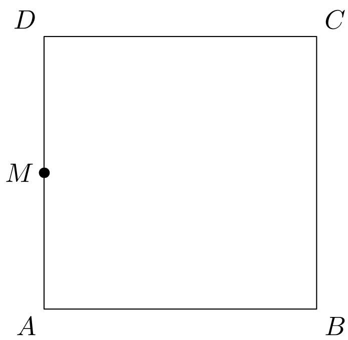
- Begründe: Das Viereck $PBQD$ ist sogar eine Raute.

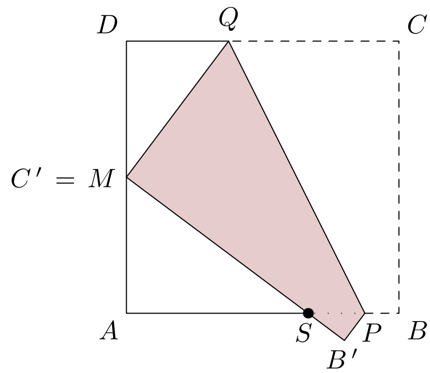
(d) Es sei $\overline{AP} = x\,\text{cm}$. Zeige rechnerisch: $x = 3$.

(e) Berechne den Flächeninhalt der Raute $PBQD$ auf zwei verschiedene Arten mit Hilfe von Teildreiecken.

(f) Berechne erneut den Flächeninhalt der Raute $PBQD$ mit Hilfe ihrer Diagonalenlängen.

19.





Das dargestellte Quadrat $ABCD$ wird so gefaltet, dass der Eckpunkt C auf den Mittelpunktpunkt M der Seite $[AD]$ zu liegen kommt. Dadurch entsteht die Faltkante $[PQ]$.

(a) Schneide aus kariertem Papier ein Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ aus. Falte es auf die oben beschriebene Weise.

(b) Zeichne die Figur oben rechts für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(c) Es sei $\overline{DQ} = x\,\text{cm}$. Zeige rechnerisch: $x = 2{,}25$.

(d) Zeige: $\overline{DQ} : \overline{DC'} = 3 : 4$.

(e) Begründe: Die Dreiecke $C'QD$, ASC' und $SB'P$ sind zueinander ähnlich.

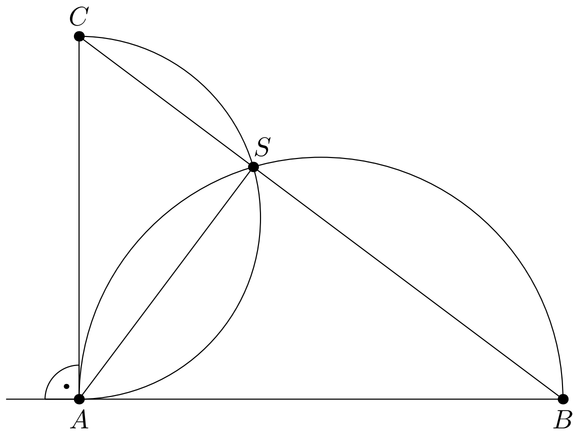
(f) Berechne $\overline{AS}$.

(g) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ASC'.

(h) Berechne $\overline{C'S}$. [Ergebnis: $\overline{C'S} = 5\,\text{cm}$]

(i) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ liegt nach dem Falten unter der Kante $[AB]$?

20.



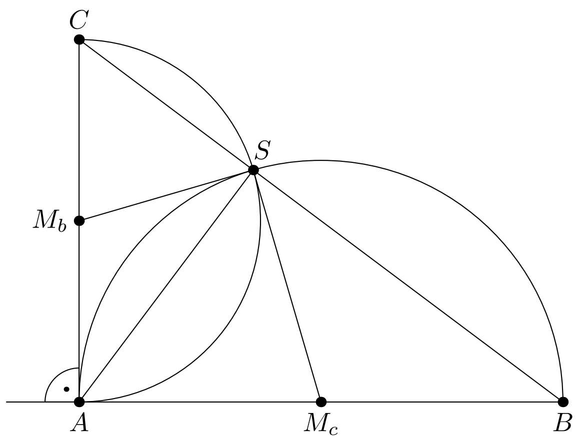
Die zwei Halbkreise haben die beiden Katheten $[AB]$ bzw. $[AC]$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC als Durchmesser. Die Halbkreise schneiden sich im Punkt S.
Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$

(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe:

- Das Dreieck ASC ist rechtwinklig.
- Der Schnittpunkt S liegt auf der Hypotenuse $[BC]$.

21.



Die zwei Mittelpunkte M_b und M_c der beiden Katheten $[AC]$ bzw. $[AB]$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC sind auch die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen. Die Halbkreise schneiden sich im Punkt S, der gleichzeitig auf der Hypotenuse $[BC]$ liegt.
Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$

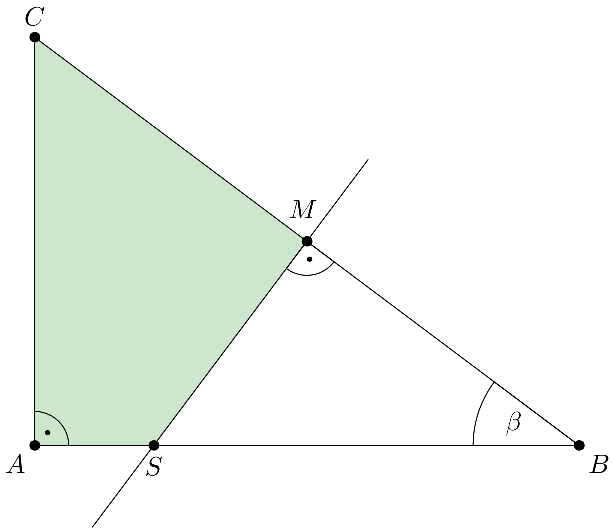
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe:

- Das Viereck AM_cSM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.
- Das Viereck AM_cSM_bbesitzt einen Umkreis.
  Tipp: Zeichne die Strecke M_cM_b ein.

(c)
- Zeichne das Dreieck ABC mit dem Drachenviereck AM_cSM_b erneut.
- Berechne den Flächenanteil des Vierecks AM_cSM_b am Dreieck ABC in Prozent.
  Tipp: Betrachte den Flächenanteil des Dreiecks AM_cM_b am Dreieck ABC. Zeichne auch den Hypotenusenmittelpunkt M_h ein.

22.



Der Hypotenusenmittelpunkt des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist der Punkt M.
In der Figur gilt weiter: $\overline{AB} = 7,2\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 5,4\,\text{cm}$.

(a) Begründe: Die beiden Dreiecke SBM und ABC sind zueinander ähnlich.

(b) Zeige: $\overline{MS} = 3,375\,\text{cm}$.

(c) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $ASMC$ am Dreieck ABC in Prozent.

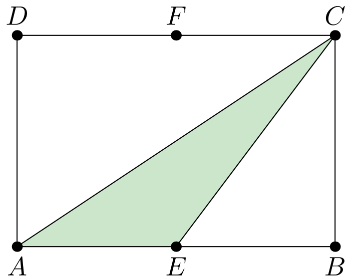
23. (a) Zeichne ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 75°$ und $\beta = 40°$.

(b)
- Spiegle den Punkt A am Punkt C. Sein Spiegelbild ist der Punkt A' .
- Spiegle den Punkt A' an der Halbgeraden $[BC$. Sein Spiegelbild ist der Punkt A'' .

(c) Begründe:
- Das Dreieck ACA'' ist gleichschenklig.

- Das Dreieck $AA'A''$ ist rechtwinklig.

24.



Für das Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.
Die Punkte E und F sind die Mittelpunkte der Seite $[AB]$ bzw. $[CD]$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Welchen Bruchteil der Rechtecksfläche nimmt das Dreieck AEC ein? Löse die Aufgabe auf zwei verschiedene Arten.

(c) Berechne den Abstand des Punktes E von der Strecke $[AC]$. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

25. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

(a) Zeichne dieses Dreieck, so dass die Kathete $[AB]$ waagrecht liegt.

(b) Punkte P_n wandern auf der Seite $[AB]$ und Punkte Q_n wandern gleichzeitig auf der Seite $[BC]$, wobei $\overline{AP_n} = \overline{BQ_n} = x\,\text{cm}$ gilt. Dadurch entstehen Vierecke AP_nQ_nC.
Zeichne für $x = 1,5$ das Viereck AP_1Q_1C ein.

(c) Gib die Menge aller möglichen Belegungen von x an.

(d) Unter allen Vierecken AP_nQ_nC gibt es das Trapez AP_2Q_2C.

- Berechne die zugehörige Belegung von x.

  [Ergebnis: $x = 2,4$]

- Zeichne dieses Trapez in anderer Farbe ein.
- Berechne den Flächeninhalt dieses Trapezes. **Tipp:** Berechne zunächst den Flächeninhalt des Dreiecks P_2BQ_2.
- Berechne die Höhe h dieses Trapezes AP_2Q_2C. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

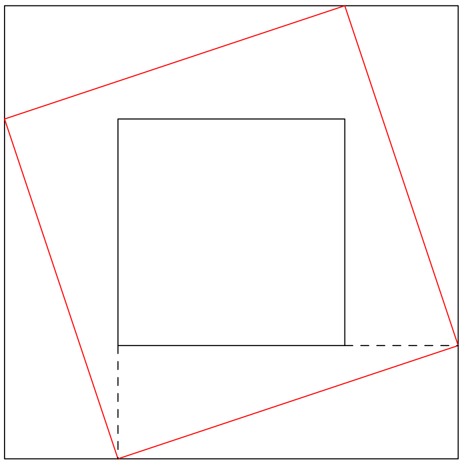
(e) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Vierecke AP_nQ_nC gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = (0,5x^2 - 3x + 12)\,\text{cm}^2\ .$$

(f) Unter allen Vierecken AP_nQ_nC gibt es das Viereck AP_2Q_2C, das den minimalen Flächeninhalt besitzt.
Berechne dieses Minimum und die zugehörige Belegung von x.

(g) Untersuche, ob es unter allen Vierecken AP_nQ_nC achsensymmetrische gibt.

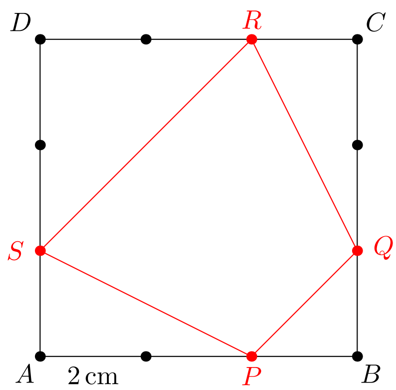
26.



Das große Quadrat hat einen Umfang von $81,6\,\text{cm}$ und das kleine Quadrat hat einen Umfang von $34\,\text{cm}$. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Berechne den Flächeninhalt des mittleren Quadrates auf verschiedene Weise:

- Mit Hilfe der Berechnung der Seitenlänge des mittleren Quadrates
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

27.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Jede Quadratseite ist in drei Abschnitte eingeteilt, die jeweils 2cm lang sind. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

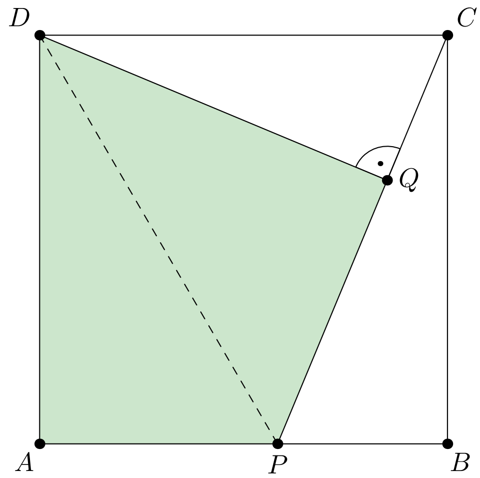
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ besitzt zwei parallele Seiten.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ auf zwei verschiedene Arten:

- Mit Hilfe der Berechnung der zugehörigen Formelgleichung
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

28.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a .

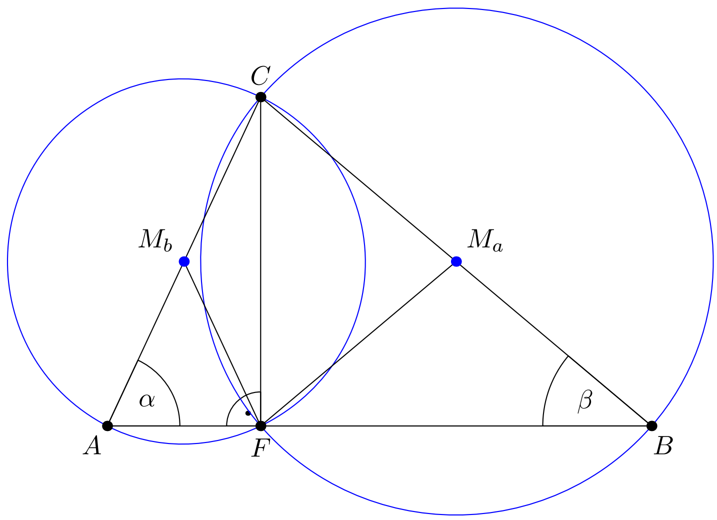
(a) Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{PB} = 2,5\,\text{cm}$.

(b) Begründe ohne Messung: Die Diagonale $[DP]$ ist keine Symmetrieachse im Viereck $APQD$.

(c) Begründe: Die beiden Dreiecke PBC und DQC sind zueinander ähnlich.

(d) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $APQD$ an der Fläche des Quadrates $ABCD$ in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

29.



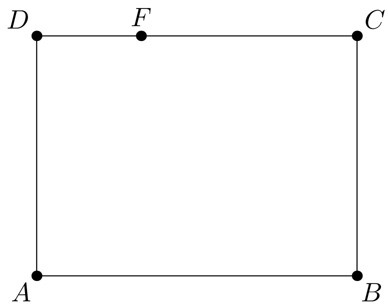
Im Dreieck ABC mit der Höhe $[CF]$ sind die Punkte M_a und M_b die Mittelpunkte der Umkreise der Teildreiecke FBC bzw. AFC .

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe auf verschiedene Weise: Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Begründe: Zusammen bedecken die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a die Hälfte des Dreiecks ABC .

30.



Die beiden Freunde Hans und Michael wollen ein Bundesligaspiel besuchen. Auf ihrem Weg dorthin gelangen sie vor dem Stadion an einen rechteckigen Parkplatz $ABCD$. Sie befinden sich am Punkt A und wollen den Platz diagonal zum Punkt C überqueren. Michael entdeckt jedoch einen Kameraden, der am Punkt F steht und läuft erst geradewegs zu ihm. Dann begeben sich die beiden direkt zum Punkt C, an dem schon Hans wartet.

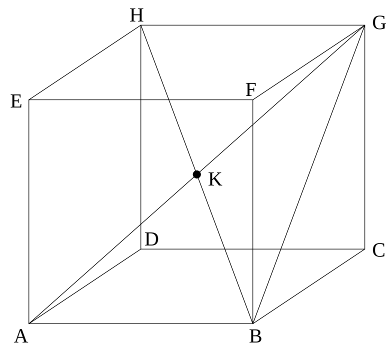
(a) Es soll gelten $\overline{AB} = 92\,\text{m}$, $\overline{BC} = 69\,\text{m}$ und $\overline{FC} = 60\,\text{m}$.
Fertige eine Zeichnung im Maßstab 1 : 1000 an.

(b) Begründe ohne Messung: Michael muss einen längeren Weg von A über F nach C zurücklegen als Hans.

(c) Berechne die Streckenlänge, die Michael mehr als Hans zurücklegen muss. Runde auf ganze Meter.

16. Raumgeometrie

1. Die folgende Skizze stellt das Schrägbild eines Würfels mit einer Kantenlänge von 6 cm dar.



   (a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABK. Runde das Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

   (b) Vergleiche den Flächeninhalt des Dreiecks ABK mit dem des Dreiecks BGK. Begründe deine Antwort.