SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Jahrgangsstufe 9 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

Teil I.
Wahlpflichtfächergruppe I

1. Lineare Gleichungssysteme

1. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{|lrcl} & 2(x-7) & = & y-25 \\ \wedge & 3y-2(x-7) & = & 35 \\ \hline \end{array}$$

(a) Berechne die Lösungsmenge mit einem selbst gewählten Verfahren.

(b) Begründe, weshalb du gerade dieses und kein anderes Verfahren gewählt hast.

Lösung: (a) $L = \{(-3 \mid 5)\}$

(b) - -

2. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{|lrcl} & 3y+ax & = & 5a+3 \\ \wedge & 2x-y & = & 3-a \\ \hline \end{array}$$

(a) Berechne die Lösungsmenge in Abhängigkeit von a. Vereinfache dein Ergebnis so weit wie möglich.

(b) Wenn du richtig gerechnet hast, dann stellt $a = -6$ einen Sonderfall dar. Begründe dies und berechne die Lösungsmenge für diese Belegung von a.

Lösung: (a) $L = \{(\frac{1}{3}a+2 \mid \frac{5}{3}a+1)\}$

(b) Die beiden Gleichungen liefern identische Geraden, also folgt:
$L = \{(x \mid y) \mid y = 2x-9\}$

3. Löse das Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren auf zwei verschiedene Arten:

$$\begin{array}{|lrcl} & 3,5x-4y & = & -22 \\ \wedge & 2x+3y & = & -2 \\ \hline \end{array}$$

Lösung: $L = \{(-4 \mid 2)\}$

4. Löse das Gleichungssystem mit dem Determinantenverfahren:

$$\begin{array}{|lll} & 1,2x + 0,4y - 7 & = & 0 \\ \wedge & 6,4x - 1,6y & = & 28 \\ \hline \end{array}$$

Lösung: $L = \{(5 \mid 2,5)\}$

5. Gegeben sind die beiden Geraden
$g : y = -0,25x + 3$ und
$h : y = x - 1,5$.
   (a) Zeichne die beiden Geraden in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $0 \leqq x \leqq 7$ und $-3 \leqq y \leqq 9$
   (b) Berechne exakt die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Geraden.
   (c) Zeichne eine Gerade g^* ein, die durch den Punkt $Q(2 \mid 6)$ verläuft und gib ihre Gleichung an.
   (d) Begründe: Jede weitere Gerade, welche die Gerade h nicht schneidet, muss die Gerade g irgendwo schneiden.

Lösung: (a) - -
(b) $S(3,6 \mid 2,1)$
(c) Es gibt keine eindeutige Lösung; eine mehr oder weniger geschickte Wahl aus dem Geradenbüschel bleibt den Schülern überlassen.
(d) Jede Gerade, welche die Gerade h nicht schneidet, muss zu dieser parallel sein. Weil g aber nicht parallel zu h liegt, muss g auch alle Parallelen zu h schneiden.

6. Gegeben sind eine Gerade g durch die Punkte $P(3 \mid 2,5)$ und $Q(-4,5 \mid 0)$ und eine Gerade $h : y = -x - 0,5$.
   (a) Zeichne die beiden Geraden g und h in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-6 \leqq x \leqq 4$ und $-3 \leqq y \leqq 4$
   (b) Berechne die Gleichung der Geraden g.
   (c) Die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt S.
   Zeichne diesen Punkt ein, lies seine Koordinaten ab und weise rechnerisch nach, dass dieser Punkt tatsächlich auf den beiden Geraden g und h liegt.
   (d) Schreibe die Gleichung der Geraden h^* hin, welche die Gerade h nicht schneidet und die nicht durch den dritten Quadranten verläuft.
   (e) Begründe jemandem, der die Zeichnung nicht kennt, dass die Gerade h die Gerade g schneiden muss.

Lösung: (a) - -

(b) $g: y = \frac{1}{3}x + 1,5$

(c) $S(-1,5 \mid 1)$

(d) Es gibt keine eindeutige Lösung.

(e) Jede Gerade, welche die Gerade h nicht schneidet, muss zu dieser parallel sein. Weil g aber nicht parallel zu h liegt, muss g auch alle Parallelen zu h schneiden.

7. Gegeben sind die beiden Geraden $g_1: y = -0,25x + 3$ und $g_2: y = x - 1,5$. Eine weitere Gerade g_3 verläuft durch die Punkte $P(2 \mid 4)$ und $Q(0 \mid -4,5)$.

   (a) Zeichne die drei Geraden in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-7 \leqq x \leqq 7$ und $-6 \leqq y \leqq 7$

   (b) Berechne die Gleichung der Geraden g_3.

   (c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g_1 mit der Geraden g_2 .

   (d) Durch den Punkt $A(-300 \mid 200)$ verläuft die Gerade g_4, die zur Geraden g_2 parallel ist.
   Berechne die Gleichung dieser Geraden g_4.

   (e) Die Gerade g_1 schneidet die y-Achse im Punkt R. Die Gerade g_2 schneidet die y-Achse im Punkt Q.
   Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks QRS möglichst genau.

Lösung: (a) - -

(b) $g_3: y = 4,25x - 4,5$

(c) $S(3,6 \mid 2,1)$

(d) $g_4: y = x + 500$

(e) $A = 8,1\,\text{FE}$

8. Addierst du zu einer ganzen Zahl das Doppelte einer zweiten Zahl, so erhälst du 142. Als Ergebnis erhälst du aber 5, wenn du das 5-fache der ersten Zahl von der zweiten Zahl subtrahierst.
   Wie heißen die beiden Zahlen?

Lösung: Die Zahlen heißen 12 und 65.

9. Klaus verkauft auf dem Flohmarkt seine alten Comic-Hefte für 0, 50 € pro Stück.

   (a) Stelle den Zusammenhang zwischen der Anzahl der verkauften Hefte x und den Einnahmen y graphisch dar.

(b) Als Standgebühr muss Klaus 2,50 € bezahlen. Zeichne dazu den entsprechenden Graphen in dasselbe Koordinatensystem ein.

Lösung: - -

10. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcrl} & x+y & = & 1 & (1) \\ \wedge & x+y & = & -37 & (2) \\ \hline \end{array}$$

Begründe auf verschiedene Weise: Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems ist leer.

Lösung:

- Die Gleichung (1) besagt, dass die Summe aus zwei Zahlen x und y den Wert 1 ergeben soll.
  Gleichzeitig soll nach der Gleichung (2) die Summe aus denselben Zahlen x und y den Wert -37 ergeben. Das ist ein Widerspruch. Also gilt $L = \emptyset$.
- Wenn du die Gleichung (2) spaltenweise von der Gleichung (1) subtrahierst, ergibt sich in ausführlicher Schreibweise die Gleichung
  $$0 \cdot x + 0 \cdot y = 38$$
  Weil die linke Seite der Gleichung stets Null ergibt, steht hier eine stets falsche Aussage; d.h. $L = \emptyset$.

11.

$$\begin{array}{rrcrcrl} & 3x & - & 7y & = & -27 & (1) \\ \wedge & -5x & + & 9y & = & 37 & (2) \\ \hline \end{array}$$

Else und Erwin sollen das obige Gleichungssystem lösen. Erwin entscheidet: „Wir nehmen das Gleichsetzungsverfahren.“ Else widerspricht: „Da müssten wir ja die beiden Gleichungen ..., und das wird schwierig, weil wir am Ende ... “

(a) Was hat Else gemeint?

(b) Löse das Gleichungssystem mit einem anderen Verfahren, das dir geeignet erscheint.

Lösung: (a) „Da müssten wir ja die beiden Gleichungen nach x oder nach y auflösen, und das wird schwierig, weil wir am Ende eine Gleichung durch 7 oder durch 9 teilen müssten. Dann entstehen aber Brüche oder periodische Dezimalzahlen. Dadurch wird die Lösung unnötig erschwert.“

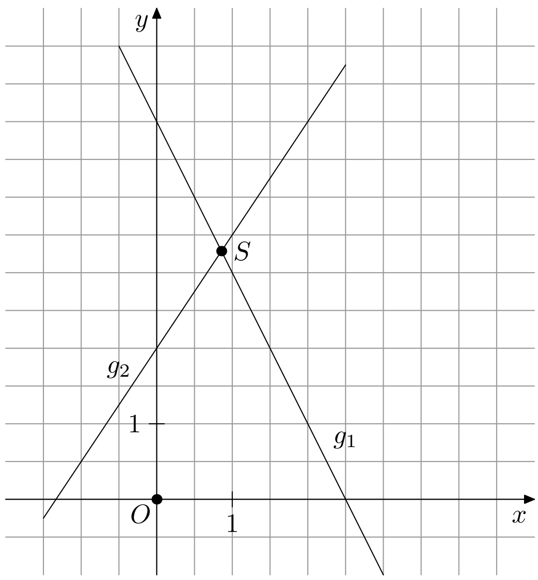
(b) Hier eignet sich das **Additionsverfahren** zur Lösung:

$$\begin{array}{lrcrcrl} & 3x & - & 7y & = & -27 & (1)\ |\ \cdot 5 \\ \wedge & -5x & + & 9y & = & 37 & (2)\ |\ \cdot 3 \\ \hline & 15x & - & 35y & = & -135 & (1)' \\ \wedge & -15x & + & 27y & = & 111 & (2)' \\ \hline (1)' + (2)' : & & & -8y & = & -24 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad y = 3$, z.B. in $(1): x = -2 \quad L = \{(-2 \mid 3)\}$

12. Gegeben sind die beiden Geraden g_1 und g_2 durch die Gleichungen $g_1 : y + 2x - 5 = 0$ und $g_2 : y = 1,5x + 2$.
    (a) Zeichne diese beiden Geraden in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-2 \leqq x \leqq 5$ und $-1 \leqq y \leqq 6$
    (b) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Geraden. Runde das Ergebnis.
    (c) Gib die Gleichung einer Geraden h an, welche die Gerade g_2 nicht schneidet.
    (d) Überprüfe, ob der Punkt $A(111222333999,4 \mid -999888777666555,1)$ auf der Geraden g_2 liegt.

Lösung: (a) Bevor du die Gerade g_1 zeichnen kannst, musst du erst ihre Gleichung nach y auflösen: $y = -2x + 5$.



(b)

$$\begin{array}{lcl} 1,5x + 2 & = & -2x + 5 \\ 3,5x & = & 3 \qquad x \approx -0,86 \quad \text{in } g_1\text{: } y \approx 1,5 \cdot 0,86 + 2 \\ & & \qquad\qquad y \approx 3,29 \qquad \Rightarrow \quad S(0,86 \mid 3,29) \end{array}$$

(c) In der Zeichenebene muss jede Gerade h, welche die Gerade g_2 nicht schneidet, zu dieser **parallel** verlaufen; d.h. die Gleichungen der Geraden g_2 und h müssen **den**

gleichen Steigungsfaktor besitzen.
Dann lautet z.B. die Gleichung einer Geraden h: $y = 1,5x - 11\frac{13}{17}$.

(d) Grundsätzlich müsstest du die Koordinaten des Punktes A in die Gleichung der Geraden g_2 einsetzen und dann entscheiden, ob die Gleichung eine wahre oder falsche Aussage liefert. Das wäre aber mit erheblichem Rechenaufwand verbunden. „Leider“ helfen herkömmliche Taschenrechner im Moment (im Jahre 2008) auch nicht weiter, weil sie nicht so viele Stellen verarbeiten können. Also muss es noch einen anderen Lösungsweg geben:
Der Punkt A liegt im IV. Quadranten. Die Gerade g_2 verläuft aber offenbar nicht durch diesen Quadranten. Also liegt der Punkt A nicht auf der Geraden g_2.

13. In einer Zoohandlung wurden zehn Mäuse zu je 2,50 €, Goldhamster zu je 4,00 € und Zwergkaninchen zu je 8 € verkauft (siehe Tabelle).

Tierart	Mäuse	Goldhamster	Zwergkaninchen
Preis pro Stück in €	2,50	4,00	8,00
Anzahl	10		

Insgesamt wurden 23 Tiere verkauft. Die Einnahmen betrugen 97 €. Berechne, wie viele Goldhamster und Zwergkaninchen verkauft wurden.

Lösung: Anzahl der Goldhamster: x und Anzahl der Zwergkaninchen: y.
Zahl der verkauften Tiere: $10 + x + y = 23$
Einnahmen in €: $10 \cdot 2,5 + 4 \cdot x + 8 \cdot y = 97$.
Damit erhältst du das folgende Gleichungssystem:

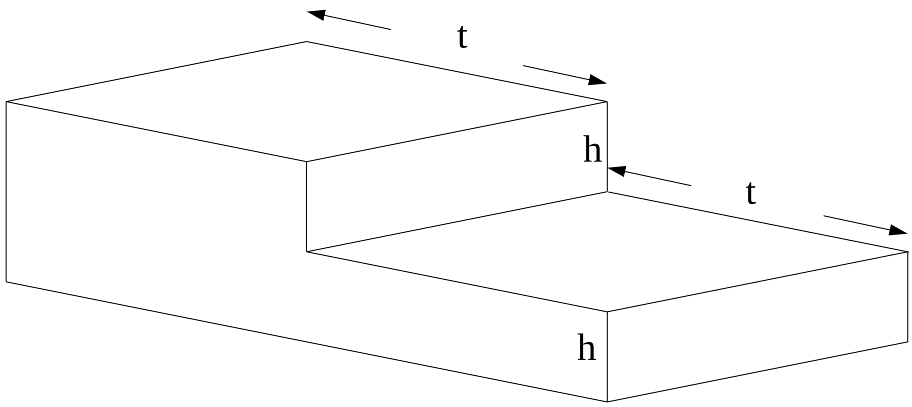
$$\begin{array}{rrcrcrl} & x & + & y & = & 13 & (1) \mid \cdot(-4) \\ \wedge & 4x & + & 8y & = & 72 & (2) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcrl} & -4x & - & 4y & = & -52 & (1)' \\ \wedge & 4x & + & 8y & = & 72 & (2)' \\ \hline \end{array}$$

$$(1)' + (2)': \quad 4y = 20 \mid : 4$$

Also: $y = 5$ in (1) : x = 8.
Es wurden acht Goldhamster und fünf Zwergkaninchen verkauft.

14.



„Die magische Zahl für Treppen lautet 63 Zenimeter. So viel beträgt das Schrittmaß, das für eine gute Begehbarkeit steht. ... Das Schrittmaß errechnet sich nach folgender Formel: Zweimal die Stufenhöhe h plus einmal die Stufentiefe t gleich 63 Zentimeter.“
Quelle: Nordbayerischer Kurier vom 12. Sept 2010, S. 22

(a) Stelle eine Formelgleichung auf, die das Schrittmaß von 63 cm im Zusammenhang mit der Stufenhöhe h und der Stufentiefe t beschreibt.

(b) Herr Feust will nach dieser Formelgleichung eine Steintreppe vom Haus zum Garten anlegen. Er meint: „Je niedriger die Stufenhöhe wird, desto länger fällt nach dieser Formelgleichung die Stufentiefe aus.“
Bestätige diesen Sachverhalt mit einem Zahlenbeispiel.

(c) Im Haus der Familie Feust wohnen auch die schon etwas gebrechlichen Eltern von Frau Feust. Daher wird festgelegt, dass die Stufenhöhe 16 cm nicht überschreiten darf. Berechne das zugehörige Mindestmaß der Stufentiefe.

(d) Während der Arbeiten schaut Nachbar Tufes, der alles besser weiß, interessiert zu: „Ich hätte einfach Stufentiefe = Stufenhöhe gewählt.“ Was meinst du dazu? Begründe deine Antwort.

(e) Wie lang wird die gesamte Treppe, wenn sie bei einer Stufenhöhe von 15 cm vom Haus bis in den Garten eine Höhendifferenz von 1,20 m überwindet?

Lösung: (a) Hier gilt: $63\,\text{cm} = 2 \cdot h + t$.

(b) Z.B.:
$h_1 = 20\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 23\,\text{cm}$
$h_1 = 18\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 27\,\text{cm}$.

(c) Es gilt: $h = (63\,\text{cm} - t) : 2$

$$\begin{aligned} h = (63\,\text{cm} - t) : 2 &\leqq 16\,\text{cm} \mid \cdot 2 \\ 63\,\text{cm} - t &\leqq 32\,\text{cm} \mid -63\,\text{cm} \\ -t &\leqq -31\,\text{cm} \mid \cdot(-1) \\ t &\geqq 31\,\text{cm} \end{aligned}$$

Die Stufentiefe muss also mindestens 31 cm betragen.

(d) In der Formelgleichung gilt dann $h = t$: $63\,\text{cm} = 3t \quad t = 21\,\text{cm}$.
Eine Stufentiefe von nur 21 cm wäre für ältere Leute zu gefährlich.

(e) Es werden $1{,}20\,\text{m} : 15 = 120\,\text{cm} : 15\,\text{cm} = 8$ Stufen benötigt.
$63\,\text{cm} = 2 \cdot 15\,\text{cm} + t \quad \Rightarrow \quad t = 33\,\text{cm}$.
$33\,\text{cm} \cdot 8 = 264\,\text{cm} = 2{,}64\,\text{m}$.
Die gesamte Treppenlänge beträgt also 2,64 m.

15. In einem Lehrbuch steht zum Thema „Gleichungssysteme“ eine Aufgabe mit der Musterlösung:
„Es sind a und b natürliche Zahlen. Berechne a und b so, dass $a^2 - b^2 = 15$ gilt.“

MUSTERLÖSUNG

$$a^2 - b^2 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)(a+b) = 15\,.$$

Wegen $\mathbb{T}_{15} = \{1;\ 3;\ 5;\ 15\}$ und $a + b > a - b$ folgt

entweder:

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a & + & b & = & 15 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 1 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 16 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 8$ z.B. in (2): $b = 7$
Probe: $8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$, stimmt.

oder:

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a & + & b & = & 5 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 3 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 8 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 4$ z.B. in (2): $b = 1$
Probe: $4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$, stimmt.

$$\Rightarrow \quad L = \{(4 \mid 1);\ (8 \mid 7)\}$$

(a) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 77$ und mache die Probe..

(b) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 83$ und mache die Probe..

(c) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 38$ und mache die Probe..

(d) Edwin behauptet: „Wenn der Wert der Differenz aus den Quadraten von a und b gerade ist, dann ist die Lösungsmeng leer.“
Begründe, dass Edwin nicht Recht hat.

Lösung: (a) Wegen $\mathbb{T}_{77} = \{1;\ 7;\ 11;\ 77\}$ folgt
entweder:

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a & + & b & = & 11 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 7 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 18 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 9 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 2$

Probe: $9^2 - 2^2 = 81 - 4 = 77$, stimmt.

oder:

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a & + & b & = & 77 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 1 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 78 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 39 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 38$

Probe: $39^2 - 38^2 = 1521 - 1444 = 77$, stimmt.

$$\Rightarrow \quad L = \{(9 \mid 2); (39 \mid 38)\}$$

(b) 83 ist eine Primzahl. Wegen $\mathbb{T}_{83} = \{1; 83\}$ folgt

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a & + & b & = & 83 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 1 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 84 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 42 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 41$

Probe: $42^2 - 41^2 = 1764 - 1681 = 83$, stimmt.

(c) Wegen $\mathbb{T}_{38} = \{1; 2; 19; 38\}$ folgt z.B.

$$\begin{array}{lrcrcrlcccc} & a & + & b & = & 19 & & & & & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 2 & & & & & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 21 & \Rightarrow & a \notin \mathbb{N} & \Rightarrow & b \notin \mathbb{N} & \end{array}$$

Damit folgt: $\quad L = \emptyset$.

(d) Das folgende Gegenbeispiel zeigt, dass Edwin Unrecht hat:
$a^2 - b^2 = 44$. Daraus wird z.B.:

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a & + & b & = & 22 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 2 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 24 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 12$ und $\quad b = 10$.

In der Tat ist $12^2 - 10^2 = 144 - 100 = 44$.

Für $a^2 - b^2 = 2^n \cdot p$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $p \in \mathbb{P}$ ist die Lösungsmenge nie leer.

2. Reelle Zahlen

1. Vereinfache jeweils den Term so weit wie möglich ohne mit dem Taschenrechner zu runden. Es muss ein logischer Rechenweg zum Ergebnis führen.

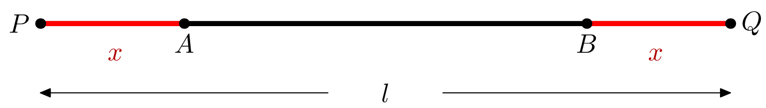
   (a) $\sqrt{\left(\sqrt{1000}+\sqrt{999}\right)\cdot\left(\sqrt{1000}-\sqrt{999}\right)}$

   (b) $\left(\sqrt{3}^{\,2}-3\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^{3876}$

Lösung: (a) 1

(b) 0

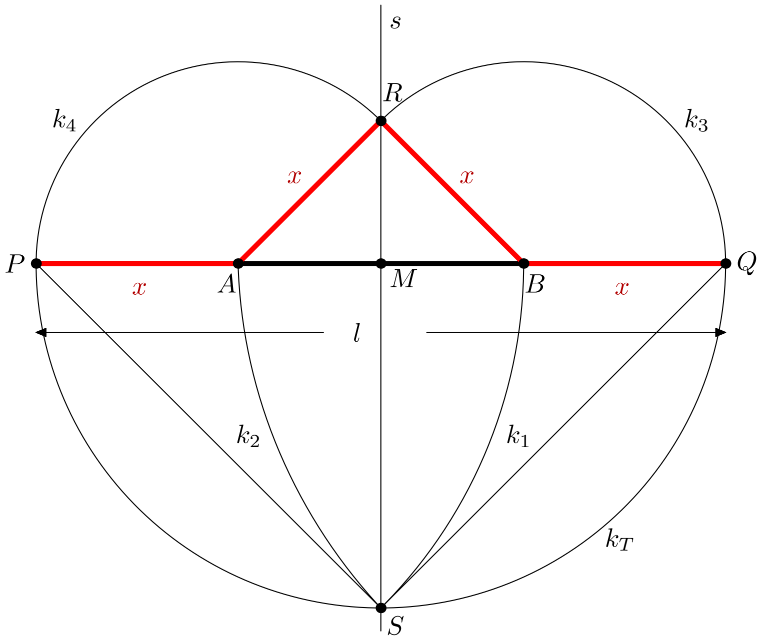
2.



Ein Metallstab mit der Länge l soll an den Punkten A und B so abgeknickt werden, dass ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck entsteht. Die Stabenden P und Q sollen sich dabei berühren.

(a) Zeige: Dann muss gelten: $x = \dfrac{l}{2+\sqrt{2}}$

(b)
- Begründe: $\dfrac{l}{2+\sqrt{2}} = l - \dfrac{l}{2}\sqrt{2}$
- Eine Möglichkeit, die Länge $x = l - \frac{l}{2}\sqrt{2}$ aus der vorgegebenen Stablänge l und damit die Knickpunkte A und B zu konstruieren, ist zusammen mit dem sich ergebenden gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABR unten dargestellt:

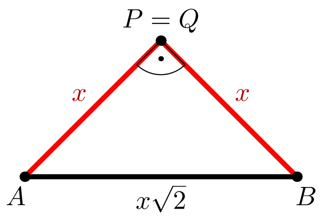


Begründe, dass in dieser Konstruktion $x = l - \frac{l}{2}\sqrt{2}$ gilt.

- Konstruiere die Knickpunkte A und B und das fertige Dreieck ABR für eine Stablänge von $2,40\,\text{m}$ im Maßstab 1:20. Beschreibe die Konstruktion.

Lösung:

(a)



Die Hypotenuse $[AB]$ des Dreiecks ABP bzw. ABQ ist so lang wie die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge x, nämlich $\overline{AB} = x \cdot \sqrt{2}$.
Der Umfang dieses Dreiecks muss die Stablänge l ergeben:
$x + x + x\sqrt{2} = l \quad \Leftrightarrow \quad x(2+\sqrt{2}) = l \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{l}{2+\sqrt{2}}$

(b)
- $\dfrac{l}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{l}{2+\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{2l - l\sqrt{2}}{2} = l - \dfrac{l}{2}\sqrt{2} = x,$

  was zu zeigen war.
- Der THALES-Halbkreis unter der Strecke $[PQ]$ schneidet deren Sysmmetrieachse s im Punkt S.
  Folglich sind die beiden Dreiecke PSM und SQM kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, die du zu einem Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AM} = \overline{MQ} = \overline{MS} = \frac{l}{2}$ und der Diagonalenlänge $\overline{PS} = \overline{QS} = \overline{PB} = \overline{QA} = \frac{l}{2}\sqrt{2}$ zusammenfügen

könntest.
Dann besitzen aber die Strecken $[AQ]$ und $[BQ]$ jeweils die Länge
$$l - \frac{l}{2}\sqrt{2} = x \text{ (siehe oben).}$$

- Ein $2,40\,\text{m} = 240\,\text{cm}$ langer Metallstab ist im Maßstab 1:20 in deiner Zeichnung $240\,\text{cm} : 20 = 12\,\text{cm}$ lang.
  - Zeichne die Mittelsenkrechte s der Strecke $[PQ]$
  - Zeichne den THALES-(Halb)Kreis k_T unter der Strecke $[PQ]$
  - $k_T \cap s = \{S\}$
  - $k_1(P, r_1 = \overline{PS}) \cap [PQ] = \{B\}$
  - $k_2(Q, r_2 = \overline{QS}) \cap [PQ] = \{A\}$
  - $k_3(B, r_3 = \overline{BQ}) \cap s = \{R\}$ oder $k_4(A, r_4 = \overline{AP}) \cap s = \{R\}$ oder $k_3 \cap k_4 = \{R\}$
  - Das Dreieck ABR ist das gesuchte.

3. Zeige ohne Verwendung des ETR:
   (a) $(3 + 1^{9876534212345}) \cdot (7\sqrt{2} - 3\sqrt{2})^2 = 128$
   (b) $\left(\frac{185}{37} - 0^{555666777888999}\right) : \left(\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} + 95\right) = \frac{1}{20}$
   (c) $\sqrt{9\frac{1}{4}} : \sqrt{4\frac{5}{8}} = \sqrt{2}$
   (d) $\left(\sqrt{12} + 13^{1000}\right) \cdot \left(\sqrt{1}^{777555333111} - \frac{1}{2} : \frac{3}{6}\right) \cdot \left(\frac{9888777666555}{9888777666554} + 14^{-87}\right) = 0$

Lösung: (a) Bei der Basis 1 kann der Exponent heißen, wie er will: Der Potenzwert ist immer 1.
$\left(3 + 1^{9876534212345}\right) \cdot (7\sqrt{2} - 3\sqrt{2})^2 = 4 \cdot (4\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 16 \cdot 2 = 128$

(b) Jede Potenz mit der Basis 0 und einem natürlichen Exponenten hat den Wert 0.
$$\left(\frac{185}{37} - 0^{555666777888999}\right) : \left(\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} + 95\right) =$$
$$= 5 : \left(\sqrt{\frac{50}{2}} + 95\right) = 5 : 100 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

(c) $\sqrt{9\frac{1}{4}} : \sqrt{4\frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{37}{4}} : \sqrt{\frac{37}{8}} = \sqrt{\frac{37}{4} \cdot \frac{8}{37}} = \sqrt{2}$

(d) Der Term stellt ein Produkt aus drei Faktoren dar: In jedem Klammernpaar steht einer davon.
Ein Produkt hat dann den Wert 0, wenn mindestens ein Faktor den Wert 0 hat. Du siehst:

$$\underbrace{\left(\sqrt{12}+13^{1000}\right)}_{>0}\cdot\left(\sqrt{1}^{777555333111}-\frac{1}{2}:\frac{3}{6}\right)\cdot\underbrace{\left(\frac{9888777666555}{9888777666554}+14^{-87}\right)}_{>0}$$

Dann muss der Faktor in der Mitte den Wert 0 besitzen:
$\sqrt{1}=1$. Nach Lösung (a) ist also $\sqrt{1}^{9876534212345}=1$

und $\frac{1}{2}:\frac{3}{6}=\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=1$.

Somit vereinfacht sich der mittlere Faktor zu $1-1=0$. Damit ist der ganze Produktwert 0.

4. Erwin und Claudia sollen den Term $\sqrt{9\frac{1}{4}}$ vereinfachen. Claudia meint: „Das haben wir gleich:

   $\sqrt{9}=3$ und $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$, also kommt $3,5$ heraus.“

   Erwin überprüft Claudias Ergebnis mit dem Taschenrechner: „Ich bekomme $3,041381265$ heraus“.
   Claudia überlegt: „Aber es kann ja nur ein Ergebnis richtig sein.“
   Wo liegt der Fehler? Begründe deine Antwort.

Lösung: $\sqrt{9\frac{1}{4}}$ ist ausführlich geschrieben $\sqrt{9+\frac{1}{4}}$.

Claudia hat also über einem **Pluszeichen** die Wurzel in zwei einzelne Wurzeln zerlegt. Das darfst du aber nur bei **Punktrechnungen** tun.

Der richtige Weg wäre: $\sqrt{9\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{37}{4}}=\frac{\sqrt{37}}{2}$. Spätestens hier erkennst du, dass die Wurzel „nicht aufgeht“; d.h. das Ergebnis ist nicht rational.
Und tatsächlich: $\frac{\sqrt{37}}{2}\approx 3,041381265$.

5. Karin hat im Taschenrechner $\sqrt{2}$ eingeben. Er zeigt $1,414213562$ an. Sie meint dazu: „Das muss ein gerundeter Wert sein.“ Begründe, dass sie Recht hat.

Lösung: Wenn $\sqrt{2}=1,414213562$ wäre, dann müsste umgekehrt
$1,414213562^2=1,414213562\cdot 1,414213562=2$ gelten.
Wenn man aber eine Zahl mit einer anderen Zahl multilpiziert, dann ist die Endziffer des Produktwertes die letzte Ziffer des Produktwertes der beiden Endziffern der beiden Faktoren.
Beispiel: $109457\cdot 5620003$ liefert das Produkt der Endziffern $7\cdot 3=21$.

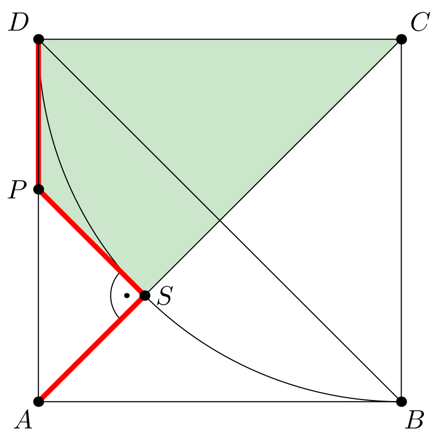
Also endet der Produktwert aus $109457 \cdot 5620003$ mit der Ziffer 1. Bei Dezimalzahlen gilt diese Regel natürlich auch.
Der Produktwert $1,414213562 \cdot 1,414213562$ besitzt $9 + 9 = 18$ Stellen nach dem Komma, wobei die letzte Ziffer nicht 0 sein kann, denn dann wäre ja schon nach 17 Ziffern Schluss. Die letzte Ziffer ist $2 \cdot 2 = 4$.
Der ETR rundet also auf 9 Stellen nach dem Komma.

Anmerkung:
Es ist $1,414213562 \cdot 1,414213562 = 1,999999998944727844$, also treten die vorhergesagten 18 Stellen nach dem Komma auf.
Der ETR zeigt aber nur 9 Stellen nach dem Komma an. Also muss er runden: Die 10. Ziffer im Ergebnis ist eine 9. Also wird die 9. Ziffer nach dem Komma, nämlich die 8, zur 9. Dann müsste der ETR eigentlich für $\sqrt{2}^{\,2}$ das Ergebnis $1,999999999$ anzeigen.
Das macht er aber nur, wenn du $1,414213562 \cdot 1,414213562$ oder $1,414213562^2$ per Hand eingibst.
Wenn du dagegen „$\sqrt{2}$“ eingibst, und das Ergebnis mit der „x^2“-Taste quadrierst, dann erscheint „glatt“ 2 im Fenster. Daraus kannst du schließen, dass der ETR bei $\sqrt{2}$ anders rundet als bei der „Handeingabe“.

6. Begründe: $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right)^{444} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^{444} = 16^{\,111}$.

Lösung:
$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right)^{444} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^{444} = \left(\frac{(\sqrt{5}-1)\cdot(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right)^{444} = \left(\frac{\sqrt{5}^{\,2}-1^2}{\sqrt{2}^{\,2}}\right)^{444} =$$
$$= \left(\frac{4}{2}\right)^{444} = 2^{\,444} = 2^{\,4\cdot 111} = \left(2^4\right)^{111} = 16^{\,111}.$$

7.



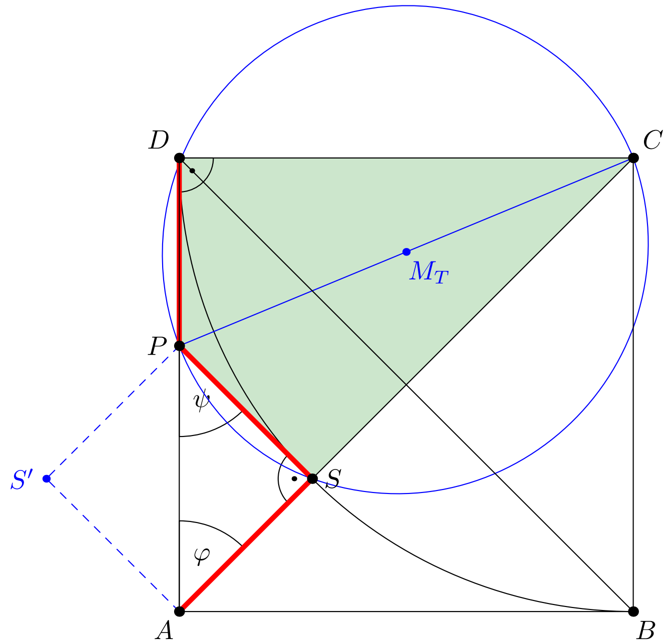
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) • Begründe rechnerisch: Das Viereck $SCDP$ ist ein achsensymmetrischer Drachen.

• Besitzt dieses Drachenviereck einen Umkreis? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a)



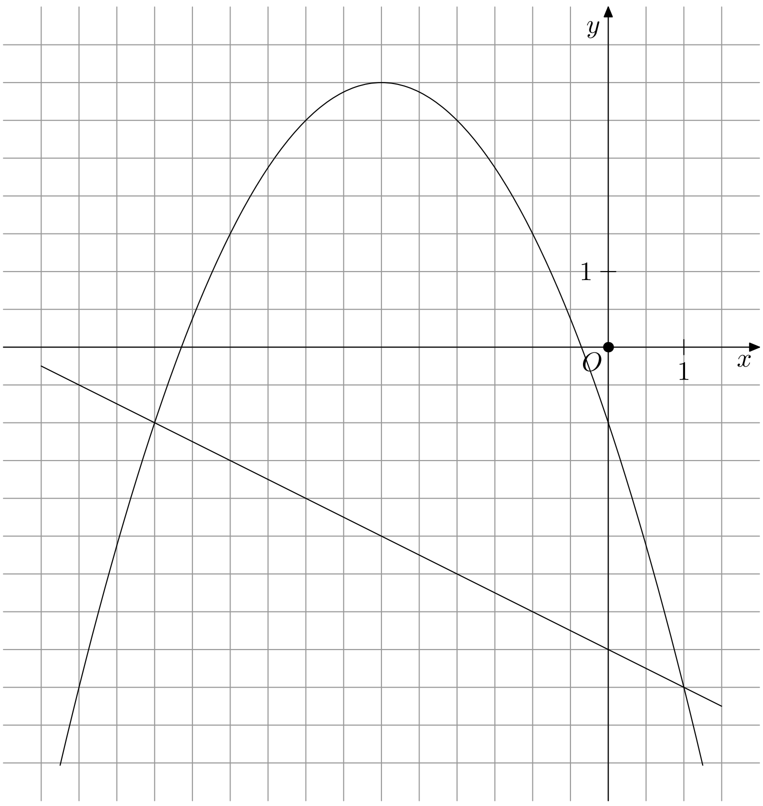
(b) • Es gilt: $\overline{CS} = \overline{CD}$. **(*)**
Die Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ sind Halbierende der betreffenden rechten Innenwinkel.
Also folgt $\varphi = 45°$.
Wegen der Innenwinkelsumme im rechtwinkligen Dreieck ASP gilt dann $\psi = 45°$.
Also ist das Dreieck ASP gleichschenklig. Damit gilt:
$\overline{AS} = \overline{AC} - \overline{SC} = \overline{SP} = (6\sqrt{2} - 6)\,\text{cm}$.

Der Punkt S' ist das Spiegelbild des Punktes S an der Strecke $[AP]$. Das Dreieck ASP ist somit die Hälfte eines Quadrates mit der Diagonalen $[AP]$.
Somit gilt: $\overline{AP} = \overline{AS} \cdot \sqrt{2} = (12 - 6\sqrt{2})\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad \overline{DP} = \overline{AD} - \overline{AS} = [6 - (12 - 6\sqrt{2})]\,\text{cm} = (6\sqrt{2} - 6)\,\text{cm} = \overline{PS} = \overline{AS}$.
Mit **(*)** ist erwiesen, dass es sich um einen achsensymmetrischen Drachen handelt.

• Die Diagonale $[PC]$ des Drachens $SCDP$ zerlegt dieses Viereck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke. Somit liegen die Eckpunkte S, C, D und P dieses Vierecks auf dem THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[SC]$. Dieser Kreis ist also der Umkreis des Drachenvierecks.

3. Quadratische Funktionen

1. Gegeben sind die Parabel $p: y = -0,5x^2 - 3x - 1$ und die Gerade $g: y = -0,5x - 4$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
   Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



   Auf der Parabel p wandern sowohl Punkte $A_n(x \mid -0,5x^2-3x-1)$ als auch Punkte C_n. Dabei ist der Abszissenwert der Punkte C_n stets um 3 größer als der Abszissenwert x der Punkte A_n.

   (a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der Parabel p mit der Geraden g.

   (b) Berechne die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit vom x-Wert der Punkte A_n.

   [Ergebnis: $C_n(x + 3 \mid -0,5x^2 - 6x - 14,5)$]

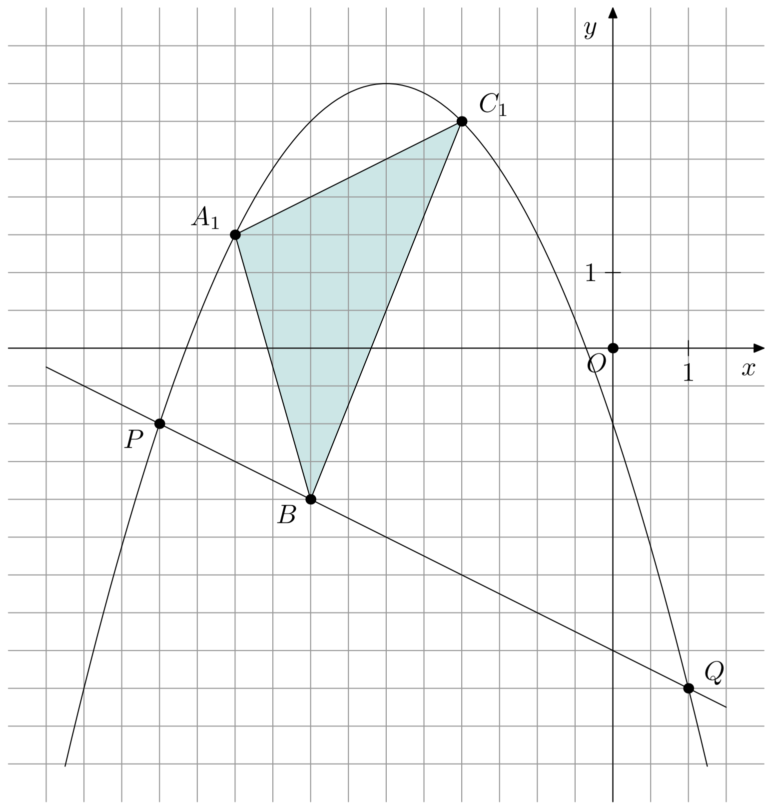
   (c) Zusammen mit dem Punkt $B(-4| - 2)$ werden zwischen Gerade und Parabel Dreiecke A_nBC_n erzeugt.
   Zeichne für $A_1(-5|y_1)$ das Dreieck A_1BC_1 in obiges Koordinatensystem ein.

(d) Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke A_nBC_n in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A(x) = (0,75x^2 + 8,25x + 28,5)\,\text{cm}^2$]

(e) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es eines, das einen minimalen Flächeninhalt aufweist. Berechne dieses Minimum und die zugehörige Belegung von x.

(f) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es das Dreieck A_3BC_3, so dass $\sphericalangle A_3BP = \sphericalangle BA_3C_3$ gilt. Berechne den zugehörigen Abszissenwert x.

Lösung:



(a) $-0,5x^2 - 3x - 1 = -0,5x - 4 \quad \Rightarrow \quad -0,5x^2 - 2,5x + 3 = 0$
$D^* = 12,25 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{D^*} = 3,5$
$x_{1;2} = \dfrac{2,5 \pm 3,5}{-1}$
$x_1 = -6$ in g: $y_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad P(-6 \mid -1)$
$x_2 = 1$ in g: $y_2 = -4,5 \quad \Rightarrow \quad Q(1 \mid -4,5)$

(b) Das Ergebnis folgt aus: $C_n(x+3 \mid -0,5(x+3)^2 - 6(x+3) - 14,5)$.

(c) Siehe Zeichnung

(d) $\overrightarrow{BC_n} = \begin{pmatrix} x+7 \\ -0,5x^2 - 6x - 12,5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BA_n} = \begin{pmatrix} x+4 \\ -0,5x^2 - 3x + 1 \end{pmatrix}$

$$A(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x+7 & x+4 \\ -0,5x^2 - 6x - 12,5 & -0,5x^2 - 3x + 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \quad A(x) = (0,75x^2 + 8,25x + 28,5)\,\text{cm}^2$

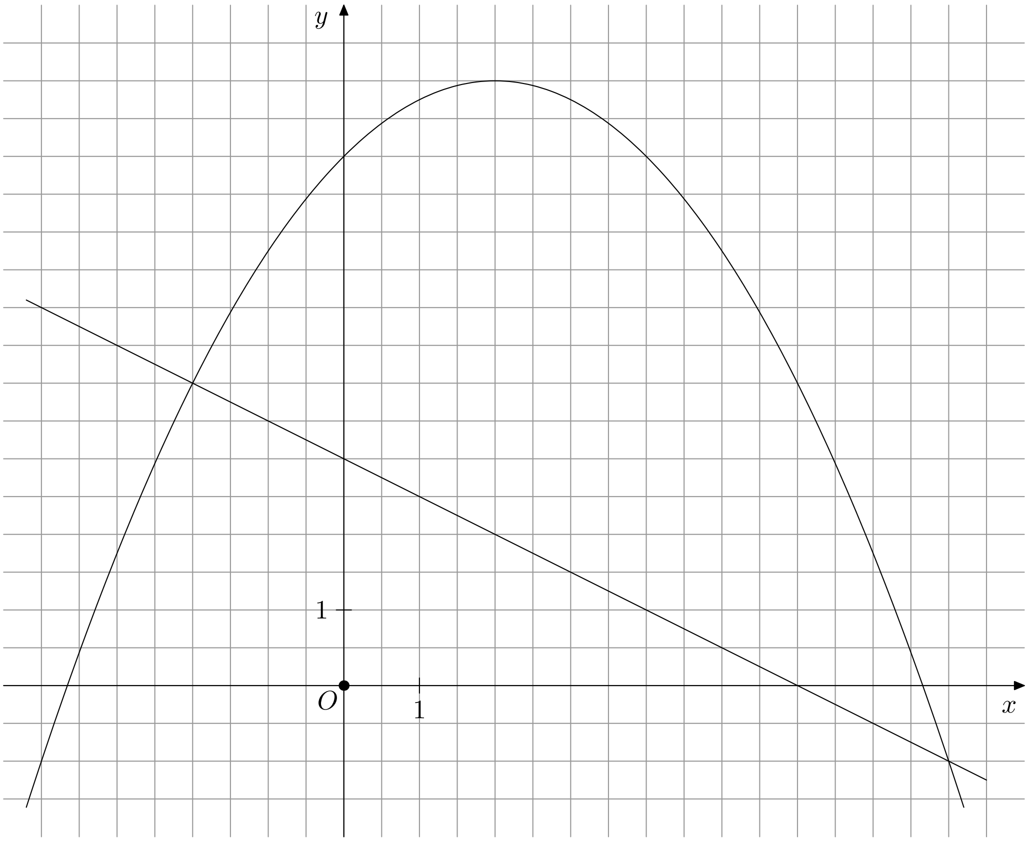
(e) $x = -5,5$ liefert $A_{\text{min}} = 5,8125\,\text{cm}^2$.

(f) Die Seite $[A_3C_3]$ muss zur Graden g parallel sein:

$$\overrightarrow{A_nC_n} = \begin{pmatrix} x+3-x \\ -0,5x^2-6x-14,5-(-0,5x^2-3x-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3x-13,5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-3x-13,5}{3} = -0,5 \quad \Rightarrow \quad x = -4$$

2. Gegeben sind die Parabel p und die Gerade g durch die Gleichungen:
$p: y = -0,25x^2 + x + 7$ und $g: y = -0,5x + 3$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



(a) Ermittle die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der Parabel p mit der Geraden g. Der Punkt P soll dabei nicht im IV. Quadranten liegen.

(b) Die Punkte $A_n(x \mid -0,25x^2 + x + 7)$ auf der Parabel p und die Punkte B_n auf der Geraden g besitzen jeweils den gleichen Abszissenwert.
Die Punkte A_n und B_n sind Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken $A_nB_nC_n$ mit den Basen $[A_nB_n]$. Die Höhen auf diese Basen sind stets 4 cm lang. Die Punkte C_n sollen stets rechts von den Basen $[A_nB_n]$ liegen.
Zeichne für $x = -1$ das Dreieck $A_1B_1C_1$ ein.

(c) Zeichne für $C_2(7,5 \mid y_2)$ das Dreieck $A_2B_2C_2$ ein.
Berechne die Koordinaten des Punktes A_2.

(d) Zeige durch Rechnung: Für den Flächeninhalt A dieser Dreiecke $A_nB_nC_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = (-0,5x^2 + 3x + 8)\,\mathrm{cm}^2$$

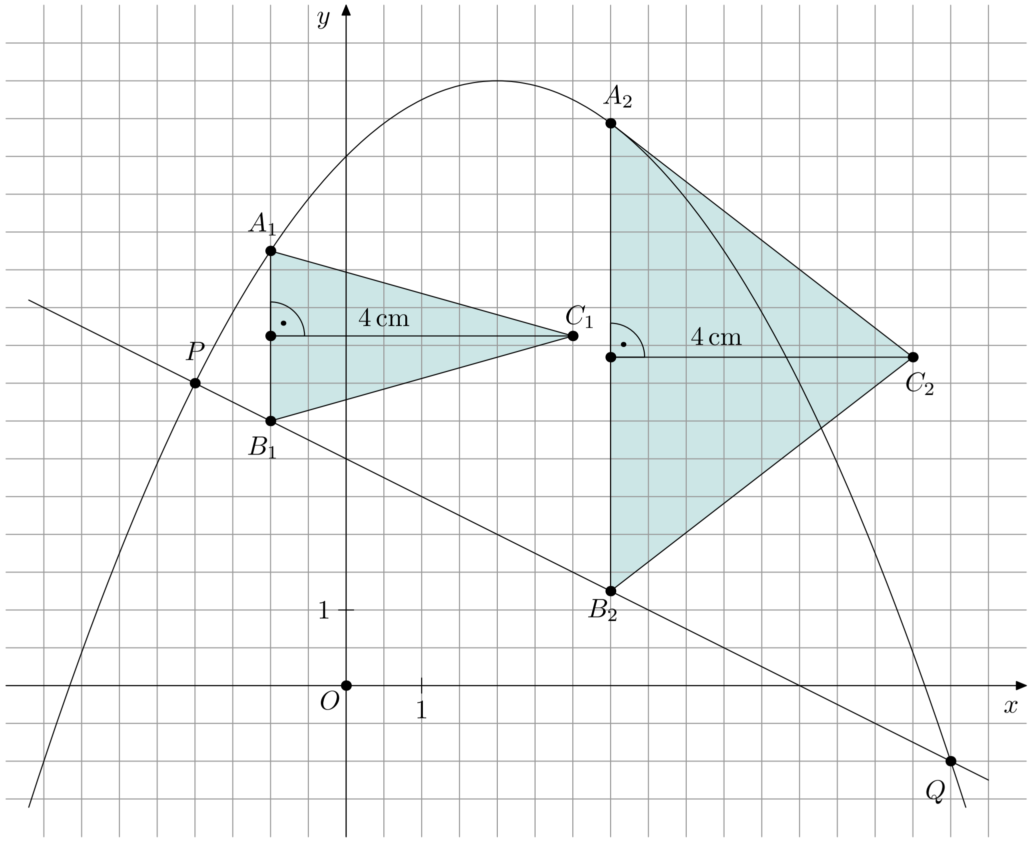
(e) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es eines, das einen maximalen Flächeninhalt aufweist. Berechne dieses Maximum und die zugehörige Belegung von x.

(f) Gibt es unter allen Dreiecken A_nBC_n ein Dreeick $A_3B_3C_3$, dessen Eckpunkt C_3 auf der y-Achse liegt? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) Der Schnittpunkt im IV.Quadranten muss Q sein.

1. Möglichkeit:
$-0,25x^2 + x + 7 = -0,5x + 3 \quad \Rightarrow \quad -0,25x^2 + 1,5x + 4 = 0$
$D^* = 6,25 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{D^*} = 2,5$
$x_{1;2} = \dfrac{-1,5 \pm 2,5}{-0,5}$
$x_1 = -2$ in g: $y_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad P(-2 \mid 4)$
$x_2 = 8$ in g: $y_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad Q(8 \mid -1)$
2. Möglichkeit:
Aus der schon vorhandenen Zeichnung kannst du ablesen: $P(-2 \mid 4)$ und $Q(8 \mid -1)$.
Wenn du die Koordinaten dieser Punkte in die Gleichung der Parabel **und** die der Geraden einsetzt, ergeben sich insgesamt vier wahre Aussagen. Das bedeutet, dass die Punkte P und Q **sowohl** auf der Geraden g **als auch** auf der Parabel p liegen.
Weil aber eine Gerade eine Parabel höchstens in zwei Punkten schneiden kann, sind P und Q die gesuchten Schnittpunkte.

(b)



(c) Siehe Zeichnung.
$x_C = 7,5 \quad \Rightarrow \quad x = 7,5 - 4 = 3,5$
$\Rightarrow \quad y = -0,25 \cdot 3,5^2 + 3,5 + 7 = 7,4375 \quad \Rightarrow \quad A_2(3,5 \mid 7,4375)$

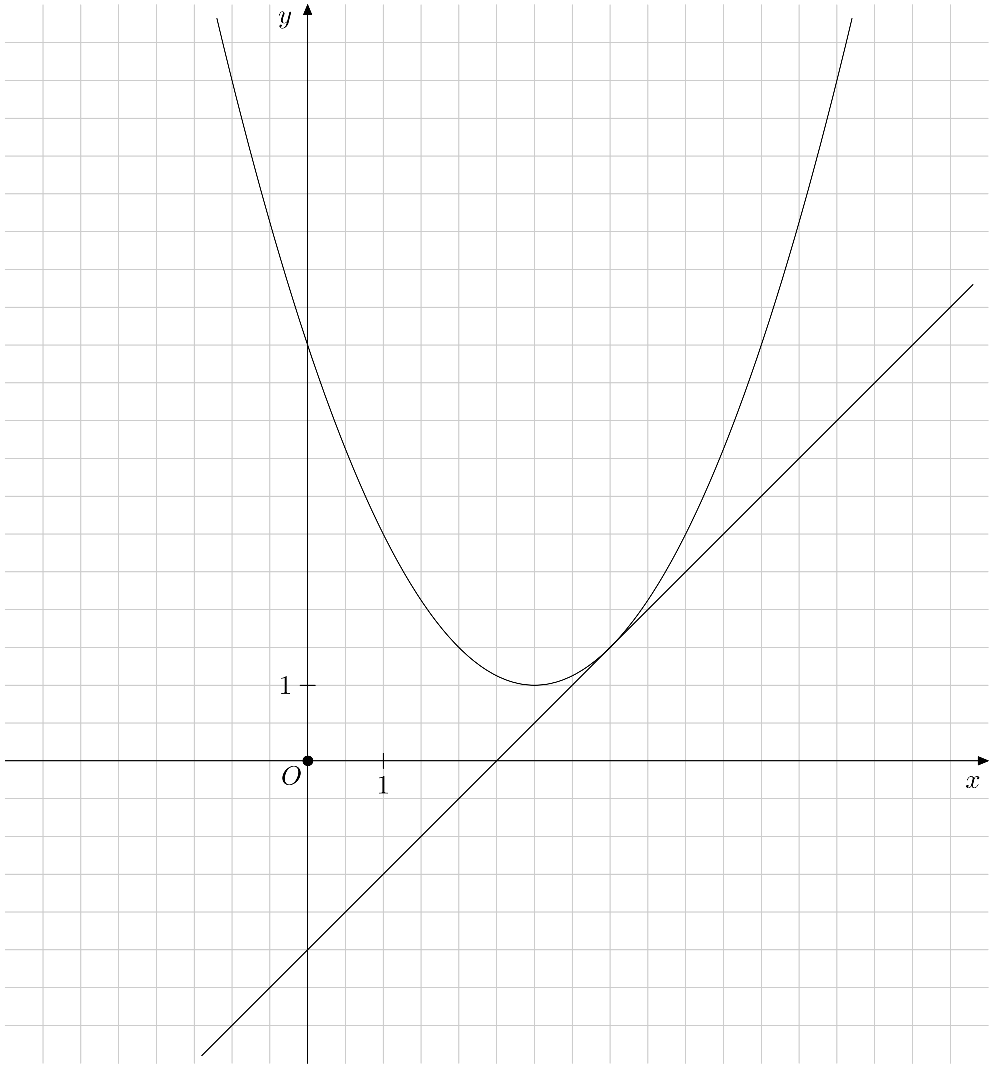
(d) $y_{A_n} - y_{B_n} = -0,25x^2 + x + 7 - (-0,5x + 3) = -0,25x^2 + 1,5x + 4$
$A(x) = 0,5 \cdot (-0,25x^2 + 1,5x + 4) \cdot 4\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad A(x) = (-0,5x^2 + 3x + 8)\,\text{cm}^2$

(e) $x = 3$ liefert $A_{\max} = 12,5\,\text{cm}^2$.

(f) Wenn der Punkt C_3 auf der y-Achse liegen soll, dann müssen die Punkte A_3 und B_3 auf einer Parallelen zur y-Achse im Abstand von 4 cm liegen, die durch den II. und III. Quadranten verläuft.
Der Abstand des Punktes P von der y-Achse beträgt 2 cm. Demnach käme der Punkt B_3 auf der Geraden g über den Punkt A_3 auf der Parabel p zu liegen. Dadurch hätte das Dreieck $A_3B_3C_3$ den falschen Drehsinn, weil der Punkt C_3 ja wie alle Punkte C_n rechts von der Basis liegen müsste; d.h. es gibt unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ kein solches Dreieck $A_3B_3C_3$.

3. Die Parabel p besitzt die Scheitelkoordinaten $S(3 \mid 1)$ und sie verläuft durch einen Punkt mit den Koordinaten $(5 \mid 3)$. Außerdem ist eine Gerade g durch die Gleichung $y = x - 2,5$ gegeben.
Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt.
Auf der Geraden g liegen Punkte $A_n(x \mid x - 2,5)$ und auf der Parabel p liegen Punkte

C_n, die jeweils denselben Abszissenwert wie die Punkte A_n besitzen.
Damit werden Rauten $A_nB_nC_nD_n$ erzeugt, deren Diagonalen $[B_nD_n]$ stets 4 cm lang sind.



(a) Zeige: Die Parabel p besitzt die Gleichung $y = 0,5x^2 - 3x + 5,5$.

(b) Begründe rechnerisch: Die Gerade g ist eine Tangente an die Parabel p.

(c)
- Zeichne für $x = -1$ die Raute $A_1B_1C_1D_1$ ein.
- Zeichne für $D_2(4 \mid y_{D_2})$ die Raute $A_2B_2C_2D_2$ ein.

(d)
- Für die Diagonalenlängen $\overline{A_nC_n}$ gilt in Abhängigkeit von x:
  $\overline{A_nC_n}(x) = (0,5x^2 - 4x + 8)$ cm.
  Ermittle damit alle Belegungen von x, für die es solche Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt.
- Für den Flächeninhalt A der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

$A(x) = (x^2 - 8x + 16)\,\mathrm{cm}^2$.
Bestätige damit das Ergebnis der vorherigen Aufgabe.

- Bestätige mit dem Ergebnis der Aufgabe (b) das Ergebnis der vorherigen Aufgabe.

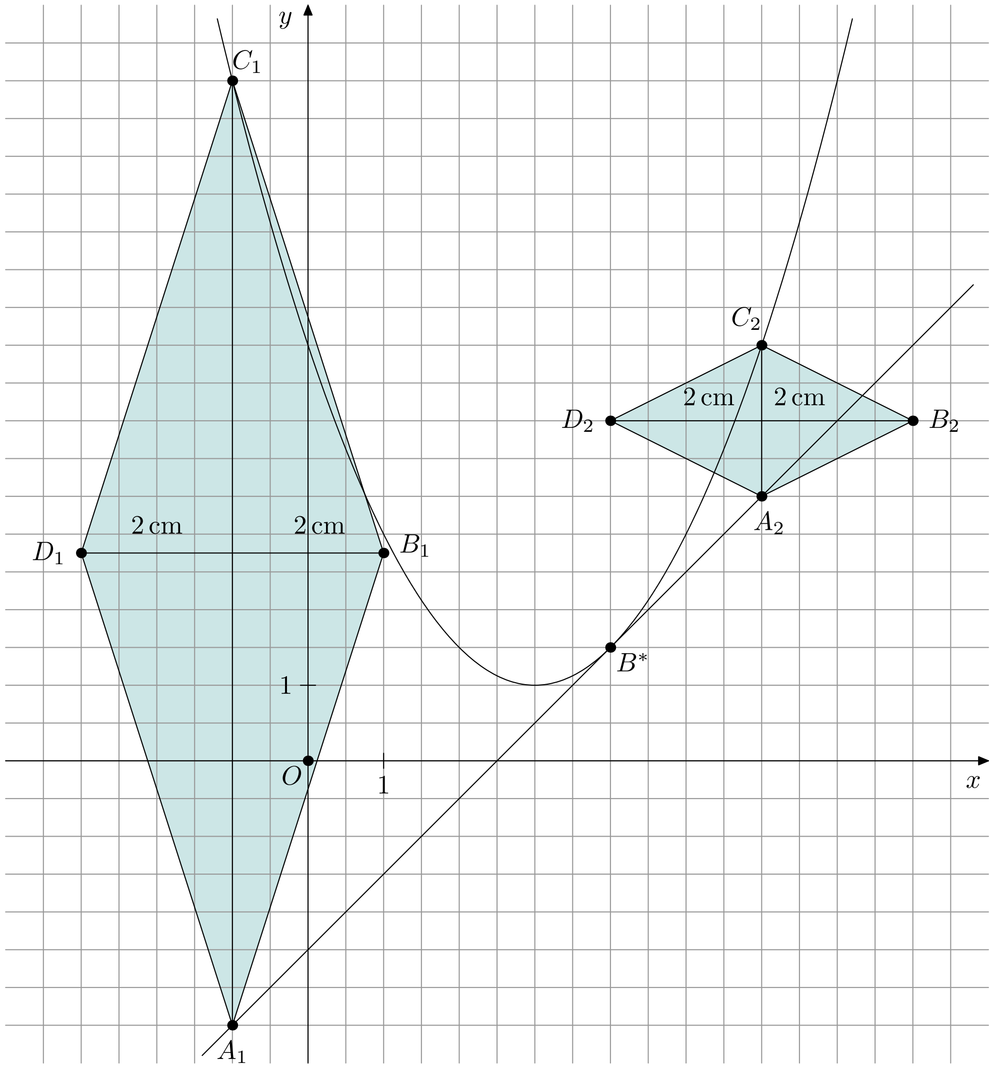
(e) Unter allen Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt es auch Quadrate.

- Jeweils ein Eckpunkt dieser Quadrate muss auf der Geraden g liegen. Warum?
- Wie viele solcher Quadrate gibt es? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) $S(3 \mid 1)$ und $(5 \mid 3)$ in die Scheitelform:
$p : 3 = a \cdot (5-3)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad a = 0,5$
$p : y = 0,5 \cdot (x-3)^2 + 1 = \ldots = 0,5x^2 - 3x + 5,5$

(b) $p \cap g : 0,5x^2 - 3x + 5,5 = x - 2,5 \quad \Rightarrow \quad 0,5x^2 - 4x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad D^* = 0$
Also ist die Gerade g eine Tangente an die Parabel p.

(c)
- Siehe Zeichnung.
- Wenn der Punkt D_2 den Abszissenwert 4 besitzt, dann muss der Punkt B_2 den Abszissenwert $4 + 4 = 8$ besitzen.
  Somit müssen die Punkte A_2 und C_2 jeweils den x-Wert $\frac{8+4}{2} = 6$ besitzen, denn in jeder Raute halbieren sich die Diagonalen. Das ergibt dann das folgende Bild:



(d)

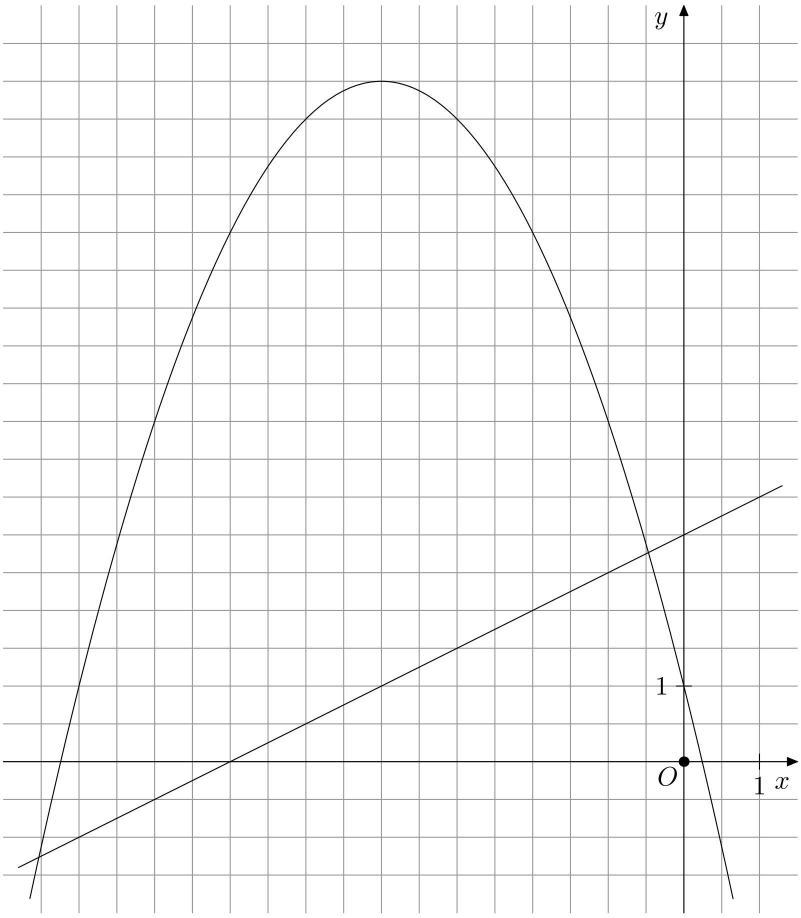
- $\overline{A_nC_n}(x) = (0,5x^2 - 4x + 8)\,\text{cm} = [0,5(x^2 - 8x + 16)]\,\text{cm} = 0,5(x-4)^2\,\text{cm}$
  Es gilt stets $(x-4)^2 \geqq 0$ und damit $0,5(x-4)^2 \geqq 0$.
  Für $x = 4$ gilt $\overline{A_nC_n}(4) = 0\,\text{cm}$; d.h. die betreffende „Raute“ würde zur Strecke entarten.
  Der Drehsinn sämtlicher Rauten bleibt immer richtig, weil die Punkte C_n auf der Parabel p stets „über“ der Geraden g mit ihren Punkten A_n liegen.
  Also gibt es Rauten $A_nB_nC_nD_n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
- Für den Flächeninhalt A der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gilt in Abhängigkeit von x:
  $A(x) = 0,5 \cdot 4 \cdot (0,5x^2 - 4x + 8)\,\text{cm}^2 = \ldots = (x-4)^2\,\text{cm}^2$
  Nur für $x = 4$ verschwindet der Flächeninhalt der betreffenden (zur Strecke entarteten) Raute.
  Also gibt es Rauten $A_nB_nC_nD_n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
- Die Gerade g ist eine Tangente der Parabel p. Also gibt es keinen Punkt auf der Parabel, der die Gerade g überqueren und damit den Drehsinn auch nur einer der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ umkehren könnte.
  Einzig der Berührpunkt B^* stellt einen kritischen Fall dar.

Wie in der Lösung (b) schon gezeigt, gilt $0,5x^2 - 4x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0,5(x-4)^2 = 0$ und damit folgt $B^*(4 \mid 1,5)$ (siehe Zeichnung). Nur dort gibt es eine (zu Strecke entartete) „Raute".
Also gibt es Rauten $A_nB_nC_nD_n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

(e)
- Die Quadratdiagonalen liegen wie alle Rautendiagonalen $\overline{A_nC_n}$ zur y-Achse parallel und sie halbieren jeweils zwei rechte Innenwinkel der betreffenden Quadrate. Die Gerade g besitzt den Steigungsfaktor m=1; d.h. sie schneidet die x-Achse unter einem 45°-Winkel. Folglich müssen die Quadratdiagonalen einen 45°-Winkel mit der Geraden g einschließen. Also müssen die Quadrateckpunkte unter den Rauteneckpunkten B_n auf der Geraden g liegen.
- 1. Möglichkeit:
  $0,5x^2 - 4x + 8 = 4 \quad \Rightarrow \quad 0,5x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad D^* = 8.$
  Die quadratische Gleichung besitzt zwei Lösungen und damit gibt es zwei Quadrate.
  2. Möglichkeit:
  Der Eckpunkt B_1 der Raute $A_1B_1C_1D_1$ liegt „über" der Geraden g, der Eckpunkt B_2 der Raute $A_2B_2C_2D_2$ liegt dagegen „unter" der Geraden g.
  Also muss einer der Punkte B_n – wir nennen ihn B_3 – während der Wanderung von der Position 1 zur Position 2 **auf** der Geraden g liegen.
  Die Gerade g besitzt den Steigungsfaktor m=1; d.h. sie schneidet die x-Achse unter einem 45°-Winkel. Das bedeutet, dass auch in der betreffenden Raute $A_3B_3C_3D_3$ $\sphericalangle B_3A_3C_3 = 45°$ gilt. Aus Symmetriegründen muss dann $\sphericalangle B_3A_3D_3 = 90°$ gelten. Wenn jedoch in der Raute $A_3B_3C_3D_3$ ein Innenwinkel das Maß 90° besitzt, dann muss diese Raute (wie jede andere auch) ein Quadrat sein.
  Wenn nun Punkte B_n über den Punkt B_2 der Raute $A_2B_2C_2D_2$ hinaus nach rechts wandern, nehmen die Diagonalenlängen $\overline{A_nC_n}$ wieder zu. Sie „heben" dann die Punkte B_n über die Gerade g hinweg. Also muss es einen weiteren Punkt B_4 geben der auf der Geraden g liegt. Aus den vorherigen Überlegungen muss dieser Punkt B_4 zu einem weiteren Quadrat $A_4B_4C_4D_4$ gehören.
  Links von der Position des Quadrates $A_3B_3C_3D_3$ und rechts von der Position des Quadrates $A_4B_4C_4D_4$ überquert keiner der Punkte B_n mehr die Gerade g. Also bleibt es bei den beiden Quadraten.

Anmerkung:
Die veränderlichen Rauten lassen sich sehr anschaulich in einer Datei, die mit Hilfe des dem dynamischen Mathematikprogrammes „GEONExT" erzeugt wurde („10eh116.gxt"), darstellen.

4. Gegeben sind eine Parabel p und eine Gerade g durch die Gleichungen:
   $P: y = -0,5x^2 - 4x + 1$ und $g: y = 0,5x + 3$.
   Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



Auf der Parabel p liegen dort, wo die Parabel **oberhalb** der Geraden verläuft, Punkte $P_n(x \mid -0,5x^2 - 4x + 1)$.
Auf der Geraden g liegen Punkte Q_n jeweils mit dem gleichen Abszissenwert x wie die Punkte P_n. Zudem liegen auf der Geraden g Punkte R_n, deren Abszissenwert jeweils um 2 größer als der Abszissenwert der Punkte P_n bzw. Q_n ist .
Dadurch werden Dreiecke $P_nQ_nR_n$ erzeugt.

(a) Zeichne für $x = -4,5$ das Dreieck $P_1Q_1R_1$ ein.

(b) Zeige: Die Streckenlängen $\overline{P_nQ_n}$ lassen sich in Abhängigkeit von x wie folgt darstellen:
$$\overline{P_nQ_n}(x) = (-0,5x^2 - 4,5x - 2)\,\text{cm}$$

(c) Begründe: Die längste unter allen Streckenlängen $\overline{P_nQ_n}$ erzeugt gleichzeitig das flächengrößte unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$

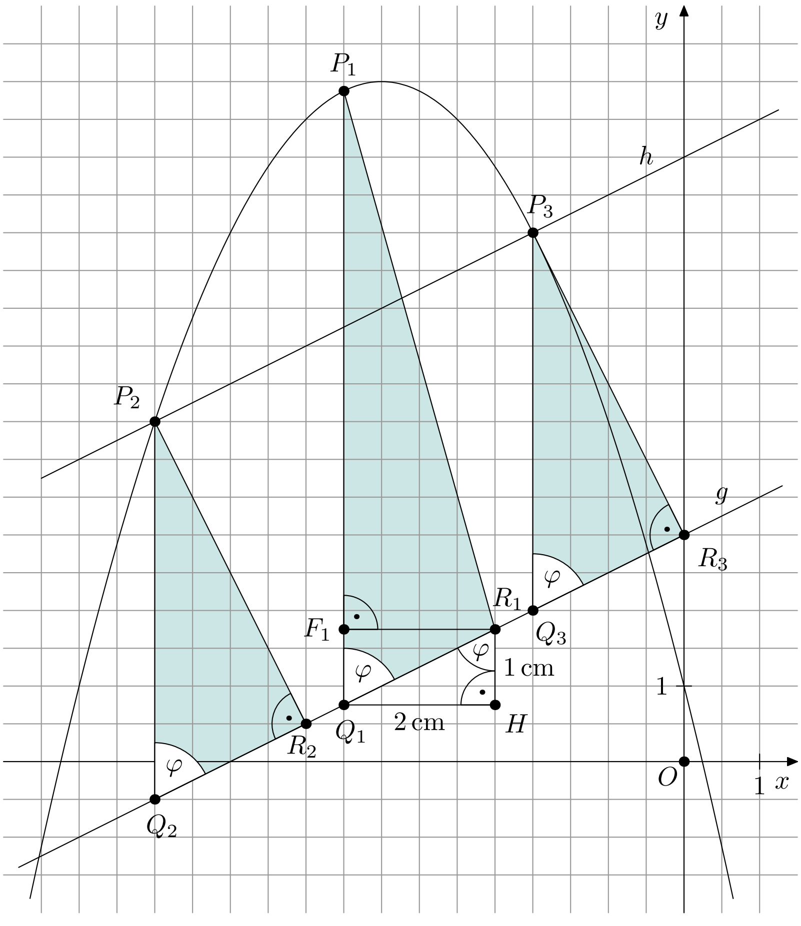
(d) Untersuche rechnerisch, ob es unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$ gleichschenklige gibt, deren Basis jeweils eine der Strecken $[P_nQ_n]$ ist.

(e)
- Zeichne für $x = -7$ das Dreieck $P_2Q_2R_2$ ein.
  Weise rechnerisch nach, dass dieses Dreieck rechtwinklig ist.
- Berechne das Maß eines der spitzen Innenwinkel dieses Dreiecks.

- Es gibt ein weiteres Dreieck $P_3Q_3R_3$, das zum Dreieck $P_2Q_2R_2$ kongruent ist.
  Konstruiere den Eckpunkt P_3 dieses Dreiecks (die Konstruktionslinie muss deutlich sichtbar sein) und begründe deine Vorgehensweise.
  Zeichne dieses Dreieck $P_3Q_3R_3$ ein.

(f) Unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$ gibt es noch zwei rechtwinklige Dreiecke $P_4Q_4R_4$ und $P_5Q_5R_5$ mit den Hypotenusen $[Q_4R_4]$ bzw. $[Q_5R_5]$. Berechne die zugehörigen x-Werte.

Lösung: (a) Siehe Zeichnung.



(b) Es gilt: $\overline{P_nQ_n}^{\,2} = (x-x)^2\,\text{cm}^2 + [(-0,5x^2-4x+1)-(0,5x+3)]\,\text{cm}^2$
$= (-0,5x^2-4,5x-2)^2\,\text{cm}^2$.
$\Rightarrow \quad \overline{P_nQ_n} = \mid -0,5x^2-4,5x-2 \mid \text{ cm}$.
Weil die y-Werte der Punkte P_n stets größer als die y-Werte der Punkte Q_n sind, kannst du die Betragstriche weglassen.
Also folgt: $\overline{P_nQ_n}(x) = (-0,5x^2-4,5x-2)\,\text{cm}$

(c) 1. Möglichkeit: anschaulich
Die Höhen $[R_nF_n]$ der Dreiecke $P_nQ_nR_n$ sind konstant 2 cm lang (vgl. $[R_1F_1]$ in der Zeichnung). Nur die Längen der zugehörigen Grundlinien $[P_nQ_n]$ sind veränderlich.
Wegen der Formelgleichung für Dreiecksflächen $A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}$ hängt der

Flächeninhalt dieser Dreiecke $P_nQ_nR_n$ nur von den Längen der Grundlinien $[P_nQ_n]$ ab. Wenn dort die maximale Länge erreicht ist, dann ist auch die zugehörige Dreiecksfläche am größten.
2. Möglichkeit: rechnerisch
Für den Flächeninhalt A der Dreiecke $P_nQ_nR_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_nQ_n} \cdot \overline{R_nF_n} =$$
$$\frac{1}{2} \cdot (-0,5x^2 - 4,5x - 2) \cdot 2\,\text{cm}^2 = (-0,5x^2 - 4,5x - 2)\,\text{cm}^2.$$

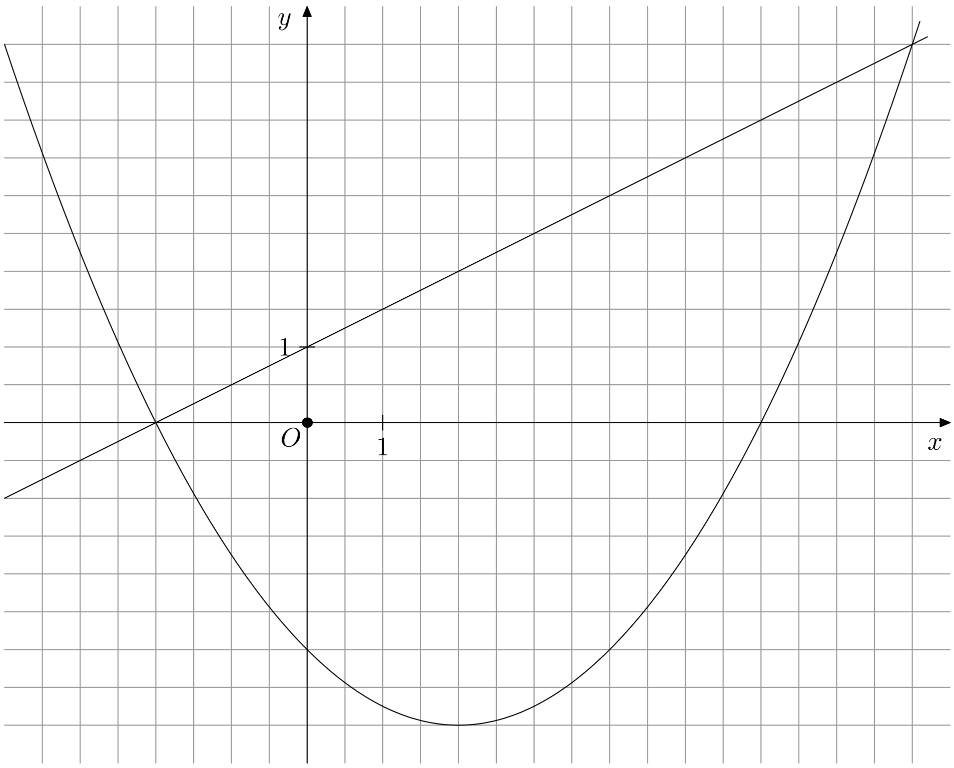
Damit stimmen für jeden zulässigen x-Wert die Maßzahlen von Flächeninhalt und Grundlinienlänge überein.
Wenn also eine der Grundlinien $[P_nQ_n]$ am längsten wird, dann ist auch der Inhalt der zugehörigen Dreiecksfläche maximal.

(d) Es gilt $Q_n(x \mid 0,5x + 3)$ und $R_n(x + 2 \mid 0,5(x + 2) + 3) = (x + 2 \mid 0,5x + 4)$.
Betrachte das Steigungsdreieck Q_1HR_1, das an der Geraden g unveränderlich ist.
Dem kannst du entnehmen, dass stes $\overline{Q_nR_n} = \sqrt{1^2 + 2^2}\,\text{cm} = \sqrt{5}\,\text{cm}$ gilt.
Von Aufgabe (b) ist $\overline{P_nQ_n}(x) = (-0,5x^2 - 4,5x - 2)\,\text{cm}$ schon bekannt.
Es muss $-0,5x^2 - 4,5x - 2 = \sqrt{5}$ gelten.
$\Leftrightarrow \quad 0,5x^2 + 4,5x + (2 + \sqrt{5}) = 0 \quad \Rightarrow \quad D^* = 16,25 - 2\sqrt{5}\,(\approx 11,78) > 0$
Also gibt es zwei solche gleichschenklige Dreiecke.

(e)
- Siehe Zeichnung.
- $x = -7$ liefert: $P_2(-7 \mid 4,5)$, $Q_2(-7 \mid -0,5)$ und $R_2(-5 \mid 0,5)$.
  $\overline{P_2Q_2} = 5\,\text{cm}$, $\overline{Q_2R_2}(x) = \sqrt{5}\,\text{cm}$ (siehe Lösung der Aufgabe (d)) und $\overline{P_2R_2} = \sqrt{(-5+7)^2 + (4,5 - 0,5)^2}\,\text{cm} = \sqrt{20}\,\text{cm}$
  In diesem Dreieck $P_2Q_2R_2$ gilt der Satz des PYTHAGORAS:
  $5^2 = \sqrt{5}^{\,2} + \sqrt{20}^{\,2}$. Also ist das Dreieck $P_2Q_2R_2$ rechtwinklig.
- Jeder Eckpunkt Q_n der Dreiecke $P_nQ_nR_n$ ist Scheitel eines Winkels mit dem Maß φ (Stufen- oder F-Winkel). Im Steigungsdreieck Q_1HR_1 ist der Punkt R_1 ebenfalls Scheitel eines Winkels mit dem Maß φ (Wechsel- oder Z-Winkel).
  Dort gilt: $\tan\varphi = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 63,43°$.
- Die Parallele h zur Geraden g durch den Punkt P_2 schneidet die Parabel p im gesuchten Punkt P_3 (Siehe Zeichnung).
  Begründung:
  Der Punkt P_2 besitzt den Abstand $\overline{P_2R_2}$ zur Geraden g. Alle Punkte P_n aber, die den Abstand $\overline{P_2R_2}$ von der Geraden g haben, liegen auf einer Parallelen (in der Zeichnung: h) zur Geraden g die den Abstand $\overline{P_2R_2}$ besitzt.
- Weil alle Strecken $[Q_nR_n]$ $\sqrt{5}\,\text{cm}$ lang sind, müssen die gesuchten Dreiecke z.B. zum Steigungsdreieck Q_1HR_1 kongruent sein; d.h. es muss gelten:
  $\overline{P_nQ_n}(x) = (-0,5x^2 - 4,5x - 2)\,\text{cm} = 1\,\text{cm} \quad \Leftrightarrow \quad -0,5x^2 - 4,5x - 3 = 0$

  $$D^* = 14,25 \Rightarrow \quad x_{1;2} = \frac{4,5 \pm \sqrt{14,25}}{-1} \Rightarrow x_1 \approx -8,27 \text{ und } x_1 \approx -0,72$$

5. Gegeben ist Parabel p mit der Gleichung $p : y = ax^2 - x - 3$, die durch den Punkt $P(-3 \mid 2,25)$ verläuft.
   Außerdem ist eine Gerade g durch die Gleichung $g : y = 0,5x + 1$ gegeben.
   Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



   (a) • Berechne die Scheitelkoordinaten der Parabel p.
   [Teilergebnis: $p : y = 0,25x^2 - x - 3$]
   • Untersuche, ob die Gerade h mit der Gleichung $h : y = 0,5x - 5,26$ die Parabel p berührt.

   (b) Auf der Parabel p liegen Punkte $B_n(x \mid 0,25x^2 - x - 3)$. Auf der Geraden g liegen Punkte $C_n(x \mid 0,5x+1)$ mit dem gleichen Abszissenwert x wie die Punkte B_n.
   Für $x \in]-2; 8[_{\mathbb{R}}$ erzeugen die Punkte A_n zusammen mit den Punkten B_n und C_n rechtwinklige Dreiecke $A_nB_nC_n$ mit den Hypotenusen $[A_nC_n]$. Dabei sind die Katheten $[A_nB_n]$ stets 4 cm lang.
   Zeichne für $x = -1$ und $x = 5$ die beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ ein.

   (c) Berechne die Länge der Katheten $[B_nC_n]$ in Abhängigkeit von x.
   [Ergebnis: $\overline{B_nC_n}(x) = (-0,25x^2 + 1,5x + 4)$ cm]

   (d) Unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ gibt es eines mit maximalem Flächeninhalt. berechne dieses Maximum und die zugehörige Belegung von x.

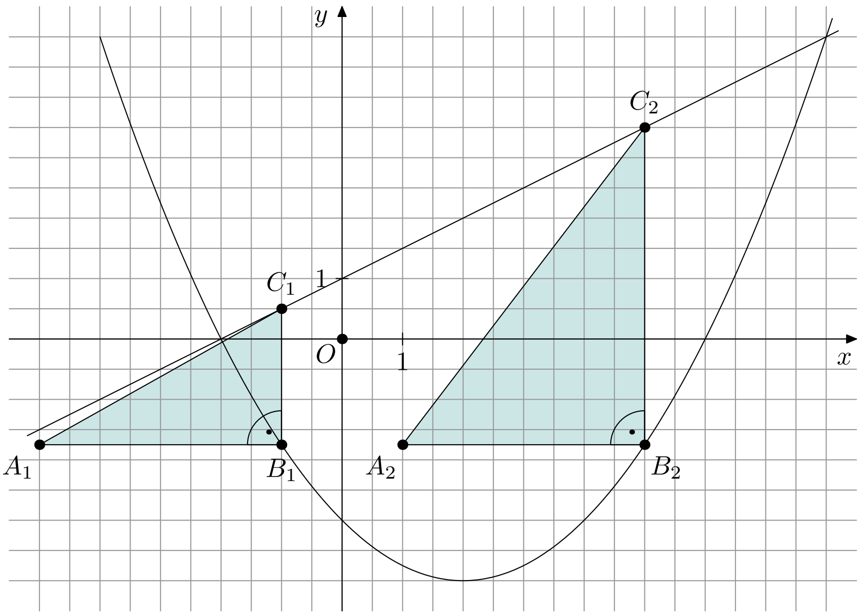
   (e) Unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ gibt es zwei Dreiecke $A_3B_3C_3$ und $A_4B_4C_4$, so dass der Winkel $A_3C_3B_3$ bzw. $A_4C_4B_4$ das Maß $45°$ besitzt. Berechne die zugehörigen Belegungen von x.

(f) Untersuche rechnerisch, ob es unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ eines gibt, deren Hypotenuse auf der Geraden g liegt.

Lösung: (a)

- $P(-3 \mid 3,25)$ in p: $2,25 = a \cdot (-3)^2 - (-3) - 3 \quad \Rightarrow \quad 2,25 = 9a \quad \Rightarrow \quad a = 0,25$ und $p: y = 0,25x^2 - x - 3$.
  $S\left(-\frac{-1}{2 \cdot 0,25} \middle| -3 - \frac{(-1)^2}{4 \cdot 0,25}\right) = (2 \mid -4)$
- $0,25x^2 - x - 3 = 0,5x - 5,26 \quad \Rightarrow \quad D^* = -0,01 < 0$: Die Gerade g meidet die Parabel p.

(b)



(c)

$$\begin{aligned}
\overline{B_nC_n}(x) &= y_{C_n} - y_{B_n} \\
\overline{B_nC_n}(x) &= 0,5x + 1 - (0,25x^2 - x - 3) \\
&= 0,5x + 1 - 0,25x^2 + x + 3 \\
\overline{B_nC_n}(x) &= (-0,25x^2 + 1,5x + 4)\,\text{cm}^2
\end{aligned}$$

(d) Für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_nB_nC_n$ gilt in Abhängigkeit von x:
$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-0,25x^2 + 1,5x + 4)\,\text{cm}^2$.
$A(x) = 2 \cdot (-0,25x^2 + 1,5x + 4)\,\text{cm}^2$.
$A(x) = (-0,5x^2 + 3x + 8)\,\text{cm}^2$.
$x = 3$ liefert $A_{max} = 12,5\,\text{cm}^2$.

(e) Die beiden Dreiecke $A_3B_3C_3$ und $A_4B_4C_4$ müssen gleichschenklig sein:
$\overline{B_nC_n}(x) = 4\,\text{cm}: \quad \Rightarrow \quad -0,25x^2 + 1,5x + 4 = 4$
$\Leftrightarrow \quad x(-0,25x + 1,5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 6$

(f) Die Dreiecke $A_nB_nC_n$ können als Steigungsdreiecke zu den Hypotenusen $[A_nC_n]$ aufgefasst werden:
Wenn eine dieser Hypotenusen $[A_nC_n]$ auf der Geraden g liegen soll, dann müssen beide Steigungsfaktoren übereinstimmen; d.h.

$$\frac{-0,25x^2+1,5x+4}{4}=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -0,5x^2+3x+8=4$$

$\Leftrightarrow \quad -0,5x^2+3x+4=0 \Rightarrow \quad D^*=17>0.$
Also gibt es zwei solche Dreiecke.

6. Gegeben ist die Parabel p_0 durch die Gleichung $y=0,5x^2+2x+1000$.
   (a) Gib die Gleichung einer Parabel p_1 an, welche die gleichen Scheitelkoordinaten wie die Parabel p_0 besitzt, die aber nicht zur Parabel p_0 kongruent ist.
   (b) Gib die Gleichung einer Parabel p_2 an, die zur Parabel p_0 kongruent ist und deren Scheitel gleichzeitig auf der x-Achse liegt.
   (c) Es gibt beliebig viele Parabeln, welche die Parabel p_0 meiden und deren Scheitel im II. Quadranten liegen. Gib die Gleichung einer dieser Parabeln an und führe den Nachweis.
   (d) Es gibt beliebig viele Parabeln, welche mit der Parabel p_0 nur einen Punkt gemeinsam haben. Gib die Gleichung einer dieser Parabeln an und führe den Nachweis.

Lösung: (a) $y=0,5x^2+2x+1000=\ldots=0,5\cdot(x+2)^2+998 \quad \Rightarrow \quad S_0(-2 \mid 998)$
Skizziere die Parabel p_0.
Z.B. $p_1: y=-0,17296\cdot(x+2)^2+998$

(b) Z.B. $p_2: y=-0,5\cdot(x-\frac{22}{7})^2$

(c) Wähle unter den beliebig vielen Parabeln, die in Frage kommen, am besten eine Parabel (nenne sie p_3) aus, die zur Parabel p_0 kongruent ist, die aber nach unten geöffnet ist: Der Formfaktor hat dann den Wert $-0,5$.
Wähle dann am besten deren Scheitel so aus, dass dieser genau unterhalb des Scheitels $S_0(-2 \mid 998)$ liegt, also z.B. $S_3(-2 \mid 997)$.
Diese Parabel p_3 hat dann die Gleichung $y=-0,5\cdot(x+2)^2+997$.

(d) „$\cdots$ nur einen Punkt gemeinsam hat“ eröffnet zweierlei Lösungsmöglichkeiten:

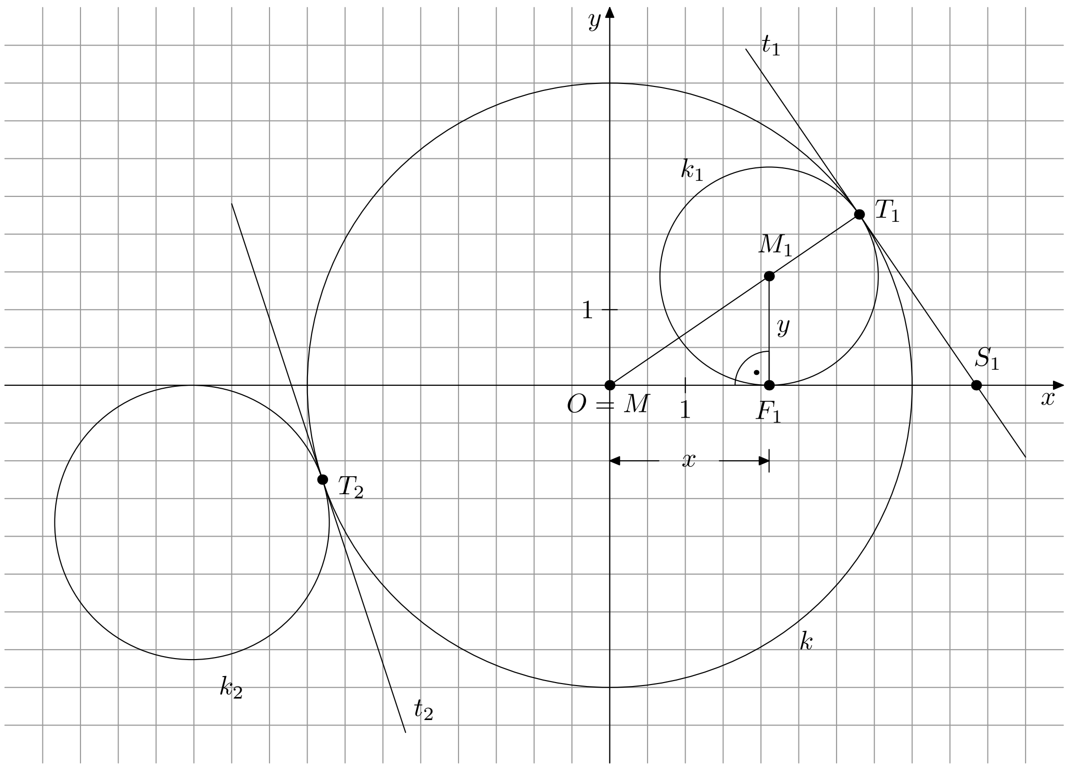
(α) Die gesuchte Parabel schneidet die Parabel p_0 nur in einem Punkt

(β) Die gesuchte Parabel berührt die Parabel p_0

Die einfachste Möglichkeit der Auswahl besteht in der Möglichkeit (α):
Die Parabel p_0 wird nach rechts oder nach links verschoben. Damit behält der Formfaktor den Wert $0,5$ und die beiden Symmetrieachsen liegen parallel. Damit verlaufen auch die Parabeläste so, dass sie sich nur einmal überkreuzen.
Also z.B.: $p_4: y=0,5\cdot(x+1)^2+998$.

Rechnerisch würde sich dann mit der Parabel p_4 die folgende Gleichung ergeben:
$0,5 \cdot (x+2)^2 + 998 = 0,5 \cdot (x+1)^2 + 998 \ldots \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -3x = -1,5.$
Egal, wie weit du die Parabel p_0 nach rechts oder links verschiebst: Rechnerisch hebt sich stets nach dem Gleichsetzen der Summand mit dem Faktor x^2 weg.
In der Möglichkeit (β) müsstest du nach einer Parabel p_5 suchen, welche die Parabel p_0 berührt. Eine entsprechende Parabelgleichung ist nicht so schnell und auch nicht so leicht zu finden, wie in der Möglichkeit (α).

7.



Auf der Kreislinie k mit dem Mittelpunkt $M(0 \mid 0)$ und dem Radius 4 cm liegen Punkte T_n, die Berührpunkte von Kreisen k_n mit dem Mittelpunkt $M_n(x \mid y)$ sind. Alle diese Kreise k_n berühren jeweils auch die x-Achse.
Liegen die Punkte T_n über der x-Achse, dann sollen die Berührkreise k_n innerhalb des Kreises k liegen. Befinden sich die Punkte T_n unter der x-Achse, dann sollen die Berührkreise k_n außerhalb des Kreises k liegen.
In der obigen Darstellung sind zwei Berührkreise k_1 und k_2 mit den Berührpunkten T_1 und T_2 eingezeichnet. Am Berührpunkt T_1 ist die zugehörige Kreistangente t_1 und am Berührpunkt T_2 ist die zugehörige Kreistangente t_2 eingezeichnet.

(a) • Begründe: Der Mittelpunkt M_1 des Berührkreises k_1 muss auf der Halbierenden des Winkels T_1S_1M liegen.

- Weise durch die Konstruktion dieser Winkelhalbierenden w_1 nach, dass der Punkt M_1 richtig eingezeichnet ist.

(b) Konstruiere den Mittelpunkt M_2 der Kreislinie k_2.

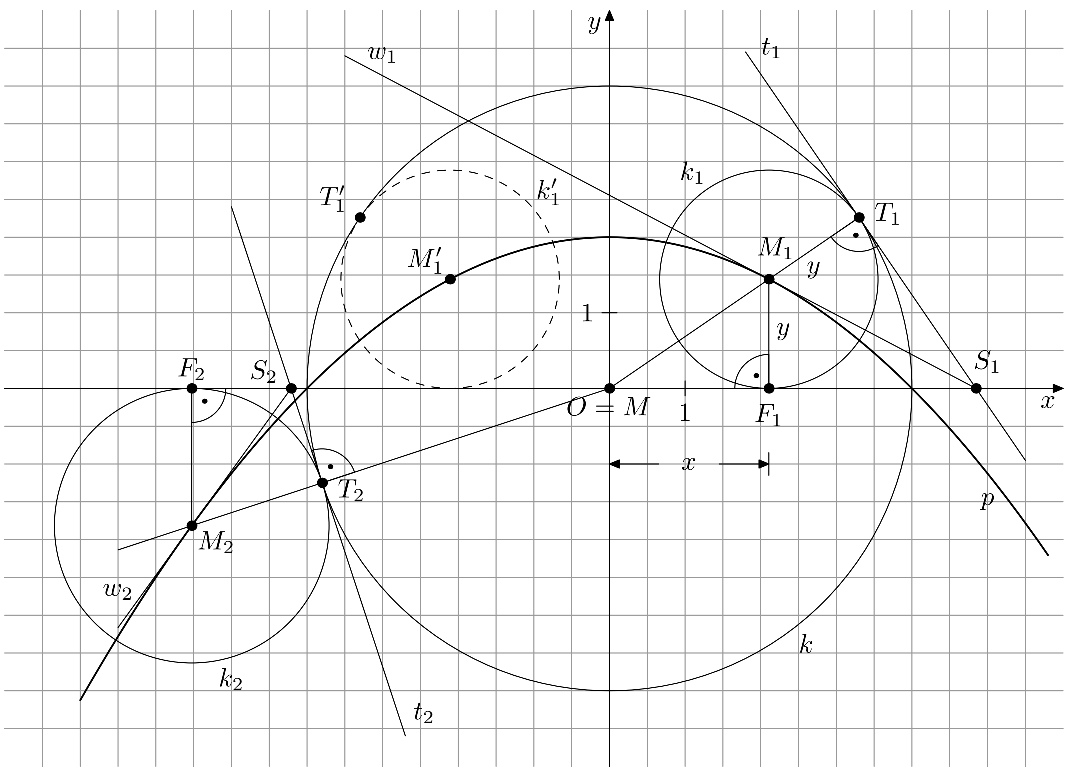
(c) Für welche der Berührpunkte T_n gibt es nur entartete Berührkreise?

(d) Alle Kreismittelpunkte M_n liegen auf einer Parabel p.

- Beschreibe ohne Rechnung die Lage und die Eigenschaften der Parabel p möglichst genau.
- Leite die Parabelgleichung aufgrund der Lage besonderer Punkte auf ihr her. [Ergebnis: $p : y = -0,125x^2 + 2$]
- Bestätige diese Parabelgleichung durch Rechnung mit Hilfe des Dreiecks MF_1M_1 als Stellvertreter aller begleitenden rechtwinkligen Dreiecke MF_nM_n.

(e) Wie viel Prozent des Flächeninhalts des Kreises k wird von einem der Berührkreise bedeckt, dessen Mittelpunkt auf der Winkelhalbierendendes I. Quadranten liegt?

Lösung:



(a) Der Mittelpunkt M_1 muss sowohl zur Tangente t_1 als auch zur x-Achse den gleichen Abstand besitzen. Alle Punkte, die jeweils von diesen beiden Geraden mit dem Schnittpunkt S_1 den gleichen Abstand besitzen, liegen auf der Halbierenden w_1 des Winkels $T_1S_1F_1$. Diese Halbgerade verläuft dann durch den Punkt M_1.

(b) Die Tangente t_2 schneidet die x-Achse im Punkt S_2. Dort bildet die Tangente t_2 mit der x-Achse einen stumpfen Winkel im III. Quadranten. Die Halbgerade w_2 halbiert diesen Winkel. Dann folgt: $[MT_2 \cap w_2 = \{M_2\}$.

(c) Für $T_3(4 \mid 0)$ und $T_4(-4 \mid 0)$ entarten die Berührkreise zu Punkten.
Für $T_5(0 \mid -4)$ liegt die zugehörige Kreistangente waagrecht. Der zugehörige Berührkreis müsste sich am Punkt $T_5(0 \mid -4)$ nach unten krümmen. Er könnte dann die x-Achse niemals berühren.
Mann könnte die Tangente noch als gigantischen „Berührkreis" deuten, der die x-Achse rechts und links „im Unendlichen" berührt.

(d)
- Wenn du den Berührkreis k_1 an der y-Achse spiegelst, dann erhältst du einen Kreis k_1' mit dem Mittelpunkt M_1', der die Kreislinie k ebenfalls von innen berührt (siehe Zeichnung). Also liegt der Punkt M_1' ebenfalls auf der Parabel p. Dasselbe gilt nun für das Spiegelbild M_2' des Mittelpunktes M_2 und damit für alle denkbaren Kreismittelpunkte.
  Daher ist die y-Achse die Symmetrieachse der Parabel p.
  Je näher die Berührkreise im I. und II. Quadranten der y-Achse kommen, desto größer wird deren Durchmesser; d.h. desto höher liegen die zugehörigen Kreismittelpunkte. Der Kreis k_0, dessen Durchmesser auf der y-Achse liegt, ist am größten; d.h. dessen Mittelpunkt $M_0(0 \mid 2)$ liegt am höchsten. Das muss dann der Parabelscheitel sein.
  Wegen der Lage der Punkte T_3 und T_4 muss die Funktionsgleichung der Parabel die Nullstellen 4 und -4 besitzen.
- 1. Möglichkeit:
  mit den beiden Nullstellen 4 und -4 sowie dem Scheitel $S(0 \mid 2)$
  $p : y = a \cdot (x-4)(x+4) \quad \wedge \quad S(0 \mid 2) \in p$:
  $2 = a \cdot (0-4)(0+4) \quad \Rightarrow \quad a = -0,125.$
  Eingesetzt: $p : y = -0,125 \cdot (x-4)(x+4) = -0,125 \cdot (x^2 - 16)$
  $y = -0,125x^2 + 2$
  2. Möglichkeit:
  mit den Scheitelkoordinaten $(0 \mid 2)$ und z.B. dem Punkt $T_3\,(4 \mid 0)$
  $p : y = a \cdot (x-0)^2 + 2 \quad \wedge \quad T_3(4 \mid 0) \in p$:
  $0 = a \cdot (4-0)^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad -2 = 16a \quad \Rightarrow \quad a = -0,125$ usw.

(e) Dieser Kreis sei k_6 mit dem Mittelpunkt M_6.
Auf der Winkelhalbierenden des I. Quadranten gilt $y = x$. Mit dem Ergebnis in der Aufgabe (d) folgt dann:
$x = -0,125x^2 + 2 \quad \text{mit } G = \mathbb{R}^+ \quad \Leftrightarrow \quad 0,125x^2 + x - 2 = 0$

$$\Rightarrow \quad x_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{0,25}.$$

Wegen $G = \mathbb{R}^+$ muss das Minuszeichen im Zähler entfallen.

Also: $x = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{0,25} = 4(\sqrt{2} - 1).$

$$\frac{A_{k_6}}{A_k} = \frac{4^2(\sqrt{2}-1)^2 \cdot \pi}{4^2\pi} = 3 - 2\sqrt{2} \approx 17,16\%$$

8. Gegeben ist eine Parabel durch die Gleichung:
$$y = -10x^2 - 19x + 2$$
.
Untersuche, ob die Parabel durch alle vier Quadranten verläuft.

Lösung: Berechne zunächst den Parabelscheitel: $S(x_S \mid y_S)$ mit
$a = -10$, $b = -19$ und $c = 2$.

$$x_S = -\frac{-19}{2 \cdot (-10)} < 0 \text{ und } y_S = 2 - \frac{(-19)^2}{4 \cdot (-10)} > 0$$

Der Scheitel liegt also im II. Quadranten.

Wegen $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet, also verläuft ihr linker Ast auch durch den III. Quadranten.
Weil sich die Äste der Parabel nach unten beliebig weit voneinander entfernen, muss ihr rechter Ast „irgendwann“ die y-Achse überqueren. Also verläuft der Graph auch durch den IV. Quadranten.
Nun musst du noch untersuchen, ob es Punkte auf der Parabel gibt, die im I. Quadranten liegen.
Ermittle dazu die Nullstellen der Funktionsgleichung: $10x^2 - 19x + 2 = 0$.
$D^* = (-19)^2 - 4 \cdot (-10) \cdot 2 = 441$ und $\sqrt{D^*} = 21$

$$x_{1;2} = \frac{19 \pm 21}{-20} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 0,1.$$

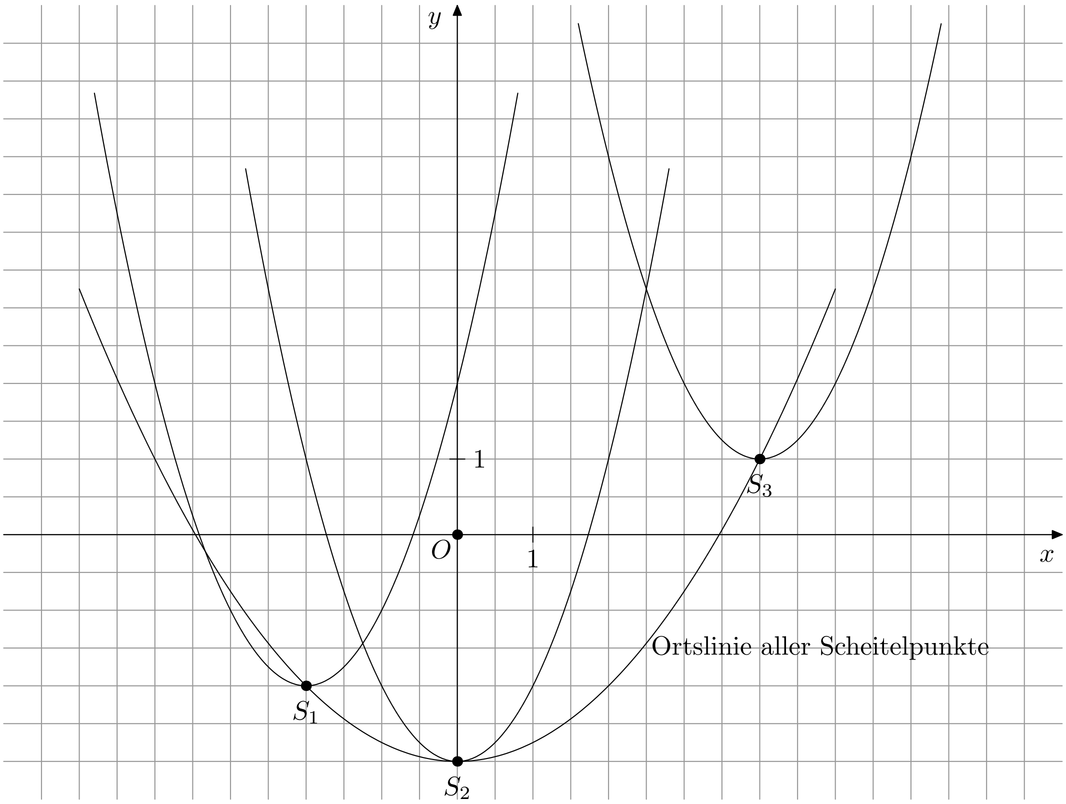
$x_2 = 0,1$ liegt rechts vom Ursprung auf der x-Achse; also verläuft die Parabel auch durch den I. Quadranten und damit durch alle vier Quadranten.

9. Gegeben ist die Parabelschar $p(a)$ mit der Gleichung $y = (x - 2a)^2 - a^2 + 3$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Begründe: Alle Parabeln der Schar sind Normalparabeln.
   (b) Zeichne für $a \in \{-1;\ 0;\ 2\}$ die zugehörigen Parabeln in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-6 \leqq x \leqq 8$ und $-3 \leqq y \leqq 7$
   (c) Berechne die nach y aufgelöste Gleichung des Trägergraphen aller Scheitelpunkte.
   [Ergebnis: $y = 0,25x^2 - 3$]
   (d) Die Parabel p_4 besitzt die Gleichung $y = (x + 1)^2 + 2,75$.
   Die Parabel p_5 besitzt die Gleichung $y = x^2 - 6x + 8,75$.
   Die Parabel p_6 besitzt die Gleichung $y = x^2 + 10x + 28,75$.
   Untersuche, ob diese drei Parabeln der Schar angehören oder nicht.

(e) Wie viele Parabeln enthält die Schar $p(a)$, welche die x-Achse berühren? Begründe.

Lösung: (a) Vor dem binomischen Klammerterm steht heimlich der Formfaktor 1, egal, womit a belegt wird. Also handelt es sich ausschließlich um nach oben geöffenete Normalparabeln.

(b)



(c) Es ist $x_S = 2a \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{x_S}{2}$ (1) und weiter gilt: $y_S = a^2 - 3$.

Mit (1) folgt:$y_S = \dfrac{x_S^2}{4} - 3 = 0,25x_S^2 - 3$.

(d) Aus der Schargleichung folgt: Die Parabeln besitzen die Scheitelkoordinaten $(2a \mid a^2 - 3)$.
Die Parabel p_4 besitzt den Scheitel $S_4(-1 \mid 2,75)$.
Es muss einerseits $2a = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a = -0,5$ gelten.
Gleichzeitig muss $a^2 - 3 = -2,75$ gelten. Das ist für $a = -0,5$ (oder $a = 0,5$) erfüllt. Also gehört die Parabel p_4 der Schar an.
Die Parabel p_5 besitzt den Scheitel $S_5(3 \mid -0,75)$.
Es muss einerseits $2a = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1,5$ gelten.
Gleichzeitig muss $a^2 - 3 = -0,75$ gelten. Das ist für $a = 1,5$ (oder $a = 0,5$) erfüllt. Also gehört die Parabel p_5 der Schar an.
Die Parabel p_6 besitzt den Scheitel $S_6(-5 \mid 3,75)$.
Es muss einerseits $2a = -5 \quad \Leftrightarrow \quad a = -2,5$ gelten.
Gleichzeitig muss $a^2 - 3 = 3,75$ gelten. Das ist für $a = -2,5$ nicht erfüllt. Also gehört

die Parabel p_6 der Schar nicht an.

(e) Wenn eine dieser Parabeln die x-Achse berührt, dann liegt ihr Scheitel auf der x-Achse. Das ist dort der Fall, wo der Trägergraph aller Scheitelpunkte die x-Achse schneidet. Es gibt offensichtlich zwei solche Schnittpunkte.

10. Gegeben ist eine Parabelschar $p(a)$ mit der Gleichung $y = ax^2 + x - a$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
   (a) Berechne die Scheitelkoordinaten in Abhängigkeit von a.
   $$\left[\text{Ergebnis: } S\left(-\frac{1}{2a}\,\middle|\, -a-\frac{1}{4a}\right)\right]$$
   (b) Begründe: In der Schar gibt es keine Parabel, deren Scheitel auf der y-Achse liegt.
   (c) Begründe: In der Schar gibt es keine Parabel, deren Scheitel im II. Quadranten liegt.
   (d) Tabellarisiere die Scheitelkoordinaten für $a \in \{-1;\ -0,5;\ 0,5;\ 1\}$. Zeichne die zugehörigen Parabeln in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-5 \leqq x \leqq 5$ und $-4 \leqq y \leqq 4$
   (e) Berechne die Gleichung des Trägergraphen aller Scheitelpunkte $S(x_S \mid y_S)$.
   $$\left[\text{Ergebnis: } y_S = \frac{1}{2x_S} + \frac{x_S}{2}\right]$$
   (f) Begründe: Zu jeder Parabel p der Schar mit dem Scheitel $S(x_S \mid y_S)$ gibt es in der Schar eine kongruente Parabel p' mit dem Scheitel $S'(-x_s \mid -y_S)$.
   (g) Zeige: Jede Parabel der Schar schneidet die x-Achse zwei Punkten.

Lösung: (a) Mit Hilfe einer Formelsammlung kannst du das Ergebnis sofort errechnen.

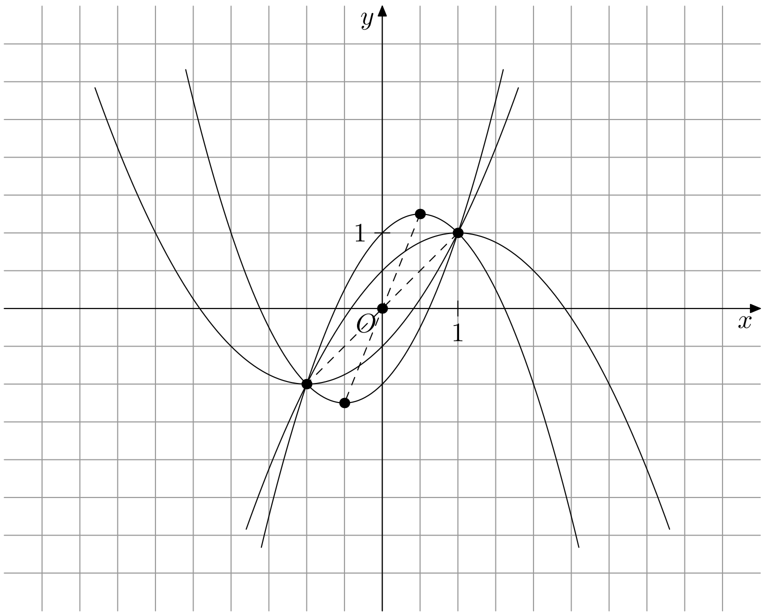
(b) Es müsste $x_S = -\dfrac{1}{2a} = 0$ gelten. Ein Bruch hat aber nur dann den Wert 0, wenn der Zähler den Wert 0 besitzt. Das ist hier jedoch nicht der Fall. Also gibt es keine solche Parabel.

(c) Läge einer der Scheitelpunkte im II. Quadranten, dann wäre sein Abszissenwert < 0.
Wegen $x_S = -\dfrac{1}{2a}$ müsste a positiv sein.
Wegen $y_S = -a - \dfrac{1}{4a}$ folgt $y_S < 0$.

Dann liegt jedoch der Scheitel im III. und nicht im II. Quadranten.

(d)

a	-1	$-0,5$	$0,5$	1
$S(x_S \mid y_S)$	$(0,5 \mid 1,25)$	$(1 \mid 1)$	$(-1 \mid -1)$	$(-0,5 \mid -1,25)$



(e) Es gilt:

$$x_S = -\frac{1}{2a} \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{2 \cdot x_S} \quad (1)'$$

$$\wedge \quad y_S = -a - \frac{1}{4a} \quad (2)$$

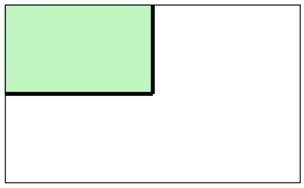
$(1)'$ in (2): $y_S = -\left(-\frac{1}{2 \cdot x_S}\right) - \frac{1}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot x_S}\right)} = \frac{1}{2x_S} + \frac{x_S}{2}$

(f) Die Tabelle der Aufgabe (d) lässt vermuten, dass ein Vorzeichenwechsel des Parameters a eine Punktspiegelung des betreffenden Parabelscheitels am Koordinatenursprung zur Folge hat. Die Parabel bleibt dabei deckungsgleich zur ursprünglichen Parabel, wechselt aber ihre Öffnungsrichtung (siehe graphische Darstellung).
Also: $a' = -a$ und $x_{S'} = -\frac{1}{2a'} = -\frac{1}{-2a} = \frac{1}{2a} = -x_S$

und $y_{S'} = -a' - \frac{1}{4a'} = -(-a) - \frac{1}{4 \cdot (-a)} = -\left(-a - \frac{1}{4 \cdot a}\right) = -y_S$

(g) Schnittpunkte mit der x-Achse verlangen $y = 0 : ax^2 + x - a = 0$.
Für die Diskriminante D^* ergibt sich: $D^* = 1^2 - 4 \cdot a \cdot (-a) = 1 + 4a^2$.
$4a^2$ wird nie negativ. Daher bleibt $4a^2 + 1$ stets positiv. Also hat die quadratische Gleichung $ax^2 + x - a = 0$ stets zwei Lösungen. Damit schneidet jede Scharparabel die x-Achse zweimal.

11.

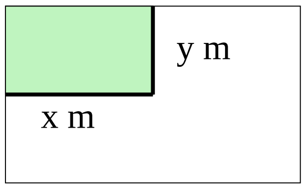


Familie Taerkot hat auf ihrem eingezäunten Grundstück einen $140\,\mathrm{m}^2$ großen Garten angelegt. Er wurde zusätzlich mit einem $25,5\,\mathrm{m}$ langen Maschendrahtzaun abgegrenzt.

(a) Berechne Länge und Breite.

(b) Hätte Familie Taerkot mit $25,5\,\mathrm{m}$ Maschendraht auf die in der Abbildung dargestellte Weise eine noch größere Gartenfläche abgrenzen können?

Lösung: (a)



Es gilt:
$$\begin{array}{rrcll}
 & x+y & = & 25,5 \quad (1) & \Leftrightarrow \quad y = 25,5 - x \quad (1)' \\
\wedge & x \cdot y & = & 140 \quad (2) & \\
\hline
\end{array}$$

$(1)'$) in (2): $x \cdot (25,5 - x) = 140 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 25,5x - 140 = 0$

$\Rightarrow \quad L = \{17,5\ ;\ 8\}$. Wegen $(1)'$ folgt: $y = 8 \vee y = 17,5$.

Das Gartengrundstück ist $17,5\,\mathrm{m}$ lang und $8\,\mathrm{m}$ breit (oder umgekehrt).

(b) Für den Flächeninhalt A gilt: $A = x \cdot y\,\mathrm{m}^2$.

Mit $(1)'$ folgt $A(x) = x(25,5 - x)\,\mathrm{m}^2 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = (-x^2 + 25,5x)\,\mathrm{m}^2$.

Der Extremwert muss wegen des negativen Vorzeichens von x^2 ein Maximum sein. Die Berechnung erfolgt z.B. so, als ob du die Scheitelkoordinaten der zugehörigen (nach unten geöffneten) Parabel ermittelst:

$a = -1 \quad b = 25,5$ und $c = 0$:

$x_S = -\dfrac{25,5}{-2} = 12,75$ und $y_S = 0 - \dfrac{25,5^2}{-4} = 162,5625$ (Maximum).

Mit dem $25,5\,\mathrm{m}$ langen Maschendraht hätte Familie Taerkot auf diese Weise sogar etwas mehr als $162\,\mathrm{m}^2$ einzäunen können.

Die Länge $x = 12,75\,\mathrm{m}$ liefert mit $(1)'$ die Breite $y = (25,5 - 12,75)\,\mathrm{m} = 12,75\,\mathrm{m}$. Das bedeutet, dass der flächengrößte Garten eine quadratische Form hätte.

12. Ursula und Hans wollen die folgenden quadratischen Gleichungen lösen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x^2 & + & 0,5x & - & 14 & = & 0 & (1) \\
x & + & 2x^2 & - & 28 & = & 0 & (2)
\end{array}$$

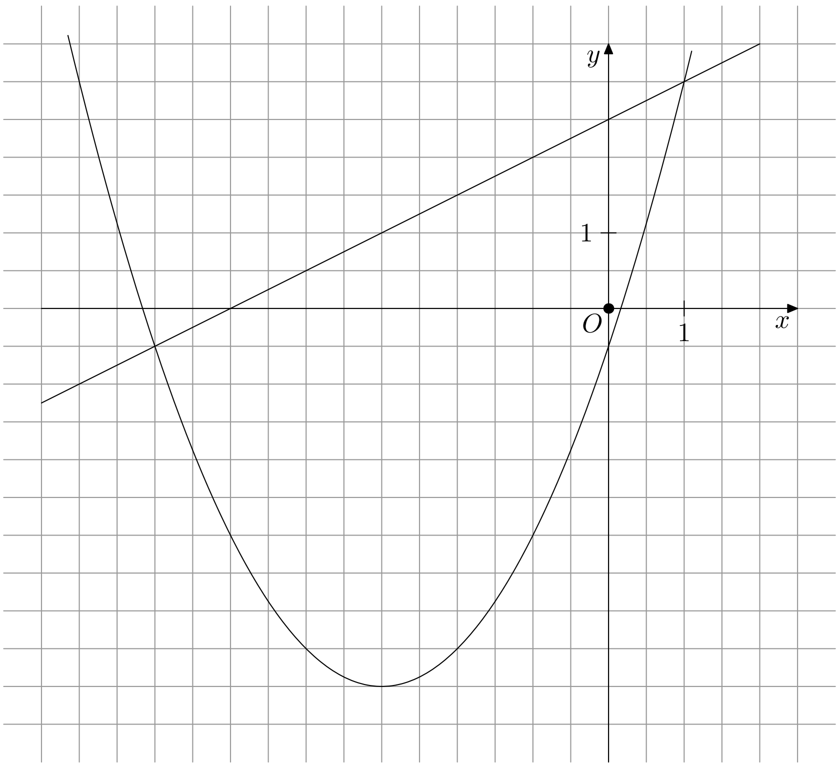
(a) Hans bekommt für die Gleichung (1) die Lösungsmenge $\{-4;\ 3,6\}$ heraus. Überprüfe das.

(b) Danach schaut sich Ursula die Gleichung (2) genauer an. Sie meint schließlich: „Da brauchen wir die Lösungsformel gar nicht. Die beiden Gleichungen müssen dieselben Lösungen haben." Wie hat Ursula das erkannt?

Lösung: (a) Du kannst das durch z.B. Einsetzen überprüfen:
-4 in (1): $(-4)^2 + 0,5 \cdot (-4) - 14 = 0$ ergibt eine wahre Aussage.
$3,6$ in (1): $3,6^2 + 0,5 \cdot 3,6 - 14 = 0,76 \neq 0$; d.h. 3,6 ist keine Lösung.

(b) $x^2 + 0,5 - 14 = 0 \mid \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + x - 28 = 0$. Wenn du jetzt noch die Summanden x und $2x^2$ vertauschst, erhältst du die Gleichung (2). Beide Gleichungen sind äquivalent. Also haben sie die gleiche Lösungsmenge.

13.



Für die Gleichung einer Parabel p gilt $a = 0,5$. Die Punkte $P(-4 \mid -4,5)$ und $Q(1 \mid 3)$ liegen auf dieser Parabel. Die Parabel p und die Gerade g mit der Gleichung $y = 0,5x + 2$ sind in Ausschnitten dargestellt.

(a) Zeige durch Rechnung: Die Parabel p hat die Gleichung $y = 0,5x^2 + 3x - 0,5$.

(b) Berechne die Scheitelkoordinaten der Parabel.

(c) Es werden nun rechtwinklige Dreiecke $A_nB_nC_n$ mit den folgenden Eigenschaften erzeugt:

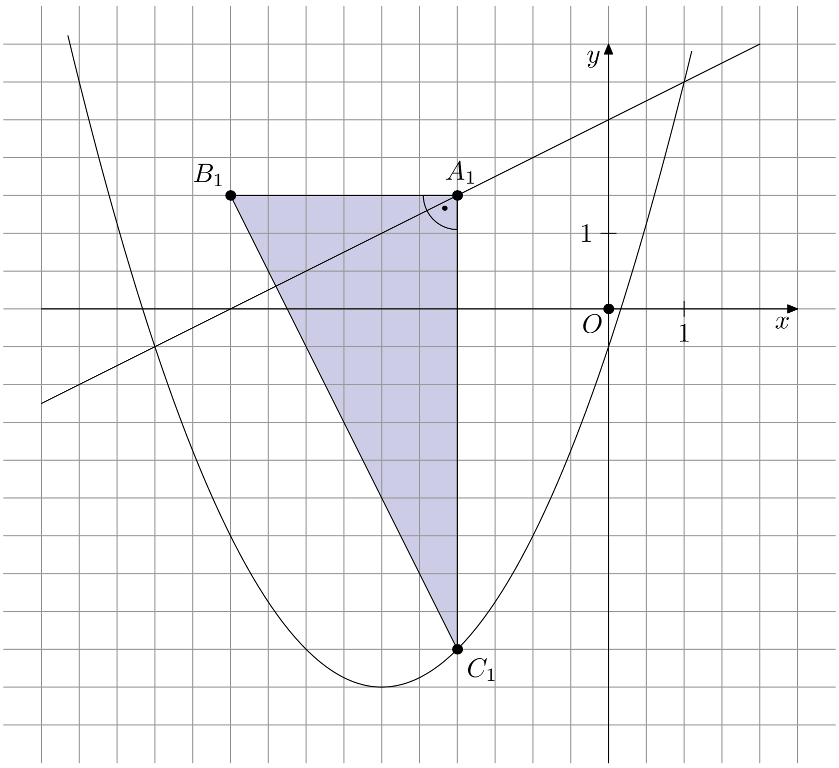
- Die Punkte A_n liegen auf der Geraden g.
- Die Punkte C_n liegen auf der Parabel p.
- Die Punkte A_n sind die Scheitel der rechten Winkel aller Dreiecke $A_nB_nC_n$.
- Die Punkte C_n haben den gleichen Abszissenwert wie die Punkte A_n.
- Der Abszissenwert der Punkte B_n ist stets um 3 kleiner als der Abszissenwert der Punkte C_n.

Zeichne oben für $x = 2$ das Dreieck $A_1B_1C_1$ ein.

(d) Gib zwei x-Werte an, für die es kein Dreieck gibt. Begründe deine Wahl.

(e) Begründe: Unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ gibt es keines, das zu einem Punkt entartet.

Lösung:



(a)

$P(-4 \mid -4,5)$:	-4,5	=	$0,5 \cdot (-4,5)^2 + b \cdot (-4,5) + c$	
$Q(1 \mid 3)$:	3	=	$0,5 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$	
	$-4,5$	=	$8 - 4b + c$	(1)
	3	=	$0,5 + b + c$	(2)
$(2) - (1)$:	$7,5$	=	$-7,5 + 5b$	

$\Rightarrow \quad b = 3$ und z.B. in (2): $c = -0,5$.
Also gilt für p: $y = 0,5x^2 + 3x - 0,5$.

(b) $x_S = -\dfrac{-3}{2 \cdot 0,5} = -3$ und $y_S = -0,5 - \dfrac{3^2}{4 \cdot 0,5} = -5 \Rightarrow \quad S(-3 \mid -5)$.

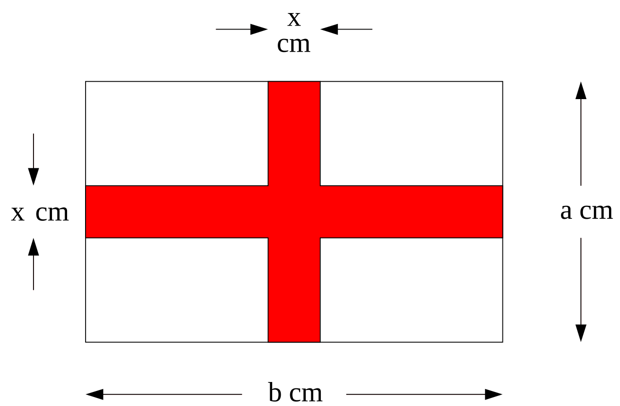
(c) Siehe Zeichnung oben.

(d) An den Schnittpunkten der Parabel mit der Geraden gilt: $x = -6$ bzw. $x = 1$. Dort liegen die betreffenden Punkte A_n und C_n aufeinander. Also gibt es jeweils kein Dreieck.

(e) Weil die Punkte B_n niemals mit den Punkten A_n zur Deckung kommen, kann das betreffende Dreieck höchstens zur Strecke entarten.

4. Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

1. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



(a) Zeichne die Figur für $a = 11$, $b = 16$ und $x = 2$ im Maßstab 1:2.

(b) Zeige rechnerisch:

- Für den Flächeninhalt A_w des weißen Anteils dieser Flagge gilt in Abhängigkeit von x:
$$A_w(x) = (x^2 - 27x + 176)\,\mathrm{cm}^2$$
- Für den Flächeninhalt A_k des Kreuzes in dieser Flagge gilt in Abhängigkeit von x:
$$A_k(x) = (-x^2 + 27x)\,\mathrm{cm}^2$$

(c) Berechne x so, dass die Fläche des Kreuzes 30% der Gesamtfläche ausmacht.

(d) Berechne x so, dass die Inhalte von weißer Fläche und Kreuzfläche gleich sind.

Lösung: (a) –

(b)
- Eine Möglichkeit der Lösung besteht darin, vom Flächeninhalt der Flagge denjenigen der beiden überlappenden Rechtecke, die das Kreuz ergeben, zu subtrahieren. Um den Flächeninhalt des Kreuzes zu erhalten, musst du jedoch am Ende den Inhalt des Quadrates im Zentrum einmal abziehen, weil das Quadrat ja **beiden** besagten Rechtecken angehört.
Also: $A_w(x) = 11 \cdot 16\,\mathrm{cm}^2 - (11x + 16x - x^2)\,\mathrm{cm}^2 = (x^2 - 27x + 176)\,\mathrm{cm}^2$
- Wie oben schon dargelegt, ergibt sich:
$A_k(x) = (11x + 16x - x^2)\,\mathrm{cm}^2 = (-x^2 + 27x)\,\mathrm{cm}^2$

(c) Der Flächeninhalt des umlaufenden Rechtecks beträgt $176\,\text{cm}^2$.
30% von $176\,\text{cm}^2 = 52,8\,\text{cm}^2$.
$52,8 = -x^2 + 27x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 27x + 52,8 = 0$

$$x_{1;2} = \frac{27 \pm \sqrt{517,8}}{2}$$

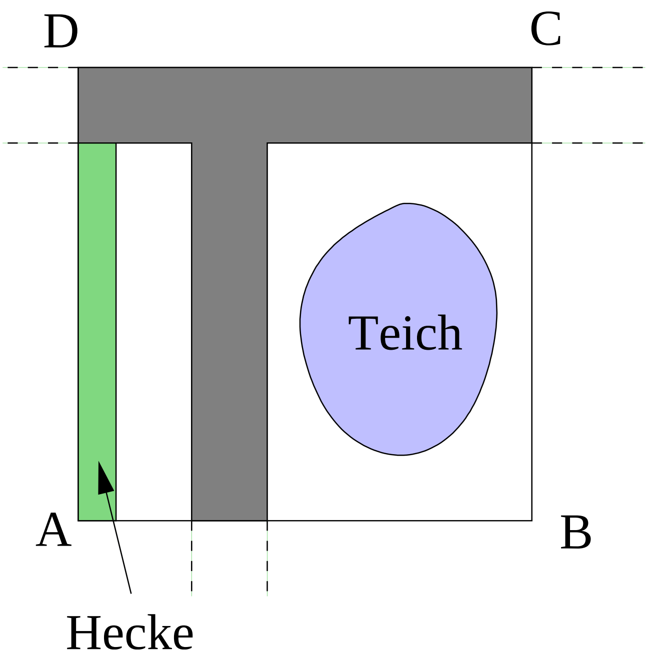
$x_1 = 0,5 \cdot (27 + \sqrt{517,8}) \approx 24,88 \quad (\dagger) \quad$, wegen $G =]0;\,11[_{\mathbb{R}}$.
$x_2 = 0,5 \cdot (27 - \sqrt{517,8}) \approx 2,12 \in G =]0;\,11[_{\mathbb{R}}$.
Also: $L = \{13,5 - 0,5\sqrt{517,8}\}$.

(d) $x^2 - 27x + 176 = -x^2 + 27x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 54x + 176 = 0$ mit $G =]0;\,11[_{\mathbb{R}}$

$$x_{1;2} = \frac{54 \pm 2\sqrt{377}}{4}$$

$x_1 = 13,5 + 0,5\sqrt{377} \approx 23,21 \quad (\dagger) \quad$, wegen $G =]0;\,11[_{\mathbb{R}}$.
$x_2 = 13,5 - 0,5\sqrt{377} \approx 3,79 \in G =]0;\,11[_{\mathbb{R}}$.
Also: $L = \{13,5 - 0,5\sqrt{377}\}$

2.

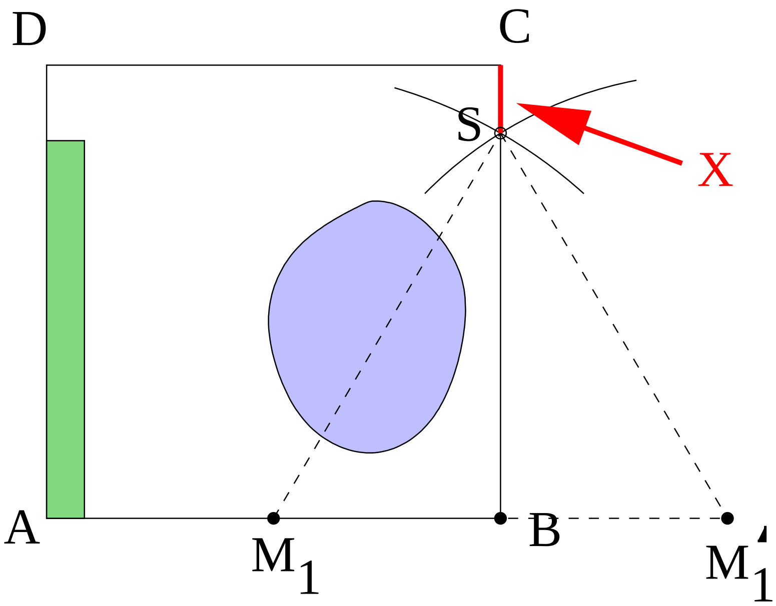


Der Plan zeigt ein quadratisches Biotop $ABCD$ mit einer Seitenlänge von 15 m. Es ist beabsichtigt, dass dort zwei geteerte Abschnitte von gleich breiten Radwegen im rechten Winkel aufeinander stoßen.
Die Naturschützer legen Wert darauf, dass die beiden Abschnitte für die Radwege höchstens 25% an Biotopfläche verbrauchen dürfen.

(a) In welchem Maßstab wurde der Plan erstellt?

(b)
- Zeige, dass dem Verlangen der Naturschützer im vorliegenden Plan nicht Rechnung getragen worden ist.
- Zeige: Wenn jeder der beiden Radwege x m breit ist, dann muss
$$x \leqq 15 - \frac{15}{2}\sqrt{3}$$
werden.

(c) In einem neuen Plan wurde die höchstens zulässige Radwegbreite x konstruiert: Der Punkt M_1 ist der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$. Er wurde am Punkt B gespiegelt. Dadurch entstand der Punkt M_1'.
Die beiden Punkte M_1 und M_1' sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.



- Erläutere den weiteren Konstruktionsweg.
- Können sich die Naturschützer zufrieden geben?

Lösung: (a) $15\,\text{m} = 1500\,\text{cm}$ entsprechen hier $6\,\text{cm}$.
Dann entspricht $1\,\text{cm}$ im Plan $1500\,\text{cm} : 6 = 250\,\text{cm}$ in Wirklichkeit.
Der Plan wurde also im Maßstab $1 : 250$ erstellt.

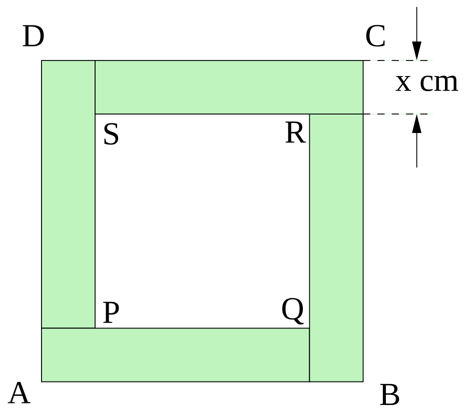
(b)
- Im Plan ist jeder Radweg $1\,\text{cm}$ breit. Also würden die Radwege $2,50\,\text{m}$ breit.
Die Gesamtfläche der beiden Radwege würde
$(2,5 \cdot 15 + 2,5 \cdot 12,5)\,\text{m}^2 = 68,75\,\text{m}^2$ betragen.
$$\frac{68,75\,\text{m}^2}{225\,\text{m}^2} > 0.3 = 30\% > 25\%\text{: Protest!}$$
- Es gilt der Ansatz:
$15x + (15 - x) \cdot x = 0.25 \cdot 225 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 30x + 56,25 = 0$
$$x_{1;2} = \frac{30 \pm 15\sqrt{3}}{2}$$
Das Pluszeichen entfällt, da sonst $x > 15$ wird. Also gilt:

$$x \leqq 15 - \frac{15}{2}\sqrt{3}.$$

(c)
- Das Dreieck $M_1M_1'S$ ist gleichseitig mit der Seitenlänge $\overline{AB} = 15\,\mathrm{m}$ und der Höhe $\overline{BS} = \frac{15}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \overline{CS} = (15 - \frac{15}{2}\sqrt{3})\,\mathrm{m}$
- $\overline{CS} \approx 2,009\,\mathrm{m} \approx 2\,\mathrm{m}$
  Radwegfläche für diesen Fall: $2 \cdot 15\,\mathrm{m}^2 + 13 \cdot 2\,\mathrm{m}^2 = 56\,\mathrm{m}^2$

  $\frac{56\,\mathrm{m}^2}{225\,\mathrm{m}^2} = 0.24\overline{8} = 24,\overline{8}\%$. Das ist ok.

3.



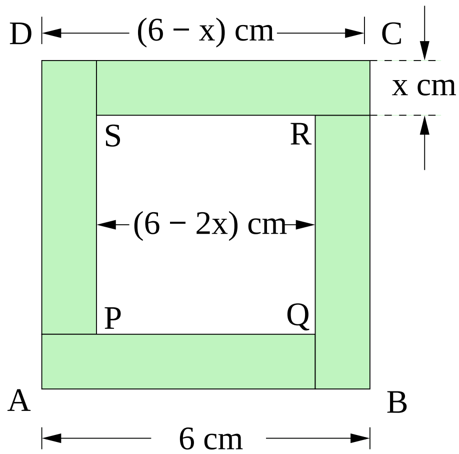
Das Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB} = 6\,\mathrm{cm}$ ist aus vier kongruenten Rechtecken und dem Quadrat $PQRS$ zusammengefügt worden. Die kürzere Seite jedes Rechtecks ist $x\,\mathrm{cm}$ lang.

(a) Zeichne die Figur für $x = 1$.

(b) Berechne x auf drei verschiedene Arten so, dass alle fünf Teilflächen, die das Quadrat $ABCD$ bedecken, gleich groß sind.

(c)
- Zeige: Wenn das Quadrat $PQRS$ ein Drittel der Fläche des Quadrates $ABCD$ einnehmen soll, dann muss
  $$x = 3 - \sqrt{3} = \frac{6}{2} - \frac{2}{2}\sqrt{3}$$
  gelten.
- Konstruiere die Figur für diesen x-Wert.
  Tipp: $\frac{2}{2}\sqrt{3}$ ist so lang wie die Höhe in einem bestimmten gleichseitigen Dreieck.

Lösung: (a) Die Figur wurde etwas kleiner gezeichnet:



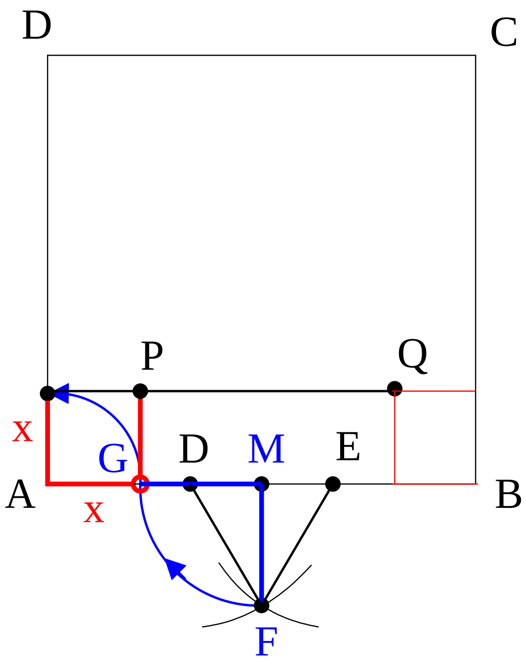
(b) **1. Möglichkeit:** $A_{Rechteck} = \frac{1}{5} \cdot A_{ABCD} = 0,2 \cdot A_{ABCD}$
$x(6-x) = 0,2 \cdot 36 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 7,2 = 0 \qquad$ **(*)**

Mit $\sqrt{D*} = 6\sqrt{2}$ folgt: $x_{1;2} = \dfrac{6 \pm 6\sqrt{0,2}}{2}$
Das Pluszeichen entfällt, da sonst $x > 6$ wäre.
Also gilt: $x = 3 - 3\sqrt{0,2} \approx 1,66$.

2. Möglichkeit: $A_{PQRS} = \frac{1}{5} \cdot A_{ABCD}$
$(6-2x)^2 = 0,2 \cdot 36 \quad \Leftrightarrow \quad 36 - 24x + 4x^2 = 7,2$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 7,2 = 0$ siehe **(*)**

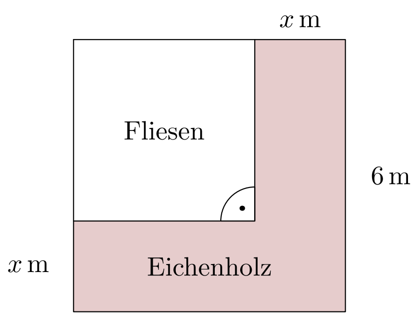
3. Möglichkeit: $A_{PQRS} = A_{Rechteck}$
$(6-2x)^2 = x(6-x) \quad \Leftrightarrow \quad 36 - 24x + 4x^2 = 6x - x^2$
$\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 7,2 = 0$ siehe **(*)**

(c)
- $(6-2x)^2 = \dfrac{1}{3} \cdot 36 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 6 = 0; \ x_{1;2} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2}$
  Das Pluszeichen entfällt wieder, da sonst $x > 6$ wäre.
  Also gilt: $x = 3 - \sqrt{3} = \dfrac{6}{2} - \dfrac{2}{2}\sqrt{3}$.
- Die Seite $[AB]$ besitzt den Mittelpunkt M.
  Weiter gilt: $\overline{DM} = \overline{ME} = 1\,\text{cm}$. Die Punkte M und A sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.



Unter der Basis $[DE]$ wurde das gleichseitige Dreieck DFE mit der Seitenlänge 2 cm konsturiert. Also ist die Höhe $\overline{MF} = \frac{2}{2}\sqrt{3}$ cm lang. Dann gilt auch $\overline{MF} = \overline{MG}$. Dann ist aber $\overline{AG} = (3 - \frac{2}{2}\sqrt{3})$ cm $= (3 - \sqrt{3})$ cm $= x$ cm $= \overline{AP}$.

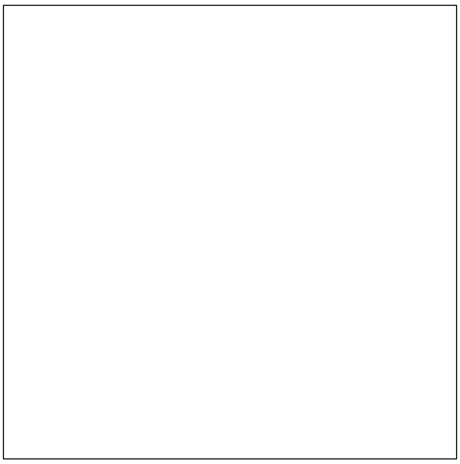
4.



Der quadratische Boden eines Badezimmers mit einer Seitenlänge von 6 m ist einerseits gefliest, anderserseits mit Eichenbrettern L-förmig verlegt worden. Das „L“ hat eine Breite von x m.
Die Fläche aus Holz ist halb so groß wie die gesamte Bodenfläche.

(a) Zeige: $x = 6 - 3\sqrt{2}$.

(b) •

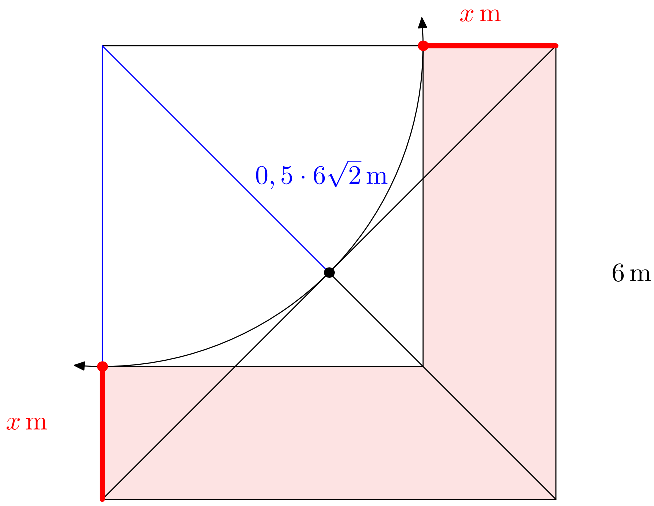


In welchem Maßstab ist der Grundriss des Badezimmers in der obigen Figur dargestellt?

- Konstruiere mit Zirkel und Lineal in diesen Grundriss maßstabgerecht die Streckenlänge $x\,\mathrm{m} = (6 - 3\sqrt{2})\,\mathrm{m}$.
  Tipp: $6 - 3\sqrt{2} = 6 - 0,5 \cdot 6\sqrt{2}$.
- Vervollständige damit die Flächenaufteilung des Badezimmers.

Lösung: (a) Wenn das „L“ überall $x\,\mathrm{m}$ dick ist, dann ist die geflieste Fläche ein Quadrat mit der Seitenlänge $(6 - x)\,\mathrm{m}$.
Wenn das „L“ die Hälfte der Gesamtfläche ausmacht, dann muss die quadratische geflieste Fläche die andere Hälfte einnehmen. Als Maßzahlengleichung ergibt sich dann:
$(6 - x)^2 = 0.5 \cdot (6 \cdot 6) = 18$, mit $x \in \,]0,\, 6[_{\mathbb{R}}$.
$\Leftrightarrow \quad |\, 6 - x \,| = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$.
$\Leftrightarrow \quad 6 - x = 3\sqrt{2} \quad \vee \quad 6 - x = -3\sqrt{2}$.
$\Leftrightarrow \quad x = 6 - 3\sqrt{2} \quad \vee \quad x = 6 + 3\sqrt{2}$.
Wegen $x \in \,]0,\, 6[_{\mathbb{R}}$ folgt $x = 6 - 3\sqrt{2}$.

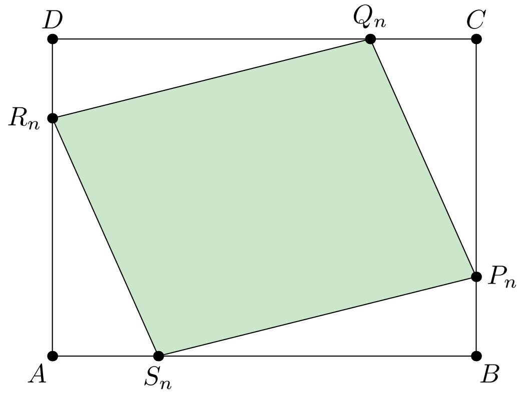
(b)
- Der Grundriss ist im Maßstab $1 : 100$ dargestellt. $(1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm})$.
-



Ein Quadrat, dessen Seitenlänge 6 cm beträgt, hat eine Diagonalenlänge von $6\sqrt{2}$ cm. $0,5 \cdot 6\sqrt{2}$ cm ist dann gerade die halbe Diagonalenlänge dieses Quadrates.
Du erhältst x, wenn du mit Hilfe des Kreisbogens die Differenz aus der Seitenlänge des großen Quadrates und seiner halben Diagonalenlänge abträgst.

- Der Rest ist klar.

5.



In das Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 8$ cm und $\overline{BC} = 6$ cm werden Parallelogramme $P_nQ_nR_nS_n$ einbeschrieben, wobei gilt: $\overline{BP_n} = \overline{DR_n} = 6k$ cm und $\overline{AS_n} = \overline{CQ_n} = 8k$ cm mit $k \in]0; 1[_{\mathbb{R}}$.

(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ und für $k = 0,25$ das Parallelogramm $P_1Q_1R_1S_1$.

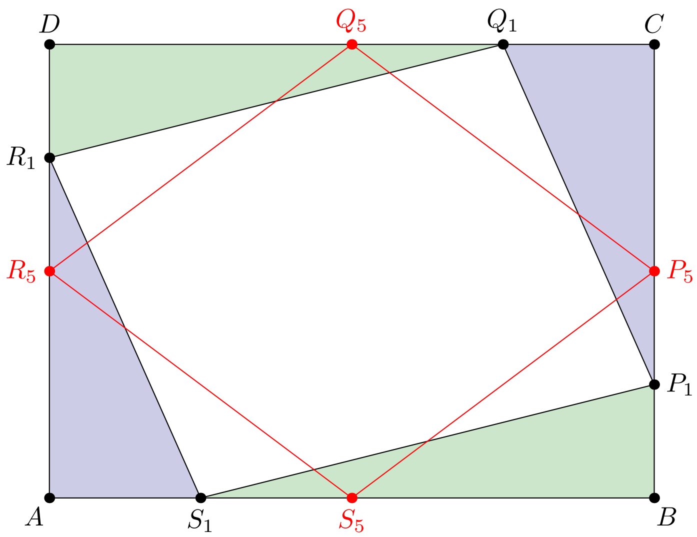
(b) Zeige: Für das Verhältnis q der Flächeninhalte der Parallelogramme $P_nQ_nR_nS_n$ zum Rechteck $ABCD$ gilt in Abhängigkeit von k:
$$q(k) = \frac{A_{P_nQ_nR_nS_n}}{A_{ABCD}} = 1 - 2k(1-k)\,.$$

(c) $k = 0,4$ erzeugt das Parallelogramm $P_2Q_2R_2S_2$. Wie viel Prozent der Fläche des Rechtecks $ABCD$ wird von diesem Parallelogramm eingenommen?

(d) Unter allen Parallelogrammen $P_nQ_nR_nS_n$ gibt es die Parallelogramme $P_3Q_3R_3S_3$ und $P_4Q_4R_4S_4$, die jeweils 58% der Fläche des Rechtecks $ABCD$ einnehmen. Berechne die zugehörigen Belegungen von k.

(e) Für $k = 0,5$ wird das Parallelogramm $P_5Q_5R_5S_5$ erzeugt.
  - Zeichne dieses Parallelogramm in einer anderen Farbe ein.
  - Um welches besondere Parallelogramm handelt es sich hier? Begründe deine Antwort.
  - Zeige: Unter allen Parallelogrammen $P_nQ_nR_nS_n$ besitzt dieses Parallelogramm $P_5Q_5R_5S_5$ den kleinsten Flächeninhalt.

Lösung: (a)



(b) Es gilt $\Delta\, S_nBP_n \cong \Delta\, R_nQ_nD$ und $\Delta\, P_nCQ_n \cong \Delta\, AS_nR_n$.
$A_{ABCD} = 48\,\text{cm}^2$
$A_{P_nQ_nR_nS_n} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta\, S_nBP_n} - 2 \cdot A_{\Delta\, P_nCQ_n}$.
$2 \cdot A_{\Delta\, S_nBP_n} = 2 \cdot 0,5 \cdot \overline{S_nB} \cdot \overline{BP_n} = (1-k) \cdot 8\,\text{cm} \cdot 6k\,\text{cm} = 48\,\text{cm}^2 \cdot (1-k) \cdot k$.
$2 \cdot A_{\Delta\, P_nCQ_n} = 2 \cdot 0,5 \cdot \overline{P_nC} \cdot \overline{CQ_n} = (1-k) \cdot 6\,\text{cm} \cdot 8k\,\text{cm} = 48\,\text{cm}^2 \cdot (1-k) \cdot k$.

$$\begin{aligned} A_{P_nQ_nR_nS_n} &= 48\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 48\,\text{cm}^2 \cdot (1-k) \cdot k \\ A_{P_nQ_nR_nS_n} &= 48\,\text{cm}^2 \cdot [1 - 2k(1-k)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad q(k) = \frac{A_{P_nQ_nR_nS_n}}{A_{ABCD}} = \frac{48\,\text{cm}^2 \cdot [1-2k(1-k)]}{48\,\text{cm}^2} = 1 - 2k(1-k)\,.$$

(c) $q(0,4) = 1 - 2 \cdot 0,4 \cdot (1-0,4) = 0,52 = 52\%$

(d)

$$\begin{aligned} 1 - 2k(1-k) &= 0,58 \\ 2k^2 - 2k + 1 &= 0,58 \\ 2k^2 - 2k + 0,42 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad k_1 = 0,3 \quad \text{und} \quad k_2 = 0,7$

(e)
- Siehe Zeichnung.
- Es handelt sich um eine Raute.
  Begründung: Die vier rechtwinkligen Dreiecke S_5BP_5, P_5CQ_5, R_5Q_5D und AS_5R_5 sind kongruent, denn die besitzen jeweils Katheten, die jeweils 3 cm bzw. 4 cm lang sind. Also sind auch ihre Hypotenusen, die die Seiten des Parallelogramms $P_5Q_5R_5S_5$ bilden, gleich lang. Also ist dieses Viereck eine Raute.
- $q(k) = 1 - 2k(1-k) = 2k^2 - 2k + 1 = 2(k^2 - k + 0,5^2 - 0,25) + 1 = 2[(k-0,5)^2 - 0,25) + 1] = 2(k-0,5)^2 + 0,5$
  $k = 0,5$ liefert den minimalen Flächenanteil von $0,5 = 50\%$.

6. Gegeben sind die folgenden Gleichungen mit $G = \mathbb{R}$:

$$-5x + 30 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{x-6}{17,2} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{x-6}{x+3} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{x-6}{-3x+18} = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{36-x^2}{x-6} = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{0,5x^2-6x+18}{x+6} = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{x^2-4x-12}{2x-6} = 0 \qquad (7)$$

$$(-1,1)^{17} \cdot (\sqrt{2x} + 2\sqrt{3}) \cdot 17\frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2x} - \sqrt{12}) = 0 \qquad (8)$$

(a) Ermittle die Lösung der Gleichung (1).

(b) Untersuche, ob die Gleichungen (2) bis (8) die gleiche Lösungsmenge wie die Gleichung (1) besitzen. Begründe jeweils deine Antwort.

Lösung: (a) $x = 6$.

(b) Gleichung **(2)**:
Da der Nenner stets von 0 verschieden ist, hat der Bruch den Wert 0, wenn der Zähler den Wert 0 hat. Das ist wieder wie in (1) für $x = 6$ der Fall.

Gleichung **(3)**:
Für die Definitionsmenge D gilt: $D = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$. Der Zähler verschwindet für $x = 6$. Also ist die Lösung wieder die gleiche wie in (1).

Gleichung **(4)**:
Der Nennner wird 0, wenn $x = 6$ gilt. Also folgt $D = \mathbb{R}\backslash\{6\}$.
Der Zähler hat nur eine einzige Nullstelle, nämlich $x = 6 \notin D$. Die Lösungsmenge ist im Gegensatz zu (1) **leer**.

Gleichung **(5)**:
Wieder gilt $D = \mathbb{R}\backslash\{6\}$.
$36 - x^2 = (6-x)(6+x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 \notin D \vee x = -6 \in D$.

Also ist $x = -6$ die einzige Lösung. Sie stimmt nicht mit der Lösung von (1) überein.

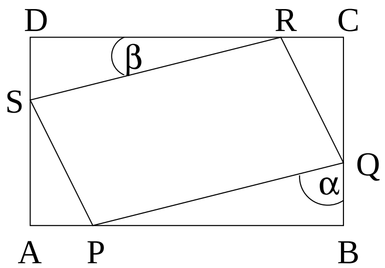
Gleichung **(6)**:
$D = \mathbb{R}\backslash\{-6\}$.
$0,5x^2 - 6x + 18 = 0,5(x-6)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 \in D$.
Die Gleichung (6) besitzt die gleiche Lösung wie die Gleichung (1).

Gleichung **(7)**:
$D = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.
$= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \in D \vee x = 6 \in D$.
Eine der Lösungen der Gleichung (7) ist zwar mit der der Gleichung (1) identisch, aber die Gleichung (7) besitzt noch eine zweite Lösung, die in (1) nicht auftaucht. (1) und (7) haben also **verschiedene Lösungsmengen**.

Gleichung **(8)**:
$(-1,1)^{17} \cdot (\sqrt{2x} + 2\sqrt{3}) \cdot 17\frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2x} - \sqrt{12}) =$
$(-1,1)^{17} \cdot 17\frac{1}{3} \cdot \left[(\sqrt{2x})^2 - (\sqrt{12})\right] = (-1,1)^{17} \cdot 17\frac{1}{3} \cdot [2x - 12] = 0$.
$\Leftrightarrow \quad x = 6 \in D$.
Also ist die Lösung wieder die gleiche wie in (1).

5. Flächeninhalt ebener Vielecke

1. In einem Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = \overline{CD} = 5\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = \overline{DA} = 3\,\text{cm}$.
   Weiter gilt: $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = \overline{DS} = 1\,\text{cm}$



   (a) Übertrage die Zeichnung auf dein Blatt.

   (b) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ möglichst exakt.

   (c) Es gilt $\alpha = 75,96°$. Berechne das Winkelmaß β auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

Lösung: (a) - -

(b) $A_{PQRS} = 9\,\text{cm}^2$

(c) $\beta = 14,04°$

2. Die eine Seite eines Rechtecks $PQRS$ ist doppelt so lang wie die andere Rechtecksseite. Das Rechteck besitzt einen Flächeninhalt von $1,62\,\text{dm}^2$.

   (a) Berechne die beiden Seitenlängen des Rechtecks.

   (b) Berechne die Länge einer Diagonalen.

Lösung: (a) $9\,\text{cm}$, $18\,\text{cm}$
(b) $d = \sqrt{405}\,\text{cm} \approx 20,12\,\text{cm}$

3. Von einem Trapez $ABCD$ weiß man: $A(1|1)$, $B(9|5)$, $C(x|7,5)$ und $D(2|6)$. Außerdem gilt: $[AB] \parallel [CD]$.
   Zeichne das Trapez und berechne x.

Lösung: $x = 5$.

4. Ein Trapez $ABCD$ besitzt die Höhe $h = 4{,}2\,\text{cm}$ und die beiden parallelen Seiten $[AB]$ und $[CD]$. Dabei gilt: $\overline{AB} = 8{,}5\,\text{cm}$ und $\overline{CD} = x\,\text{cm}$
   Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ $30{,}03\,\text{cm}^2$ groß ist.

Lösung: $x = 5{,}8$

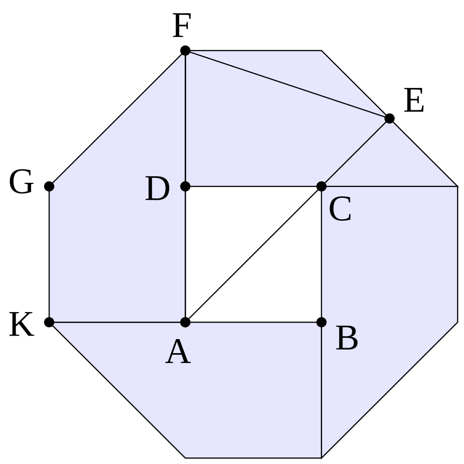
5. In einem Trapez $ABCD$, dessen Flächeninhalt $13\,\text{cm}^2$ beträgt, sind die beiden Seiten $[AB]$ und $[CD]$ parallel.
   Weiter gilt: Das Trapez ist $3{,}25\,\text{cm}$ hoch und $\overline{AB} = 5{,}2\,\text{cm}$.
   Berechne die Länge der Strecke $[CD]$.

Lösung: $\overline{CD} = 2{,}8\,\text{cm}$

6. Eine Raute $PQRS$ besitzt einen Flächeninhalt von $24\,\text{cm}^2$. Eine Diagonale ist $12\,\text{cm}$ lang.
   (a) Berechne die Länge der zweiten Diagonalen.
   (b) Berechne den Umfang dieser Raute.

Lösung: (a) $e = 4\,\text{cm}$
(b) $u = 4 \cdot \sqrt{40}\ cm \approx 25{,}28\,\text{cm}$

7. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das weiße Viereck ist ein Quadrat. Es gilt $\overline{AB} = \overline{DF} = a\,\text{cm}$. Zusätzlich ist hier das Dreieck AEF eigezeichnet.

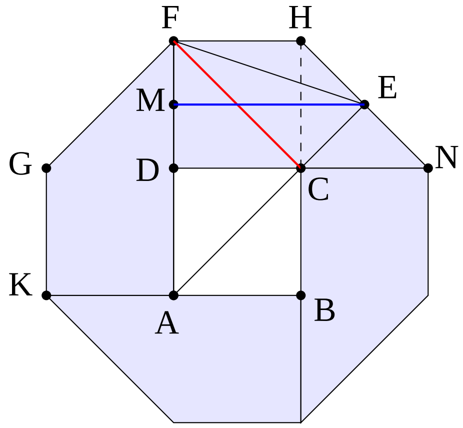


   (a) Zeichne die Figur für $\overline{FG} = 3{,}2\,\text{cm}$ so, dass die Strecke $[KB]$ waagrecht liegt.
   (b) Berechne in deiner Zeichnung den Flächeninhalt Quadrates $ABCD$.

(c) • Untersuche ohne Verwendung des Taschenrechners, ob das Dreieck AEF gleichschenklig ist. Gilt dein Ergebnis auch dann noch, wenn die Figur verkleinert oder vergrößert wird? Begründe deine Ansicht.

• Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks auf drei verschiedene Arten in Abhängigkeit von a.

Lösung: (a) $[FG]$ ist genauso lang wie die Diagonale $[AC]$ des Quadrates $ABCD$.
Also gilt: $a\sqrt{2} = 3,2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3,2}{\sqrt{2}} \approx 2,26$.
Für die Zeichnung: $\overline{AF} = \overline{KB} = 2a\,\text{cm} \approx 5,52\,\text{cm}$.

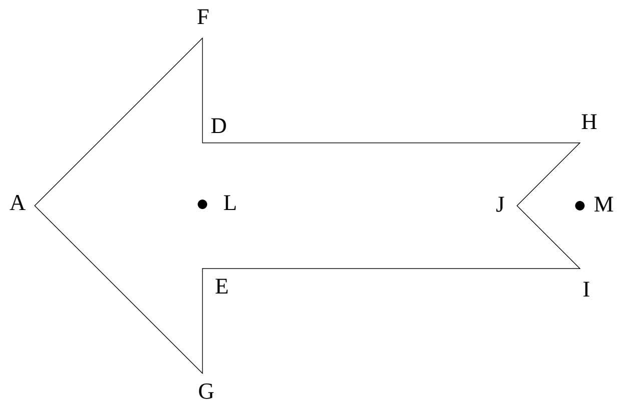


(b) $A(ABCD) = a^2\,\text{cm}^2 = \left(\frac{3,2}{\sqrt{2}}\right)^2\,\text{cm}^2 = 5,12\,\text{cm}^2$

(c) • Wegen $\overline{CE} = 0,5 \cdot \overline{AC}$ müsste gelten:
$2a = 1,5a\sqrt{2} \quad (a \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$.
Weil aber $\sqrt{2}$ irrational ist, liegt hier ein Widerspruch vor.
Dieser Widerspruch lässt sich auch durch Vergößerung oder Verkleinerung der Figur nicht auflösen: Jede Vergrößerung oder Verkleinerung ist eine winkeltreue Abbildung. Wenn in der Ausgangsfigur keine zwei Winkel maßgleich sind, dann wird dies auch bei einer Größenänderung nicht anders.

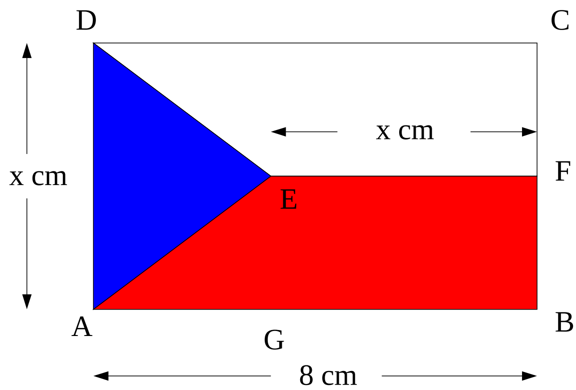
• Es wird nur mit Maßzahlen gerechnet.
1. Möglichkeit:
$A(AEF) = 0,5\overline{AE} \cdot \overline{FC} = 0,5 \cdot 1,5a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 1,5a^2$.
2. Möglichkeit:
$A(AEF) = 0,5 \cdot \overline{AF} \cdot \overline{EM} = 0,5 \cdot 2a \cdot 1,5a = 1,5a^2$.
3. Möglichkeit:
Das Lot $[FC]$ zelegt das Dreieck AEF in die beiden rechtwinkligen Teildreiecke ACF und CEF.
Das Dreieck ACF ist so groß wie das Quadrat $ABCD$: $A(ACF) = a^2$.
Weil $[FC] \parallel [HN]$ ist, folgt $A(CEF) = A(FCH) = 0,5a^2$.
$\Rightarrow \quad A(AEF) = a^2 + 0,5a^2 = 1,5a^2$.

8. Berechne den Flächeninhalt des unten skizzierten Pfeiles.
Dabei gilt: $\overline{AM} = 6\,\text{cm}$, $\overline{AL} = 2\,\text{cm}$, $\overline{FG} = 3\,\text{cm}$, $\overline{HI} = 1,5\,\text{cm}$, $\overline{AJ} = 5,5\,\text{cm}$



Lösung: Der Flächeninhalt beträgt $8,625\,\text{cm}^2$.

9. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = \overline{EF} = x\,\text{cm}$ mit $x \in \mathbb{R}^+$.
Hinweis: Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne die Figur für $x = 4,5$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABFE$ in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A_T(x) = (0,25x^2 + 2x)\,\text{cm}^2$]

(c) Untersuche auf verschiedene Weise, ob es eine Belegung für x gibt, so dass der Flächeninhalt des Trapezes $ABFE$ den Wert $33\,\text{cm}^2$ annimmt.

(d) Berechne x so, dass die Inhalte aller drei Teilflächen im Inneren des Rechtecks $ABCD$ gleich groß sind.

(e) Berechne x so, dass das Dreieck AED gleichseitig wird.

(f) Berechne x so, dass das Dreieck AED gleichschenklig-rechtwinklig wird.

Lösung: (a) –

(b)

$$A_T(x) = \frac{8+x}{2} \cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{cm}^2 = \frac{x^2+8x}{4}\,\mathrm{cm}^2 = (0,25x^2+2x)\,\mathrm{cm}^2$$

(c) 1. Möglichkeit (mühsam):
$0,25x^2 + 2x = 33 \quad \Leftrightarrow \quad 0,25(x+4)^2 = 37 \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)^2 = 148(*)$
Wegen $x \in \mathbb{R}^+$ ist (*) gleichwertig mit $x = 2\sqrt{37} - 4 > 8$, was wegen $\overline{EF} = x\,\mathrm{cm} \leqq \overline{AB} = 8\,\mathrm{cm}$ nicht geht.
2. Möglichkeit:
Damit das Dreieck AED existiert, muss $x < 8$ gelten. Das Trapez $ABFE$ nimmt stets weniger als die Hälfte des Rechtecks $ABCD$ ein. Also muss stets $A_T < 32\,\mathrm{cm}^2$ sein und damit kann dieser Flächeninhalt nicht größer als $32\,\mathrm{cm}^2$ (nämlich $33\,\mathrm{cm}^2$) sein.

(d) Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ muss dreimal so groß sein wie der Flächeninhalt des Trapezes $ABFE$:
$3 \cdot (0,25x^2 + 2x) = 8x \quad \Rightarrow \quad 0,75x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \quad x(0,75x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ † wegen $x \in \mathbb{R}^+ \quad \vee \quad 0,75x - 2 = 0 \Rightarrow \quad x \approx 2,67$

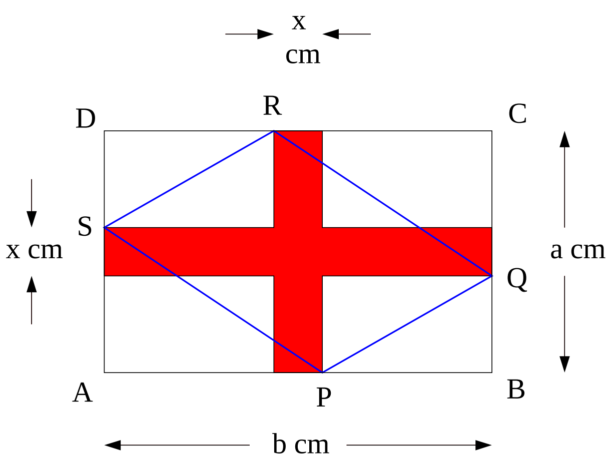
(e) Es muss gelten:

$$8 - x = \frac{x}{2}\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{16}{2+\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 4,29$$

(f) Es muss gelten:

$$x + \frac{x}{2} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 1,5x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 5,33$$

10. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England. Zusätzlich ist noch das Viereck $PQRS$ eingezeichnet.



(a) Zeichne die Figur für $a = 5$, $b = 8$ und $x = 1$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Parallelogramm.

(c) Zeige: Die Berechnung des Flächeninhalts A der Vierecke $PQRS$ in Abhängigkeit von a, b und x ergibt:

$$A(x) = \frac{ab - 0,5x^2}{2}\ \mathrm{cm}^2.$$

(d) Begründe: Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt: $A(PQRS) < 0,5 \cdot A(ABCD)$.

Lösung:

(a) –

(b) $\Delta RQC \cong \Delta APS \quad \wedge \quad \Delta SRD \cong \Delta PBQ$.
Damit sind je zwei gegenüber liegende Seiten des Vierecks $PQRS$ gleich lang. Also handelt es sich um ein Parallelogramm.

(c) Der gesuchte Flächeninhalt ergibt sich z.B. dadurch, dass man an den Eckpunkten des Rechtecks $ABCD$ die vier jeweils paarweise kongruenten rechtwinkligen Dreiecke abschneidet.
Es gilt: $\overline{RD} = 0,5(a-x)\,\mathrm{cm} = \overline{PB} \quad \wedge \quad \overline{SD} = 0,5(b-x)\,\mathrm{cm} = \overline{BQ}$.

$$\begin{aligned} A(SRD) + A(PBQ) &= 2 \cdot [0,5 \cdot 0,5(a-x) \cdot 0,5(b-x)]\,\mathrm{cm}^2 \\ &= 0,25(a-x)(b-x)\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

Weiter gilt: $\overline{RC} = 0,5(b+x)\,\mathrm{cm} = \overline{AP} \quad \wedge \quad \overline{CQ} = 0,5(a+x)\,\mathrm{cm} = \overline{AS}$.

$$\begin{aligned} A(RQC) + A(APS) &= 2 \cdot [0,5 \cdot 0,5(b+x) \cdot 0,5(a+x)]\,\mathrm{cm}^2 \\ &= 0,25(a+x)(b+x)\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

Im Folgenden wird nur mit Maßzahlen gerechnet.

$$\begin{aligned} A(PQRS) &= ab - [\,0,25(a-x)(b-x) + 0,25(a+x)(b+x)] \\ &= ab - 0,25[ab - ax - bx + x^2 + ab + ax + bx + x^2] \\ &= ab - 0,5ab - 0,5x^2 \\ A(PQRS) &= 0,5(ab - x^2), \text{ was zu zeigen war.} \end{aligned}$$

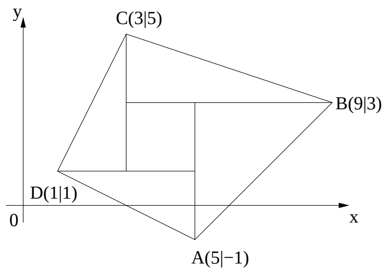
(d) Für die Maßzahlen gilt:

$$\frac{ab - 0,5x^2}{2} = 0,5ab - 0,25x^2$$

Wegen $0,25x^2 > 0$ (für alle $x \in \mathbb{R}^+$) folgt:

$$\frac{ab - 0,5x^2}{2} =< \frac{ab}{2} = 0,5ab = 0,5 \cdot A(ABCD)\,.$$

11. Klaus will den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ berechnen. Er hat dazu in das Viereck Strecken eingezeichnet.



(a) Weshalb hat Klaus diese Einteilung vorgenommen? Kann er auf diese Weise den Flächeninhalt exakt berechnen? Begründe deine Antwort.

(b) Zeichne das Viereck und berechne seinen Flächeninhalt auf eine andere Weise.

(c) Zeichne ein Drachenviereck, das denselben Flächeninhalt wie das Viereck A_{ABCD} besitzt.

Lösung: (a) Die Katheten der Dreiecke sind jeweils zu einer der Koordinatenachsen parallel. Ihre Längen können deshalb mit Hilfe der Koordinaten der Eckpunkte einfach bestimmt werden.

(b) $A_{ABCD} = 26\,cm^2$

(c) - -

12. Gegeben sind die Punkte $A(-1|4)$ und $B(2|1)$ sowie die Gerade $g : y = -2x + 9$. Punkte C_n wandern auf der Geraden g, so dass laufend Dreiecke ABC_n erzeugt werden.

(a) Zeichne die Gerade g und für $C_1(x_1|7)$ das Dreieck ABC_1 in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-2 \leqq x \leqq 7$ und $-4 \leqq y \leqq 10$

(b) Zeige, dass für den Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von x gilt:
$$A(x) = (9 - 1,5\,x)\,\mathrm{cm}^2$$

(c) Gib zwei Belegungen von x an, für die es keines dieser Dreiecke ABC_n gibt. Begründe deine Wahl, z.B. anhand deiner Zeichnung.

(d) Untersuche zeichnerisch, ob es unter allen Dreiecken ABC_n rechtwinklige gibt, welche die Seite $[AB]$ als Kathete besitzen.

(e) Angenommen, die Punkte C_n würden nicht auf der Geraden g, sondern auf einer anderen Geraden g^* wandern. Diese Gerade g^* soll so liegen, dass dann der Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n konstant bleibt.
Zeichne eine solche Gerade g^* ein.

Lösung: (a) -.-

(b) -.-

(c) $x = 6$: Das Dreieck entartet zur Strecke.
$x = 7$: Das betreffende Dreieck erhält den falschen Drehsinn.

(d) Es gibt zwei solche Dreiecke: Man errichte im Punkt A und im Punkt B jeweils eine Senkrechte zur Strecke AB.

(e) g^* muss so zu AB parallel liegen, dass der korrekte Drehsinn gewahrt bleibt.

13. Ein Quadrat besitzt einen Flächeninhalt von $39,69\,\text{cm}^2$.
Berechne die Länge einer Diagonalen.

Lösung: $d = 6,3 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \approx 8,91\,\text{cm}$

14. Gegeben ist das Dreieck ABC durch $A(4 \mid 1)$, $B(-2 \mid 5)$ und $C(-4 \mid 3)$.

   (a) Zeichne das Dreieck ABC in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-5 \leqq x \leqq 5$ und $-1 \leqq y \leqq 6$

   (b) Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks, indem du seine Grundlinie und seine Höhe abmisst.

   (c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC exakt mit Hilfe eines geeigneten Rechtecks, das du einzeichnest. [Ergebnis: $A_{\triangle ABC} = 10\,\text{cm}^2$]

   (d) Zeichne zwei rechtwinklige Dreiecke, die zwar jeweils den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck ABC besitzen, die aber nicht kongruent sind.

Lösung: (a) - -

(b) - -

(c) Ergebnis: $A_{\triangle ABC} = 10\,\text{cm}^2$

(d) - -

15. Von einem Trapez $ABCD$ weiß man: $A(1|1)$, $B(9|5)$, $C(x|7,5)$ und $D(2|6)$. Außerdem gilt: $[AB] \parallel [CD]$.
Zeichne das Trapez und berechne x.

Lösung: $x = 5$.

16. Ein Trapez $ABCD$ besitzt die Höhe $h = 4,2\,\text{cm}$ und die beiden parallelen Seiten $[AB]$ und $[CD]$. Dabei gilt: $\overline{AB} = 8,5\,\text{cm}$ und $\overline{CD} = x\,\text{cm}$
Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ $30,03\,\text{cm}^2$ groß ist.

Lösung: $x = 5,8$

17. Gegeben sind die Punkte $A(-1|4)$ und $B(2|1)$ sowie die Gerade $g : y = -2x + 9$. Punkte C_n wandern auf der Geraden g, so dass laufend Dreiecke ABC_n erzeugt werden.

    (a) Zeichne die Gerade g und für $C_1(x_1|7)$ das Dreieck ABC_1 in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-2 \leqq x \leqq 7$ und $-4 \leqq y \leqq 10$

    (b) Zeige, dass für den Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von x gilt:
    $$A(x) = (9 - 1,5\,x)\,\text{cm}^2$$

    (c) Gib zwei Belegungen von x an, für die es keines dieser Dreiecke ABC_n gibt. Begründe deine Wahl, z.B. anhand deiner Zeichnung.

    (d) Untersuche zeichnerisch, ob es unter allen Dreiecken ABC_n rechtwinklige gibt, welche die Seite $[AB]$ als Kathete besitzen.

    (e) Angenommen, die Punkte C_n würden nicht auf der Geraden g, sondern auf einer anderen Geraden g^* wandern. Diese Gerade g^* soll so liegen, dass dann der Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n konstant bleibt.
    Zeichne eine solche Gerade g^* ein.

Lösung: (a) -.-

(b) -.-

(c) $x = 6$: Das Dreieck entartet zur Strecke.
$x = 7$: Das betreffende Dreieck erhält den falschen Drehsinn.

(d) Es gibt zwei solche Dreiecke: Man errichte im Punkt A und im Punkt B jeweils eine Senkrechte zur Strecke AB.

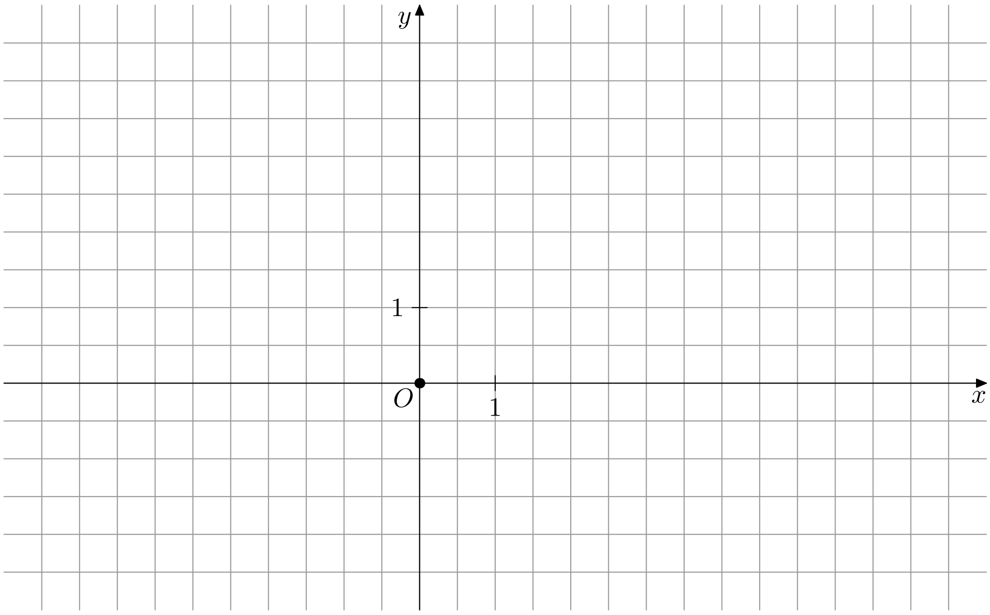
(e) g^* muss so zu AB parallel liegen, dass der korrekte Drehsinn gewahrt bleibt.

18. Ein Quadrat besitzt einen Flächeninhalt von $39,69\,\text{cm}^2$.
Berechne die Länge einer Diagonalen.

Lösung: $d = 6,3 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \approx 8,91\,\text{cm}$

19. Gegeben sind die beiden Geraden g_1 und g_2 durch die Gleichungen
$$g_1 : y = 0,5x \text{ und } g_2 : y = -0,5x + 2.$$
Die Punkte $A_n(x \mid 0,5x)$ auf der Geraden g_1 erzeugen zusammen mit den Punkten B_n auf der Geraden g_2 Kreise k_n mit dem Durchmesser $[A_nB_n]$. Die Abszisse der Punkte B_n ist stets um 2 größer als die Abszisse x der Punkte A_n.

    (a)
    - Zeichne die beiden Geraden g_1 und g_2 und deren Schnittpunkt S in das Koordinatensystem.
    - Zeichne für $x = 5$ den Kreis k_1 mit seinem Durchmesser $[A_1B_1]$ und für $x = -3$ den Kreis k_2 mit seinem Durchmesser $[A_2B_2]$ ein.



(b) Zeige, dass $B_n(x+2 \mid -0,5x+1)$ gilt.

(c) Begründe auf verschiedene Weise, dass der Durchmesser $[A_2B_2]$ auf der Geraden g_2 senkrecht steht.

(d) Es gibt einen Kreis k_3, der die Gerade g_1 berührt. Berechne den zugehörigen x-Wert.

(e) Berechne die Gleichung der Ortslinie der Mittelpunkte M_n.

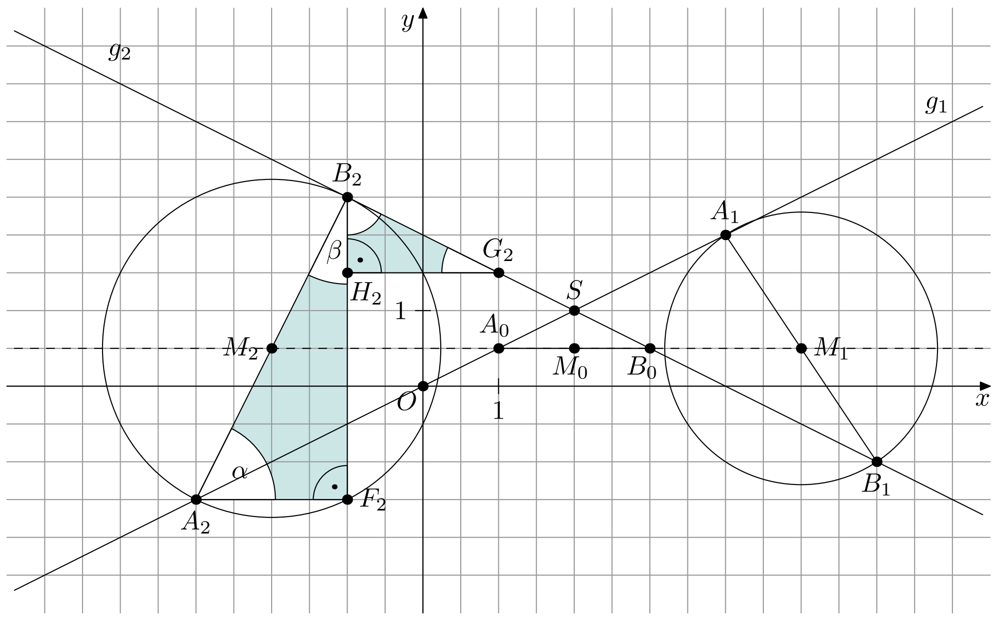
(f) Zeige: Für die Länge der Durchmesser $[A_nB_n]$ gilt in Abhängigkeit von x:
$$\overline{A_nB_n}(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}\ \text{cm}$$

(g) Fritz behauptet: „Wenn die Kreisfläche minimal wird, dann liegt der betreffende Kreismittelpunkt dem Geradenschnittpunkt S am nächsten.“ Begründe auf verschiedene Weise, dass Fritz Recht hat.

(h) Unter allen Kreisen k_n gibt es zwei, welche einen Flächeninhalt von $17\,\pi\,\text{cm}^2$ aufweisen. Berechne die zugehörigen Abszissenwerte.

(i) Unter allen Kreisen k_n gibt es zwei, welche die y-Achse berühren. Berechne die zugehörigen x-Werte.

Lösung: (a)



(b) Es gilt: $B_n(x+2 \mid -0,5 \cdot (x+2)+2) \quad \Rightarrow \quad B_n(x+2 \mid -0,5x+1)$

(c) 1. Möglichkeit: aus der Zeichnung
Im rechtwinkligen Dreieck $A_2F_2B_2$ gilt: $\alpha + \beta = 90°$. (*)
Die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks $A_2F_2B_2$ sind jeweils doppelt so lang wie die des rechtwinkligen Dreiecks $H_2G_2B_2$. Also sind diese beiden Dreiecke zueinander ähnlich.
Also gilt: $\sphericalangle H_2B_2G_2 = \alpha$ und $\sphericalangle B_2G_2H_2 = \beta$.
Wegen (*) muss der Punkt B_2 der Scheitel eines rechten Winkels sein.
Also folgt: $[A_2B_2] \perp g_1$.

2. Möglichkeit: rechnerisch
Der Steigungsfaktor der Strecke $[A_2B_2]$ müsste so groß wie der negative Kehrwert des Steigungsfaktors $-0,5$ der Geraden g_2 sein. Er müsste also den Wert 2 besitzen:
$A_2(-3 \mid -0,5 \cdot (-3)+1) = (-3 \mid -1,5)$ und
$B_2(-3+2 \mid -0,5 \cdot (-3)+1) = (-1 \mid 2,5)$
Also gilt:
$m_{[A_2B_2]} = \dfrac{2,5+1,5}{-1+3} = 2$, was zu zeigen war. Also folgt: $[A_2B_2] \perp g_1$.

(d) Einer der Durchmesser $[A_nB_n]$ muss auf der Geraden g_1 senkrecht stehen, wenn der betreffende Kreis die Gerade g_1 berühren soll. Der Wert eines der Steigungsfaktoren der Durchmesser $[A_nB_n]$ muss also der negative Kehrwert des Steigungsfaktors der Geraden g_1 sein. Somit ergibt sich :

$m_{[A_nB_n]} = \dfrac{(-0,5x+1)-0,5x}{(x+2)-x} = \dfrac{-x+1}{2}$
Also: $\dfrac{-x+1}{2} = -2 \quad \Rightarrow \quad x = 5$

(e) Es gilt: $M_n\left(\dfrac{(x+2)+x}{2} \mid \dfrac{(-0,5x+1)+0,5x}{2}\right) = (x+1 \mid 0,5)$

Der y-Wert ist also immer konstant $0,5$. Also heißt die Gleichung der Ortslinie der Mittelpunkte $M_n : y = 0,5$. Die Kreismittelpunkte liegen also auf einer Parallelen zur x-Achse im Abstand von $0,5\,\text{cm}$, die durch den I. und II. Quadranten verläuft.

(f) $\overline{A_nB_n}(x)^2 = (x+2-x)^2 + (-0,5x+1-0,5x)\,\text{cm}^2$
$\Rightarrow \quad \overline{A_nB_n}(x)^2 = 2^2 + (1-x)^2\,\text{cm}^2$
$\Rightarrow \quad \overline{A_nB_n}(x) = \sqrt{x^2-2x+5}\ \text{cm}$

(g) 1. Möglichkeit: mit Hilfe der Zeichnung
Die Kreisfläche wird minmal, denn der betreffende Kreisdurchmesser am kleinsten ist. Das Ergebnis der Aufgabe (f) weist darauf hin, dass es solch einen kürzesten Durchmesser $[A_0B_0]$ gibt.
Die Kreisdurchmesser sind die Hypotenusen der begleitenden rechtwinkligen Dreiecke (siehe z.B. das Dreieck $A_2F_2B_2$ in der Zeichnung). Die waagrechte Kathete dieser Dreiecke ist stets $2\,\text{cm}$ lang.
Kürzer als $2\,\text{cm}$ kann der Kreisdurchmesser also nicht werden. Um dieser Länge möglichst nahe zu kommen, muss der Durchmesser daher möglichst waagrecht liegen.
Alle Punkte A_n auf der Geraden g_1, die rechts vom Punkt S liegen, erzeugen schräg abwärts gerichtete Kreisdurchmesser, die mit wachsenden Abszissenwert x eher steiler als flacher verlaufen.
Ebenso geht es mit Durchmessern $[A_nB_n]$, deren Endpunkte beide links von S liegen: Sie lassen sich nicht in die Waagrechte zwingen.
Also kann der gesuchte waagrechte Durchmesser nur dort gefunden werden, wo ein Endpunkt links und der andere rechts von S liegt. Aus Symmetriegründen muss dann der betreffende Endpunkt A_0 $1\,\text{cm}$ links und der zugehörige Punkt B_0 $1\,\text{cm}$ rechts von S liegen: $A_0(1 \mid 0,5)$ und $B_0(3 \mid 0,5)$. Die Strecke $[A_0B_0]$ ist dann $2\,\text{cm}$ lang und stellt das zur Strecke entartete begleitende Dreieck dar. Der Streckenmittelpunkt $M_0(2 \mid 0,5)$ kommt dann dem Punkt S am nächsten. Fritz hat Recht. Betrachte auch die Zeichnung.

2. Möglichkeit: durch Rechnung
$\sqrt{x^2-2x+5} = \sqrt{(x-1)^2+4}$
$x = 1$ liefert den minimalen Durchmesser $d_{min} = 2\,\text{cm}$ und damit auch die minimale Kreisfläche.
Die Koordinaten des zugehörigen Mittelpunktes M_0 sind nach Aufgabe (e): $(2 \mid 0,5)$.
Aus der Zeichnung kann man die Koordinaten des Geradenschnittpunktes S ablesen: $(2 \mid 1)$, was du durch Einsetzen in beide Geradengleichungen bestätigen könntest.
Also stellt die Strecke $[M_0S]$ die kürzeste Entfernung zwischen der Ortslinie und dem Punkt S dar. Fritz hat Recht.

(h) $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-2x+5}\right)^2 \pi = 17\,\pi \quad \Rightarrow \quad x^2-2x+5 = 4\cdot 17$

$\Rightarrow \quad x^2-2x-63 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow x_1 = 9$ und $x_2 = -7$

(i) Der Abstand der betreffenden Mittelpunkte zur y-Achse, also ihr Abszissenwert $x+1$ muss genauso groß wie der zugehörige Kreisradius sein:

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2-2x+5}\right) = x+1 \qquad |^2$$

$$x^2-2x+5 = 4x^2+8x+4 \quad \Rightarrow \quad 3x^2+10x-1=0$$

$$\Rightarrow \quad D^* = 112 \text{ und } \sqrt{D^*} \approx 10,58$$

$$\Rightarrow \quad x_{1;2} \approx \frac{-10 \pm 10,58}{6} \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx -3,43 \text{ und } x_2 \approx -0,10.$$

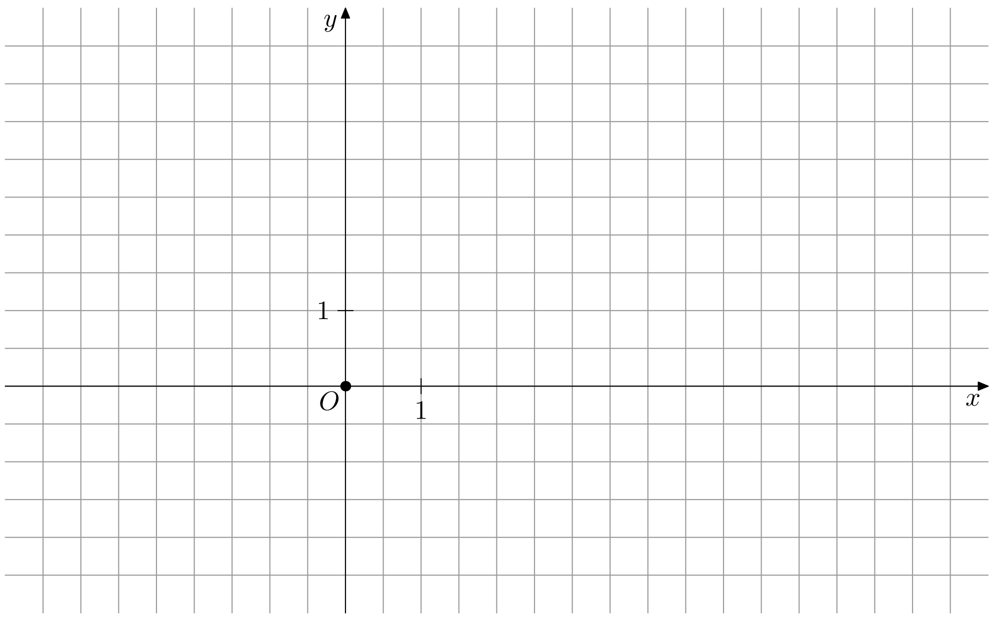
Für beide Abszissenwerte existieren die betreffenden Durchmesser.
Anmerkung: Für diese Aufgabe gibt es die GEONExT-Datei $09eh118\_l1.gxt$.

20. Gegeben sind die beiden Geraden g_1 und g_2 durch die Gleichungen

$$g_1: y = -\frac{1}{3}x + 2,5 \text{ und } g_2: y = \frac{2}{3}x - 0,5.$$

Punkte $A_n(x \mid -\frac{1}{3}x+2,5)$ auf der Geraden g_1 erzeugen zusammen mit Punkten C_n auf der Geraden g_2 Rauten $A_nB_nC_nD_n$ mit dem jeweiligen Mittelpunkt M_n.
Die Punkte A_n und C_n haben dabei stets den gleichen Abszissenwert und die Diagonalen $[B_nD_n]$ sind stets 4 cm lang.

(a)
- Zeichne die beiden Geraden g_1 und g_2 und deren Schnittpunkt S in das Koordinatensystem.
- Zeichne für $x = 6$ die Raute $A_1B_1C_1D_1$ und für $x = -1,5$ die Raute $A_2B_2C_2D_2$ ein.



(b) Für welche Belegungen von x erhält man solche Rauten $A_nB_nC_nD_n$?

(c)
- Zeige: Für die Diagonalenlängen $\overline{A_nC_n}$ erhält man in Abhängigkeit von x:
$$\overline{A_nC_n}(x) = \mid x - 3 \mid \text{ cm}.$$
- Bestätige mit diesem Ergebnis das Ergebnis der Aufgabe (b).

(d) Berechne x so, dass die entsprechenden Rauten Quadrate sind.

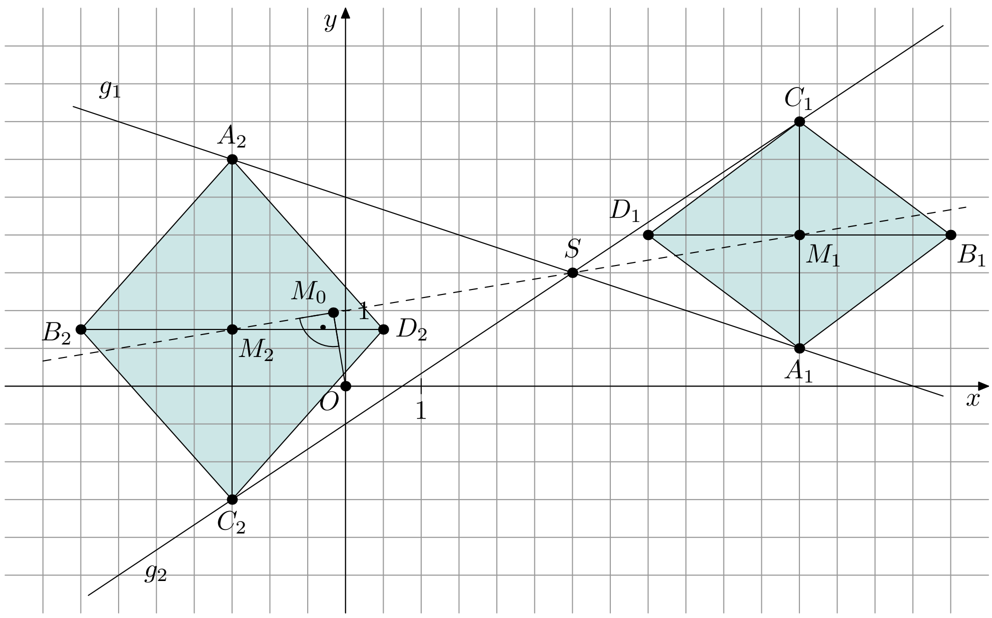
(e) Unter allen Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt es solche, deren Flächeninhalt $20\,\text{cm}^2$ beträgt. Berechne die zugehörigen x-Werte.

(f) Berechne die Koordinaten der Mittelpunkte M_n in Abhängigkeit von x.
$$\left[\text{ Ergebnis: } M_n\left(x \mid \frac{1}{6}x + 1\right)\right].$$

(g) Unter allen Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt es eine Raute $A_0B_0C_0D_0$, deren Mittelpunkt M_0 dem Koordinatenursprung am nächsten liegt. Berechne den zugehörigen x-Wert und die minimale Distanz.

(h) Unter allen Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt es die Raute $A_3B_3C_3D_3$, deren Diagonale $[B_3D_3]$ auf der x-Achse liegt. Berechne die Koordinaten der Eckpunkte dieser Raute auf verschiedene Weise.

Lösung: (a)



(b) Wenn sich die Rauten $A_nB_nC_nD_n$ auf den Geradenschnittpunkt S zubewegen, dann werden die Diagonalen $[A_nC_n]$ immer kürzer. Im Schnittpunkt S selbst entartet die betreffende „Raute“ zur Strecke.
Aus der Zeichnung ergibt sich: $S(3 \mid 1,5)$.
Rechnung: $g_1 \cap g_2 : -\frac{1}{3}x + 2,5 = \frac{2}{3}x - 0,5 \quad \Rightarrow \quad x = 3$.
Also gibt es nur Rauten für $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

(c)
- Es gilt: $C_n(x \mid \frac{2}{3}x - 0,5)$. Wir rechnen im Folgenden meist nur mit Maßzahlen.
  $\overline{A_nC_n}(x) = \sqrt{(x-x)^2 + \left[(\frac{2}{3}x - 0,5) - (-\frac{1}{3}x + 2,5)\right]^2} = \sqrt{(x-3)^2}$
  $\Rightarrow \quad \overline{A_nC_n}(x) = \mid x - 3 \mid$ cm ... und nicht nur $(x-3)$ cm!
- Für $x = 3$ wird die Diagonalenlänge 0. Also gibt es für diesen x-Wert keine Raute.

(d) Wenn eine der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ zum Quadrat werden soll, müssen dessen Diagonalen gleich lang sein.
Also: $\mid x - 3 \mid = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 = 4 \vee x - 3 = -4 \quad \Rightarrow \quad L = \{-1; 7)\}$

(e) Für den Flächeninhalt A der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gilt in Abhängigkeit von x:
$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \mid x - 3 \mid \text{ cm}^2 = 2 \cdot \mid x - 3 \mid \text{ cm}^2$
Also: $2 \cdot \mid x - 3 \mid = 20 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 = 10 \vee x - 3 = -10 \quad \Rightarrow \quad L = \{-7; 13\}$

(f) $M_n \left(\frac{x + x}{2} \mid \frac{(-\frac{1}{3}x + 2,5) + \frac{2}{3}x - 0,5)}{2} \right) = (x \mid \frac{1}{6}x + 1)$

(g) Für die Entfernungen $\overline{OM_n}$ gilt in Anhängigkeit von x:

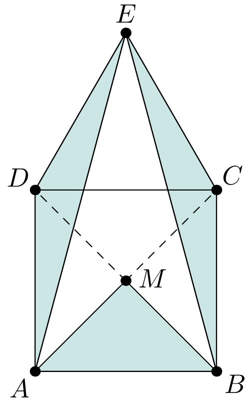
$$
\begin{array}{rcll}
\overline{OM_n}(x)^2 & = & x^2 + (\frac{1}{6}x+1)^2 & \text{cm}^2 \\
& = & x^2 + \frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{3}x + 1 & \text{cm}^2 \\
\overline{OM_n}(x)^2 & = & \frac{37}{36}x^2 + \frac{1}{3}x + 1 & \text{cm}^2 \\
& = & \dfrac{37}{36}\left[x^2 + \dfrac{12}{37}x + \left(\dfrac{6}{37}\right)^2 - \dfrac{36}{1369} + \dfrac{36}{37}\right] & \text{cm}^2 \\
& = & \dfrac{37}{36}\left[\left(x + \dfrac{6}{37}\right)^2 + \dfrac{-36+1332}{1369}\right] & \text{cm}^2 \\
\overline{OM_n}(x) & = & \sqrt{\dfrac{37}{36}\left(x + \dfrac{6}{37}\right)^2 + \dfrac{36}{37}} & \text{cm}
\end{array}
$$

$x = -\frac{36}{37} \approx -0,16$ liefert $\overline{OM_0} = \sqrt{\dfrac{36}{37}}$ cm $\approx 0,97$ cm. Das ist die kürzeste Entfernung.

Amerkung: Es gibt zu dieser Aufgabe eine GEONExT-Datei: $09eh119.gxt$

(h) 1. Möglichkeit:
Wenn die Diagonale $[B_3D_3]$ auf der x-Achse liegt, dann liegt auch der zugehörige Mittelpunkt M_3 auf ihr. Dann muss dessen y-Wert 0 sein:
$\frac{1}{6}x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -6 \quad \Rightarrow A_3(-6 \mid -\frac{1}{3} \cdot (-6) + 2,5) = (-6 \mid 4,5)$
Weiter folgt: $C_3(-6 \mid \frac{2}{3} \cdot (-6) - 0,5) = (-6 \mid -4,5)$
Der Punkt B_3 liegt 2 LE weiter links von M_3 auf der x-Achse: $B_3(-8 \mid 0)$.
Der Punkt C_3 liegt 2 LE weiter rechts von M_3 auf der x-Achse: $C_3(-4 \mid 0)$.
2. Möglichkeit: Wie du in der 1. Möglichkeit gesehen hast, muss die x-Achse die Symmetrieachse der Raute $A_3B_3C_3D_3$ sein, denn die y-Werte der Punkte A_3 und C_3 unterscheiden sich lediglich durch das Vorzeichen. Also kannst du jetzt z.B. ansetzen: $y_{C_n} = -y_{A_n}$.
$\frac{2}{3}x - 0,5 = -(-\frac{1}{3}x + 2,5) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}x - 0,5 = \frac{1}{3}x - 2,5 \quad \Leftrightarrow \quad x = -6$
Der Rest ist schon in der 1. Möglichkeit dargestellt.

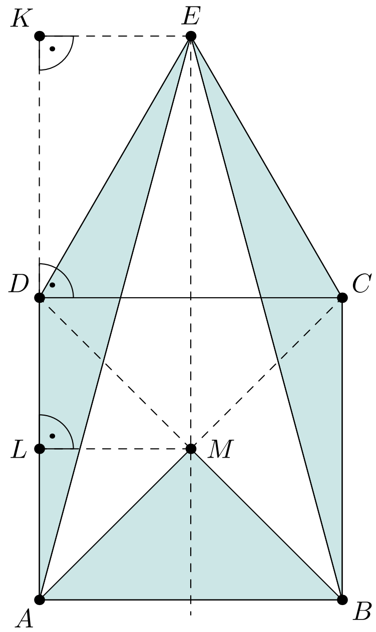
21. An das Quadrat $ABCD$ ist das gleichseitige Dreieck DCE angefügt worden:



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

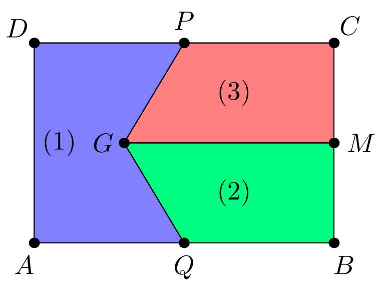
(b) Begründe: Die getönten Dreiecke besitzen den gleichen Flächeninhalt.

Lösung: (a)



(b) In der Figur ist die Gerade EM die Symmetrieachse. Deshalb sind die beiden Dreiecke AED und BCE kongruent, insbesondere also flächengleich.
Der Flächeninhalt der Dreiecke ABM und AMD ist ebenfalls gleich. Die Dreiecke AMD und AED besitzen dieselbe Grundseite $[AD]$. Außerdem sind die zugehörigen Höhen $[LM]$ bzw. $[KE]$ gleich lang. Also besitzen die beiden Dreiecke AMD und AED und damit auch das Dreieck ABM den gleichen Flächeninhalt, nämlich 25% der Quadratfläche.

22.



Das Königreich Al'Gebr besteht aus drei gleich großen Provinzen. Das Bild seiner Nationalflagge ist oben dargestellt.
(1): Küstenregion, (2): Südregion und (3): Nordregion. Die Punkte P, Q und M sind Seitenmittelpunkte.

Der König von Al'Gebr hat den Eindruck, dass die drei Provinzen im Flaggenbild nicht gleich groß dargestellt sind. Er möchte das geändert haben.

(a) • Zeichne die Flagge für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = \overline{GM} = 4\,\text{cm}$.

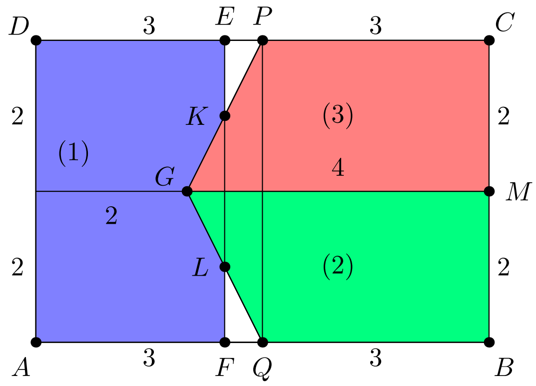
• Begründe, dass der König mit seinem Eindruck in diesem Fall Recht hätte.

(b) Er beauftragt seine Rechenmeister und Designer, den Punkt G bei sonst unveränderlicher Aufteilung so zu legen, dass die drei farbigen Flächen im Flaggenbild gleich groß sind.

• Es gilt $\overline{GM} = x\,\text{cm}$. Zeige: Für den Flächeninhalt der Südregion gilt: $A_2 = (x+3)\,\text{cm}^2$

• Berechne x so, dass alle drei Teilflächen gleich groß sind.
Wie sieht die Flagge dann aus?

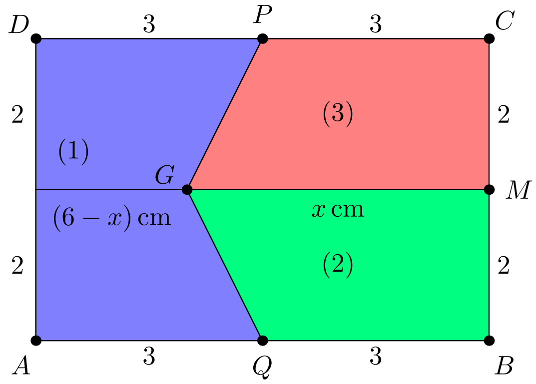
Lösung: (a) • Beschrifte deine Zeichung mit Maßzahlen:



• 1. Möglichkeit: durch Rechnung
Das grüne und das rote Trapez sind kongruent.
Rote Fläche $A_3 = 0,5 \cdot (4+3) \cdot 2\,\text{cm}^2 = 7\,\text{cm}^2$
Die blaue Fläche (1) lässt sich in zwei kongruente Trapeze zerlegen:
$A_1 = [0,5 \cdot (2+3) \cdot 2] \cdot 2\,\text{cm}^2 = 10\,\text{cm}^2 > A_3$
Der Eindruck hat den König nicht getäuscht.

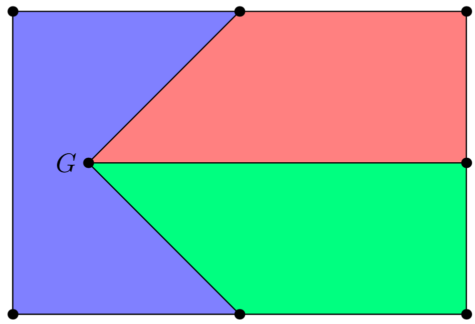
2. Möglichkeit: anschaulich
Die Hilfslinie $[EF]$ verläuft durch die Punkte K und L, die die Mittelpunkte der Strecken $[GP]$ und $[GQ]$ sind.
Dann besitzt das Fünfeck $QBCPG$ den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck $FBCE$. Ebenso besitzt dann das Fünfeck $AQGPD$ den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck $AFED$. Die blaue Fläche nimmt also knapp die Hälfte der Flagge ein. Dann kann dies für die rote und die grüne Fläche der Flagge nicht auch noch gelten. Der König hat sich nicht getäuscht.

(b) •

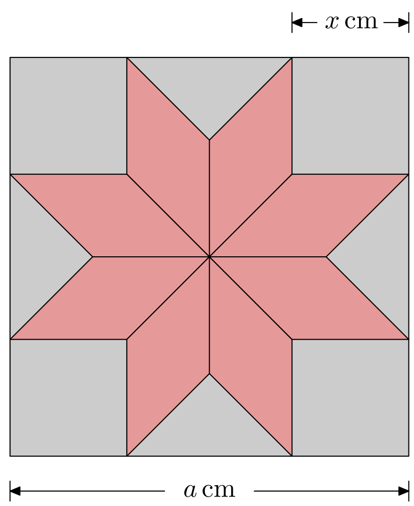


- Für die trapezförmige Südregion gilt:
  $A_2 = 0.5 \cdot (x+3) \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 = (x+3)\,\mathrm{cm}^2 = A_3$. Die blaue Fläche lässt sich in zwei kongruente Trapeze zerlegen. Somit muss $A_2 = A_1$ gelten: $x+3 = 0{,}5 \cdot [3+(6-x)] \cdot 2 \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x+3 = 18-2x \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$

  Die Flagge sieht dann so aus:



23.

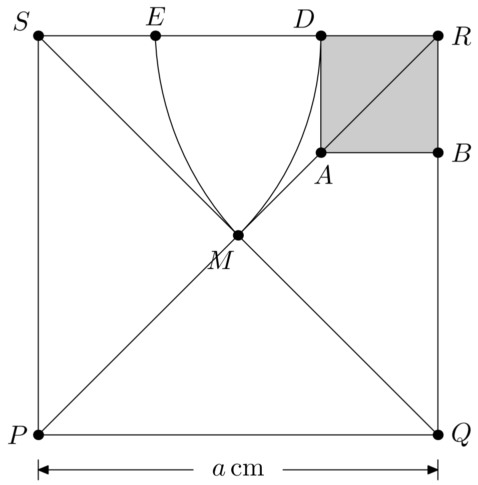


Im Baumarkt werden quadratische Fliesen wie oben abgebildet angeboten.
Das Quadrat mit der Seitenlänge a cm ist aus jeweils kongruenten Rauten, Dreiecken und kleineren Quadraten mit der Seitenlänge x cm zusammengefügt.

(a) Begründe: Die Dreiecke müssen gleichschenklig-rechtwinklig sein.

(b)
- Zeige, dass $x = \dfrac{a}{2+\sqrt{2}}$ gilt.
- Zeige, dass $x = a - \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$ gilt.

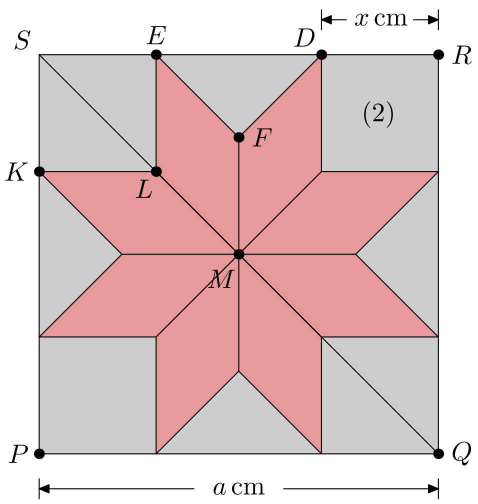
(c)



Die Punkte R und S sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen. Begründe, dass das so konstruierte Quadrat $ABRD$ eines der kleinen Quadrate in der Fliese darstellt.

(d) Konstruiere die Figur für $a = 8$ cm.

Lösung: (a)



Aus Symmetriegründen ist das Dreieck EFD gleichschenklig.
Die Diagonale $[QS]$ im Quadrat $PQRS$ ist ebenfalls Diagonale im Quadrat $KLES$.

$\Rightarrow \quad \sphericalangle ELS = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle MLE = 135^\circ \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle LEF = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle FED = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

Im Dreieck EFD haben damit beide Basiswinkel das Maß 45°, also ist dieses Dreieck gleichschenklig-rechtwinklig.

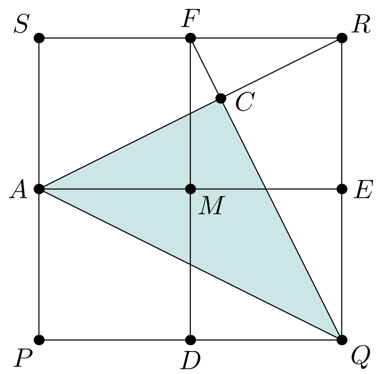
(b) • Sämtliche Rauten besitzen die gleiche Seitenlänge $x\,\text{cm}$.
Das Dreieck EFD ist ein halbes Quadrat mit der Seitenlänge $x\,\text{cm}$ und der Diagonalenlänge $\overline{ED} = x\sqrt{2}\,\text{cm}$.
Nun folgt: $\overline{RS} = a\,\text{cm} = (x + x\sqrt{2} + x)\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad a = x \cdot (2 + \sqrt{2})$
$\Rightarrow \quad x = \dfrac{a}{2+\sqrt{2}}$

• $x = \dfrac{a}{2+\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{a \cdot (2-\sqrt{2})}{2} = a - \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$

(c) Es gilt $\overline{MS} = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}\,\text{cm} = \overline{SD}$
$\Rightarrow \quad \overline{DR} = \overline{SR} - \overline{SD} = (a - \dfrac{a}{2}\sqrt{2})\,\text{cm}$, was zu zeigen war.

(d) Klar.

24.



Das Quadrat $PQRS$ wird durch die Strecken $[AE]$ und $[DF]$ in vier gleiche Quadrate aufgeteilt.

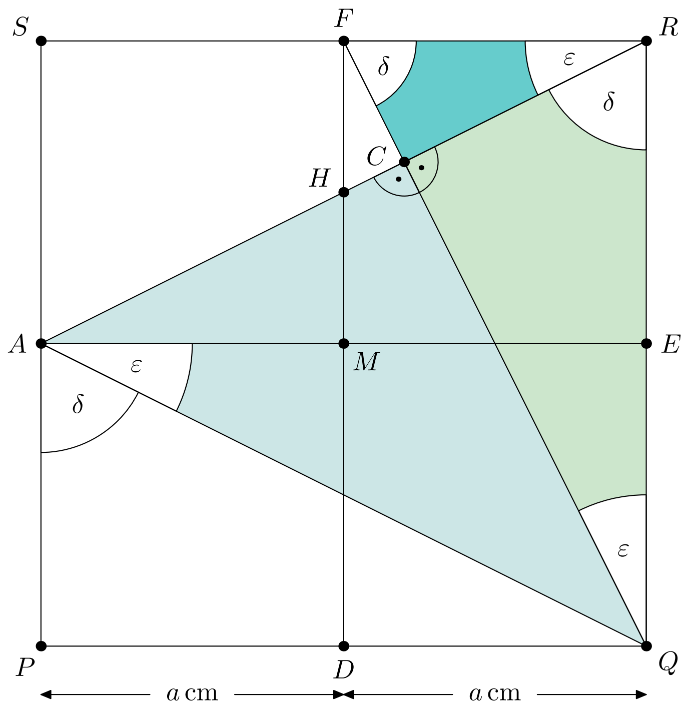
(a) • Zeichne die Figur für $\overline{PQ} = 8\,\text{cm}$.
• Begründe: Das Dreieck AQC ist rechtwinklig.

(b) Es sei jetzt $\overline{PQ} = 2a\,\text{cm}$.
Wie viel Prozent der Fläche des Quadrates $PQRS$ wird vom Dreieck AQC bedeckt? Vergleiche dazu die Flächeninhalte der Dreiecke FCR und CQR.

(c) In welchem Verhältnis teilt der Punkt C die Strecke $[AR]$? Zeichne dazu im Dreieck ARS eine geeignete Hilfslinie ein.

(d) In welchem Verhältnis teilt der Punkt C die Strecke $[QF]$?

Lösung: (a) •



- Am Punkt A erkennst du: $\varepsilon + \delta = 90°$.
  Die Rechtecke $APQE$, $AERS$ und $DQRF$ sind kongruent.
  $\Rightarrow \quad \sphericalangle QAE = \sphericalangle FQR = \sphericalangle SRA = \varepsilon$
  und $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle ARE = \sphericalangle QFR = \delta$.
  Wegen $\varepsilon + \delta = 90°$ und der Innenwinkelsumme von $180°$ im Dreieck CQR muss $\sphericalangle QCR = 90°$ gelten. Also ist das Dreieck AQC rechtwinklig.

(b) Die Dreiecke CQR und FCR sind zueinander ähnlich. Die Hypotenuse $[QR]$ im Dreieck QRC ist doppelt so lang wie die die Hypotenuse $[FR]$ im Dreieck FCR. Also ist der Flächeninhalt des Dreiecks QRC viermal ($2^2 = 4$) so groß wie der des Dreiecks FCR.
Damit ist der Flächeninhalt des Dreiecks FQR fünfmal so groß wie der des Dreiecks FCR. Weil die Dreiecke FQR und ARS kongruent sind, ist der Flächeninhalt des Dreiecks ARS auch fünfmal so groß wie der des Dreiecks FCR.
Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecks FCR kurz mit „A_Δ“.
Dann gilt: $A_{PQRS} = 20 \cdot A_\Delta$ und
$A_{\Delta AQC} = 20 \cdot A_\Delta - 10 \cdot A_\Delta - 4 \cdot A_\Delta = 6 \cdot A_\Delta$.

$$\frac{A_{\Delta AQC}}{A_{PQRS}} = \frac{6 \cdot A_\Delta}{20 \cdot A_\Delta} = \frac{3}{10} = 30\%.$$

Anmerkung

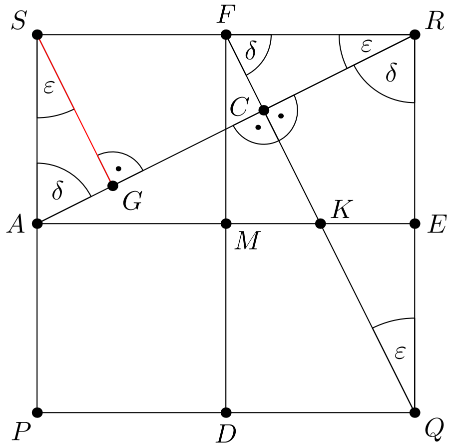
Die Aufgabe (b) ist auch ohne den Vergleich der Flächen der beiden Dreiecke FCR und CQR lösbar. Dann brauchst du jedoch den Satz des PYTHAGORAS und die Flächenformel für rechtwinklige Dreiecke. Dazu ein paar Stichpunkte:

$$\overline{FQ} = a \cdot \sqrt{5}, \quad \overline{CR} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \overline{CQ} = \frac{4a}{\sqrt{5}}\,.$$

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta CQR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4a}{\sqrt{5}} = \frac{4a^2}{5}\,.$$

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta AQC} = 4a^2 - 2a^2 - \frac{4a^2}{5} = \frac{6}{5} \cdot a^2 \text{ usw.}$$

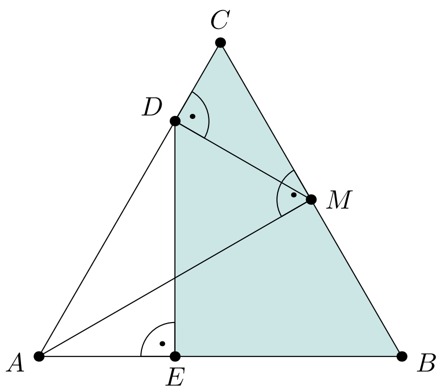
(c)



Die gesuchte Hilfslinie ist das Lot $[SG]$ vom Eckpunkt S auf die Diagonale $[AR]$. Die rechtwinkligen Dreiecke ARS, SGR und FCR sind zueinander ähnlich. Eine Kathete ist jeweils doppelt so lang wie die andere.
Weil der Punkt F die Hypotenuse $[SR]$ halbiert, ist der Punkt C der Mittelpunkt der Kathete $[GR]$ im Dreieck SGR.
Die Dreiecke AGS und FCR sind kongruent: Ihre beiden Hypotenusen sind gleich lang und sie stimmen in allen Innenwinkelmaßen paarweise überein.
Es gilt also: $\overline{GC} = \overline{GC} = 2 \cdot \overline{AG}$.
$\Rightarrow \quad \overline{CA} = 3 \cdot \overline{AG}$ und $\overline{CR} = 2 \cdot \overline{AG}$.
Also folgt: $\overline{CR} : \overline{CA} = 2 : 3\,.$

(d) Auf der Strecke $[QF]$ spielt der Punkt C die gleiche Rolle wie der Punkt G auf der Strecke $[AR]$.
Also folgt: $\overline{CF} : \overline{CQ} = 1 : 4\,.$

25.

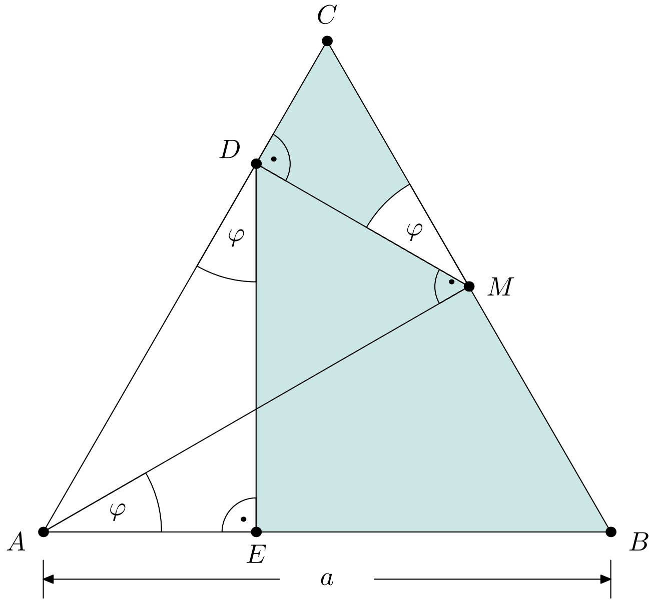


Das Grundstück ABC hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit einer Seitenlänge $a = 75\,\mathrm{m}$. Die Grundstücksfläche $BCDE$ ist ein Rasenspielfeld. Der Rest ist asphaltiert. Es gilt: $\overline{MB} = \overline{MC}$.

(a) Zeichne die Figur mit den Punkten E, M und D im Maßstab $1 : 1000$.

(b) Berechne den Anteil der Rasenfläche am Grundstück ABC in Prozent.

Lösung: (a)



(b) **In einem gleichseitigen Dreieck hat jeder Innenwinkel das Maß** $60°$**.**
Das bedeutet hier: $\varphi = 30°$. Somit sind die Dreiecke ABM, DMC und AED **halbe gleichseitige Dreiecke**.

$\Rightarrow \quad \overline{BM} = \overline{MC} = 0.5a$

$\Rightarrow \quad \overline{DC} = 0,5 \cdot \overline{MC} = 0.5 \cdot 0,5a = 0,25a$

$\Rightarrow \quad \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{DC} = a - 0,25a = 0,75a$

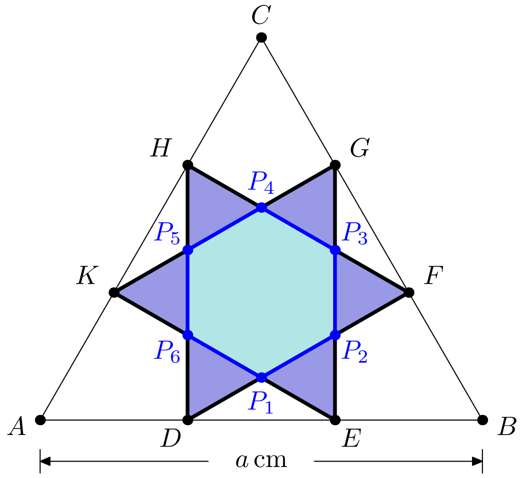
Weiter gilt: $\Delta AED \sim \Delta ABM$. Streckungsfaktor $k = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{0,75a}{a} = 0,75$.

Es ist hier also gleichgültig, wie lang die Seite des Grundstückes ist.

Nun gilt: $A_{\Delta AED} = 0,75^2 \cdot A_{\Delta ABM} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{A_{\Delta AED}}{A_{\Delta ABC}} = \dfrac{1}{2} \cdot 0,5625 = 28,125\%$.

Das ist der prozentuale Anteil der asphaltierten Fläche an der Gesamtfläche (100%). Die Rasenfläche nimmt also knapp 72% des Grundstückes ABC ein.

26.



Das Dreieck ABC ist gleichseitig mit der Seitenlänge a cm. Die Punkte D, E, F, G, H und K dritteln jeweils die Dreiecksseite, auf der sie liegen.

(a) Zeichne die Figur für $a = 7,5$.

(b) Begründe: Die Punkte D, E, F, G, H und K sind Scheitel von rechten Winkeln. Zeichne dazu den Mittelpunkt M der Basis $[AB]$ sowie die Gerade CM ein und vergleiche die Teilverhältnisse auf den Strecken $[AM]$ und $[AC]$.

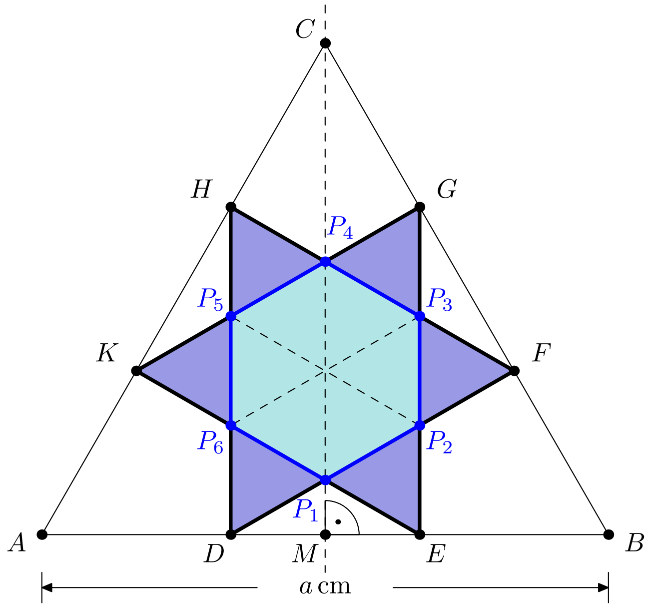
(c) Berechne das Verhältnis k_1 der Flächeninhalte des sechszackigen Sterns und des Dreiecks ABC.

$$[\text{ Ergebnis: } k_1 = \frac{4}{9}\ ]$$

(d) Begründe: Das Verhältnis k_2 der Flächeninhalte des inneren Sechsecks $P_1 \ldots P_6$ und des Dreiecks ABC ist halb so groß wie k_1. Zeichne dazu im Sechseck geeignete Hilfslinien ein.

(e)
- Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, das denselben Flächeninhalt aufweist wie der sechszackige Stern.
- Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, das denselben Flächeninhalt aufweist wie das innere Sechseck $P_1 \ldots P_6$.

Lösung: (a)



(b) Die Gerade $[CM]$ ist eine Symmetrieachse des Dreiecks ABC, die auf der Basis $[AB]$ senkrecht steht.
Nun gilt $\overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$ und $\overline{DM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD}$, weil ja z.B. der Punkt D die Strecke $[AB]$ drittelt.
Also teilt der Punkt D die Strecke $[AM]$ im Verhältnis $2 : 1$. Dasselbe Streckenverhältnis erzeugt aber auch der Punkt H auf der Strecke $[AC]$. Also sind die beiden Dreiecke AMC und ADH zueinander ähnlich.
$\Rightarrow \quad [DH] \parallel [MC] \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle HDA = 90°$.
Aus Symmetriegründen sind die Punkte E, F, G, H und K ebenfalls Scheitel von rechten Winkeln.

(c) Wir rechnen meist ohne die Einheiten „cm“ bzw. „cm²“.
Das Dreieck DBF ist rechtwinklig: $\overline{DF}^{\,2} = \left(\frac{2}{3} \cdot a\right)^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot a\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot a^2$.
Die Dreiecke DBF, HFC und ADH sind kongruent. $\Rightarrow$ $\overline{DF} = \overline{FH} = \overline{HD}$.
Die Dreiecke EBG, KGC und AEK sind kongruent. $\Rightarrow$ $\overline{EG} = \overline{GK} = \overline{KE}$.
Also sind die beiden Dreiecke DFH und EGK gleichseitig. Die sechs kleinen Dreiecke über den Sechsecksseiten $\overline{P_1P_2} \ldots \overline{P_6P_1}$ sind ebenfalls gleichseitig und kongruent. Das Sechseck $P_1 \ldots P_6$ ist damit regelmäßig.

$$A_{\Delta DFH} = \frac{1}{4} \cdot \overline{DF}^{\,2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2.$$

Weil z.B. $\overline{P_1P_2} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DF}$ gilt, folgt:

$$A_{\Delta EP_2P_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot A_{\Delta DFH} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{108} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2.$$

Der Stern besteht z.B. aus den Dreieck DFH, an das drei kleine Dreiecke vom Typ EP_2P_1 angefügt worden sind:

$$A_{\text{Stern}} = \left(\frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{108} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\right) = \frac{1}{9} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2$$

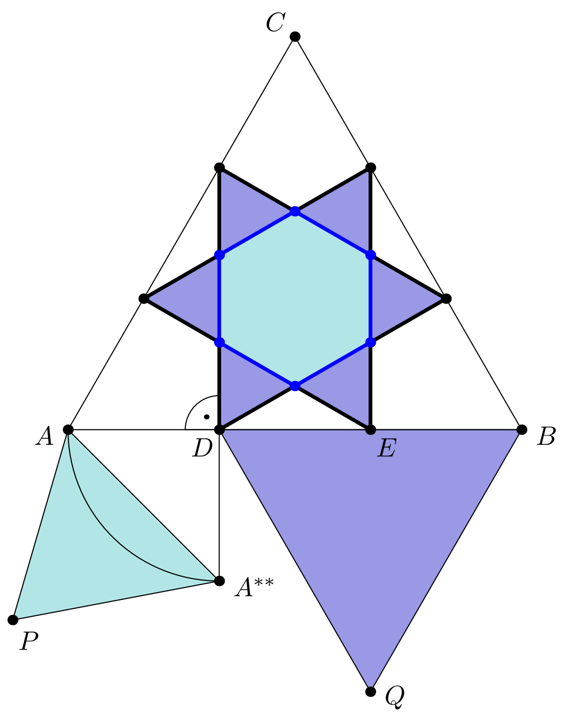
$$k_1 = \frac{A_{\text{Stern}}}{A_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1}{9} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\right) : \left(\frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\right) = \frac{4}{9}$$

(d) Die gesuchten Hilfslinen sind die Diagonalen des Sechsecks. Durch sie wird dieses Sechseck in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegt.
Wenn Du diese sechs kongruenten gleichseitigen Dreieck nach außen klappst, hast du den Stern erzeugt. Also besteht der Stern insgesamt aus 12 solcher Dreiecke. Damit ist der Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks $P_1 \dots P_6$ im Inneren halb so groß wie der des Sterns:

$$k_2 = 0,5 \cdot k_1 = \frac{2}{9}.$$

Anmerkung: Eine Begründung muss also nicht unbedingt rechnerisch erfolgen. Trotzdem kannst du auch wieder das Verhältnis als Bruch von Flächeninhalten herleiten. Das ist aber umständlicher.

(e)



- Für das gesuchte Dreieck „Δ^*“ mit der Seitenlänge a^* cm gilt:

$$A_{\Delta^*} = A_{\text{Stern}} = \frac{4}{9} \cdot A_{\Delta ABC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot A_{\Delta ABC}$$

$$\Rightarrow \quad a^* = \frac{2}{3} \cdot a.$$

Errichte also z.B. unter der Strecke [DB] das gesuchte Dreieck DQB mit der Seitenlänge $\overline{DB} = a^*$. (Siehe Zeichnung oben.)

- Für das gesuchte Dreieck „Δ^{**}“ mit der Seitenlänge a^{**} cm gilt:

$$A_{\Delta^{**}} = A_{\text{Sechseck}} = \frac{2}{9} \cdot A_{\Delta ABC} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot A_{\Delta ABC}$$

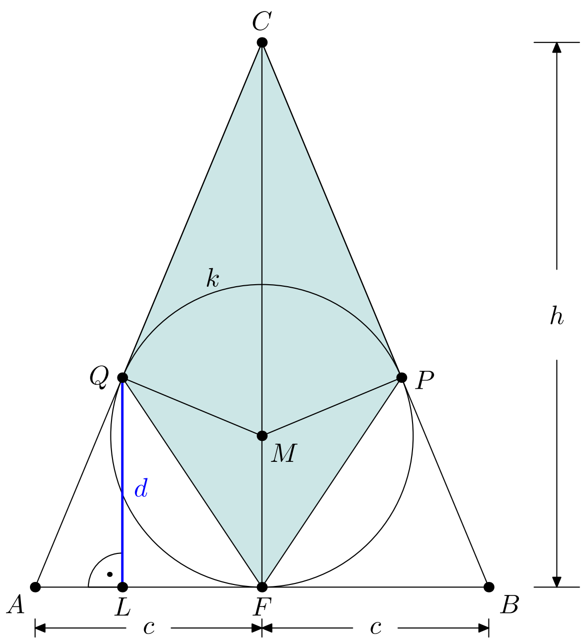
$$\Rightarrow \quad a^{**} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a = \left(\frac{1}{3} \cdot a\right)\sqrt{2}.$$

Der Term $\left(\frac{1}{3} \cdot a\right)\sqrt{2}$ lässt sich als Diagonalenlänge eine Quadrates mit der Seitenlänge $\frac{1}{3} \cdot a$ deuten.

In der Zeichnung oben ist das Dreieck $AA^{**}D$ ein halbes Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AD} = \frac{1}{3} \cdot a$. Damit hat die Diagonale [AA^{**}] die Länge $(\frac{1}{3} \cdot a)\sqrt{2}\,\text{cm} = a^{**}\,\text{cm}$. Also ist das Dreieck APA^{**} das gesuchte.

Das dunkel getönte gleichseitige Dreieck DQB hat den doppelten Flächeninhalt wie das hell getönte Dreieck APA^{**}.

27.



Für die Figur gilt: $\overline{AC} = \overline{BC}$. Die Kreislinie k berührt die Seiten des Dreiecks ABC in den Punkten F, P und Q.

(a) Zeichne die Figur für $c = 5\,\text{cm}$ und $h = 12\,\text{cm}$.

(b) Zeige: $d = \dfrac{h \cdot c}{\sqrt{h^2 + c^2}}$.

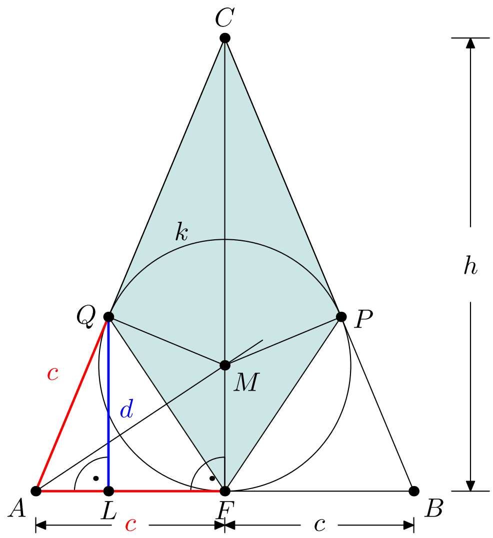
(c) Zeige: Für den Flächeninhalt des Dreiecks AFQ gilt: $A_{AFQ} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{h \cdot c^2}{\sqrt{h^2 + c^2}}$.

(d) Es seien A_{FPCQ} der Flächeninhalt des Vierecks $FPCQ$ und A_{ABC} der Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Zeige: $\dfrac{A_{FPCQ}}{ABC} = 1 - \dfrac{c}{\sqrt{h^2 + c^2}}$.

(e) In welchem Verhältnis müssen die Höhe h des Dreiecks ABC und dessen Basislänge $\overline{AB}$ stehen, damit das Viereck $FPCQ$ 40% der Fläche des Dreiecks ABC ausmacht?

(f) Markus meint: „Wenn das Dreieck ABC gleichseitig wäre, dann wäre der Flächenanteil des Vierecks $FPCQ$ am Dreieck ABC genau …“.
Was hat Markus erkannt? Wie würdest du seine Entdeckung auf verschiedene Weise begründen?

Lösung: (a) Die Figur wurde im Maßstab 1 : 2 gezeichnet.



Hier gilt: $\overline{AF} = \overline{AQ}$.
Der Inkreismittelpunkt M ergibt sich aus dem Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC.

(b) Die Dreiecke ALQ und AFC sind zueinander ähnlich: $\dfrac{\overline{LQ}}{\overline{FC}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AC}}$. (*)

ΔAFC: $\overline{AC} = \sqrt{h^2 + c^2}$. Also folgt mit (*): $\dfrac{d}{h} = \dfrac{c}{\sqrt{h^2 + c^2}}$

$\Rightarrow \quad d = \dfrac{h \cdot c}{\sqrt{h^2 + c^2}}$.

(c) $A_{AFQ} = \dfrac{1}{2} \cdot c \cdot d = \dfrac{1}{2} \cdot c \cdot \dfrac{h \cdot c}{\sqrt{h^2 + c^2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{h \cdot c^2}{\sqrt{h^2 + c^2}}$.

(d) $A_{FPCQ} = A_{\Delta ABC} - 2 \cdot A_{\Delta AFQ} \ |: A_{\Delta ABC}$

$$\Rightarrow \quad \frac{A_{FPCQ}}{A_{\Delta ABC}} = 1 - 2 \cdot \frac{A_{\Delta AFQ}}{A_{\Delta ABC}} = 1 - 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{h \cdot c^2}{\sqrt{h^2+c^2}}}{c \cdot h} = 1 - \frac{c}{\sqrt{h^2+c^2}}.$$

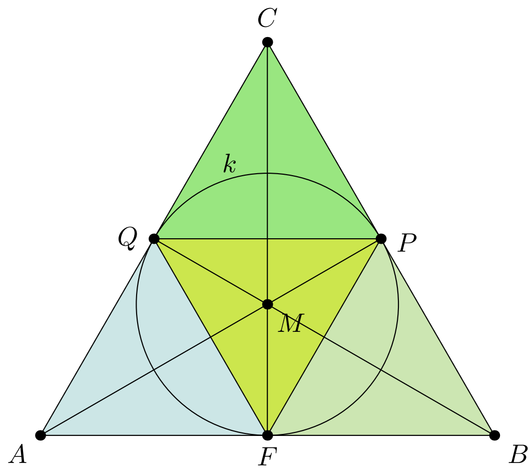
(e) $1 - \frac{c}{\sqrt{h^2+c^2}} = 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{\sqrt{h^2+c^2}} = 0,6 \ | \ ^2$

$$\Rightarrow \quad c^2 = 0,36h^2 + 0,36c^2 \quad \Rightarrow \quad 0,64c^2 = 0,36h^2 \ | \ \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c}{h} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad c : h = 3 : 4.$$

D.h. die Basislänge $\overline{AB} = 2c$ müsste $1,5$ mal so lang wie die Höhe dieses gesuchten Dreiecks ABC sein.

(f) 1. Möglichkeit: **anschaulich:**
Im gleichseitigen Dreieck fällt der Inkreismittelpunkt mit dem Höhenschnittpunkt zusammen:

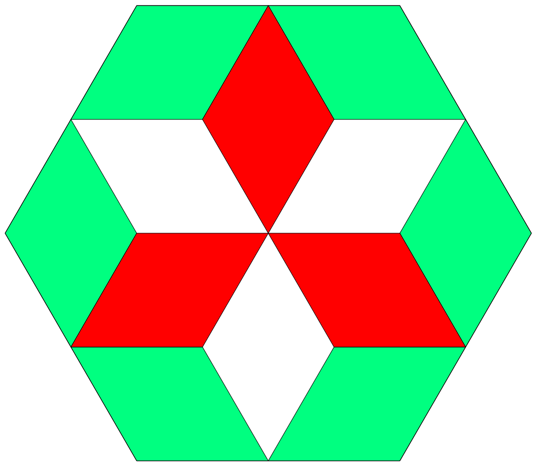


Die Seiten $[FP]$, $[PQ]$ und $[QF]$ zerlegen das gleichseitige Dreieck ABC in vier kongruente Teildreiecke. Zwei davon nimmt jetzt das Viereck $FPCQ$ ein. Also beträgt der Flächenanteil des Vierecks $FPCQ$ am gleichseitigen Dreieck ABC „genau“ 50%.

2. Möglichkeit: **rechnerisch:**
Wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist, gilt: $h = c \cdot \sqrt{3}$.
Eingesetzt in das Ergebnis der Aufgabe (d):

$$\frac{A_{FPCQ}}{ABC} = 1 - \frac{c}{\sqrt{\left(c \cdot \sqrt{3}\right)^2 + c^2}} = 1 - \frac{c}{\sqrt{4 \cdot c^2}} = 1 - \frac{1}{2} = 50\%.$$

28.



In das regelmäßige Seckseck mit der Seitenlänge $a = 6\,\text{cm}$ ist ein sechszackiger Stern einbeschrieben, in dem das Mitsubishi-Logo („Drei Diamanten") eingebettet ist. Wenn du das Bild lange genug betrachtest, entdeckst du auch 3 schräge Würfel.

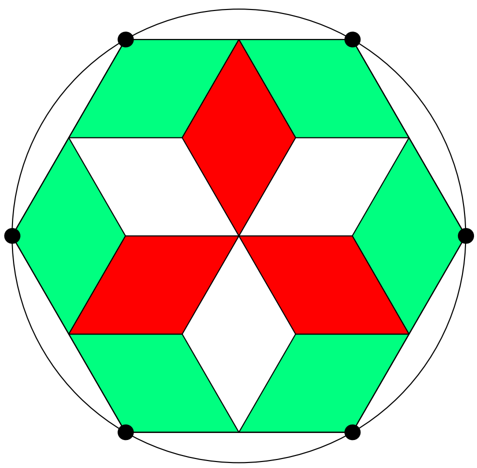
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Die drei „Mitsubishi-Vierecke" sind kongruente Rauten.

(c) Ermittle den prozentualen Anteil des Sterns am Seckseck.

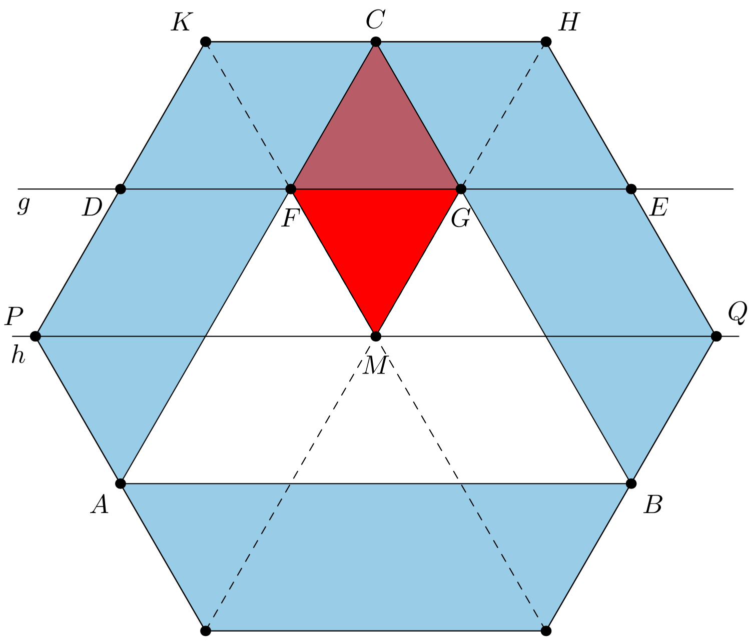
(d) Ermittle den prozentualen Anteil des Mitsubishi-Logos am Seckseck.

Lösung: (a)



Das Bild ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.
Zeichne zunächst einen Kreis mit Radius $6\,\text{cm}$. Um die Eckpunkte auf der Kreislinie zu erhalten, trägst du den Kreisradius 6-Mal auf der Kreislinie ab. Beginne am linken oder am rechten Eckpunkt, dann liegen die oberste und die unterste Seite des Sechsecks waagrecht. Verbinde dann dünn mit dem Bleistift immer zwei entsprechende Seitenmittelpunkte miteinander, so wie es die Zeichnung darstellt.
Damit bist du praktisch fertig. Es gilt jetzt nur noch, die entstandenen Teilflächen entsprechend auszumalen.

(b)

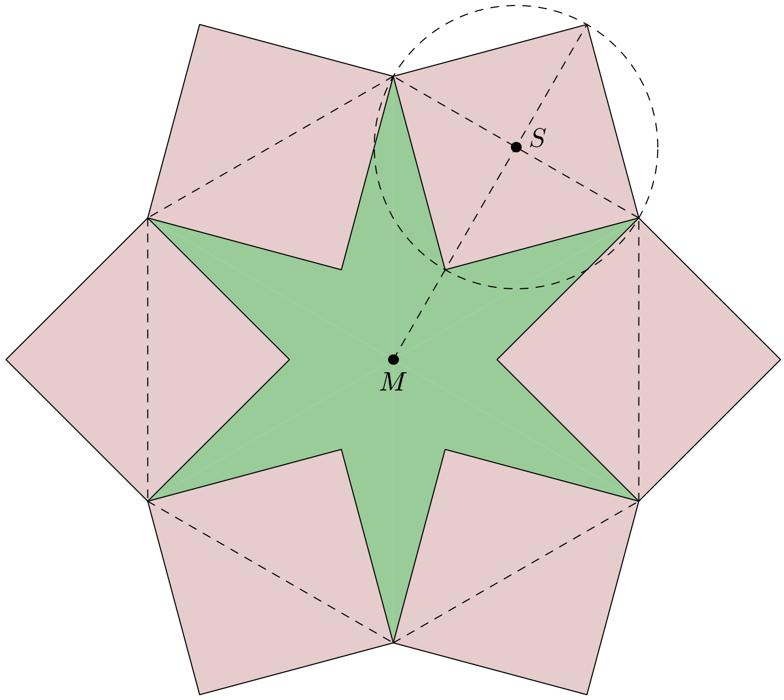


Die beiden gestrichelten Linien und die Zentrale h zerlegen das regelmäßige Seckseck in 6 kongruente gleichseitege Dreiecke.
Also sind die Vierecke $PMHK$ und $MQHK$ kongruente Rauten. Weil die Punkte D und E Seitenmittelpunkte des Sechsecks sind, schneidet die Gerade g die Rautendiagonalen $[KM]$ bzw. $[MH]$ in den Rautenmittelpunkten F und G.
Damit sind die Punkte F und G Seitenmittelpunkte des Dreiecks MHK. Also gilt: $\Delta FGC \cong \Delta MGF$. Das Viereck $MGCF$ ist eine Raute.
Durch Drehung um 120° lässt sich ein rotes Viereck mit einem anderen zur Deckung bringen.

(c) Betrachte erneut die Figur in der Lösung der Aufgabe (b):
Die drei gefärbeten Trapeze sind kongruent. Also ist das Dreieck ABC gleichseitig. Aus Symmetriegründen müssen dann alle 3 weißen, alle drei roten und alle sechs grünen Rauten in der Ausgangsfigur kongruent sein.
Das Seckseck enthält 12 Rauten, der Stern enthält 6 Rauten und die Mitsubishi-Figur enthält 3 Rauten.
Prozentualer Anteil des Sterns am Sechseck: $\dfrac{6\,\text{Rauten}}{12\,\text{Rauten}} = 0,5 = 50\%$.

(d) Prozentualer Anteil des Logos am Sechseck: $\dfrac{3\,\text{Rauten}}{12\,\text{Rauten}} = 0,25 = 25\%$.

29.



Die Figur ist dem Logo eines Verlages in München nachempfunden. Ihr liegt ein regelmäßiges Sechseck zugrunde. Die sechs Seiten sind jeweils die Diagonalen der Quadrate. Im Inneren ist ein Stern zu sehen.

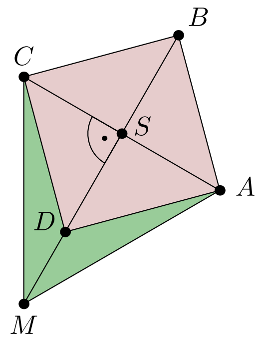
(a) Zeichne zunächst das regelmäßige Sechseck mit einer Seitenlänge von 6 cm. Füge dann die Quadrate hinzu.

(b) Berechne den Flächeninhalt eines Quadrates.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Sterns.

Lösung: (a) Zeichne zunächst einen Kreis mit Radius 6 cm. Um die Eckpunkte auf der Kreislinie zu erhalten, trägst du den Kreisradius 6-mal auf der Kreislinie ab. Beginne am oberen, dann am unteren Eckpunkt.
Um die Quadrate zu kostruieren, zeichnetst du am besten einen THALES-Kreis, dessen Durchmesser irgendeine Seite des regelmäßigen Sechsecks ist. Ein solcher ist schon in der Darstellung oben gestrichelt eingezeichnet. Beachte sodann, dass die Diagonalen in jedem Qaudrat gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen. Die Eckpunkte der restlichen Quadrate erhältst du z.B. durch Punkt- bzw. Achsenspiegelungen.

(b)

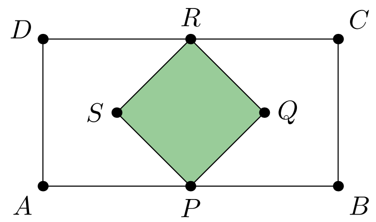


Dieser Ausschnitt der Gesamtfigur ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

(c) Die Diagonalenlänge jedes der 6 Quadrate beträgt 6 cm.
$\Rightarrow \quad A_{\text{Quadrat}} = \frac{1}{2} \cdot 6^{\,2}\,\text{cm}^2 = 18\,\text{cm}^2$

(d) Berechne zunächst den Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks. Es besteht aus 6 kongruenten gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge 6 cm.
$\Rightarrow \quad A_{\text{Sechseck}} = 6 \cdot \frac{6^{\,2}}{4} \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 54\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \approx 93{,}53\,\text{cm}^2.$
Um den Stern zu erhalten, musst du aus diesem Sechseck 6 halbe Quadrate ausschneiden.
Die Fläche des Sterns erhältst du also dadurch, dass du von seinem Flächeninhalt den von 3 Quadraten subtrahierst:
$A_{\text{Stern}} = 54\sqrt{3}\,\text{cm}^2 - 3 \cdot 18\,\text{cm}^2 = 18(3\sqrt{3} - 4)\,\text{cm}^2 \approx 21{,}53\,\text{cm}^2.$

30.



Die Seite $[AB]$ des Rechtecks $ABCD$ ist 6 cm und die Seite $[BC]$ ist x cm lang. Die Punkte P und R sind die Mittelpunkte der betreffenden Rechtecksseiten. Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat.

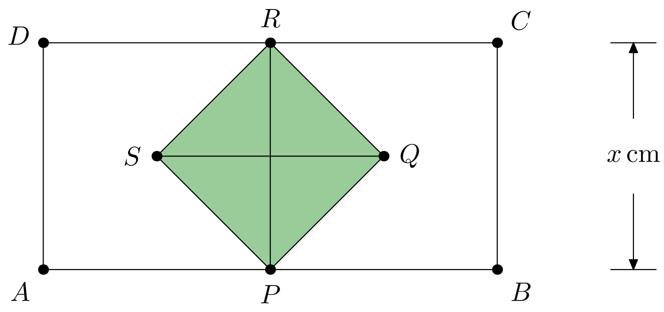
(a)
- Zeichne die Figur für $x = 3$.
- Wie viel Prozent der Rechtecksfläche nimmt das Quadrat jetzt ein?

(b)
- Zeichne die Figur für $x = 8$.
- Für welche Belegungen von x liegen die Punkte S und Q des Quadrates nicht außerhalb des Rechtecks? Begründe.

(c) Berechne x so, dass das Quadrat 40% der Rechtecksfläche bedeckt.

Lösung: (a)

- $x = 3$:



- In jedem Quadrat stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht. Außerdem sind sie gleich lang, und sie halbieren sich. Also gilt $\overline{PR} = \overline{SQ} = 3\,\text{cm}$.

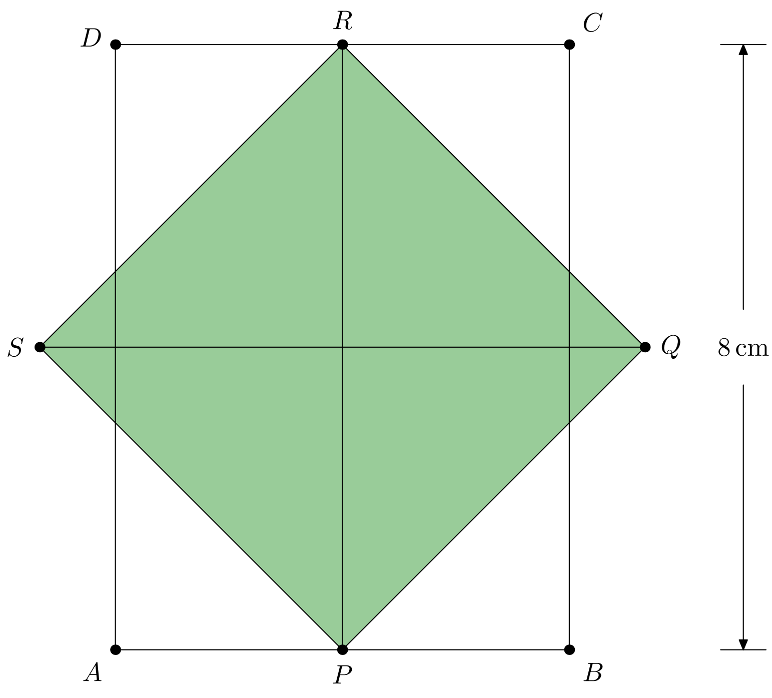
  Flächeninhalt des Quadrates: $A_Q = \frac{1}{2} \cdot 3^2\,\text{cm}^2 = 4,5\,\text{cm}^2$.

  Flächeninhalt des Rechtecks: $A_R = 6\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 18\,\text{cm}^2$.

  Flächenanteil: $\frac{A_Q}{A_R} = \frac{4,5\,\text{cm}^2}{18\,\text{cm}^2} = 0,25 = 25\%$.

(b)

- $x = 8$:



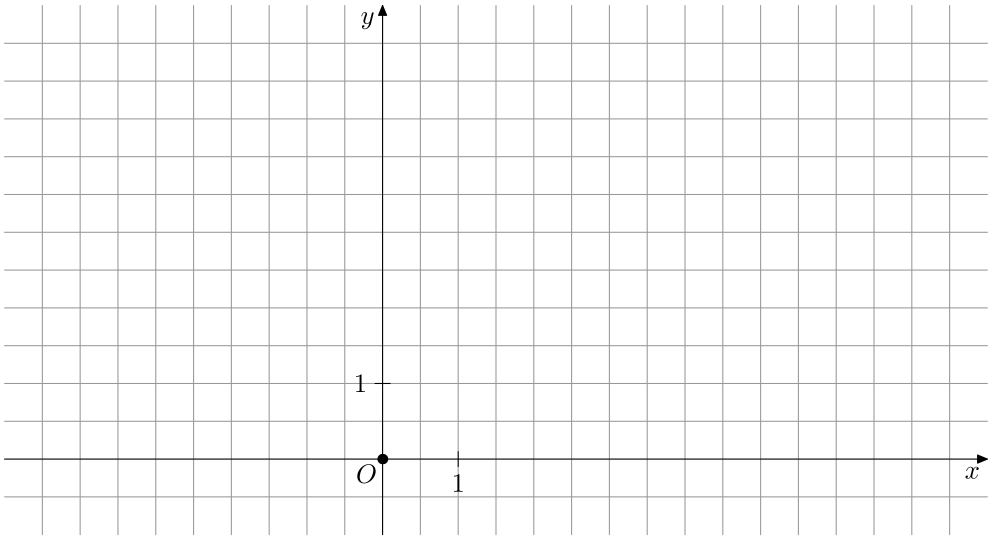
- Es muss gelten: $\overline{SQ} = x\,\text{cm} \leqq 6\,\text{cm}$, also $x \leqq 6$. (Dann wird das Rechteck $ABCD$ selbst zum Quadrat.)

(c)

$$\frac{A_Q}{A_R} = \frac{0,5 \cdot x^2}{6x} = 40\% = 0,4 \text{ mit } x \in \mathbb{R}^+.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{0,5 \cdot x}{6} = 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4,8.$$

31.



Die Punkte D_n liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 0,5x+2$. Sie besitzen jeweils den gleichen Abszissenwert x wie die Punkte $A_n(x \mid 0)$. Zusammen mit den Punkten B_n und C_n entstehen dadurch Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ wobei Folgendes gilt: $C_n \in g$, $\overline{A_nB_n} = 3\,\text{LE}$ und $[A_nD_n] \parallel [B_nC_n]$.

(a) Zeichne die Gerade g und für $x = -1$ und $x = 4$ die beiden Trapeze $A_1B_1C_1D_1$ bzw. $A_2B_2C_2D_2$ in das obige Koordinatensystem.

(b) Berechne alle Belegungen von x, für die es Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ gibt.

(c) Zeige: $C_n(x+3 \mid 0,5x+3,5)$.

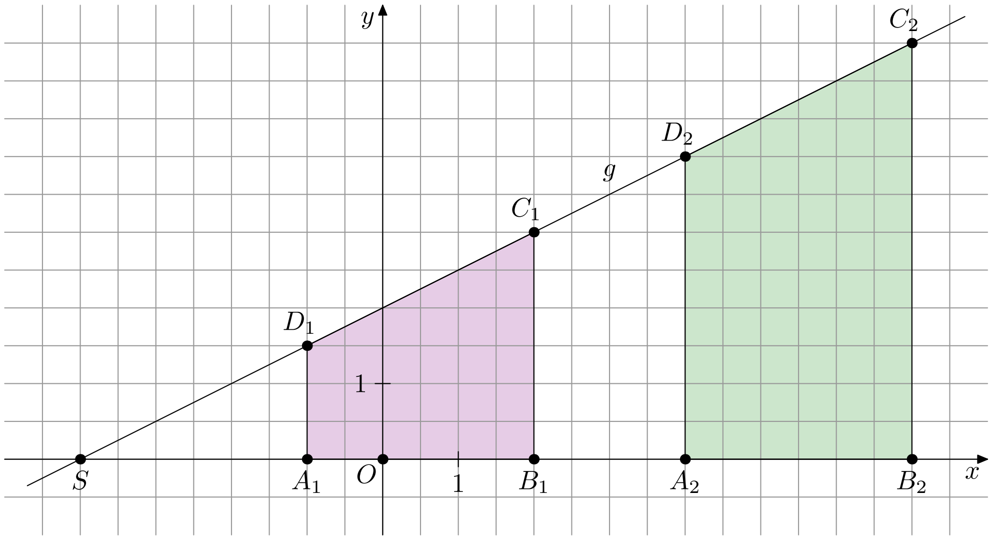
(d) Zeige: Für den Flächeninhalt A aller Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ gilt in Anhängigkeit von x:

$$A(x) = (1,5x+8,25)\,\text{FE}$$

(e) Unter allen Trapezen $A_nB_nC_nD_n$ gibt es eines, das einen Flächeninhalt von $53,25\,\text{FE}$ aufweist. Berechne x.

(f) Unter allen Trapezen $A_nB_nC_nD_n$ gibt es das Trapez $A_3B_3C_3D_3$, dessen Seite $[B_3C_3]$ fünf Mal so lang ist wie die Seite $[A_3D_3]$. Berechne x.

Lösung: (a)



(b) Die Gerade g schneidet die x-Achse im Punkt S. Wenn einer der Punkte D_n auf S liegt, dann entartet das betreffende Trapez zum Dreieck; es ist also kein Trapez mehr. Falls einer der Punkte D_n im III. Quadranten liegt, wird der Umlaufsinn der Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ falsch.
$g \cap \{x - Achse\} = \{S\}: \quad \Rightarrow \quad 0,5x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4.$
Also gibt es nur für $x > -4$ solche Trapeze $A_nB_nC_nD_n$.

(c) Wegen $C_n \in g$ gilt: $C_n(x_C \mid 0,5x_C + 2) \wedge x_C = x + 3$
$\Rightarrow \quad C_n(x + 3 \mid 0,5 \cdot (x + 3) + 2) = (x + 3 \mid 0,5x + 3,5).$

(d) $$A_{A_nB_nC_nD_n} = \frac{\overline{A_nB_n} + \overline{D_nC_n}}{2} \cdot \overline{A_nB_n}$$

$$A(x) = \left[\frac{(0,5x + 2) + (0,5x + 3,5)}{2}\right] \cdot 3\,\mathrm{FE}$$

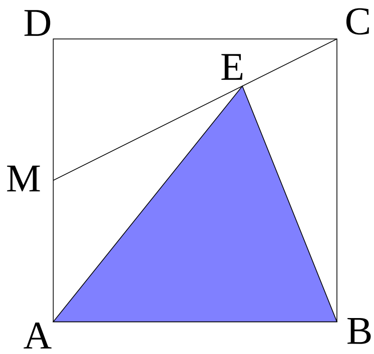
$$A(x) = (1,5x + 8,25)\,\mathrm{FE}$$

(e) $1,5x + 8,25 = 53,25 \quad \Leftrightarrow \quad x = 30.$

(f) $\overline{B_nC_n} = 5 \cdot \overline{A_nD_n} \quad \Leftrightarrow \quad 0,5x + 3,5 = 5 \cdot (0,5x + 2) \Leftrightarrow \quad x = -3,25$

Anmerkung: Zur Veranschaulichung der Lösung gibt es die Datei 09eh065.gxt.

32.



Die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ beträgt 6 m. Der Punkt M halbiert die Seite $[AD]$. Die Dreiecke AEM und BCE sind flächengleich.

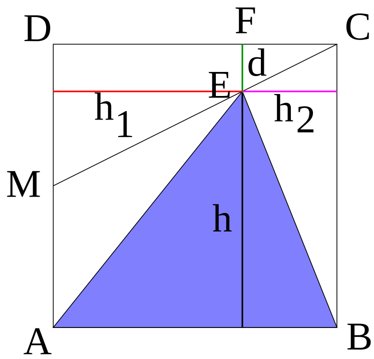
(a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks DMC.

(b) Begründe: Der Abstand des Punktes E zur Seite $[AD]$ ist doppelt so groß wie der zur Seite BC.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABE.

Quelle: Bayerischer Mathematiktest 1998

Lösung:



(a) $A_{\Delta DMC} = 0,5 \cdot \overline{DC} \cdot \overline{DM} = 0,5 \cdot 6\,\text{m} \cdot 3\,\text{m} = 9\,\text{m}^2$

(b) Zeichne zunächst die beiden genannten Abstände ein. (Hier: h_1 und h_2)
Den Flächeninhalt von Dreiecken berechnest du gewöhnlich mit dem Term

$$0,5 \cdot Grundlinie \cdot Höhe .$$

Wähle als Grundlinie in den beiden Dreiecken AEM und BCE die Strecken $[AM]$ bzw. $[CD]$. Es gilt hier $\overline{AM} = 3\,\text{m}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{m}$.
Weil die beiden Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben, muss zum Ausgleich die zugehörige Höhe h_1 doppelt so groß wie die Höhe h_2 sein:
$h_1 = 4\,\text{m}$ und $h_2 = 2\,\text{m}$.

(c) Zeichne zunächst den Abstand d des Punktes E zur Seite $[BC]$ mit dem Fußpunkt F und die Höhe h des Dreiecks ABE ein.
Die beiden Dreiecke MCD und ECF sind zueinander ähnlich:
Die Strecke $[DF]$ ist doppelt so lang wie die Strecke $[FC]$. Das bedeutet:

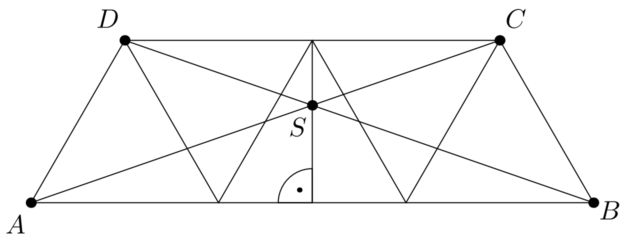
$$\overline{FC} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DC}.$$

Wegen der Ähnlichkeit muss dieses Verhältnis auch für die beiden anderen Katheten der Dreiecke MCD und ECF gelten:

$$\overline{FD} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DM} = 1\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad h = 5\,\mathrm{m}.$$

$$\Rightarrow \quad A_{ABE} = 0,5 \cdot 6\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{m}^2$$

33.



Fünf gleichseitige Dreiecke wurden zu dem Trapez $ABCD$ zusammengefügt.

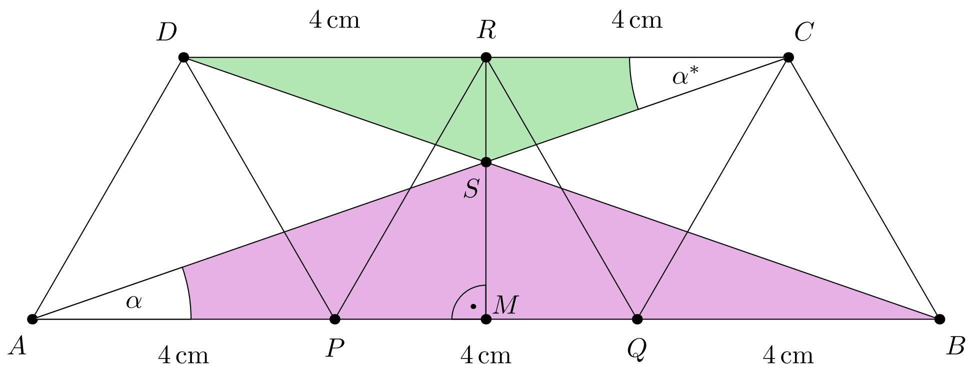
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 12\,\mathrm{cm}$.

(b) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke DSC und ABS.

(c) In welchem Verhältnis teilt der Diagonalenschnittpunkt S die Trapezhöhe?

(d) Berechne den prozentualen Anteil der Fläche des Dreiecks DSC am Trapez $ABCD$.

Lösung: (a)



(b) Die beiden Dreiecke ABS und DSC sind zueinander ähnlich: Es gilt z.B.: $\alpha = \alpha^*$ (Z-Winkel).

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{AB}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{DSC}}{A_{ABS}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

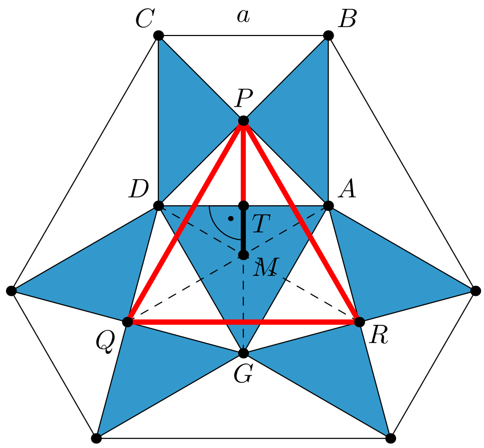
(c) Es muss gelten: $\overline{RS} : \overline{SM} = 2 : 3$. (Siehe Lösung (a).)

(d) Für die Trapezhöhe $[RM]$ gilt: $\overline{RM} = \frac{4}{2}\sqrt{3}\,\text{cm} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.
Wegen des Teilverhaltnisses von $2 : 3$ teilst du gedanklich $[RM]$ in $2 + 3 = 5$ gleiche Teile. 3 Teile davon entfallen auf die Strecke $[SM]$ und 2 Teile davon entfallen auf die Strecke $[RS]$. Also:

$$\overline{RS} = \frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{3}\,\text{cm} = 0{,}8\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \overline{SM} = \frac{3}{5} \cdot 2\sqrt{3}\,\text{cm} = 1{,}2\sqrt{2}.$$

$$\frac{A_{DSC}}{A_{ABCD}} = \frac{0{,}5 \cdot 8\,\text{cm} \cdot 0{,}8\sqrt{2}\,\text{cm}}{0{,}5 \cdot (12+8)\,\text{cm} \cdot 2\sqrt{2}\,\text{cm}} = \frac{4}{25} = 16\%$$

34.

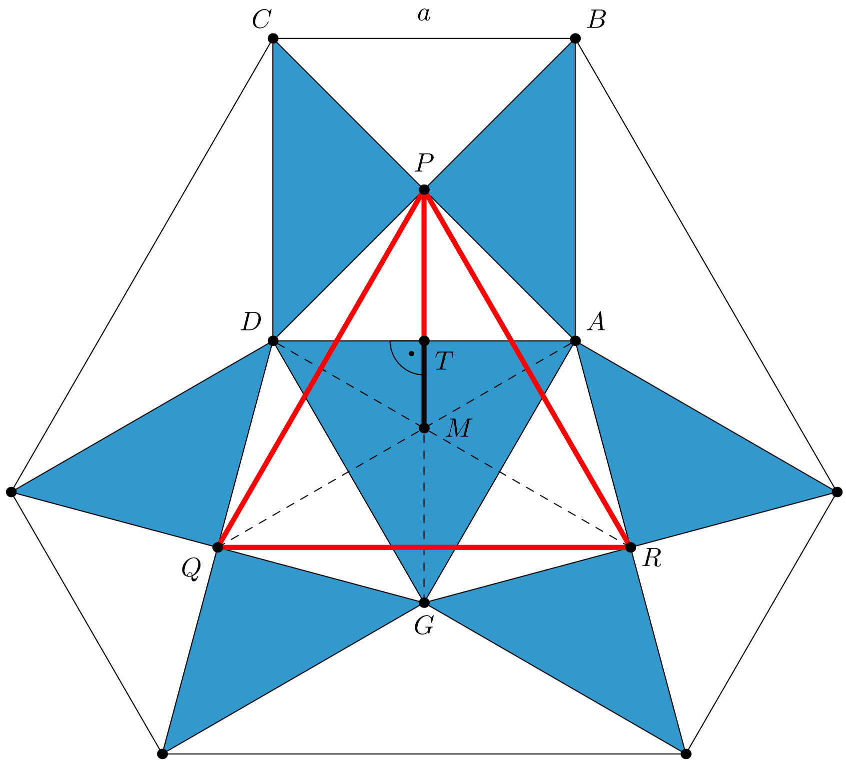


Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Im Zentrum befindet sich das gleichseitige Dreieck ADG. Das Dreieck PQR und die gestrichelten Strecken wurden zusätzlich eingezeichnet. Die Länge der Quadratseite $\overline{BC}$ ist a.

(a) Zeichne die Figur für $a = 4\,\text{cm}$.

(b) Vergleiche den Flächeninhalt der beiden gleichseitigen Dreiecke ADG und PQR in Prozent.

Lösung: (a)



- Am besten beginnst du mit dem gleichseitigen Dreieck ADG im Zentrum.
- Errichte dann die drei Quadrate über den Seiten dieses Dreiecks ADG.

(b) Der Punkt M ist das Zentrum des Logos und gleichzeitig der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks ADG.
Die Strecke $[MT]$ stellt ein Drittel der Höhe h dieses gleichseitigen Dreiecks dar:

$$\overline{MT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3}$$

Für die Strecke $[MP]$ gilt: $\overline{MP} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3} + \frac{1}{2}a = \frac{a}{6}(\sqrt{3}+3)$.

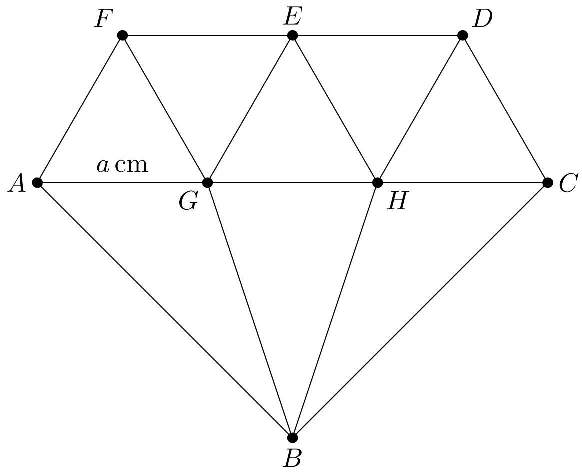
Die Strecke $[MP]$ stellt zwei Drittel der Höhe h^* des gleichseitigen Dreiecks PQR dar:

$$\frac{2}{3} \cdot h^* = \frac{a}{6}(\sqrt{3}+3) \quad \Rightarrow \quad h^* = \frac{a}{4}(\sqrt{3}+3)$$

Nun gilt: $\dfrac{A_{ADG}}{A_{PQR}} = \left(\dfrac{h}{h^*}\right)^2 = \left(\dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{4}(\sqrt{3}+3)}\right)^2 \approx 0,5359 = 53,59\%$

Das bedeutet: Das Dreieck PQR besitzt knapp 54% des Flächeninhaltes des Dreiecks ADG.

35.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Viereck $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken mit der jeweiligen Seitenlänge a cm zusammensetzt.

(a) Zeichne die Figur für $a = 3$.

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A_1 des Vierecks $BHEG$ gilt in Abhängigkeit von a:

$$A_1(a) = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3}+3\right)\ \mathrm{cm}^2$$

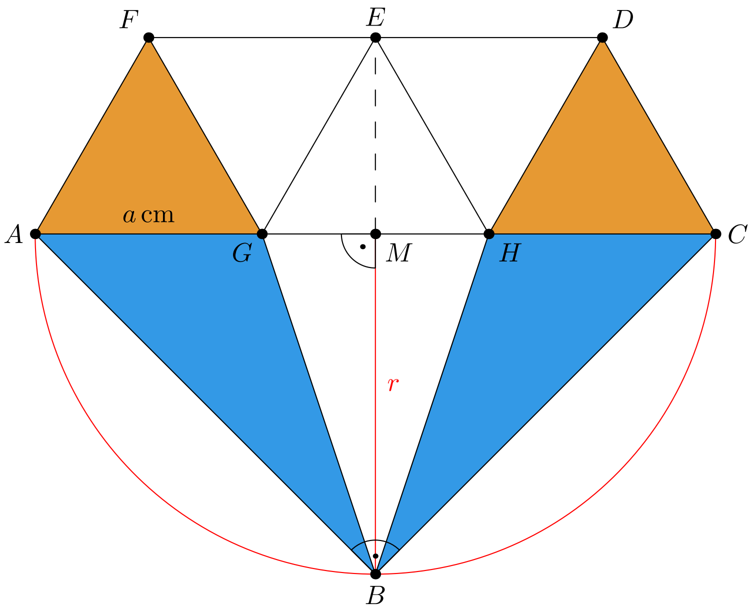
(c)
- Begründe: Das Viereck $ABGF$ besitzt den gleichen Flächeninhalt wie das Viereck $BHEG$.
- Begründe: Das Viereck $BHEG$ bedeckt weniger als ein Drittel der Fläche des Fünfecks $ABCDF$.

(d) Zeige: Für den Flächeninhalt A_2 des Vierecks $BHEG$ gilt in Abhängigkeit von a:

$$A_2(a) = \frac{a^2}{4}\left(5\sqrt{3}+9\right)\ \mathrm{cm}^2$$

(e) Wie viel Prozent der Fläche des Fünfecks $ABCDF$ wird vom Viereck $BHEG$ eingenommen?

Lösung: (a)



(b) Das Viereck $BHEG$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, der sich aus den beiden Dreiecken BHG und GHE zusammensetzt.
Der THALES-Halbkreis mit dem Durchmesser $[AC]$ und dem Radius r macht deutlich, dass $\overline{AM} = \overline{MB} = 1,5\,a\,\text{cm}$ gilt.

$$A_1(a) = \left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot 1,5\,a + \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right)\,\text{cm}^2 = \left(\frac{3}{4}\,a^2 + \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right)\,\text{cm}^2$$
$$A_1(a) = \frac{a^2}{4}(\sqrt{3}+3)\,\text{cm}^2$$

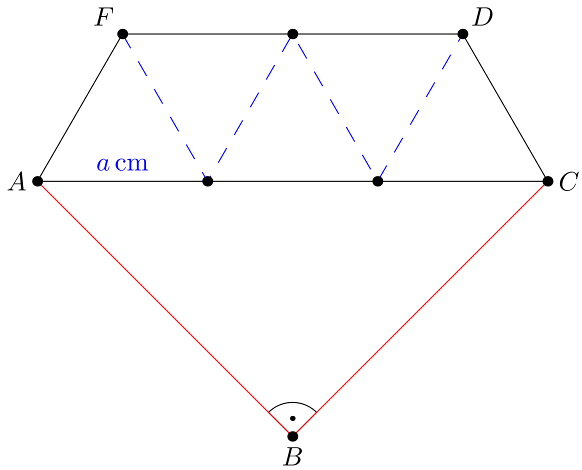
(c)
- Die Dreiecke AGF und GHE sind kongruent, also flächengleich. Die beiden Dreiecke ABG und BHG haben gleich lange Grundlinien: $\overline{AG} = \overline{GH}$.
  Der Kreisradius r stellt stellt die gemeinsame Höhe auf die beiden genannten Grundlinien dar (im Dreieck ABG liegt diese Höhe außerhalb). Also sind beide Dreiecke flächengleich. Damit sind auch beide Vierecke flächengleich.
- Die beiden Vierecke $ABGF$ und $BCDH$ sind aus Symmetriegründen kongruent, also flächengleich. Daher sind im Fünfeck $ABCDF$ drei Vierecke von der Größe des Vierecks $BHEG$ und zusätzlich noch die beiden gleichseitigen Dreiecke AGF und HCD enthalten.
  Also bedeckt das Viereck $BHEF$ weniger als ein Drittel der Fläche des Fünfecks $ABCDF$.

(d) $$A_2(a) = \left(5\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\cdot 3a\cdot 1,5a\right)\,\text{cm}^2 = \frac{a^2}{4}\left(5\sqrt{3}+9\right)\,\text{cm}^2$$

(e) $$\frac{A_1(a)}{A_2(a)} = \frac{\frac{a^2}{4}(\sqrt{3}+3)\,\text{cm}^2}{\frac{a^2}{4}\left(5\sqrt{3}+9\right)\,\text{cm}^2} \approx 0,2679 = 26,79\%$$

Das Viereck $BHEG$ bedeckt also etwas mehr als 25% der Fünfecksfläche.

36.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Viereck $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken mit der jeweiligen Seitenlänge a cm zusammensetzt.

(a) Zeichne die Figur für $a = 3$.

(b) Vergleiche den Flächeninhalt des Vierecks $ACDF$ mit dem des Dreiecks ABC.

Lösung: (a) Klar.

(b) Bei dem Viereck $ACDF$ handelt es sich um ein achsensymmetrisches Trapez. Dessen Flächenterm könntest du zwar ohne Weiteres aufstellen, aber die Summe der Flächeninhalte der fünf gleichseitigen Dreiecke ist bequemer:

$$A_{ACDF} = 5 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2 = \frac{a^2}{4} \cdot 5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$$

Das Dreieck ABC ist ein halbes Quadat mit der Diagonalenlänge $\overline{AC} = 3a$ cm:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3a)^2\,\mathrm{cm}^2 = \frac{a^2}{4} \cdot 9\,\mathrm{cm}^2$$

Der Faktor $\frac{a^2}{4}$ taucht in beiden Flächentermen auf.

Also musst du nur noch den Rest vergleichen, nämlich $5\sqrt{3}$ mit 9:
$5\sqrt{3} < 8{,}67 < 9$. Also ist der Flächeninhalt des Trapezes $ACDF$ kleiner als der des Dreiecks ABC. (Das Trapez ist jedoch nur um knapp 4% kleiner als das Dreieck.)

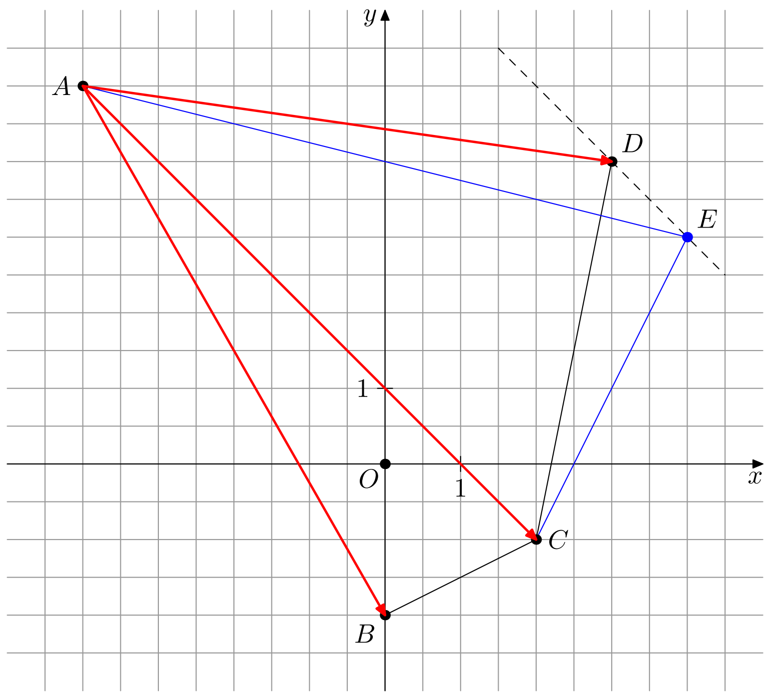
37. Gegeben ist das Viereck $ABCD$ durch $A(-4 \mid 5), B(0 \mid -2), C(2 \mid -1)$ und $D(3 \mid 4)$.

(a) Zeichne dieses Viereck in ein Koordinatensystem.
Platzbedarf: $-5 \leqq x \leqq 4$ und $-3 \leqq y \leqq 6$

(b) Berechne den Flächeninhalt dieses Vierecks.

(c) Ersetze in der Zeichnung den Punkt D durch einen anderen Punkt E, so dass das Viereck $ABCE$ den gleichen Flächeninhalt aufweist wie das Viereck $ABCD$.

Lösung: (a)



(b)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0+4 \\ -2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

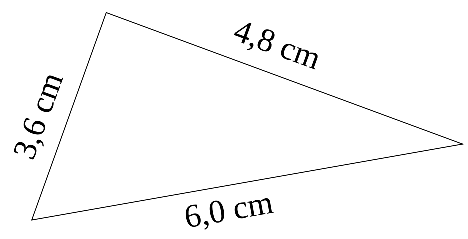
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{ABCD} = \left[\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & -6 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \right] \text{cm}^2 = 27\,\text{cm}^2$$

(c) Z.B.: $E(4 \mid 3)$ (siehe Zeichnung).
Anmerkungen:
Wenn der Punkt D seine Lage verändert, dann bleibt der Flächeninhalt des Dreiecks ABC konstant. Also musst du nur darauf achten, dass der Punkt D so platziert wird, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ACD unverändert bleibt.
Egal, wo du den Punkt D hinlegst: Die Grundlinie $[AC]$ des Dreiecks ACD bleibt erhalten. Damit sich der Flächeninhalt dieses Dreiecks nicht ändert, muss also die Höhe und damit der Abstand des Punktes D zur Grundlinie $[AC]$ unverändert bleiben.
Der gesuchte Punkt E muss sich dann auf der Parallelen (siehe gestrichelte Linie) zur

Diagonalen $[AC]$ durch den Punkt D aufhalten, weil alle Punkte auf dieser Parallelen den gleichen Abstand zur Grunlinie $[AC]$ besitzen. Es gibt daher beliebig viele Lösungen.

38.



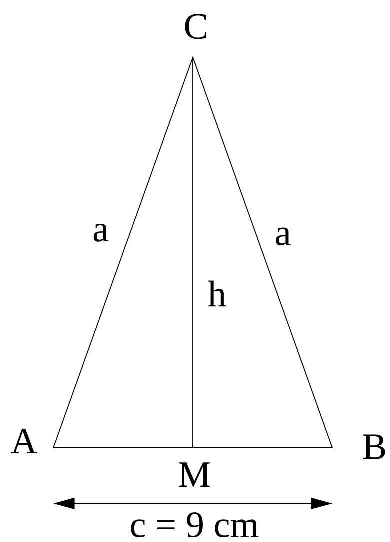
Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.

Lösung: Es gilt: $3,6^2 + 4,8^2 = 6^2$ Also ist das Dreieck rechtwinklig.

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 3,6\,\text{cm} \cdot 4,8\,\text{cm} = 8,64\,\text{cm}^2.$$

39. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC besitzt einen Flächeninhalt von $27\,\text{cm}^2$. Die Basis $[AB]$ ist $9\,\text{cm}$ lang.
   (a) Fertige eine Skizze an. Berechne die Länge der Höhe auf die Basis.
   (b) Der Umfang dieses Dreiecks ist $24\,\text{cm}$ lang. Berechne die Länge der Schenkel.
   (c) Welche Abmessungen könnte ein Rechteck haben, das denselben Flächeninhalt wie dieses Dreieck aufweist?

Lösung: (a)



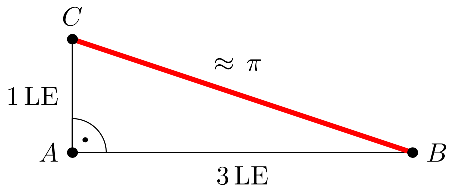
Es gilt also: $27\,\text{cm}^2 = 0{,}5 \cdot 9\,\text{cm} \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = 6\,\text{cm}$.

(b) Hier gilt: $9\,\text{cm} + 2a = 24\,\text{cm} \quad \Leftrightarrow \quad a = 7{,}5\,\text{cm}$.

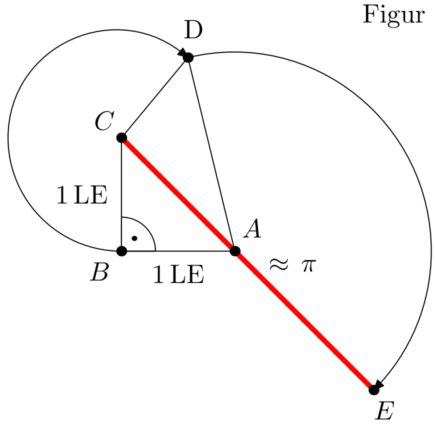
(c) Für das z.B. x cm breite und y cm hohe Rechteck gilt dann:
$x \cdot y = 27$. Es könnte also z.B. 9 cm breit und 3 cm hoch sein oder 20 cm breit und 1,35 cm hoch sein oder ...

40.

Figur 1



Figur 2



Im Jahre 1882 bewies der deutsche Mathematiker Ferdinand LINDEMANN, dass die Konstruktion einer Strecke mit der Länge π LE nicht möglich ist, wenn man nur Zirkel und Lineal verwendet.
Die Konstruktion einer solchen Streckenlänge kann also mit Zirkel und Lineal nur näherungsweise erfolgen:
Die Streckenlängen $\overline{BC}$ in der Figur 1 und $\overline{CE}$ in der Figur 2 stellen zwei Ergebnisse von Näherungskonstruktionen einer Strecke mit der Maßzahl π LE dar, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit die Konstruktion rechter Winkel mit Zirkel und Lineal weggelassen worden ist.

(a)
- Berechne den Näherungswert für π in der Figur 1.
- Berechne die prozentuale Abweichung dieses Näherungswertes vom Taschenrechnerwert für π auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

(b)
- Berechne die Streckenlänge $\overline{CE}$ in der Figur 2.
- Vergleiche die beiden Näherungen für π in der Figur 1 und in der Figur 2.
- ARCHIMEDES benutzte für π den Wert $\frac{22}{7}$. Vergleiche diesen Wert mit π auf deinem Taschenrechner und mit dem Wert aus der Figur 2.

(c) Laut einem Tabellenwerk ist der Äquatorradius r der Erde $6378{,}388$ km lang. Beachte für die Lösung der folgenden Aufgaben, dass immer nur drei Nachkommastellen verwendet werden dürfen, weil der Erdradius auch auf drei Nachkommastellen angegeben ist (warum eigentlich?).

- Berechne die Äquatorlänge l_1 mit Hilfe des Näherungswertes $\overline{CE}$.
- Berechne die Äquatorlänge l_2 mit Hilfe von π auf deinem Taschenrechner.
- Wie groß ist die Differenz dieser beiden Ergebnisse?
- Für wie schwerwiegend hältst du diesen Unterschied? Begründe.

Lösung: (a)
- Figur 1: $\pi \approx \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} \approx 3,162\,227\,766\ldots$
- Taschenrechner: $\pi \approx 3,141\,592\,654\ldots$

$$\frac{3,162\,227\,766 - 3,141\,592\,654}{3,141\,592\,654} \approx 0,0066 = 0,66\%$$

(b)
- $\Delta\, BAC: \quad \overline{AC} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
  $\Delta\, ADC: \quad \overline{DE} = \overline{AD} = \sqrt{\sqrt{2}^{\,2}+1^2} = \sqrt{3}$
  Also $\pi \approx \sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 3,146\,264\,37\ldots.$
- Beim Näherungswert für π in der Figur 1 stimmt die erste Kommastelle und in der Figur 2 stimmen die erste und die zweite Kommastelle.
- ARCHIMEDES: $\dfrac{22}{7} = 3,142\,857\,143\ldots$
  Taschenrechner: $\pi = 3,141\,592\,654\ldots$
  Figur 2: $\sqrt{2}+\sqrt{3} = 3,146\,264\,37\ldots.$

(c)
- $l_1 = 2 \cdot 6378,388\,\text{km} \cdot 3,146 \approx 40\,132,871\,\text{km}$
- $l_2 = 2 \cdot 6378,388\,\text{km} \cdot 3,142 \approx 40\,081,790\,\text{km}$
- $\Delta l \approx 51\,\text{km}.$
- Dieser Unterschied ist praktisch bedeutungslos, weil der Erdäquator nur näherungsweise eine Kreisline darstellt.
  Außerhalb der Meeresoberfläche führt die Äuatorline z.B. in Ecuador in Südamerika über die Andenkette hinweg oder in Kenia in Afrika dicht an dem über 5000 m Mount Kenia vorbei.
  Auch die Ozeane bilden keine einheitliche Oberfläche. Der Meeresspiegel variiert global in seiner Höhe bis zu 200 m.

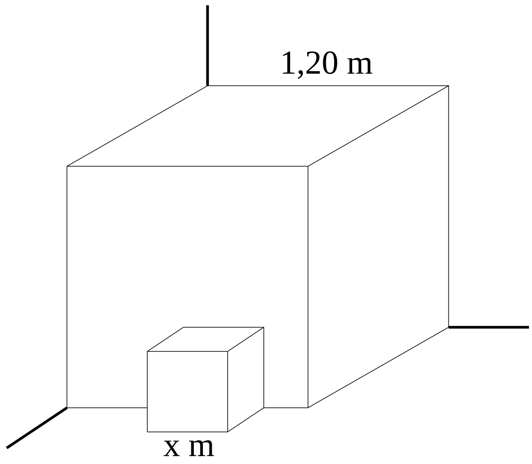
41. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = x^2 - 9$ und der Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Entscheide, ob folgende Aussagen über den Graphen von f jeweils richtig oder falsch sind.

	richtig	falsch
Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt. (0|9)	[ ]	[ ]
Der Punkt (4|6) liegt auf dem Graphen.	[ ]	[ ]
Für $x \in]-3;3[$ verläuft der Graph unterhalb der x-Achse.	[ ]	[ ]
Der Graph ist zur y-Achse symmetrisch.	[ ]	[ ]

Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2005

Lösung: falsch, falsch, richtig, richtig

42.



Familie Subku zieht um. In einer Zimmerecke ihrer neuen Wohnung steht ein würfelförmiger Karton mit einer Kantenlänge von $1,20\,\mathrm{m}$.
Die Möbelpacker haben ihm einen kleineren Karton mit der Kantenlänge $x\,\mathrm{m}$ entnommen und so hingestellt, dass sich eine Seitenfläche des großen und eine des kleinen Kartons berühren. Es stellt sich heraus, dass die einsehbare Oberfläche des großen und die einsehbare Oberfläche des kleinen Würfels übereinstimmen.

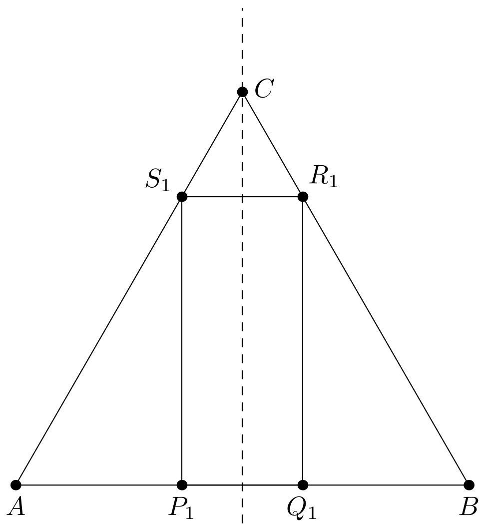
(a) Zeige: Es muss dann $x = 0,24 \cdot \sqrt{15}$ gelten.

(b) Wie viel Prozent des Volumens großen Würfels nimmt der kleine Würfel ein?

Lösung: (a) Vom großen Würfel sind zwei Seitenflächen voll sichtbar: $A_1 = 2 \cdot 1,2^2\,\mathrm{m}^2$.
Von der vorderen Seitenfläche sind $A_2 = (1,2^2 - x^2)\,\mathrm{m}^2$ zu sehen.
Vom kleinen Würfel sind vier Seitenflächen sichtbar: $A_3 = 4 \cdot x^2\,\mathrm{m}^2$.
Es muss gelten: $A_1 + A_2 = A_3$:
$2 \cdot 1,2^2 + (1,2^2 - x^2) = 4 \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot 1,2^2 = 5 \cdot x^2$
$\Leftrightarrow \quad x = 1,2 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 0,24 \cdot \sqrt{15}.$

(b) $\frac{V_{klein}}{V_{groß}} = \frac{\left(0,24 \cdot \sqrt{15}\right)^3}{1,2^3} \approx 0,4648 = 46,48\%$

43.



In das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Setenlänge $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ werden Rechtecke $P_nQ_nR_nS_n$ mit $\overline{P_nQ_n} = x\,\text{cm}$ so einbeschrieben, wie es die Darstellung anhand des Beispielrechtecks $P_1Q_1R_1S_1$ für $x = 1,6$ zeigt.

(a) Für welche Belegungen von x gibt es solche Rechtecke $P_nQ_nR_nS_n$?

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Rechtecke $P_nQ_nR_nS_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-2x^2 + 12x\right)\,\text{cm}^2$$

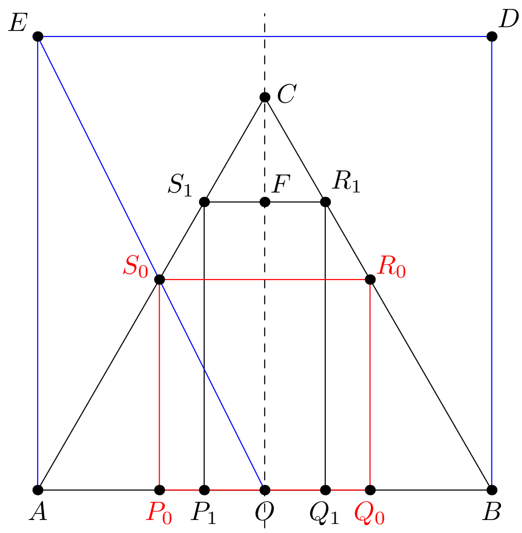
(c) Zeige: $\dfrac{A(x)}{A_{\Delta\,ABC}} = (-0,08x^2 + 0,4x)\,\text{cm}^2$

(d) Unter allen Rechtecken $P_nQ_nR_nS_n$ gibt die Rechtecke $P_2Q_2R_2S_2$ und $P_3Q_3R_3S_3$, die 32% der Fläche des Dreiecks ABC einnehmen. Berechne die zugehörigen Belegungen von x.

(e) Unter allen Rechtecken $P_nQ_nR_nS_n$ gibt es das Quadrat $P_0Q_0R_0S_0$.

- Zeichne dieses Quadrat farbig ein.
- Untersuche, ob das Quadrat $P_0Q_0R_0S_0$ unter allen möglichen Rechtecken $P_nQ_nR_nS_n$ das flächengrößte ist.

Lösung:



(a) $x \in \,]\,0; 6\,[_{\mathbb{R}}$

(b) In diesem Fall geht es auch ohne Vierstreckensatz:
Die beiden rechtwinkligen Dreiecke AP_nS_n und Q_nBR_n lassen sich zu einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $y = 2 \cdot (3 - \frac{x}{2})\,\text{cm} = (6 - x)\,\text{cm}$ zusammenfügen.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A_{P_nQ_nR_nS_n} &= A_{\Delta\,ABC} - 2 \cdot A_{\Delta\,AP_nS_n} - A_{\Delta\,S_nR_nC} \\
&= \left[\frac{6^2}{4}\sqrt{3} - \frac{(6-x)^2}{4}\sqrt{3} - \frac{x^2}{4}\sqrt{3}\right]\,\text{cm}^2 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}(36 - 36 + 12x - x^2 - x^2)\,\text{cm}^2 \\
A(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-2x^2 + 12x\right)\,\text{cm}^2
\end{aligned}$$

(c) $$\frac{A(x)}{A_{\Delta\,ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (-2x^2 + 12x)}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2}\,\text{cm}^2 = \frac{1}{18}(-x^2 + 6x)\,\text{cm}^2$$

(d) Es gilt: $\frac{1}{18}(-x^2 + 6x) = 32\% = 0,32 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 6x - 5,76 = 0$
$\Rightarrow \quad x_1 = 1,2$ und $x_2 = 4,8$

(e)
- Siehe Zeichnung oben: Zeichne zunächst ein Probequadrat, z.B. das Quadrat $ABDE$. Weil alle Quadrate und damit alle halben Quadrate zueinander ähnlich sind, muss z.B. der gesuchte Punkt S_0 der Schnittpunkt der Strecken $[AC]$ und $[EO]$ sein. Die Lage der restlichen gesuchten Punkte ist dann klar.
- Die Dreiecke ABC und S_nR_nC sind zueinander ähnlich. Also gilt:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{S_nR_n}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CF}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6}{x} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{18\sqrt{3}}{6 + 3\sqrt{3}} = 12\sqrt{3} - 18.$$

Andererseits gilt nach (b): $A(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4}(-x^2 + 6x)\,\text{cm}^2$.

$$A(x) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot (x-3)^2 + \frac{9}{4}\sqrt{3}\right]\,\text{cm}^2.$$

Einerseits beträgt die Seitenlänge des Quadrates $P_0Q_0R_0S_0$ $(12\sqrt{3} - 18)\,\text{cm} \approx 2,78\,\text{cm}$.
Andererseits beträgt die Seitenlänge des maximalen Rechtecks 3 cm.
Also ist das maximale Rechteck kein Quadrat.

44. In ein Rechteck $PQRS$ mit den Seitenlängen $\overline{PQ} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{QR} = 6\,\text{cm}$ werden Dreiecke PA_nB_n einbeschrieben. Dabei gilt:

- $A_n \in [QR]$ und $B_n \in [RS]$
- $\overline{Q_nA} = \overline{SB_n} = x\,\text{cm}$

(a) Zeichne das Rechteck $PQRS$ und für $x = 2$ das Dreieck PA_1B_1.

(b) Für welche Belegungen von x gibt es solche Dreiecke PA_nB_n?

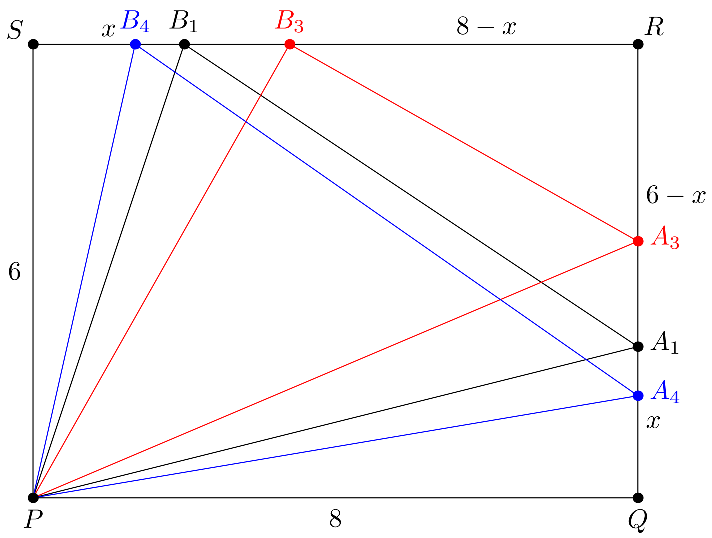
(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Dreiecke PA_nB_n gilt in Abhängigkeit von x:
$$A(x) = (24 - 0,5x^2)\,\text{cm}^2$$

(d) Unter allen Dreiecken PA_nB_n gibt es das Dreieck PA_2B_2, dessen Fläche 34,64% des Rechtecks $PQRS$ bedeckt. Berechne x.

(e) Unter allen Dreiecken PA_nB_n gibt es das rechtwinklige Dreieck PA_3B_3 mit der Hypotenuse $[PA_3]$. Berechne x.

(f) Unter allen Dreiecken PA_nB_n gibt es das gleichschenklige Dreieck PA_4B_4 mit der Basis $[PB_4]$. Berechne x.

Lösung: (a)



(b) $x \in [0; 6]_{\mathbb{R}}$

(c) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned}
A_{\Delta\, PA_nB_n} &= A_{PQRS} - A_{\Delta\, PQA_n} - A_{\Delta\, A_nRB_n} - A_{\Delta\, PB_nS} \\
&= 48 - 0,5 \cdot 8 \cdot x - 0,5 \cdot (8-x) \cdot (6-x) - 0,5 \cdot 6 \cdot x \\
&= 48 - 4x - 24 + 4x + 3x - 0.5x^2 - 3x \\
A(x) &= (24 - 0,5x^2)\,\mathrm{cm}^2
\end{aligned}$$

(d) $24 - 0,5x^2 = 0,3464 \cdot 48 \quad \Rightarrow \quad x = 3,84$

(e) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned}
\overline{PA_n}^{\,2} &= \overline{AB_n}^{\,2} + \overline{PB_n}^{\,2} \\
8^2 + x^2 &= (6-x)^2 + (8-x)^2 + 6^2 + x^2 \\
64 + x^2 &= 36 - 12x + x^2 + 64 - 16x + x^2 + 36 + x^2
\end{aligned}$$

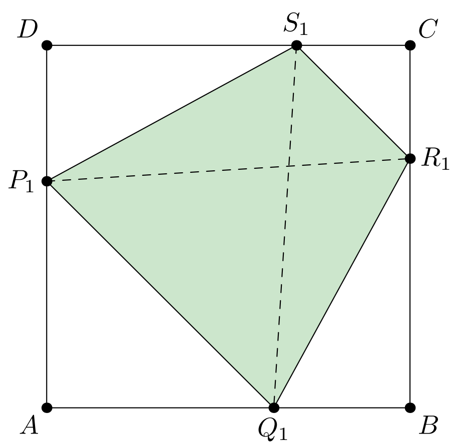
$\Rightarrow \quad x^2 - 14x + 36 = 0 \quad D = 52 \quad \sqrt{D} = 2\sqrt{13}$. Es scheint sogar zwei Dreiecke zu geben. Aber:
$x_1 = 7 + \sqrt{13} \approx 10,61 \notin [0; 6] \quad x_2 = 7 - \sqrt{13} \approx 3,39 \in [0; 6]$
$\Rightarrow \quad L = \{7 - \sqrt{13}\}$, siehe „rotes“ Dreieck.

(f) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned}
\overline{PA_n} &= \overline{A_nB_n} \\
8^2 + x^2 &= (6-x)^2 + (8-x)^2 \\
64 + x^2 &= 36 - 12x + x^2 + 64 - 16x + x^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad x^2 - 28x + 36 = 0 \quad D = 640 \quad \sqrt{D} = 8\sqrt{10}$. Wieder scheint es zwei Dreiecke zu geben.
$x_1 = 14 + 4\sqrt{10} \approx 26,65 \notin [0; 6] \quad x_2 = 14 - \sqrt{10} \approx 1,35 \in [0; 6]$
$\Rightarrow \quad L = \{14 - \sqrt{10}\}$, siehe „blaues“ Dreieck.

45.



In das Quadrat $ABCD$ werden Trapeze $P_nQ_nR_nS_n$ auf die oben dargestellte Weise einbeschrieben.
Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{CR_n} = \overline{CS_n} = x\,\text{cm}$ und $\overline{AP_n} = \overline{AQ_n} = 2x\,\text{cm}$.

(a) Zeichne das Quadrat $ABCD$ und für $x = 2,5$ das Trapez $P_1Q_1R_1S_1$.

(b) Für welche Belegungen von x existieren solche Trapeze $P_nQ_nR_nS_n$?

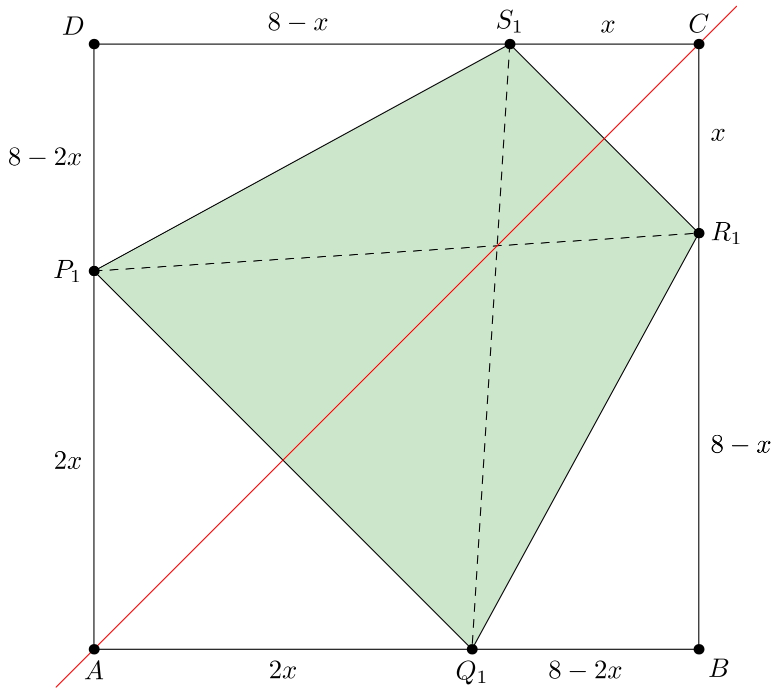
(c)
- Zeige durch Rechnung: Für $x = 2,\overline{6}$ liegt die Diagonale $[S_2Q_2]$ im Trapez $P_2Q_2R_2S_2$ parallel zur Quadratseite $[BC]$ bzw. $[AD]$.
- Begründe: Die Diagonalen des Trapezes $P_2Q_2R_2S_2$ stehen senkrecht aufeinander.

(d) Berechne den Flächeninhalt A der Trapeze $P_nQ_nR_nS_n$ in Abhängigkeit von x, indem du von der Quadratfläche bestimmte Teilflächen subtrahierst.
[Ergebnis: $A(x) = (-4,5x^2 + 24x)\,\text{cm}^2$]

(e)
- Begründe durch Rechnung: Unter allen Trapezen $P_nQ_nR_nS_n$ ist das Trapez $P_2Q_2R_2S_2$, das flächengrößte.
- Begründe: Das flächengößte Trapez $P_2Q_2R_2S_2$ nimmt 50% der Quadratfläche ein.

(f) Untersuche auf verschiedene Weise, ob es unter allen Trapezen $P_nQ_nR_nS_n$ eines gibt, dessen Flächeninhalt $41,07\,\text{cm}^2$ beträgt.

Lösung: (a)



(b) Es muss gelten: $2x \leqq 8 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqq 4$.

(c)
- Es muss gelten: $\overline{Q_2B} = \overline{CS_2} \quad \Rightarrow \quad 8 - 2x = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,\overline{6}$.

- Alle Trapeze $P_nQ_nR_nS_n$ besitzen die Gerade AC als Symmetrieachse. Sie schließt mit den Quadratseiten jeweils einen 45°-Winkel ein.
  Wenn $[S_2Q_2]$ an AC gespiegelt wird, dann erhältst du die Diagonale $[P_2R_2]$, die dann parallel zu $[AB]$ bzw. $[CD]$ liegt.
  Also gilt: $[P_2R_2] \perp [S_2Q_2]$.

(d)

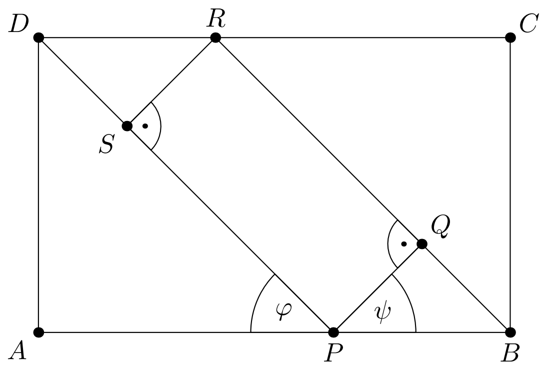
$$\begin{aligned}
A_{P_nQ_nR_nS_n} &= A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta\, P_nS_nD} - A_{\Delta\, AQ_nP_n} - A_{\Delta\, CS_nR_n} \\
A(x) &= \left[8 \cdot 8 - 2 \cdot 0,5 \cdot (8-2x)(8-x) - 0,5 \cdot (2x)^2 - 0,5 \cdot x^2\right] \text{ cm}^2 \\
&= \left[64 - 64 + 8x + 16x - 2x^2 - 0,5x^2 - 2x^2\right] \text{ cm}^2 \\
A(x) &= \left(-4,5x^2 + 24x\right) \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

(e)
- $a = -4,5 \quad b = 24 \quad c = 0$:

  $x_S = -\dfrac{24}{2 \cdot (-4,5)} = \dfrac{8}{3} = 2,\overline{6}$. Siehe Lösung (c).
- $y_S = 0 - \dfrac{24^2}{4 \cdot (-4,5)} = 32$; das ist aber die Hälfte $(= 50\%)$ der Quadratfläche.

(f) **1. Möglichkeit:**
Die maximale Trapezfläche beträgt $32\,\text{cm}^2$. Dann gibt es kein Trapez, das noch größer, nämlich $41,07\,\text{cm}^2$ ist.
2. Möglichkeit:
$-4,5x^2 + 24x = 41,07 \quad \Leftrightarrow \quad -4,5x^2 + 24x - 41,07 = 0$
Diskriminante $D = 24^2 - 4 \cdot (-4,5) \cdot (-41,07) = -163,26 < 0\,(\dagger)$
Also gibt es keine reelle Lösung und damit kein Trapez mit einem solchen Flächeninhalt.

46.



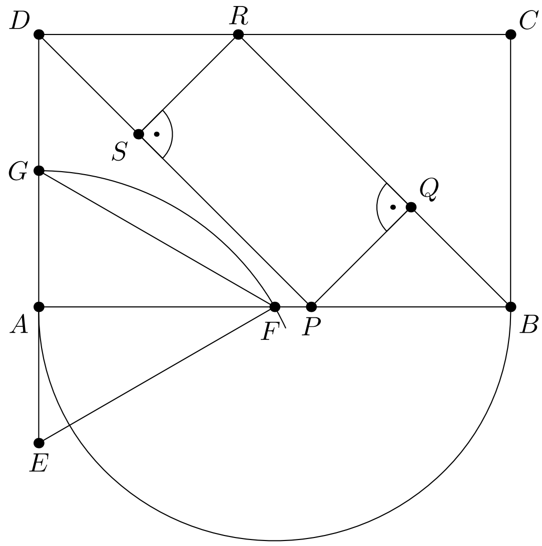
Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ und $\overline{BC} = \overline{AD} = b$. Für das einbeschriebene Rechteck $PQRS$ gilt: $\overline{AP} = \overline{RC} = b$.

(a) Zeichne die Figur für $a = 8\,\text{cm}$, und $b = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: $\varphi = \psi = 45°$.

(c) Berechne in deiner Zeichnung den Anteil der Fläche des Rechtecks $PQRS$ am Rechteck $ABCD$ in Prozent.

(d)



In der obigen Figur gilt:
– Der Punkt G halbiert die Seite $[AD]$.
– Das Dreieck EFG ist gleichseitig.
– Der Punkt E ist der Mittelpunkt des Kreisbogens durch den Punkt F.
– Der Punkt F ist der Mittelpunkt des Halbkreises mit dem Durchmesser $[AB]$.

- Zeichne die Figur für $b = 6\,\text{cm}$.
- Berechne erneut den Flächenanteil des Rechtrecks $PQRS$ am Rechteck $ABCD$ in Prozent.

(e) Es gilt allgemein: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot(a-b)\cdot(3b-a)}{ab} = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(3\dfrac{b}{a} - 4 + \dfrac{a}{b}\right)$.

Setzen wir $\dfrac{b}{a} = k$, so ergibt sich weiter: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(3k - 4 + \dfrac{1}{k}\right) = T(k)$.

- Zeige, dass der Term $T^*(k) = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k}\right)^2 + 2 - \sqrt{3}$ und $T(k)$ äquivalent sind.
- Berechne diejenige Belegung von k, für die das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Rechtecke $PQRS$ und $ABCD$ maximal wird. Gib das maximale Flächenverhältnis in Prozent an.
- Begründe: Die Konstruktion in der Aufgabe (d) liefert dieses Maximum.

Lösung: (a) Klar.

(b) Das Dreieck APD ist ein halbes Quadrat. $\Rightarrow \quad \varphi = 45°$.
Die drei Winkel mit dem Scheitel P ergeben einen gestreckten Winkel:
$\varphi + 90° + \psi = 180° \quad \Rightarrow \quad \psi = 45°$.

(c) **Wir rechnen im Folgenden ab und zu nur mit Maßzahlen.**
$\overline{PB} = 8 - 5 = 3\,\text{cm}. \quad 3 = \dfrac{\overline{PQ}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \quad \overline{PQ} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = 1,5 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} = \overline{SR} = \overline{DS}$.

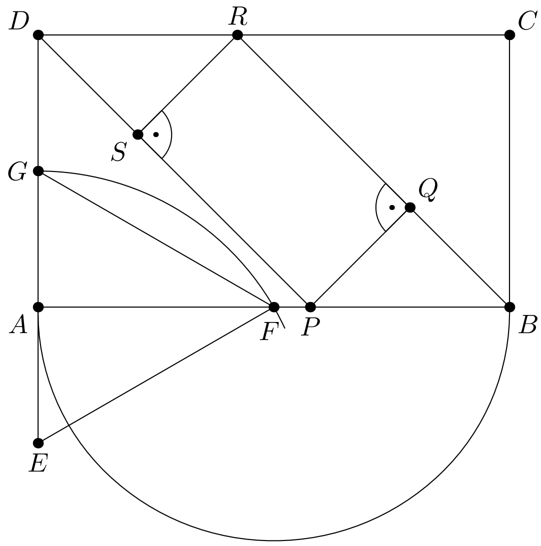
$\overline{PD} = 5 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{PS} = 5\sqrt{2} - 1,5\sqrt{2} = 3,5\sqrt{2}\,\text{cm}$.

$A_{PQRS} = \overline{PQ} \cdot \overline{RS} = 1,5\sqrt{2} \cdot 3,5\sqrt{2} = 10,5\,\text{cm}^2$.

$A_{ABCD} = 40\,\text{cm}^2$.

$\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{10,5\,\text{cm}^2}{40\,\text{cm}^2} = 0,2625 = 26,25\%$.

(d)



- Klar.
- Die Strecke [AF] stellt die Höhe des gleichseitigen Dreiecks EFG mit einer Seitenlänge von 6 cm dar. Also gilt:
  $\overline{AF} = 3\sqrt{3}\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad a = 2 \cdot \overline{AF} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$.
  $\overline{PB} = 6\sqrt{3} - 6 = 6 \cdot (\sqrt{3} - 1)\,\text{cm}$.

  $\overline{PQ} = \dfrac{\overline{PB}}{\sqrt{2}} = \dfrac{6 \cdot (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})\,\text{cm} = \overline{DS}$.

  $\overline{PS} = 6\sqrt{2} - 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = (9\sqrt{2} - 3\sqrt{6})\,\text{cm}$.
  $A_{PQRS} = 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot (9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}) = (72\sqrt{3} - 108)\,\text{cm}^2$.

$A_{ABCD} = 6 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(72\sqrt{3} - 108)\,\text{cm}^2}{36\sqrt{3}\,\text{cm}^2} = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}26795 \approx 26{,}80\,\%\,.$$

(e) Es gilt allgemein: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot (a-b) \cdot (3b-a)}{ab} = -\dfrac{1}{2} \cdot \left(3\dfrac{b}{a} - 4 + \dfrac{a}{b}\right)$.

Setzen wir $\dfrac{b}{a} = k$, so ergibt sich weiter: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = -\dfrac{1}{2} \cdot \left(3k - 4 + \dfrac{1}{k}\right) = T(k)$.

- $$\begin{aligned} T^*(k) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k}\right)^2 + 2 - \sqrt{3} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - 2\sqrt{3} + 3k\right) + 2 - \sqrt{3} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - 2\sqrt{3} + 3k - 4 + 2\sqrt{3}\right) \\ T^*(k) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} + 3k - 4\right) = T(k) \end{aligned}$$

- $\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k} = 0$

  $\Leftrightarrow \quad 1 = k\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad k = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{b}{a}$.

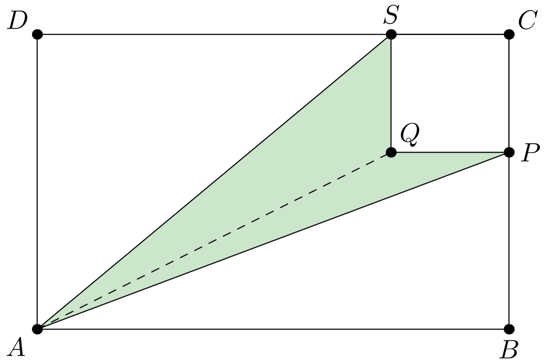
  $T(k)_{max} = T\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}26795 \approx 26{,}80\%$.

- Es gilt $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad a = b\sqrt{3}$

  In der Aufgabe (d) hattest du mit $b = 6\,\text{cm}$ konstruiert. Für die Höhe im gleichseitigen Dreieck EFG der Konstruktion (d) ergibt sich dann $\overline{AF} = 3\sqrt{3}\,\text{cm}$. Weil der Punkt F gleichzeitig Mittelpunkt des Halbkreises ist, gilt $a = 2 \cdot 3\sqrt{3}\,\text{cm} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$. Also ergibt sich:

  $k = \dfrac{b}{a} = \dfrac{6\,\text{cm}}{6\sqrt{3}\,\text{cm}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, wie in der Lösung (e) schon errechnet.

47.



Aus dem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ und $\overline{BC} = \overline{AD} = b$ werden Quadrate mit der Seitenlänge x herausgeschnitten. Dadurch entstehen Vierecke $AP_nQ_nS_n$.

(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ für $a = 8\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ und das Viereck $AP_1Q_1S_1$ für $x = 2\,\text{cm}$.

(b) Gib alle Belegungen von x an, für die es solche Vierecke $AP_nQ_nS_n$ gibt.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Vierecke $AP_nQ_nS_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

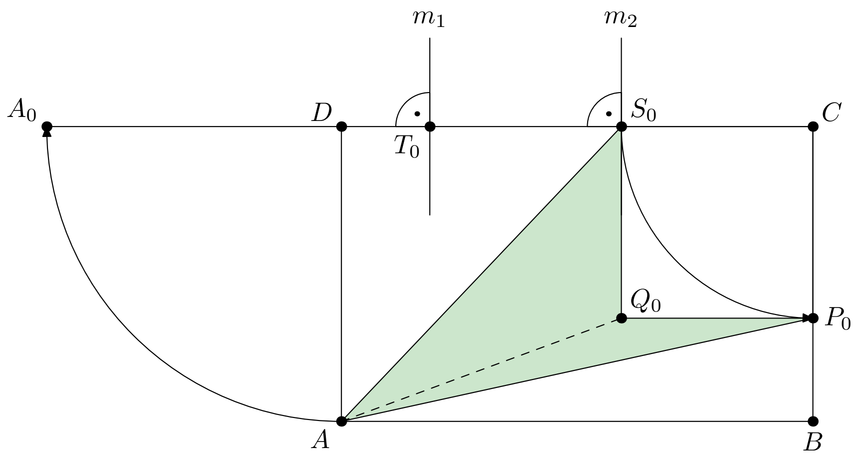
$$A(x) = -x^2 + \frac{1}{2}(a+b)\cdot x$$

Tipp: Deute die Strecken $[P_nQ_n]$ und $[Q_nS_n]$ jeweils als Grundlinien der Teildreiecke AP_nQ_n bzw. AQ_nS_n.

(d) Unter allen Vierecken $AP_nQ_nS_n$ gibt es das Viereck $AP_0Q_0S_0$, dessen Flächeninhalt maximal ist.

Zeige, dass $x = \frac{1}{4}(a+b)$ das Viereck $AP_0Q_0S_0$ liefert.

(e)



In der obigen Figur gilt:

- Der Punkt D ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von Punkt A zum Punkt A_0.
- Der Punkt C ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von Punkt P_0 zum Punkt S_0.
- Der Punkt T_0 ist der Mittelpunkt der Strecke $[A_0C]$.
- Der Punkt S_0 ist der Mittelpunkt der Strecke $[T_0C]$.

Begründe anhand dieser Konstruktion, dass das Viereck $AP_0Q_0S_0$ dasjenige mit dem maximalen Flächeninhalt ist.

Lösung: (a) Klar.

(b) $x \in]0,5[_{\mathbb{R}}$.

(c) Wir rechnen mit der Formel: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2}\cdot$ Grundlinie $\cdot$ Höhe: In den Dreiecken AP_nQ_n bzw AQ_nS_n gilt:

$$A_{AP_nQ_n} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (b-x) \quad = \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}x^2 \tag{5.1}$$

$$A_{AQ_nS_n} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (a-x) \quad = \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}x^2 \tag{5.2}$$

$$(1)+(2): \quad A_{AP_nQ_nS_n} = \frac{1}{2}(a+b) \cdot x - x^2 \tag{5.3}$$

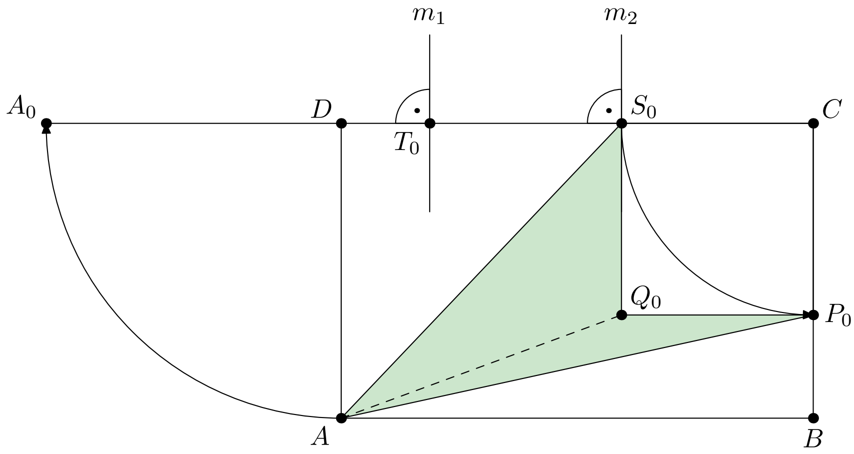
Die Gleichung (3) ist die geforderte.

(d)

$$\begin{aligned}
A(x) &= -x^2 + \frac{1}{2}(a+b) \cdot x \\
&= -\left[x^2 - \frac{1}{2}(a+b) \cdot x + \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2\right] \\
&= -\left[\left(x - \frac{1}{4}(a+b)\right)^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2\right] \\
A(x) &= -\left(x - \frac{1}{4}(a+b)\right)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2
\end{aligned}$$

$x = \frac{1}{4}(a+b)$ liefert $A_{max} = \dfrac{(a+b)^2}{16}$.

(e)

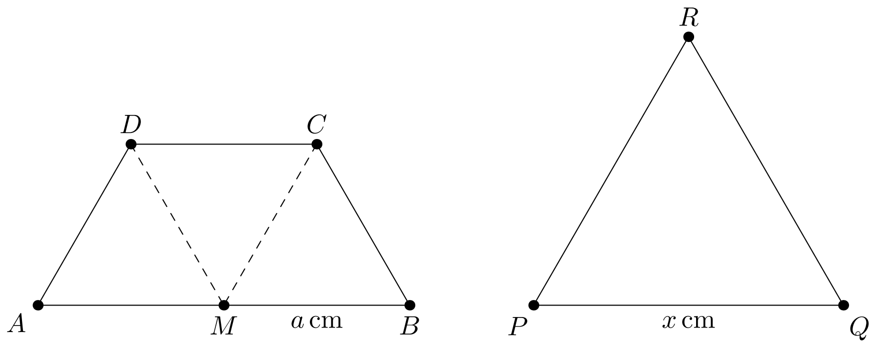


Hier gilt $\overline{A_0C} = a + b$.

Der Punkt T_0 halbiert die Strecke $[A_0C]$: $\overline{T_0C} = \dfrac{a+b}{2}$.

Der Punkt S_0 halbiert die Strecke $[T_0C]$: $\overline{S_0C} = \dfrac{a+b}{4} = x$.

48.



Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ ist aus drei kongruenten gleichseitigen Dreiecken mit der jeweiligen Seitenlänge von $a\,\mathrm{cm}$ zusammengefügt worden. Dieses Trapez und das gleichseitige Dreieck PQR mit der Seitenlänge $x\,\mathrm{cm}$ sollen den gleichen Umfang besitzen.

(a) Zeige, dass dann $x = \dfrac{5}{3}a$ gilt.

(b) Berechne das Verhältnis der Flächen der beiden Figuren.

(c) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ größer als der des Dreiecks PQR?

Lösung: (a) Gleicher Umfang: $5a = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{5}{3}a\,.$

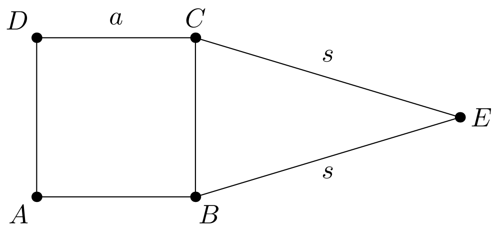
(b) $A_{\text{Trapez}} = 3 \cdot \dfrac{a^2}{4}\sqrt{3} = \dfrac{3}{4}a^2\sqrt{3}\,.$

$$A_{\Delta\, PQR} = \frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\left(\frac{5}{3}a\right)^2}{4}\sqrt{3} = \frac{25}{36}a^2\sqrt{3}\,.$$

$$\frac{A_{\Delta\, PQR}}{A_{\text{Trapez}}} = \frac{\frac{25}{36}a^2\sqrt{3}}{\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}} = \frac{25}{36}\cdot\frac{4}{3} = \frac{100}{108}\left(=\frac{25}{27}\right).$$

(c) $A_{\Delta\, PQR} \mathrel{\widehat{=}} 100\%\,.$
Nach Lösung (b) gilt $A_{\text{Trapez}} \mathrel{\widehat{=}} 108\%\,.$
Dann ist also der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ um 8% größer als der des Dreiecks PQR.

49.



Die Figur $ABECD$ setzt sich aus dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a und dem gleichschenkligen Dreieck BEC mit $\overline{BE} = \overline{CE} = s$ zusammen. Das Dreieck BEC und das Quadrat $ABCD$ haben den gleichen Umfang.

(a) Zeige: Es muss $s = 1,5a$ gelten.

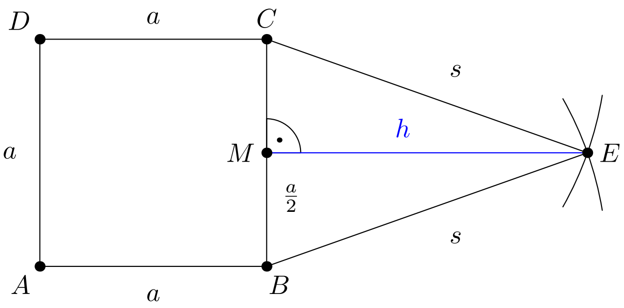
(b) Zeichne die Fgur für $a = 3\,\text{cm}$.

(c) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte des Dreiecks BEC und des Quadrates $ABCD$ in Prozent.

(d) Wie lang müsste die Schenkellänge s sein, damit die Flächeninhalte des Quadrates $ABCD$ und des Dreiecks BEC gleich groß werden?

Lösung: (a) $u_{BEC} = a + s + s = 2s + a \qquad u_{ABCD} = 4a$
$2s + a = 4a \quad \Leftrightarrow \quad s = 1,5a\,.$

(b)



Die beiden Kreisbögen mit dem Radius $r = 1,5 \cdot 3\,\text{cm} = 4,5\,\text{cm}$ und den Mittelpunkten B bzw. C schneiden sich im Punkt E.

(c) ΔBEM: $\quad h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (1,5a) - (0.5a)^2 = 2.25a^2 - 0.25a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow \quad h = a\sqrt{2}$

$$A_{\Delta BEC} = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2}{2}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad A_{ABCD} = a^2\,.$$

$$\frac{A_{\Delta BEC}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{a^2}{2}\sqrt{2}}{a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071 = 70,71\%$$

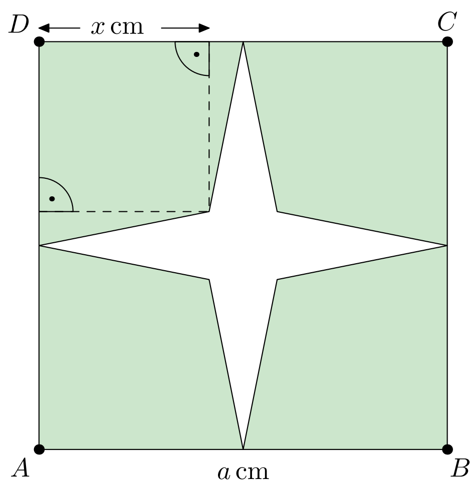
(d) $h^2 = s^2 - \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}}\,.$

$$A_{\Delta BEC} = A_{ABCD} \quad : \quad \frac{a}{2}\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} = a^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} = a \quad \Big|^2$$

$$\Rightarrow \quad s^2 - \frac{a^2}{4} = 4a^2 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 = \frac{16a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{a}{2}\sqrt{17} \approx 2,06 \cdot a\,.$$

50.



Schneidet man aus dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a cm die vier getönten kongruenten Vierecke weg, so bleibt der weiße Stern im Zentrum übrig.

(a) Zeichne die obige Figur für $a = 6$ und $x = 2,5$.

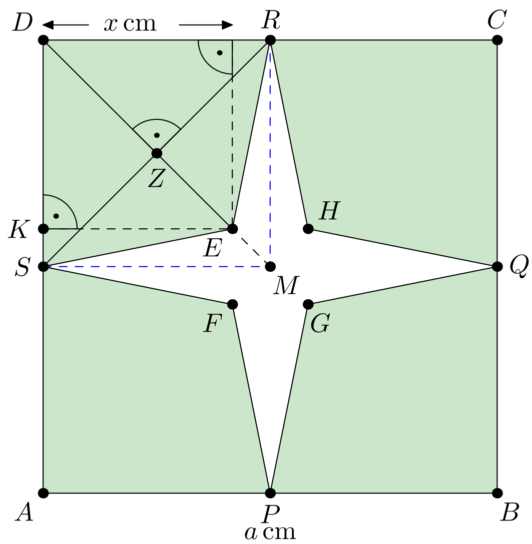
(b) Begründe: Jedes dieser vier getönten kongruenten Vierecke ist ein Drachenviereck.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A des weißen Sterns gilt in Abhängigkeit von x:
$$A(x) = (36 - 12x)\,\text{cm}^2$$
.

(d)
- Berechne $A(3)$ und deute dein Ergebnis mit Hilfe der Zeichnung.
- Berechne $A(1,5)$ und deute dein Ergebnis mit Hilfe der Zeichnung.

(e) Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Sterns $3,6\,\text{cm}^2$ beträgt.

Lösung: (a)



(b) Das Viereck $SMRD$ ist ein Quadrat, dessen Diagonalen $[DM]$ und $[SR]$ folgende Eigenschaften besitzen:

- $[SR] \perp [DM]$. Wegen $E \in [DM]$ folgt $[SR] \perp [DE]$.
- DM ist sowohl die Symmetrieachse des Quadrates $SMRD$ als auch die des Vierecks $SERD$.

Also ist das Viereck $SERD$ ein achsensymmetrischer Drachen.

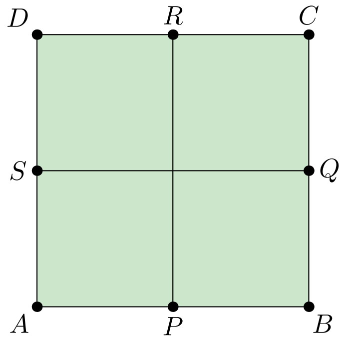
(c) $A_{SERD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SR} \cdot \overline{DE}$. (*)

$[SR]$ ist eine Diagonale des Quadrates $SMRD$ mit der Seitenlänge 3 cm: $\Rightarrow$ $\overline{SR} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.
$[DE]$ ist eine Diagonale des Quadrates mit der Seitenlänge $\overline{KD} = x\,\text{cm}$ und der Diagonale $[DE]$: $\Rightarrow$ $\overline{DE} = x\sqrt{2}\,\text{cm}$.
Mit (*) folgt dann:

$$A_{SERD} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2}\,\text{cm}^2 = 3x\,\text{cm}^2\,.$$

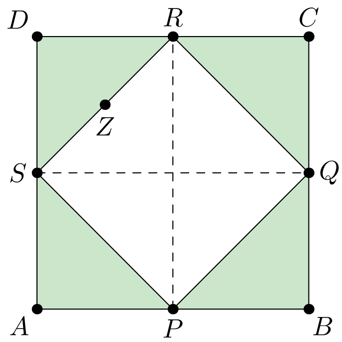
$$A_{\text{Stern}} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{SERD} = 36\,\text{cm}^2 - 4 \cdot 3x\,\text{cm}^2 = (36 - 12x)\,\text{cm}^2\,.$$

(d)
- $A(3) = (36 - 12 \cdot 3)\,\text{cm}^2 = 0\,\text{cm}^2\,.$
  Für $x = 3$ deckt sich das Drachenviereck $SERD$ mit dem Quadrat $SMRD$. Das geschieht auf die gleiche Weise mit den drei restlichen Drachenvierecken. Dann sieht die Figur so aus:



  D.h. der Stern entartet zu zwei gekreuzten Strecken $[PR]$ und $[SQ]$, deren Flächeninhalt 0 ist.

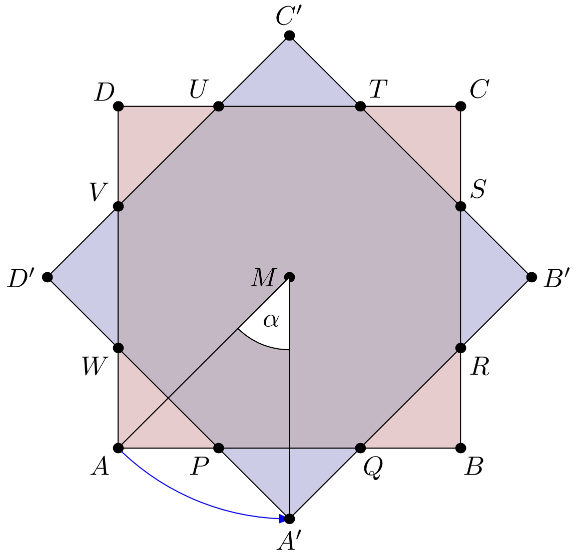
- $A(1,5) = (36 - 12 \cdot 1,5)\,\text{cm}^2 = 18\,\text{cm}^2\,.$
  Für $x = 1,5$ kommt der Punkt E auf den Diagonalenschnittpunkt Z des Drachenvierecks $SERD$ zu liegen; d.h. das Drachenviereck entartet zum gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck SRD. Damit wird der Stern zu einem einbeschriebenen Quadrat dessen Eckpunkte jeweils auf einem Mittelpunkt der Seiten des Quadrates $ABCD$ fallen. Dann sieht die Figur so aus:



  Anhand der gestrichelten Diagonalen des zum Quadrat $PQRS$ entarteten Sterns erkennst du, dass dieses Quadrat halb so groß wie das äußere Quadrat $ABCD$ ausfällt, was auch die obige Rechnung bestätigt.

(e) $36 - 12x = 3,6 \quad \Leftrightarrow \quad 32,4 = 12x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,7.$

51.



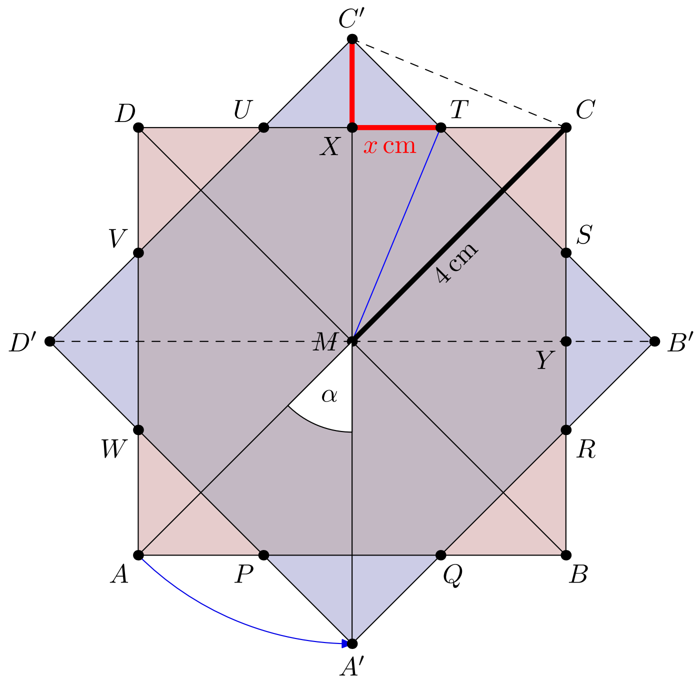
Das Quadrat $A'B'C'D'$ ist dadurch entstanden, dass das Quadrat $ABCD$ um seinen Mittelpunkt M um einen Winkel mit dem Maß α so gedreht worden ist, dass bestimmte Symmetrieachsen vom Ur- und vom Bildquadrat zur Deckung kommen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$.

(b) Wie groß ist α? Begründe deine Antwort.

(c)
- Ist das Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig?
- Berechne den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUVW$.

Lösung: (a)



(b) $\alpha = 45°$.
Es gilt z.B.: $MD' \perp MA'$. Die Diagonale $[AC]$ halbiert diesen rechten Winkel.

(c)
- Aus Symmetriegründen sind die vier Dreiecke, die über das Quadrat $ABCD$ hinausragen und die vier Dreiecke, die über das gedrehte Quadrat $A'B'C'D'$ hinausragen, alle kongruent. Also sind alle Seiten des fraglichen Achtecks geich lang.
Die Diagonalen der Quadrate $ABCD$ und $A'B'C'D'$ schließen paarweise einen 45°-Winkel ein. Also haben alle Innenwinkel des Achtecks das Maß $180° - 45° = 135°$.
Also ist das Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig.

- Subtrahierst du vom gedrehten Quadrat $A'B'C'D'$ die Flächen der vier Dreiecke, die über das Quadrat $ABCD$ hinausragen, dann erhältst du den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUVW$.
Betrachte z.B. das Dreieck UTC'. Aus Symmetriegründen muss es gleichschenklig-rechtwinklig sein. Also gilt: $\overline{XT} = \overline{XC'} = x\,\text{cm}.$.
Das Dreieck $MCXC'$ ist gleichschenklig: $\overline{MC} = \overline{MC'} = 4\,\text{cm}$.
Damit gilt einerseits: $\overline{MX} = (4 - x)\,\text{cm}$.   (*)
Das Viereck $MYCX$ ist ein Quadrat, dessen Diagonale 4 cm lang ist. Damit gilt andererseits: $\overline{MX} = \frac{4}{\sqrt{2}}\,\text{cm}$.

Mit (*) ergibt sich:

$$4 - x = \frac{4}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = 4 - \frac{4}{\sqrt{2}} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} .$$

Das Dreieck UTC' ist genauso groß wie ein Quadrat mit der Seitenlänge $x\,\text{cm}$.

$$A_{UTC'} = x^2\,\text{cm}^2 = \left(4 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{cm}^2 = 16 \cdot \frac{2 - 2\sqrt{2} + 1}{2}\,\text{cm}^2 .$$

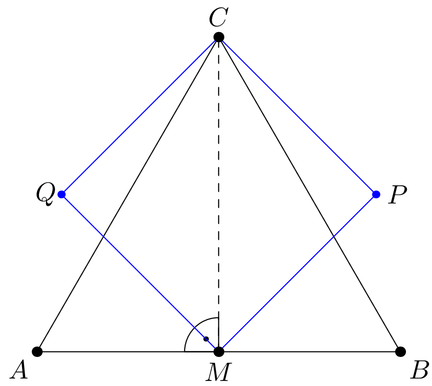
$$A_{UTC'} = 8 \cdot (3 - 2\sqrt{2})\,\text{cm}^2 .$$

Wegen $A_{PQRSTUVW} = A_{A'B'C'D'} - 4 \cdot A_{UTC'}$ folgt:

$$A_{PQRSTUVW} = \frac{1}{2} \cdot 8^2\,\text{cm}^2 - 4 \cdot 8 \cdot (3 - 2\sqrt{2})\,\text{cm}^2$$

$$A_{PQRSTUVW} = 32 \cdot [1 - (3 - 2\sqrt{2})]\,\text{cm}^2 = 32 \cdot [2\sqrt{2} - 2]\,\text{cm}^2$$
$$A_{PQRSTUVW} = 64 \cdot (\sqrt{2} - 1)\,\text{cm}^2 \approx 26,51\,\text{cm}^2 .$$

52.



Das Dreieck ABC ist gleichseitig. Das Viereck $MPCQ$ ist ein Quadrat.

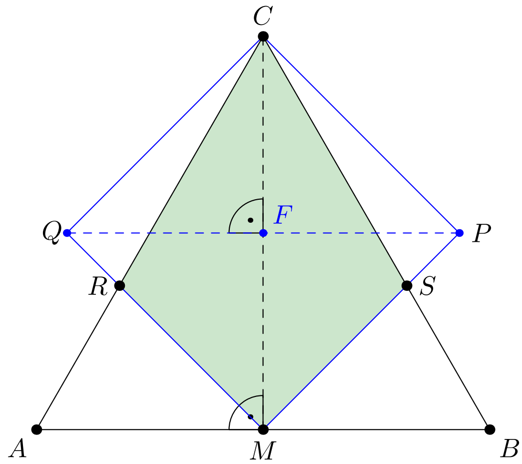
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC größer als der des Quadrates $MPCQ$?

(c) Im Inneren des Dreiecks ABC liegt ein Viereck.
Um welches besondere Viereck handelt es sich? Begründe deine Antwort.

(d) Zeige: Für den Umfang u des gezeichneten Quadrates $MPCQ$ gilt:
$u = 6\sqrt{6}\,\text{cm}$.

Lösung: (a)



(b) Flächeninhalt A_Δ des Dreiecks ABC: $A_\Delta = \frac{6^2}{4} \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

Jedes Quadrat darf sich auch „Drachenviereck“ nennen. Am einfachsten kommst du mit der Flächenformel für das Drachenviereck zum Ziel:

Hier: $A_{MPCQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MC}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2 \text{cm}^2 = 13{,}5\,\text{cm}^2$.

$\frac{13{,}5\,\text{cm}^2}{9\sqrt{3}}\,\text{cm}^2 \approx 0{,}8660 = 86{,}60\%$

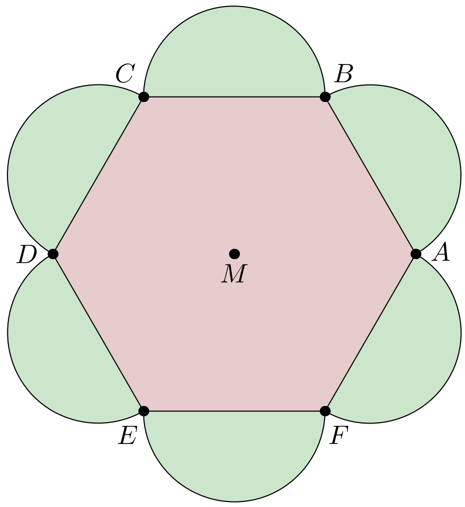
$100\% - 86,60\% = 13,40\%$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist etwa um $13,40\%$ größer als der des Quadrates $MPCQ$.

(c) Das Viereck $MSCR$ ist ein achsensymmetrisches Drachenviereck.
Begründung:

- Seine Diagonalen stehen (wie auch die des Quadrates $MPCQ$) aufeinander senkrecht.
- Die Gerade MC ist die Sysmmetrieachse des Drachenvierecks.

(d) $u = 4 \cdot \overline{MP} = 4 \cdot \overline{MF}\sqrt{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{cm} = 6\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$.

53.

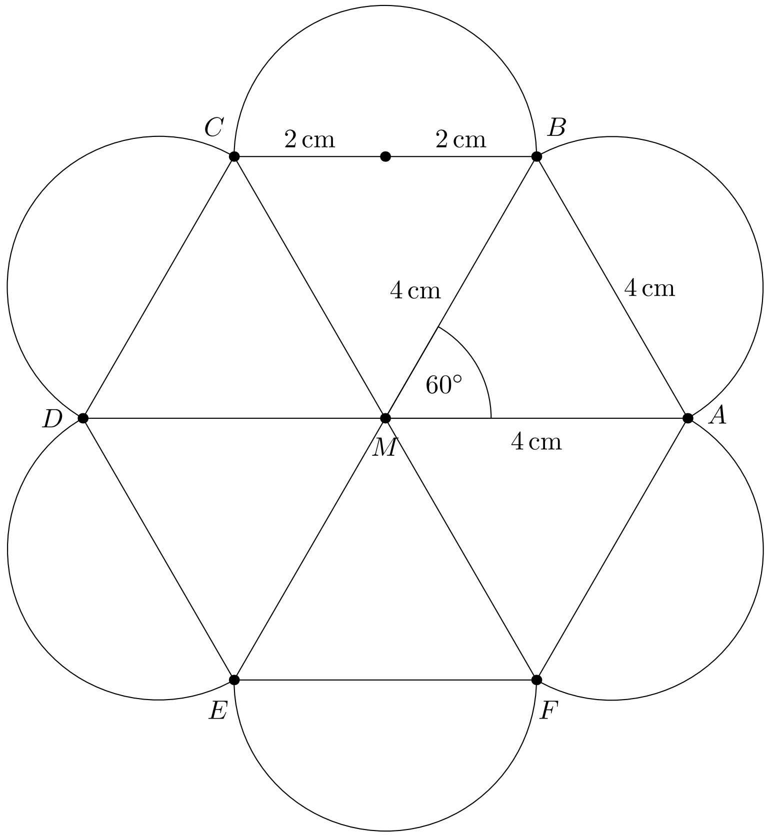


Das Sechseck $ABCDEF$ mit dem Mittelpunkt M ist regelmäßig.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AD} = 8\,\mathrm{cm}$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A der Figur. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

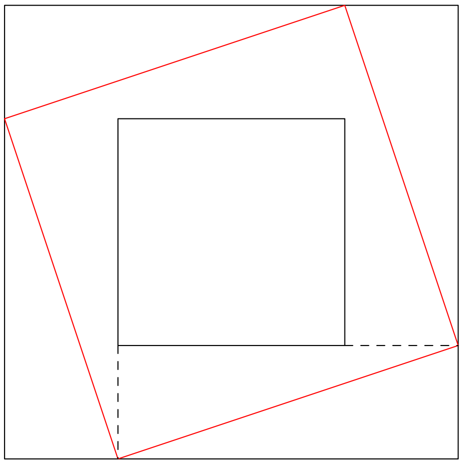
Lösung: (a)



(b) Die drei Diagonalen zerlegen jedes regelmäßige Sechseck in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke. In unserem Fall hat jedes dieser gleichseitigen Dreiecke eine Seitenlänge von 4 cm.
Die sechs kongruenten Halbkreise lassen sich paarweise zu drei Vollkreisen mit dem Radius $r = 2\,\text{cm}$ zusammenfügen.

Also: $A = \left(6 \cdot \dfrac{4^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2^2 \cdot \pi\right)\,\text{cm}^2 \approx 79,27\,\text{cm}^2$.

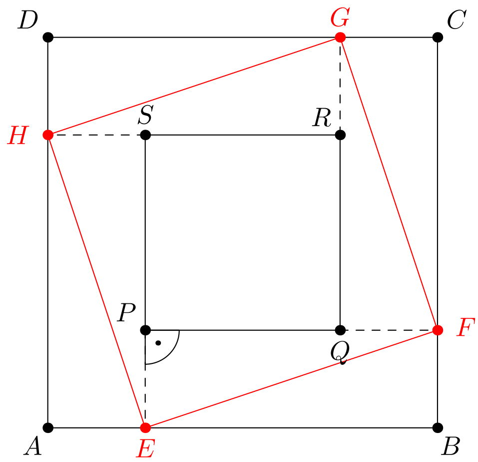
54.



Das große Quadrat hat einen Umfang von $81,6\,\mathrm{cm}$ und das kleine Quadrat hat einen Umfang von $34\,\mathrm{cm}$. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Berechne den Flächeninhalt des mittleren Quadrates auf verschiedene Weise:

- Mit Hilfe der Berechnung der Seitenlänge des mittleren Quadrates
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

Lösung:

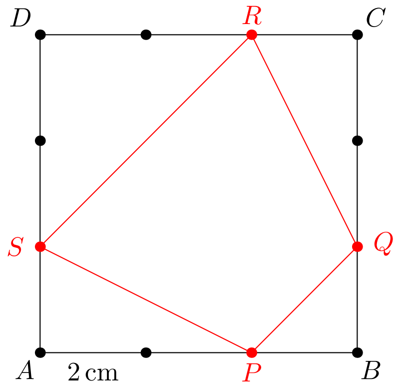


- Es gilt: $\overline{AB} = 81,6\,\mathrm{cm} : 4 = 20,4\,\mathrm{cm}$ und $\overline{PQ} = 34\,\mathrm{cm} : 4 = 8,5\,\mathrm{cm}$.
  Dann folgt: $\overline{QF} = \overline{PE} = (20,4\,\mathrm{cm} - 8,5\,\mathrm{cm}) : 2 = 5,95\,\mathrm{cm}$.
  Weiter folgt: $\overline{PF} = 8,5\,\mathrm{cm} + 5,95\,\mathrm{cm} = 14,45\,\mathrm{cm}$.
  $\Delta\,EFP$: $\overline{EF}^2 = A_{EFGH} = \overline{PF}^2 + \overline{PE}^2 = (14,45\,\mathrm{cm})^2 + (5,95\,\mathrm{cm})^2$
  $\Rightarrow \quad A_{EFGH} = 244,205\,\mathrm{cm}^2$.
- **1. Möglichkeit:** $A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{\Delta\,EBF}$
  $A_{EFGH} = (20,4\,\mathrm{cm})^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45\,\mathrm{cm} \cdot 5,95\,\mathrm{cm} = 244,205\,\mathrm{cm}^2$.

  2. Möglichkeit: $A_{EFGH} = A_{PQRS} + 4 \cdot A_{\Delta\,EFP}$
  $A_{EFGH} = (8,5\,\mathrm{cm})^2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45\,\mathrm{cm} \cdot 5,95\,\mathrm{cm} = 244,205\,\mathrm{cm}^2$.

  Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

55.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Jede Quadratseite ist in drei Abschnitte eingeteilt, die jeweils 2cm lang sind. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

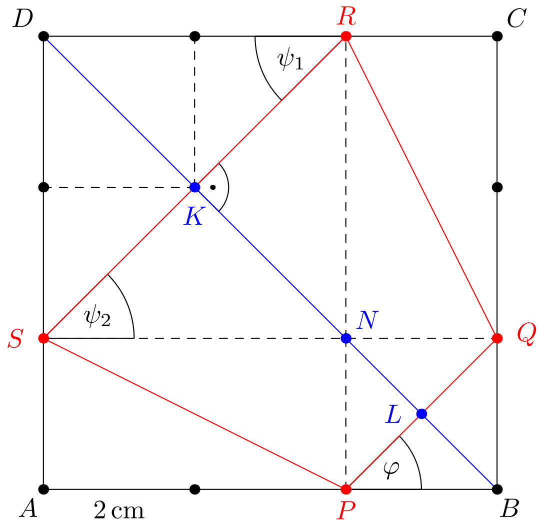
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ besitzt zwei parallele Seiten.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ auf zwei verschiedene Arten:

- Mit Hilfe der Berechnung der zugehörigen Formelgleichung
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

Lösung: (a)



(b) Das Dreieck SRD ist gleichschenklig-rechtwinklig . $\Rightarrow$ $\psi_1 = 45°$.
Dann gilt auch $\psi_2 = 45°$ (Z-Winkel) .
Das Dreieck PBQ ist gleichschenklig-rechtwinklig . $\Rightarrow$ $\varphi = 45°$.
Also folgt: $[PQ] \parallel [SR]$.
Das Viereck $PQRS$ ist ein (achsensymmetrisches) Trapez..

(c) •

Für die Trapezfläche A gilt: $A_{PQRS} = \dfrac{\overline{SR} + \overline{PQ}}{2} \cdot \overline{KL}$.

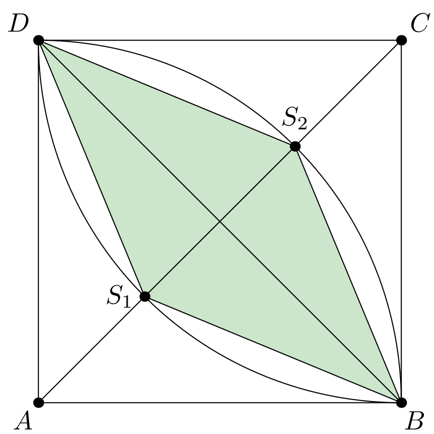
Die Strecke $[SR]$ ist die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge $4\,\text{cm}$. Also folgt: $\overline{SR} = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$.
$[DK]$, $[NB]$ und $[PQ]$ sind jeweils Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge $2\,\text{cm}$.
Also folgt: $\overline{DK} = \overline{NB} = \overline{PQ} = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$ und $\overline{LB} = \sqrt{2}\,\text{cm}$.
Im Quadrat $ABCD$ gilt: $\overline{DB} = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$.
Damit gilt: $\overline{KL} = 6\sqrt{2}\,\text{cm} - 2\sqrt{2}\,\text{cm} - \sqrt{2}\,\text{cm} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.

Und damit gilt: $A_{PQRS} = \dfrac{4\sqrt{2}\,\text{cm} + 2\sqrt{2}\,\text{cm}}{2} \cdot 3\sqrt{2}\,\text{cm} = 18\,\text{cm}^2$.

• Das Trapez $PQRS$ ist von vier rechtwinkligen Dreiecken eingeschlossen. Zwei von ihnen sind kongruent.
$A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta\,APS} - A_{\Delta\,SRD} - A_{\Delta\,PBQ}$.

$A_{PQRS} = 36\,\text{cm}^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\,\text{cm}^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\,\text{cm}^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\,\text{cm}^2 = 18\,\text{cm}^2$.

56.



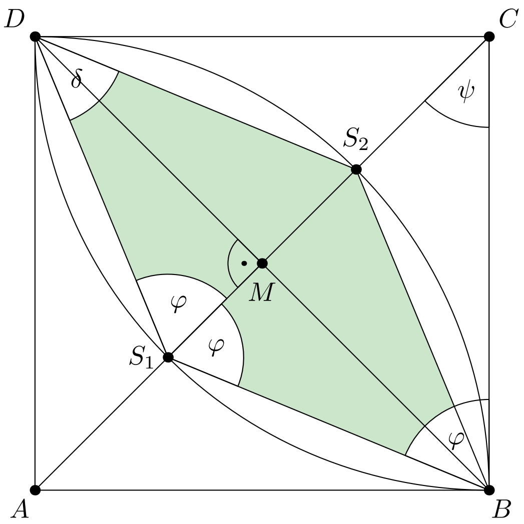
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte A und C.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Vierecks S_1BS_2D.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck S_1BS_2D ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



Das Viereck S_1BS_2D ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(b) Im Quadrat $ABCD$ halbiert die Diagonale $[AC]$ den rechten Winkel DCB. Also gilt: $\psi = 45°$.
Das Dreieck S_1BC ist gleichschenklig. $\Rightarrow$ $\varphi = (180° - 45°) : 2 = 67{,}5°$.
$\Rightarrow$ $\sphericalangle BS_1D = 2 \cdot \varphi = 135° = \sphericalangle DS_2B$.
$\Rightarrow$ $\delta = \sphericalangle S_1DS_2 = \sphericalangle S_2BS_1 = (360° - 4 \cdot 67{,}5°) : 2 = 45°$.

(c) $A_{\text{Drachen}} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{S_1S_2}$.

$\overline{BD} = 6 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm}\,(\approx 8{,}49\,\text{cm})$.

Wegen $\overline{S_1C} = 6\,\text{cm}$ folgt $\overline{AS_1} = \overline{CS_2} = (6 \cdot \sqrt{2} - 6)\,\text{cm}\,(\approx 2{,}49\,\text{cm})$.

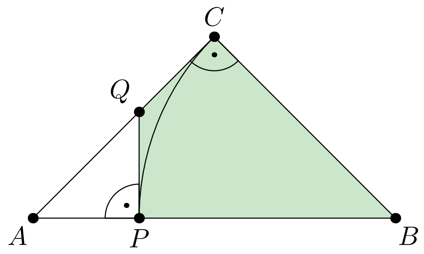
Dann ist $\overline{S_1S_2} = \left[6 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \left(6 \cdot \sqrt{2} - 6\right)\right]\ \text{cm} = \left(12 - 6\sqrt{2}\right)\ \text{cm}\,(\approx 3{,}51\,\text{cm})$.

$$A_{\text{Drachen}} = \frac{1}{2} \cdot \left[6\sqrt{2} \cdot \left(12 - 6\sqrt{2}\right)\right]\ \text{cm}^2 .$$

$$A_{\text{Drachen}} = \left(36\sqrt{2} - 36\right)\ \text{cm}^2 (\approx 14{,}91\,\text{cm}^2) .$$

$$\frac{A_{\text{Drachen}}}{A_{\text{Quadrat}}} = \frac{(36\sqrt{2} - 36)\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4142 = 41{,}42\% .$$

57.



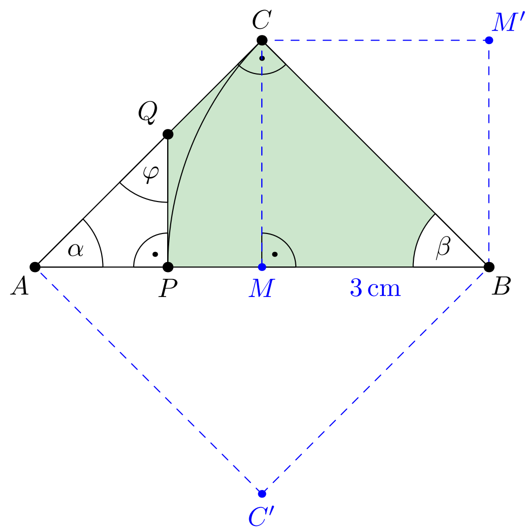
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt B.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke ABC und APQ sind zueinander ähnlich.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC nimmt das Dreieck APQ ein? Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Es gilt $\alpha = \beta = 45°$. Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck APQ gilt aber auch $\alpha = \varphi = 45°$. Also stimmen die beiden Dreiecke ABC und APQ paarweise in ihren Innenwinkelmaßen überein. Damit sind sie zueinander ähnlich.

(c) Weil die beiden Dreiecke ABC und APQ zueinander ähnlich sind, gilt für den Ähnlichkeitsfaktor k z.B.:

$$k = \frac{\overline{AP}}{\overline{BC}}.$$

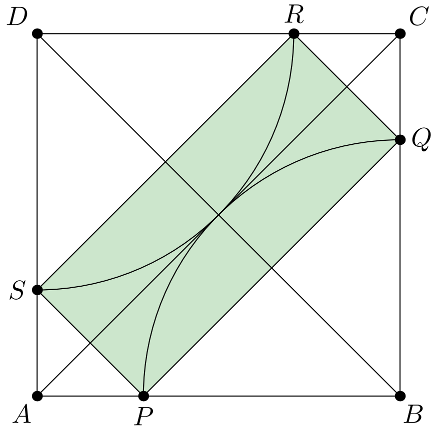
Das Dreieck MBC ist ein halbes Quadrat mit der Daigonalenlänge $\overline{BC} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.

$\overline{AP} = \overline{BA} - \overline{BP} = \overline{BA} - \overline{BC} = (6 - 3\sqrt{2})\,\text{cm}$.

Damit folgt $k = \dfrac{(6 - 3\sqrt{2})\,\text{cm}}{6\,\text{cm}}$.

$$\text{Und} \quad \frac{A_{\Delta\, APQ}}{A_{\Delta\, ABC}} = k^2 = \left[\frac{(6-3\sqrt{2})\,\text{cm}}{(3\sqrt{2})\,\text{cm}}\right]^2 = 3-2\sqrt{2} \approx 0,1716 = 17,16\%\,.$$

58.



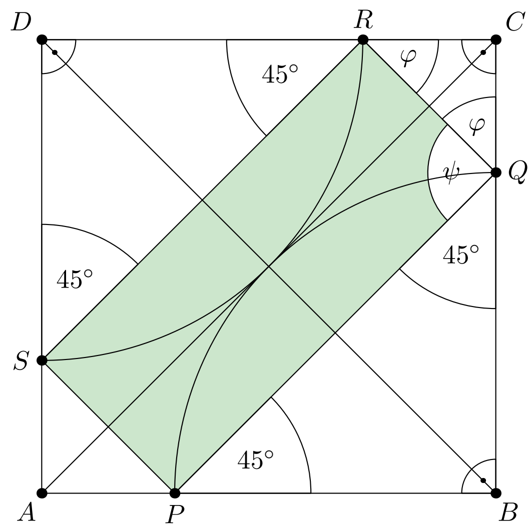
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte B und D.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Rechteck.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck $PQRS$ ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Die beiden Dreiecke PBQ und SRD sind gleichschenklig-rechtwinklig. Also haben ihre spitzen Innenwinkel das Maß $45°$.
Weiter gilt: $\overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{BQ} = \overline{DC} - \overline{DR} = \overline{CR}$. Also ist auch das Dreieck RQC

gleichschenklig-rechtwinklig. Dann gilt $\varphi = 45°$.
Am Punkt Q gilt somit: $45° + \psi + 45° = 180° \quad \Rightarrow \quad \psi = 90°.$.
Aus Symmetriegründen sind dann auch die drei restlichen Innenwinkel des Vierecks $PQRS$ rechte Winkel. Also handelt es sich hierbei um ein Rechteck.

(c) Eine mögliche Strategie: $A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot (A_{\Delta\, PBQ} + A_{\Delta\, RQC})$

$$A_{\Delta\, PBQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 \text{ cm}^2 = 9\,\text{cm}^2\,.$$

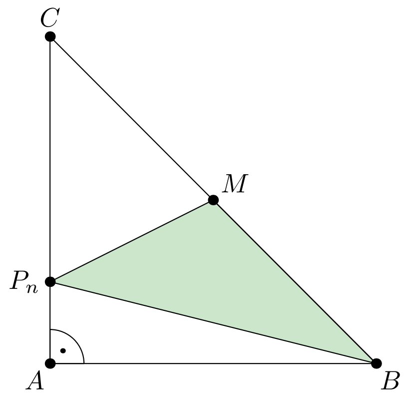
$$A_{\Delta\, RQC} = \frac{1}{2} \cdot \left(6 - 3\sqrt{2}\right)^2 \text{ cm}^2 = (27 - 18\sqrt{2})\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{PQRS} = 36\,\text{cm}^2 - 2 \cdot [9\,\text{cm}^2 + (27 - 18\sqrt{2})\,\text{cm}^2] = (36\sqrt{2} - 36)\,\text{cm}^2\,.$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(36\sqrt{2} - 36)\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = \frac{(36(\sqrt{2} - 1)\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2}$$

$$= \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142 = 41,42\%$$

59.



Der Punkt M halbiert die Hypotenuse $[BC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC .
Punkte P_n mit $\overline{AP_n} = x\,\text{cm}$ wandern auf der Kathete $[AC]$, so dass laufend Dreiecke BMP_n erzeugt werden.

(a) Zeichne das Dreieck ABC für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ zusammen mit dem Dreieck BMP_1 für $x = 2$.

(b) Für welche Belegungen von x gibt es solche Dreiecke BMP_n ?

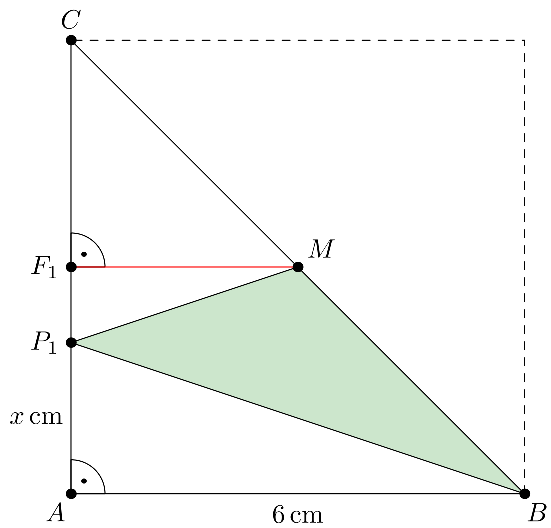
(c) Berechne den Flächeninhalt A der Dreiecke BMP_n in Abhängigkeit von x .
Ergebnis: $A(x) = (9 - 1,5x)\,\text{cm}^2$
Tipp: Fälle das Lot von M auf $[AC]$.

(d) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das Dreieck BMP_2, dessen Flächeninhalt $6,6\,\text{cm}^2$ beträgt. Berechne die zugehörige Belegung von x.

(e) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das gleichschenklige Dreieck BMP_3 mit der Basis $[MP_3]$. Berechne die zugehörige Belegung von x. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

(f) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das Dreieck BMP_3, dessen Flächeninhalt 20% der Fläche des Dreiecks ABC einnimmt. Berechne die zugehörige Belegung von x.

Lösung: (a)



(b) Für $x = 0$ ergibt sich das maximale Dreieck. Für $x = 6$ entartet das betreffende Dreieck zur Doppelstrecke $[BC]$.
Also gibt es Dreiecke für $x \in [0;\, 6[_{\mathbb{R}}$.

(c) Eine mögliche Strategie: Berechne jeweils den Flächeninhalt der Dreiecke ABP_n und P_nMC in Abhängigkeit von x. Subtrahiere die beiden Flächeninhalte dann vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

$$A_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{\Delta\, ABP_n} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot x\,\text{cm} = 3x\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{\Delta\, P_nMC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_nC} \cdot \overline{F_nM} = \frac{1}{2} \cdot (6-x)\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = (9 - 1,5x)\,\text{cm}^2\,.$$

$$A(x) = [18 - 3x - (9 - 1,5x)]\,\text{cm}^2 = (9 - 1,5x)\,\text{cm}^2 = A_{\Delta\, P_nMC}\,.$$

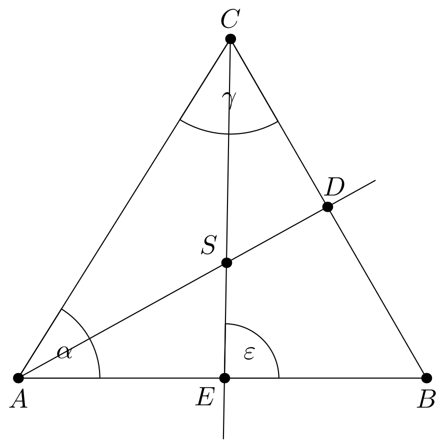
Kommentar: Die Flächeninhalte der Dreiecke BCP_n werden ständig durch deren Seitenhalbierende $[P_nM]$ halbiert.

(d) $9 - 1,5x = 6,6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,6$.

(e) Es muss gelten: $\overline{CP_n} = \overline{CM}$.
$\overline{CP_n} = (6 - x)\,\mathrm{cm}$.
Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck ABC ist ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $\overline{BC} = 6\sqrt{2}\,\mathrm{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{CM} = 3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.
Damit muss gelten: $6 - x = 3\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 - 3\sqrt{2} \approx 1,76$.

(f) $20\% = 0,2$.
$(9 - 1,5x)\,\mathrm{cm}^2 = 0.2 \cdot 18\,\mathrm{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - 1,5x = 3,6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3,6$.

60.

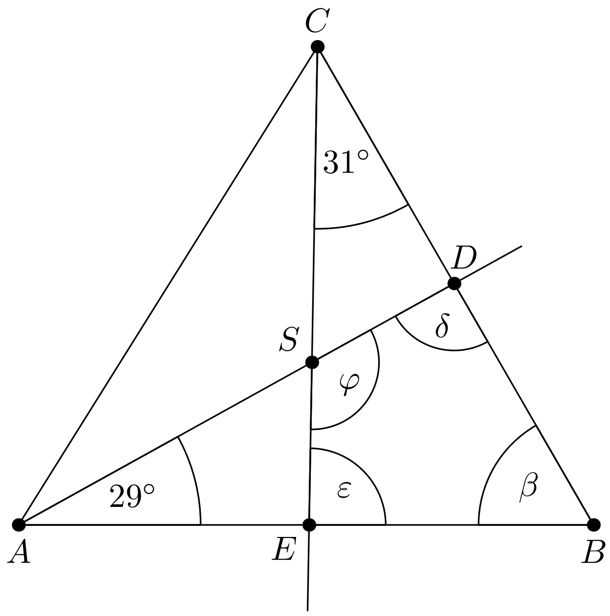


In der Figur gilt: $\overline{AB} = 6\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 58°$ und $\gamma = 62°$.
Die Halbgeraden $[CE$ und $[AD$ halbieren α und γ .

(a) Zeichne die Figur.

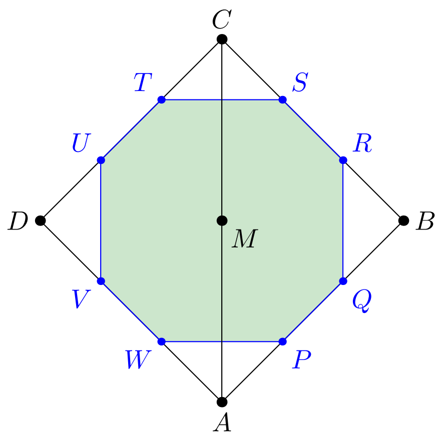
(b)
- Begründe: $\varepsilon = 89°$.
- Begründe: Das Viereck $EBDF$ ist kein achsensymmetrischer Drachen.
- Untersuche, ob das Viereck $EBDF$ ein Sehnenviereck ist.

Lösung: (a)



- $\Delta\, ABC$: $\beta = 180° - 58° - 62° = 60°$.
  $\Delta\, EBC$: $\varepsilon = 180° - 31° - 60° = 89°$.
- $\Delta\, ABD$: $\delta = 180° - 29° - 60° = 91° \neq 89°$.
  Also ist das Viereck $EBDF$ kein achsensymmetrischer Drachen.
- Im Viereck $EBDF$ gilt: $\varepsilon + \delta = 180° \quad \Rightarrow \quad \varphi + \beta = 180°$. Also ist das Viereck $EBDF$ ein Sehnenviereck; d.h. es besitzt einen Umkreis.

61.



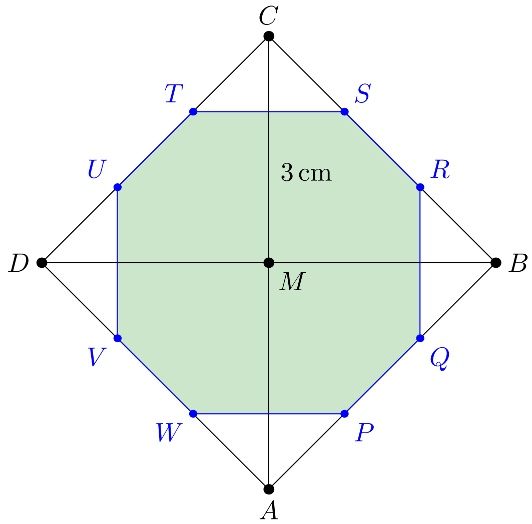
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. In dieses Quadrat ist das Achteck $PQRSTUV$ einbeschrieben worden.
Die Punktepaare (P, Q), (R, S), (T, U) und (V, W) teilen jeweils die Länge der Seite, auf der sie liegen, in drei gleiche Teile.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Untersuche rechnerisch, ob das einbeschriebene Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig ist.

(c) Berechne den Anteil der Fläche, den das Achteck am der Fläche des Quadrates $ABCD$ einnimmt, in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)

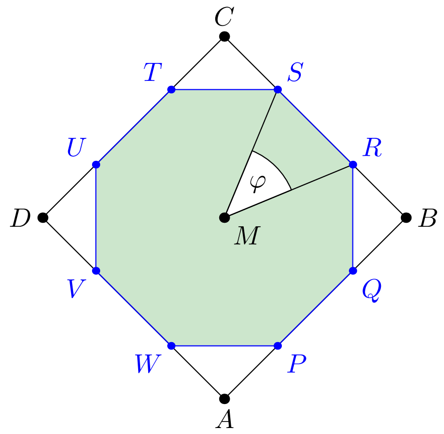


(b) Es gilt: $\Delta\, TSC \sim \Delta\, DBC$.
Weil z.B. $\overline{TC} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DC}$ gilt, folgt dann $\overline{TS} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DB} = \frac{1}{3} \cdot 6\,\text{cm} = 2\,\text{cm}$.
Andererseits gilt z.B.:
$\overline{BC} = 3 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{SR} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BC} = \sqrt{2}\,\text{cm} < 2\,\text{cm}$.
Also ist das Achteck nicht regelmäßig.

(c) Den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUVW$ kannst du am einfachsten dadurch berechnen, dass du vom Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ die Flächeninhalte der vier kongruenten weißen Dreiecke an seinen Eckpunkten subtrahierst. Den Flächeninhalt A jedes dieser Dreiecke berechnest du am besten mit der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.
$A_{PQRSTUVW} = \frac{1}{2} \cdot (6\,\text{cm})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} = 18\,\text{cm}^2 - 4\,\text{cm}^2 = 14\,\text{cm}^2$

$$\frac{A_{PQRSTUVW}}{A_{\Delta\, ABC}} = \frac{14\,\text{cm}^2}{18\,\text{cm}^2} = 0,\overline{7} \approx 77,78\,\%\,.$$

62.



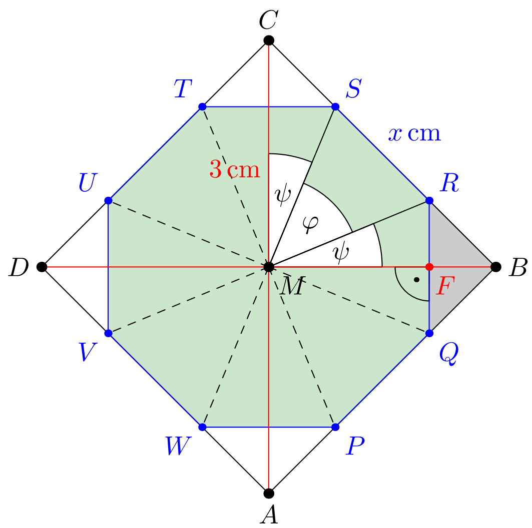
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. In dieses Quadrat ist das regelmäßige Achteck $PQRSTUV$ einbeschrieben worden.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 6\,\mathrm{cm}$.

(b) Berechne den Umfang u_8 dieses regelmäßigen Achtecks $PQRSTUV$. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

(c) Berechne den Anteil der Fläche, den das Achteck am der Fläche des Quadrates $ABCD$ einnimmt, in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



Die Mittelpunktswinkel aller Teildreiecke dieses regelmäßigen Achtecks haben alle das gleiche Maß $\varphi = 360° : 8 = 22,5°$. Aus Symmetriegründen gilt dann $\psi = 22,5° : 2 = 11,25°$.
Damit entsteht die Figur so, wie sie in der Angabe dargestellt ist.

(b) Das Dreieck MBC ist gleichschenklig-rechtwinklig, also ein halbes Quadrat. $\Rightarrow \quad \overline{BC} = 3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

Das Dreieck QBR ist gleichschenklig-rechtwinklig, also ein halbes Quadrat. Es sei $\overline{RQ} = x\,\text{cm}$. $\Rightarrow$ $\overline{RB} = \frac{x}{\sqrt{2}}\,\text{cm} = \overline{SC}$.
$\Rightarrow$ $\overline{BC} = 3\sqrt{2}\,\text{cm} = \left(2 \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} + x\right)\,\text{cm} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{2}}{\text{cm}}$.
$\Leftrightarrow$ $6 = 2x + x\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{6}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$
$x = 3(2-\sqrt{2})$. **(*)**
Dann ist $u_8 = 24(2-\sqrt{2})\,\text{cm} \approx 14{,}06\,\text{cm}$.

(c) Berechne zunächst den Flächeninhalt eines Teildreiecks z.B. $\Delta\, MQR$:

$A_{\Delta\, MQR} = \frac{1}{2} \cdot \overline{RQ} \cdot \overline{MF}$ mit $\overline{MF} = \overline{MB} - \overline{FB}$, wobei $\overline{MB} = 3\,\text{cm}$ gilt.

Weil das Dreieck QBR gleichschenklig-rechtwinklig ist, gilt:

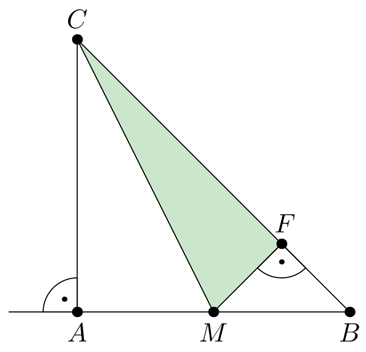
$$\overline{FB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{RQ} = \frac{1}{2} \cdot x\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{MF} = (3 - \frac{1}{2} \cdot x)\,\text{cm} \; .$$

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\, MQR} = \frac{1}{2} \cdot x\,\text{cm} \cdot \overline{MF} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (3 - \frac{1}{2} \cdot x)\,\text{cm}^2 \, .$$

Mit **(*)** aus der Lösung b) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
A_{\Delta\, MQR} &= \frac{1}{2} \cdot 3(2-\sqrt{2}) \cdot \left[3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (2-\sqrt{2})\right]\,\text{cm}^2 \\
&= \frac{3(2-\sqrt{2})}{2} \cdot \left[3 - 3 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]\,\text{cm}^2 = \frac{6-3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\text{cm}^2 \\
A_{\Delta\, MQR} &= \frac{9}{2} \cdot (\sqrt{2}-1)\,\text{cm}^2 \\
A_{PQRSTUVW} &= 8 \cdot A_{\Delta\, MQR} = 8 \cdot \frac{9}{2} \cdot (\sqrt{2}-1)\,\text{cm}^2 = 36 \cdot (\sqrt{2}-1)\,\text{cm}^2 \\
A_{ABCD} &= \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}^2 \\
\frac{A_{PQRSTUVW}}{A_{ABCD}} &= \frac{36 \cdot (\sqrt{2}-1)\,\text{cm}^2}{18\,\text{cm}^2} = 2 \cdot (\sqrt{2}-1) \approx 0{,}8284 = 82{,}84\% \quad .
\end{aligned}$$

63.



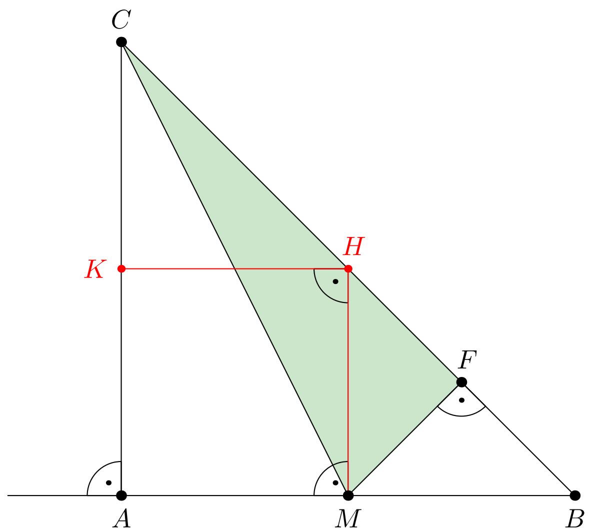
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Der Punkt M halbiert die Kathete $[AB]$.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächenanteil des getönten Dreiecks MFC am Dreieck ABC in Prozent.
Tipp: Zeichne geeignete Hilfslinien ein, die parallel zu den Katheten $[AB]$ bzw. $[AC]$ verlaufen.

(c) Untersuche, ob der Winkel ACB von CM halbiert wird.

Lösung: (a)



(b) Die beiden Dreiecke MBH und KHC sind kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke. Zusammen sind sie so groß wie das Quadrat $AMHK$.
Das bedeutet, dass das der Flächeninhalt des Dreiecks MBH ein Viertel des Flächeninhalts des Dreeicks ABC beträgt. Das Dreieck MBF ist halb so groß wie das Dreieck MBH.

Also gilt: $A_{\Delta\, MBF} = \frac{1}{8} \cdot A_{\Delta\, ABC}$.

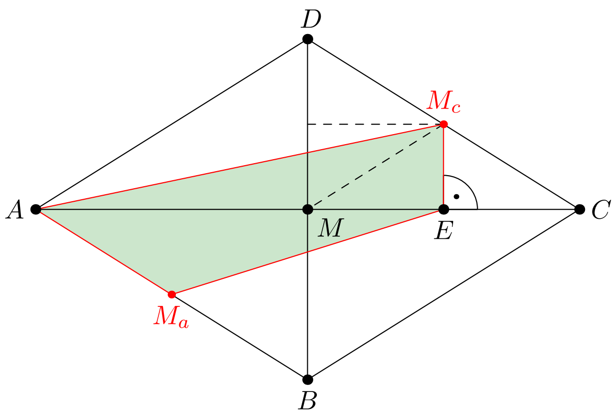
Die Dreiecke AMC und MBC haben den gleichen Flächeninhalt, weil ihre Grundlinien und Höhen jeweils gleich lang sind. Damit sind sie jeweils halb so groß wie das Dreieck ABC.

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\, MFC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta\, ABC} - \frac{1}{8} \cdot A_{\Delta\, ABC} = \frac{3}{8} \cdot A_{\Delta\, ABC} = 0{,}375 \cdot A_{\Delta\, ABC}\,.$$

Der Flächenanteil beträgt somit $37{,}5\%$.

(c) Nimm an, dass die Halbgerade $[CM$ den Winkel ACB halbiert.
Der Punkt M würde dann ebenfalls auf der Winkelhalbierenden liegen. Dann müsste sein Abstand zum Schenkel $[CA$ der gleiche sein wie zum Schenkel $[CB$. Es müsste also gelten $\overline{AF} = \overline{AM}$.
Im rechtwinkligen Dreieck MBF ist $[MB]$ die Hypotenuse; d.h.
$\overline{MF} < \overline{MB} = \overline{AM}$.
Also wird wird der Winkel ACB nicht von der Halbgeraden $[CM$ halbiert.

64.

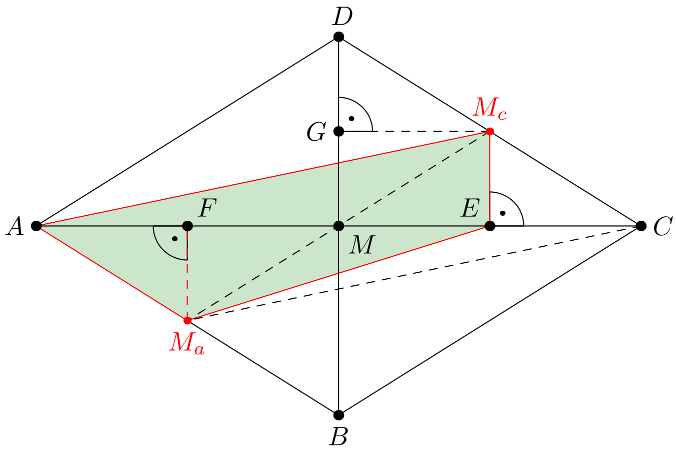


Das Viereck $ABCD$ ist eine Raute. Die Punkte M_a und M_c sind Seitenmittelpunkte.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BD} = 5\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächenanteil des getönten Vierecks AM_aEM_c am Viereck $ABCD$ in Prozent.

Lösung: (a)



(b) Die gestrichelten Hilfslinien in der Eingangsfigur machen dir klar, dass $A_{\Delta\, ECM_c} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta\, MCD}$ gilt.
Aus Symmetriegründen folgt dann: $A_{\Delta\, ECM_c} = \frac{1}{16} \cdot A_{ABCD}$.

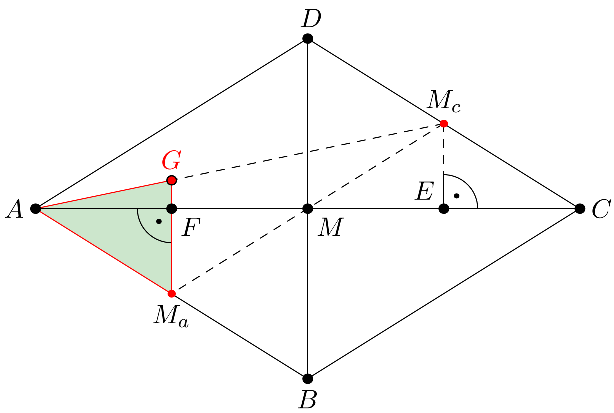
Die Strecke $[AM_c]$ stellt im Dreieck ACD eine Seitenhalbierende dar.
Also gilt: $A_{\Delta\, ACM_c} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta\, ACM_c}$.
Dann ist $A_{\Delta\, ACM_c} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCD}$.
Wegen $A_{\Delta\, AEM_c} = A_{\Delta\, ACM_c} - A_{\Delta\, ECM_c}$ folgt dann:
$A_{\Delta\, AEM_c} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCD} - \frac{1}{16} \cdot A_{ABCD} = \frac{3}{16} \cdot A_{ABCD}$.

Die beiden Dreiecke AM_aE und AEM_c besitzen die gleiche Grundlinie $[AE]$.
Wegen $\overline{FM_a} = \overline{EM_c}$ sind ihre Höhen gleich lang. Folglich gilt:
$A_{\Delta\, AM_aE} = A_{\Delta\, AEM_c} = \frac{3}{16} \cdot A_{ABCD}$.

Damit ist $A_{AM_aEM_c} = 2 \cdot \frac{3}{16} \cdot A_{ABCD} = \frac{3}{8} \cdot A_{ABCD}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{A_{AM_aEM_c}}{A_{ABCD}} = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\,\% \,.$$

65.

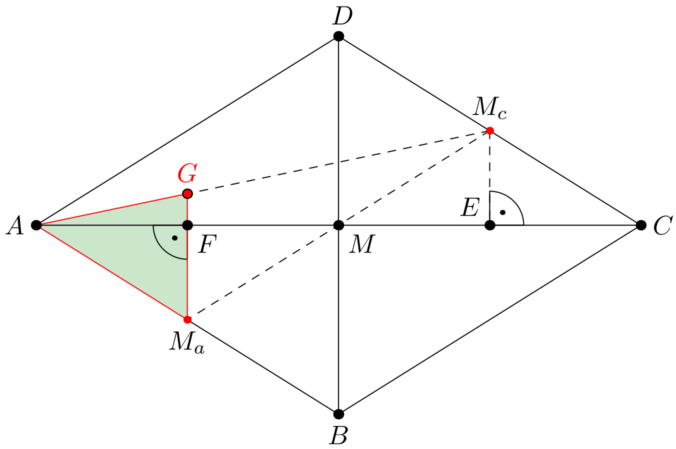


Das Viereck $ABCD$ ist eine Raute. Die Punkte M_a und M_c sind Seitenmittelpunkte.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BD} = 5\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächenanteil des getönten Dreiecks AM_aG am Viereck $ABCD$ in Prozent.

Lösung: (a)



(b) Den Flächeninhalt A des Dreiecks AM_aG kannst du mit

$$A_{\Delta\,AM_aG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{M_aG} \cdot \overline{FA}\,. \qquad \textbf{(*)}$$

berechnen.

Nun ist $\overline{M_aG} = \overline{M_aF} + \overline{FG}\,.$ **(**)**

Es gilt offensichtlich $\overline{FA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AC}\,.$

Analog gilt $\overline{M_aF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{4} \cdot \overline{BD}\,.$

Weiter machen dir die gestrichelten Hilfslinien anhand der Ähnlichkeitssätze Folgendes klar:

$\overline{AF} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AC}$ und $\overline{AF} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AE}$

Dann gilt: $\overline{FG} = \frac{1}{3} \cdot \overline{EM_c} = \frac{1}{3} \cdot \overline{M_aF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{12} \cdot \overline{BD}\,.$

Mit **(**)** ergibt sich dann $\overline{M_aG} = \frac{1}{4} \cdot \overline{BD} + \frac{1}{12} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BD}\,.$

Mit **(*)** ergibt sich schließlich

$$A_{\Delta\, AM_aG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{BD} \cdot \frac{1}{4} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}\,.$$

Mit $A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}$ folgt:

$$\frac{A_{\Delta\, AM_aG}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}} = \frac{1}{12} = 0{,}08\overline{3} = 8{,}\overline{3}\%\,.$$

6. Abbildung durch zentrische Streckung

1. Untersuche, ob die Punkte $P(0|0)$, $Q(6|2,5)$ und $R(11|4,5)$ auf einer Geraden liegen.

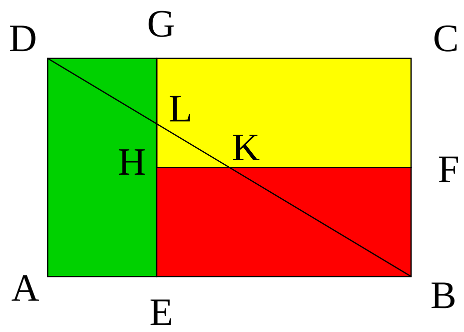
Lösung: Es gibt mehrere Möglichkeiten: z.B. über Steigungsdreiecke, Vektoren, Geradengleichungen. Antwort: Nein, aber ziemlich knapp.

2. Gegeben sind die Punkte $A(3|-2)$ und $B(1|2)$.
   Um wie viel Prozent muss man die Strecke $[AB]$ mindestens verlängern, bis man auf die y-Achse trifft? Löse die Aufgabe auf verschiedene Weise.

Lösung: Z.B. über Steigungsdreiecke oder die Länge von Strecken.
Antwort: Um 50%.

3. Verlängere die Strecke $[DE]$ mit $D(-4|2)$ und $E(2|3)$ um 10% ihrer Länge über den Punkt E hinaus bis zum Punkt E^*.
   Berechne die Koordinaten des Punktes E^*.

Lösung: $E^*(2,6|3,1)$.

4. 

   Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.
   Zusätzlich ist noch die Diagonale $[DB]$ eingezeichnet. Alle drei Rechtecke im Inneren haben den gleichen Flächeninhalt.

   (a) Gib alle zueinander ähnlichen Dreiecke an.

(b) Berechne für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ die Länge der Strecke $[AD]$. Zeichne dann die zugehörige Figur.

[Teilergebnis: $\overline{AD} = 4\,\text{cm}$]

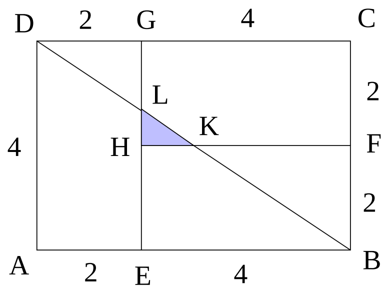
(c) Berechne den Flächenanteil des Dreiecks HKL am Rechteck $ABCD$.

Lösung:

(a) $\Delta LGD \sim \Delta HKL \sim \Delta KBF \sim \Delta EBL \sim \Delta DAB \sim \Delta DBC$

(b) Es sei $\overline{AD} = x\,\text{cm}$.
Weil alle Rechtecke im Inneren flächengleich sind, muss $\overline{DG} = \overline{BF} = \overline{FC} = 0,5x\,\text{cm}$ gelten.
Dann ist $\overline{EB} = (6 - 0,5x)\,\text{cm} = \overline{AD} = x\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad 6 = 1,5x \qquad \overline{AD} = 4\,\text{cm}$; d.h. alle inneren Rechtecke sind sogar **kongruent**.
Nun kannst du die Figur zeichnen.

(c)



$\Delta DLG \sim \Delta DBC$:

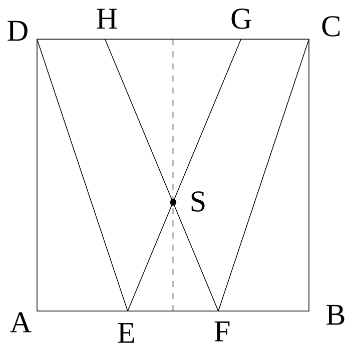
$$\frac{\overline{GL}}{2} = \frac{4}{6} \quad \Rightarrow \quad \overline{GL} = \frac{4}{3}$$

$$\overline{HL} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} = 0,5 \cdot \overline{GL}$$

Aus (a): $\Delta HKL \sim \Delta LGD$ mit dem Ähnlichkeitsfaktor $k = 0,5$.
$\Rightarrow \quad A(HKL) = 0,5^2 \cdot A(LGD) = 0,25 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3}\,\text{cm}^2 = \frac{2}{3}\,\text{cm}^2$

$$\frac{A(HKL)}{A(ABCD)} = \frac{2}{3} : 24 = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$$

5.



In der obigen Figur ist $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm. Es gilt: $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$.
Die Punkte G und H sind auf $[CD]$ beweglich und es gilt $\overline{DH} = \overline{GC} = x\,\text{cm}$.

(a) Zeichne die Figur für $x = 1{,}2$.

(b) Der Abstand des Punktes S von der Seite $[CD]$ sei $y\,\text{cm}$.
Zeige auf verschiedene Weise, dass für y gilt:

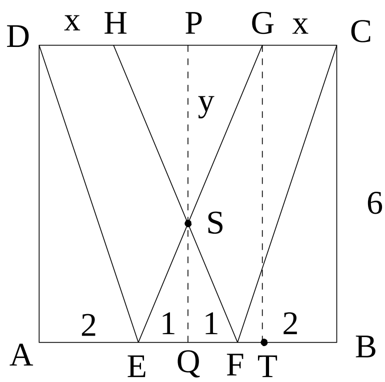
$$y = \frac{6 \cdot (3 - x)}{(4 - x)}.$$

Hinweis für eine Möglichkeit: Zeichne vom Punkt G ausgehend eine Hilfslinie ein und betrachte ähnliche Dreiecke.

(c) Berechne x auf verschiedene Weise so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks HSG doppelt so groß wie der des Dreiecks EFS wird.

Lösung: (a) –

(b)



Wenn y zunimmt (abnimmt), dann wird x größer (kleiner).

(c) **1. Möglichkeit** (mit der Hilfslinie $\overline{GT}$) :
Wegen $\overline{EB} = 4\,\text{cm}$ folgt $\overline{ET} = (4 - x)\,\text{cm}$.
$\Delta PSG \sim \Delta ETG$:

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PG}} = \frac{\overline{GT}}{\overline{ET}} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{3 - x} = \frac{6}{4 - x}.$$

Damit ergibt sich der gewünschte Ausdruck.
2. Möglichkeit (ohne die Hilfslinie $\overline{GT}$) :
Es gilt: $\overline{QS} = (6-y)\,\text{cm}$ und $\Delta PSG \sim \Delta ETG$:

$$\frac{\overline{SP}}{\overline{PG}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{EQ}} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{3-x} = \frac{6-y}{1}.$$

$\Rightarrow \quad y = (3-x)(6-y) = 18 - 3y - 6x + xy \quad \Leftrightarrow \quad y(x-4) = 6x - 18$, woraus die obige Beziehung folgt.

(d) **1. Möglichkeit** (elegant):
Es gilt $\Delta EFS \sim \Delta HSG$. Wenn das Dreieck HSG doppelt so groß wie das Dreieck EFS ist, dann muss für die entsprechenden Seitenlängen der Streckungsfaktor den Wert $\sqrt{2}$ besitzen.
Es muss z.B. gelten:
$\overline{HG} = \sqrt{2} \cdot \overline{EF}$, also $6 - 2x = \sqrt{2} \cdot 2$. Damit ergibt sich $x = 3 - \sqrt{2} \approx 1,59$.

2. Möglichkeit (aufwändig):
Es muss gelten: $A(HSG) = 2 \cdot A(EFS)$. Also: $\frac{1}{2} \cdot \overline{HG} \cdot \overline{PS} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{QS}$
$(3-x) \cdot y = 2 \cdot (6-y) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{12}{5-x}$.
Mit dem Ergebnis der Aufgabe (b) folgt dann

$$\frac{6 \cdot (3-x)}{(4-x)} = \frac{12}{5-x}$$

Diese Bruchgleichung führt dann auf die quadratische Gleichung

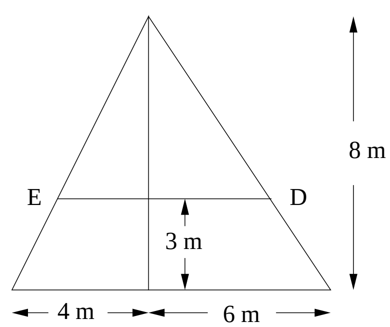
$$x^2 - 6x + 7 = 0 \quad \text{mit} \quad G =]0;3[_{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}\,.$$

Das Pluszeichen entfällt wegen $3 + \sqrt{2} > 3$.

6. Am 10. August wirft der Olympiaturm in München einen 406 m langen Schatten. Gleichzeitig wirft ein 2 m hoher Stab einen 2,8 m langen Schatten. Bestimme die Höhe des Olympiaturmes.

Lösung: Der Turm ist 290 m hoch.

7. Gegeben ist die Schnittzeichnung eines Dachstuhles. In 3 m Höhe soll ein Balken von E nach D eingesetzt werden. Wie lang ist der Balken?



Lösung: $\overline{DE} = 6,25\,\mathrm{m}$

8. Alkohol und Autofahren passen nicht zusammen. Das leuchtet ein. Aber die wenigsten wissen, wie langsam der Alkohol im Körper abgebaut wird. Der durchschnittliche Abbauwert beträgt lediglich 0,15 Promille stündlich. Weder Schlaf noch Mocca können dies beschleunigen. Wer z.B. nach einer Feier um Mitternacht einen Alkoholspiegel von 1,5 Promille erreicht hat, kann sich leicht ausrechnen, wann er/sie wieder restlos nüchtern ist. Denn bereits bei 0,3 Promille kann man sich durch auffälliges Fahrverhalten strafbar machen. Ab 0,5 Promille macht man sich strafbar, auch wenn nichts passiert ist, und ab 1,1 Promille ist man absolut fahruntauglich; es liegt eine Straftat vor.

   (a) Zeichne den zugehörigen Graphen. (Hinweis: Tragt zunächst auf der x-Achse die Uhrzeit ab: der Nullpunkt entspricht 24.00 Uhr - jede weitere Stunde entspricht 3 Kästchen. Tragt auf der y-Achse den Promillegehalt ab: $0,1$ Promille entspricht dabei 2 Kästchen.)

   (b) Um wie viel Uhr sind $1,1$ Promille, $0,5$ Promile und $0,3$ Promille erreicht?

   (c) Welche Promillezahl hat der Fahrer/die Fahrerin morgens um 7.40 Uhr?

   (d) Wenn du einen Fahrzeugführer vor den Gefahren des Autofahrens unter Alkoholeinfluss warnen möchtest, würdest du ihm den Text oder die Graphik in die Hand geben? (Begründe deine Antwort!)

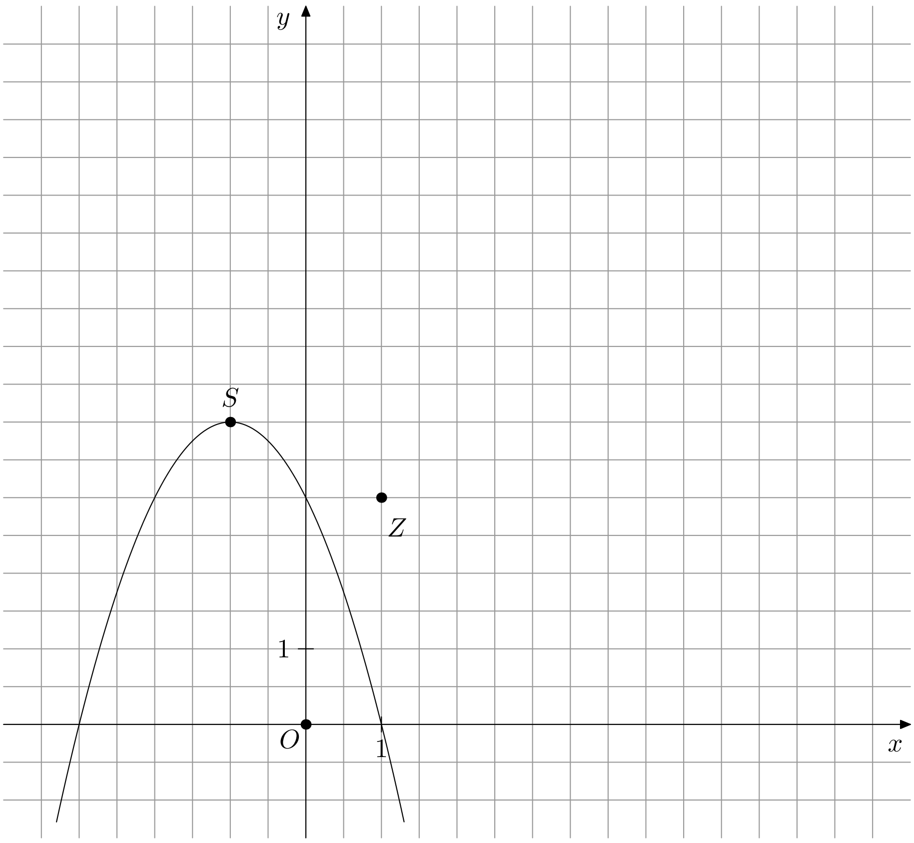
Lösung: (a) - -

(b) Der Fahrer erreicht 1,1 Promille um 2.40 Uhr, 0,5 Promille um 6.40 Uhr und 0,3 Promille um 8.00 Uhr.

(c) Morgens um 7.40 Uhr hat der Fahrer 0,35 Promille.

(d) - -

9. Die Parabel p mit Gleichung $p: y = -x^2 - 2x + 3$ wird einer zentrischen Streckung am Zentrum $Z(1 \mid 3)$ mit dem Streckungsfaktor $k = -1,5$ unterworfen, so dass eine Bildparabel p' entsteht. Ein Ausschnitt der Parabel p ist mit ihrem Scheitel S und dem Zentrum Z im Koordinatensystem dargestellt.
   Auf der Parabel p wandern Punkte $C_n(x \mid -x^2 - 2x + 3)$, die zusammen mit den Punkten $A(-3 \mid 0)$ und $B(0 \mid -1)$ Dreiecke $A_nB_nC_n$ erzeugen.



(a)
- Zeichne das Bild p' der Parabel p mit dem Scheitel S' ein.
- Zeichne für $x = -2,5$ das Dreieck ABC_1 ein.

(b) Berechne die Funktionsgleichung der Bildparabel p'.

[Ergebnis: $y = \frac{2}{3} \cdot (x-4)^2 + 1,5$]

(c) Die Gerade g mit der Gleichung $y = -2x + 3$ ist eine Tangente an die Parabel p.
Diese Tangente wird am Punkt Z auf die gleiche Weise zentrisch gestreckt, wie vorher die Parabel p. Dadurch entsteht die Bildgerade g'.
- Zeichne die Geraden g und g' ein.
- Weise nach, dass die Gerade g' eine Tangente an die Parabel p' ist.

(d) Das Dreieck ABC_1 hat einen Flächeninhalt von $2,875\,\text{cm}^2$. Mit der gleichen zentrischen Streckung wird dieses Dreieck ABC_1 auf das Dreieck $A'B'C_1'$ abgebildet.
- Zeichne das Dreieck $A'B'C_1'$ ein.
- Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C_1'$.

(e) Alle möglichen Dreiecke ABC_n werden durch die vorliegende zentrische Streckung auf die Dreiecke $A'B'C_n'$ abgebildet. Der Flächeninhalt A'_Δ der Dreiecke $A'B'C_n'$ lässt sich in Abhängigkeit vom Abszissenwert x der Punkte C_n auf die folgende

Weise darstellen:

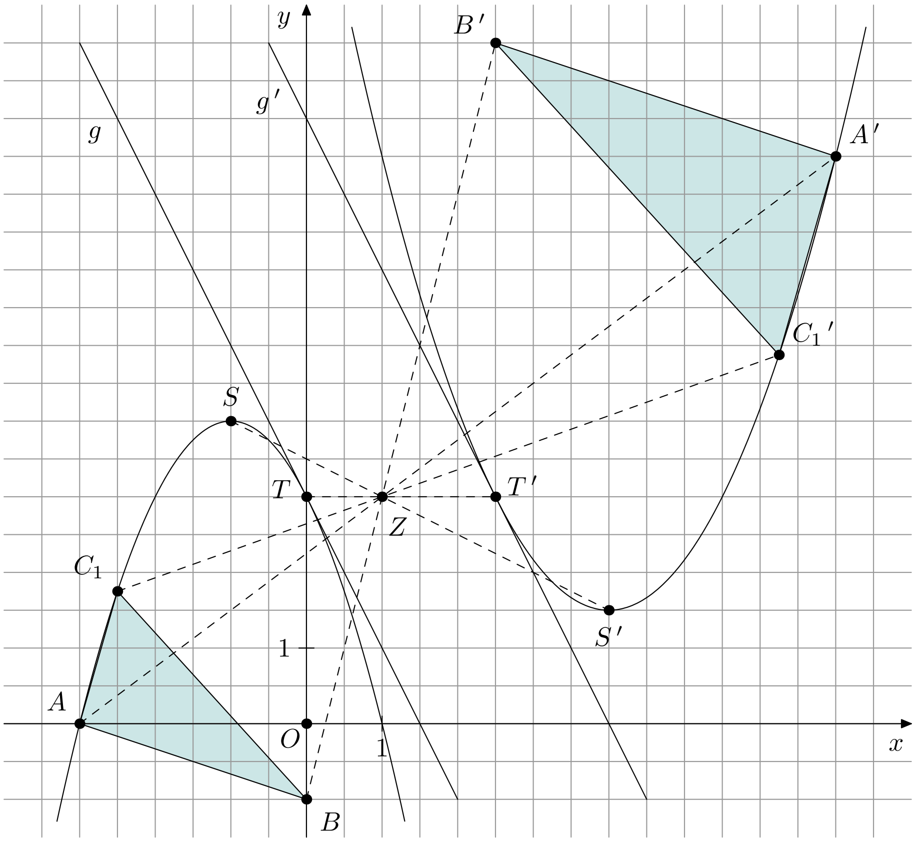
$$A'_{\Delta}(x) = (-3,375x^2 - 5,625x + 13,5)\,\mathrm{cm}^2$$

Zeige: Für den Flächeninhalt $A_{\Delta}(x)$ der Dreiecke ABC_n gilt in Abhängigkeit von x:

$$A_{\Delta}(x) = (-1,5x^2 - 2,5x + 6)\,\mathrm{cm}^2$$

(f) Begründe: Unter allen Bilddreiecken $A'B'C_n{}'$ ist das Dreieck $A'B'S'$ nicht das flächengrößte.

Lösung: (a) Siehe Zeichnung.



(b)
- Siehe Zeichnung.
- Zunächst ergibt sich $S(-1 \mid 4)$. Weiter sei $S'(x_S{}' \mid (y_S{}')$.

  Aus $\overrightarrow{ZS'} = k \cdot \overrightarrow{ZS}$ folgt: $\begin{pmatrix} x_S{}' & -1 \\ y_S{}' & -3 \end{pmatrix} = -1,5 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

  Daraus ergibt sich: $\begin{array}{rrcrcl} & x_S{}' - 1 & = & 3 & \Rightarrow & x_S{}' = 4 \\ \wedge & y_S{}' - 3 & = & -1.5 & \Rightarrow & y_S{}' = 1,5 \end{array}$

  Also: $S'(4 \mid 1,5)$.
  Die unvollständige Gleichung der Bildparabel p' lautet daher:
  $p' : y = a(x-4)^2 + 1,5$
  Du siehst nun: $T(0 \mid 3) \in p'$. Als Begründung dafür kannst du z.B. die „Fünf-Punkte-Regel" für die Zeichnung einer Normalparabel bei bekannten Scheitelkoordinaten heranziehen. Dann erhältst du (mit $k = -1,5$) durch Abzählen der

Kästchen: $T'(2,5 \mid 3)$.

$T'(2,5 \mid 3)$ in die Gleichung von p': $3 = a(2,5-4)^2 + 1,5 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}$

Somit ist das Ergebnis in der Aufgabe (b) bestätigt.

Anmerkung:

Der Wert des Formfaktors a' der Bildparabel p' lässt sich auch allgemein herleiten.

Gehe von einer Parabel p_0 aus, deren Scheitel im Ursprung liegt.

$p_0 : y = ax^2$ mit $a \neq 0$. Ein beliebiger Punkt $P_0(x_0 \mid ax_0^2) \in p$ wird einer zentrischen Streckung mit dem Zentrum $O = (0 \mid 0)$ und dem Streckungsfaktor $k \neq 0$ unterworfen. Sein Bildpunkt sei $P_0{}'(x' \mid y')$.

Dann gilt $\overrightarrow{OP_0{}'} = k \cdot \overrightarrow{OP_0}$:

$$\begin{pmatrix} x_0{}' \\ a'x_0{}'^2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x \\ ax^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrcll} & x_0{}' & = & k \cdot x & (1) \\ \wedge & a'x_0{}'^2 & = & k \cdot ax^2 & (2) \end{array}$$

Aus (1): $x = \frac{x_0{}'}{k}$ in (2): $a'x_0{}'^2 = k \cdot a \cdot \frac{x_0{}'^2}{k^2}$

Damit ergibt sich:

$$\boxed{a' = \frac{a}{k}}$$

Diese Beziehung zwischen den entsprechenden Formfaktoren gilt für alle möglichen zentrischen Streckungen von Parabeln.

(c)
- Siehe Zeichnung.
- Die Gerade g' muss zur Geraden g parallel liegen, denn jede zentrische Streckung ist winkeltreu.

  $g' : y = -2x + t'$ und $T'(2,5 \mid 3) \in g' : 3 = -2 \cdot 2,5 + t'$

  $\Rightarrow \quad t' = 8$ und $g' : y = -2x + 8$

  $p' \cap g' : \frac{2}{3} \cdot (x-4)^2 + 1,5 = -2x + 8 \quad | \cdot 3$

  $\ldots \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 10x + 12,5 = 0 \quad \Rightarrow \quad D^* = 100 - 8 \cdot 12,5 = 0$

  Also ist die Gerade g' eine Tangente an die Parabel p'.

  Allgemein gilt: Jede zentrische Streckung ist **„tangententreu“**.

(d)
- Siehe Zeichnung.
- Für die Inhalte A von allen möglichen Flächen gilt bei deren zentrischen Streckung mit dem Streckungsfaktor k: $A' = k^2 \cdot A$, wobei A' der Inhalt der Bildfläche ist.

  Hier gilt: $k = -1,5$ und $A = 2,875\,\text{cm}^2$.

  Also folgt $A' = (-1,5)^2 \cdot 2,875\,\text{cm}^2 = 6,46875\,\text{cm}^2$.

(e) $A'_\Delta(x) = k^2 \cdot A_\Delta(x)$

Also gilt hier: $(-3,375x^2 - 5,625x + 13,5)\,\text{cm}^2 = (-1,5)^2 \cdot A_\Delta(x) \quad |: 2.25$

$\Rightarrow \quad A_\Delta(x) = (-1,5x^2 - 2,5x + 6)\,\text{cm}^2$

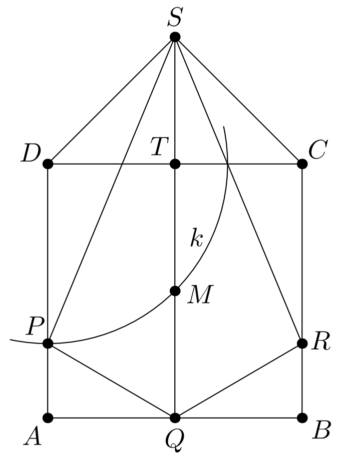
Anmerkung: Natürlich kannst du den Flächeninhalt $A_\Delta(x)$ auch direkt über die Flächendeterminante berechnen. Offensichtlich wäre dieser Weg aber weiter.

(f) 1. Möglichkeit: Durch eine Extremwertberechnung (Vorsicht!)

$$\begin{aligned}
A_\Delta(x) &= (-3,375x^2 - 5,625x + 13,5)\,\text{cm}^2 \\
&= -3,375(x^2 + \frac{5}{3}x - 4)\,\text{cm}^2 \\
&= -3,375\left[x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} - 4\right]\,\text{cm}^2 \\
&= -3,375\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{169}{36}\right]\,\text{cm}^2 \\
A_\Delta(x) &= \left[-3,375\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + 15,84375\right]\,\text{cm}^2
\end{aligned}$$

Jetzt wäre es fatal, einfach zu antworten: „$x = -\frac{5}{6}$ liefert ... “, denn dieses Rechenergebnis deckt sich zunächst nicht mit den Gegebenheiten in der Zeichnung! Warum? Nun, die Variable x ist als Abszissenwert der Punkte C_n festgelegt worden! Das bedeutet, dass dieser Abszissenwert zur Parabel p und nicht zur Parabel p' gehört.
Dieser x-Wert muss also erst noch der zentrischen Streckung unterworfen werden:
$x' = -\left(\frac{5}{6} + 1\right) \cdot (-1,5) = 2,75$. Wegen $Z(1 \mid \ldots)$ muss noch 1 addiert werden. Also beträgt der Abszissenwert des gesuchten Punktes unter den Punkten C_n, der den maximalen Flächeninhalt liefert: 3,75.
Aber der Punkt S' besitzt den Abszissenwert 4. Daher kann S' nicht der gesuchte Punkt sein.
2. Möglichkeit: anschaulich
Unter allen Punkten auf der Parabel p' müsste der Punkt S' den größten Abstand von der Grundlinie $[A'B']$ besitzen.
Andererseits muss der Punkt, der den größten Flächeninhalt liefern soll (nenne ihn z.B. $C^{*\prime}$), auf der Tangente an die Parabel p' liegen, die zur Grundlinie $[A'B']$ parallel verläuft. Die Tangente an die Parabel p' durch den Punkt S' verläuft aber im Gegensatz zur Strecke $[A'B']$ waagrecht. Also kann der Punkt S' nicht der „richtige“ Punkt sein. Der Punkt $C^{*\prime}$, der den größten Flächeninhalt liefert, liegt etwas links oberhalb des Punktes S'.

10. An das Quadrat $ABCD$ ist das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck DCS angefügt worden.
Der Punkt D ist der Mittelpunkt des Kreisbogens k durch den Quadratmittelpunkt M. Dadurch entsteht der achsensymmetrische Drachen $PQRS$.



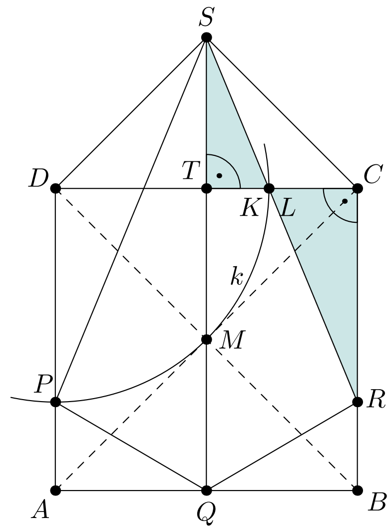
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Für die Länge der Seite $[AB]$ soll jetzt gelten: $\overline{AB} = 2a$.
Berechne damit den Anteil des Flächeninhalts der Drachenfigur $PQRS$ an der Gesamtfläche der Figur $ABCSD$ als Bruch und in Prozent.

(c) Welchen Flächeninhalt hätte das Quadrat $ABCD$, wenn die Dreiecksseite $[DS]$ $14,5\,\text{cm}$ lang wäre?

(d) Es sieht so aus, als ob der Kreisbogen k durch den Schnittpunkt der Strecke $[SR]$ mit der Strecke $[TC]$ verlaufen würde. Trügt der Anschein? Rechne wieder mit $\overline{AB} = 2a$.

Lösung: (a)



(b) Es gilt: $\overline{DC} = 2a$ und $\overline{TS} = a$ (Das ist die Dreieckshöhe.)
$A_{ABCSD} = A_{ABCD} + A_{DCS} = (2a)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = 5a^2$
$A_{PQRS} = \overline{QS} \cdot \overline{PR} = \frac{1}{2} \cdot (2a + a) \cdot 2a = 3a^2$
$\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCSD}} = \dfrac{3a^2}{5a^2} = \dfrac{3}{5} = 0,6 = 60\%$

(c) Das Dreieck DCS ist ein halbes Quadrat, dessen Seite jetzt $14{,}5\,\text{cm}$ lang wäre. Also würde gelten: $A_{DCS} = \frac{1}{2} \cdot 14{,}5^2\,\text{cm}^2 = 105{,}125\,\text{cm}^2$.
Mit Hilfe der gestrichelten Linien erkennst du: Das Quadrat $ABCD$ ist in vier kongruente Dreiecke zerlegt worden, die zum Dreieck DCS kongruent sind.
Das Quadrat $ABCD$ hätte also einen Flächeninhalt von $4 \cdot 105{,}125\,\text{cm}^2 = 420{,}5\,\text{cm}^2$.

(d) Es sei K der Schnittpunkt der Strecke $[SR]$ mit der Strecke $[TC]$.
Es gilt dann: $\overline{KC} = \overline{DC} - \overline{DK} = 2a - a\sqrt{2} = a(2-\sqrt{2})$
Weiter gilt: $\overline{TK} = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2}-1)$
Dann gilt für Das Teilverhältnis

$$\frac{\overline{KC}}{\overline{TK}} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{a(\sqrt{2}-1)} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}^{\,2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)}{1\cdot(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}$$

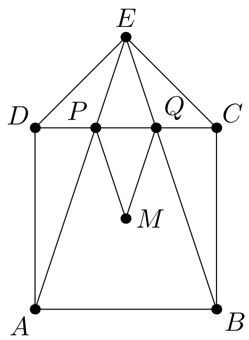
Natürlich kämst du mit $\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$ zum selben Resultat.

Es sei L der Schnittpunkt des Kreisbogens k mit der Strecke $[TC]$. Zwar liegen die Punkte K und L in der Zeichnung aufeinander, aber ist das auch tatsächlich so?
Die Dreiecke LRC und TLS sind beide rechtwinklig und sie besitzen im Punkt L maßgleiche Scheitelwinkel. Also sind die beiden Dreiecke zueinander ähnlich und du kannst den Vierstreckensatz anwenden:

$$\frac{\overline{LC}}{\overline{TL}} = \frac{\overline{RC}}{\overline{TS}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{TS}} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

Also teilt der Punkt L die Strecke $[TC]$ im gleichen Verhältnis wie der Punkt K. Dann müssen aber die beiden Punkte K und L aufeinander liegen; d.h. der Kreisbogen k verläuft tatsächlich durch den Schnittpunkt der Strecke $[SR]$ mit der Strecke $[TC]$.

11. An das Quadrat $ABCD$ mit dem Mittelpunkt M ist das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck DCE angefügt worden:

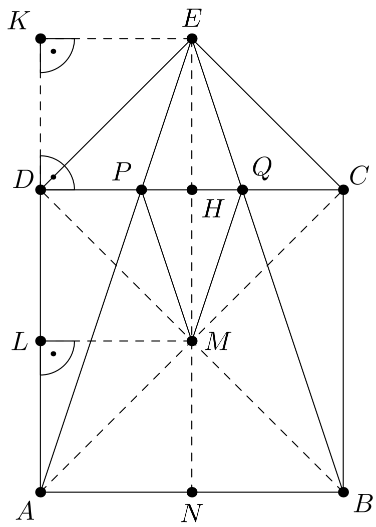


(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Wie viel Prozent der Figur wird vom Dreieck ABE eingenommen?

(c) Wie viel Prozent der Fläche des Dreiecks ABE wird vom Viereck $MQEP$ eingenommen?

Lösung: (a)



(b) Offensichtlich passt das Dreieck DCE fünfmal in die Figur hinein.
Die Dreiecke AMD und AED besitzen die gleiche Grundseite $[AD]$. Ihre Höhen $[ML]$ bzw. $[EK]$ sind gleich lang. Also sind diese beiden Dreiecke flächengleich.
Daher gilt: $A_{\Delta AED} = \frac{1}{5} \cdot A_{ABCED}$.
Aus Symmetriegründen folgt: $A_{\Delta ABE} = A_{ABCED} - 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot A_{ABCED} = \frac{3}{5} A_{ABCED}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{A_{\Delta ABE}}{A_{ABCED}} = \frac{3}{5} = 60\%$$

(c) Aus Symmetriegründen muss das Viereck $MQEP$ eine Raute sein. Die Dreiecke ANE und PHE sind zueinander ähnlich:

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{EN}} = \frac{1}{3}$$

Daraus ergibt sich übrigens, dass die Strecke $[CD]$ von den Punkten P und Q in drei gleiche Teile geteilt wird.

$$\Rightarrow \quad \frac{A_{\Delta PHE}}{A_{\Delta ANE}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = \frac{A_{\Delta PQE}}{A_{\Delta ABE}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A_{PQME}}{A_{\Delta ABE}} = \frac{2}{9} \approx 22,22\%$$

12. Die Parabel p mit der Gleichung $y = 2,5x^2$ wird durch zentrische Streckung am Zentrum Z mit dem Streckungsfaktor k auf die Parabel p' mit der Gleichung $y = -0,5x^2$ abgebildet.

(a) Begründe: Z kann nur im Koordinatenursprung liegen.

(b) Berechne k.

Lösung: (a) Ur- und Bildparabel besitzen die gleiche Symmetrieachse, nämlich die y-Achse. Dort muss sich das Streckungszentrum Z aufhalten.
Wie bei jeder zentrischen Steckung ist Z der einzige Fixpunkt. Dieser Punkt muss also auf beiden Parabeln liegen.Der einzige Punkt, den beide Parabeln gemeinsam haben, ist der Scheitel im Ursprung. Also liegt das Streckungszentrum Z im Ursprung.

(b) Du könntest jetzt die Bildkoordinaten eines konkreten Punktes auf der Urparabel (z.B. $(1 \mid 2,5)$) abbilden und dessen Bildkoordinaten in die Gleichung der Bildparabel einsetzen.
Wir leiten gleich eine allgemeine Beziehung her, die du für analoge Fälle übernehmen kannst:

$$P(x \mid a \cdot x^2) \xrightarrow{Z;\,k} P'(x' \mid y')$$

Mit $\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$ und $k \neq 0$ folgt:

$$\begin{pmatrix} x' - 0 \\ y' - 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x - 0 \\ a \cdot x^2 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcll} x' & = & k \cdot x & (1) \qquad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{x'}{k} \quad (1') \\ y' & = & k \cdot ax^2 & (2) \end{array}$$

$(1')$ in (2): $y' = k \cdot a \cdot \dfrac{x'^2}{k^2} \quad \Leftrightarrow \quad y' = \dfrac{a}{k} \cdot x'^2$

Somit ergibt sich für den Formfaktor a' der Bildparabel p':

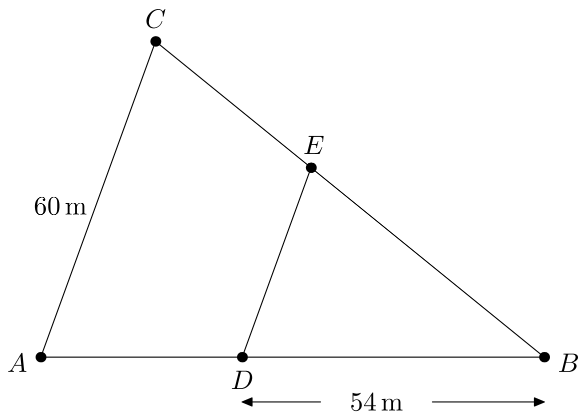
$$\boxed{a' = \frac{a}{k}}$$

$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{a}{a'} \quad \text{also:} \quad k = \frac{2,5}{-0,5} = -5$$

13. Die Maße zweier Innenwinkel in einem Dreieck betragen $73,47°$ und $41,26°$.
Kann dieses Dreieck zu einem anderen Dreieck ähnlich sein, in dem ein Innenwinkel das Maß $65,27°$ besitzt? Begründe deine Antwort.

Lösung: Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in allen drei Innenwinkelmaßen übereinstimmen.
Der dritte Innenwinkel im ursprünglichen Dreieck hat das Maß $180° - 73,47° - 41,26° = 65,27°$. In ihm hat also der dritte Innenwinkel das Maß $65,27°$.
Das andere Dreieck besitzt dieses Innenwinkelmaß ebenfalls. Also kann dieses Dreieck (wenn auch die beiden anderen Innenwinkel paarweise übereinstimmen) zu ersten Dreieck ähnlich sein.

14.

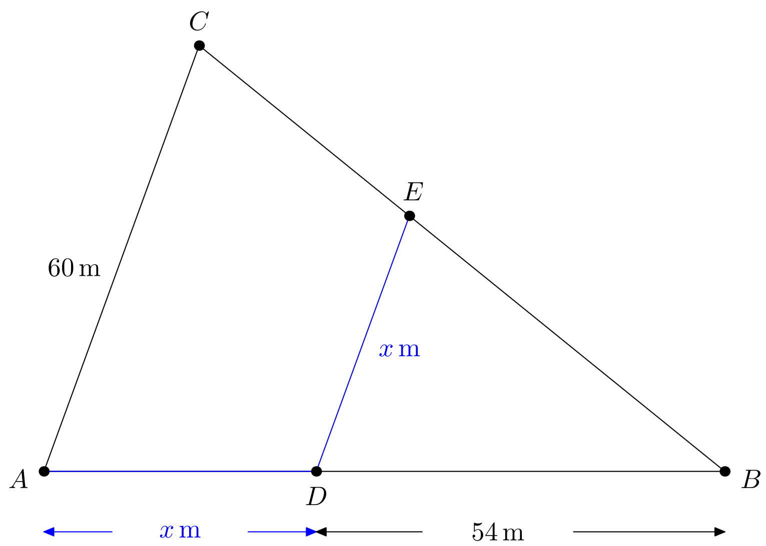


Frau Kermel vererbt ihr Grundstück ABC, das durch den Zaun $[DE]$ unterteilt ist, an ihre beiden Töchter Leni und Sarah. Dieser Zaun $[DE]$ ist genauso lang wie der Abstand der Punkte A und D.
Sarah bekommt den trapezförmigen Teil $ADEC$.

(a) Berechne die Länge des Zaunes.

(b) Wie viel Prozent der gesamten Grundstücksfläche nimmt Sarahs Anteil ein?

Lösung: (a)



Das Viereck $ADEC$ ist ein Trapez. Also ist $[AC] \parallel [DE]$.
Daher gilt: $\Delta DBE \sim \Delta ABC$. Nach einem Vierstreckensatz folgt:

$$\frac{x}{60} = \frac{54}{54+x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 54x - 3240 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung besitzt die Lösungen 36 und -90, wobei -90 natürlich ausscheidet.
Also ist der Zaun 36 m lang.

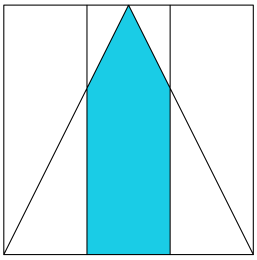
(b) Für den Ähnlichkeitsmaßstab k gilt z.B.: $k = \dfrac{x\,\text{m}}{60\,\text{m}} = \dfrac{36\,\text{m}}{60\,\text{m}} = 0{,}6$

Für Lenis Anteil DBE gilt: $A_{\Delta DBE} = 0,6^2 \cdot A_{\Delta ABC}$.

Weiter folgt: $\dfrac{A_{\Delta DBE}}{A_{\Delta ABC}} = 0,6^2 = 0,36 = 36\%$.

Also bekommt Sarah den restlichen Anteil von 100%, nämlich 64%.

15.

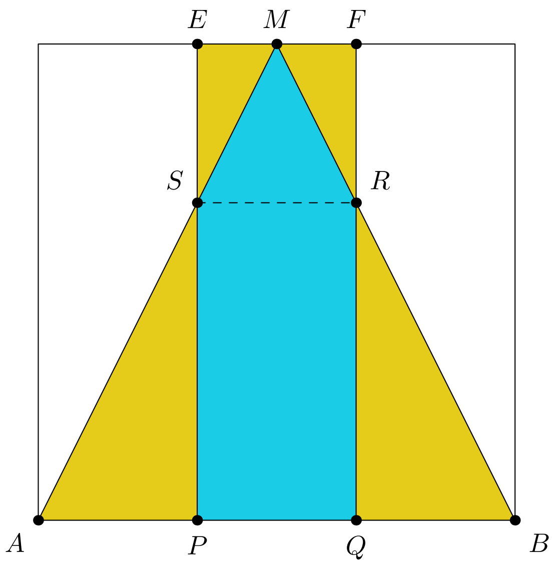


Das ist ein Bild des Logos der Baufirma „Fix & Fertig“. Es besteht aus einem Quadrat, das aus drei kongruenten Streifen zusammengesetzt ist. Das einbeschriebene Dreieck ist gleichschenklig.

(a) Zeichne die Figur, so dass die Quadratseite $6,3\,\text{cm}$ lang ist.

(b) Berechne den Anteil der eingefärbten Fläche am Quadrat als Bruch.

Lösung: (a)

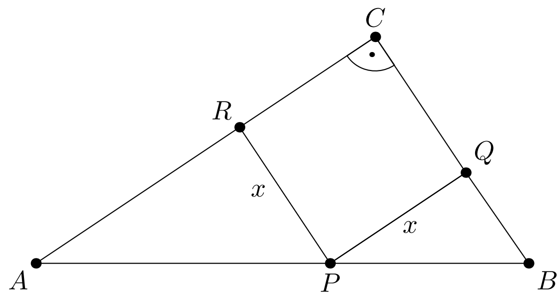


(b) Die Dreiecke APS und SME sind zueinander ähnlich.
Es gilt z.B.: $\overline{AP} : \overline{EM} = 1 : 2 = \overline{PS} : \overline{SE}$.
Die Strecke $[PE]$ ist $6,3\,\text{cm}$ lang. Nach dem obigen Seitenverhältnis von $1 : 2$ folgt:
$\overline{PS} = 4,2\,\text{cm}$ und $\overline{SE} = 2,1\,\text{cm} = \overline{SR}$. Das Viereck $SRFE$ ist ein Quadrat.

Für den Flächeninhalt A der Figur $PQRMSP$ gilt dann:
$A = 2,1\,\text{cm} \cdot 4,2\,\text{cm} + 0,5 \cdot 2,1^2\,\text{cm}^2 = 11,025\,\text{cm}^2$.

Flächenanteil: $\dfrac{11,025\,\text{cm}^2}{6,3^2\,\text{cm}^2} = 0,2\overline{7} = \dfrac{2}{10} + \dfrac{7}{90} = \dfrac{25}{90} = \dfrac{5}{18}$.

16.



In das rechtwinklige Dreieck ABC ist das Quadrat $PQCR$ mit der Seitenlänge x cm einbeschrieben.

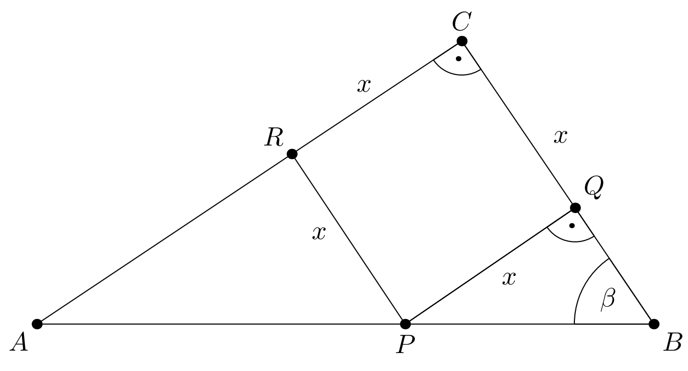
(a) Zeichne die Figur für $\overline{BC} = a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = b = 9\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke PBQ und ABC sind zueinander ähnlich.

(c) Zeige: $x = 3,6$.

(d) Berechne den prozentualen Anteil der Fläche des Quadrates $PQCS$ an der Fläche des Dreiecks ABC.

Lösung: (a)



Die Figur wurde im Maßstab 2 : 3 gezeichnet.

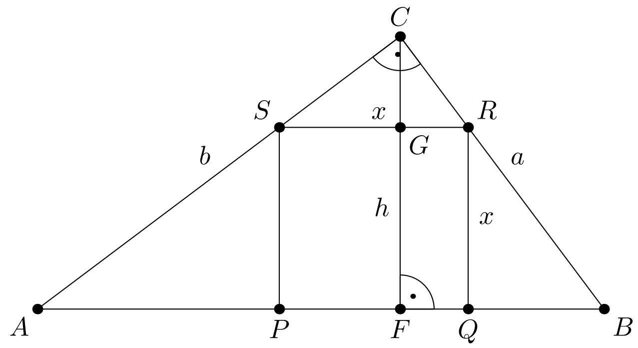
(b) Die beiden Dreiecke PBQ und ABC sind rechtwinklig. Ein Winkel hat jeweils das Maß β. Also stimmen diese Dreiecke wegen der Innenwinkelsumme von $180°$ in allen drei Inenwinkeln überein. Also sind sie zueinander ähnlich.

(c) $A_{\Delta PBQ} \sim A_{\Delta ABC}$ Vierstreckensatz: $\dfrac{\overline{BQ}}{x} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{6-x}{x} = \dfrac{6}{9}$

$\Leftrightarrow \quad 54 - 9x = 6x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3,6$

(d) $\dfrac{A_{PQCR}}{A_{\Delta ABC}} = \dfrac{3,6^2\,\text{cm}^2}{0,5 \cdot 6 \cdot 9\,\text{cm}^2} = 0,48 = 48\%$

17.



In das rechtwinklige Dreieck ABC ist das Quadrat $PQRS$ mit der Seitenlänge x cm einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{BC} = a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = b = 8\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke FBC und ABC sind zueinander ähnlich.

(c) Zeige: Für die Dreieckshöhe h gilt:

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \text{cm}.$$

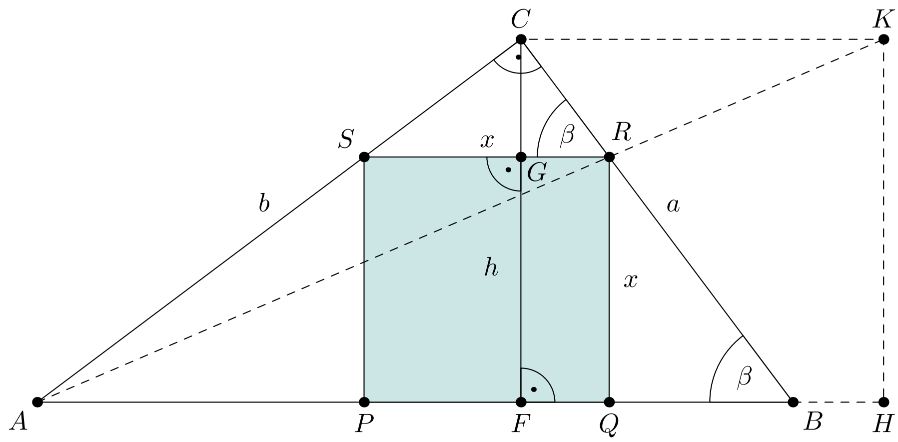
(d) Begründe: Die Dreiecke SRC und ABC sind zueinander ähnlich.

(e) Zeige:

$$x = \frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+ab+b^2}.$$

(f)
- Berechne mit Hilfe des Ergebnisses der Aufgabe (e) den prozentualen Anteil der Fläche des Quadrates $PQRS$ an der Fläche des Dreiecks ABC für den Fall, dass das Dreieck ABC gleichschenklig-rechtwinklig ist.
- Begründe dein Ergebnis elementargeometrisch mit Hilfe einer entsprechenden Zeichnung.

Lösung: (a)



Zeichne z.B. das Probequadrat $QHKC$ mit der Seitenlänge $h[= 4,8\,\text{cm}]$.
$[AK] \cap [BC] = \{R\}$. Zeichne dann das Quadrat mit der Seite $[RQ]$ fertig.

(b) Aus der Zeichnung in (a) ist ersichtlich, dass beide Dreiecke rechtwinklig sind. Außerdem taucht in beiden Dreiecken der Winkel mit dem Maß β auf. Also stimmen die beiden Dreiecke sogar in allen drei Innenwinkeln überein. Also sind sie zueinander ähnlich.

(c) Wegen $\Delta FBC \sim \Delta ABC$ gilt:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h}{a} = \frac{b}{c}$$

$\Leftrightarrow \quad h = \dfrac{ab}{c}$. Mit $c = \sqrt{a^2+b^2}\,\text{cm}$ folgt die Behauptung.

Für $a = 6\,\text{cm}$ und $b = 8\,\text{cm}$ ergibt sich $h = 4,8\,\text{cm}$.

(d) In beiden Dreiecken tauchen Stufenwinkel mit dem Maß β auf. Also sind die beiden Dreiecke zueinander ähnlich.

(e) Wegen $\Delta SRC \sim \Delta ABC$ verhalten sich die Längen der Hypotenusen wie die entsprechenden Höhen in beiden Dreiecken:

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{c} = \frac{h-x}{h} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{hc}{h+c}$$

Mit $h = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\text{cm}$ und $c = \sqrt{a^2+b^2}\,\text{cm}$ ergibt sich:

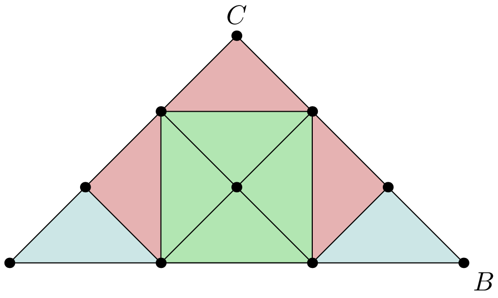
$$x = \frac{ab}{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sqrt{a^2+b^2}}.$$

Erweitert man den Bruch mit $\sqrt{a^2+b^2}$, so ergibt sich die Behauptung.

(f) • In diesem Fall gilt $b = a$. $\Rightarrow \quad x = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3a^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

$$\Rightarrow \quad \frac{A_{PQRS}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{x^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{\frac{a^2 \cdot 2}{3^2}}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{4}{9} = 0,\overline{4} = 44,\overline{4}\%$$

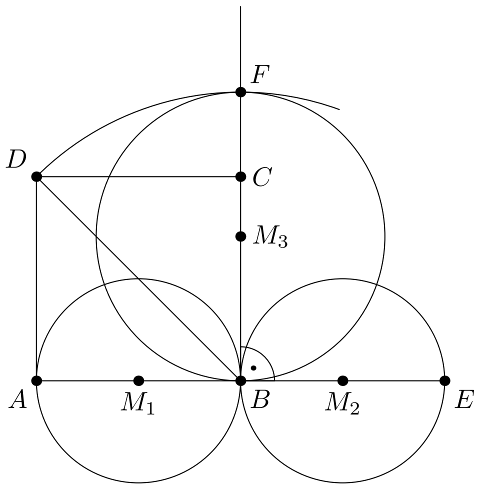
•



Das Dreieck ABC lässt sich in neun kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck zerlegen. Vier davon nimmt das einbeschriebene Quadrat ein. Also beträgt der Flächennateil dieses Quadrates am Dreieck ABC

$\frac{4}{9} = 0,\overline{4} = 44,\overline{4}\%$

18.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Punkt B ist der Mittelpunkt des Kreisbogens, der durch die Punkte D und F verläuft. M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der beiden kleinen Kreise, während der große Kreis den Mittelpunkt M_3 besitzt.

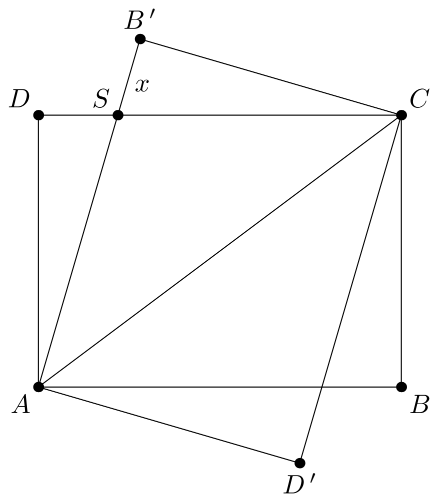
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AE} = 6\,\text{cm}$.

(b) Vergleiche Die Flächeninhalte A_1 und A_2 der beiden kleinen Kreise mit dem Flächeninhalt A_3 des großen Kreises.

Lösung: (a) Klar.

(b) $A_1 = A_2 = 1,5^2\pi\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad A_1 + A_2 = 2 \cdot 1,5^2\pi\,\text{cm}^2$ ($\approx 14,14\,\text{cm}^2$)
Der Durchmesser d des großen Kreises ist genauso lang wie die Diagonale $[BD]$ des Quadates $ABCD$.
$\Rightarrow \quad d = 3\sqrt{2}\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad r_3 = 1,5\sqrt{2}\,\text{cm}.$
$\Rightarrow \quad A_3 = (1,5\sqrt{2})^2\pi\,\text{cm}^2 = 2 \cdot 1,5^2\pi\,\text{cm}^2 = A_1 + A_2.$
Also sind die beiden kleinen Kreise zusammen genauso groß wie der große Kreis.
Oder kürzer: Der Durchmesser des großen Kreises ist $\sqrt{2}-$ mal so groß wie der Durchmesser eines kleinen Kreises. Also ist der Flächenihalt des großen Kreises doppelt $(= (\sqrt{2})^2)$ so groß wie der eines kleinen Kreises.

19.



Das Rechteck $ABCD$ wurde an seiner Diagonalen $[AC]$ gespiegelt. Dadurch ist das Viereck $AD'CB'$ entstanden. Es gilt: $x = \overline{SB'}$.

(a) Zeichne die Figur für $a = \overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $b = \overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b)
- Berechne die Seitelänge $\overline{SC}$ in Abhängigkeit von x auf verschiedene Weise.
- Zeige dann:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A des Dreiecks ACS gilt:

$$A_{\Delta ACS} = \frac{b}{4a} \cdot (a^2 + b^2).$$

(d)
- Zeichne die Strecke $[B'D]$ ein.
- Begründe: Das Viereck $ACB'D$ ist ein Trapez.

(e) Zeige: Für den Flächeninhalt A des Dreiecks DSB' gilt:

$$A_{\Delta DSB'} = \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}.$$

(f) Zeige: Für den Flächeninhalt A des Trapezes $ACB'D$ gilt:

$$A_{ACB'D} = ab \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

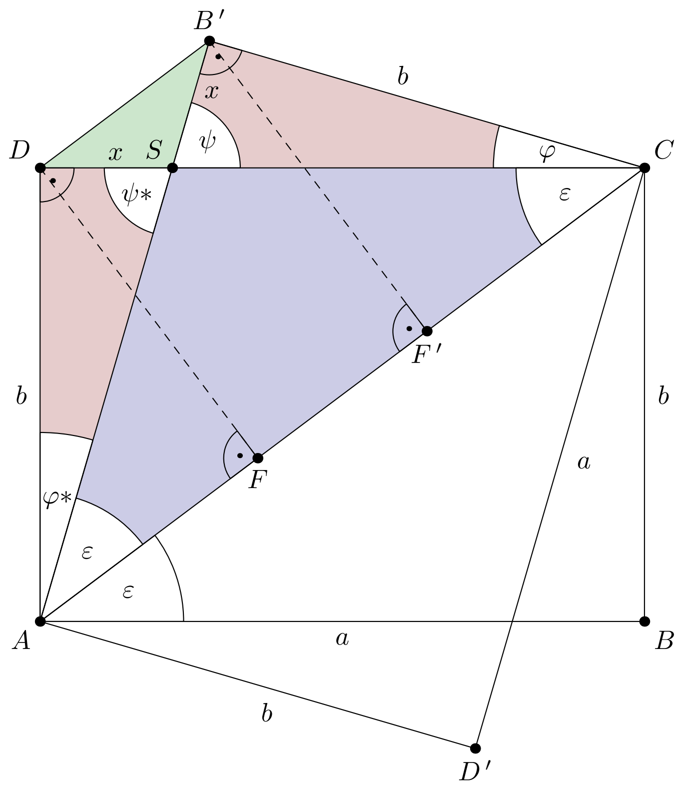
Tipps:
- Das Trapez wird durch seine beiden Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt.
- Zwei Dreiecke davon sind kongruent, die beiden anderen sind zueinander ähnlich.
- Den Flächeninhalt des Trapezes $ACB'D$ erhältst du aus der Summe der Flächeninhalte der vier Teildreiecke.

(g) In welchem Verhältnis müssen die Seitenlängen a und b des Rechtecks $ABCD$ stehen, damit der Flächeninhalt des Trapezes $ACB'D$ um 10% kleiner als der des Rechtecks $ABCD$ wird?

(h) Untersuche, ob der Flächeninhalt des Trapezes $ACB'D$ genau so groß wie der des Rechtecks $ABCD$ werden kann.

(i) Untersuche rein elementargeometrisch anhand des Winkels BAC mit dem Maß ε, ob das Trapez $ACB'D$ auch zum Rechteck werden kann.

Lösung: (a)



(b) Das Spiegelbild des Rechtecks $ABCD$ ist das kongruente Rechteck $AD'CB'$.
Also gilt: $\overline{CB} = \overline{CB'} = \overline{AD} = b$.

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke ASD und SCB' stimmen also in der Seitenlänge b überein.
Weiter gilt: $\psi = \psi*$ (Scheitelwinkel) $\quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi*$.
Damit sind die beiden Dreiecke ASD und SCB' kongruent. Insbesondere gilt dann $\overline{AS} = \overline{CS}$ und $\overline{DS} = \overline{SB'} = x$.

- Einerseits gilt dann im Dreieck SCB': $\overline{CS} = \sqrt{b^2 + x^2}$
  Andererseits gilt: $\overline{CS} = a - x$
- $\sqrt{b^2 + x^2} = a - x \mid {}^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 + x^2 = a^2 - 2ax + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{a^2 - b^2}{2a}$

(c) $A_{\Delta ACS} = A_{\Delta ACD} - A_{\Delta ASD}$
$A_{\Delta ACS} = \dfrac{1}{2}ab - \dfrac{1}{2}bx = \dfrac{b}{2} \cdot \left(a - \dfrac{a^2 - b^2}{2a}\right) = \dfrac{b}{2} \cdot \dfrac{2a^2 - a^2 + b^2}{2a} = \dfrac{b}{4a} \cdot (a^2 + b^2)$

(d)
- Siehe Zeichnung.
- Aufgrund der Eigenschaften der Achsenspiegelung sind die beiden Dreiecke ACB' und ACD kongruent. Sie besitzen die gemeinsame Hypotenuse $[AC]$. Also sind die beiden Höhen $[DF]$ und $[B'F']$ gleich lang. Das bedeutet, dass die beiden Punkte D und B' den gleichen Abstand zur Strecke $[AC]$ besitzen.
  Also folgt: $[B'D] \parallel [AC]$. Also ist das Viereck $ACB'D$ ein (gleichschenkliges) Trapez.

(e) Die beiden Dreiecke ACS und DSB' sind zueinander ähnlich; d.h.:
$A_{\Delta DSB'} = k^2 \cdot A_{\Delta ACS}$ mit $k = \dfrac{\overline{DS}}{\overline{CS}}$

$$k = \frac{x}{a - x} = \frac{a^2 - b^2}{2a} : \left(a - \frac{a^2 - b^2}{2a}\right) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$A_{\Delta DSB'} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 \cdot \frac{b}{4a} \cdot (a^2 + b^2) = \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}.$$

(f)

$$\begin{aligned}
A_{Trapez} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot b + \frac{b}{4a} \cdot (a^2 + b^2) + \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{2b}{4a} \cdot (a^2 - b^2) + \frac{b}{4a} \cdot (a^2 + b^2) + \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{b}{4a} \cdot \frac{2(a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2} \\
&= \cdots \\
&= \frac{b}{4a} \cdot \frac{4a^4}{a^2 + b^2} = ab \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

(g) Es muss gelten: $A_{Trapez} = 0,9 \cdot A_{ABCD}$. Also:

$$ab \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2} = 0,9 \cdot ab \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{a^2 + b^2} = 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad 0,1a^2 = 0,9b^2$$

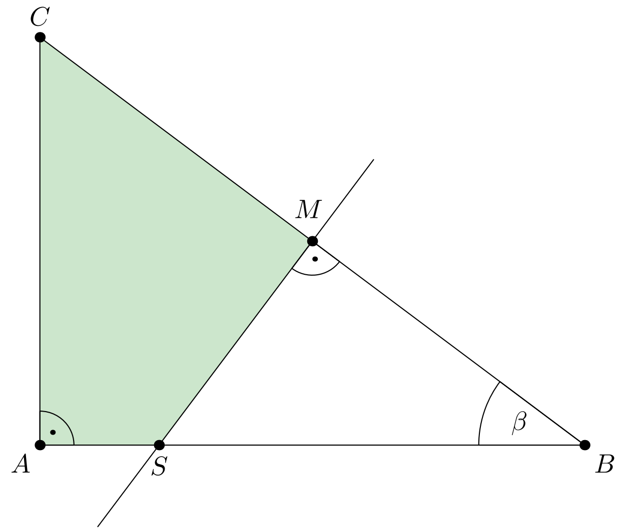
Wegen $a, b > 0$ folgt dann $a = 3 \cdot b$.

(h) Es muss gelten: $ab \cdot \dfrac{a^2}{a^2+b^2} = ab \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a^2}{a^2+b^2} = 1.$

Ein Bruch hat aber genau dann den Wert 1, wenn Zähler und Nenner gleich sind: $a^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b = 0\,(\dagger)$. Dann würde das Rechteck zur Strecke entarten; ein solches Trapez gibt es nicht.

(i) Es gilt: $\sphericalangle DCA = \varepsilon$ (Z-Winkel).
Weiter gilt:$\sphericalangle BAS = \psi = 2 \cdot \varepsilon$ (F-Winkel).
Ebenso folgt: $\varphi = 90° - 2\varepsilon$ (Innenwinkelsumme im Dreieck SCB').
Damit das Trapez $ACB'D$ zum Rechteck wird, muss $\varphi + \varepsilon = 90°$ gelten.
Das bedeutet: $90° - 2\varepsilon + \varepsilon = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 0°$. Wieder würde das Rechteck zur Strecke entarten; d.h.ein solches Trapez gibt es nicht.

20.



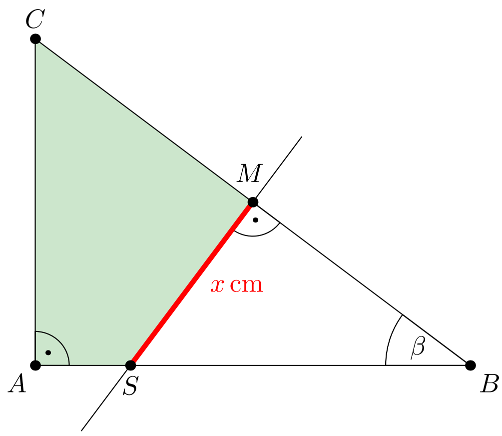
Der Hypotenusenmittelpunkt des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist der Punkt M.
In der Figur gilt weiter: $\overline{AB} = 7,2\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 5,4\,\text{cm}$.

(a) Begründe: Die beiden Dreiecke SBM und ABC sind zueinander ähnlich.

(b) Zeige: $\overline{MS} = 3,375\,\text{cm}$.

(c) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $ASMC$ am Dreieck ABC in Prozent.

Lösung: (a)



In beiden Dreiecken ABC und SBM kommt der Innenwinkel mit dem Maß β vor. Zudem sind beide Dreiecke rechtwinklig. Also müssen beide Dreiecke auch im Maß des dritten Innenwinkels übereinstimmen; also gilt $\Delta\, SBM \sim \Delta\, ABC$.

(b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen.
PYTHAGORAS im Dreieck ABC: $\overline{BC}^2 = 7,2^2 + 5,4^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = 9\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad \overline{BM} = 4,5\,\text{cm}$.

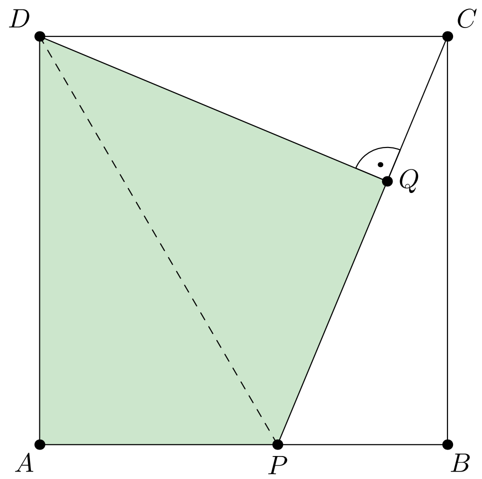
Vierstreckensatz: $\dfrac{\overline{MS}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} : \quad \dfrac{x}{4,5} = \dfrac{5,4}{7,2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3,375.$

(c) Berechne den Ähnlichkeitsfaktor: Z.B. $k = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \dfrac{4,5}{7,2} = 0,625.$

Dann gilt $\dfrac{A_{\Delta\, SBM}}{A_{\Delta\, ABC}} = k^2 = 0,625^2 = 0,390625.$

Das bedeutet: Das Dreieck SBM nimmt $39,0625\%$ der Fläche des Dreiecks ABC ein. Dann nimmt das Viereck $ASMC$ $100\% - 39,0625\% = 60,9375\%$ der Fläche des Dreiecks ABC ein.

21.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a.

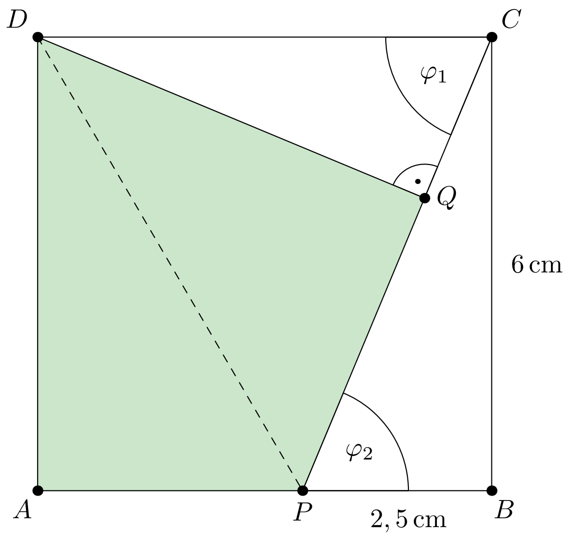
(a) Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{PB} = 2,5\,\text{cm}$.

(b) Begründe ohne Messung: Die Diagonale $[DP]$ ist keine Symmetrieachse im Viereck $APQD$.

(c) Begründe: Die beiden Dreiecke PBC und DQC sind zueinander ähnlich.

(d) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $APQD$ an der Fläche des Quadrates $ABCD$ in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Die Kathete $\overline{AD}$ im rechtwinkligen Dreieck APD besitzt die Länge a. Die Hypotenuse $\overline{DC}$ im rechtwinkligen Dreieck DQC hat ebenfalls die Länge a. Weil aber in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite darstellt, gilt: $\overline{DQ} < a = \overline{AD}$. Somit kann die Diagonale $\overline{DP}$ im Viereck $APQD$ nicht Symmetrieachse dieses Vierecks sein.

(c) In den beiden rechtwinkligen Dreiecken DQC und PBC gilt: $\varphi_1 = \varphi_2$ (Z-Winkel). Damit stimmen die beiden Dreiecke paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck stimmen diese beiden Dreiecke in allen drei Innenwinkelmaßen überein. Also gilt: $\Delta\, PBC \sim \Delta\, DQC$.

(d) Strategie: $A_{APQD} = A_{ABCD} - (A_{\Delta\, PBC} + A_{\Delta\, DQC})$.

$$A_{\Delta\, PBC} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 6\,\text{cm}^2 = 7{,}5\,\text{cm}^2 .$$

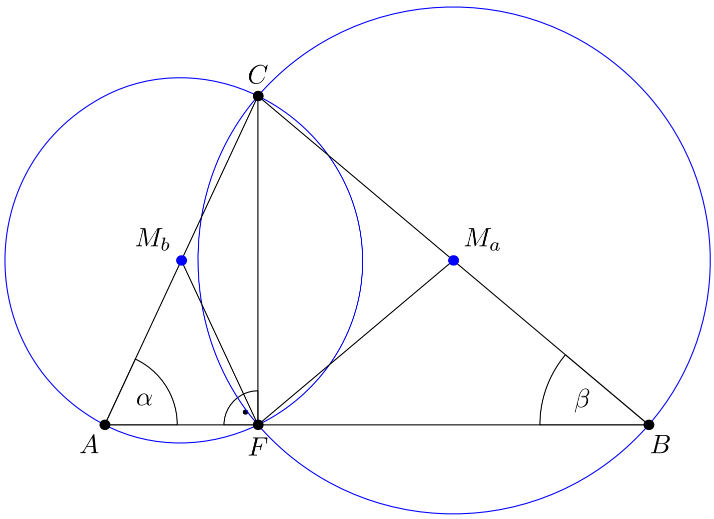
Wegen (c) folgt: $A_{\Delta\, DQC} = k^2 \cdot A_{\Delta\, PBC}$ mit dem Streckungsfaktor k.

Mit $k = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{PC}}$ folgt: $k = \dfrac{6\,\text{cm}}{\sqrt{2{,}5^2 + 6^2}\,\text{cm}} = \dfrac{12}{13}$.

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\, DQC} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot 7{,}5\,\text{cm}^2 = \frac{144}{169} \cdot 7{,}5\,\text{cm}^2 .$$

$$\begin{aligned} A_{APQD} &= 36\,\text{cm}^2 - \left(7{,}5\,\text{cm}^2 + \frac{144}{169} \cdot 7{,}5\,\text{cm}^2\right) \\ &= 36\,\text{cm}^2 - \frac{313}{169} \cdot 7{,}5\,\text{cm}^2 \\ \frac{A_{APQD}}{A_{ABCD}} &= \frac{6084 - 2374{,}5}{169 \cdot 36} = \frac{3707{,}5}{6084} \approx 0{,}6094 = 60{,}94\,\% . \end{aligned}$$

22.



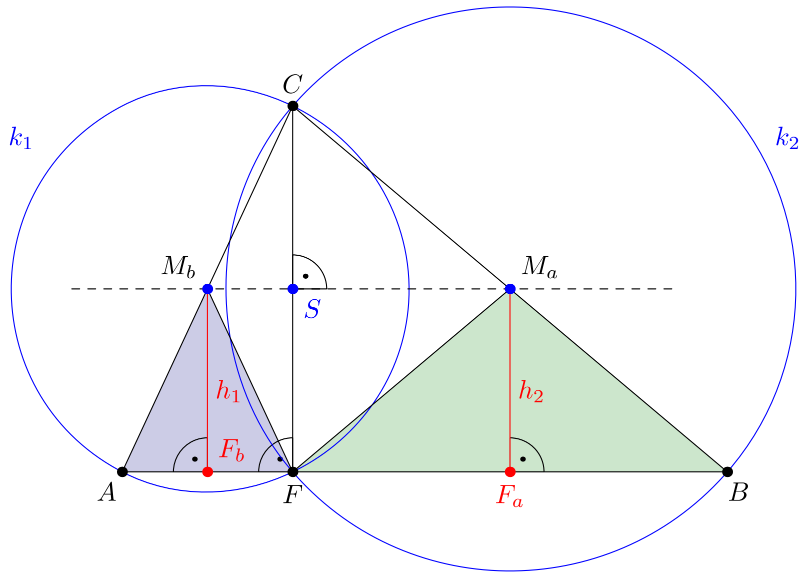
Im Dreieck ABC mit der Höhe $[CF]$ sind die Punkte M_a und M_b die Mittelpunkte der Umkreise der Teildreiecke FBC bzw. AFC.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe auf verschiedene Weise: Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Begründe: Zusammen bedecken die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a die Hälfte des Dreiecks ABC .

Lösung: (a)



(b) **1. Möglichkeit:**
Im Kreis k_1 gilt: $\overline{M_bA} = \overline{M_bF} = \overline{M_bC}$.
Im Kreis k_2 gilt: $\overline{M_aB} = \overline{M_aF} = \overline{M_aC}$.
Also sind im Viereck FM_aCM_b zweimal zwei benachbarte Seiten gleich lang. Also handelt es sich um ein achsensymmetrisches Drachenviereck.
2. Möglichkeit:
In jedem rechtwinkligen Dreieck fällt dessen Umkreismittelpunkt mit dem Hypotenusenmittelpunkt zusammen. Also sind die Kreismittelpunkte M_a und M_b gleichzeitig die Mittelpunkte der Seiten $a = [BC]$ bzw. $b = [AC]$.
Die Dreiecke FBC und F_aBM_a sind zueinander ähnlich.
Wegen $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM_a}$ folgt dann $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{F_aM_a} = 2 \cdot \overline{F_bM_b}$.
Also gilt: $h_1 = h_2 = \overline{SF} = \overline{FC}$. Daher liegt die Gerade M_aM_b zur Grundlinie $[AB]$ des Dreiecks ABC parallel. Diese Parallele steht damit auf der Diagonalen des Vierecks FM_aCM_b senkrecht. Gleichzeitig halbiert der Punkt S die Höhe $[CF]$ des Dreiecks ABC. Also ist das Viereck FM_aCM_b ein achsensymmetrischer Drachen.

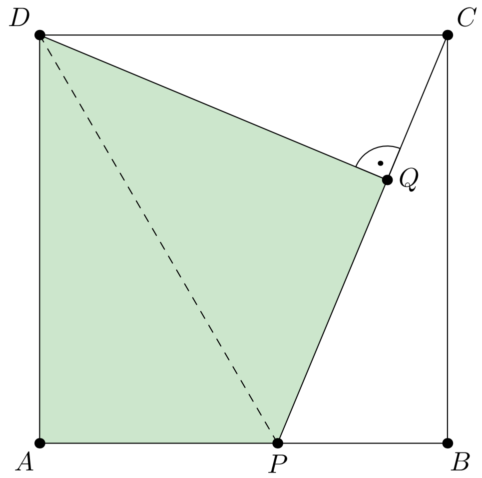
(c) Die in der 2. Möglichkeit verwendete Argumentation ergibt nun Folgendes:

- Die vier Dreiecke F_aBM_a, FF_aM_a, FM_aS und SM_aC sind kongruent. Das Dreieck FBM_a besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
  Also ist das Dreieck FBM_a halb so groß wie das Teildreieck FBC .
- Die vier Dreiecke AF_bM_b, F_bFM_b, FSM_b und M_bSC sind kongruent. Das Dreieck AFM_b besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
  Also ist das Dreieck AFM_b halb so groß wie das Teildreieck AFC .

Also sind die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a zusammen halb so groß wie das Dreieck ABC.

Oder:
Weil der Schnittpunkt S auf halber Höhe im Dreieck ABC liegt, gilt:
$A_{\Delta\, M_bM_aC} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta\, ABC}$ (zentrische Streckung mit $k = \frac{1}{2}$).
Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen mit der Diagonalen $[M_aM_b]$ als Symmetrieachse.
$\Rightarrow \quad A_{FM_aCM_b} = 2 \cdot \frac{1}{4} A_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta\, ABC}$.
Dann muss der Rest, nämlich derjenige, der aus den beiden Dreiecken AFM_b und FBM_a besteht, ebenfalls die Hälfte des Dreiecks ABC einnehmen.

23.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a.

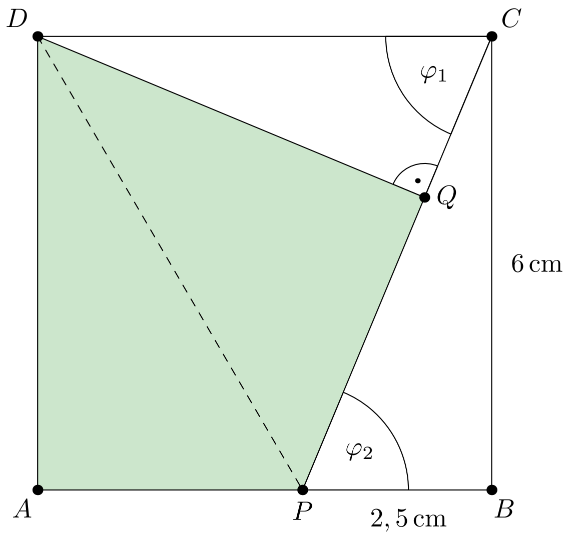
(a) Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{PB} = 2,5\,\text{cm}$.

(b) Begründe ohne Messung: Die Diagonale $[DP]$ ist keine Symmetrieachse im Viereck $APQD$.

(c) Begründe: Die beiden Dreiecke PBC und DQC sind zueinander ähnlich.

(d) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $APQD$ an der Fläche des Quadrates $ABCD$ in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Die Kathete $\overline{AD}$ im rechtwinkligen Dreieck APD besitzt die Länge a. Die Hypotenuse $\overline{DC}$ im rechtwinkligen Dreieck DQC hat ebenfalls die Länge a. Weil aber in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite darstellt, gilt: $\overline{DQ} < a = \overline{AD}$. Somit kann die Diagonale $\overline{DP}$ im Viereck $APQD$ nicht Symmetrieachse dieses Vierecks sein.

(c) In den beiden rechtwinkligen Dreiecken DQC und PBC gilt: $\varphi_1 = \varphi_2$ (Z-Winkel). Damit stimmen die beiden Dreiecke paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck stimmen diese beiden Dreiecke in allen drei Innenwinkelmaßen überein. Also gilt: $\Delta\, PBC \,\sim\, \Delta\, DQC$.

(d) Strategie: $A_{APQD} = A_{ABCD} - (A_{\Delta\, PBC} + A_{\Delta\, DQC})$.

$$A_{\Delta\, PBC} = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 6\,\mathrm{cm}^2 = 7,5\,\mathrm{cm}^2\,.$$

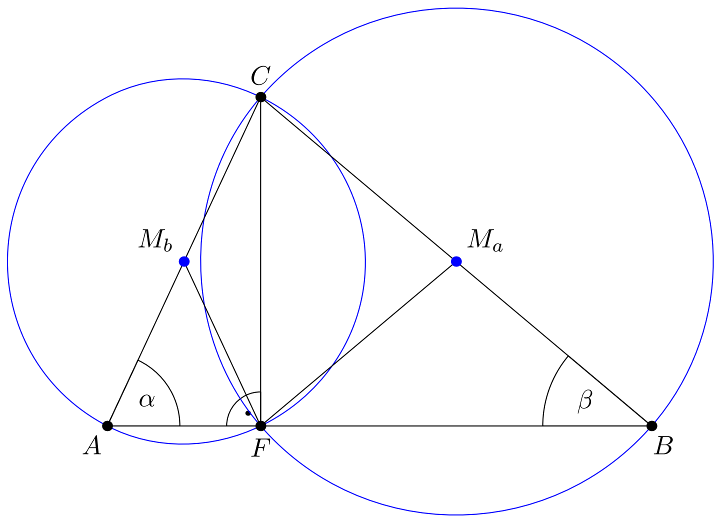
Wegen (c) folgt: $A_{\Delta\, DQC} = k^2 \cdot A_{\Delta\, PBC}$ mit dem Streckungsfaktor k.

$$\text{Mit } k = \frac{\overline{DC}}{\overline{PC}} \quad \text{folgt:} \quad k = \frac{6\,\mathrm{cm}}{\sqrt{2,5^2 + 6^2}\,\mathrm{cm}} = \frac{12}{13}\,.$$

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\, DQC} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2 = \frac{144}{169} \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2\,.$$

$$\begin{aligned} A_{APQD} &= 36\,\mathrm{cm}^2 - \left(7,5\,\mathrm{cm}^2 + \frac{144}{169} \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2\right) \\ &= 36\,\mathrm{cm}^2 - \frac{313}{169} \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2 \\ \frac{A_{APQD}}{A_{ABCD}} &= \frac{6084 - 2374,5}{169 \cdot 36} = \frac{3707,5}{6084} \approx 0,6094 = 60,94\,\%\,. \end{aligned}$$

24.



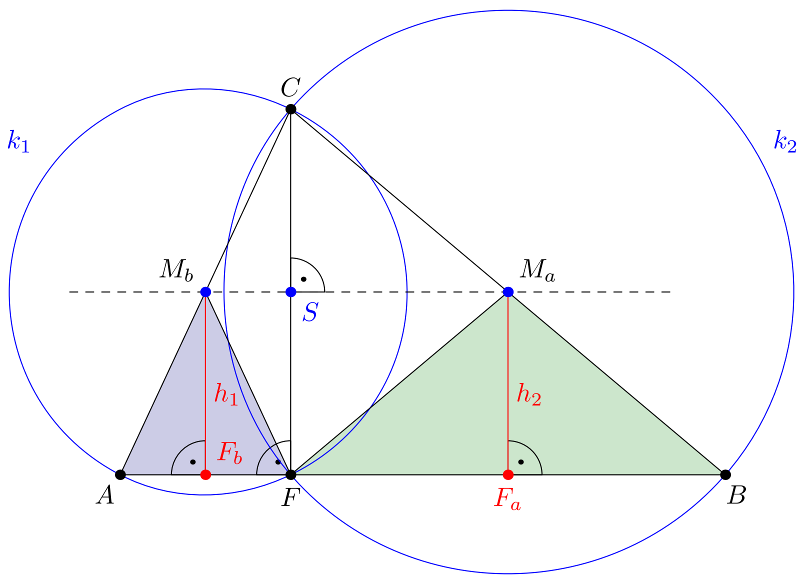
Im Dreieck ABC mit der Höhe $[CF]$ sind die Punkte M_a und M_b die Mittelpunkte der Umkreise der Teildreiecke FBC bzw. AFC.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe auf verschiedene Weise: Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Begründe: Zusammen bedecken die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a die Hälfte des Dreiecks ABC.

Lösung: (a)



(b) **1. Möglichkeit:**
Im Kreis k_1 gilt: $\overline{M_bA} = \overline{M_bF} = \overline{M_bC}$.
Im Kreis k_2 gilt: $\overline{M_aB} = \overline{M_aF} = \overline{M_aC}$.
Also sind im Viereck FM_aCM_b zweimal zwei benachbarte Seiten gleich lang. Also handelt es sich um ein achsensymmetrisches Drachenviereck.

2. Möglichkeit:
In jedem rechtwinkligen Dreieck fällt dessen Umkreismittelpunkt mit dem Hypotenusenmittelpunkt zusammen. Also sind die Kreismittelpunkte M_a und M_b gleichzeitig die Mittelpunkte der Seiten $a = [BC]$ bzw. $b = [AC]$.
Die Dreiecke FBC und F_aBM_a sind zueinander ähnlich.
Wegen $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM_a}$ folgt dann $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{F_aM_a} = 2 \cdot \overline{F_bM_b}$.
Also gilt: $h_1 = h_2 = \overline{SF} = \overline{FC}$. Daher liegt die Gerade M_aM_b zur Grundlinie $[AB]$ des Dreiecks ABC parallel. Diese Parallele steht damit auf der Diagonalen des Vierecks FM_aCM_b senkrecht. Gleichzeitig halbiert der Punkt S die Höhe $[CF]$ des Dreiecks ABC. Also ist das Viereck FM_aCM_b ein achsensymmetrischer Drachen.

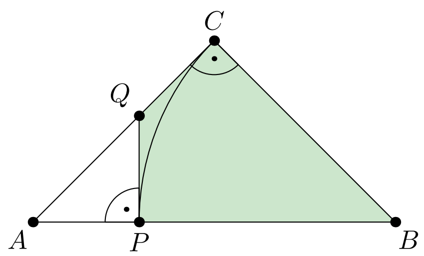
(c) Die in der 2. Möglichkeit verwendete Argumentation ergibt nun Folgendes:

- Die vier Dreiecke F_aBM_a, FF_aM_a, FM_aS und SM_aC sind kongruent. Das Dreieck FBM_a besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
  Also ist das Dreieck FBM_a halb so groß wie das Teildreieck FBC.
- Die vier Dreiecke AF_bM_b, F_bFM_b, FSM_b und M_bSC sind kongruent. Das Dreieck AFM_b besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
  Also ist das Dreieck AFM_b halb so groß wie das Teildreieck AFC.

Also sind die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a zusammen halb so groß wie das Dreieck ABC.

Oder:
Weil der Schnittpunkt S auf halber Höhe im Dreieck ABC liegt, gilt:
$A_{\Delta\, M_bM_aC} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta\, ABC}$ (zentrische Streckung mit $k = \frac{1}{2}$).
Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen mit der Diagonalen $[M_aM_b]$ als Symmetrieachse.
$\Rightarrow \quad A_{FM_aCM_b} = 2 \cdot \frac{1}{4} A_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta\, ABC}$.
Dann muss der Rest, nämlich derjenige, der aus den beiden Dreiecken AFM_b und FBM_a besteht, ebenfalls die Hälfte des Dreiecks ABC einnehmen.

25.



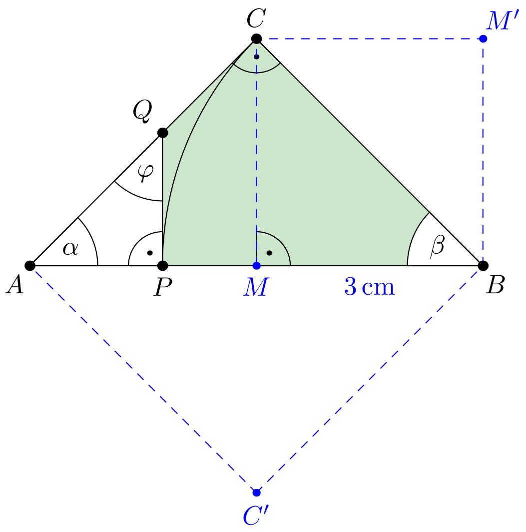
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt B.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke ABC und APQ sind zueinander ähnlich.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC nimmt das Dreieck APQ ein? Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Es gilt $\alpha = \beta = 45°$. Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck APQ gilt aber auch $\alpha = \varphi = 45°$. Also stimmen die beiden Dreiecke ABC und APQ paarweise in ihren Innenwinkelmaßen überein. Damit sind sie zueinander ähnlich.

(c) Weil die beiden Dreiecke ABC und APQ zueinander ähnlich sind, gilt für den Ähnlichkeitsfaktor k z.B.:

$$k = \frac{\overline{AP}}{\overline{BC}}.$$

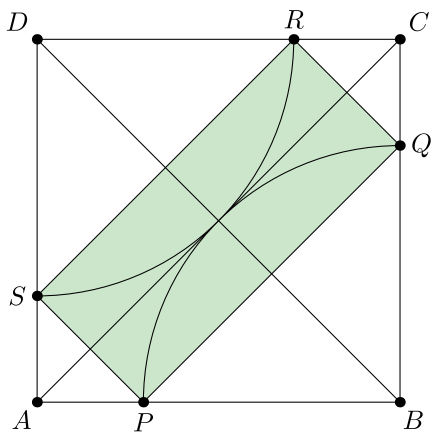
Das Dreieck MBC ist ein halbes Quadrat mit der Daigonalenlänge $\overline{BC} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.

$\overline{AP} = \overline{BA} - \overline{BP} = \overline{BA} - \overline{BC} = (6 - 3\sqrt{2})\,\text{cm}$.

Damit folgt $k = \dfrac{(6 - 3\sqrt{2})\,\text{cm}}{6\,\text{cm}}$.

Und $\dfrac{A_{\Delta\,APQ}}{A_{\Delta\,ABC}} = k^2 = \left[\dfrac{(6 - 3\sqrt{2})\,\text{cm}}{(3\sqrt{2})\,\text{cm}}\right]^2 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}1716 = 17{,}16\%$.

26.



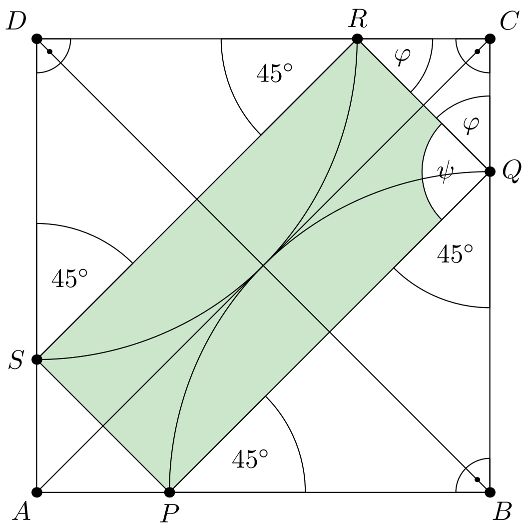
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte B und D.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Rechteck.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck $PQRS$ ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Die beiden Dreiecke PBQ und SRD sind gleichschenklig-rechtwinklig. Also haben ihre spitzen Innenwinkel das Maß $45°$.
Weiter gilt: $\overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{BQ} = \overline{DC} - \overline{DR} = \overline{CR}$. Also ist auch das Dreieck RQC gleichschenklig-rechtwinklig. Dann gilt $\varphi = 45°$.
Am Punkt Q gilt somit: $45° + \psi + 45° = 180° \quad \Rightarrow \quad \psi = 90°.$.
Aus Symmetriegründen sind dann auch die drei restlichen Innenwinkel des Vierecks $PQRS$ rechte Winkel. Also handelt es sich hierbei um ein Rechteck.

(c) Eine mögliche Strategie: $A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot (A_{\Delta\, PBQ} + A_{\Delta\, RQC})$

$$A_{\Delta\,PBQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 \text{ cm}^2 = 9\,\text{cm}^2 \,.$$

$$A_{\Delta\,RQC} = \frac{1}{2} \cdot \left(6 - 3\sqrt{2}\right)^2 \text{ cm}^2 = (27 - 18\sqrt{2})\,\text{cm}^2 \,.$$

$$A_{PQRS} = 36\,\text{cm}^2 - 2 \cdot [9\,\text{cm}^2 + (27 - 18\sqrt{2})\,\text{cm}^2] = (36\sqrt{2} - 36)\,\text{cm}^2 \,.$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(36\sqrt{2} - 36)\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = \frac{(36(\sqrt{2} - 1)\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2}$$

$$= \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142 = 41,42\%$$

7. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

1. Es gibt Dreiecke mit einem Flächeninhalt von $24\,\text{cm}^2$. Zeichne zwei solche Dreiecke, die diesen Flächeninhalt aufweisen, die aber nicht kongruent zueinander sind.

Lösung: - -

2. Die eine Seite eines Rechtecks $ABCD$ ist halb so lang wie die andere Rechtecksseite. Der Umfang des Rechtecks ist $54\,\text{cm}$ lang.
   (a) Berechne die beiden Seitenlängen des Rechtecks.
   (b) Berechne die Länge einer Diagonalen.

Lösung: (a) $9\,\text{cm}$, $18\,\text{cm}$
(b) $d = \sqrt{405}\,\text{cm} \approx 20{,}12\,\text{cm}$

3. In einem Rechteck $EFGH$ sind die beiden Diagonalen zusammen $22\,\text{cm}$ lang. Eine Seite dieses Rechtecks ist $5{,}5\,\text{cm}$ lang.
   (a) Zeichne dieses Rechteck.
   (b) Bestimme sämtliche Winkelmaße am Diagonalenschnittpunkt.
   (c) Berechne jeweils den Flächeninhalt sämtlicher Teildreiecke in diesem Rechteck. Es gibt mehrere Möglichkeiten.
   (d) Berechne den Abstand eines Eckpunktes zur entsprechenden Diagonalen.

Lösung: (b) $60°$, $120°$
(c) $A_1 = 2{,}75 \cdot \sqrt{90{,}75}\,\text{cm}^2 \approx 26{,}20\,\text{cm}^2 \quad A_2 = 1{,}375 \cdot \sqrt{90{,}75}\,\text{cm}^2 \approx 13{,}10\,\text{cm}^2$
$A_3 = A_2$
(d) $d = 2{,}75 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm} \approx 4{,}76\,\text{cm}$

4. Untersuche, ob die Punkte $P(0|0)$, $Q(6|2{,}5)$ und $R(11|4{,}5)$ auf einer Geraden liegen.

Lösung: Es gibt mehrere Möglichkeiten: z.B. über Steigungsdreiecke, Vektoren, Geradengleichungen.
Antwort: Nein, aber ziemlich knapp.

5. Gegeben sind die Punkte $A(3|-2)$ und $B(1|2)$.
   Um wie viel Prozent muss man die Strecke $[AB]$ mindestens verlängern, bis man auf die y-Achse trifft? Löse die Aufgabe auf verschiedene Weise.

Lösung: Z.B. über Steigungsdreiecke oder die Länge von Strecken.
Antwort: Um 50%.

6. Verlängere die Strecke $[DE]$ mit $D(-4|2)$ und $E(2|3)$ um 10% ihrer Länge über den Punkt E hinaus bis zum Punkt E^*.
   Berechne die Koordinaten des Punktes E^*.

Lösung: $E^*(2,6|3,1)$.

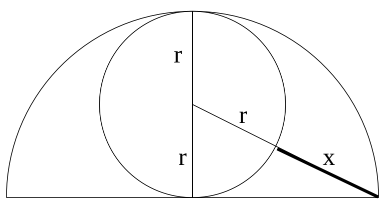
7. Ein Quadrat besitzt einen Flächeninhalt von $39,69\,\text{cm}^2$.
   Berechne die Länge einer Diagonalen.

Lösung: $d = 6,3 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \approx 8,91\,\text{cm}$

8. Die Diagonale eines Quadrates ist 7 cm. lang.
   (a) Zeichne dieses Quadrat.
   (b) Berechne den Umfang dieses Quadrates.

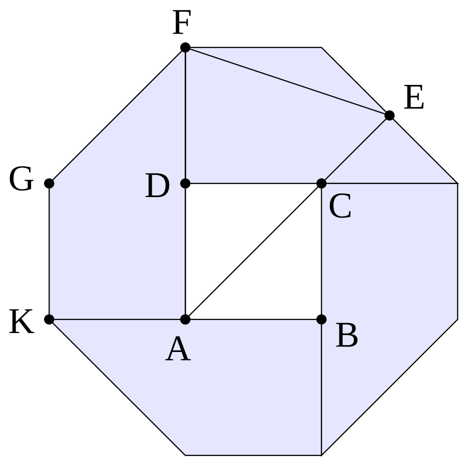
Lösung: (b) $u = 14 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \approx 19,80\,\text{cm}$

9. Berechne auf Grund der Skizze die Länge der Strecke x in Abhängigkeit vom Radius r.



Lösung: $x = 1,24\,r$

10. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das weiße Viereck ist ein Quadrat. Es gilt $\overline{AB} = \overline{DF} = a\,\text{cm}$. Zusätzlich ist hier das Dreieck AEF eigezeichnet.

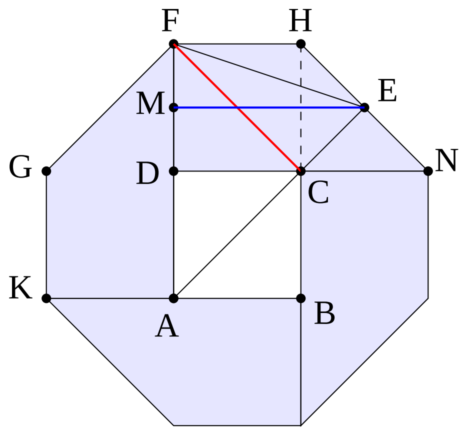


(a) Zeichne die Figur für $\overline{FG} = 3,2\,\text{cm}$ so, dass die Strecke $[KB]$ waagrecht liegt.

(b) Berechne in deiner Zeichnung den Flächeninhalt Quadrates $ABCD$.

(c)
- Untersuche ohne Verwendung des Taschenrechners, ob das Dreieck AEF gleichschenklig ist. Gilt dein Ergebnis auch dann noch, wenn die Figur verkleinert oder vergrößert wird? Begründe deine Ansicht.
- Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks auf drei verschiedene Arten in Abhängigkeit von a.

Lösung: (a) $[FG]$ ist genauso lang wie die Diagonale $[AC]$ des Quadrates $ABCD$.
Also gilt: $a\sqrt{2} = 3,2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3,2}{\sqrt{2}} \approx 2,26$.
Für die Zeichnung: $\overline{AF} = \overline{KB} = 2a\,\text{cm} \approx 5,52\,\text{cm}$.

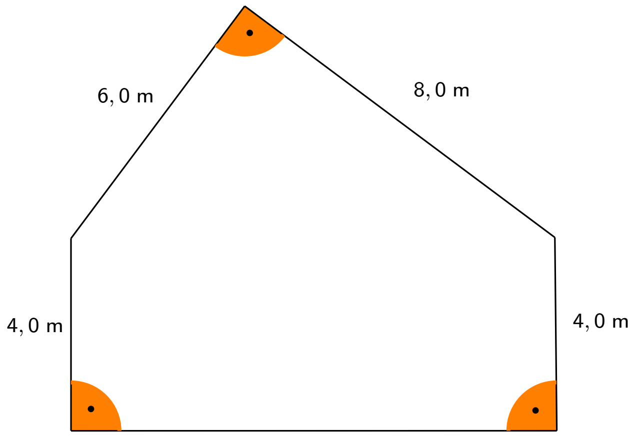


(b) $A(ABCD) = a^2\,\text{cm}^2 = \left(\frac{3,2}{\sqrt{2}}\right)^2\,\text{cm}^2 = 5,12\,\text{cm}^2$

(c)
- Wegen $\overline{CE} = 0,5 \cdot \overline{AC}$ müsste gelten:
  $2a = 1,5a\sqrt{2} \quad (a \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$.
  Weil aber $\sqrt{2}$ irrational ist, liegt hier ein Widerspruch vor.
  Dieser Widerspruch lässt sich auch durch Vergößerung oder Verkleinerung der Figur nicht auflösen: Jede Vergrößerung oder Verkleinerung ist eine winkeltreue Abbildung. Wenn in der Ausgangsfigur keine zwei Winkel maßgleich sind, dann wird dies auch bei einer Größenänderung nicht anders.

- Es wird nur mit Maßzahlen gerechnet.
  1. Möglichkeit:
  $A(AEF) = 0,5\overline{AE} \cdot \overline{FC} = 0,5 \cdot 1,5a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 1,5a^2$.
  2. Möglichkeit:
  $A(AEF) = 0,5 \cdot \overline{AF} \cdot \overline{EM} = 0,5 \cdot 2a \cdot 1,5a = 1,5a^2$.
  3. Möglichkeit:
  Das Lot $[FC]$ zelegt das Dreieck AEF in die beiden rechtwinkligen Teildreiecke ACF und CEF.
  Das Dreieck ACF ist so groß wie das Quadrat $ABCD$: $A(ACF) = a^2$.
  Weil $[FC] \parallel [HN]$ ist, folgt $A(CEF) = A(FCH) = 0,5a^2$.
  $\Rightarrow \quad A(AEF) = a^2 + 0,5a^2 = 1,5a^2$.

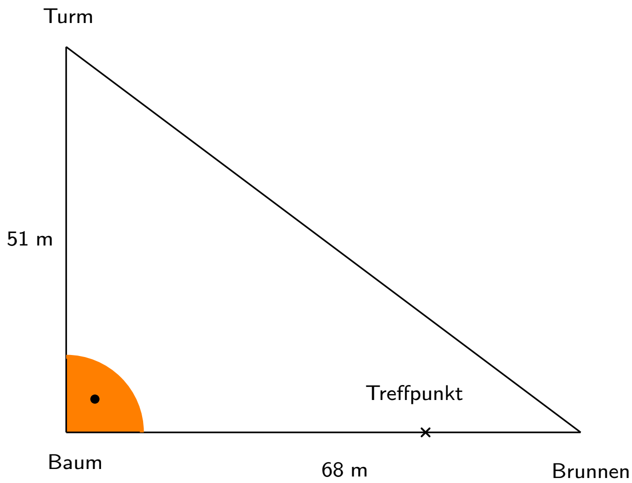
11.



Berechne den Umfang des Fünfecks.

Lösung: Der Umfang beträgt 32 m.

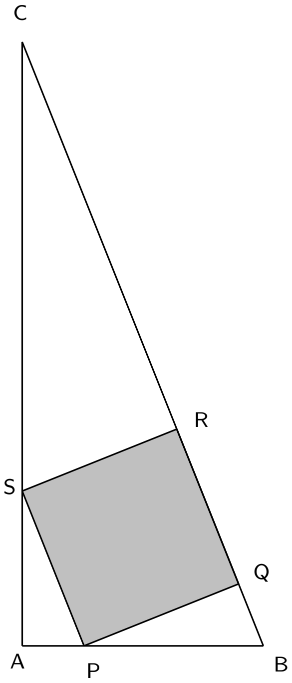
12.



Der Brunnen ist 68 m und der Turm 51 m vom Baum entfernt. Beim Turm laufen Sabrina und Daniel gleichzeitig mit derselben Geschwindigkeit los. Daniel läuft zuerst zum Baum und dann Richtung Brunnen. Sabrina geht zuerst zum Brunnen und dann Richtung Baum. Berechne den Abstand vom Treffpunkt zum Brunnen.

Lösung: Der Treffpunkt ist 17 m vom Brunnen entfernt.

13.



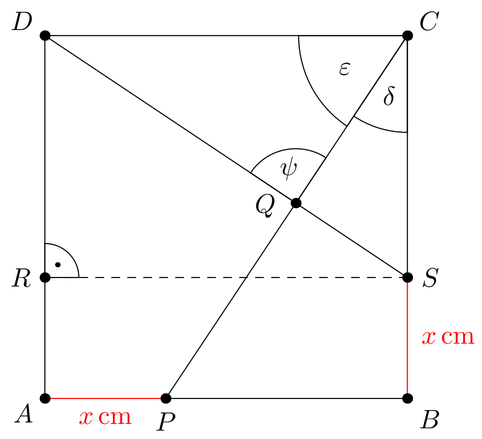
Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC und das einbeschriebene Quadrat $PQRS$.
Es gilt: $\overline{AP} = 2,0\,\text{cm}$ und $\overline{AS} = 5,0\,\text{cm}$.
Berechne Länge der Hypotenuse $[BC]$.

Lösung: $\overline{BC} = 21\,\text{cm}$

14. Eine kleine Pizza hat einen Durchmesser von $23,0\,\text{cm}$. Berechne den Durchmesser einer großen Pizza, die den doppelten Flächeninhalt hat.

Lösung: Die große Pizza hat einen Durchmesser von $32,5\,\text{cm}$.

15.

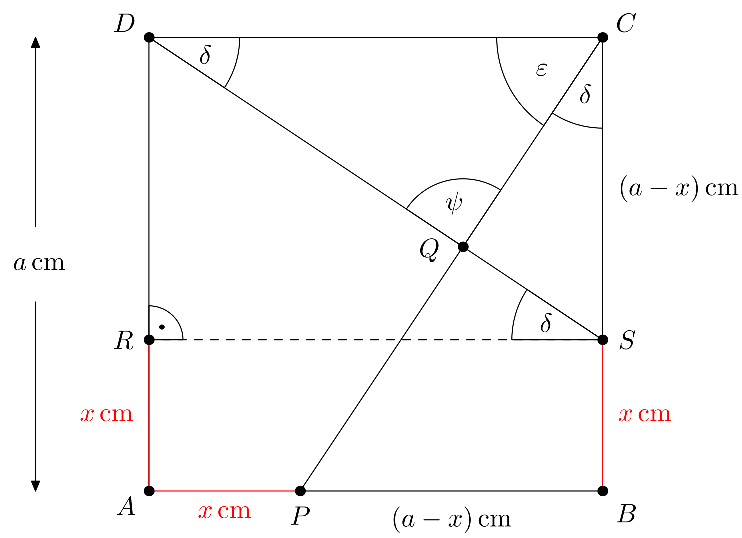


Die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ ist a cm lang.

(a) Zeichne die Figur für $a = 6$ und x = 2.

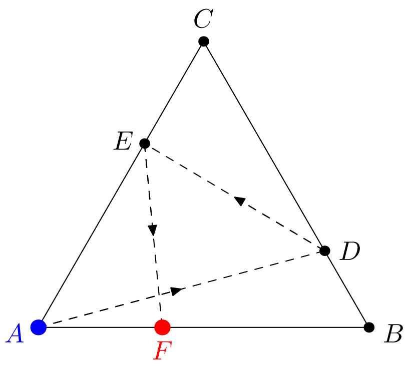
(b) Begründe: $\psi = 90°$.

Lösung: (a)



(b) Am Punkt C gilt: $\varepsilon + \delta = 90°$. **(*)**
Die rechtwinkligen Dreiecke PBC und RSD sind kongruent, denn es gilt: $\overline{PB} = \overline{RD} = (a - x)$ cm und $\overline{BC} = \overline{RS} = a$ cm.
Also folgt $\sphericalangle DSR = \delta = \sphericalangle SDC$ (Z-Winkel).
Wegen **(*)** gilt im Dreieck $DQC : \psi = 90°$.

16.



Herr Theo Lith ist als Platzwart für das Spielfeld ABC verantwortlich, das die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit einer Seitenlänge von 56 m besitzt.
Auf einem Kontrollgang startet er vom Eingang A auf dem kürzesten Weg zur Seite $[BC]$. Von dort aus läuft er wieder auf dem kürzesten Weg zur Seite $[AC]$. Dann begibt er sich erneut auf dem kürzesten Weg zur Grundstücksseite $[AB]$ und trifft dort auf den Fahnenmasten F.

(a) Der gestrichelt eingezeichnete Kontrollweg von Herrn Lith in der obigen Zeichnung ist falsch eingetragen. Was ist daran verkehrt?

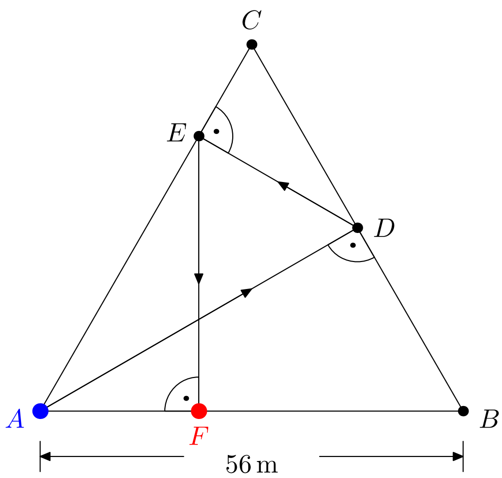
(b) Zeichne die Figur mit dem richtigen Weg im Maßstab 1 : 1000. Trage dann den Weg von Herrn Lith und die Punkte D, E und F korrekt ein.

(c) Zeige: $\overline{AF} : \overline{FB} = 3 : 5$.

(d) Bestätige mit Hilfe der Angabe (c) die Position des Fahnenmastes durch eine weitere Konstruktion in deiner Zeichnung.

Lösung: (a) Die kürzeste Entfernung eines Punktes zu einer Strecke (Geraden) ist das Lot von diesem Punkt auf die Strecke (Gerade). Aber hier steht z.B. die Strecke $[AD]$ offensichtlich nicht auf der Dreiecksseite $[BC]$ senkrecht.

(b)

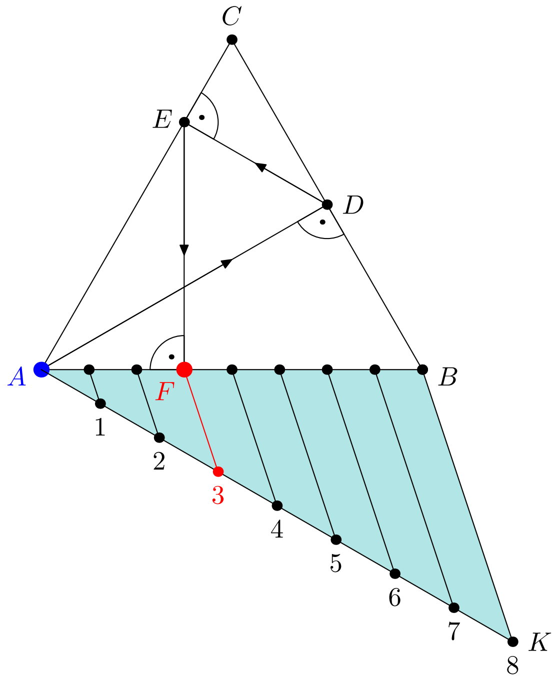


(c) Der Punkt D halbiert die Seite $[BC]$. $\quad \Rightarrow \quad \overline{DC} = 28\,\text{m}$.
Das Dreieck EDC ist ein halbes gleichseitiges Dreieck mit $\overline{EC} = 0,5 \cdot \overline{DC} = 14\,\text{m}$.

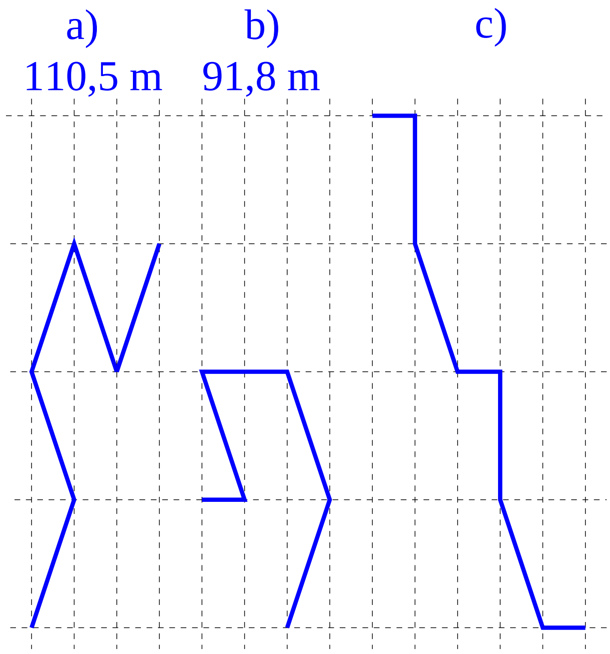
$\Rightarrow \quad \overline{AE} = 56\,\text{m} - 14\,\text{m} = 42\,\text{m}.$
Das Dreieck AFE ist wieder ein halbes gleichseitiges Dreieck: $\overline{AF} = 21\,\text{m}$.
$\Rightarrow \quad \overline{FB} = 56\,\text{m} - 21\,\text{m} = 35\,\text{m}.$

$$\frac{21\,\text{m}}{35\,\text{m}} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \overline{AF} : \overline{FB} = 3 : 5.$$

(d) Wähle z.B. eine 8 cm lange Strecke $[AK]$ und teile sie in 8 gleiche Teile. Zeichne die zugehörigen Hilfslinien parallel zu $[BK]$ ein. Der Winkel, den die Strecken $[AK]$ und $[AB]$ einschließen, spielt zwar keine Rolle; du solltest ihn aber wegen der Zeichengenauigkeit nicht zu spitz wählen. Es folgt dann: Der Punkt F teilt die Strecke $[AB]$ im Verhältnis $3 : 8$.
Damit gilt: $\overline{AF} : \overline{FB} = 3 : 5$.



17.



Die Längen der zwei Wege a) und b) sind angegeben. Wie lang ist der Weg c)?

Lösung:

Weg a)

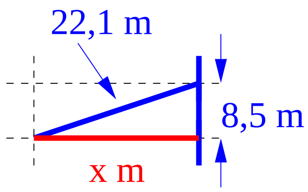
Er besteht aus 5 gleich langen Strecken, denn jede Strecke stellt die Diagonale eines rechteckigen Gitterkästchens dar:
$110,5\,\mathrm{m} : 5 = 22,1\,\mathrm{m}$. So lang ist die Diagonale eines Gitterkästchens.

Weg b)

Er enthält 3 gleich lange Rechtecksdiagonalen eines Gitterkästchens. Der Rest dieses Weges ist dreimal so lang wie Breite eines Gitterkästchens. Für die Breite eines Gitterkästchens gilt dann:
$(91,8\,\mathrm{m} - 3 \cdot 22,1\,\mathrm{m}) : 3 = 8,5\,\mathrm{m}$.

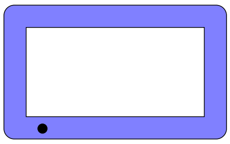
Weg c)

Von einem Gitterkästchen kennst du nun dessen Diagonalenlänge ($22,1\,\mathrm{m}$) und dessen Breite ($8,5\,\mathrm{m}$).
Dann lässt sich mit dem Satz des PYTHAGORAS die Höhe eines Gitterkästchens ausrechnen. (Das Gitterkästchen ist hier aus Platzgründen waagrecht gelegt):



Hier gilt: $x^2 + 8{,}5^2 = 22{,}1^2 \quad \Rightarrow \quad x = 20{,}4$. Für die Länge des Weges c) ergibt sich dann: $3 \cdot 8{,}5\,\mathrm{m} + 2 \cdot 22{,}1\,\mathrm{m} + 2 \cdot 20{,}4\,\mathrm{m} = 110{,}5\,\mathrm{m}$; d.h. die Wege a) und c) sind gleich lang.

18.

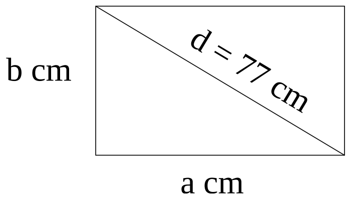


Das ursprüngliche Format des Fernsehbildes von 4 : 3 wird mehr und mehr auf das Format 16 : 9 umgestellt.

(a) Berechne die Seitenlängen des sichtbaren Bildes im alten und neuen Format bei einer 77 cm langen Bildschirmdiagonalen.

(b) Vergleiche die zugehörigen Flächeninhalte der beiden Fernsehbilder in den verschiedenen Formaten bei der 77 cm langen Bildschirmdiagonalen.

Lösung: (a)



Altes Format:

$$a : b = 4 : 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{3}{4}\,a.$$

Mit dem PYTHAGORAS folgt:

$$77^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{3}{4}\,a\right)^2 = a^2\left(1 + \frac{9}{16}\right) = a^2 \cdot \frac{25}{16} \text{ mit } a, b > 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad 77 = \frac{5}{4}\,a \quad \Leftrightarrow \quad a = 61{,}6 \text{ und } b = 46{,}2.$$

Neues Format:

$$a : b = 16 : 9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{16}{9} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{9}{16}\,a.$$

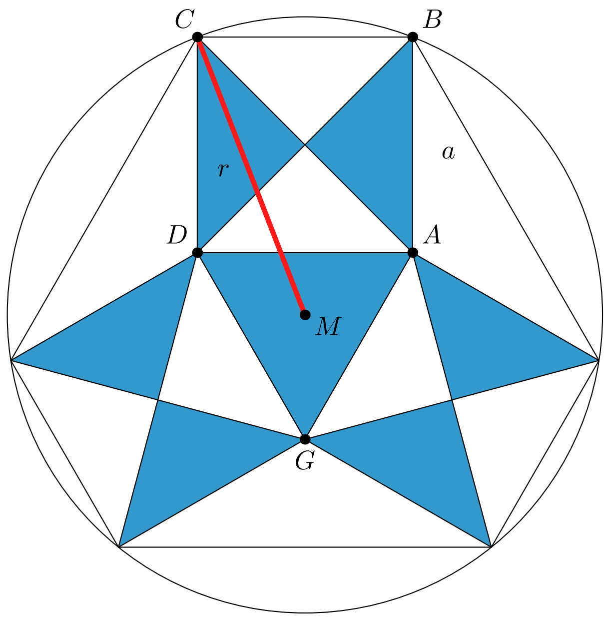
Mit dem PYTHAGORAS folgt:

$$77^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{9}{16}a\right)^2 = a^2\left(1 + \frac{81}{256}\right) = a^2 \cdot \frac{337}{256} \text{ mit } a, b > 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad a \approx 67 \text{ und } b \approx 36.$$

(b) **Altes Format:** $A_a = 61{,}6\,\text{cm} \cdot 46{,}2\,\text{cm} \approx 2846\,\text{cm}^2$
Neues Format: $A_b \approx 67\,\text{cm} \cdot 36\,\text{cm} \approx 2412\,\text{cm}^2$.
Das alte Format weist also bei gleicher Diagonalenlänge einen größeren Flächeninhalt auf.

19.

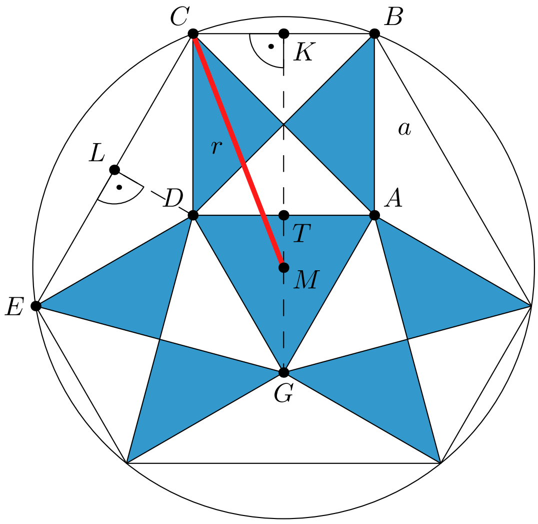


Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Im Zentrum befindet sich das gleichseitige Dreieck ADG. Der Umkreis mit dem Mittelpunkt M wurde zusammen mit dem Umkreisradius r zusätzlich eingezeichnet. Die Länge der Quadratseite $\overline{AB}$ ist a.

(a) Berechne den Umkreisradius r für $a = 4$.

(b) Wie viel Prozent der Umkreisfläche wird von dem sechseckigen Logo bedeckt?

Lösung: (a)



Das Logo ist mit seinem Umkreis verkleinert dargestellt.
Im gleichseitigen Dreieck ADG stellt die Strecke $[GT]$ die Dreieckshöhe dar. Dann gilt:

$\overline{MT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3}.$

$\Rightarrow \quad \overline{MK} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3} + a = a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + 1\right)$. Weiter gilt: $\overline{CK} = \frac{1}{2} \cdot a$.

Im rechtwinkligen Dreieck MKC gilt:

$$r^2 = \left[a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + 1\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^2 = a^2 \cdot \left(\frac{3}{36} + \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 + \frac{1}{4}\right).$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = \frac{a^2}{3}\left(4 + \sqrt{3}\right) \qquad \textbf{(*)}$$

$$\Rightarrow \quad r = a \cdot \sqrt{\frac{4+\sqrt{3}}{3}} \qquad a = 4\,\text{cm}: r \approx 5,53\,\text{cm}.$$

(b) Für die Fläche $A_{\odot}$ des Umkreises gilt dann mit **(*)**:

$$A_{\odot} = \frac{\pi}{3} \cdot a^2 \cdot (4 + \sqrt{3}).$$

Das gleichschenklige Dreieck EDC hat die Schenkellänge a. Es wird durch die Höhe $[LD]$ in die beiden kongruenten rechtwinkligen Dreiecke EDL und LDC zerlegt.
Es gilt: $\sphericalangle CDE = 360° - 2 \cdot 90° - 60° = 120°$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle LED = \sphericalangle CLD = (180° - 120°) : 2 = 30°$. Somit lassen sich die beiden Hälften des Dreiecks EDC zu einem gleichseitigen Dreieck zusammenfügen, das mit dem gleichseitigen Dreieck ADG kongruent ist.
Um den Flächeninhalt des Logos zu berechnen, musst du also zu dem der drei Quadrate den vierfachen des gleichseitigen Dreiecks ADG im Zentrum addieren. Für A_{Logo}

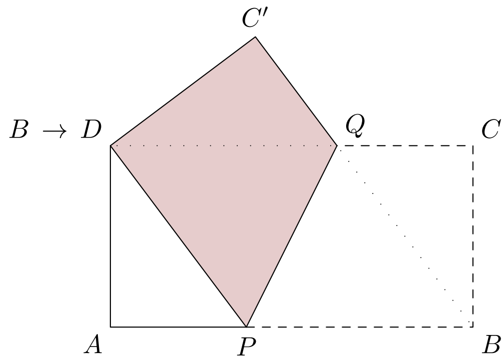
ergibt sich dann:

$$A_{Logo} = 3 \cdot a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 3a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(3+\sqrt{3}).$$

$$\frac{A_{Logo}}{A_{\odot}} = \frac{a^2(3+\sqrt{3})}{\frac{\pi}{3} \cdot a^2 \cdot (4+\sqrt{3})} \approx 0,7883 = 78,83\%$$

Knapp 79% des Umkreises werden vom TDK-Logo bedeckt.

20.



Das dargestellte Rechteck $ABCD$ wird so gefaltet, dass der Eckpunkt B auf den Eckpunkt D zu liegen kommt. Dadurch entsteht die Faltkante $[PQ]$.

(a) Schneide aus kariertem Papier ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$ aus. Falte es auf die oben beschriebene Weise.

(b) Zeichne die Figur oben rechts für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

(c)
- Begründe mit Hilfe von Winkelmaßen: Das Viereck $PBQD$ ist ein Parallelogramm.
- Begründe: Das Viereck $PBQD$ ist sogar eine Raute.

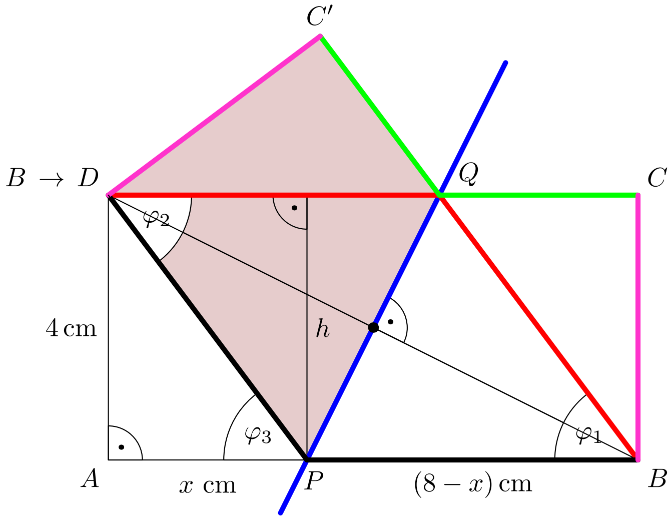
(d) Es sei $\overline{AP} = x\,\text{cm}$. Zeige rechnerisch: $x = 3$.

(e) Berechne den Flächeninhalt der Raute $PBQD$ auf zwei verschiedene Arten mit Hilfe von Teildreiecken.

(f) Berechne erneut den Flächeninhalt der Raute $PBQD$ mit Hilfe ihrer Diagonalenlängen.

Lösung: (a) Klar.

(b)



(c)
- Jede Faltachse ist gleichzeitig Spiegel- bzw. Symmetrieachse.
  Also gilt: $\Delta PBQ \cong \Delta PQD \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \varphi_2$.
  Wegen $[AB] \parallel [BD]$ folgt $\varphi_2 = \varphi_3$ (Z-Winkel).
  Also gilt: $\varphi_1 = \varphi_3$ und damit $[BQ] \parallel [PD]$.
  Weil gleichzeitig $[PB] \parallel [QD]$ gilt, sind die beiden gegenüberliegenden Seiten jeweils parallel: Das Viereck $PBQD$ muss ein Parallelogramm sein.
- Das Parallelogramm $PBQD$ besitzt die Symmetrieachse PQ. Jedes Parallelogramm mit einer Symmetrieachse ist eine Raute.

(d) Es gilt: $\overline{PB} = \overline{PD} = (8 - x)\,\text{cm}$.
PYTHAGORAS im Dreieck ABD: $(8 - x)^2 = 4^2 + x^2$.
$\Leftrightarrow \quad 64 - 16x + x^2 = x^2 + 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$.

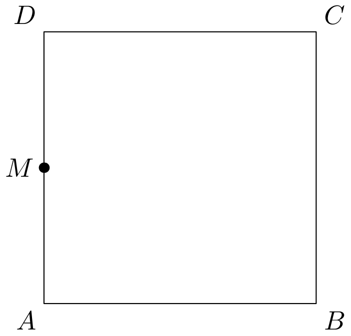
(e) **1. Möglichkeit:** Berechne die Fläche des Teildreiecks PQD.
$A_{\Delta QPD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DQ} \cdot h$
Weil jede Raute ein gleichseitiges Viereck ist, gilt $\overline{DQ} = 8\,\text{cm} - 3\,\text{cm} = 5\,\text{cm}$.
Also: $A_{\Delta QPD} = \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4\right)\,\text{cm}^2 = 10\,\text{cm}^2$. Die Raute $PBQD$ ist doppelt so groß wie dieses Teildreieck: $\quad A_{PBQD} = 20\,\text{cm}^2$.

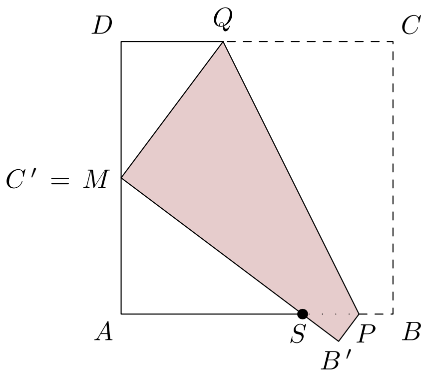
2. Möglichkeit: Schneide vom Rechteck $ABCD$ die beiden kongruenten Dreiecke APD und BCQ ab:
$A_{PBQD} = (8 \cdot 4)\,\text{cm}^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\right)\,\text{cm}^2 = 20\,\text{cm}^2$

(f) Es gilt: $\overline{FQ} = \overline{DQ} - \overline{DF} = 5\,\text{cm} - 3\,\text{cm} = 2\,\text{cm}$.
PYTHAGORAS im Dreieck PQF: $\quad \overline{PQ}^{\,2} = \left(4^2 + 2^2\right)\,\text{cm}^2$
$\Rightarrow \quad \overline{PQ} = \sqrt{20}\,\text{cm}$.
PYTHAGORAS im Dreieck ABD: $\quad \overline{BD}^{\,2} = \left(8^2 + 4^2\right)\,\text{cm}^2$
$\Rightarrow \quad \overline{BD} = \sqrt{80}\,\text{cm}$.

$$\Rightarrow \quad A_{PBQD} = \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{80}\right) \text{cm}^2 = 20\,\text{cm}^2.$$

21.





Das dargestellte Quadrat $ABCD$ wird so gefaltet, dass der Eckpunkt C auf den Mittelpunktpunkt M der Seite $[AD]$ zu liegen kommt. Dadurch entsteht die Faltkante $[PQ]$.

(a) Schneide aus kariertem Papier ein Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ aus. Falte es auf die oben beschriebene Weise.

(b) Zeichne die Figur oben rechts für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(c) Es sei $\overline{DQ} = x\,\text{cm}$. Zeige rechnerisch: $x = 2,25$.

(d) Zeige: $\overline{DQ} : \overline{DC'} = 3 : 4$.

(e) Begründe: Die Dreiecke $C'QD$, ASC' und $SB'P$ sind zueinander ähnlich.

(f) Berechne $\overline{AS}$.

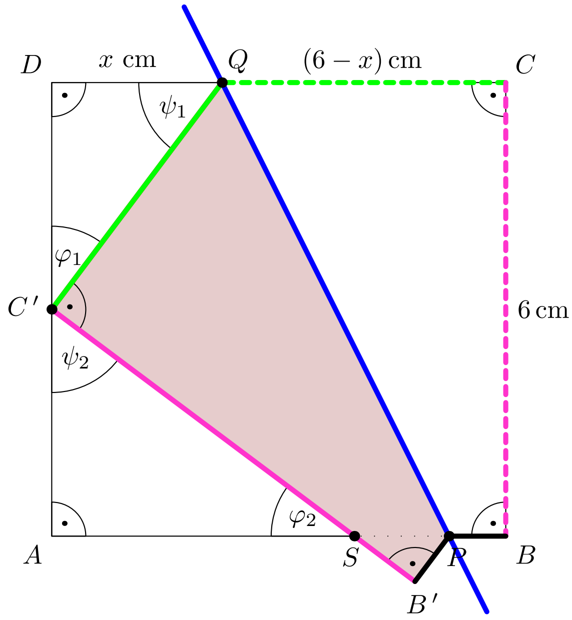
(g) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ASC'.

(h) Berechne $\overline{C'S}$. [Ergebnis: $\overline{C'S} = 5\,\text{cm}$]

(i) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ liegt nach dem Falten unter der Kante $[AB]$?

Lösung: (a) Klar.

(b)



(c) Die Faltachse PQ ist gleichzeitig die Spiegelachse. Jede Achsenspiegelung ist längen- und winkeltreu. Es gilt also $\overline{CQ} = \overline{QC'} = (6 - x)\,\text{cm}$.

PYTHAGORAS im Dreieck $C'QD$: $\overline{C'Q}^{\,2} = \overline{C'D}^{\,2} + \overline{DQ}^{\,2}$:
$(6-x)^2 = x^2 + 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad 36 - 12x + x^2 = x^2 + 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,25$

(d) $\overline{DQ} : \overline{DC'} = 2,25 : 3 = 0,75 = \dfrac{3}{4} = 3 : 4$.

(e) Im Dreieck $C'QD$ gilt: $\varphi_1 + \psi_1 = 90°$ (*).
Am Scheitel C' gilt: $\varphi_1 + 90° + \psi_2 = 180° \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 + \psi_2 = 90°$.
Mit (*) folgt $\psi_2 = \psi_1$. Somit stimmen die beiden rechtwinkligen Dreiecke $C'QD$ und ASC' in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck müssen die beiden Dreiecke auch im Maß des dritten Innenwinkels übereinstimmen: $\varphi_1 = \varphi_2$. Also gilt: $\Delta C'QD \sim \Delta ASC'$.
Im Dreieck $SB'P$ gilt: $\sphericalangle B'SP = \varphi_2$ (Scheitelwinkel) $= \varphi_1$. Die beiden Dreiecke ASC' und $SB'P$ sind rechtwinklig. Also sind sie zueinander ähnlich. Also sind alle drei Dreiecke zueinander ähnlich.

(f) In der Lösung (d) wurde gezeigt, dass $\overline{DQ} : \overline{DC'} = 3 : 4$ gilt.
Wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $C'QD$ und ASC' muss ebenso $\overline{AC'} : \overline{AS} = 3 : 4$ gelten.
Also: $\dfrac{3}{\overline{AS}} = \dfrac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AS} = 4\,\text{cm}$.

(g) $A_{\Delta ASC'} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AS} \cdot \overline{AC'} = \dfrac{1}{2} \cdot (4 \cdot 3)\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2$.

(h) PYTHAGORAS im Dreieck ASC':
$\overline{C'S}^{\,2} = \overline{AS}^{\,2} + \overline{AC'}^{\,2}$: $\overline{C'S}^{\,2} = 3^2\,\text{cm}^2 + 4^2\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{C'S} = 5\,\text{cm}$

(i) $\overline{SB'} = \overline{C'B'} - \overline{C'S}$

Wegen $\overline{C'B'} = \overline{CB} = 6\,\text{cm}$ folgt: $\overline{SB'} = 6\,\text{cm} - 5\,\text{cm} = 1\,\text{cm}$.
Wie vorher in (e) dargelegt, gilt $\Delta ASC' \sim \Delta SB'P$.

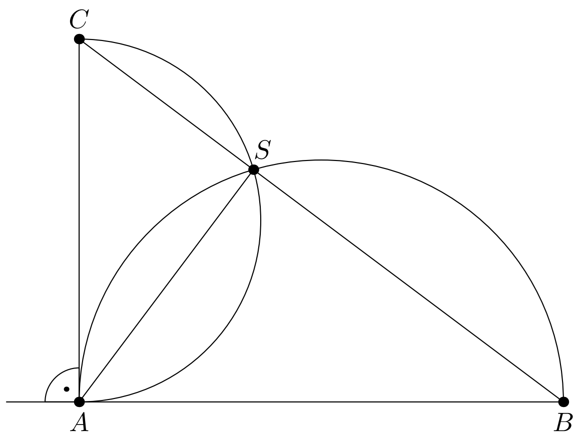
Weiter gilt: $\dfrac{\overline{SB'}}{\overline{AS}} = \dfrac{1}{4}$.

Der Streckungsfaktor k beträgt hier also $\dfrac{1}{4}$.

$A_{\Delta SB'P} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \cdot A_{\Delta ASC'} \quad \Rightarrow \quad A_{\Delta SB'P} = \dfrac{1}{16} \cdot 6\,\text{cm}^2 = 0{,}375\,\text{cm}^2$

$\dfrac{A_{\Delta SB'P}}{A_{ABCD}} = \dfrac{0{,}375\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} \approx 0{,}0104 = 1{,}04\%.$

22.



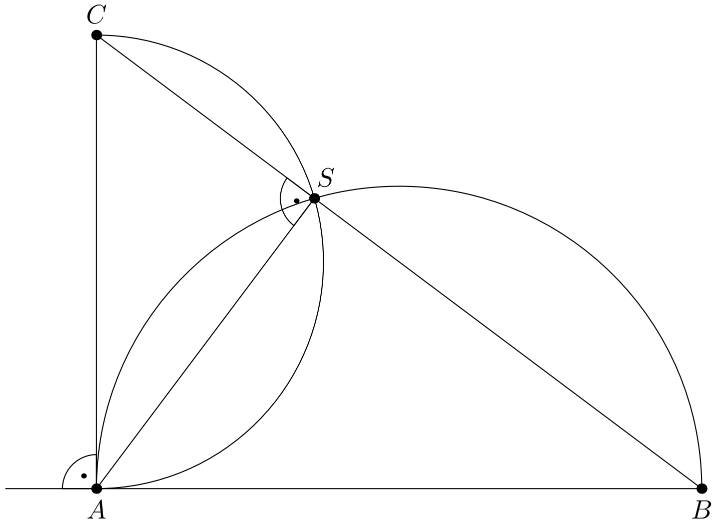
Die zwei Halbkreise haben die beiden Katheten $[AB]$ bzw. $[AC]$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC als Durchmesser. Die Halbkreise schneiden sich im Punkt S.
Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$

(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe:

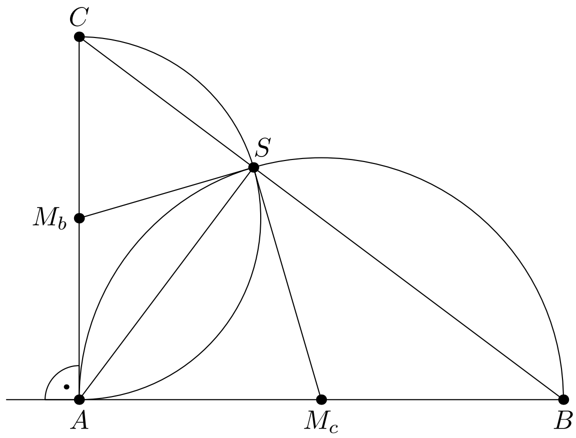
- Das Dreieck ASC ist rechtwinklig.
- Der Schnittpunkt S liegt auf der Hypotenuse $[BC]$.

Lösung: (a)



(b)
- Der Punkt S liegt auf dem THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AC]$. Also gilt: $\sphericalangle CSA = 90°$.
- Der Punkt S liegt aber auch auf dem THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$. $\Rightarrow \quad \sphericalangle ASB = 90°$.
  Also hat der Winkel CSB das Maß $180°$. Daher liegt der Punkt S auf der Hypotenuse $[BC]$.

23.



Die zwei Mittelpunkte M_b und M_c der beiden Katheten $[AC]$ bzw. $[AB]$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC sind auch die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen. Die Halbkreise schneiden sich im Punkt S, der gleichzeitig auf der Hypotenuse $[BC]$ liegt.
Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$

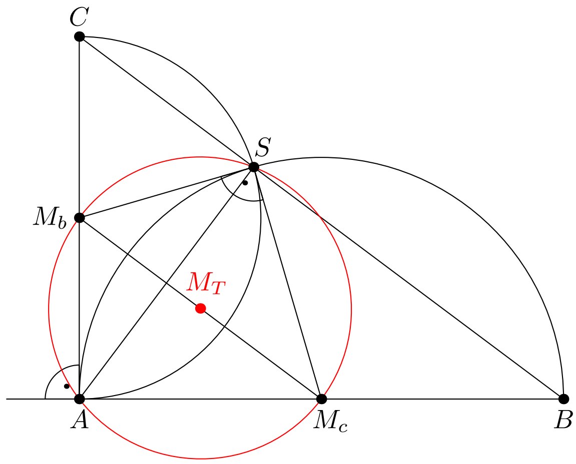
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe:

- Das Viereck AM_cSM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.
- Das Viereck AM_cSM_bbesitzt einen Umkreis.
  Tipp: Zeichne die Strecke M_cM_b ein.

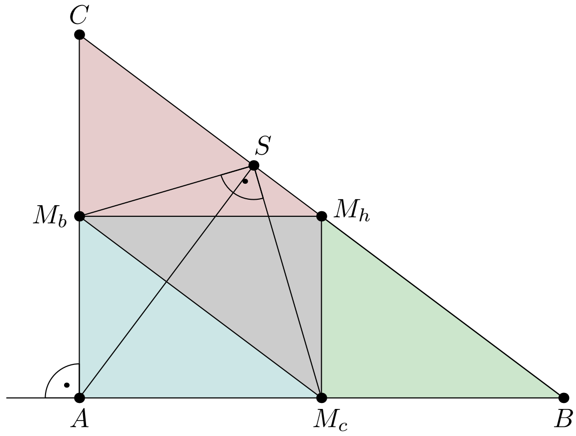
(c)
- Zeichne das Dreieck ABC mit dem Drachenviereck AM_cSM_b erneut.
- Berechne den Flächenanteil des Vierecks AM_cSM_b am Dreieck ABC in Prozent.
  Tipp: Betrachte den Flächenanteil des Dreiecks AM_cM_b am Dreieck ABC. Zeichne auch den Hypotenusenmittelpunkt M_h ein.

Lösung: (a)



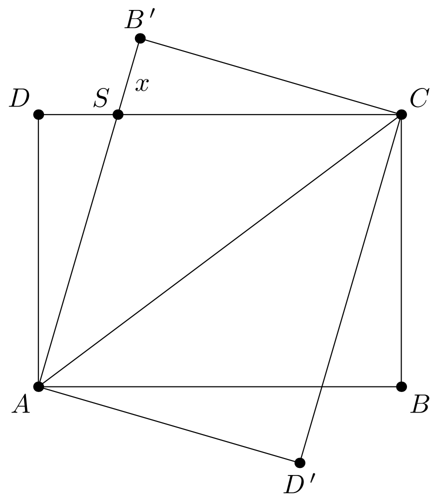
(b)
- Es gilt: $\overline{M_bS} = \overline{M_bA}$ = Radius des kleinen Halbkreises und $\overline{M_cS} = \overline{M_cA}$ = Radius des großen Halbkreises.
  Wenn in einem Viereck zwei Paare benachbarter Seiten jeweils gleich lang sind, dann ist dieses Viereck ein achsensymmetrischer Drachen.
- Die beiden kongruenten rechtwinkligen Dreiecke AM_cM_b und M_bM_cS besitzen die gemeinsame Hypotenuse $[BC]$. Diese Hypotenuse muss daher der Durchmesser des THALES-Kreises sein, der auch durch die Punkte A und S verläuft. Damit ist dieser THALES-Kreis der Umkreis des Drachenvierecks AM_cSM_b. Sein Mittelpunkt M_T ist der Mittelpunkt der Diagonalen $[M_cM_b]$.

(c)
-



- Mit Hilfe der drei Mittelpunkte M_c, M_h und M_b der Seiten des Dreiecks ABC lässt sich dieses Dreieck in vier kongruente Teildreiecke zerlegen.
  Das halbe Drachenviereck AM_cM_b ist eines dieser Teildreiecke, die jeweils 25% der Fläche des Dreiecks ABC einnehmen.
  Also nimmt das Drachenviereck AM_cSM_b 50% der Fläche des Dreiecks ABC ein.

24.



Das Rechteck $ABCD$ wurde an seiner Diagonalen $[AC]$ gespiegelt. Dadurch ist das Viereck $AD'CB'$ entstanden. Es gilt: $x = \overline{SB'}$.

(a) Zeichne die Figur für $a = \overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $b = \overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b)
- Berechne die Seitelänge $\overline{SC}$ in Abhängigkeit von x auf verschiedene Weise.
- Zeige dann:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A des Dreiecks ACS gilt:

$$A_{\Delta ACS} = \frac{b}{4a} \cdot (a^2 + b^2).$$

(d)
- Zeichne die Strecke $[B'D]$ ein.
- Begründe: Das Viereck $ACB'D$ ist ein Trapez.

(e) Zeige: Für den Flächeninhalt A des Dreiecks DSB' gilt:

$$A_{\Delta DSB'} = \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}.$$

(f) Zeige: Für den Flächeninhalt A des Trapezes $ACB'D$ gilt:

$$A_{ACB'D} = ab \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

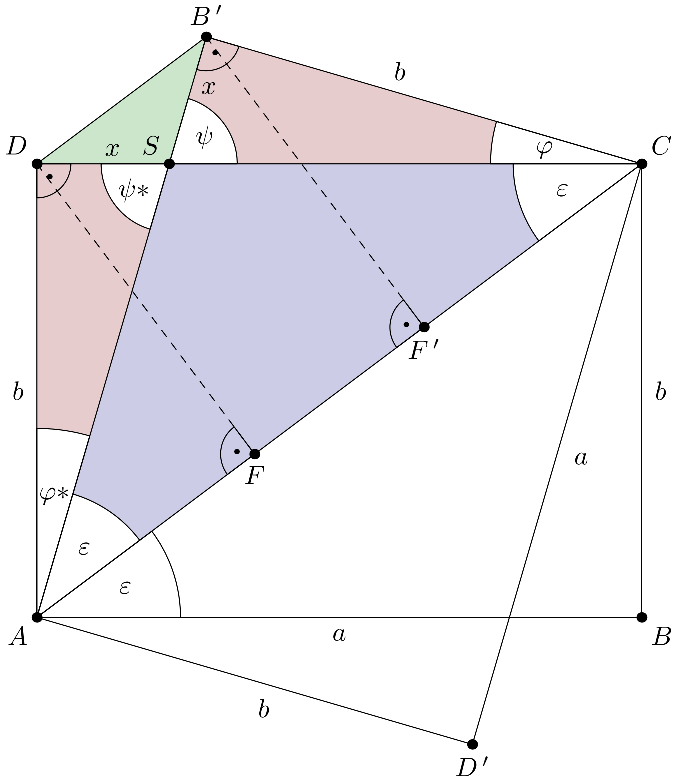
Tipps:
- Das Trapez wird durch seine beiden Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt.
- Zwei Dreiecke davon sind kongruent, die beiden anderen sind zueinander ähnlich.
- Den Flächeninhalt des Trapezes $ACB'D$ erhältst du aus der Summe der Flächeninhalte der vier Teildreiecke.

(g) In welchem Verhältnis müssen die Seitenlängen a und b des Rechtecks $ABCD$ stehen, damit der Flächeninhalt des Trapezes $ACB'D$ um 10% kleiner als der des Rechtecks $ABCD$ wird?

(h) Untersuche, ob der Flächeninhalt des Trapezes $ACB'D$ genau so groß wie der des Rechtecks $ABCD$ werden kann.

(i) Untersuche rein elementargeometrisch anhand des Winkels BAC mit dem Maß ε, ob das Trapez $ACB'D$ auch zum Rechteck werden kann.

Lösung: (a)



(b) Das Spiegelbild des Rechtecks $ABCD$ ist das kongruente Rechteck $AD'CB'$.
Also gilt: $\overline{CB} = \overline{CB'} = \overline{AD} = b$.
Die beiden rechtwinkligen Dreiecke ASD und SCB' stimmen also in der Seitenlänge b überein.
Weiter gilt: $\psi = \psi*$ (Scheitelwinkel) $\quad\Rightarrow\quad \varphi = \varphi*$.
Damit sind die beiden Dreiecke ASD und SCB' kongruent. Insbesondere gilt dann $\overline{AS} = \overline{CS}$ und $\overline{DS} = \overline{SB'} = x$.

- Einerseits gilt dann im Dreieck SCB': $\overline{CS} = \sqrt{b^2 + x^2}$
  Andererseits gilt: $\overline{CS} = a - x$
- $\sqrt{b^2 + x^2} = a - x \mid {}^2 \quad\Rightarrow\quad b^2 + x^2 = a^2 - 2ax + x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x = \dfrac{a^2 - b^2}{2a}$

(c) $A_{\Delta ACS} = A_{\Delta ACD} - A_{\Delta ASD}$
$$A_{\Delta ACS} = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}bx = \frac{b}{2} \cdot \left(a - \frac{a^2 - b^2}{2a}\right) = \frac{b}{2} \cdot \frac{2a^2 - a^2 + b^2}{2a} = \frac{b}{4a} \cdot (a^2 + b^2)$$

(d)
- Siehe Zeichnung.
- Aufgrund der Eigenschaften der Achsenspiegelung sind die beiden Dreiecke ACB' und ACD kongruent. Sie besitzen die gemeinsame Hypotenuse $[AC]$. Also sind die beiden Höhen $[DF]$ und $[B'F']$ gleich lang. Das bedeutet, dass die beiden Punkte D und B' den gleichen Abstand zur Strecke $[AC]$ besitzen.
  Also folgt: $[B'D] \parallel [AC]$. Also ist das Viereck $ACB'D$ ein (gleichschenkliges) Trapez.

(e) Die beiden Dreiecke ACS und DSB' sind zueinander ähnlich; d.h.:

$$A_{\Delta DSB'} = k^2 \cdot A_{\Delta ACS} \text{ mit } k = \frac{\overline{DS}}{\overline{CS}}$$

$$k = \frac{x}{a-x} = \frac{a^2-b^2}{2a} : \left(a - \frac{a^2-b^2}{2a}\right) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$A_{\Delta DSB'} = \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 \cdot \frac{b}{4a} \cdot (a^2+b^2) = \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}.$$

(f)

$$\begin{aligned} A_{Trapez} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot b + \frac{b}{4a} \cdot (a^2+b^2) + \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{2b}{4a} \cdot (a^2-b^2) + \frac{b}{4a} \cdot (a^2+b^2) + \frac{b}{4a} \cdot \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{b}{4a} \cdot \frac{2(a^2-b^2)\cdot(a^2+b^2) + (a^2+b^2)^2 + (a^2-b^2)^2}{a^2+b^2} \\ &= \cdots \\ &= \frac{b}{4a} \cdot \frac{4a^4}{a^2+b^2} = ab \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

(g) Es muss gelten: $A_{Trapez} = 0,9 \cdot A_{ABCD}$. Also:

$$ab \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2} = 0,9 \cdot ab \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{a^2+b^2} = 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad 0,1a^2 = 0,9b^2$$

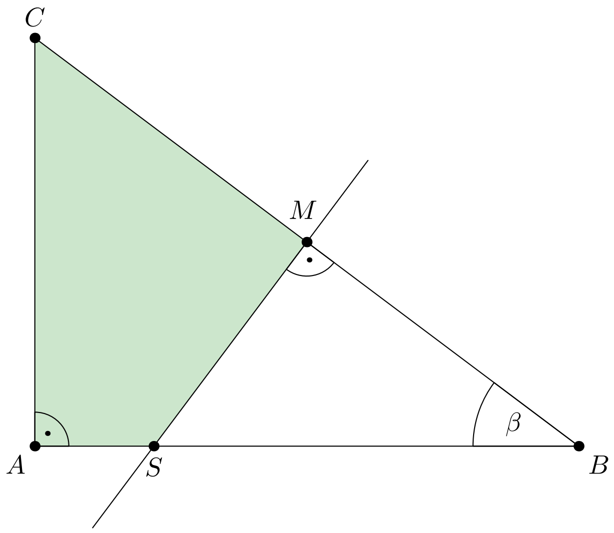
Wegen $a, b > 0$ folgt dann $a = 3 \cdot b$.

(h) Es muss gelten: $ab \cdot \dfrac{a^2}{a^2+b^2} = ab \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a^2}{a^2+b^2} = 1.$

Ein Bruch hat aber genau dann den Wert 1, wenn Zähler und Nenner gleich sind: $a^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b = 0\,(\dagger)$. Dann würde das Rechteck zur Strecke entarten; ein solches Trapez gibt es nicht.

(i) Es gilt: $\sphericalangle DCA = \varepsilon$ (Z-Winkel).
Weiter gilt:$\sphericalangle BAS = \psi = 2 \cdot \varepsilon$ (F-Winkel).
Ebenso folgt: $\varphi = 90° - 2\varepsilon$ (Innenwinkelsumme im Dreieck SCB').
Damit das Trapez $ACB'D$ zum Rechteck wird, muss $\varphi + \varepsilon = 90°$ gelten.
Das bedeutet: $90° - 2\varepsilon + \varepsilon = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 0°$. Wieder würde das Rechteck zur Strecke entarten; d.h.ein solches Trapez gibt es nicht.

25.



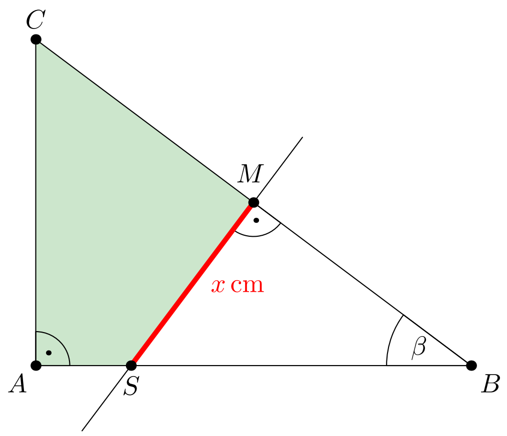
Der Hypotenusenmittelpunkt des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist der Punkt M. In der Figur gilt weiter: $\overline{AB} = 7,2\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 5,4\,\text{cm}$.

(a) Begründe: Die beiden Dreiecke SBM und ABC sind zueinander ähnlich.

(b) Zeige: $\overline{MS} = 3,375\,\text{cm}$.

(c) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $ASMC$ am Dreieck ABC in Prozent.

Lösung: (a)



In beiden Dreiecken ABC und SBM kommt der Innenwinkel mit dem Maß β vor. Zudem sind beide Dreiecke rechtwinklig. Also müssen beide Dreiecke auch im Maß des dritten Innenwinkels übereinstimmen; also gilt $\Delta\, SBM \sim \Delta\, ABC$.

(b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen.
PYTHAGORAS im Dreieck ABC: $\overline{BC}^2 = 7,2^2 + 5,4^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = 9\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad \overline{BM} = 4,5\,\text{cm}$.

Vierstreckensatz: $\dfrac{\overline{MS}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} : \quad \dfrac{x}{4,5} = \dfrac{5,4}{7,2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3,375.$

(c) Berechne den Ähnlichkeitsfaktor: Z.B. $k = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \dfrac{4,5}{7,2} = 0,625.$

Dann gilt $\dfrac{A_{\Delta\,SBM}}{A_{\Delta\,ABC}} = k^2 = 0,625^2 = 0,390625.$

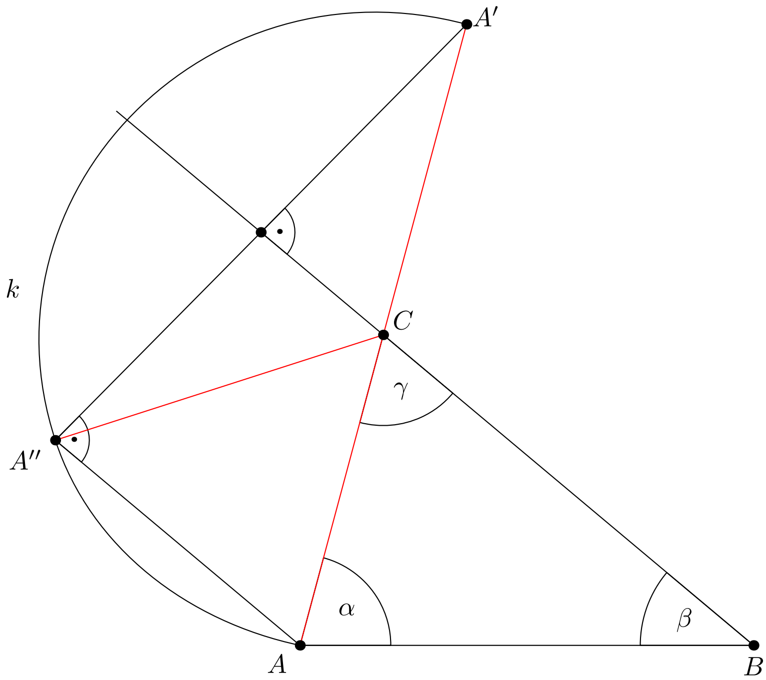
Das bedeutet: Das Dreieck SBM nimmt $39,0625\%$ der Fläche des Dreiecks ABC ein. Dann nimmt das Viereck $ASMC$ $100\% - 39,0625\% = 60,9375\%$ der Fläche des Dreiecks ABC ein.

26. (a) Zeichne ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 75^\circ$ und $\beta = 40^\circ$.

(b)
- Spiegle den Punkt A am Punkt C. Sein Spiegelbild ist der Punkt A'.
- Spiegle den Punkt A' an der Halbgeraden $[BC$. Sein Spiegelbild ist der Punkt A''.

(c) Begründe:
- Das Dreieck ACA'' ist gleichschenklig.
- Das Dreieck $AA'A''$ ist rechtwinklig.

Lösung: (a)

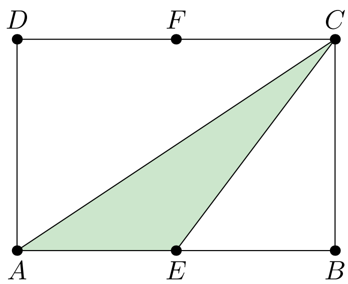


- Siehe Zeichnung.
- Siehe Zeichnung.

(b) Begründe:

- Jede Punktspiegelung ist längentreu. Also gilt: $\overline{CA} = \overline{CA'}$.
  Jede Achsenspiegelung ist längentreu. Also gilt: $\overline{CA'} = \overline{CA''}$.
  $\Rightarrow \quad \overline{CA} = \overline{CA''}$. Also ist das Dreieck ACA'' gleichschenklig.
- Es gilt: $\overline{CA} = \overline{CA''} = \overline{CA'}$. Das bedeutet, dass die drei Punkte A, A' und A'' vom Punkt C gleich weit entfernt sind. Folglich müssen die Punkte A, A' und A'' auf einer Kreislinie k mit dem Mittelpunkt C liegen. Diese Kreislinie ist nun der THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AA']$. Also ist das Dreieck $AA''A'$ wegen $A'' \in k$ rechtwinklig.

27.



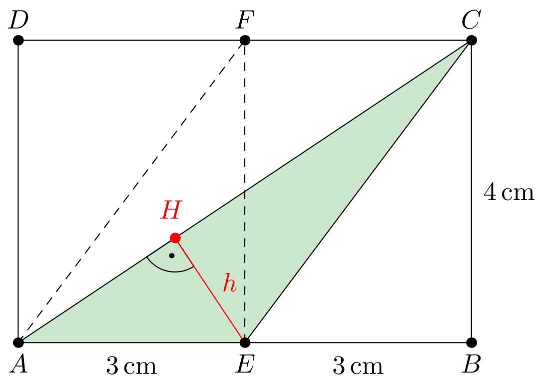
Für das Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.
Die Punkte E und F sind die Mittelpunkte der Seite $[AB]$ bzw. $[CD]$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Welchen Bruchteil der Rechtecksfläche nimmt das Dreieck AEC ein? Löse die Aufgabe auf zwei verschiedene Arten.

(c) Berechne den Abstand des Punktes E von der Strecke $[AC]$. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) **1. Möglichkeit:**
Die Dreiecke AEC und AEF haben die gleiche Grundlinie $[AE]$ und gleichlange Höhen $[BC]$ bzw. $[EF]$. Also besitzen sie den gleichen Flächeninhalt.
Das Dreick AEF nimmt ein Viertel der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ein, also trifft

dies auch für das Dreieck AEC zu.
2. Möglichkeit:
$A_{AEC} = A_{ABCD} - A_{EBC} - A_{ACD}$.

$A_{\Delta\, EBC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2$ und $A_{\Delta\, ACD} = 6 \cdot 4\,\text{cm}^2 : 2 = 12\,\text{cm}^2$

$\Rightarrow \quad A_{AEC} = 24\,\text{cm}^2 - 6\,\text{cm}^2 - 12\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2$.
Das ist aber ein Viertel der Fläche des Rechtecks $ABCD$.

(c) Der Abstand eine Punktes zu einer Strecke (oder Geraden) ist immer die kürzeste Entfernung dieses Punktes zur Strecke. Sie wird durch das **Lot** vom Punkt E auf die Strecke $[AC]$ dargestellt.
Wir wissen schon, dass $A_{\Delta\, AEC} = 6\,\text{cm}^2$ gilt.
Der gesuchte Abstand h ist die Höhe im Dreieck AEC mit der Grundlinie $[AC]$:
$A_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h$.

$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 4^2}\,\text{cm} = \sqrt{52}\,\text{cm}$.

$6\,\text{cm}^2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{52}\,\text{cm} \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{12\,\text{cm}^2}{\sqrt{52}\,\text{cm}} \approx 1,66\,\text{cm}$.

28. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

(a) Zeichne dieses Dreieck, so dass die Kathete $[AB]$ waagrecht liegt.

(b) Punkte P_n wandern auf der Seite $[AB]$ und Punkte Q_n wandern gleichzeitig auf der Seite $[BC]$, wobei $\overline{AP_n} = \overline{BQ_n} = x\,\text{cm}$ gilt. Dadurch entstehen Vierecke AP_nQ_nC .
Zeichne für $x = 1,5$ das Viereck AP_1Q_1C ein.

(c) Gib die Menge aller möglichen Belegungen von x an.

(d) Unter allen Vierecken AP_nQ_nC gibt es das Trapez AP_2Q_2C .

- Berechne die zugehörige Belegung von x .

  [Ergebnis: $x = 2,4$]

- Zeichne dieses Trapez in anderer Farbe ein.
- Berechne den Flächeninhalt dieses Trapezes. **Tipp:** Berechne zunächst den Flächeninhalt des Dreiecks P_2BQ_2 .
- Berechne die Höhe h dieses Trapezes AP_2Q_2C . Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

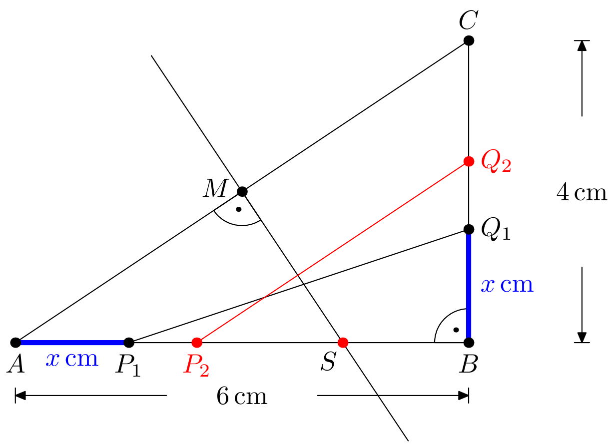
(e) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Vierecke AP_nQ_nC gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = (0,5x^2 - 3x + 12)\,\text{cm}^2 \ .$$

(f) Unter allen Vierecken AP_nQ_nC gibt es das Viereck AP_2Q_2C, das den minimalen Flächeninhalt besitzt.
Berechne dieses Minimum und die zugehörige Belegung von x.

(g) Untersuche, ob es unter allen Vierecken AP_nQ_nC achsensymmetrische gibt.

Lösung: (a)



(b) Siehe Zeichnung.

(c) Auf der Kathete $[BC]$ kann x nicht länger als 4 cm. werden. Für $x = 0$ und $x = 4$ gibt es kein Viereck. Also: $x \in \,]\,0;\, 4[_{\mathbb{R}}$.

(d)
- Ein Viereck, darf sich dann Trapez nennen, wenn es zwei parallele Seiten besitzt. In der Zeichnung ist das Trapez AP_2Q_2C vorhanden. Du siehst, dass die Dreiecke P_2BQ_2 und ABC dann zueinander ähnlich sind. Wende den Vierstreckensatz an, wobei die Variable x mit eingebunden sein muss:

$$\frac{6-x}{x} = \frac{6}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 24 - 4x = 6x \quad \Leftrightarrow \quad 24 = 10x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,4\,.$$

- Siehe Zeichnung.
- $A_{\Delta\, P_2BQ_2} = 0.5 \cdot 3,6 \cdot 2,4\,\mathrm{cm}^2 = 4,32\,\mathrm{cm}^2$.
$A_{\Delta\, ABC} = 0.5 \cdot 6 \cdot 4\,\mathrm{cm}^2 = 12\,\mathrm{cm}^2$.
$A_{AP_2Q_2C} = A_{\Delta\, ABC} - A_{\Delta\, P_2BQ_2} = 12\,\mathrm{cm}^2 - 4,32\,\mathrm{cm}^2 = 7,68\,\mathrm{cm}^2$.
- $\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 4^2}\,\mathrm{cm} = \sqrt{52}\,\mathrm{cm}\ (\approx 7,21\,\mathrm{cm})$.
$\overline{P_2Q_2} = \sqrt{3,6^2 + 2,4^2} = \sqrt{18,72}\,\mathrm{cm}\ (\approx 4,33\,\mathrm{cm})$.

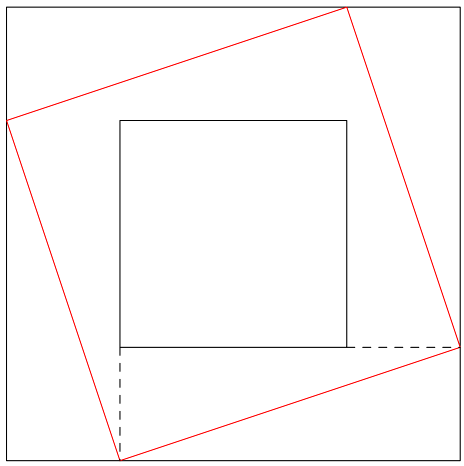
$$A_{AP_2Q_2C} = \frac{\sqrt{52}\,\mathrm{cm} + \sqrt{18,72}}{2} \cdot h = 7,68\,\mathrm{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad h \approx 1,33\,\mathrm{cm}\,.$$

(e) $A(x) = A_{AP_nQ_nC} = 0.5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} - 0.5 \cdot \overline{P_nB} \cdot \overline{BQ_n}$
$A(x) = 12\,\mathrm{cm}^2 - 0.5 \cdot (6 - x) \cdot x\,\mathrm{cm}^2 = (12 - 3x + 0,5x^2)\,\mathrm{cm}^2$.
Also gilt: $A(x) = (0,5x^2 - 3x + 12)\,\mathrm{cm}^2$.

(f) $A(x) = (0,5x^2 - 3x + 12)\,\mathrm{cm}^2 = 0.5 \cdot (x^2 - 6x + 3^3 - 9 + 24)\,\mathrm{cm}^2$
$= 0.5 \cdot [(x-3)^2 + 15]\,\mathrm{cm}^2 = [-0.5 \cdot (x-3)^2 + 7,5]\,\mathrm{cm}^2$.
$x = 3$ liefert $A_{\min} = 7,5\,\mathrm{cm}^2$.

(g) Die Symmetrieachse müsste entweder durch zwei Eckpunkte des fraglichen Vierecks oder durch zwei seiner Seitemittelpunkte verlaufen. Der Verlauf durch zwei Eckpunkte ist offensichtlich ausgeschlossen.
Im anderen Fall müsste die Symmetrieachse die gemeinsame Mittelsenkrechte zweier Vierecksseiten sein. Diese Vierecksseiten müssten dann aber zueinader parallel sein. Also wäre das gesuchte achsensymmetrische Viereck ein gleichschenkliges Trapez.
Da es aber nur nur ein Trapez, nämlich AP_2Q_2C, gibt und $\overline{AP_2} = 2,4\,\mathrm{cm} \neq \overline{CQ_2} = 1,6\,\mathrm{cm}$ gilt, gibt es unter allen Vierecken AP_nQ_nC kein achsensymmetrisches.

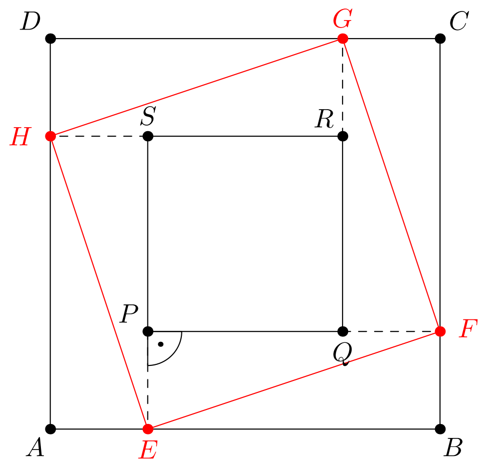
29.



Das große Quadrat hat einen Umfang von $81,6\,\mathrm{cm}$ und das kleine Quadrat hat einen Umfang von $34\,\mathrm{cm}$. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Berechne den Flächeninhalt des mittleren Quadrates auf verschiedene Weise:

- Mit Hilfe der Berechnung der Seitenlänge des mittleren Quadrates
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

Lösung:

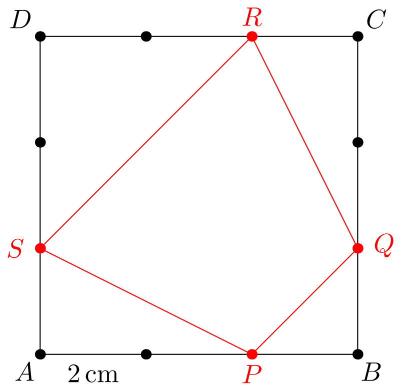


- Es gilt: $\overline{AB} = 81,6\,\text{cm} : 4 = 20,4\,\text{cm}$ und $\overline{PQ} = 34\,\text{cm} : 4 = 8,5\,\text{cm}$.
  Dann folgt: $\overline{QF} = \overline{PE} = (20,4\,\text{cm} - 8,5\,\text{cm}) : 2 = 5,95\,\text{cm}$.
  Weiter folgt: $\overline{PF} = 8,5\,\text{cm} + 5,95\,\text{cm} = 14,45\,\text{cm}$.
  $\Delta\, EFP$: $\overline{EF}^2 = A_{EFGH} = \overline{PF}^2 + \overline{PE}^2 = (14,45\,\text{cm})^2 + (5,95\,\text{cm})^2$
  $\Rightarrow \quad A_{EFGH} = 244,205\,\text{cm}^2$.
- **1. Möglichkeit:** $A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{\Delta\, EBF}$
  $A_{EFGH} = (20,4\,\text{cm})^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45\,\text{cm} \cdot 5,95\,\text{cm} = 244,205\,\text{cm}^2$.

  2. Möglichkeit: $A_{EFGH} = A_{PQRS} + 4 \cdot A_{\Delta\, EFP}$
  $A_{EFGH} = (8,5\,\text{cm})^2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45\,\text{cm} \cdot 5,95\,\text{cm} = 244,205\,\text{cm}^2$.

  Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

30.



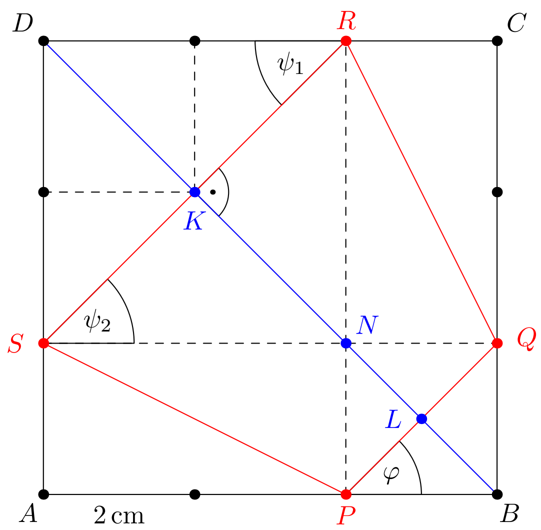
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Jede Quadratseite ist in drei Abschnitte eingeteilt, die jeweils 2cm lang sind. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ besitzt zwei parallele Seiten.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ auf zwei verschiedene Arten:
- Mit Hilfe der Berechnung der zugehörigen Formelgleichung
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

Lösung: (a)



(b) Das Dreieck SRD ist gleichschenklig-rechtwinklig . $\Rightarrow$ $\psi_1 = 45°$.
Dann gilt auch $\psi_2 = 45°$ (Z-Winkel) .
Das Dreieck PBQ ist gleichschenklig-rechtwinklig . $\Rightarrow$ $\varphi = 45°$.
Also folgt: $[PQ] \parallel [SR]$.
Das Viereck $PQRS$ ist ein (achsensymmetrisches) Trapez..

(c) •

Für die Trapezfläche A gilt: $A_{PQRS} = \dfrac{\overline{SR} + \overline{PQ}}{2} \cdot \overline{KL}$.

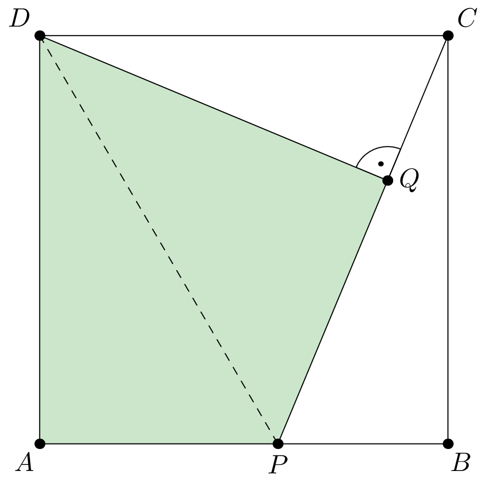
Die Strecke $[SR]$ ist die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 4 cm . Also folgt: $\overline{SR} = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$.
$[DK]$, $[NB]$ und $[PQ]$ sind jeweils Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge 2 cm .
Also folgt: $\overline{DK} = \overline{NB} = \overline{PQ} = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$ und $\overline{LB} = \sqrt{2}\,\text{cm}$.
Im Quadrat $ABCD$ gilt: $\overline{DB} = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$.
Damit gilt: $\overline{KL} = 6\sqrt{2}\,\text{cm} - 2\sqrt{2}\,\text{cm} - \sqrt{2}\,\text{cm} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.

Und damit gilt: $A_{PQRS} = \dfrac{4\sqrt{2}\,\text{cm} + 2\sqrt{2}\,\text{cm}}{2} \cdot 3\sqrt{2}\,\text{cm} = 18\,\text{cm}^2$.

- Das Trapez $PQRS$ ist von vier rechtwinkligen Dreiecken eingeschlossen. Zwei von ihnen sind kongruent.
$A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta\,APS} - A_{\Delta\,SRD} - A_{\Delta\,PBQ}$.

$A_{PQRS} = 36\,\text{cm}^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\,\text{cm}^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\,\text{cm}^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\,\text{cm}^2 = 18\,\text{cm}^2$.

31.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a.

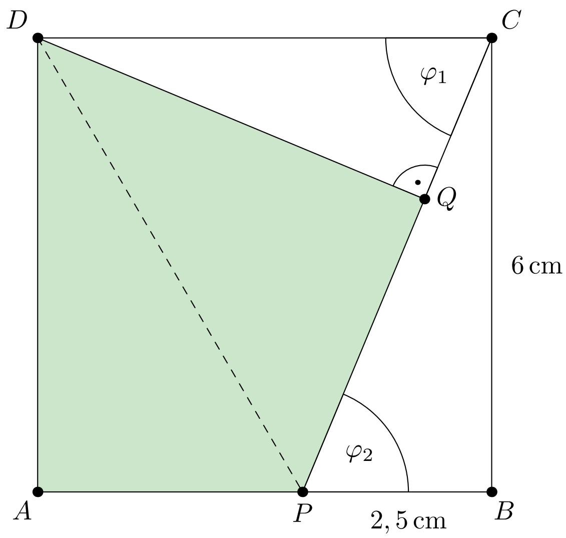
(a) Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{PB} = 2{,}5\,\text{cm}$.

(b) Begründe ohne Messung: Die Diagonale $[DP]$ ist keine Symmetrieachse im Viereck $APQD$.

(c) Begründe: Die beiden Dreiecke PBC und DQC sind zueinander ähnlich.

(d) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $APQD$ an der Fläche des Quadrates $ABCD$ in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Die Kathete $\overline{AD}$ im rechtwinkligen Dreieck APD besitzt die Länge a. Die Hypotenuse $\overline{DC}$ im rechtwinkligen Dreieck DQC hat ebenfalls die Länge a. Weil aber in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite darstellt, gilt: $\overline{DQ} < a = \overline{AD}$.

Somit kann die Diagonale $\overline{DP}$ im Viereck $APQD$ nicht Symmetrieachse dieses Vierecks sein.

(c) In den beiden rechtwinkligen Dreiecken DQC und PBC gilt: $\varphi_1 = \varphi_2$ (Z-Winkel). Damit stimmen die beiden Dreiecke paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck stimmen diese beiden Dreiecke in allen drei Innenwinkelmaßen überein. Also gilt: $\Delta\, PBC \sim \Delta\, DQC$.

(d) Strategie: $A_{APQD} = A_{ABCD} - (A_{\Delta\, PBC} + A_{\Delta\, DQC})$.

$$A_{\Delta\, PBC} = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 6\,\mathrm{cm}^2 = 7,5\,\mathrm{cm}^2 .$$

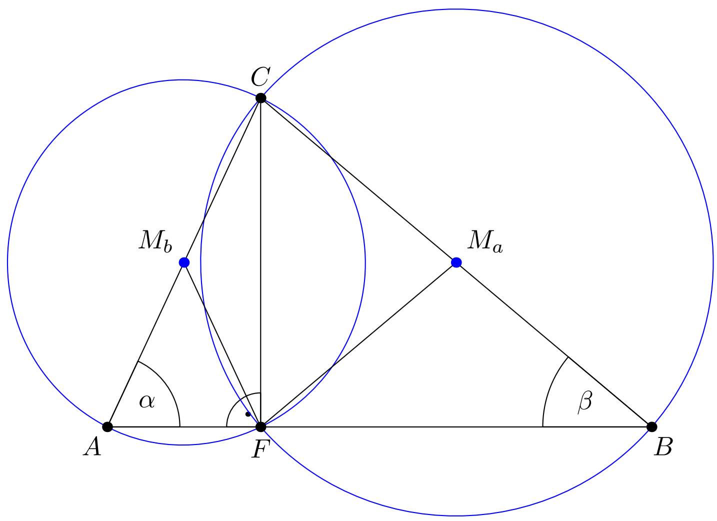
Wegen (c) folgt: $A_{\Delta\, DQC} = k^2 \cdot A_{\Delta\, PBC}$ mit dem Streckungsfaktor k.

Mit $k = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{PC}}$ folgt: $\quad k = \dfrac{6\,\mathrm{cm}}{\sqrt{2,5^2 + 6^2}\,\mathrm{cm}} = \dfrac{12}{13}$.

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\, DQC} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2 = \frac{144}{169} \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2 .$$

$$\begin{aligned} A_{APQD} &= 36\,\mathrm{cm}^2 - \left(7,5\,\mathrm{cm}^2 + \frac{144}{169} \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2\right) \\ &= 36\,\mathrm{cm}^2 - \frac{313}{169} \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2 \\ \frac{A_{APQD}}{A_{ABCD}} &= \frac{6084 - 2374,5}{169 \cdot 36} = \frac{3707,5}{6084} \approx 0,6094 = 60,94\,\% . \end{aligned}$$

32.



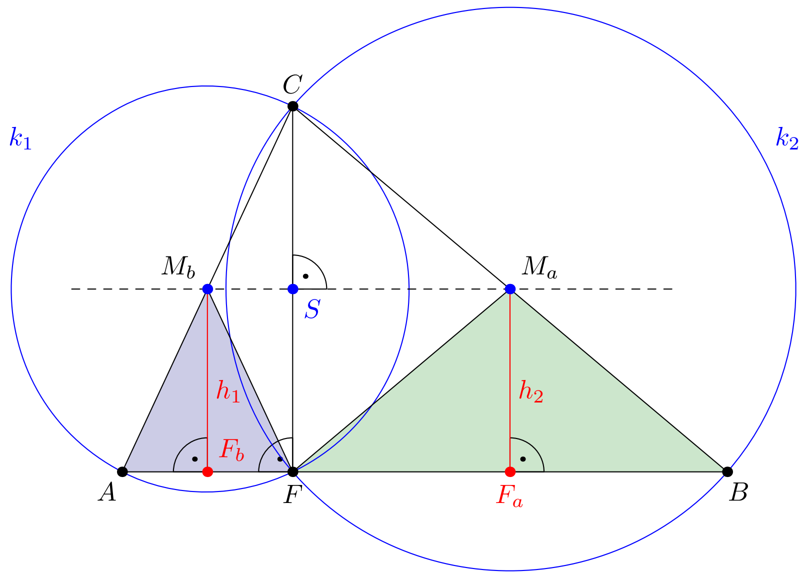
Im Dreieck ABC mit der Höhe $[CF]$ sind die Punkte M_a und M_b die Mittelpunkte der Umkreise der Teildreiecke FBC bzw. AFC.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe auf verschiedene Weise: Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Begründe: Zusammen bedecken die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a die Hälfte des Dreiecks ABC.

Lösung: (a)



(b) **1. Möglichkeit:**
Im Kreis k_1 gilt: $\overline{M_bA} = \overline{M_bF} = \overline{M_bC}$.
Im Kreis k_2 gilt: $\overline{M_aB} = \overline{M_aF} = \overline{M_aC}$.
Also sind im Viereck FM_aCM_b zweimal zwei benachbarte Seiten gleich lang. Also handelt es sich um ein achsensymmetrisches Drachenviereck.
2. Möglichkeit:
In jedem rechtwinkligen Dreieck fällt dessen Umkreismittelpunkt mit dem Hypotenusenmittelpunkt zusammen. Also sind die Kreismittelpunkte M_a und M_b gleichzeitig die Mittelpunkte der Seiten $a = [BC]$ bzw. $b = [AC]$.
Die Dreiecke FBC und F_aBM_a sind zueinander ähnlich.
Wegen $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM_a}$ folgt dann $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{F_aM_a} = 2 \cdot \overline{F_bM_b}$.
Also gilt: $h_1 = h_2 = \overline{SF} = \overline{FC}$. Daher liegt die Gerade M_aM_b zur Grundlinie $[AB]$ des Dreiecks ABC parallel. Diese Parallele steht damit auf der Diagonalen des Vierecks FM_aCM_b senkrecht. Gleichzeitig halbiert der Punkt S die Höhe $[CF]$ des Dreiecks ABC. Also ist das Viereck FM_aCM_b ein achsensymmetrischer Drachen.

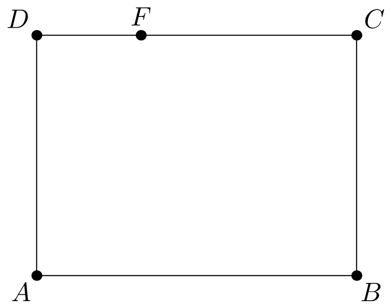
(c) Die in der 2. Möglichkeit verwendete Argumentation ergibt nun Folgendes:

- Die vier Dreiecke F_aBM_a, FF_aM_a, FM_aS und SM_aC sind kongruent. Das Dreieck FBM_a besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
  Also ist das Dreieck FBM_a halb so groß wie das Teildreieck FBC.
- Die vier Dreiecke AF_bM_b, F_bFM_b, FSM_b und M_bSC sind kongruent. Das Dreieck AFM_b besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
  Also ist das Dreieck AFM_b halb so groß wie das Teildreieck AFC.

Also sind die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a zusammen halb so groß wie das Dreieck ABC.

Oder:
Weil der Schnittpunkt S auf halber Höhe im Dreieck ABC liegt, gilt:
$A_{\Delta\, M_bM_aC} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta\, ABC}$ (zentrische Streckung mit $k = \frac{1}{2}$).
Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen mit der Diagonalen $[M_aM_b]$ als Symmetrieachse.
$\Rightarrow \quad A_{FM_aCM_b} = 2 \cdot \frac{1}{4} A_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta\, ABC}$.
Dann muss der Rest, nämlich derjenige, der aus den beiden Dreiecken AFM_b und FBM_a besteht, ebenfalls die Hälfte des Dreiecks ABC einnehmen.

33.



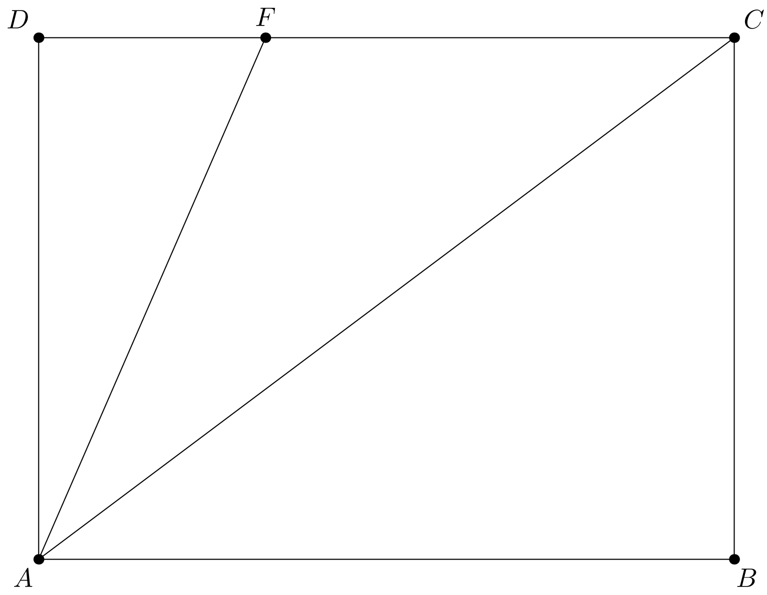
Die beiden Freunde Hans und Michael wollen ein Bundesligaspiel besuchen. Auf ihrem Weg dorthin gelangen sie vor dem Stadion an einen rechteckigen Parkplatz $ABCD$. Sie befinden sich am Punkt A und wollen den Platz diagonal zum Punkt C überqueren. Michael entdeckt jedoch einen Kameraden, der am Punkt F steht und läuft erst geradewegs zu ihm. Dann begeben sich die beiden direkt zum Punkt C, an dem schon Hans wartet.

(a) Es soll gelten $\overline{AB} = 92\,\text{m}$, $\overline{BC} = 69\,\text{m}$ und $\overline{FC} = 60\,\text{m}$.
Fertige eine Zeichnung im Maßstab 1 : 1000 an.

(b) Begründe ohne Messung: Michael muss einen längeren Weg von A über F nach C zurücklegen als Hans.

(c) Berechne die Streckenlänge, die Michael mehr als Hans zurücklegen muss. Runde auf ganze Meter.

Lösung: (a)



(b) Im Dreieck ACF gilt die Dreiecksungleichung: Zwei Seitenlängen müssen zusammen mehr ergeben als die Länge der dritten Dreiecksseite; d.h. hier gilt: $\overline{AF} + \overline{FC} > \overline{AC}$.

(c) $\overline{DF} = 32\,\mathrm{m}$.
Im Dreieck AFD gilt: $\overline{AF} = \sqrt{32^2 + 69^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{5785}\,\mathrm{m}$.
Im Dreieck ABC gilt: $\overline{AC} = \sqrt{92^2 + 69^2}\,\mathrm{m} = 115\,\mathrm{m}$.
Wegunterschied: $\sqrt{5785}\,\mathrm{m} - 115\,\mathrm{m} \approx 21\,\mathrm{m}$.

8. Berechnungen am Kreis

1. Der Minutenzeiger einer Kirchturmuhr ist $0,95\,\mathrm{m}$ und der Stundenzeiger $0,45\,\mathrm{m}$ lang.

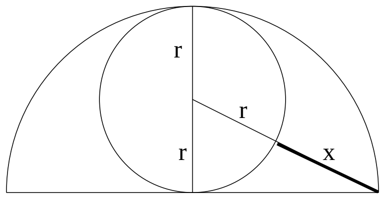
   (a) Berechne den Weg, den die Spitze des Minutenzeigers in 3 Stunden zurücklegt.

   (b) Berechne den Weg, den die Spitze des Stundenzeigers in der selben Zeit zurücklegt.

Lösung: (a) ca. $17,91\,\mathrm{m}$

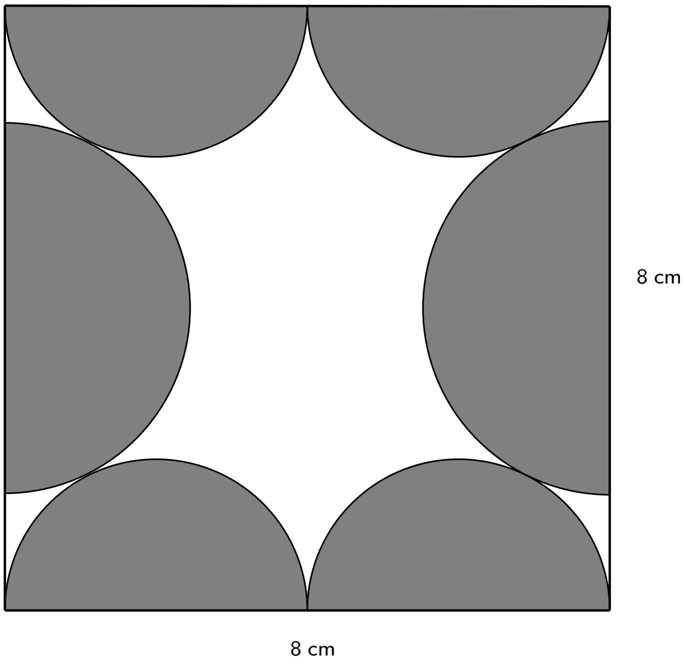
(b) ca. $0,71\,\mathrm{m}$

2. Berechne auf Grund der Skizze die Länge der Strecke x in Abhängigkeit vom Radius r.



Lösung: $x = 1,24\,r$

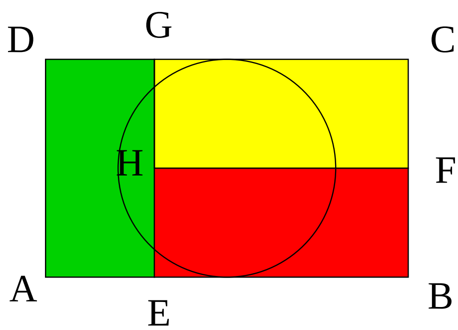
3.



Gegeben ist das Quadrat mit 8 cm Seitenlänge und die sechs Halbkreise. Berechne den Flächeninhalt der hellen Fläche.

Lösung: Der Flächeninhalt beträgt $44,33\,\text{cm}^2$.

4.



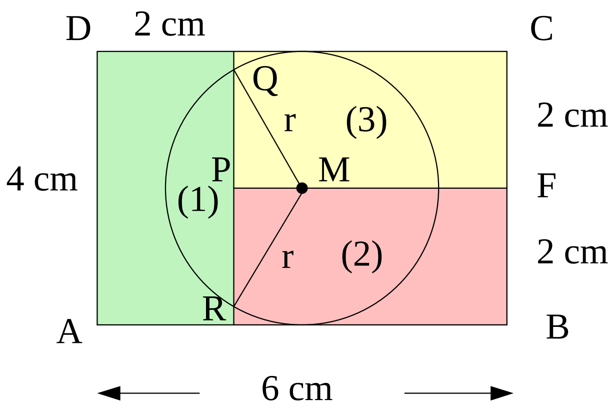
Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet. Alle drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Außerdem gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.
Zusätzlich ist noch ein Kreis eingezeichnet, dessen Mittelpunkt M der Mittelpunkt des Rechtecks $ABCD$ ist.

(a) Begründe: Es muss $\overline{AD} = 4\,\text{cm}$ gelten. Zeichne dann die obige Figur.

(b) Berechne jeweils den Anteil der drei Rechtecke im Inneren an der Kreisfläche in Prozent. Runde auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung:

(a) Weil alle Rechtecke im Inneren kongruent sind, muss $\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{AE} = 2\,\text{cm} =$ Kreisradius r gelten. $\Rightarrow$ $\overline{BC} = \overline{AD} = 4\,\text{cm}$.



(b) Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt $A(1)$ des Kreissegmentes (1): (Der Flächeninhalt des Kreises wird später mit $A_\odot$ abgekürzt.)
Wegen $\overline{PM} = 1\,\text{cm}$ und $\overline{MQ} = 2\,\text{cm}$ ist das Dreieck PMQ ein halbes gleichseitiges Dreieck. $\Rightarrow$ $\sphericalangle QMR = 120°$
Das Dreieck RMQ ist dann genauso groß wie ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von $2\,\text{cm}$.

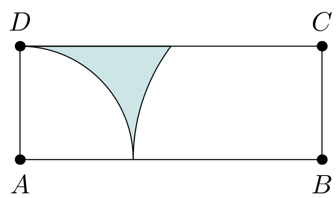
$$A(1) = \left(\frac{120°}{360°} \cdot 2^2\pi - \frac{2^2}{4}\sqrt{3}\right)\,\text{cm}^2 \approx 2,46\,\text{cm}^2$$

$A_\odot = 2^2\pi\,\text{cm}^2 \approx 12,57\,\text{cm}^2$

$$\frac{A(1)}{A_\odot} \approx \frac{2,46\,\text{cm}^2}{12,57\,\text{cm}^2} \approx 19,57\%$$

Und weiter gilt: $\frac{A(2)}{A_\odot} = \frac{A(3)}{A_\odot} \approx (100\% - 19,57\%) : 2 \approx 40,22\%$

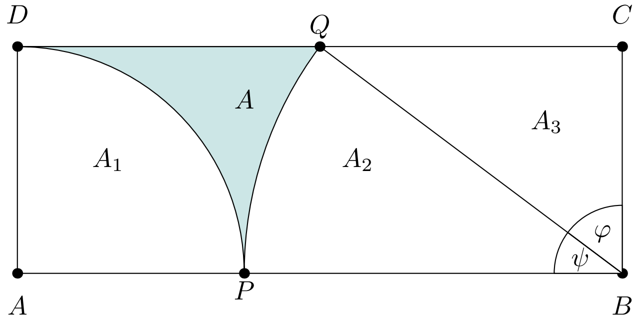
5. Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 3\,\text{cm}$. Die Punkte A und B sind Kreismittelpunkte.



(a) Zeichne die skizzierte Figur gemäß den obigen Angaben.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

Lösung: (a) Zeichne zuerst den Kreisbogen um den Punkt A mit dem Radius 3 cm. Dadurch erhältst du den Punkt P.
Zeichne dann den zweiten Kreisbogen um den Punkt B mit dem Radius $\overline{BP}$. So erhältst du den Punkt Q.

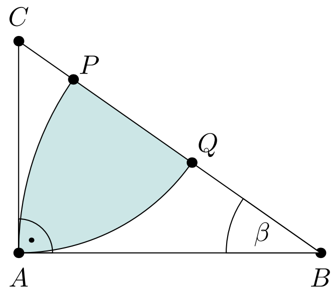


(b) Neben dem Kreissektor APD mit dem Flächeninhalt A_1 erzeugt die Hilfslinie $[BQ]$ den Kreissektor BQP mit dem Flächeninhalt A_2 und dazu das Dreieck QBC mit dem Flächeninhalt A_3.
Es muss gelten: $\overline{AP} = 3\,\text{cm}$ und damit $\overline{BP} = \overline{BQ} = 5\,\text{cm}$.
$A_1 = \dfrac{90°}{360°} \cdot 3^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 7{,}07\,\text{cm}^2$

$\Delta BCQ : \cos\varphi = \dfrac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 53{,}13° \quad \Rightarrow \quad \psi \approx 36{,}87°$
$A_2 = \dfrac{36{,}87°}{360°} \cdot 5^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 8{,}04\,\text{cm}^2$

Z.B. PYTHAGORAS im ΔQBC: $\overline{QC}^{\,2} + 3^2\,\text{cm}^2 = 5^2\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \overline{QC} = 4\,\text{cm}$.
$A_3 = \dfrac{1}{2} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 6\,\text{cm}^2$
Das Rechteck $ABCD$ hat einen Flächeninhalt von $24\,\text{cm}^2$.
Für den gesuchten Flächeninhalt A gilt dann: $A = A_{ABCD} - A_1 - A_2 - A_3$
$A \approx (24 - 7{,}07 - 8{,}04 - 6)\,\text{cm}^2 \quad A \approx 2{,}89\,\text{cm}^2$.

6.

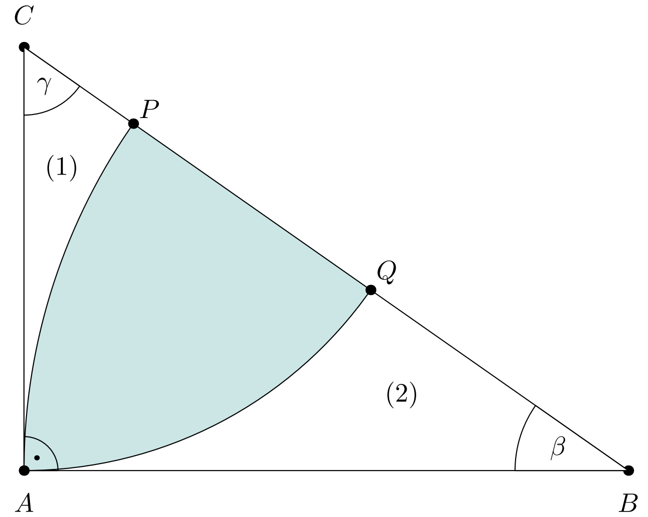


Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 35°$. Die Punkte B und C sind Kreismittelpunkte.

(a) Zeichne die Figur gemäß den obigen Angaben.
(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

Lösung: (a)
- Zeichne die Strecke $[AB]$.
- Trage den rechten Winkel in A, und den Winkel mit dem Maß $35°$ in B an.
- Der Schnittpunkt der freien Schenkel der beiden Winkel ist C.

(b)



Es gilt: $\gamma = 90° - 35° = 55°$ und $\tan 35° = \dfrac{\overline{CA}}{8\,\text{cm}}$.
$\Rightarrow \quad \overline{CA} \approx 5{,}60\,\text{cm}$.
Für den Inhalt A der grauen Fläche AQP ergibt sich:
$A_{AQP} = A_{\Delta ABC} - A_{(1)} - A_{(2)}$. (*)
Weiter gilt: $A_{(1)} = A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(35°)}$ und $A_{(2)} = A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(55°)}$
Mit (*) ergibt sich:
$A_{\Delta ABC} - \left(A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(35°)}\right) - \left(A_{\Delta ABC} - A_{Sektor(55°)}\right)$
$A_{AQP} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta ABC} + A_{Sektor(35°)} - A_{\Delta ABC} + A_{Sektor(55°)}$
$A_{AQP} = A_{Sektor(35°)} + A_{Sektor(55°)} - A_{\Delta ABC}$ (**)
Hinweise:

- Natürlich kann man auch die Inhalte der Teilflächen $A_{(1)}$ und $A_{(2)}$ gleich ausrechnen und diese dann vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC subtrahieren.
- Wie könntest du die obige Gleichung (**) geometrisch deuten?

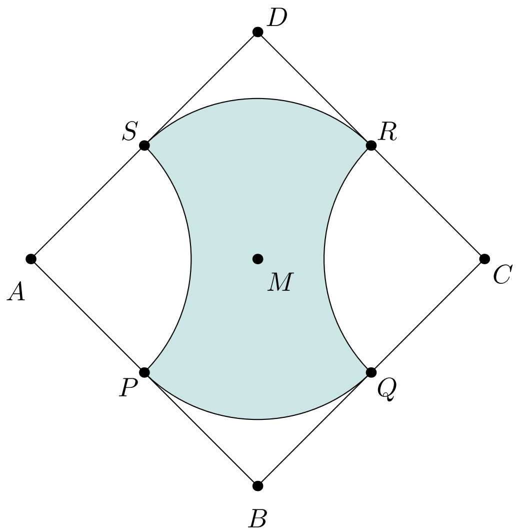
$$A_{Sektor(35°)} = \frac{35°}{360°} \cdot 8^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 19{,}55\,\text{cm}^2$$

$$A_{Sektor(55°)} \approx \frac{55°}{360°} \cdot 5{,}60^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 15{,}05\,\text{cm}^2$$

$$A_{ABC} \approx \frac{1}{2} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 5{,}60\,\text{cm} = 22{,}40\,\text{cm}^2$$

Schließlich ergibt sich: $A_{AQP} \approx (19{,}55 + 15{,}05 - 22{,}40)\,\text{cm}^2$
$\Rightarrow \quad A_{AQP} \approx 12{,}20\,\text{cm}^2$

7.



Der Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$ ist der Punkt M. Die Punkte P, Q, R und S sind die Mittelpunkte der jeweiligen Quadratseiten.
Die Mittelpunkte der vier Kreisbögen, welche die grau getönte Figur im Inneren des Quadrates $ABCD$ begrenzen, sind die Punkte A, C und M.

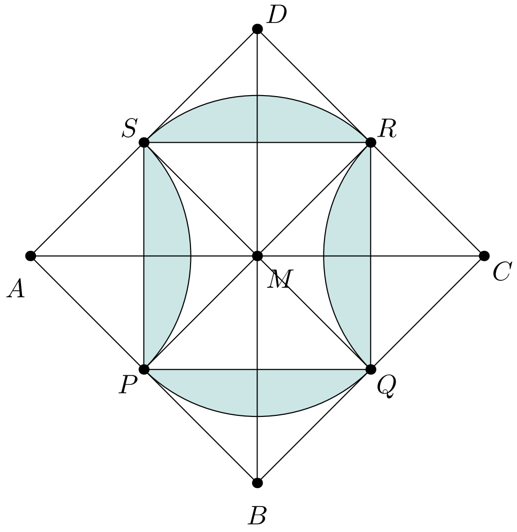
(a) Zeichne die Figur für die Diagonalenlänge $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Fritz behauptet: „Der Inhalt der grauen Fläche ist halb so groß wie der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$.“
Maria meint: „Der Inhalt der grauen Fläche kleiner als die Hälfte des Quadrates. Das sieht man doch!“
Wer hat Recht? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a)

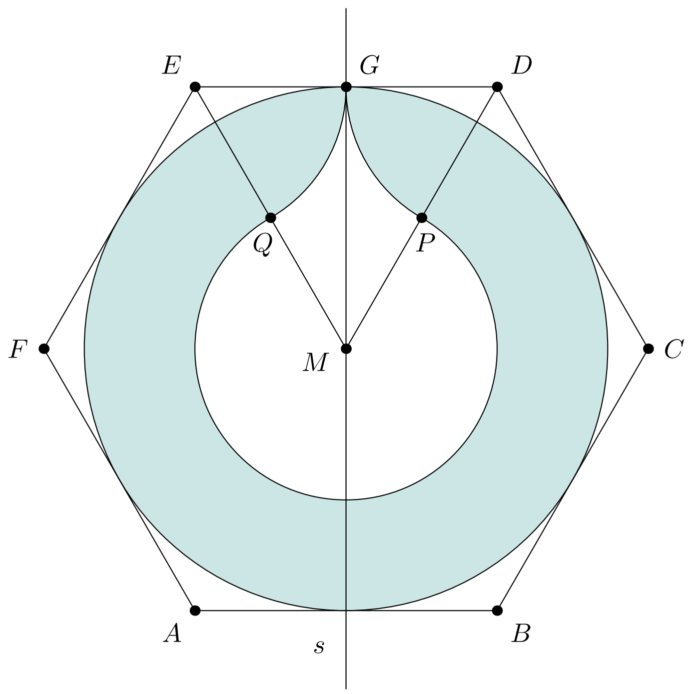
- In jedem Quadrat stehen die beiden Diagonalen aufeinander senkrecht und sie halbieren sich.
  Damit kann man das Quadrat $ABCD$ zeichnen.
- Der Punkt M erzeugt die beiden Kreisbögen oben und unten; die Punkte A und C erzeugen die beiden Kreisbögen links und rechts.

(b)



Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat. Mit Hilfe seiner Diagonalen erkennst du, dass das Quadrat $PQRS$ halb so groß wie das Quadrat $ABCD$ ist. Die vier grauen Kreissegmente sind alle kongruent, da sie von kongruenten Kreissektoren mit gleichem Radius und gleichem Öffnungswinkel (90°) stammen.
Zwei dieser Segmente wurden links und rechts aus dem Quadrat $PQRS$ herausgeschnitten, zwei wurden oben und unten an dieses Quadrat angefügt. Somit hat die grau eingefärbte Figur in der Aufgabe den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat $PQRS$; die Figur ist also halb so groß wie das Quadrat $ABCD$. Fritz hat Recht.

8. Das regelmäßige Sechseck $ABCDEF$ besitzt den Mittelpunkt M und die Symmetrieachse s.
   Der Mittelpunkt des Inkreises dieses regelmäßigen Sechsecks ist M . D und E sind die Mittelpunkte der Kreisbögen, die sich in G berühren.

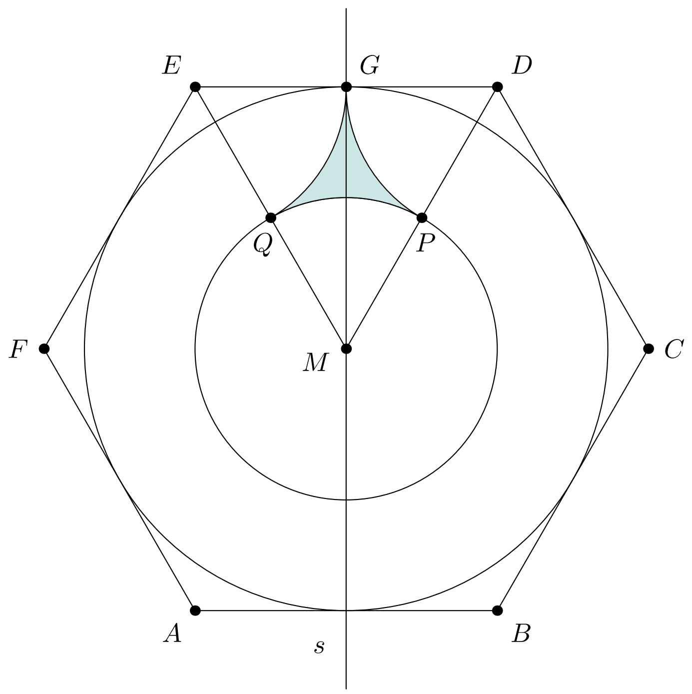


(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Berechne für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ den Flächeninhalt des grau eingefärbten Ringes.

Lösung: (a) Am einfachsten erhältst du ein regelmäßiges Sechseck mit einer Seitenlänge von 4 cm, indem du auf einer Kreislinie k den Radius von 4 cm sechsmal abträgst. Damit dieses Sechseck aber mit zwei gegenüber liegenden Seiten (hier: $[ED]$ und $[AB]$) waagrecht liegt, zeichnest du erst die Symmetrieachse s ein und dann wieder durch den Punkt M eine zweite Symmetrieachse, die auf s senkrecht steht. Diese schneidet die Kreislinie k in den Punkten F und C.
Zwei weitere Kreise Radius von 4 cm um F und C schneiden die Kreislinie k in den Punkten E und A bzw. B und D.

(b)



Der direkteste Weg der Flächenberechnung führt über den Kreisbogen PQ, so dass ein geschlossener Kreisring entsteht, dem lediglich noch das (grau eingefärbte) Kreisbogendreieck QPG entnommen werden muss.
Jedes regelmäßige Sechseck lässt sich in 6 kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegen.
Der große Radius R des Ringes ist so lang wie eine Höhe $[MG]$ des gleichseitigen Dreiecks MDE: $R = \frac{4}{2}\sqrt{3}\,\text{cm} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.
Der kleine Radius r des Ringes ist halb so lang wie die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks MDE: $r = 2\,\text{cm}$.
Damit ergibt sich für den Flächeninhalt A_{Ring} des geschlossenen Kreisrings:
$A_{Ring} = \left[(2\sqrt{3})^2 - 2^2 \cdot \pi\right]\ \text{cm}^2$
Der Flächeninhalt $A_{Kreisdreieck}$ des Kreisbogendreiecks QPG bleibt übrig, wenn man aus dem gleichseitigen Dreieck MDE die drei kongruenten Sektoren EQG, MPQ und DGP mit einem Mittelpunktswinkel von jeweils $60°$ entfernt:

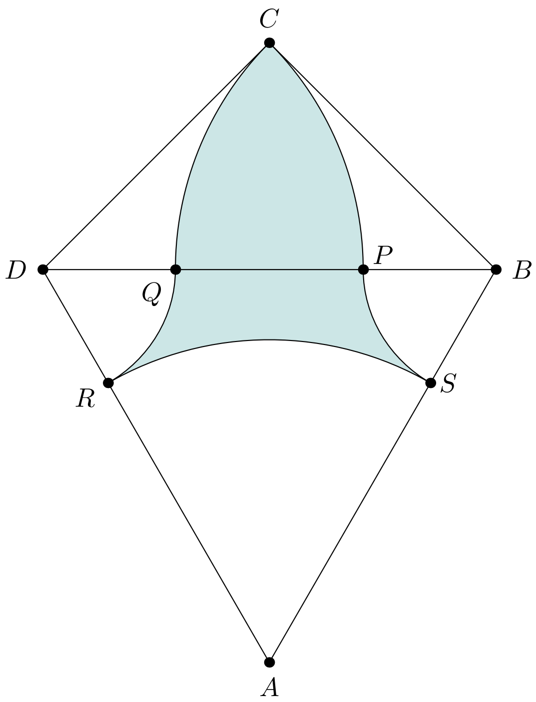
$$A_{Kreisdreieck} = \left(\frac{4^2}{4} \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot \pi\right)\ \text{cm}^2 = \left(4\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{cm}^2$$

Damit ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt:

$$A = \left(8\pi - 4\sqrt{3} + \frac{1}{2}\pi\right)\ \text{cm}^2 = \frac{17\pi - 8\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 \approx 19{,}78\,\text{cm}^2$$

Hinweis:
Eine weitere Möglichkeit besteht darin, den Flächeninhalt des offenen Kreisrings außerhalb des Dreiecks MDE zu berechnen und dann die beiden „Enden“, die im gleichseitigen Dreieck MDE liegen, anzufügen. Doch dies ist offensichtlich wesentlich mühsamer auszurechnen.

9.



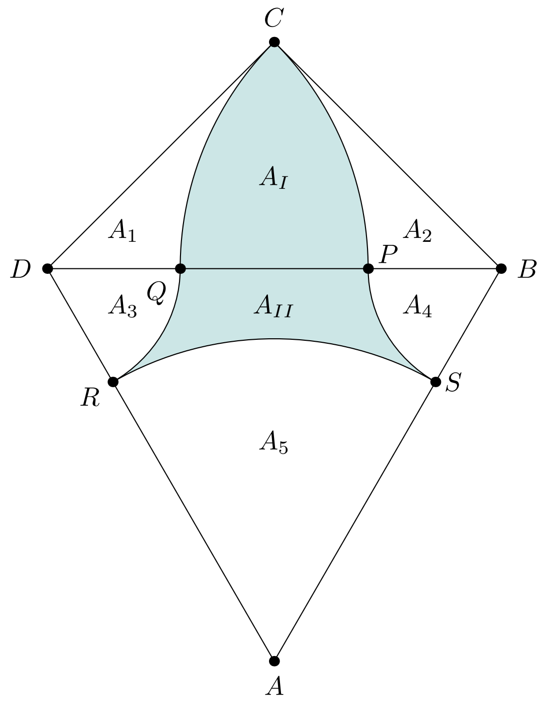
Das Viereck $ABCD$ ist aus einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck und einem gleichseitigen Dreieck zusammengefügt. Die Mittelpunkte der Kreisbögen sind die Punkte B, D und A.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{BD} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

Lösung: (a)
- Zeichne die Dreiecke DBC und ABD.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ schneidet die Seite $[BD]$ im Punkt Q und der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt D und dem Radius $\overline{DC}$ schneidet die Seite $[BD]$ im Punkt P.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt D und dem Radius $\overline{DQ}$ schneidet die Seite $[AD]$ im Punkt R und der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BP}$ schneidet die Seite $[AB]$ im Punkt S.

(b)



$A_1 = A_{\Delta DBC} - A_{Sektor\,BCQ} = A_2$
$A_I = A_{\Delta DBC} - (A_1 + A_2) = A_{\Delta DBC} - 2 \cdot (A_{\Delta DBC} - A_{Sektor\,BCQ})$
$A_I = 2 \cdot A_{Sektor\,BCQ} - A_{\Delta DBC}$
Wie kannst du dieses Ergebnis geometrisch deuten?
Es wird zunächst nur mit Maßzahlen gerechnet: $\overline{BC} = 3\sqrt{2}$
$A_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$; $\quad A_{Sektor\,BCQ} = \frac{45°}{360°} \cdot (3\sqrt{2})^2\pi = 2.25\pi$

Also: $A_I = 4.5\pi - 9 \quad \Rightarrow \quad A_I = \left(\frac{9\pi}{2} - 9\right)\,\text{cm}^2 \quad (\approx 5{,}14\,\text{cm}^2)$
Was spielt sich nun unterhalb der Strecke $[DB]$ ab?
$\overline{DQ} = \overline{BP} = 6 - 3\sqrt{2}$
$A_3 = A_4 = \frac{60°}{360°}(6 - 3\sqrt{2})^2 \cdot \pi = \frac{1}{6}(36 - 36\sqrt{2} + 18) \cdot \pi$
$A_3 = A_4 = (9 - 6\sqrt{2}) \cdot \pi \quad (\approx 1{,}62\,\text{cm}^2)$
$\overline{AR} = \overline{AS} = 6 - (6 - 3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$
$A_5 = \frac{60°}{360°} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot \pi = \frac{18}{6} \cdot \pi = 3\pi \quad (\approx 9{,}42\,\text{cm}^2)$

$A_{II} = \frac{6^2}{4}\sqrt{3} - [2 \cdot (9 - 6\sqrt{2})\pi + 3\pi]$
$A_{II} = 9\sqrt{3} - (18\pi - 12\sqrt{2}\pi + 3\pi)$
$A_{II} = 9\sqrt{3} - (21 - 12\sqrt{2})\pi \quad (\approx 2{,}93\,\text{cm}^2)$

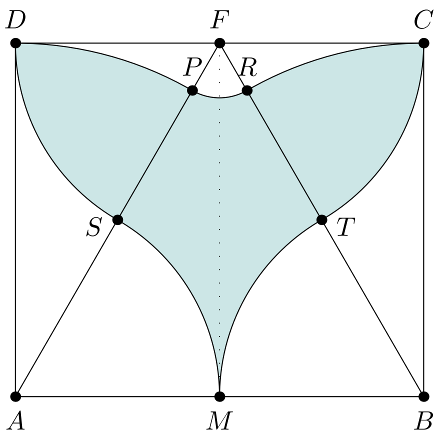
Für die Gesamtfläche A des „Fisches“ ergibt sich:

$$A = A_I + A_{II} = \left[\left(\frac{9\pi}{2} - 9\right) + 9\sqrt{3} - (21 - 12\sqrt{2})\pi\right]\,\text{cm}^2$$

$$A = \left[9(\sqrt{3}-1) - \pi \cdot \left(21 - 12\sqrt{2} - \frac{9}{2}\right)\right]\ \mathrm{cm}^2$$

$$A = \left[9(\sqrt{3}-1) + \frac{3}{2}\pi(8\sqrt{2}-11)\right]\ \mathrm{cm}^2 \quad (\approx 8{,}07\,\mathrm{cm}^2)$$

10.



In das Rechteckeck $ABCD$ ist ein gleichseitiges Dreieck ABF einbeschrieben. Die Mittelpunkte der sieben Kreisbögen sind die Punkte A, B und F.

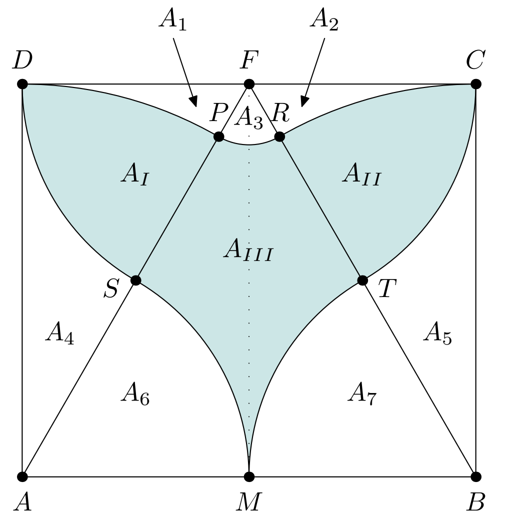
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\mathrm{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.

Lösung: (a)

- Zeichne das gleichseitige Dreieck ABF. Die Höhe $[FM]$ dieses Dreiecks ist genau so lang wie die Rechtecksseiten $[AD]$ und$[BC]$.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{AD}$ schneidet die Seite $[AF]$ im Punkt P und der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ schneidet die Seite $[BF]$ im Punkt R.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt F und dem Radius $\overline{FP}$ schneidet die Seite $[BF]$ im Punkt R.
- Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt F und dem Radius $\overline{FD} = 3\,\mathrm{cm}$ schneidet die Seite $[AF]$ im Punkt S, wobei ebenfalls $\overline{FS} = 3\,\mathrm{cm}$ gilt.
- Nun musst du noch den Kreisbogen um den Punkt A mit dem Radius $\overline{AS}$ zeichnen. Dieser Kreisbogen trifft auf den Punkt M.
  Weil die Mittelpunkte F und A der beiden Kreisbögen, die sich im Punkt S treffen, zusammen mit dem Punkt S auf einer Geraden liegen, gehen sie ohne Knick ineinander über.
- Die entsprechenden Schritte führen rechts der Symmetrieachse MF vom Punkt C über den Punkt T zum Punkt M.

(b)



Wir rechnen meist nur mit Maßzahlen:

$$A_{ABCD} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \quad (\approx 31,18\,\text{cm}^2)$$

$$A_{\Delta AFD} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCD} = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{3} \quad (\approx 7,79\,\text{cm}^2)$$

$$A_{Sektor APD} = A_{Sektor BCR} = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot (3\sqrt{3})^2\pi = \frac{9}{4}\,\pi \quad (\approx 7,07\,\text{cm}^2)$$

$$A_1 = A_2 = A_{\Delta AFD} - A_{Sektor APD} = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{4}\pi \quad (\approx 0,73\,\text{cm}^2)$$

Weiter gilt: $\overline{FP} = 6 - 3\sqrt{3}$.

$$A_3 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot (6 - 3\sqrt{3})^2 \cdot \pi = \frac{36 - 36\sqrt{3} + 27}{6}\pi = \frac{21 - 12\sqrt{3}}{2}\pi$$

$$A_3 = \frac{21}{2}\,\pi - 6\sqrt{3}\pi \quad (\approx 0,34\,\text{cm}^2)$$

$$A_4 = A_5 = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2 \cdot \pi = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\,\pi \quad (\approx 3,08\,\text{cm}^2)$$

$$A_6 = A_7 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 3^2 \cdot \pi = \frac{3}{2}\pi \quad (\approx 4,71\,\text{cm}^2)$$

$$A_I = A_{II} = A_{\Delta AFD} - A_1 - A_4$$

$$A_I = \frac{9}{2}\,\sqrt{3} - \left(\frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{4}\pi\right) - \left(\frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\,\pi\right)$$

$$A_I = A_{II} = \frac{15}{4}\,\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3} \quad (\approx 3,99\,\text{cm}^2)$$

$A_{III} = A_{\Delta ABF} - A_3 - (A_6 + A_7)$, wobei $A_6 = A_7$ gilt.

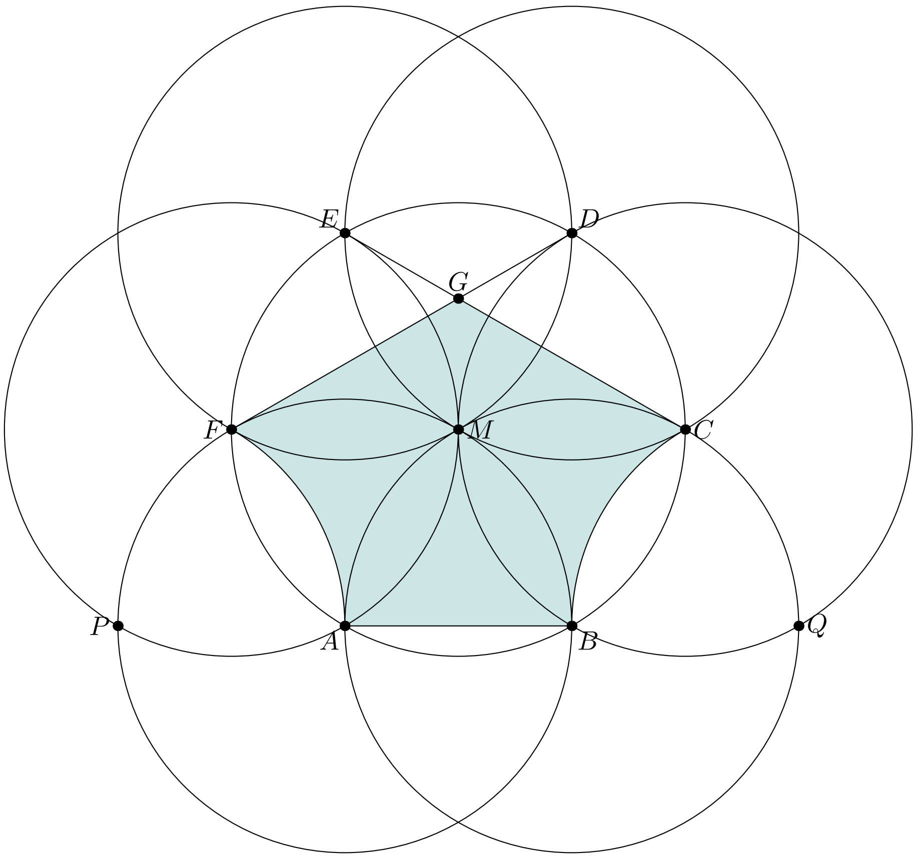
$$A_{III} = 9\sqrt{3} - \left(\frac{21}{2}\,\pi - 6\sqrt{3}\,\pi\right) - 2\cdot\frac{3}{2}\,\pi = 9\sqrt{3} - \frac{27}{2}\,\pi + 6\sqrt{3}\,\pi \quad (\approx 5{,}83\,\mathrm{cm}^2)$$

Damit ergibt sich als Flächeninhalt A der grau getönten Figur:

$$A = 2\cdot A_I + A_{III} = 2\cdot\left(\frac{15}{4}\cdot\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3}\right) + \left(9\sqrt{3} - \frac{27}{2}\,\pi + 6\sqrt{3}\,\pi\right)$$

$$A = 6\pi(\sqrt{3}-1)\,\mathrm{cm}^2 \approx 13{,}80\,\mathrm{cm}^2$$

11. In der Abbildung gilt: $\overline{AB} = 3\,\mathrm{cm}$.
Der Punkt M und die Punkte A, B, C, D, E, und F sind Kreismittelpunkte.
Die Punkte P und Q sind die Mittelpunkte der Kreisbögen AF und CB, die sich in das Innere des Kreises mit dem Mittelpunkt M wölben.

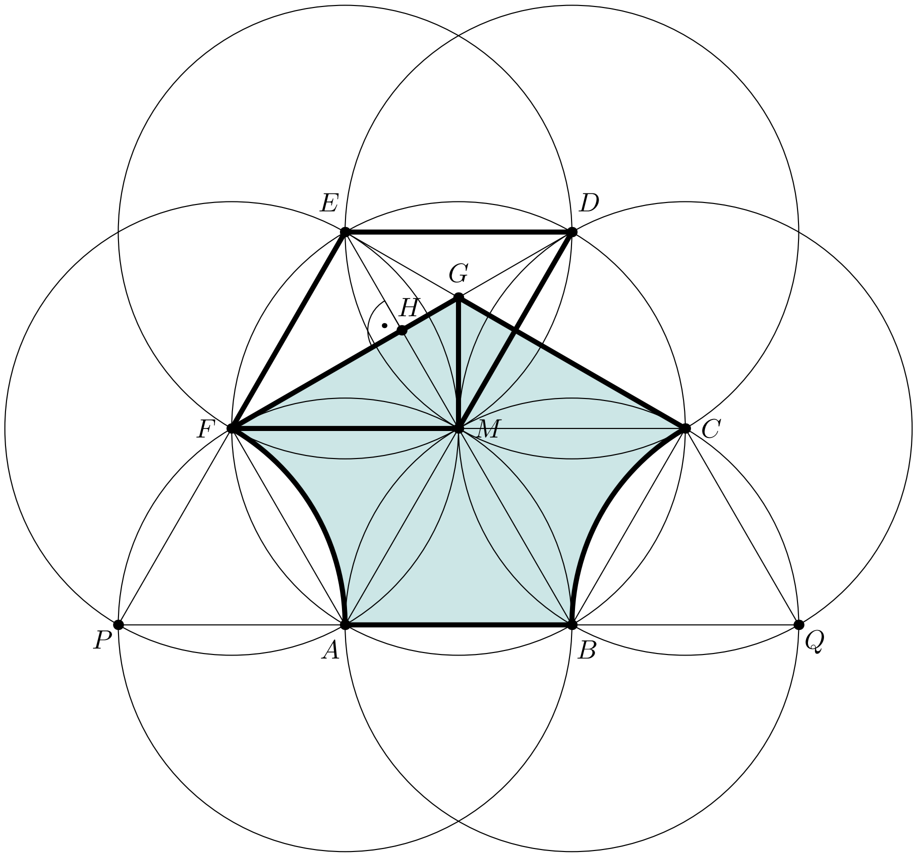


(a) Begründe: Das Sechseck $ABCDEF$ ist regelmäßig.

(b) Berechne den Inhalt der grauen Fläche.
Hinweis: Zeichne ausgehend von Punkt M geeignete Hilfslinien ein.

Lösung: (a) Die Strecken $[AB]$, $[BC]$, ... , $[FA]$ sind jeweils 3 cm lang. Also sind die Dreiecke ABM, BCM, ... , FAM gleichseitig und kongruent. Daher haben die Winkel BAF, CBA,... , EFA alle das Maß 120°. Also ist das Sechseck $ABCDEF$ regelmäßig.

(b)



Das Viereck $FMDE$ ist aus den beiden kongruenten gleichseitigen Dreiecken FME und MDE zusammengefügt. Also ist das Viereck $FMDE$ eine Raute, deren Diagonalen $[FD]$ und $[EM]$ im Punkt H aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck MDE liegt die Strecke $[MG]$ auf einer Winkelhalbierenden. Der Punkt G ist gleichzeitig der Schwerpunkt in diesem Dreieck, der alle Seitenhalbierenden (hier: $[EC]$ und $[DF]$) und damit alle Höhen im Verhältnis 2:1 teilt.

Also gilt : $\overline{MG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\text{cm} = \sqrt{3}\,\text{cm} \quad (\approx 1,73\,\text{cm})$.

Wegen $\overline{FC} = 6\,\text{cm}$ gilt: $A_{\Delta FCG} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 3\sqrt{3}\,\text{cm}^2 (\approx 5,20\,\text{cm}^2)$

Die Dreiecke FAM, ABM und BCM sind gleichseitig und kongruent:
$A_{\Delta ABM} = \frac{3^2}{4}\sqrt{3}\,\text{cm}^2 = \frac{9}{4}\sqrt{3}\text{cm}^2 (\approx 3,90\,\text{cm}^2)$.

Von den beiden Dreiecken FAM und BCM musst du jeweils noch das nach innen

gewölbte Kreissegment unter der Sehne $[AF]$ bzw. $[BC]$ subtrahieren.
Diese beiden Segmente sind aus Symmetriegründen zu ihrem jeweils darüber liegenden Kreissegment kongruent.
Somit ergibt sich z.B: $A_{Segment[AF]} = A_{Sektor MFA} - A_{\Delta MFA}$.

Alle folgenden Berechnungen erfolgen in der Einheit cm^2.

$$A_{Segment(AF)} = \frac{60°}{360°} \cdot 3^2\pi - \frac{3^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\pi - \frac{9}{4}\sqrt{3} \quad (\approx 0,82\,\text{cm}^2)$$

Für das Flächenstück A^*, das durch die Strecken $[MF]$ und $[MA]$ sowie durch den nach innen gewölbten Kreisbogen AF begrenzt wird, ergibt sich:

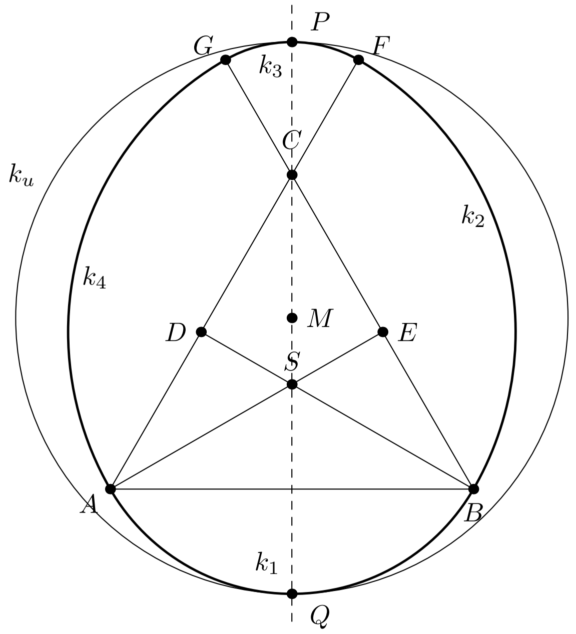
$$A^* = \frac{3^2}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi + \frac{9}{4}\sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi \quad (\approx 3,08\,\text{cm}^2)$$

Für den Inhalt A des grauen Flächenstückes ergibt sich damit:

$$A = 3\sqrt{3} + \frac{9}{4}\sqrt{3} + 2 \cdot \left(\frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi\right) = \left(3 + \frac{9}{4} + 9\right)\sqrt{3} - 3\pi.$$

$$A = \left(\frac{57}{4}\sqrt{3} - 3\pi\right)\,\text{cm}^2 \quad (\approx 15,26\,\text{cm}^2)$$

12.



Die Punkte D und E sind zwei Seitenmittelpunkte des gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge a.

Die Punkte S, D, C und E sind die Mittelpunkte der Kreisbögen k_1, k_2, k_3 und k_4, welche die eiförmige Figur bilden. Der Punkt M ist der Mittelpunkt des Umkreises k_u dieser Eilinie.

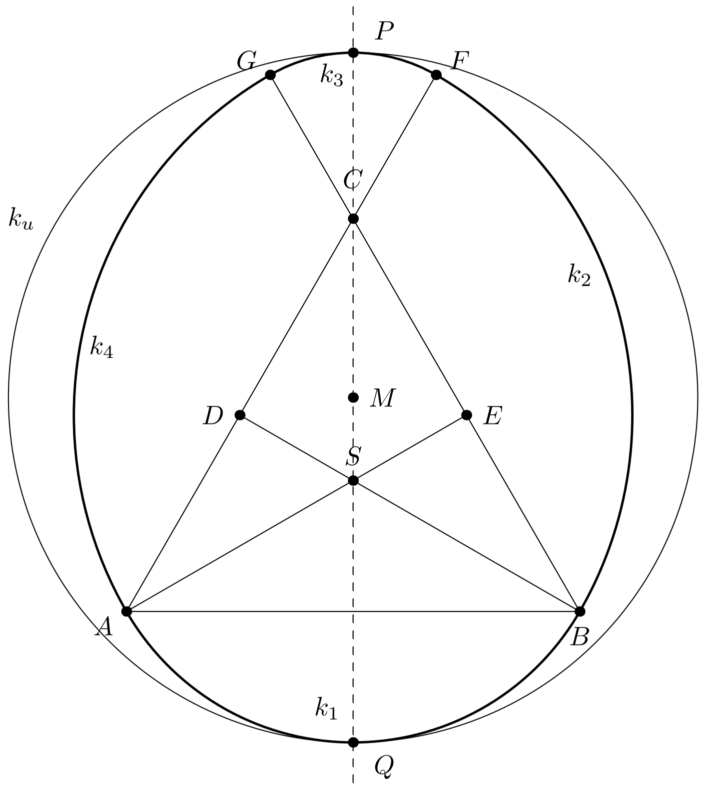
(a) • Beschreibe, wie du diese Figur zeichnest.
- Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Neben der Symmetrieachse PQ besitzt die Eilinie keine weitere.

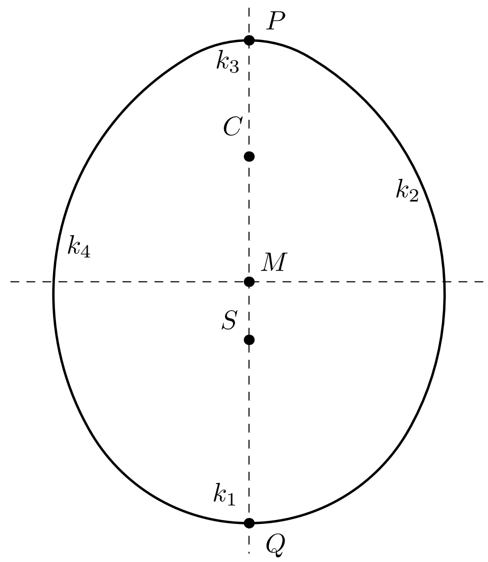
(c) Wie viel Prozent der Fläches des Umkreises k_u bedeckt die eiförmige Fläche?

Lösung: (a) • Zeichne das gleichseitige Dreieck ABC. Verlängere dabei die Strecken $[AC]$ und $[BC]$ jeweils über C hinaus.
$[AE] \cap [BD] = \{S\}$
Zeichne den Kreisbogen $k_1(S\,; r_1 = \overline{SA})$.
$k_2(D\,; r_2 = \overline{DB}) \cap [AC = \{F\}$ und $k_3(E\,; r_3 = \overline{EA}) \cap [BC = \{G\}$.
Zeichne den Kreisbogen $k_4(C\,; r_4 = \overline{CF})$.
Die Gerade PQ ist die Symmetrieachse der Figur.
Der Mittelpunkt der Strecke $[PQ]$ ist M.

-

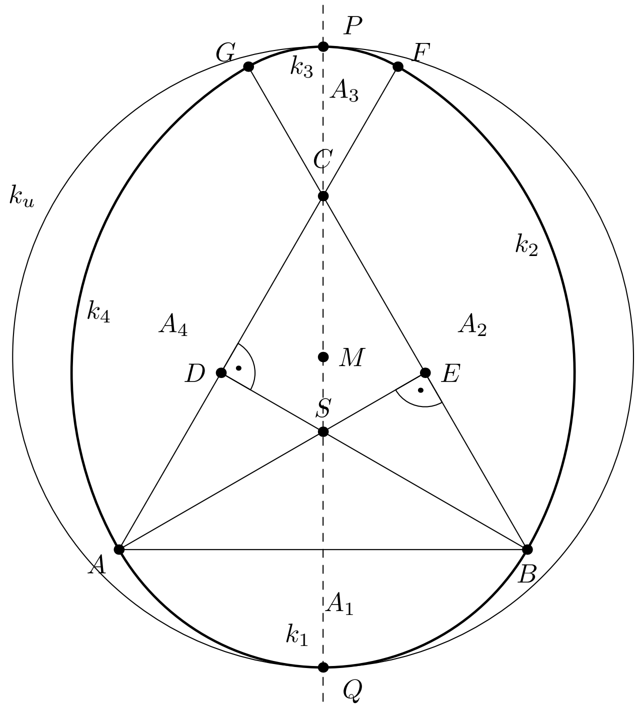


(b)



Zwar sind die beiden Kreisbögen k_2 und k_4 kongruent, aber die beiden Kreisbögen k_1 (Radius $\overline{SQ}$) und k_3 (Radius $\overline{CP}$) sind es nicht. Also ist die Senkrechte zur Geraden PQ durch den Punkt M keine Symmetrieachse der Figur. Andere Geraden, die ebenfalls durch M verlaufen, kommen aus dem gleichen Grund nicht als Symmetrieachsen in Betracht.

(c) Der Schnittpunkt S ist auch der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, der die Schwerlinien im Verhältnis $2:1$ teilt.
Es seien $r_1 = \overline{SA}$, $r_2 = \overline{DB}$ und $r_3 = \overline{CF}$.
Die drei Kreisbögen k_1, k_2 und k_3 schließen die Kreisteile A_1, A_2, A_3 und A_4 außerhalb des gleichseitigen Dreiecks ABC ein, dessen Flächeninhalt kurz A_Δ heißen soll.



$$r_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3}\sqrt{3} \quad ; \qquad r_2 = \frac{a}{2}\sqrt{3} = r_4$$

$$A_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{3}A_\Delta = \frac{1}{9}a^2\pi - \frac{1}{3}A_\Delta$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2}A_\Delta = \frac{3}{16}a^2\pi - \frac{1}{2}A_\Delta = A_4$$

$$r_3 = \frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

$$A_3 = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{a}{2}\left(\sqrt{3} \; - 1\right)\right]^2 \cdot \pi = \ldots = \frac{1}{6}a^2\pi - \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}\pi$$

$$\begin{aligned}
A_{Ei} &= \frac{1}{9}a^2\pi - \frac{1}{3}A_\Delta + \frac{3}{8}a^2\pi - A_\Delta + \frac{1}{6}a^2\pi - \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}\pi + A_\Delta \\
&= a^2\pi\left(\frac{1}{9} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\pi \\
&= a^2\pi\frac{8 + 27 + 12}{72} - a^2\sqrt{3} \cdot \frac{1 + \pi}{12} \\
&= \frac{47}{12}a^2\pi - \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 \cdot (1 + \pi) \\
A_{Ei} &= \frac{a^2}{72} \cdot (47\pi - 6\sqrt{3} - 6\pi\sqrt{3}) \quad \approx 52,31\,\text{cm}^2 \qquad \text{für } a = 6\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Für den Durchmesser d_u des Umkreises k_u gilt: $d_u = 2 \cdot r_1 + r_3$.

$$\Rightarrow \quad r_u = \frac{1}{2} \cdot (2r_1 + r_3) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}a\sqrt{3} + \frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{1}{2}a)$$

$$\begin{aligned}
r_u &= \frac{1}{3}a\sqrt{3} + \frac{1}{4}a\sqrt{3} - \frac{1}{4}a \\
&= a\left(\frac{7}{12}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right) \\
r_u &= \frac{1}{12}a(7\sqrt{3} - 3) \quad \approx 4,56\,\text{cm} \qquad \text{für } a = 6\,\text{cm} \\
r_u^2 &= \frac{a^2}{144}(156 - 42\sqrt{3})
\end{aligned}$$

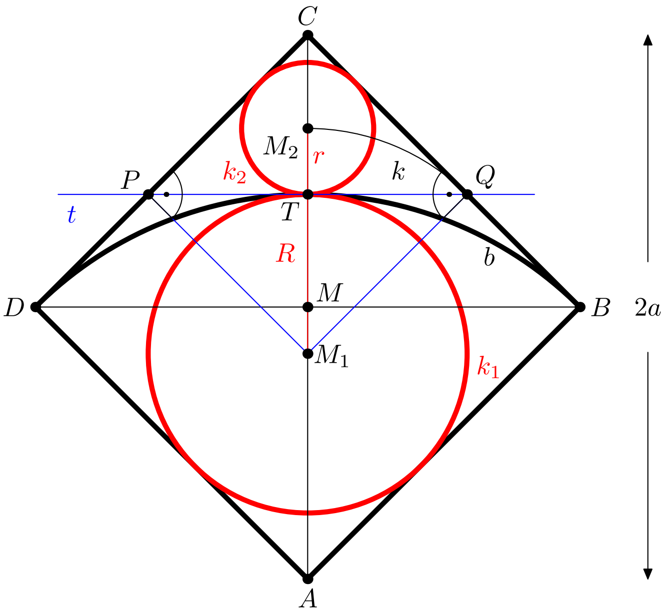
Für den Flächeninhalt A_u des Unkreises ergibt sich dann:

$$A_u = \frac{a^2}{144}(156 - 42\sqrt{3}) \cdot \pi$$

$$\frac{A_{Ei}}{A_u} = \frac{\frac{a^2}{72} \cdot (47\pi - 6\sqrt{3} - 6\pi\sqrt{3})}{\frac{a^2}{144}(156 - 42\sqrt{3}) \cdot \pi} = 0,7999561666\ldots \approx 0,8 = 80\%$$

Der Verdacht liegt nahe, dass es genau 80% sind. Aber Zähler und Nenner stehen leider im irrationalen Verhältnis (man sagt, „Zähler und Nenner sind inkommensurabel.“). Das liegt z.B. daran, dass sich die Zahl π nicht herauskürzt.

13.



Der Kreisbogen b von B nach D im Quadrat $ABCD$ mit der Diagonalenlänge $2a$ besitzt den Mittelpunkt A.
In der Figur ist eine Möglichkeit dargestellt, wie die Mittelpunkte M_1 und M_2 der beiden einbeschriebenen Kreise k_1 und k_2 mit den Radien R bzw. r konstruiert werden können.

(a) • Beschreibe die einzelnen Konstruktionsschritte in der richtigen Reihenfolge.
  • Konstruiere die Figur mit den einbeschriebenen Kreisen k_1 und k_2 für $a = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne die Kreisradien R und r in Abhängigkeit von a. Bestätige damit, dass diese Konstruktion der einbeschriebenen Kreise korrekt ist.
Tipp: Zeichne die Berührradien der Kreisline k_2 an die Seiten $[BC]$ und $[DC]$ ein.

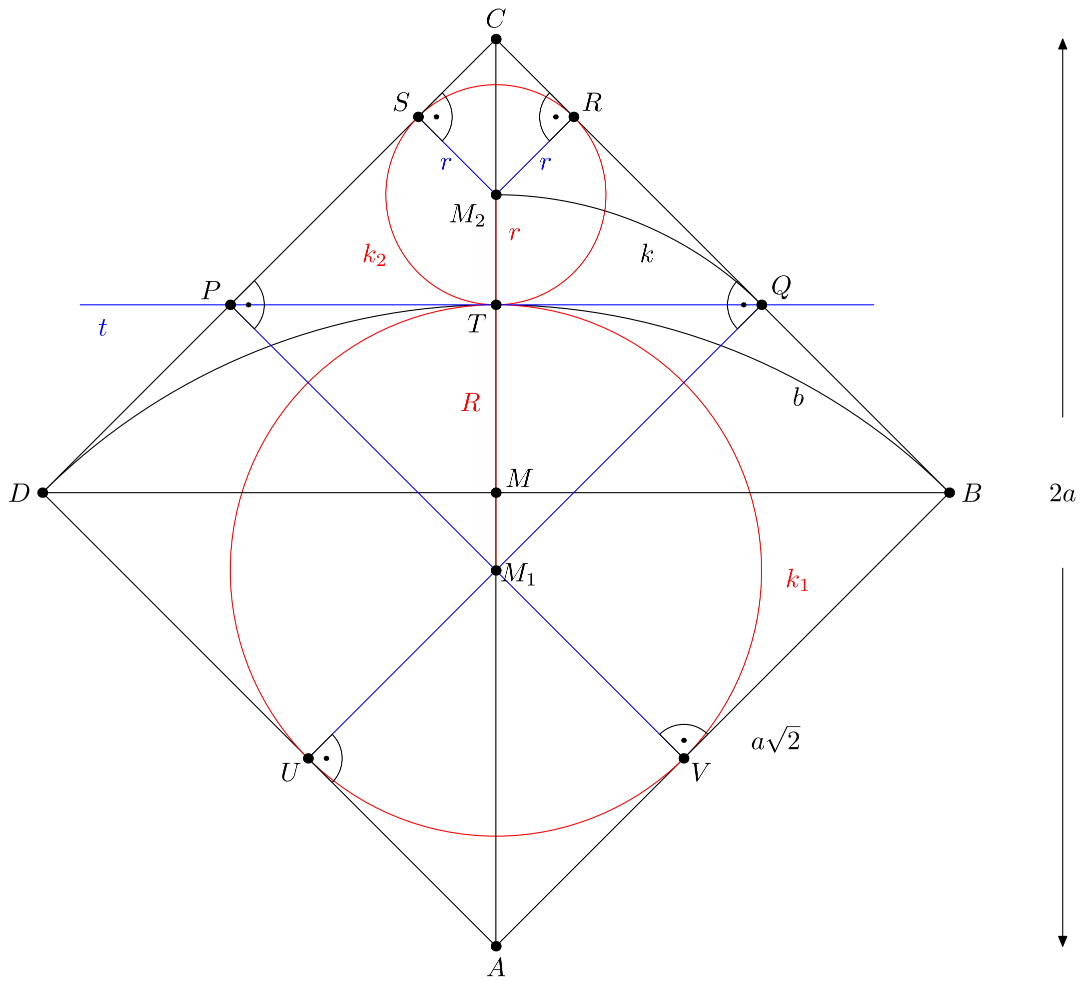
Lösung:

(a) •

- Zeichne Das Quadrat $ABCD$ mit seinen Diagonalen und dem Kreisbogen b
- $b \cap [AC] = \{T\}$
- Zeichne die Tangente t an diesen Kreisbogen im Punkt T
- $t \cap [DC] = \{P\}$ und $t \cap [BC] = \{Q\}$
- Die Senkrechten auf die Seiten $[AC]$ und $[BC]$ im Punkt P bzw. Q schneiden sich im Mittelpunkt M_1
- Der Kreis um den Punkt M_1 mit dem Radius $\overline{M_1Q}$ schneidet die Diagonale $[AC]$ im Kreismittelpunkt M_2
- $R = \overline{M_1T}$ und $r = \overline{M_2T}$

• Konstruktion: Die Diagonalen sind $2a = 12\,\text{cm}$ lang, sie stehen aufeinander senkrecht und sie halbieren sich. Die restlichen Konstruktionsschritte sind oben angeführt.

(b)



Das Dreieck PQC ist gleichschenklig-rechtwinklig.
Dort gilt: $\overline{TC} = \overline{AC} - \overline{AT} = 2a - a\sqrt{2}$.
Das Viereck M_1QCP ist ein Quadrat. Also gilt dort:

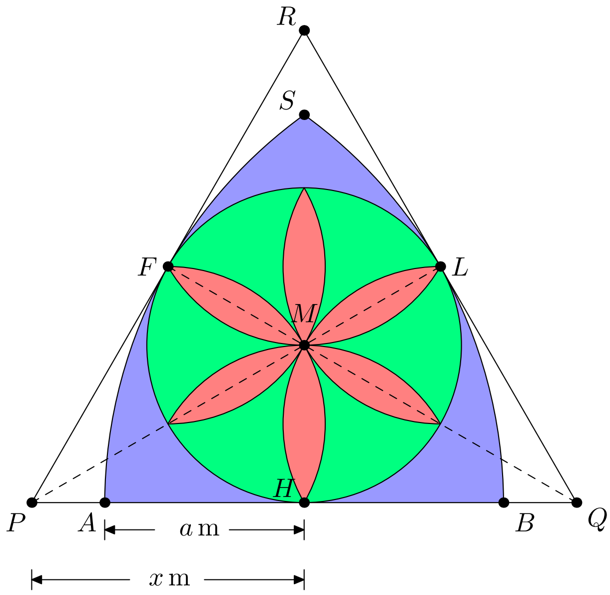
$\overline{M_1T} = \overline{TC} = 2a - a\sqrt{2} = R.$

$\overline{M_1Q} = \overline{M_1M_2} = \overline{PC} = \overline{TC} \cdot \sqrt{2} = (2a - a\sqrt{2})\sqrt{2} = 2a\sqrt{2} - 2a.$
$r = \overline{M_2T} = \overline{M_1M_2} - \overline{M_1T} = \overline{M_1M_2} - \overline{TC} = 2a\sqrt{2} - 2a - (2a - a\sqrt{2})$
$r = 3a\sqrt{2} - 4a$

Die beiden Berührradien r erzeugen das Quadrat M_2RCS. Dann müsste aber gelten: $\overline{M_2C} = r\sqrt{2}$.
Nun ist $\overline{M_2C} = \overline{M_1C} - \overline{M_1M_2} = 2 \cdot \overline{TC} - \overline{M_1M_2}$
$\Rightarrow \quad \overline{M_2C} = 2 \cdot (2a - a\sqrt{2}) - (2a\sqrt{2} - 2a) = 4a - 2a\sqrt{2} - 2a\sqrt{2} + 2a \Rightarrow \quad \overline{M_2C} = 6a - 4a\sqrt{2} = (3a\sqrt{2} - 4a) \cdot \sqrt{2} = r \cdot \sqrt{2}$, was zu zeigen war.

Analog müsste nun gelten: $\overline{M_1A} = R\sqrt{2}$:
$\overline{M_1A} = \overline{AC} - \overline{CM_1} = 2a - 2 \cdot \overline{TC} = 2a - 2 \cdot (2a - a\sqrt{2}) = 2a\sqrt{2} - 2a$
$\overline{M_1A} = (2a - a\sqrt{2})\sqrt{2} = R\sqrt{2}$, was zu zeigen war.

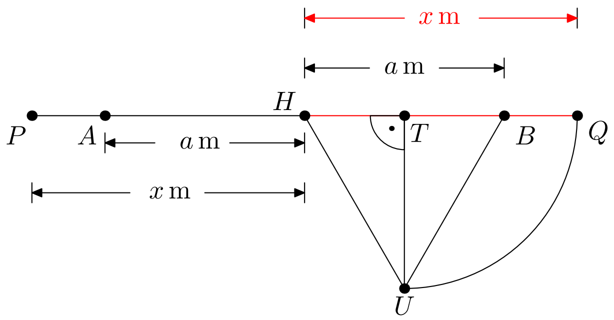
14.



Das ist die Planfigur für den oberen Teil eines Kirchenfensters.
Das gleichseitige Hilfsdreieck PQR berührt die Kreisbögen von B nach S und von S nach A in den Punkten L bzw. F. Die Punkte P und Q sind die beiden Mittelpunkte dieser Kreisbögen.
Die Punkte F und L sind gleichzeitig die Berührpunkte des einbeschriebenen Kreises mit den beiden Kreisbögen.

(a) • Zeige: $\overline{PQ} = (a + a\sqrt{3})\,\text{m}$; d.h. $x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$.

•



Der Mittelpunkt der Strecke $[PQ]$ bzw. der Strecke $[AB]$ ist H. Das Dreieck HUB ist gleichseitig.
Begründe: Diese Konstruktion ergibt $\overline{HQ} = \overline{PH} = x\,\text{m}$.

(b) Die Breite $\overline{AB}$ des Kirchenfensters soll 2 m betragen. Konstruiere die vollständige Figur im Maßstab 1:25.

(c) Wie viele Quadratdezimeter rotes Glas werden für die Rosette ungefähr gebraucht?

(d) Wie hoch wird dieser Teil des Kirchenfensters?

Lösung: (a)

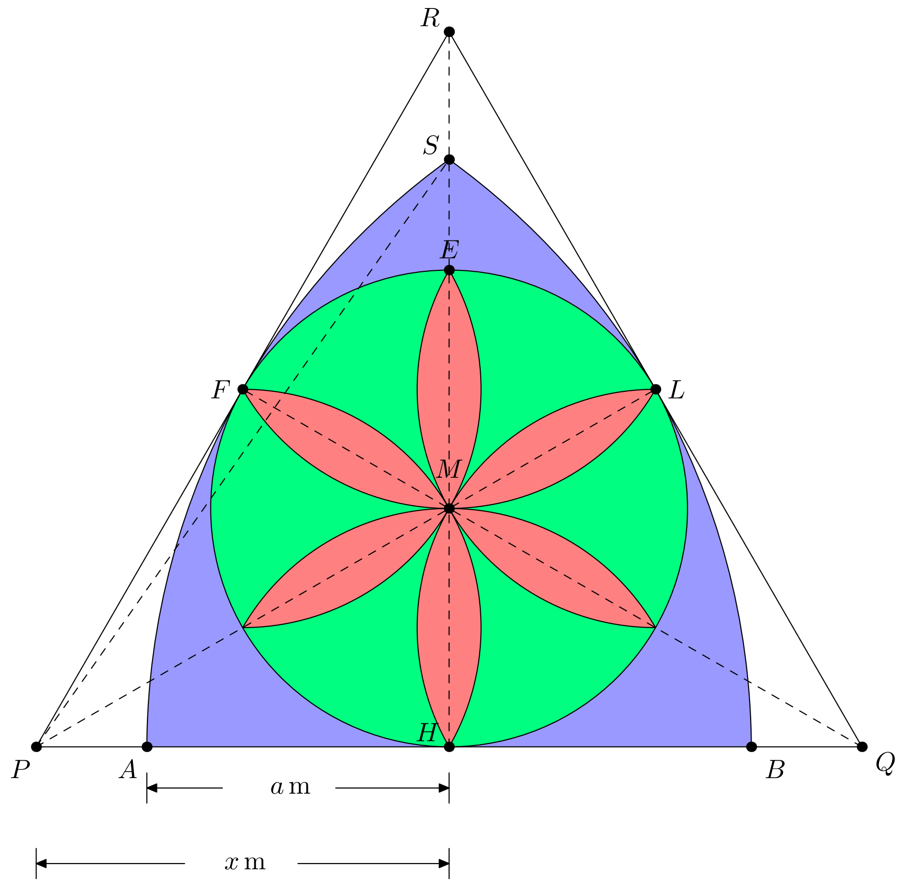
- Die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks beträgt $2x\,\text{m}$. Die Strecke $[PL]$ stellt eine der Höhen in diesem Dreieck dar.

  Dann gilt $\overline{PL} = \overline{PB} = \left(\frac{2x}{2}\sqrt{3}\right)\text{m} = (x+a)\text{m} \Leftrightarrow x\sqrt{3}\,\text{m} = (x+a)\,\text{m}$

  $$\Leftrightarrow \quad x = \frac{a}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{3}+1) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

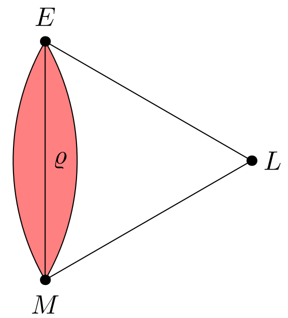
- Der Punkt T ist der Mittelpunkt der Seite $[HB]$, die $a\,\text{m}$ lang ist. Die Strecke $[TU]$ ist eine Höhe in dem gleichseitgen Dreieck HUB mit der Seitenlänge $a\,\text{m}$.
  $\overline{TU} = \frac{a}{2}\sqrt{3}\,\text{m} = \overline{TQ} \quad \Rightarrow \quad \overline{HQ} = \overline{HT} + \overline{TQ} = (\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{3})\,\text{m} = x\,\text{m}.$

(b) Die Breite des Fensters beträgt $2\,\text{m} = 200\,\text{cm}$. Im Maßtab 1:25 bedeutet das für deine Zeichnung $\overline{AB} = 200\,\text{cm} : 25 = 8\,\text{cm}$.



- Konstruiere x für $a = 4\,\text{cm}$ gemäß der Darstellung in der Aufgabe (a)
- Konstruiere das Dreieck PQR
- Der Punkt M ist sowohl der Mittelpunkt des Inkreises dieses Dreiecks als auch der Rosettenmittelpunkt
- Die Spitzen der Rosette sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks

(c) In diesem Ausschnitt erkennst du im Zusammenhang mit der vorangegangenen Konstruktion:
Die Punkte E und M teilen die Dreieckshöhe $[RH]$ in drei gleich große Teile. Das Dreieck MLE ist gleichseitig.



Für den Inkreisradius $\varrho = \overline{ME}$ gilt:

$$\varrho = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{2} \cdot \sqrt{3}\ \text{m} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)\ \text{m} = \frac{a}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ \text{m}$$

Die beiden Kreissegmente an der Sehne $[ME]$ sind kongruent. Für den Flächeninhalt A_R eines Blattes der Rosette gilt dann:

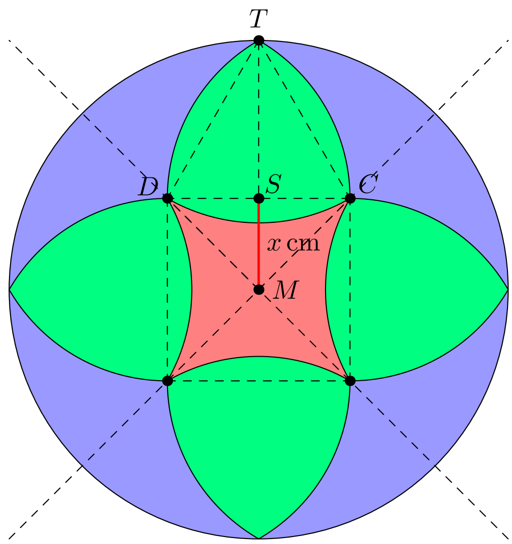
$$A_R = 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\varrho^2\pi - \frac{\varrho^2}{4}\sqrt{3}\right) = \varrho^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2}{4}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Für $a = 1$ ist dann $A_R \approx 0,112\,\text{cm}^2 = 11,2\,\text{dm}^2$
und $A_{ges} = 6 \cdot A_R \approx 67,2\,\text{dm}^2$.
Es werden etwa $70\,\text{dm}^2$ rotes Glas für die Rosette benötigt.

(d) Es gilt: $\overline{PS} = \overline{PL} = x\sqrt{3}\,\text{m}$.
ΔPHS: $\overline{HS}^{\,2} = \overline{PS}^{\,2} - x^2\,\text{m}^2 = (3x^2 - x^2)\,\text{m}^2 = 2x^2\,\text{m}^2$.
$\Rightarrow \quad \overline{HS} = x\sqrt{2}\,\text{m}$.
Die Fensterhöhe $\overline{HS}$ ist genauso lang wie die Seite des Quadrates mit der Seitenlänge $x\,\text{m}$ (was eine andere Konstruktionsmöglichkeit der Figur eröffnen würde).
Mit $x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$ ergibt sich: $\overline{HS} = x\sqrt{2}\,\text{m} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ m.

Für $a = 1$ ergibt sich: $\overline{HS} \approx 1,93\,\text{m}$.

15.



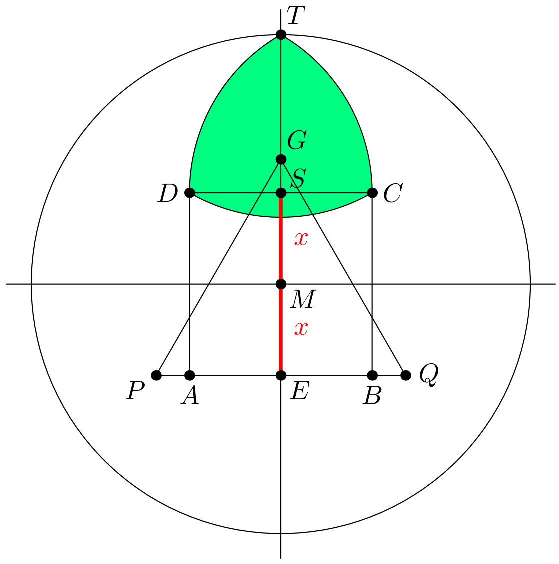
Das ist das Bild eines Fensters, das sich in der Zisterzienserabtei Hauterive in Fribourg (Schweiz) befindet.

Der Radius des Umkreises dieser Figur sei R cm. Der Radius der kleinen Kreisbögen sei jeweils r cm.
Die gestrichelten Linien erzeugen im Inneren ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck.

(a) Konstruiere die Figur für $R = 5$ cm.

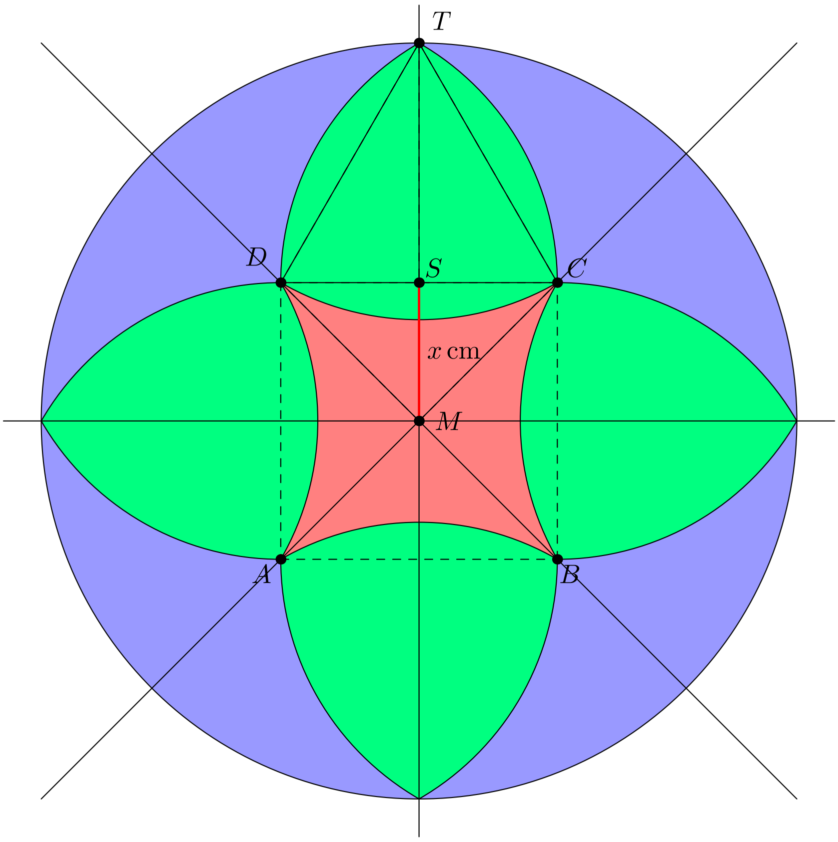
(b)
- Zeige: $\overline{MS} = x = \dfrac{R}{(\sqrt{3}+1)\,\text{cm}}$
- Zeige: $x\,\text{cm} = \dfrac{R}{2}\sqrt{3} - \dfrac{R}{2}$

(c) Hier ist eine recht umständlichere Möglichkeit dargestellt, die Figur zu konstruieren:



Der Mittelpunkt der Strecke [MT] ist der Punkt G. Das Dreieck PQG ist gleichseitig und es besitzt die Seitenlänge R cm.
Begründe: Diese Konstruktion ergibt $\overline{ME} = \overline{MS} = x\,\text{cm} = \dfrac{R}{2}\sqrt{3} - \dfrac{R}{2}$.

Lösung: (a)

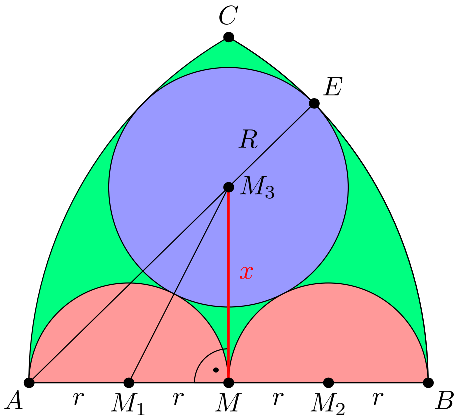


- Zeichne einen Kreis um M mit dem Radius $R = 5\,\text{cm}$
- Zeichne die vier Symmetrieachsen der Figur ein; $\Rightarrow$ Punkt T
- Trage am Punkt T links und rechts einen $30°$-Winkel mit dem Schenkel $[TM$ an
- Die freien Schenkel dieser Winkel schneiden die im $45°$-Winkel stehenden Symmetrieachsen im Punkt D bzw. C. Das Dreieck DCT ist dann gleichseitig.
- Die Punkte D, C und T sind jeweils die Mittelpunkte der drei Kreisbögen
- Der Rest kommt durch Punkt- oder Achsenspiegelung zustande

(b)
- Das Dreieck MCD ist gleichschenklig-rechtwinklig.
  $\Rightarrow \quad \overline{SM} = \overline{SD} = \overline{SC} = x\,\text{cm}$ und $\overline{CD} = \overline{SC} = 2x\,\text{cm}$.
  Das Dreieck DCT ist gleichseitig.
  Also gilt für dessen Höhe $\overline{ST} = 2 \cdot \frac{x}{2}\sqrt{3}\,\text{cm} = x\sqrt{3}\,\text{cm}$.
  $\Rightarrow \quad (x + x\sqrt{3})\,\text{cm} = x(1+\sqrt{3})\,\text{cm} = R$
  $\Rightarrow \quad x = \dfrac{R}{(\sqrt{3}+1)\,\text{cm}}$
- $x\,\text{cm} = \dfrac{R}{\sqrt{3}+1} \cdot \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{R\sqrt{3}-R}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} - \dfrac{R}{2}$

(c) Es gilt $\overline{ME} = \overline{EG} - \overline{MG} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} - \dfrac{R}{2}$.

16.



Die Punkte A und B sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen, welche die beiden Halbkreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 (Radius r) sowie den Kreis um M_3 mit dem Radius R berühren.
Der Kreis um M_3 mit dem Radius R berührt den Kreisbogen von B nach C im Punkt E.

(a) Zeige: $R = 1,2r$.

(b) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt A_R des Kreises um M_3 größer als der Flächeninhalt A_r der beiden Halbkreise zusammen?

Lösung: (a) $\overline{AM_3} = \overline{AE} - \overline{M_3E} = 4r - R$

Wende in den beiden Dreiecken AMM_3 und M_1MM_3 den Satz des PYTHAGORAS an:

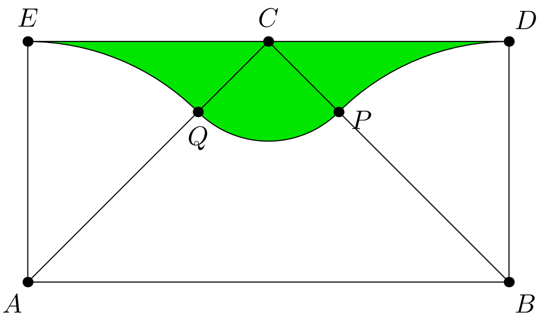
$$\begin{array}{llcll}
\Delta AMM_3: & x^2 & = & (4r-R)^2-(2r)^2 & \\
 & x^2 & = & 16r^2-8rR+R^2-4r^2 & \\
 & x^2 & = & 12r^2-8rR+R^2 & (1) \\
\Delta M_1MM_3: & x^2 & = & (r+R)^2-r^2 & \\
 & x^2 & = & r^2+2rR+R^2-r^2 & \\
 & x^2 & = & R^2+2rR & (2) \\
(1)=(2): & 12r^2-8rR+R^2 & = & R^2+2rR & \\
\Leftrightarrow & 12r^2-10Rr & = & 0 & \\
\Leftrightarrow & 2r(6r-5R) & = & 0 & \Rightarrow R = 1,2r
\end{array}$$

(b) Flächenunterschied:

$\Delta A = A_R - A_r = R^2\pi - r^2\pi = (1,2r)^2\pi - r^2\pi = r^2\pi(1,44-1) = 0,44r^2\pi$

$$\frac{\Delta A}{A_r} = \frac{0,44r^2\pi}{r^2\pi} = 0,44 = 44\%$$

17.



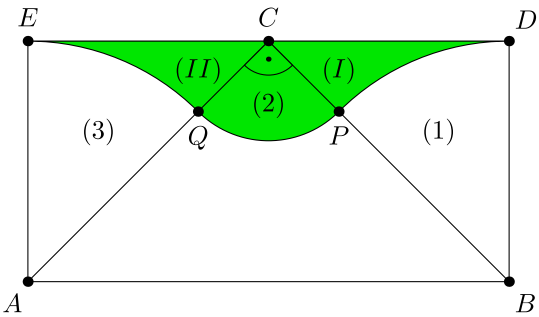
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig mit $\overline{AC} = \overline{BC} = 5\,\text{cm}$. Das Viereck $ABDE$ ist ein Rechteck. Die Punkte A, C und B sind die Mittelpunkte der drei Kreisbögen, die sich zu der geschwungenen Linie von E über Q und P nach D zusammenfügen.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Zeige: $\overline{BP} = 2,5 \cdot \sqrt{5}\,\text{cm}$.

(c) Berechne den Inhalt der Fläche, die von der geschwungenen Linie und der oberen Rechtecksseite $[ED]$ umrandet wird.

Lösung: (a)



(b) Das Dreieck BDC ist ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$.
Dann ist die Seitenlänge $\overline{BD} = \frac{5}{\sqrt{2}}\,\text{cm} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}\,\text{cm} = \frac{5}{2}\sqrt{2}\,\text{cm}$, also $2,5 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \approx 3,54\,\text{cm}$ lang.

(c) $A_{\Delta CBD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2\,\text{cm}^2 = 6,25\,\text{cm}^2$

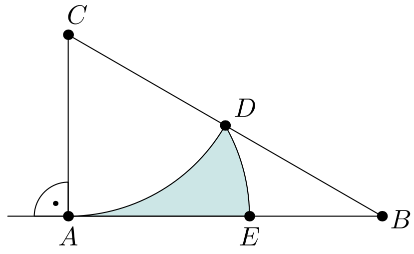
$$A_{(1)} \approx \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot 3,54^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 4,92\,\text{cm}^2 = A_{(3)}$$

$$A_{(I)} = A_{(III)} \approx 6,25\,\text{cm}^2 - 4,92\,\text{cm}^2 = 1,33\,\text{cm}^2$$

$$A_{(2)} \approx \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot (5 - 3,54)^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 1,67\,\text{cm}^2$$

$$A_{gesamt} = 2 \cdot A_{(I)} + A_{(2)} \approx 2 \cdot 1,33\,\text{cm}^2 + 1,67\,\text{cm}^2 = 4,33\,\text{cm}^2$$

18.

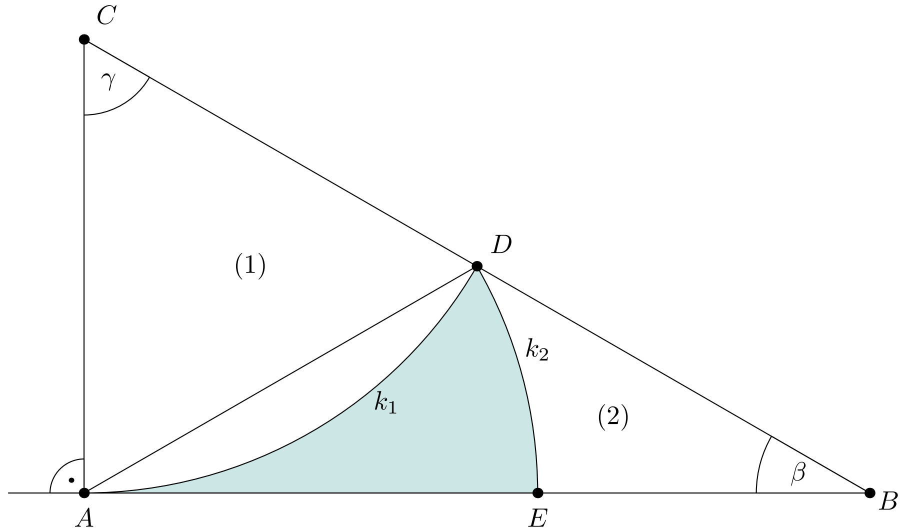


Die Eckpunkte A und C des rechtwinkligen Dreiecks ABC sind die Mittelpunkte der Kreisbögen von E nach D bzw. von A nach D. Die Radien der Kreisbögen sind gleich lang.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt der getönten Fläche.

Lösung: (a)



- Zeichne die Strecke $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$. Trage am Punkt A einen rechten Winkel an.
- Zeichne um den Punkt C einen Kreisbogen k_1 mit Radius 6 cm. Zeichne um den Punkt A einen Kreisbogen k_2 mit Radius 6 cm.
- $k_1 \cap k_2 = \{D\}$. Das Dreieck ADC ist somit gleichseitig mit der Seitenlänge 6 cm. $k_2 \cap \{$freier Schenkel des rechten Winkels mit dem Scheitel $A\} = \{E\}$.
- $[CD \cap [AE = \{B\}$.

(b) Weil das Dreieck ADC gleichseitig ist, folgt $\gamma = 60°$. Weil das Dreieck ABC rechtwinklig ist, folgt $\beta = 30°$.

Der Flächeninhalt A des Dreiecks ABC beträgt somit
$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 18\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \quad (\approx 31,18\,\text{cm}^2)$.

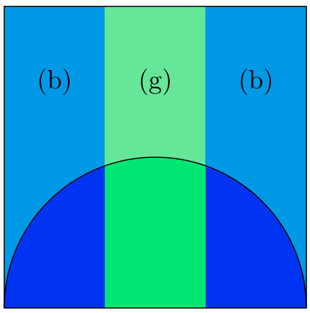
Berechne dann den Flächeninhalt des Kreissektors (1) mit dem Mittelpunkt C und dem Kreisbogen von A nach D:
$A_{(1)} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 6^2\pi\,\text{cm}^2 = 6\pi\,\text{cm}^2 \quad (\approx 18,85\,\text{cm}^2)$

Den Inhalt $A_{(2)}$ der Fläche (2), die durch die Strecken $[EB]$ und $[BD]$ sowie durch den Keisbogen von E nach D begrenzt wird, berechnest du, indem du den Inhalt des Kreissektors mit dem Mittelpunkt A und dem Radius 6 cm vom Flächeninhalt des Dreiecks ABD subtrahierst.
Das Dreieck ABC ist ein halbes gleichseitiges Dreieck. Weil $\overline{CD} = 6\,\text{cm}$ gilt, ist der Punkt D damit der Mittelpunkt der Hypotenuse $[BC]$, die ja 12 cm lang sein muss. Deshalb ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABD halb so groß wie der des Dreiecks ABC:
$A_{\Delta ABD} = 0,5 \cdot 18\sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \quad (\approx 15,59\,\text{cm}^2)$.

$$\Rightarrow \quad A_{(2)} = \left(9\sqrt{3} - \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot 6^2\pi\right)\text{cm}^2 = (9\sqrt{3} - 3\pi)\,\text{cm}^2 \quad (\approx 6,16\,\text{cm}^2).$$

Den Inhalt A der getönten Fläche erhältst du, indem du die beiden Flächeninhalte $A_{(1)}$ und $A_{(2)}$ vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC subtrahierst:
$A = 18\sqrt{3} - [6\pi + (9\sqrt{3} - 3\pi)]\,\text{cm}^2 = (9\sqrt{3} - 3\pi)\,\text{cm}^2 = A_{(2)}$ **!**
Das bedeutet z.B. auch, dass der Kreisbogen von E nach D die Fläche halbiert, die von den Strecken $[AB]$ und$[BD]$ sowie vom Kreisbogen von A nach D begrenzt wird.

19.



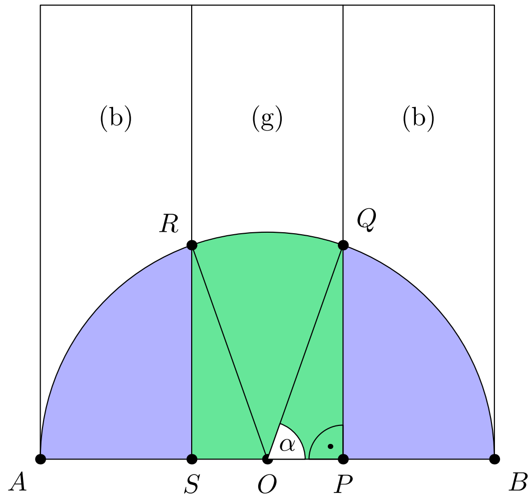
Das ist der Entwurf eines Logos für die Firma „Sun & Brown“. Es besteht aus einem Quadrat, das aus drei kongruenten Streifen blau (b) und grün (g) zusammengesetzt ist. Außerdem ist dem Quadrat ein Halbkreis einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur, so dass die Quadratseite 6 cm lang ist.

(b) Berechne den Inhalt der blauen Fläche im Halbkreis.

(c) Wie viel Prozent der Halbkreisfläche sind grün eingefärbt?

Lösung: (a)



(b) Um den Inhalt der blauen Teilfläche $PBQP$ zu berechnen, musst du von der Fläche des Sektors OBQ die des Dreiecks OPQ subtrahieren:

Im rechtwinkligen Dreieck OPQ gilt: $\overline{OP} = 1\,\text{cm}$ und $\overline{OQ} = 3\,\text{cm}$.

Also: $\cos\alpha = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70,53°$.

$A_{Sektor} \approx \dfrac{70,53°}{360°} \cdot 3^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 5,54\,\text{cm}^2$

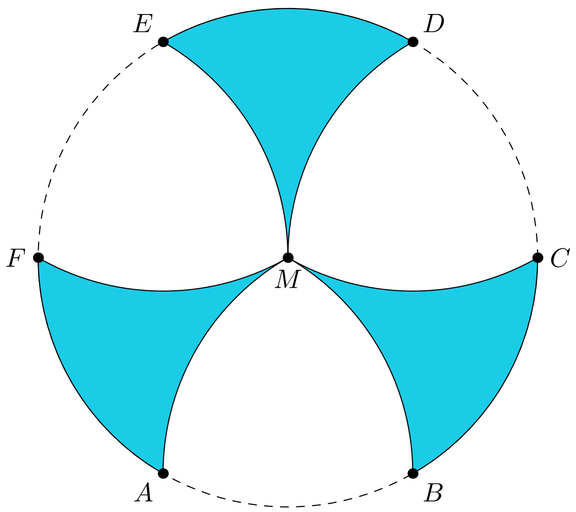
$A_{\Delta OPQ} \approx 0,5 \cdot 1 \cdot 3\,\text{cm}^2 \approx 1,41\,\text{cm}^2$
$A_{PBQP} \approx 5,54\,\text{cm}^2 - 1,41\,\text{cm}^2 = 4,13\,\text{cm}^2$
Geamte blaue Fläche: $A \approx 2 \cdot 4,13\,\text{cm}^2 = 8,26\,\text{cm}^2$.

(c) Halbkreis: $A_{HK} = \dfrac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \pi \approx 14,14\,\text{cm}^2$

$\dfrac{A_{grün}}{A_{HK}} \approx \dfrac{14,14\,\text{cm}^2 - 8,26\,\text{cm}^2}{14,14\,\text{cm}^2} \approx 0,4158 = 41,58\%$

Knapp 42% der Halbkreisfläche sind grün eingefärbt.

20.



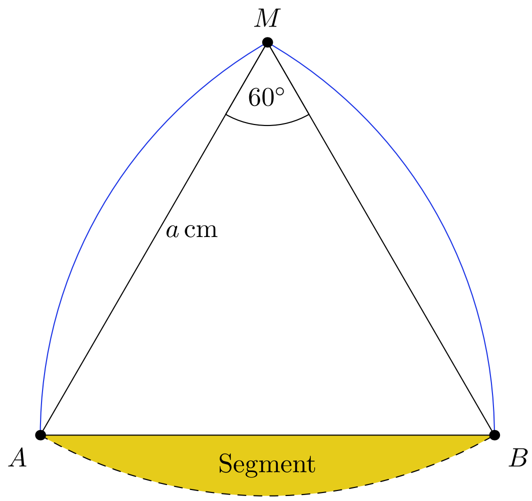
Die Punkte A, B, C, D, E und F sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge a cm. Diese Punkte sind auch die Mittelpunkte der Kreisbögen im Inneren.

(a) Zeichne die Figur für $a = 6$.

(b) Berechne den Flächeninhalt der getönten Figur in deiner Zeichnung.

Lösung: (a) Zeichne zunächst den Umkreis der Figur mit dem Radiua $a = 6$ cm. Trage dann den Radius 6-mal auf der Kreislinie ab. Beginne dabei mit einem der „waagrechten“ Punkte C oder F. Zeichne dann die 6 Kreisbögen ein.

(b)



Die Ausgangsfigur (AF) enthält drei Kreisbogendreiecke (KBD). Eines davon ist jetzt herausgezeichnet.
Es setzt sich aus einem gleichseitigen Dreieck (D) und drei kongruenten Segmenten (Sg) zusammen.
Den Flächeninhalt der Ausgangsfigur (AF) kannst du berechnen, indem du vom Flächeninhalt des Umkreises (k) der Ausgangsfigur den der drei Kreisbogendreiecke (KBD)

subtrahiertst:
$A_{AF} = A_k - 3 \cdot A_{KBD}$.
Weiter gilt also: $A_{KBD} = A_D + 3 \cdot A_{Sg}$ und $A_{Sg} = A_{Sektor MAB} - A_D$.
$\Rightarrow \quad A_{KBD} = A_D + 3 \cdot (A_{Sektor MAB} - A_D)$.

$$\Rightarrow \quad A_{KBD} = 3 \cdot A_{Sektor MAB} - 2 \cdot A_D = \left[3 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot a^2\pi - 2 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right] \text{cm}^2$$

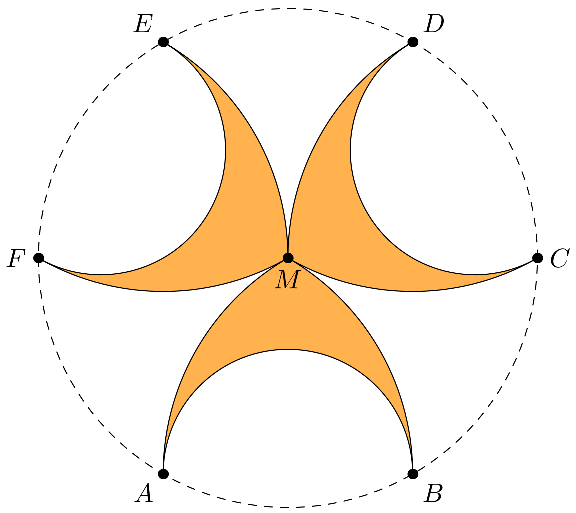
$$\Rightarrow \quad A_{KBD} = \left[\frac{1}{2}a^2\pi - \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}\right] \text{cm}^2$$

$$A_{AF} = a^2\pi\,\text{cm}^2 - 3 \cdot \left[\frac{1}{2}a^2\pi - \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}\right] \text{cm}^2$$

$$A_{AF} = \left[a^2\pi - \frac{3}{2}a^2\pi + \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\right] \text{cm}^2 = \frac{a^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)\,\text{cm}^2$$

Für $a = 6$ ergibt sich: $A_{AF} \approx 36,98\,\text{cm}^2$.

21.



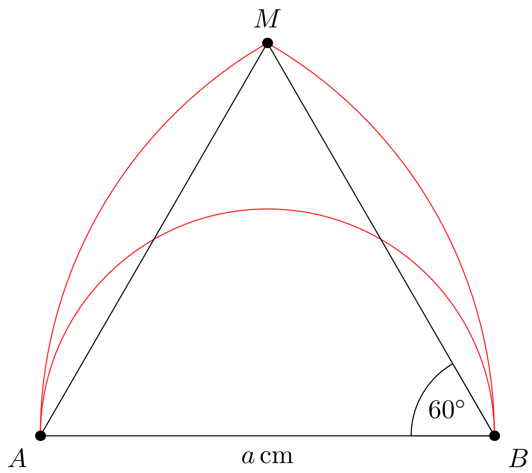
Die Punkte A, B, C, D, E und F sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge a cm. Diese Punkte sind auch die Mittelpunkte der Kreisbögen im Inneren. Die Strecken $[AB]$, $[CD]$ und $[EF]$ sind jeweils die Durchmesser der drei Halbkreise im Inneren.

(a) Zeichne die Figur für $a = 6$.

(b) Berechne den Flächeninhalt der getönten Figur in deiner Zeichnung.

Lösung: (a) Zeichne zunächst den Umkreis der Figur mit dem Radiua $a = 6$ cm. Trage dann den Radius 6-mal auf der Kreislinie ab. Beginne dabei mit einem der „waagrechten“ Punkte C oder F. Zeichne dann die 6 Kreisbögen und die 3 Halbkreise ein.

(b)



Die Figur stellt eines der drei kongruenten Elemente der Ausgangsfigur (AF) dar: An den Schenkeln $[MA]$ und $[MB]$ des gleichseitigen Dreiecks ABC liegen zwei kongruente Segmente (Seg), die zum Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks addiert werden. Davon wird dann der Flächeninhalt des Halbkreises (Hk) subtrahiert. Das Ergebnis wird schließlich noch mit 3 multipliziert.

$A_{AF} = 3 \cdot (A_{ABC} + 2 \cdot A_{Seg} - A_{Hk}) = 3 \cdot [A_{ABC} + 2 \cdot (A_{Sektor} - A_{ABC}) - A_{Hk}]$
$A_{AF} = 6 \cdot A_{Sektor} - 3 \cdot A_{ABC} - 3 \cdot A_{Hk})$

$$A_{AF} = \left[6 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot a^2\pi - 3 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi\right] \text{ cm}^2$$

$$A_{AF} = \left[a^2\pi - \frac{3}{4}a^2\sqrt{3} - \frac{3}{8}\,a^2\pi\right] \text{ cm}^2$$

$$A_{AF} = \left[\frac{5}{8}\,a^2\pi - \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}\right] \text{ cm}^2 = \left[\frac{a^2}{8} \cdot \left(5\pi - 6\sqrt{3}\right)\right] \text{ cm}^2$$

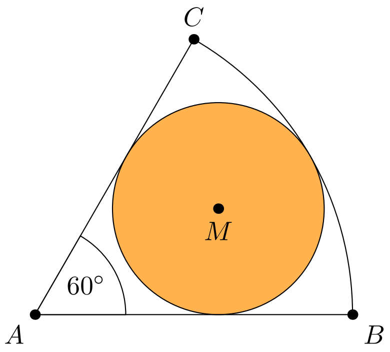
Für $a = 6$ ergibt sich: $A_{AF} \approx 23{,}92\,\text{cm}^2$

Anmerkung:

Es gilt $A_{AF} = \left[\frac{5}{8}\,a^2\pi - \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}\right] \text{ cm}^2 = \left[\frac{225°}{360°} \cdot a^2\pi - 3 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right] \text{ cm}^2.$

Das bedeutet: Die Ausgangsfigur hat den gleichen Flächeninhalt wie ein Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel 225° und dem Radius a cm, dem man 3 gleichseitige Dreiecke mit einer Seitenlänge von jeweils a cm entnommen hat.

22.

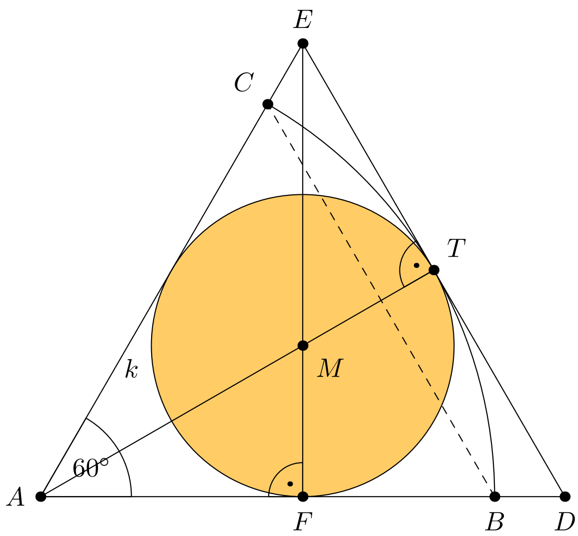


Der gefärbte Kreis mit dem Mittelpunkt M ist dem Kreissektor ABC mit dem Mittelpunkt A und einem Öffnungswinkel von $60°$ einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur für den Sektorradius $\overline{AB} = a = 6\,\text{cm}$.
Tipp: Die beiden Kreislinien berühren sich in einem Punkt T. Durch diesen Punkt verläuft die gemeinsame Tangente an die beiden Kreislinien. Zeichne diesen Punkt T und die Tangente ein.

(b) Welchen Bruchteil der Sektorfläche nimmt der Kreis ein?

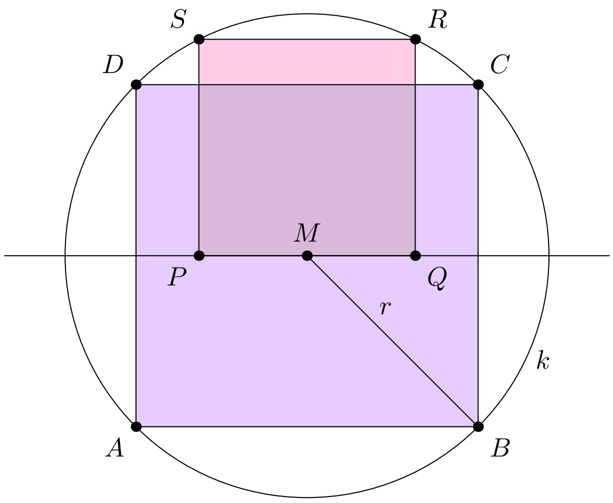
Lösung: (a)



(b) Die Gerade $[AT]$ ist eine Symmetrieachse des gleichseitigen Dreiecks ABC und des Dreiecks ADE. Also ist dieses Dreieck ADE ebenfalls gleichseitig. Die Strecke $[MT]$ stellt den Radius des Kreises k dar.
Die $a = 6\,\text{cm}$ lange Strecke $[AT]$ ist eine Höhe im gleichseitigen Dreieck ADE. Der Kreis k ist der Inkreis des Dreiecks ADE. $\Rightarrow \quad [AT] \cap [EF] = M$. Somit stellt die Strecke $[MT]$ den Radius des Kreises k dar.
Weil im gleichseitigen Dreieck die Winkelhalbierenden gleichzeitig die Schwerlinien sind, teilt der Mittelpunkt M die Strecke $[MT]$ im Verhältnis $2:1$.

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1}{3}\,a \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{Kreis}}{A_{Sektor}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\cdot a\right)^2 \pi}{\frac{60^\circ}{360^\circ}\cdot a^2\,\pi} = \frac{1}{9} : \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

23.

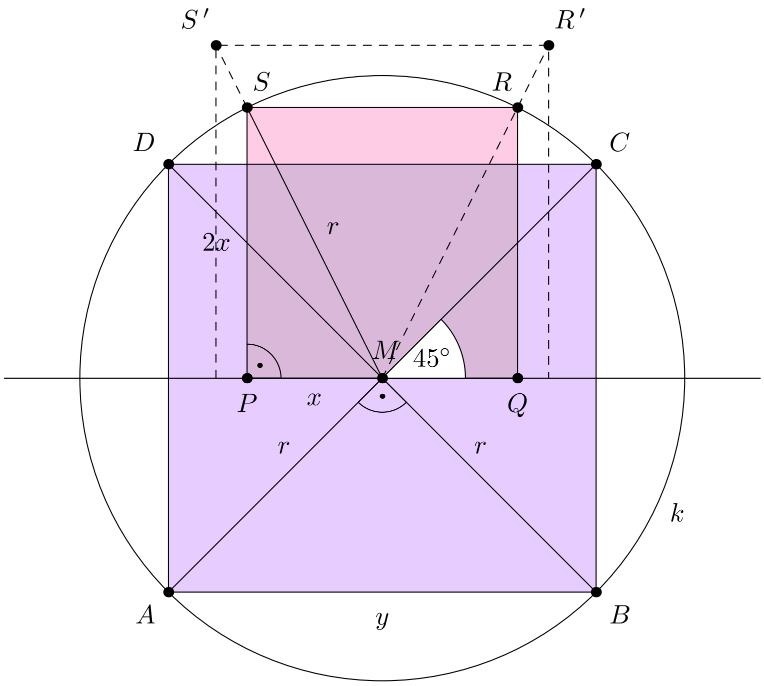


In den Kreis k mit dem Radius r ist das Quadrat $ABCD$ und in seinen Halbkreis ist das Quadrat $PQRS$ einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur für $r = 4\,\text{cm}$.

(b) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Quadrate.

Lösung: (a)



Zeichne zunächst den Kreis mit dem Mittelpunkt M und seinem waagrecht liegenden Durchmesser. Zeichne dann zwei Geraden ein, die jeweils einen 45°-Winkel mit dieser Waagrechten bilden und sich im Punkt M schneiden. Die Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit der Kreislinie k sind die Eckpunkte des Quadrates $ABCD$.
Um das Quadrat $PQRS$ zu erhalten, zeichnest du am besten erst ein (hier gestrichelt eingezeichnetes) Probequadrat mit den Eckpunkten R' und S' ein. Dann folgt: $[MR'] \cap k = \{R\}$ und $[MS'] \cap k = \{S\}$.
Die Lote der Eckpunkte R und S auf die Waagrechte liefern die restlichen Quadrat-Eckpunkte Q und P.

(b) Für die Berechnung kannst du den Radius r verwenden. Es geht jedoch auch, wenn du für r 4 cm einsetzt.
Es gilt: $\overline{AB} = y$ und $\overline{MP} = x$, dann ist $\overline{PS} = 2x$ (siehe Zeichnung).
Das Dreieck ABM ist gleichschenklig-rechtwinklig und damit ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $y = r\sqrt{2}$. $\quad\Rightarrow\quad A_{ABCD} = y^2 = 2r^2$.

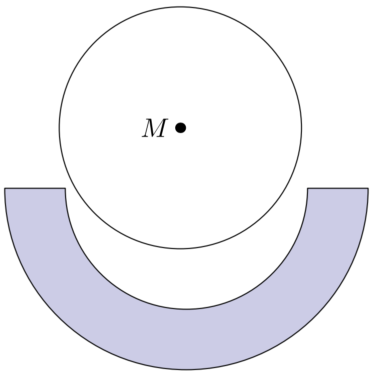
PYTHAGORAS im Dreieck PMS: $x^2 + (2x)^2 = r^2$

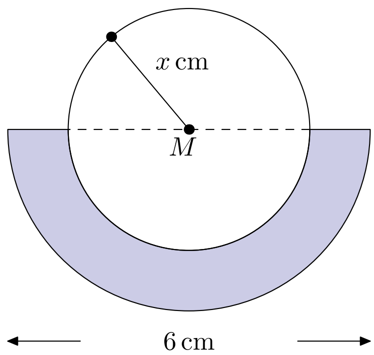
$$\Leftrightarrow \quad 5x^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{2r}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad A_{PQRS} = (2x)^2 = \frac{4}{5}r^2$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{4}{5}r^2}{2r^2} = 2 : 5 = \frac{4}{10} = 40\%$$

Das Quadrat $ABCD$ ist um 60% größer als das Quadrat $PQRS$.

24.





In dem Bild eines Firmenlogos wird der Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius x cm ($x < 3$) in einen dunkel gefärbten Halbkreisring eingebettet, dessen äußerer Durchmesser 6 cm beträgt (siehe Abbildung oben rechts).

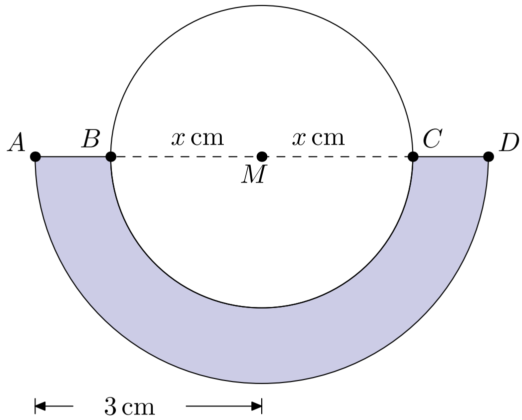
(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

(b) Berechne für $x = 2$ den Flächeninhalt des Halbkreisringes.

(c) Berechne x so, dass der Inhalt der Kreisfläche genauso groß wie der des Halkreisringes ist.

(d) Berechne x so, dass der Halbkreisring den doppelten Umfang wie der Vollkreis besitzt.

Lösung: (a)



Beginne am besten mit dem Vollkreis.

(b) $A_{HR} = \left(\frac{1}{2} \cdot 3^2\pi - \frac{1}{2} \cdot 2^2\pi\right) \text{cm}^2 = 2{,}5\pi \,\text{cm}^2 \approx 7{,}85 \,\text{cm}^2$

(c) Die Maßzahlengleichung für $x \in \mathbb{Q}^+$ heißt:

$$x^2\pi = \frac{1}{2} \cdot 3^2\pi - \frac{1}{2} \cdot x^2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}x^2 = \frac{9}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{3} \approx 1{,}73$$

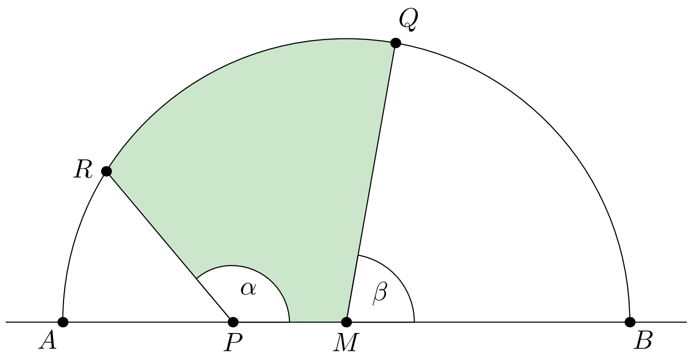
(d) Es gilt $\overline{AB} = \overline{CD} = (3 - x)\,\text{cm}$.

$$2 \cdot u_{Vollkreis} = 2 \cdot 2x\pi \,\text{cm} \quad u_{HK} = \left[\frac{1}{2} \cdot 6\pi + 2 \cdot (3 - x) + \frac{1}{2} \cdot 2x\pi\right] \text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad 4x\pi = 3\pi + 6 - 2x + x\pi \quad \Leftrightarrow \quad x(2 + 3\pi) = 6 + 3\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{6 + 3\pi}{2 + 3\pi} \approx 1{,}35$$

25.



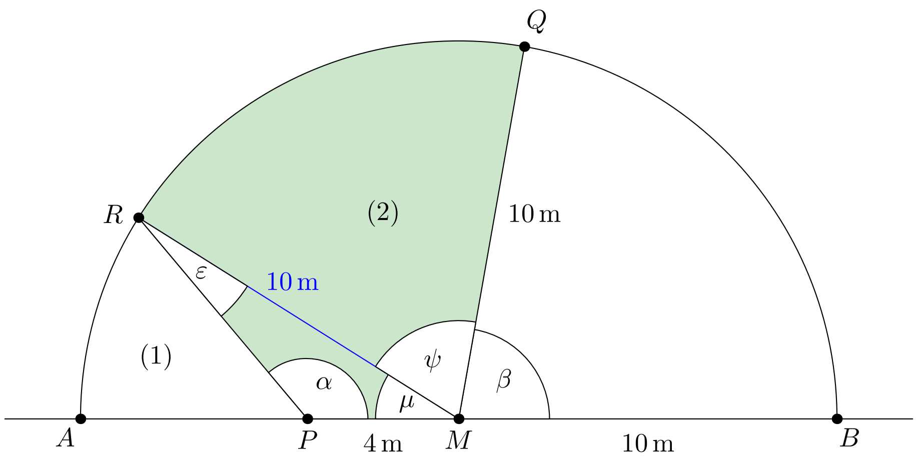
Die Figur stellt den Entwurf einer halbkreisförmigen Bühnenfläche dar. Der Durchmesser $[AB]$ soll 20 m und die Länge der Strecke $[PM]$ soll 4 m betragen.
Die von den Strecken $[RP]$, $[PM]$, $[MQ]$ und dem Kreisbogen von Q nach R begrenzte Teilfläche soll farbig von der restlichen Fläche abgesetzt werden.

(a) Zeichne die Bühne im Maßstab 1 : 200 für $\alpha = 130°$ und $\beta = 80°$.

(b) Berechne den Inhalt der farbig abgesetzten Teilfläche.
[Ergebnis: $A_{Farbe} \approx 69,85\,\text{m}^2$]

(c) Berechne den prozentualen Anteil der farbigen Fläche an der Gesamtfläche der Bühne.

Lösung: (a)



Für deine Zeichnung gilt:
$20\,\text{m} = 2000\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 2000\,\text{cm} : 200 = 10\,\text{cm}$
$4\,\text{m} = 400\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{PM} = 400\,\text{cm} : 200 = 2\,\text{cm}$

(b) Strategie: Addiere den Flächeninhalt des Dreiecks PMR zum Kreissektor (2) mit dem Mittelpunktswinkel ψ. Halbkreisfläche. Die „weiße“ Teilfläche (1) ist **kein Kreissektor**.
Die Hilfslinie $[MR]$ ist die Schlüsselstelle auf dem Lösungsweg.

$$A_{Halbkreis} = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \pi\,\text{m}^2 = 50\pi\,\text{m}^2 \approx 157,08\,\text{m}^2$$

$A_1 = A_{Sektor MRA} - A_{\Delta PMR}$

Sinussatz im Dreieck PMR: $\dfrac{\sin\varepsilon}{4} = \dfrac{\sin 130°}{10}$

$\Rightarrow \quad \varepsilon \approx 17{,}84° \quad \Rightarrow \quad \mu \approx 180° - 130° - 17{,}84° = 32{,}16°$

$A_{\Delta PMR} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \cdot \sin 32{,}16° \approx 10{,}65\,\mathrm{m}^2$

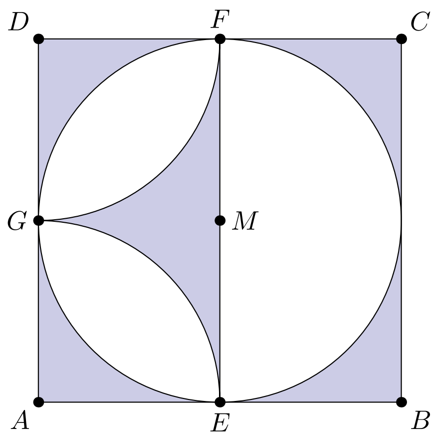
$\psi \approx 180° - 80° - 32{,}16° = 67{,}84°$

$A_{(2)} = \left(\dfrac{67{,}84°}{360°} \cdot 10^2 \cdot \pi\right)\,\mathrm{m}^2 \approx 59{,}20\,\mathrm{m}^2$

$A_{Farbe} \approx (10{,}65 + 59{,}20)\,\mathrm{m}^2 = 69{,}85\,\mathrm{m}^2$

(c) $\dfrac{A_{Farbe}}{A_{Halbkreis}} \approx \dfrac{69{,}85\,\mathrm{m}^2}{157{,}08\,\mathrm{m}^2} \approx 0{,}44 = \%$

26.

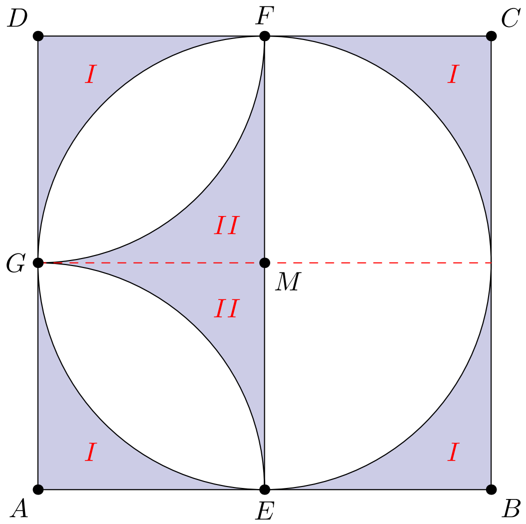


Das ist das Logo einer Firma, die Elektrogeräte herstellt.
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit dem Mittelpunkt M. Die Punkte A und D sind die Mittelpunkte der Kreisbögen von E nach G bzw. von G nach F.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\mathrm{cm}$.

(b) Berechne die Summe der Flächeninhalte der getönten Teilflächen in der Figur.

Lösung: (a)

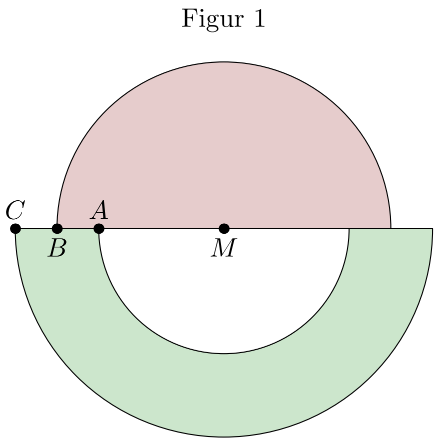


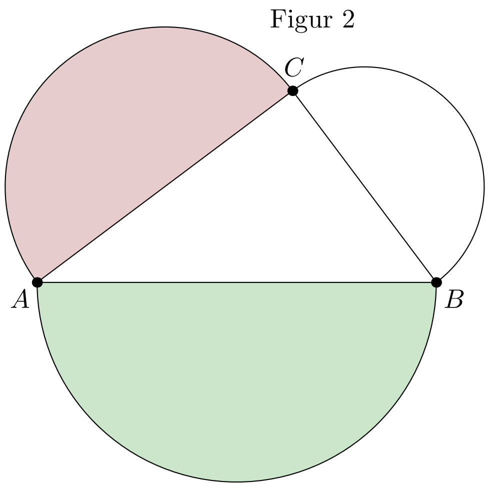
(b) Aus Symmetriegründen gilt: $A_I = A_{II}$.

$A_I = (3^2 - \frac{1}{4} \cdot 3^2 \cdot \pi)\,\text{cm}^2 \approx 1,93\,\text{cm}^2$.

$A_{gesamt} = 4 \cdot A_I + 2 \cdot A_{II} = 6 \cdot A_I \approx 11,58\,\text{cm}^2$.

27.





(a) Zeichne die Figur 1 für $\overline{MA} = 3,6\,\text{cm}$, $\overline{MB} = 4,8\,\text{cm}$ und $\overline{MC} = 6\,\text{cm}$.

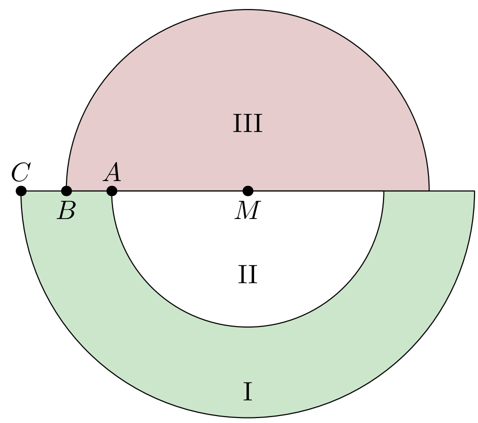
(b) Zeige ohne zu runden, dass der untere Kreisring und der obere Halbkreis den gleichen Flächeninhalt besitzen.

(c)
- Zeichne die Figur 2 für $c = \overline{AB} = 12\,\text{cm}$, $a = \overline{BC} = 7,2\,\text{cm}$ und $b = \overline{AC} = 9,6\,\text{cm}$.
- Begründe: Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.

- Notiere den Zusammenhang zwischen den drei Halbkreisflächen in der Figur 2 in Form einer Gleichung.
- Was hat die Figur 2 mit der Figur 1 zu tun? Beschreibe deine Idee.

Lösung: (a) Die Figur 1 ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

Figur 1



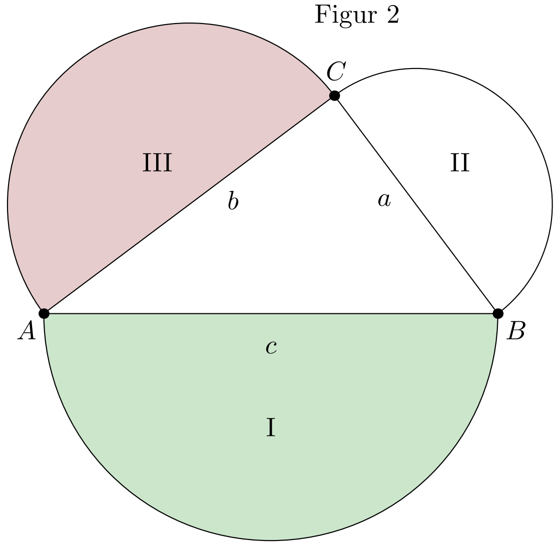
(b) Du hast die drei Halbkreise I, II und III vor dir.
Es müsste gelten: $A_{III} = A_I - A_{II}$. Es wird in der Einheit cm^2 gerechnet.

Also: $\frac{1}{2} \cdot 4,8^2\pi = \frac{1}{2} \cdot 6^2\pi - \frac{1}{2} \cdot 3,6^2\pi \;\Big|\; : \frac{1}{2}\pi$

$4,8^2 = 6^2 - 3,6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 23,04 = 36 - 12,96$. Das stimmt, also ist die Behauptung bewiesen.

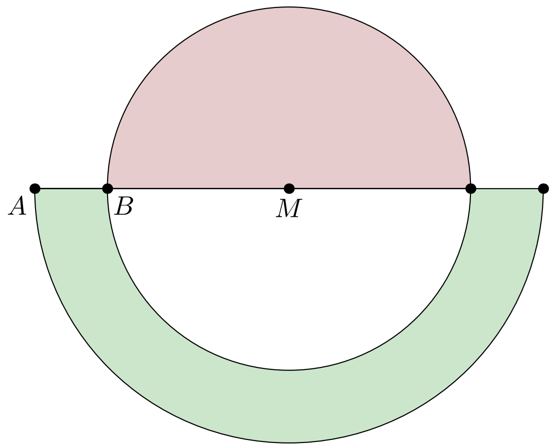
(c) • Die Figur 2 ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

Figur 2



- Für die Maßzahlen müsste gelten:
  $12^2 = 7{,}2^2 + 9{,}6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 144 = 51{,}84 + 92{,}16$. Das stimmt, also ist das Dreieck ABC rechtwinklig.
- Es gilt: $c^2 = a^2 + b^2 \,\Big|\, \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi$
  $$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \pi\,.$$
  Das bedeutet: Der Halbreis I hat den gleichen Flächeninhalt wie die beiden Halbkreise II und III zusammen.
- In der Figur 1 siehst du einen gleich gelagerten Fall: Wenn du den Halbkreis II aus dem Halbkreis I entfernst, ergibt sich: Der Halbkreis I muss genauso groß sein wie die beiden Halbkreise II und III zusammen.
  In der Figur 1 und der Figur 2 haben gleich nummerierte Halbkreise den gleichen Durchmesser; d.h. sie sind kongruent.

28.



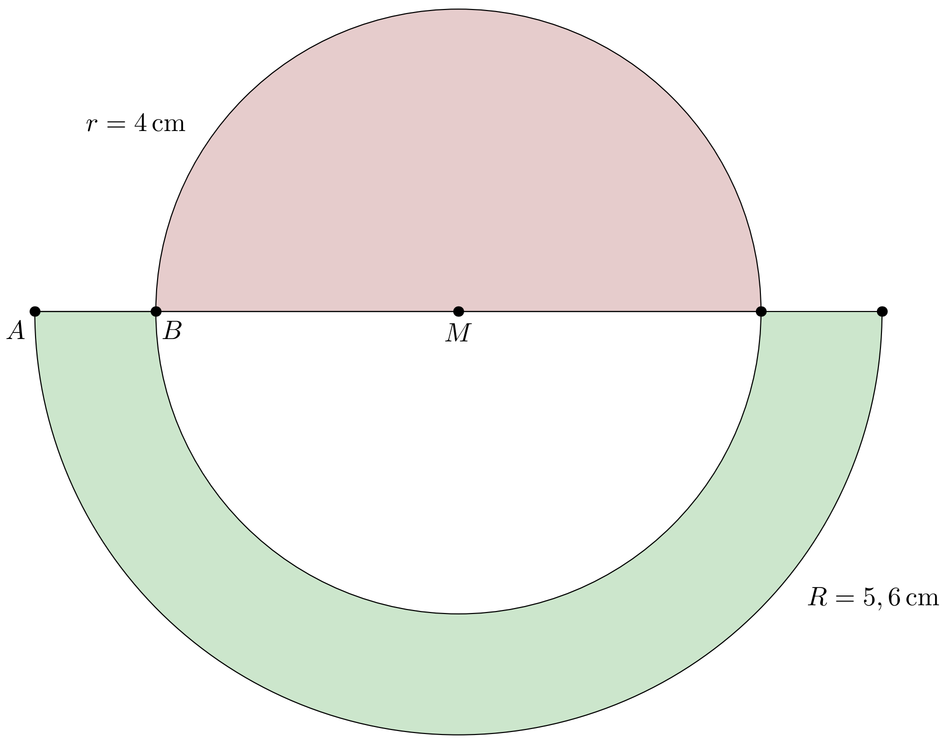
(a) Zeichne die Figur für $R = \overline{MA} = 5{,}6\,\text{cm}$ und $r = \overline{MB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Zeige, dass der untere Kreisring und der obere Halbkreis nicht denselben Flächeninhalt besitzen.

(c) Jetzt sei $r = \sqrt{18}\,\text{cm}$.
Berechne R so, dass der Inhalt der beiden getönten Flächen gleich ist.

(d) Welcher Zusammenhang muss zwischen R und r bestehen, damit die getönten Flächen gleichen Inhalt besitzen?

Lösung: (a)



(b) **Anmerkung: Zu allen Flächenmaßzahlen gehört die Einheit „cm^2“.** Es gilt: $A_{\text{Halbkreis(klein)}} = \frac{1}{2} \cdot 4^2\pi$ und $A_{\text{Kreisring}} = \frac{1}{2} \cdot 5,6^2\pi - A_{\text{Halbkreis(klein)}}$.

Es muss also gelten: $A_{\text{Halbkreis(groß)}} = 2 \cdot A_{\text{Halbkreis(klein)}}$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 5,6^2\pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2\pi \quad \Big| : \pi \quad \Leftrightarrow \quad 15,68 \neq 16\,.$$

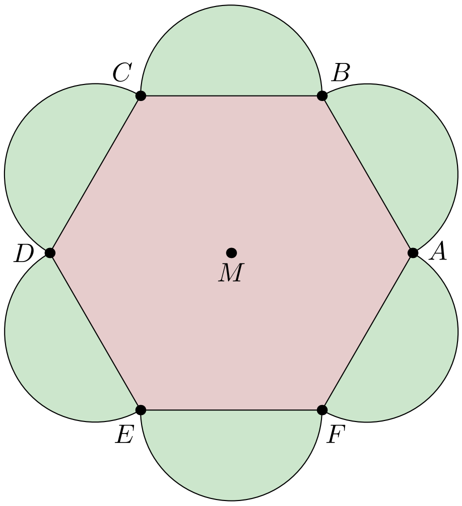
(c) $\frac{1}{2} \cdot R^2\,\pi = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{18}^{\,2}\pi\,\text{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 = 36\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad R = 6\,\text{cm}\,.$

(d) Es muss gelten: $\frac{1}{2} \cdot R^2\,\pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^{\,2}\pi \quad \Rightarrow \quad R = r\sqrt{2}\,.$

Du könntest das auch mit Hilfe der Eigenschaften der zentrischen Streckung begründen:

- Alle Kreise sind zueinander ähnlich.
- Wenn du eine Kreisfläche verdoppelst, dann gilt für den Streckungsfaktor k: $k^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{2}\,.$

29.

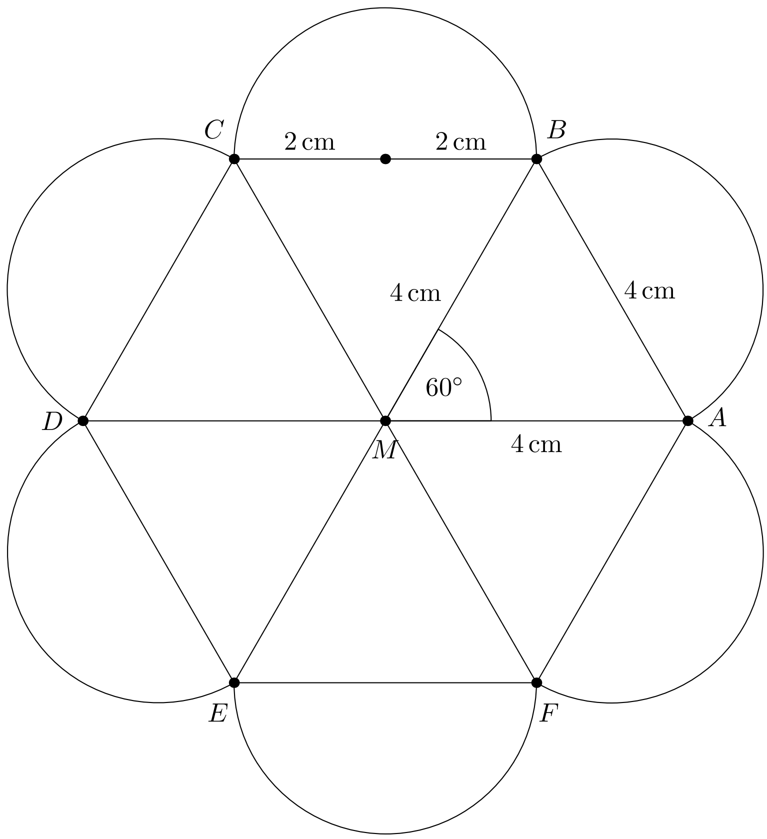


Das Sechseck $ABCDEF$ mit dem Mittelpunkt M ist regelmäßig.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AD} = 8\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A der Figur. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)

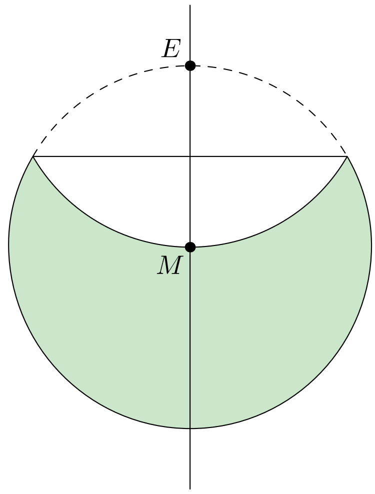


(b) Die drei Diagonalen zerlegen jedes regelmäßige Sechseck in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke. In unserem Fall hat jedes dieser gleichseitigen Dreiecke eine Seitenlänge

von 4 cm.
Die sechs kongruenten Halbkreise lassen sich paarweise zu drei Vollkreisen mit dem Radius $r = 2\,\text{cm}$ zusammenfügen.

Also: $A = \left(6 \cdot \frac{4^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2^2 \cdot \pi\right)\,\text{cm}^2 \approx 79{,}27\,\text{cm}^2$.

30.

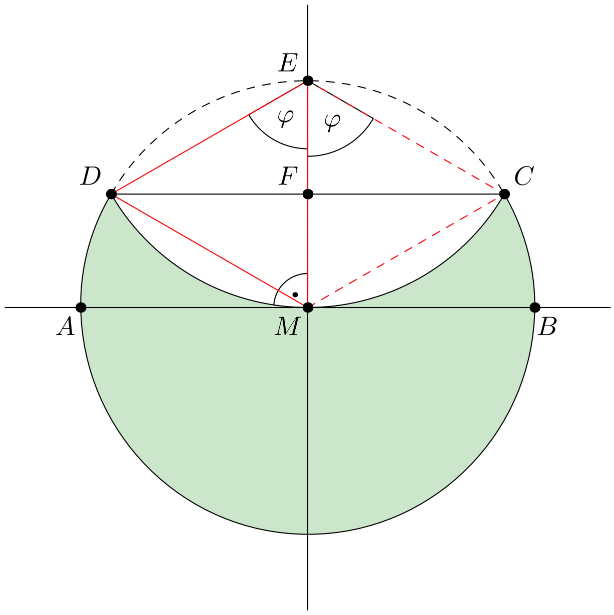


Erwin hat einen Kreis aus Papier ausgeschnitten. Er faltet nun die Kreisscheibe so, dass der Punkt E auf den Kreismittelpunkt M zu liegen kommt.

(a) Zeichne die Figur mit einem Kreisdurchmesser von 6 cm.

(b) Berechne den Anteil der eingefärbten Fläche an der gesamten Kreisfläche in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Von der Kreisscheibe hat Erwin das Kreissegment $CDMC$ heruntergeklappt.
Den Flächeninhalt dieses Kreissegmentes erhältst du, indem du vom Flächeninhalt des Kreissektors $EDMCE$ den Flächeninhalt des Dreiecks DCE subtrahierst.
Im Dreieck DME gilt: $\overline{ME} = \overline{MD} = \overline{DE} = 3\,\text{cm}$.
Also ist das Dreieck DME gleichseitig, und es gilt: $\varphi = 60°$.
Das Dreieck DCE hat den gkeichen Flächeninhalt wie dieses Dreieck DME.

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{120°}{360°} \cdot 3^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 9,42\,\text{cm}^2\,.$$

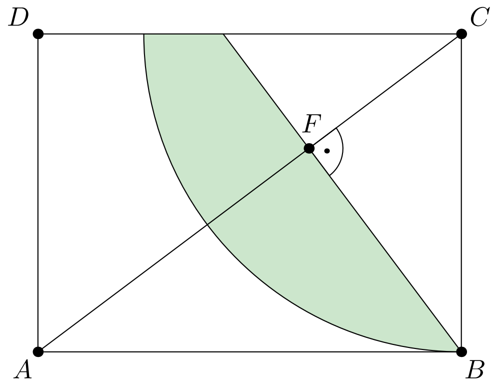
$$A_{\Delta\,DCE} = \frac{3^2}{4}\,\text{cm}^2 \cdot \sqrt{3} \approx 3,90\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{\text{Segment}} \approx 9,42\,\text{cm}^2 - 3,90\,\text{cm}^2 = 5,52\,\text{cm}^2\,.$$

Diese Segmentfläche musst du zwei Mal von der Fläche der Kreisscheibe subtrahieren:
$A_{\text{gefärbt}} \approx 3^2\pi\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 5,52\,\text{cm}^2 \approx 17,23\,\text{cm}^2$.

$$\frac{A_{\text{gefärbt}}}{A_{\bigcirc}} = \frac{17,23\,\text{cm}^2}{28,27\,\text{cm}^2} \approx 0,6945 = 69,54\%\,.$$

31.

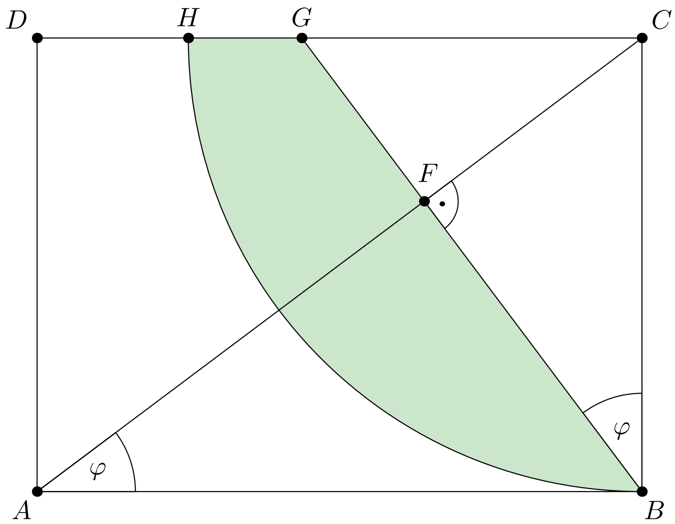


Der Punkt C des Rechtecks $ABCD$ ist der Mittelpunkt des Kreisbogens.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt A der eingefärbten Fläche. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Strategie: Subtrahiere den Flächeninhalt des Dreiecks BCG vom Flächeninhalt des Viertelkreises mit dem Mittelpunkt C und dem Radius $r = 6\,\text{cm}$.

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{4} \cdot 6^2\pi\,\text{cm}^2 = 9\pi\,\text{cm}^2\,.$$

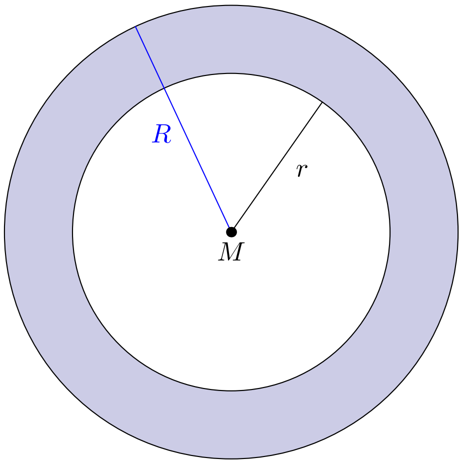
Weil sie z.B. im Winkelmaß φ übereinstimmen, sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABC und BCG zueinander ähnlich:

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{CG} = \frac{36\,\text{cm}^2}{8\,\text{cm}} = 4,5\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\,BCG} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 4,5\,\text{cm} = 13,5\,\text{cm}^2\,.$$

$$\Rightarrow \quad A = (9\pi - 13,5)\,\text{cm}^2 \approx 14,77\,\text{cm}^2\,.$$

32.



(a) Zeichne die Figur für $R = 5\,\text{cm}$ und $r = 3,5\,\text{cm}$.

(b) Berechne für $R = 5\,\text{cm}$ den Kreisradius r so, dass der Kreisring 19% der großen Kreisfläche einnimmt.

(c) Berechne für $r = 3,5\,\text{cm}$ den Kreisradius R so, dass der Flächeninhalt des Kreisringes genauso groß wird wie der des kleinen Kreises.

Lösung: (a) Klar.

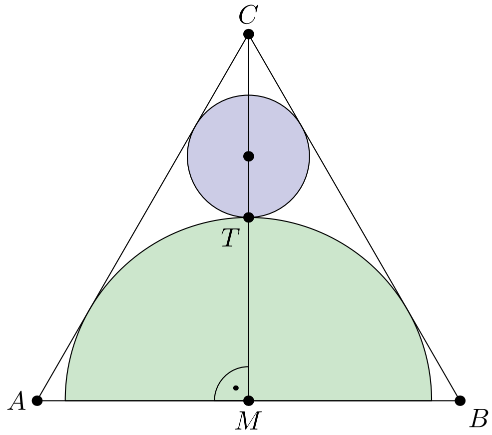
(b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned} 5^2\pi - r^2\pi &= 0,19 \cdot 5^2\pi \\ r^2\pi &= 0,81 \cdot 5^2\pi \\ r &= 0,9 \cdot 5\,\text{cm} = 4,5\,\text{cm} \end{aligned}$$

(c) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned} 3,5^2\pi &= (R^2 - 3,5^2)\pi \\ R^2\pi &= 2 \cdot 3,5^2\pi \\ R &= 3,5 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \approx 4,95\,\text{cm} \end{aligned}$$

33.

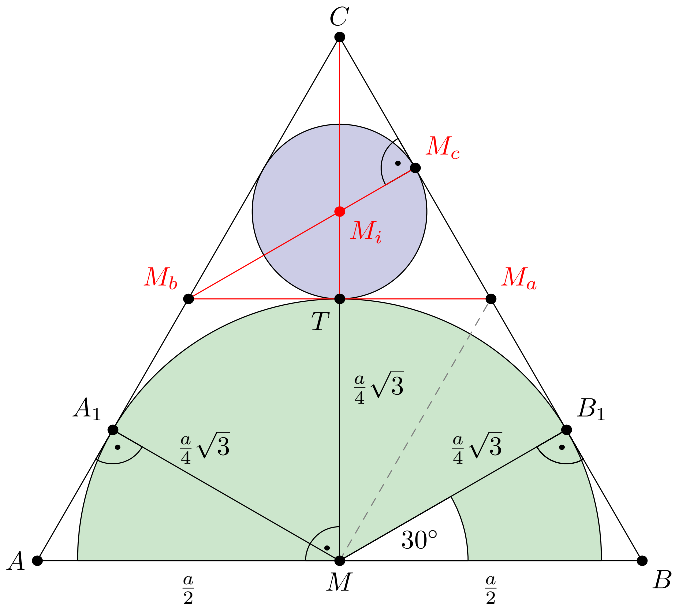


Im gleichseitigen Dreieck ABC ist M der Basismittelpunkt.
Diesem gleichseitigen Dreieck sind ein Halbkreis und ein kleinerer Kreis einbeschrieben worden. Die beiden Kreislinien berühren sich im Punkt T.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$.

(b) Berechne das Verhältnis des Flächeninhaltes des kleinen Kreises zu dem des Halbkreises.

Lösung: (a)



Wir bezeichenen die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ABC mit a.

(b) Die Dreiecke AMA_1 und MBB_1 sind halbe gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}$. Aus Symmetriegründen sind diese beiden Dreiecke zudem kongruent.
Das Dreieck MBB_1 ist (ebenso wie das Dreieck AMA_1) ein halbes gleichseitiges Dreieck mit der Dreieckshöhe $\overline{MB_1} (= \overline{MA_1}) = \frac{a}{4}\sqrt{3}$.
Weil der Punkt T auf der Halbkreislinie liegt, gilt ebenso $\overline{MT} = \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MC}$.

M_a und M_b sind also zwei Seitenmittelpunkte des gleichseitigen Dreiecks ABC.
Dann gilt $[M_aM_b] \,\|\, |[AB]$.
Demnach beträgt der Inkreisradius ρ_i des Dreiecks M_bM_aC ein Viertel von dem des Dreiecks ABC.
Für den Inkreisradius ρ_g des gleichseitigen Dreiecks gilt: $\rho_g = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
$\Rightarrow \quad \rho_i = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{24}\sqrt{3}$.
Für den Flächeninhalt A_k des kleinen Kreises gilt dann:

$$A_k = \left(\frac{a}{24}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi = \frac{a^2}{96} \cdot \pi\,.$$

Für den Flächeninhalt A_{HK} des Halbkreises gilt dann:

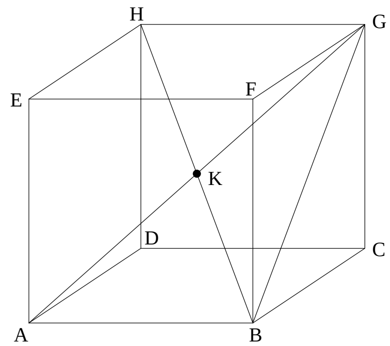
$$A_{HK} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{4}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi = \frac{3a^2}{32} \cdot \pi\,.$$

Für das fragliche Flächenverhältnis ergibt sich dann:

$$\frac{A_k}{A_{HK}} = \left[\frac{a^2}{96} \cdot \pi\right] : \left[\frac{a^2}{32} \cdot \pi\right] = \frac{32}{96} = \frac{1}{3}\,.$$

9. Raumgeometrie

1. Die folgende Skizze stellt das Schrägbild eines Würfels mit einer Kantenlänge von 6 cm dar.



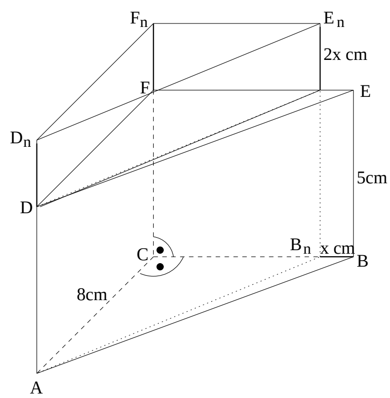
   (a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABK. Runde das Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

   (b) Vergleiche den Flächeninhalt des Dreiecks ABK mit dem des Dreiecks BGK. Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) $A = 12,73\,\text{cm}^2$

(b) - -

2. Das rechtwinklige Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$, $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$, $\overline{CB} = 6\,\text{cm}$ ist Grundfläche eines geraden Prismas mit der Höhe 5 cm. Verkürzt man die Seite $[BC]$ um x cm und verlängert man die Höhe des Prismas um $2x$ cm, so ergeben sich neue Prismen mit der Grundfläche AB_nC. (Siehe Schrägbild)



(a) Berechne das Volumen der Prismen $AB_nCD_nE_nF_n$ in Abhängigkeit von x. [Ergebnis: $V(x) = (-8x^2 + 28x + 120)\,\mathrm{cm}^3$]

(b) Berechne das maximal mögliche Volumen und gib den zugehörigen $x-$Wert an.

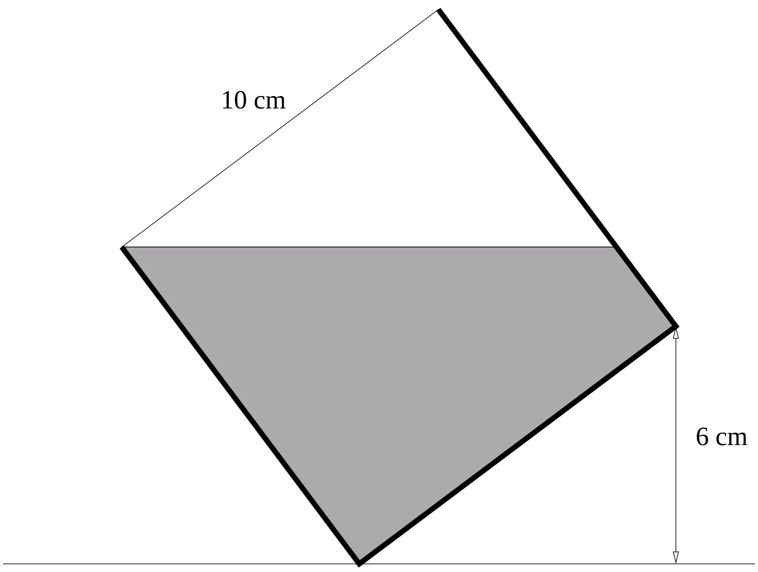
(c) Berechne die $x-$Werte, bei denen Prismen das Volumen $V = 130\,\mathrm{cm}^3$ besitzen.

Lösung: (a) $V(x) = (-8x^2 + 28x + 120)\mathrm{cm}^3$

(b) $V_{max} = 144,5\,\mathrm{cm}^3$ für $x = 1,75$

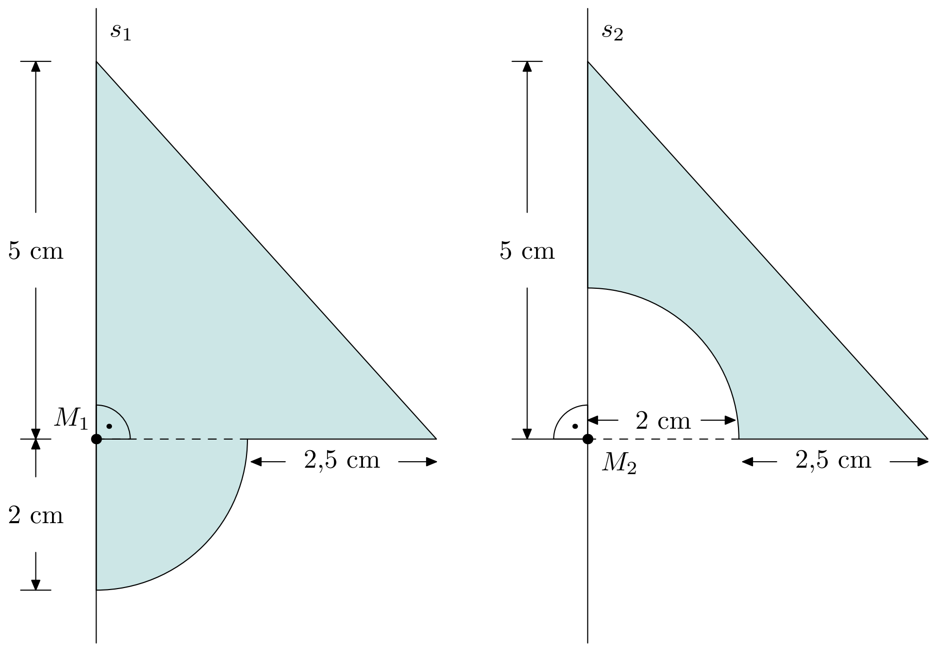
(c) $x_1 = 3,10 \quad x_2 = 0,40$

3. Gegeben ist eine würfelförmige Wanne mit der Seitenlänge 10 cm die bis zum Rand mit Wasser gefüllt ist. Kippt man sie längs einer Kante, sodass die gegenüberliegende Grundkante auf 6 cm angehoben wird, so läuft Wasser aus.
Wie viel ml laufen aus? Die Dicke der Wanne ist zu vernachlässigen.



Lösung: $V = 375\,\mathrm{ml}$

4. In der Figur 1 und in der Figur 2 sind die Punkte M_1 und M_2 die Mittelpunkte der zugehörigen Kreisbögen.
Jede der beiden grau getönten Flächen rotiert um die betreffende Achse s_1 bzw. s_2.

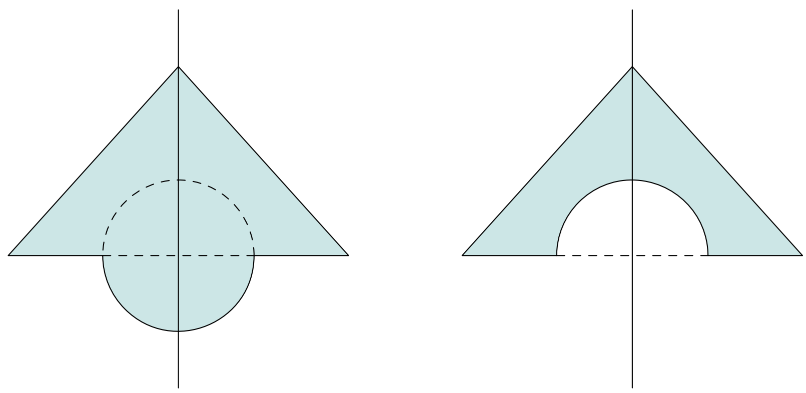


Figur 1 Figur 2

(a) Berechne den Unterschied der Rauminhalte der beiden Rotationskörper.

(b) Maria behauptet: „Die Oberflächen der beiden Rotationskörper sind gleich groß.“ Hat Maria Recht? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) Am besten zeichnest du dir erst einmal die Axialschnitte der beiden Rotationskörper hin:



Zur Figur 1 Zur Figur 2

(b) Der zur Figur 1 gehörende Rotationskörper R_1 besteht aus einem Kegel, an dessen Grundfläche eine Halbkugel hängt. Aus dem Kegel des Rotationskörpers R_2 ist eine Halbkugel mit dem gleichen Radius herausgebohrt worden. Beide Kegel von R_1 und R_2 sind kongruent.
Also unterscheiden sich die entsprechenden Rauminhalte V_1 und V_2 der beiden Rotationskörper lediglich um das Volumen einer Kugel mit Radius 2 cm:

$$V_1 - V_2 = \Delta V = \frac{4}{3} \cdot 2^3 \cdot \pi \,\mathrm{cm}^3 = \frac{32}{3} \cdot \pi \,\mathrm{cm}^3 \approx 33{,}51 \,\mathrm{cm}^3.$$

(c) Die Oberflächen O_1 und O_2 der Rotationskörper R_1 und R_2 bestehen aus paarweise kongruenten Teilflächen:

- Zwei Kreisringe mit dem Durchmesser 9cm, die jeweils 2,5cm breit sind
- Zwei Kegelmäntel
- Zwei Halbkugeln mit dem Durchmesser 4 cm

Folglich hat Maria Recht: $O_1 = O_2$.
Anmerkung: Natürlich kannst du die Oberflächen auch jeweils berechnen, aber dadurch verzögerst du nur die Entscheidung, ob Maria Recht hat.

5. Die Mantelfläche einer geraden quadratischen Pyramide $ABCDS$ mit der Spitze S besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge a cm. Der Mittelpunkt der Grundfläche ist M.

   (a) Skizziere eine solche Pyramide.
   Zeige: Für die Pyramidenhöhe h gilt in Abhängigkeit von a: $h = \frac{a}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

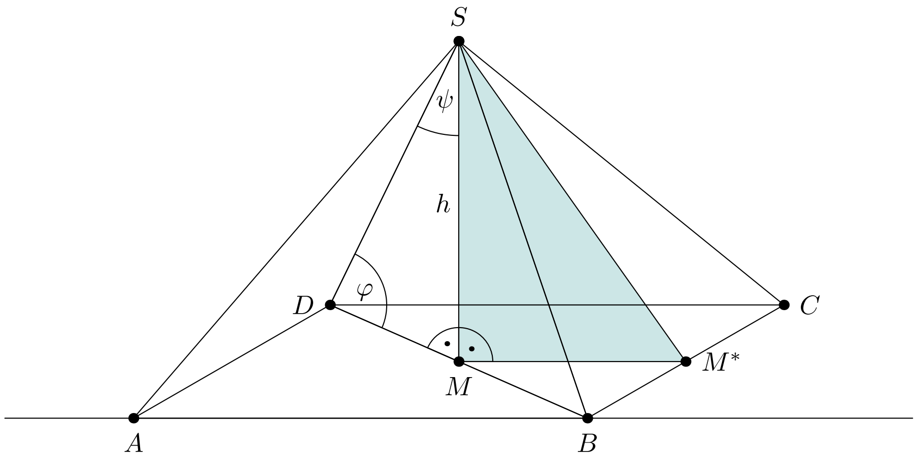
   (b) Zeichne für $q = 0{,}5$ und $\omega = 30°$ ein Schrägbild der Pyramide mit $a = 6$. Dabei soll $[AB]$ auf der Schrägbildachse liegen.

   (c) Untersuche das Dreieck DBS auf seine Besonderheiten.

   (d)
   - Verbinde die Mittelpunkte der vier Seitenkanten sowohl untereinander zu dem Viereck $EFGH$ als auch mit dem Mittelpunkt M. Dadurch entsteht eine einbeschriebene Pyramide $EFGHS$.
   - Berechne das Verhältnis der Oberflächen der beiden Pyramiden $EFGHS$ und $ABCDS$.
   - Berechne das Verhältnis der Rauminhalte der beiden Pyramiden $EFGHS$ und $ABCDS$.

Lösung: (a) $h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ wird in (b) gezeigt.

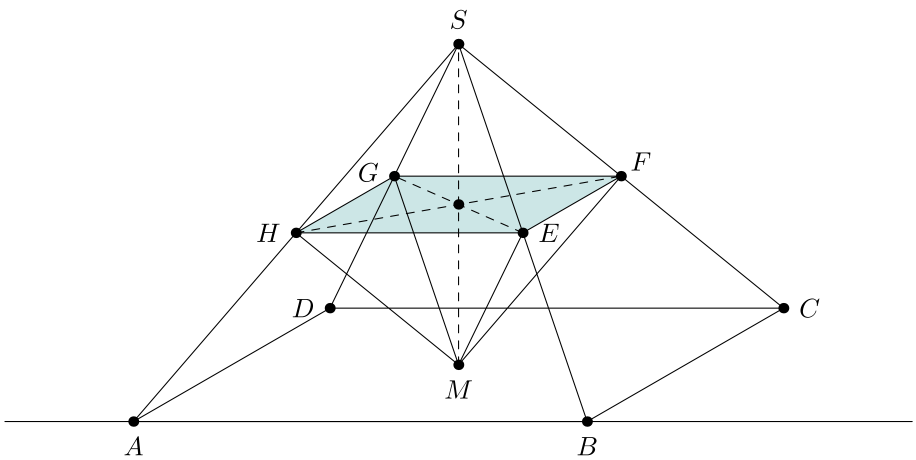
(b)



Im rechtwinkligen Dreieck MM^*S gilt:
$\overline{MS}^2 = \overline{M^*S}^2 - \overline{M^*M}^2$, also $h^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2$
$\Rightarrow \quad h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

(c) Der Mittelpunkt M halbiert die Quadratdiagonale $[BD]$. Also gilt: $\overline{MD} = \frac{a}{2}\sqrt{2} = h$. dann muss das Dreieck DMS gleichschenklig-rechtwinklig mit $\varphi = \psi = 45^\circ$ sein. Weil die beiden Dreiecke DMS und MBS kongruent sind, ist auch das Dreieck DBS gleichschenklig-rechtwinklig.

(d) •



- Du siehst z.B., dass die Seitenkante $[EH]$ der kleinen Pyramide halb so lang wie die Seitenkante $[BA]$ der großen Pyramide ist. Alle anderen Seitenkanten der kleinen Pyramide und deren Höhe sind ebenfalls halb so lang wie die entsprechenden Seitenkanten der großen Pyramide bzw. deren Höhe.
  Wenn aber die entsprechenden Seitenkanten im Verhältnis $1 : 2$ stehen, dann müssen die Seitenflächen der kleinen und der großen Pyramide jeweils im Verhältnis $(1 : 2)^2$ stehen. Damit stehen die Oberflächen der beiden Pyramiden im Verhältnis $1 : 4$.
- Wenn die entsprechenden Seitenkanten im Verhältnis $1 : 2$ stehen, dann müssen die Rauminhalte der beiden Pyramide im $(1 : 2)^3$ stehen. Damit stehen die Raum-

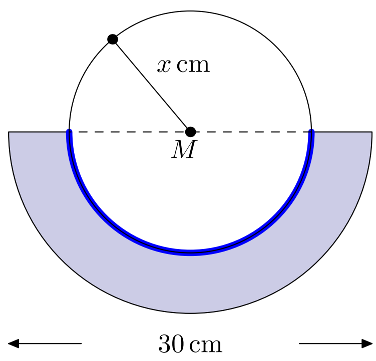
inhalte der beiden Pyramiden im Verhältnis 1 : 8.

Hinweis: Du hättest auch das Volumen und die Oberfläche der beiden Pyramiden in Abhängigkeit von a einzeln berechnen können. Doch für die kleine Pyramide $EFGHM$ hättest du mehrfach Ählichkeitssätze anwenden müssen, die aber für ähnliche Körper, wie es diese beiden Pyramiden nun einmal sind, allgemein gelten: $O' = k^2 \cdot O$ und $V' = k^3 \cdot V$ (hier mit $k = 0{,}5$).
Das jeweilige Ergebnis wäre das gleiche.

6. Frau Lunde will für ihre Familie 0,5 kg Spaghetti in einem Topf mit 20 cm Durchmesser kochen. In der Anleitung steht: „Für 100 g Spaghetti rechnet man einen Liter Wasser."
   Wie hoch muss das Wasser nach dieser Anleitung im Topf anfangs stehen, wenn 15% der eingefüllten Wassermenge während des Kochvorgangs verdampfen?

Lösung: 0,5 kg = 500 g. Wenn für 100 g Spaghetti ein Liter Wasser benötigt wird, müssen also zunächst 5 Liter = $5000\,\text{cm}^3$ Wasser in den Topf.
Zusätzlich muss noch diejenige Wassermenge berücksichtigt werden, die während des Kochvorgangs verdampft.
Insgesamt müssen sich dann $5000\,\text{cm}^3 \cdot 1{,}15 = 5750\,\text{cm}^3$ Wasser im Topf sein.
Die Wassermenge im Topf hat eine zylindrische Form mit einem Radius von 10 cm und der Einfüllhöhe h: $5750\,\text{cm}^3 = (10\,\text{cm})^2 \cdot \pi \cdot h \quad \Rightarrow \quad h \approx 18{,}3\,\text{cm}$
Das Wasser im Topf muss knapp 20 cm hoch stehen.

7.



Die Darstellung zeigt den Axialschnitt eines Zimmerbrunnens: Eine Kugel aus Marmor mit dem Radius $r = x$ cm ist in eine unbewegliche Halbkugelschale mit einem äußeren Durchmesser von 30 cm aus dem gleichen Material eingepasst. Ein dünner Wasserfilm in der Berührfläche der beiden Körper bewirkt, dass die Kugel fast reibungsfrei rotieren kann.

(a) Zeichne die Figur für $x = 7{,}5$ im Maßstab 1 : 5.

(b) Berechne für $x = 7{,}5$ die Oberfläche der Halbkugelschale in der Einheit dm^2.

(c) • Zeige: Für die Oberfläche O der Kugelschale gilt in Abhängigkeit von x:

$$O(x) = (x^2 + 475) \cdot \pi \,\mathrm{cm}^2$$

• Bestätige damit dein Ergebnis der Aufgabe (b).

(d) Berechne x so, dass die Oberfläche der Halbkugelschale fünfmal so groß wie die der Vollkugel ist.

(e) Berechne für $x = 7,5$ das Volumen der Halbkugelschale in der Einheit dm^3.

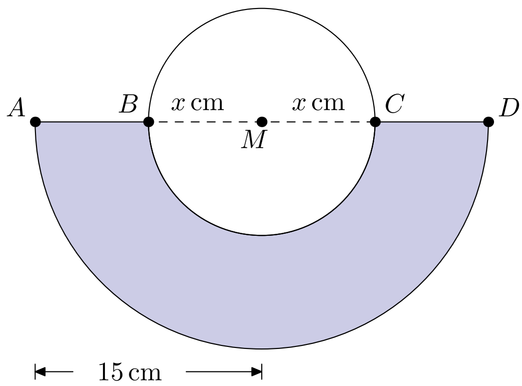
(f) • Zeige: Für das Volumen V der Kugelschale gilt in Abhängigkeit von x:

$$V(x) = (2250 - \frac{2}{3}x^3) \cdot \pi \,\mathrm{cm}^3$$

• Bestätige damit dein Ergebnis der Aufgabe (e).

(g) Berechne x so, dass die Halbkugelschale genau so schwer wie die Vollkugel ist.

Lösung: (a)



Für die Zeichnung gilt: Kugelradius $r = (7,5 : 5)\,\mathrm{cm} = 1,5\,\mathrm{cm}$ und äußerer Radius der Halbkugelschale $R = (15 : 5)\,\mathrm{cm} = 3\,\mathrm{cm}$.
Beginne am besten mit dem Vollkreis.

(b) Äußere Halbkugel: $O_a = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15^{\,2}\pi \,\mathrm{cm}^2 = 250\pi \,\mathrm{cm}^2$

Innere Halbkugel: $O_i = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7,5^{\,2}\pi \,\mathrm{cm}^2 = 112,5\pi \,\mathrm{cm}^2$

Kreisring aus $[AB]$ bzw. $[CD]$: $A_{KR} = (15^2\pi - 7,5^2\pi)\,\mathrm{cm}^2 = 168,25\,\mathrm{cm}^2$

Somit ergibt sich für die Oberfläche der Halbkugelschale in diesem Fall:
$O_{HKS} = 531,25\pi \,\mathrm{cm}^2 \approx 1668,97\,\mathrm{cm}^2 \approx 1669\,\mathrm{cm}^2 \approx 16,7\,\mathrm{dm}^2$.

(c) • Äußere Halbkugel: $O_a = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15^{\,2}\pi \,\mathrm{cm}^2 = 250\pi \,\mathrm{cm}^2$

Innere Halbkugel: $O_i = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x^{\,2}\pi \,\mathrm{cm}^2 = 2x^2\pi \,\mathrm{cm}^2$

Kreisring aus $[AB]$ bzw. $[CD]$: $A_{KR} = (15^2\pi - x^2\pi)\,\mathrm{cm}^2 =$
$= (225\pi - x^2\pi)\,\mathrm{cm}^2$

Somit ergibt sich: $O(x) = (250 + 2x^2 + 225 - x^2)\pi\,\mathrm{cm}^2 = (x^2 + 475)\pi\,\mathrm{cm}^2$.

- $O(7,5) = (7,5^2 + 475)\pi\,\mathrm{cm}^2 = 531,25\pi\,\mathrm{cm}^2$, siehe Lösung (b).

(d) Die Maßzahlengleichung für $x \in \mathbb{R}^+$ heißt:
$5 \cdot 4x^2\pi = (x^2 + 475)\pi \quad \Leftrightarrow \quad 19x^2 = 475 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$

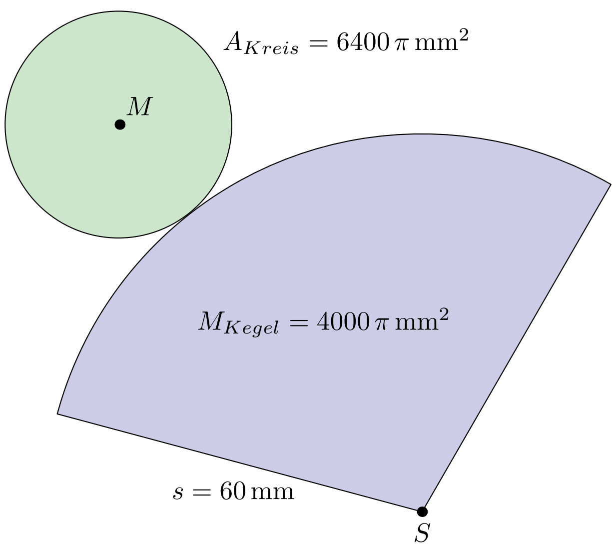
(e) $V = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 15^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 7.5^3\right)\,\mathrm{cm}^3 = 1968,75\pi\,\mathrm{cm}^3 \approx 6185\,\mathrm{cm}^3 \approx 6,2\,\mathrm{dm}^3$

(f)
- $V(x) = \frac{2}{3}\pi\left(15^3 - x^3\right)\,\mathrm{cm}^3 = \left(2250 - \frac{2}{3}x^3\right)\pi\,\mathrm{cm}^3$
- $V(7,5) = \left(2250 - \frac{2}{3} \cdot 7,5^3\right)\pi = 1968,75\pi\,\mathrm{cm}^3$, siehe Lösung (e).

(g) In der Angabe steht, dass die Halbkugelschale und die Vollkugel aus dem gleichen Material sind. Wenn das Volumen der beiden Körer identisch ist, dann müssen auch die zugehörigen Massen gleich sein. Daraus ergibt sich die zugehörige Maßzahlengleichung mit $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\left(2250 - \frac{2}{3}x^3\right)\pi = \frac{4}{3}x^3\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2250 = 2 \cdot x^3 \qquad \Rightarrow \quad x \approx 10,40$$

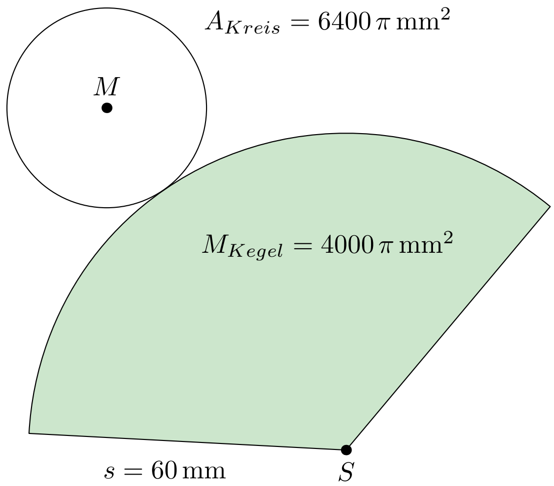
8.



Egon hat die Mantelfläche eines Kegels und dessen Grundfläche aus Papier ausgeschnitten. Zeige durch Rechnung, dass er die die beiden Teile nicht lückenlos und nicht bündig zu einem Kegel zusammenfügen kann.

Lösung: Aus $A_{Kreis} = 6400\,\pi\,\mathrm{mm}^2$ folgt $r = 80\,\mathrm{mm}$.
Wegen $M_{Kegel} = r \cdot \pi \cdot s$ folgt dann $M_{Kegel} = 80 \cdot \pi \cdot 60\,\mathrm{mm}^2 = 4800\,\pi\,\mathrm{mm}^2$ und nicht wie angegeben $4000\,\pi\,\mathrm{mm}^2$. Also passen Grundkreis und Mantelfläche des Kegels nicht zusammen.

9.



Erich hat die Mantelfläche eines Kegels und einen Kreis ausgeschnitten. Zeige rechnerisch, dass die Mantelfläche des Kegels und der Kreis als dessen Grundfläche nicht lückenlos und bündig zusammengefügt werden können.

Lösung: Für den Kreisradius r gilt: $r^2\pi = 6400 \cdot \pi\,\mathrm{mm}^2 \quad \Rightarrow \quad r = 80\,\mathrm{mm}$.
Nach der Formelgleichung für den Kegelmantel muss gelten:
$80\,\mathrm{mm} \cdot \pi \cdot 60\,\mathrm{mm} = 4000 \cdot \pi\,\mathrm{mm}^2$, was falsch ist.
Also passen die beiden Flächenstücke nicht zusammen.

10. Ein halbkugelförmiges Glasgefäß mit einer Wandstärke von 5 mm hat ein Fassungsvermögen von 10 l.
Berechne den Außendurchmesser des Gefäßes in mm.

Lösung: $10\,\mathrm{l} = 10\,\mathrm{dm}^3 = 10^4\,\mathrm{cm}^3 = 10^7\,\mathrm{mm}^3$.
Für den Innenradius r_i des Gefäßes gilt dann:

$$\frac{2}{3} r_i^3 = 10^7\,\mathrm{mm}^3 \quad \Rightarrow \quad r_i \approx 168{,}4\,\mathrm{mm}\,.$$

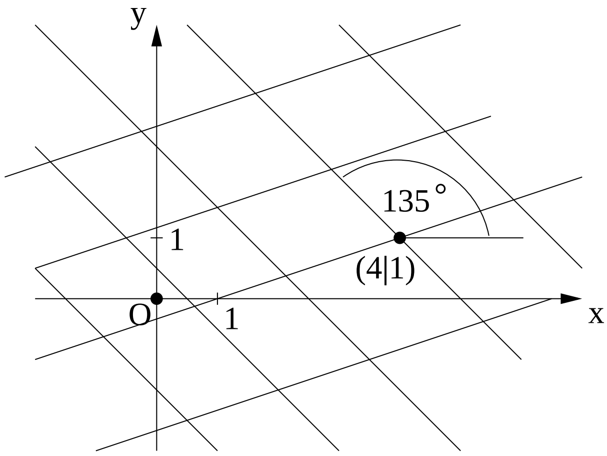
$$\Rightarrow \quad d_i \approx 337\,\mathrm{mm} \quad \Rightarrow \quad d_a \approx 347\,\mathrm{mm}\,.$$

Teil II.

Wahlpflichtfächergruppe II/III

10. Lineare Funktionen

1. Gib die Gleichungen der beiden Parallelenscharen an, mit deren Hilfe man das unten abgebildete Muster zeichnen kann:



Lösung: $g_1(t) : y = -x + t$ und $g_2(t) : y = \frac{1}{3}x + t$

2. Eva Fritz und Erwin sollen die Relation R_1 untersuchen:

$$R_1 = \{(2 \mid 4);\ (0,5 \mid 0,25);\ (0 \mid 0);\ (-1 \mid 1)\}$$

Eva meint: „Immer, wenn du den x-Wert verdoppelst, erhältst du den y-Wert.“
Fritz widerspricht:„Wenn du den y-Wert mit sich selbst multiplizierst, dann erhältst du den x-Wert.“
Erwin entgegnet: „Es ist genau umgekehrt: Wenn du den x-Wert ... “

(a) Vollende Erwins Satz sinnvoll.

(b) Wer hat recht? Begründe deine Antwort anhand von zwei Beispielen.

(c) Schreibe die richtige Gleichung mit x und y hin.

(d) Aus der Relation R_1 ist die Relation R_2 entstanden:

$$R_2 = \{(2 \mid 5);\ (0,5 \mid 1,25);\ (0 \mid 1);\ (-1 \mid 2)\}$$

- Beschreibe den Zusammenhang zwischen den beiden Relationen in Worten.
- Schreibe die richtige Gleichung mit x und y hin, die immer in R_2 gilt.

Lösung: (a) „... mit sich selbst multiplizierst, dann erhältst du den y-Wert".

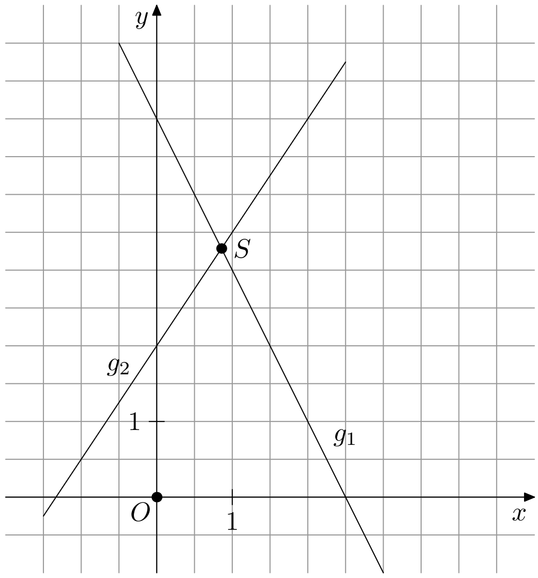
(b) Erwin hat recht. Z.B.: $2^2 = 4$ und $0,5^2 = 0,25$.

(c) Z.B.: $y = x^2$.

(d)
- In beiden Relationen tauchen die gleichen x-Werte auf. Wenn du jeweils den x-Wert mit sich selbst multiplizierst und dann 1 dazuzählst, erhältst du den y-Wert.
- Z.B.: $y = x^2 + 1$

3. Gegeben sind die beiden Geraden g_1 und g_2 durch die Gleichungen $g_1 : y + 2x - 5 = 0$ und $g_2 : y = 1,5x + 2$.
   (a) Zeichne diese beiden Geraden in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-2 \leqq x \leqq 5$ und $-1 \leqq y \leqq 6$
   (b) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Geraden. Runde das Ergebnis.
   (c) Gib die Gleichung einer Geraden h an, welche die Gerade g_2 nicht schneidet.
   (d) Überprüfe, ob der Punkt $A(111222333999,4 \mid -999888777666555,1)$ auf der Geraden g_2 liegt.

Lösung: (a) Bevor du die Gerade g_1 zeichnen kannst, musst du erst ihre Gleichung nach y auflösen: $y = -2x + 5$.



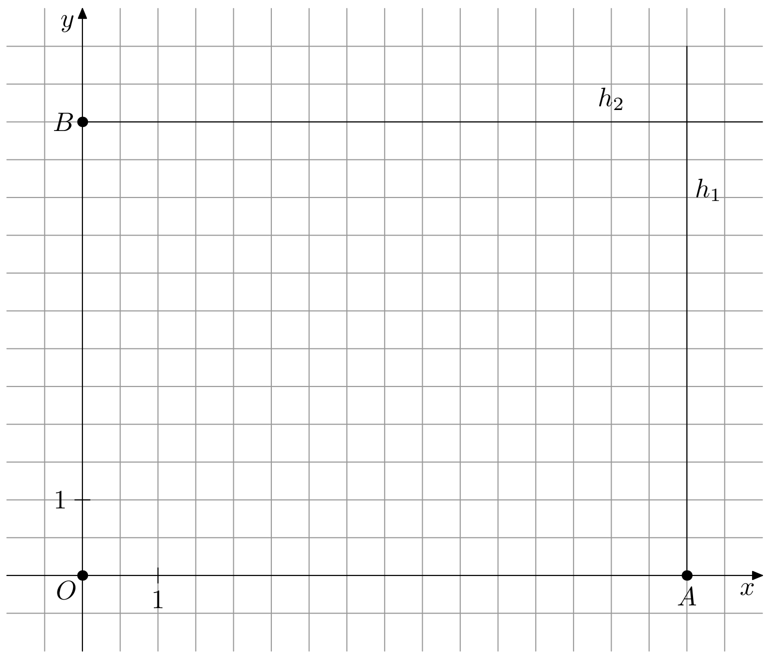
(b)

$$\begin{aligned} 1,5x + 2 &= -2x + 5 \\ 3,5x &= 3 \qquad x \approx -0,86 \quad \text{in } g_1\text{: } y \approx 1,5 \cdot 0,86 + 2 \\ & \qquad\qquad y \approx 3,29 \quad \Rightarrow \quad S(0,86 \mid 3,29) \end{aligned}$$

(c) In der Zeichenebene muss jede Gerade h, welche die Gerade g_2 nicht schneidet, zu dieser **parallel** verlaufen; d.h. die Gleichungen der Geraden g_2 und h müssen **den gleichen Steigungsfaktor** besitzen.
Dann lautet z.B. die Gleichung einer Geraden h: $y = 1,5x - 11\frac{13}{17}$.

(d) Grundsätzlich müsstest du die Koordinaten des Punktes A in die Gleichung der Geraden g_2 einsetzen und dann entscheiden, ob die Gleichung eine wahre oder falsche Aussage liefert. Das wäre aber mit erheblichem Rechenaufwand verbunden. „Leider“ helfen herkömmliche Taschenrechner im Moment (im Jahre 2008) auch nicht weiter, weil sie nicht so viele Stellen verarbeiten können. Also muss es noch einen anderen Lösungsweg geben:
Der Punkt A liegt im IV. Quadranten. Die Gerade g_2 verläuft aber offenbar nicht durch diesen Quadranten. Also liegt der Punkt A nicht auf der Geraden g_2.

4.



Die beiden Halbgeraden h_1 und h_2 mit den Anfangspunkten $A(8 \mid 0)$ bzw. $B(0 \mid 6)$ stehen auf der x- bzw. y-Achse senkrecht.
Auf der Halbgeraden h_1 wandern Punkte P_n und auf der Halbgeraden h_2 wandern Punkte Q_n. Dabei gilt: $\overline{AP_n} = \overline{BQ_n} = d\,\text{cm}$.

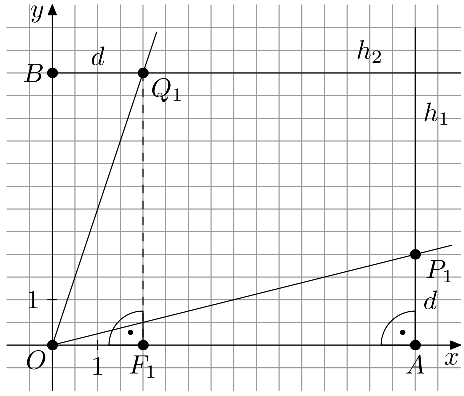
(a) Zeichne für $d = 2$ die beiden Ursprungshalbgeraden $[OP_1$ und $[OQ_1$ in obiges Koordinatensystem ein.

(b) Berechne d so, dass die zugehörigen Ursprungshalbgeraden $[OP_2$ und $[OQ_2$ aufeinander fallen.

[Ergebnis: $d = 4\sqrt{3}$]

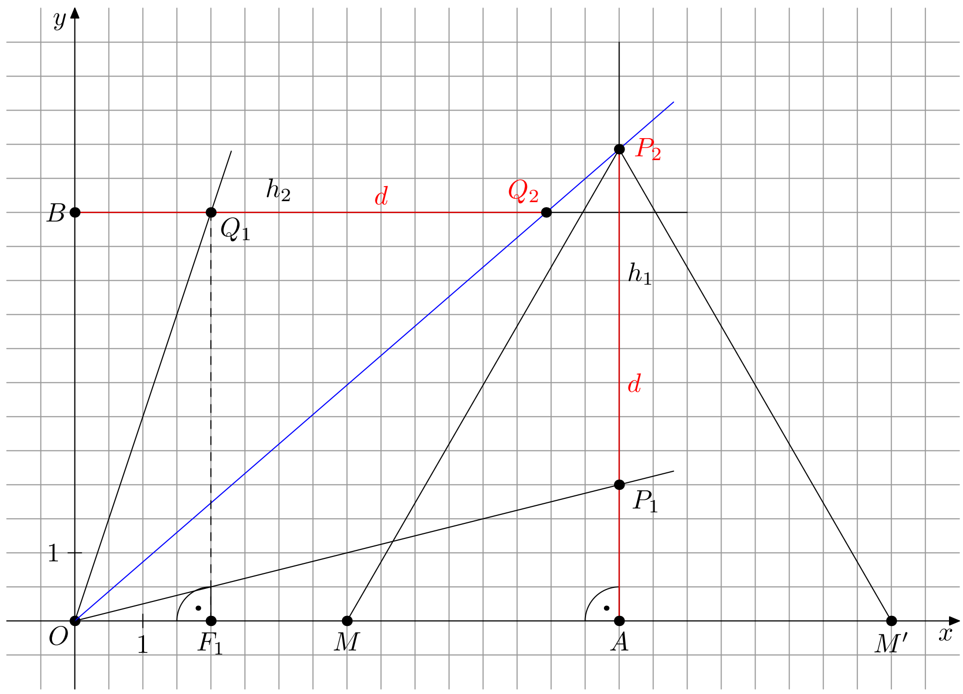
(c) Konstruiere die Punkte P_2 und Q_2 und zeichne die zugehörigen Ursprungshalbgeraden $[OP_2$ und $[OQ_2$ ein

Lösung: (a)



(b) Der Steigungsfaktor in den beiden Steigugsdreiecken OF_1Q und OAP_1 muss der gleiche sein:
$\dfrac{6}{d} = \dfrac{d}{8} \quad \Leftrightarrow \quad d^2 = 48 \quad \Rightarrow \quad d = 4\sqrt{3} \approx 6,93.$

(c) Die Maßzahl $d = 4\sqrt{3}\,]$ lässt sich als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $A = 8\,\text{cm}$ deuten:



Der Punkt M' ist durch Spiegelung des Mittelpunktes M der Strecke $[OA]$ am Punkt A entstanden. Über der Strecke MM' wird nun das gleichseitige Dreieck $MM'P_2$ errichtet, dessen Höhe $[AP_2]$ die gesuchte Länge von $\dfrac{8}{2}\sqrt{3}\,\text{cm}$ besitzt.

11. Gleichungssysteme

1. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{lrcl} & 2(x-7) & = & y-25 \\ \wedge & 3y-2(x-7) & = & 35 \end{array} \right.$$

   (a) Berechne die Lösungsmenge mit einem selbst gewählten Verfahren.

   (b) Begründe, weshalb du gerade dieses und kein anderes Verfahren gewählt hast.

Lösung: (a) $L = \{(-3 \mid 5)\}$

(b) - -

2. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{lrcl} & 3y+ax & = & 5a+3 \\ \wedge & 2x-y & = & 3-a \end{array} \right.$$

   (a) Berechne die Lösungsmenge in Abhängigkeit von a. Vereinfache dein Ergebnis so weit wie möglich.

   (b) Wenn du richtig gerechnet hast, dann stellt $a = -6$ einen Sonderfall dar. Begründe dies und berechne die Lösungsmenge für diese Belegung von a.

Lösung: (a) $L = \{(\frac{1}{3}a + 2 \mid \frac{5}{3}a + 1)\}$

(b) Die beiden Gleichungen liefern identische Geraden, also folgt:
$L = \{(x \mid y) \mid y = 2x - 9\}$

3. Löse das Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren auf zwei verschiedene Arten:

$$\left| \begin{array}{lrcl} & 3,5x-4y & = & -22 \\ \wedge & 2x+3y & = & -2 \end{array} \right.$$

Lösung: $L = \{(-4 \mid 2)\}$

4. Löse das Gleichungssystem mit dem Determinantenverfahren:

$$\left|\begin{array}{lll} & 1,2x+0,4y-7 & = & 0 \\ \wedge & 6,4x-1,6y & = & 28 \end{array}\right.$$

Lösung: $L = \{(5 \mid 2,5)\}$

5. Gegeben sind die beiden Geraden
$g : y = -0,25x + 3$ und
$h : y = x - 1,5$.

   (a) Zeichne die beiden Geraden in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $0 \leqq x \leqq 7$ und $-3 \leqq y \leqq 9$

   (b) Berechne exakt die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Geraden.

   (c) Zeichne eine Gerade g^* ein, die durch den Punkt $Q(2 \mid 6)$ verläuft und gib ihre Gleichung an.

   (d) Begründe: Jede weitere Gerade, welche die Gerade h nicht schneidet, muss die Gerade g irgendwo schneiden.

Lösung: (a) - -

(b) $S(3,6 \mid 2,1)$

(c) Es gibt keine eindeutige Lösung; eine mehr oder weniger geschickte Wahl aus dem Geradenbüschel bleibt den Schülern überlassen.

(d) Jede Gerade, welche die Gerade h nicht schneidet, muss zu dieser parallel sein. Weil g aber nicht parallel zu h liegt, muss g auch alle Parallelen zu h schneiden.

6. Gegeben sind eine Gerade g durch die Punkte $P(3 \mid 2,5)$ und $Q(-4,5 \mid 0)$ und eine Gerade $h : y = -x - 0,5$.

   (a) Zeichne die beiden Geraden g und h in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-6 \leqq x \leqq 4$ und $-3 \leqq y \leqq 4$

   (b) Berechne die Gleichung der Geraden g.

   (c) Die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt S.
   Zeichne diesen Punkt ein, lies seine Koordinaten ab und weise rechnerisch nach, dass dieser Punkt tatsächlich auf den beiden Geraden g und h liegt.

   (d) Schreibe die Gleichung der Geraden h^* hin, welche die Gerade h nicht schneidet und die nicht durch den dritten Quadranten verläuft.

   (e) Begründe jemandem, der die Zeichnung nicht kennt, dass die Gerade h die Gerade g schneiden muss.

Lösung: (a) - -

(b) $g: y = \frac{1}{3}x + 1,5$

(c) $S(-1,5 \mid 1)$

(d) Es gibt keine eindeutige Lösung.

(e) Jede Gerade, welche die Gerade h nicht schneidet, muss zu dieser parallel sein. Weil g aber nicht parallel zu h liegt, muss g auch alle Parallelen zu h schneiden.

7. Gegeben sind die beiden Geraden $g_1: y = -0,25x + 3$ und $g_2: y = x - 1,5$. Eine weitere Gerade g_3 verläuft durch die Punkte $P(2 \mid 4)$ und $Q(0 \mid -4,5)$.

   (a) Zeichne die drei Geraden in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-7 \leqq x \leqq 7$ und $-6 \leqq y \leqq 7$

   (b) Berechne die Gleichung der Geraden g_3.

   (c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g_1 mit der Geraden g_2 .

   (d) Durch den Punkt $A(-300 \mid 200)$ verläuft die Gerade g_4, die zur Geraden g_2 parallel ist.
   Berechne die Gleichung dieser Geraden g_4.

   (e) Die Gerade g_1 schneidet die y-Achse im Punkt R. Die Gerade g_2 schneidet die y-Achse im Punkt Q.
   Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks QRS möglichst genau.

Lösung: (a) - -

(b) $g_3: y = 4,25x - 4,5$

(c) $S(3,6 \mid 2,1)$

(d) $g_4: y = x + 500$

(e) $A = 8,1\,\text{FE}$

8. Addierst du zu einer ganzen Zahl das Doppelte einer zweiten Zahl, so erhälst du 142. Als Ergebnis erhälst du aber 5, wenn du das 5-fache der ersten Zahl von der zweiten Zahl subtrahierst.
   Wie heißen die beiden Zahlen?

Lösung: Die Zahlen heißen 12 und 65.

9. Klaus verkauft auf dem Flohmarkt seine alten Comic-Hefte für 0,50 € pro Stück.

   (a) Stelle den Zusammenhang zwischen der Anzahl der verkauften Hefte x und den Einnahmen y graphisch dar.

(b) Als Standgebühr muss Klaus 2,50 € bezahlen. Zeichne dazu den entsprechenden Graphen in dasselbe Koordinatensystem ein.

Lösung: - -

10. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcrl} & x+y & = & 1 & (1) \\ \wedge & x+y & = & -37 & (2) \\ \hline \end{array}$$

Begründe auf verschiedene Weise: Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems ist leer.

Lösung:

- Die Gleichung (1) besagt, dass die Summe aus zwei Zahlen x und y den Wert 1 ergeben soll.
  Gleichzeitig soll nach der Gleichung (2) die Summe aus denselben Zahlen x und y den Wert -37 ergeben. Das ist ein Widerspruch. Also gilt $L = \emptyset$.
- Wenn du die Gleichung (2) spaltenweise von der Gleichung (1) subtrahierst, ergibt sich in ausführlicher Schreibweise die Gleichung
  $$0 \cdot x + 0 \cdot y = 38$$
  Weil die linke Seite der Gleichung stets Null ergibt, steht hier eine stets falsche Aussage; d.h. $L = \emptyset$.

11.

$$\begin{array}{rrcrcrl} & 3x & - & 7y & = & -27 & (1) \\ \wedge & -5x & + & 9y & = & 37 & (2) \\ \hline \end{array}$$

Else und Erwin sollen das obige Gleichungssystem lösen. Erwin entscheidet: „Wir nehmen das Gleichsetzungsverfahren.“ Else widerspricht: „Da müssten wir ja die beiden Gleichungen ..., und das wird schwierig, weil wir am Ende ... “

(a) Was hat Else gemeint?

(b) Löse das Gleichungssystem mit einem anderen Verfahren, das dir geeignet erscheint.

Lösung: (a) „Da müssten wir ja die beiden Gleichungen nach x oder nach y auflösen, und das wird schwierig, weil wir am Ende eine Gleichung durch 7 oder durch 9 teilen müssten. Dann entstehen aber Brüche oder periodische Dezimalzahlen. Dadurch wird die Lösung unnötig erschwert.“

(b) Hier eignet sich das **Additionsverfahren** zur Lösung:

$$\begin{array}{rrcrcrl} & 3x & - & 7y & = & -27 & (1) \mid \cdot 5 \\ \wedge & -5x & + & 9y & = & 37 & (2) \mid \cdot 3 \\ \hline & 15x & - & 35y & = & -135 & (1)' \\ \wedge & -15x & + & 27y & = & 111 & (2)' \\ \hline (1)' + (2)': & & & -8y & = & -24 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad y = 3$, z.B. in $(1) : x = -2 \quad L = \{(-2 \mid 3)\}$

12. In einer Zoohandlung wurden zehn Mäuse zu je 2,50 €, Goldhamster zu je 4,00 € und Zwergkaninchen zu je 8 € verkauft (siehe Tabelle).

Tierart	Mäuse	Goldhamster	Zwergkaninchen
Preis pro Stück in €	2, 50	4, 00	8,00
Anzahl	10		

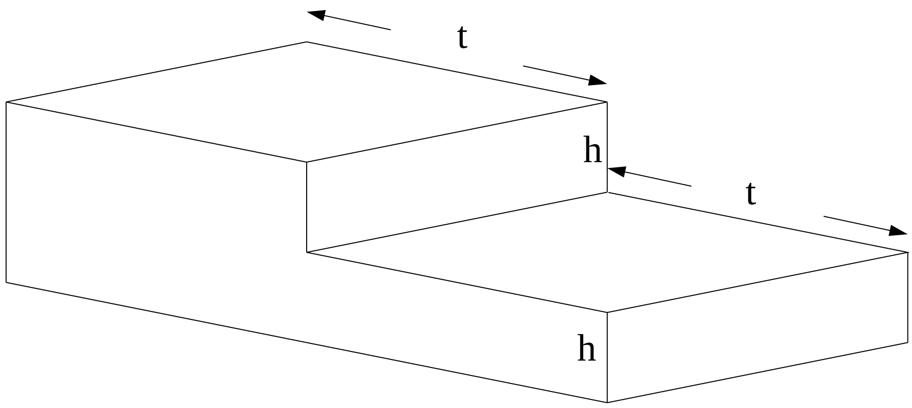
Insgesamt wurden 23 Tiere verkauft. Die Einnahmen betrugen 97 €. Berechne, wie viele Goldhamster und Zwergkaninchen verkauft wurden.

Lösung: Anzahl der Goldhamster: x und Anzahl der Zwergkaninchen: y.
Zahl der verkauften Tiere: $10 + x + y = 23$
Einnahmen in €: $10 \cdot 2,5 + 4 \cdot x + 8 \cdot y = 97$.
Damit erhältst du das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcrcrl} & x & + & y & = & 13 & (1) \mid \cdot(-4) \\ \wedge & 4x & + & 8y & = & 72 & (2) \\ \hline & -4x & - & 4y & = & -52 & (1)' \\ \wedge & 4x & + & 8y & = & 72 & (2)' \\ \hline (1)' + (2)': & & & 4y & = & 20 & \mid : 4 \end{array}$$

Also: $y = 5$ in (1) : x = 8.
Es wurden acht Goldhamster und fünf Zwergkaninchen verkauft.

13.



„Die magische Zahl für Treppen lautet 63 Zenimeter. So viel beträgt das Schrittmaß, das für eine gute Begehbarkeit steht. ... Das Schrittmaß errechnet sich nach folgender Formel: Zweimal die Stufenhöhe h plus einmal die Stufentiefe t gleich 63 Zentimeter.“
Quelle: Nordbayerischer Kurier vom 12. Sept 2010, S. 22

(a) Stelle eine Formelgleichung auf, die das Schrittmaß von 63 cm im Zusammenhang mit der Stufenhöhe h und der Stufentiefe t beschreibt.

(b) Herr Feust will nach dieser Formelgleichung eine Steintreppe vom Haus zum Garten anlegen. Er meint: „Je niedriger die Stufenhöhe wird, desto länger fällt nach dieser Formelgleichung die Stufentiefe aus.“
Bestätige diesen Sachverhalt mit einem Zahlenbeispiel.

(c) Im Haus der Familie Feust wohnen auch die schon etwas gebrechlichen Eltern von Frau Feust. Daher wird festgelegt, dass die Stufenhöhe 16 cm nicht überschreiten darf. Berechne das zugehörige Mindestmaß der Stufentiefe.

(d) Während der Arbeiten schaut Nachbar Tufes, der alles besser weiß, interessiert zu: „Ich hätte einfach Stufentiefe = Stufenhöhe gewählt.“ Was meinst du dazu? Begründe deine Antwort.

(e) Wie lang wird die gesamte Treppe, wenn sie bei einer Stufenhöhe von 15 cm vom Haus bis in den Garten eine Höhendifferenz von 1,20 m überwindet?

Lösung: (a) Hier gilt: $63\,\text{cm} = 2 \cdot h + t$.

(b) Z.B.:
$h_1 = 20\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 23\,\text{cm}$
$h_1 = 18\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 27\,\text{cm}\,.$

(c) Es gilt: $h = (63\,\text{cm} - t) : 2$

$$\begin{aligned} h = (63\,\text{cm} - t) : 2 &\leqq 16\,\text{cm} \mid \cdot 2 \\ 63\,\text{cm} - t &\leqq 32\,\text{cm} \mid -63\,\text{cm} \\ -t &\leqq -31\,\text{cm} \mid \cdot(-1) \\ t &\geqq 31\,\text{cm} \end{aligned}$$

Die Stufentiefe muss also mindestens 31 cm betragen.

(d) In der Formelgleichung gilt dann $h = t$: $\quad 63\,\text{cm} = 3t \quad t = 21\,\text{cm}\,.$
Eine Stufentiefe von nur 21 cm wäre für ältere Leute zu gefährlich.

(e) Es werden $1{,}20\,\text{m} : 15 = 120\,\text{cm} : 15\,\text{cm} = 8$ Stufen benötigt.
$63\,\text{cm} = 2 \cdot 15\,\text{cm} + t \quad \Rightarrow \quad t = 33\,\text{cm}\,.$
$33\,\text{cm} \cdot 8 = 264\,\text{cm} = 2{,}64\,\text{m}\,.$
Die gesamte Treppenlänge beträgt also 2,64 m.

14. In einem Lehrbuch steht zum Thema „Gleichungssysteme“ eine Aufgabe mit der Musterlösung:
„Es sind a und b natürliche Zahlen. Berechne a und b so, dass $a^2 - b^2 = 15$ gilt.“

Musterlösung

$$a^2 - b^2 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)(a+b) = 15\,.$$

Wegen $\mathbb{T}_{15} = \{1;\ 3;\ 5;\ 15\}$ und $a + b > a - b$ folgt

entweder:

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a & + & b & = & 15 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 1 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 16 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 8 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 7$

Probe: $8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$, stimmt.

oder:

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a & + & b & = & 5 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 3 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 8 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 4 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 1$

Probe: $4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$, stimmt.

$$\Rightarrow \quad L = \{(4 \mid 1);\ (8 \mid 7)\}$$

(a) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 77$ und mache die Probe..

(b) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 83$ und mache die Probe..

(c) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 38$ und mache die Probe..

(d) Edwin behauptet: „Wenn der Wert der Differenz aus den Quadraten von a und b gerade ist, dann ist die Lösungsmeng leer.“
Begründe, dass Edwin nicht Recht hat.

Lösung: (a) Wegen $\mathbb{T}_{77} = \{1;\ 7;\ 11;\ 77\}$ folgt

entweder:

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a & + & b & = & 11 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 7 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 18 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 9 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 2$

Probe: $9^2 - 2^2 = 81 - 4 = 77$, stimmt.

oder:

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a & + & b & = & 77 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 1 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 78 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 39 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 38$

Probe: $39^2 - 38^2 = 1521 - 1444 = 77$, stimmt.

$$\Rightarrow \quad L = \{(9 \mid 2);\ (39 \mid 38)\}$$

(b) 83 ist eine Primzahl. Wegen $\mathbb{T}_{83} = \{1; 83\}$ folgt

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a & + & b & = & 83 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 1 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 84 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 42 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 41$

Probe: $42^2 - 41^2 = 1764 - 1681 = 83$, stimmt.

(c) Wegen $\mathbb{T}_{38} = \{1; 2; 19; 38\}$ folgt z.B.

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a & + & b & = & 19 & \qquad\qquad\qquad\qquad (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 2 & \qquad\qquad\qquad\qquad (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 21 & \Rightarrow \quad a \notin \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad b \notin \mathbb{N} \end{array}$$

Damit folgt: $\quad L = \emptyset$.

(d) Das folgende Gegenbeispiel zeigt, dass Edwin Unrecht hat:
$a^2 - b^2 = 44$. Daraus wird z.B.:

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a & + & b & = & 22 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 2 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 24 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 12$ und $\quad b = 10$.

In der Tat ist $12^2 - 10^2 = 144 - 100 = 44$.

Für $a^2 - b^2 = 2^n \cdot p$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $p \in \mathbb{P}$ ist die Lösungsmenge nie leer.

12. Reelle Zahlen

1. Vereinfache jeweils den Term so weit wie möglich ohne mit dem Taschenrechner zu runden. Es muss ein logischer Rechenweg zum Ergebnis führen.
   (a) $\sqrt{\left(\sqrt{1000}+\sqrt{999}\right)\cdot\left(\sqrt{1000}-\sqrt{999}\right)}$
   (b) $\left(\sqrt{3}^{\;2}-3\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^{3876}$

Lösung: (a) 1
(b) 0

2. Zeige ohne Verwendung des ETR:
   (a) $(3+1^{9876534212345})\cdot(7\sqrt{2}-3\sqrt{2})^2=128$
   (b) $\left(\dfrac{185}{37}-0^{555666777888999}\right):\left(\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}+95\right)=\dfrac{1}{20}$
   (c) $\sqrt{9\frac{1}{4}}:\sqrt{4\frac{5}{8}}=\sqrt{2}$
   (d) $\left(\sqrt{12}+13^{1000}\right)\cdot\left(\sqrt{1}^{777555333111}-\dfrac{1}{2}:\dfrac{3}{6}\right)\cdot\left(\dfrac{9888777666555}{9888777666554}+14^{-87}\right)=0$

Lösung: (a) Bei der Basis 1 kann der Exponent heißen, wie er will: Der Potenzwert ist immer 1.
$\left(3+1^{9876534212345}\right)\cdot(7\sqrt{2}-3\sqrt{2})^2=4\cdot(4\sqrt{2})^2=4\cdot16\cdot2=128$

(b) Jede Potenz mit der Basis 0 und einem natürlichen Exponenten hat den Wert 0.
$\left(\dfrac{185}{37}-0^{555666777888999}\right):\left(\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}+95\right)=$
$=5:\left(\sqrt{\dfrac{50}{2}}+95\right)=5:100=\dfrac{5}{100}=\dfrac{1}{20}$

(c) $\sqrt{9\frac{1}{4}}:\sqrt{4\frac{5}{8}}=\sqrt{\frac{37}{4}}:\sqrt{\frac{37}{8}}=\sqrt{\frac{37}{4}\cdot\frac{8}{37}}=\sqrt{2}$

(d) Der Term stellt ein Produkt aus drei Faktoren dar: In jedem Klammernpaar steht einer davon.
Ein Produkt hat dann den Wert 0, wenn mindestens ein Faktor den Wert 0 hat. Du

siehst:

$$\underbrace{\left(\sqrt{12}+13^{1000}\right)}_{>0}\cdot\left(\sqrt{1}^{777555333111}-\frac{1}{2}:\frac{3}{6}\right)\cdot\underbrace{\left(\frac{9888777666555}{9888777666554}+14^{-87}\right)}_{>0}$$

Dann muss der Faktor in der Mitte den Wert 0 besitzen:
$\sqrt{1}=1$. Nach Lösung (a) ist also $\sqrt{1}^{9876534212345}=1$

und $\frac{1}{2}:\frac{3}{6}=\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=1$.

Somit vereinfacht sich der mittlere Faktor zu $1-1=0$. Damit ist der ganze Produktwert 0.

3. Erwin und Claudia sollen den Term $\sqrt{9\frac{1}{4}}$ vereinfachen. Claudia meint: „Das haben wir gleich:

   $\sqrt{9}=3$ und $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$, also kommt $3,5$ heraus.“

   Erwin überprüft Claudias Ergebnis mit dem Taschenrechner: „Ich bekomme $3,041381265$ heraus“.
   Claudia überlegt: „Aber es kann ja nur ein Ergebnis richtig sein.“
   Wo liegt der Fehler? Begründe deine Antwort.

Lösung: $\sqrt{9\frac{1}{4}}$ ist ausführlich geschrieben $\sqrt{9+\frac{1}{4}}$.

Claudia hat also über einem **Pluszeichen** die Wurzel in zwei einzelne Wurzeln zerlegt. Das darfst du aber nur bei **Punktrechnungen** tun.

Der richtige Weg wäre: $\sqrt{9\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{37}{4}}=\frac{\sqrt{37}}{2}$. Spätestens hier erkennst du, dass die Wurzel „nicht aufgeht“; d.h. das Ergebnis ist nicht rational.
Und tatsächlich: $\frac{\sqrt{37}}{2}\approx 3,041381265$.

4. Karin hat im Taschenrechner $\sqrt{2}$ eingeben. Er zeigt $1,414213562$ an. Sie meint dazu: „Das muss ein gerundeter Wert sein.“ Begründe, dass sie Recht hat.

Lösung: Wenn $\sqrt{2}=1,414213562$ wäre, dann müsste umgekehrt
$1,414213562^2=1,414213562\cdot 1,414213562=2$ gelten.
Wenn man aber eine Zahl mit einer anderen Zahl multilpiziert, dann ist die Endziffer des Produktwertes die letzte Ziffer des Produktwertes der beiden Endziffern der beiden

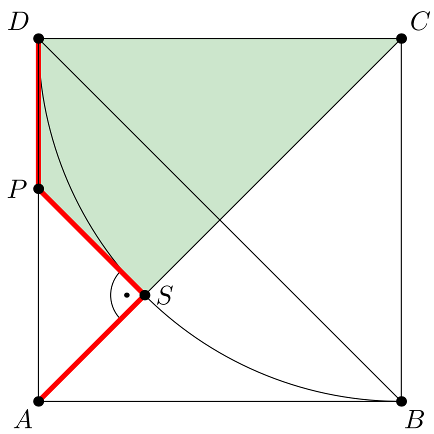
Faktoren.
Beispiel: $109457 \cdot 5620003$ liefert das Produkt der Endziffern $7 \cdot 3 = 21$.
Also endet der Produktwert aus $109457 \cdot 5620003$ mit der Ziffer 1. Bei Dezimalzahlen gilt diese Regel natürlich auch.
Der Produktwert $1,414213562 \cdot 1,414213562$ besitzt $9 + 9 = 18$ Stellen nach dem Komma, wobei die letzte Ziffer nicht 0 sein kann, denn dann wäre ja schon nach 17 Ziffern Schluss. Die letzte Ziffer ist $2 \cdot 2 = 4$.
Der ETR rundet also auf 9 Stellen nach dem Komma.

Anmerkung:
Es ist $1,414213562 \cdot 1,414213562 = 1,999999998944727844$, also treten die vorhergesagten 18 Stellen nach dem Komma auf.
Der ETR zeigt aber nur 9 Stellen nach dem Komma an. Also muss er runden: Die 10. Ziffer im Ergebnis ist eine 9. Also wird die 9. Ziffer nach dem Komma, nämlich die 8, zur 9. Dann müsste der ETR eigentlich für $\sqrt{2}^{\,2}$ das Ergebnis $1,999999999$ anzeigen.
Das macht er aber nur, wenn du $1,414213562 \cdot 1,414213562$ oder $1,414213562^2$ per Hand eingibst.
Wenn du dagegen „$\sqrt{2}$“ eingibst, und das Ergebnis mit der „x^2“-Taste quadrierst, dann erscheint „glatt“ 2 im Fenster. Daraus kannst du schließen, dass der ETR bei $\sqrt{2}$ anders rundet als bei der „Handeingabe“.

5. Begründe: $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right)^{444} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^{444} = 16^{\,111}$.

Lösung:
$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right)^{444} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^{444} = \left(\frac{(\sqrt{5}-1)\cdot(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right)^{444} = \left(\frac{\sqrt{5}^{\,2}-1^2}{\sqrt{2}^{\,2}}\right)^{444} =$$
$$= \left(\frac{4}{2}\right)^{444} = 2^{\,444} = 2^{\,4\cdot 111} = \left(2^4\right)^{111} = 16^{\,111}.$$

6.

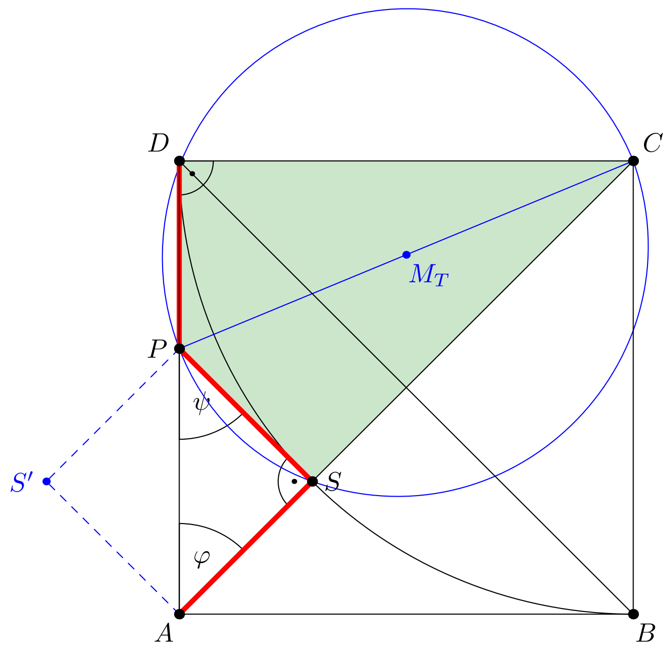


Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b)
- Begründe rechnerisch: Das Viereck $SCDP$ ist ein achsensymmetrischer Drachen.
- Besitzt dieses Drachenviereck einen Umkreis? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a)



(b)
- Es gilt: $\overline{CS} = \overline{CD}$. **(*)**
  Die Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ sind Halbierende der betreffenden rechten Innenwinkel.
  Also folgt $\varphi = 45°$.
  Wegen der Innenwinkelsumme im rechtwinkligen Dreieck ASP gilt dann $\psi = 45°$.
  Also ist das Dreieck ASP gleichschenklig. Damit gilt:
  $\overline{AS} = \overline{AC} - \overline{SC} = \overline{SP} = (6\sqrt{2} - 6)\,\text{cm}$.

  Der Punkt S' ist das Spiegelbild des Punktes S an der Strecke $[AP]$. Das Dreieck ASP ist somit die Hälfte eines Quadrates mit der Diagonalen $[AP]$.
  Somit gilt: $\overline{AP} = \overline{AS} \cdot \sqrt{2} = (12 - 6\sqrt{2})\,\text{cm}$.
  $\Rightarrow \quad \overline{DP} = \overline{AD} - \overline{AS} = [6 - (12 - 6\sqrt{2})]\,\text{cm} = (6\sqrt{2} - 6)\,\text{cm} = \overline{PS} = \overline{AS}$.
  Mit **(*)** ist erwiesen, dass es sich um einen achsensymmetrischen Drachen handelt.
- Die Diagonale $[PC]$ des Drachens $SCDP$ zerlegt dieses Viereck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke. Somit liegen die Eckpunkte S, C, D und P dieses Vierecks auf dem THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[SC]$. Dieser Kreis ist also der Umkreis des Drachenvierecks.

7. Gegeben sind die folgenden Gleichungen mit $G = \mathbb{R}$:

$$-5x + 30 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{x-6}{17,2} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{x-6}{x+3} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{x-6}{-3x+18} = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{36-x^2}{x-6} = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{0,5x^2-6x+18}{x+6} = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{x^2-4x-12}{2x-6} = 0 \qquad (7)$$

$$(-1,1)^{17} \cdot (\sqrt{2x} + 2\sqrt{3}) \cdot 17\frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2x} - \sqrt{12}) = 0 \qquad (8)$$

(a) Ermittle die Lösung der Gleichung (1).

(b) Untersuche, ob die Gleichungen (2) bis (8) die gleiche Lösungsmenge wie die Gleichung (1) besitzen. Begründe jeweils deine Antwort.

Lösung: (a) $x = 6$.

(b) Gleichung **(2)**:
Da der Nenner stets von 0 verschieden ist, hat der Bruch den Wert 0, wenn der Zähler den Wert 0 hat. Das ist wieder wie in (1) für $x = 6$ der Fall.

Gleichung **(3)**:
Für die Definitionsmenge D gilt: $D = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$. Der Zähler verschwindet für $x = 6$. Also ist die Lösung wieder die gleiche wie in (1).

Gleichung **(4)**:
Der Nennner wird 0, wenn $x = 6$ gilt. Also folgt $D = \mathbb{R}\backslash\{6\}$.
Der Zähler hat nur eine einzige Nullstelle, nämlich $x = 6 \notin D$. Die Lösungsmenge ist im Gegensatz zu (1) **leer**.

Gleichung **(5)**:
Wieder gilt $D = \mathbb{R}\backslash\{6\}$.
$36 - x^2 = (6-x)(6+x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 \notin D \vee x = -6 \in D$.

Also ist $x = -6$ die einzige Lösung. Sie stimmt nicht mit der Lösung von (1) überein.

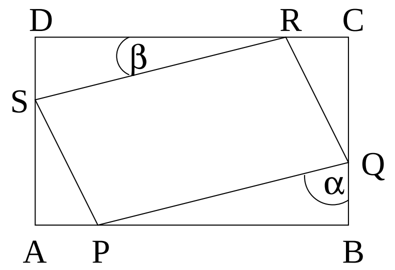
Gleichung **(6)**:
$D = \mathbb{R}\backslash\{-6\}$.
$0,5x^2 - 6x + 18 = 0,5(x-6)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 \in D$.
Die Gleichung (6) besitzt die gleiche Lösung wie die Gleichung (1).

Gleichung **(7)**:
$D = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.
$= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \in D \vee x = 6 \in D$.
Eine der Lösungen der Gleichung (7) ist zwar mit der der Gleichung (1) identisch, aber die Gleichung (7) besitzt noch eine zweite Lösung, die in (1) nicht auftaucht. (1) und (7) haben also **verschiedene Lösungsmengen**.

Gleichung **(8)**:
$(-1,1)^{17} \cdot (\sqrt{2x} + 2\sqrt{3}) \cdot 17\frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2x} - \sqrt{12}) =$
$(-1,1)^{17} \cdot 17\frac{1}{3} \cdot \left[(\sqrt{2x})^2 - (\sqrt{12})\right] = (-1,1)^{17} \cdot 17\frac{1}{3} \cdot [2x - 12] = 0$.
$\Leftrightarrow \quad x = 6 \in D$.
Also ist die Lösung wieder die gleiche wie in (1).

13. Flächeninhalt ebener Vielecke

1. In einem Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = \overline{CD} = 5\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = \overline{DA} = 3\,\text{cm}$.
   Weiter gilt: $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = \overline{DS} = 1\,\text{cm}$



   (a) Übertrage die Zeichnung auf dein Blatt.

   (b) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ möglichst exakt.

   (c) Es gilt $\alpha = 75,96°$. Berechne das Winkelmaß β auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

Lösung: (a) - -

(b) $A_{PQRS} = 9\,\text{cm}^2$

(c) $\beta = 14,04°$

2. Die eine Seite eines Rechtecks $PQRS$ ist doppelt so lang wie die andere Rechtecksseite. Das Rechteck besitzt einen Flächeninhalt von $1,62\,\text{dm}^2$.

   (a) Berechne die beiden Seitenlängen des Rechtecks.

   (b) Berechne die Länge einer Diagonalen.

Lösung: (a) $9\,\text{cm}$, $18\,\text{cm}$
(b) $d = \sqrt{405}\,\text{cm} \approx 20,12\,\text{cm}$

3. Von einem Trapez $ABCD$ weiß man: $A(1|1)$, $B(9|5)$, $C(x|7,5)$ und $D(2|6)$. Außerdem gilt: $[AB] \parallel [CD]$.
   Zeichne das Trapez und berechne x.

Lösung: $x = 5$.

4. Ein Trapez $ABCD$ besitzt die Höhe $h = 4{,}2\,\mathrm{cm}$ und die beiden parallelen Seiten $[AB]$ und $[CD]$. Dabei gilt: $\overline{AB} = 8{,}5\,\mathrm{cm}$ und $\overline{CD} = x\,\mathrm{cm}$
Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ $30{,}03\,\mathrm{cm}^2$ groß ist.

Lösung: $x = 5{,}8$

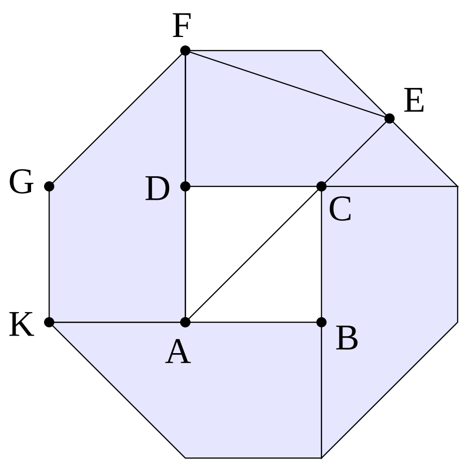
5. In einem Trapez $ABCD$, dessen Flächeninhalt $13\,\mathrm{cm}^2$ beträgt, sind die beiden Seiten $[AB]$ und $[CD]$ parallel.
Weiter gilt: Das Trapez ist $3{,}25\,\mathrm{cm}$ hoch und $\overline{AB} = 5{,}2\,\mathrm{cm}$.
Berechne die Länge der Strecke $[CD]$.

Lösung: $\overline{CD} = 2{,}8\,\mathrm{cm}$

6. Eine Raute $PQRS$ besitzt einen Flächeninhalt von $24\,\mathrm{cm}^2$. Eine Diagonale ist $12\,\mathrm{cm}$ lang.
   (a) Berechne die Länge der zweiten Diagonalen.
   (b) Berechne den Umfang dieser Raute.

Lösung: (a) $e = 4\,\mathrm{cm}$
(b) $u = 4 \cdot \sqrt{40}\ cm \approx 25{,}28\,\mathrm{cm}$

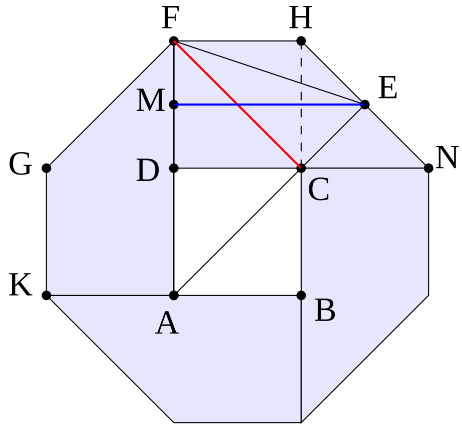
7. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das weiße Viereck ist ein Quadrat. Es gilt $\overline{AB} = \overline{DF} = a\,\mathrm{cm}$. Zusätzlich ist hier das Dreieck AEF eigezeichnet.



   (a) Zeichne die Figur für $\overline{FG} = 3{,}2\,\mathrm{cm}$ so, dass die Strecke $[KB]$ waagrecht liegt.
   (b) Berechne in deiner Zeichnung den Flächeninhalt Quadrates $ABCD$.

(c)
- Untersuche ohne Verwendung des Taschenrechners, ob das Dreieck AEF gleichschenklig ist. Gilt dein Ergebnis auch dann noch, wenn die Figur verkleinert oder vergrößert wird? Begründe deine Ansicht.
- Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks auf drei verschiedene Arten in Abhängigkeit von a.

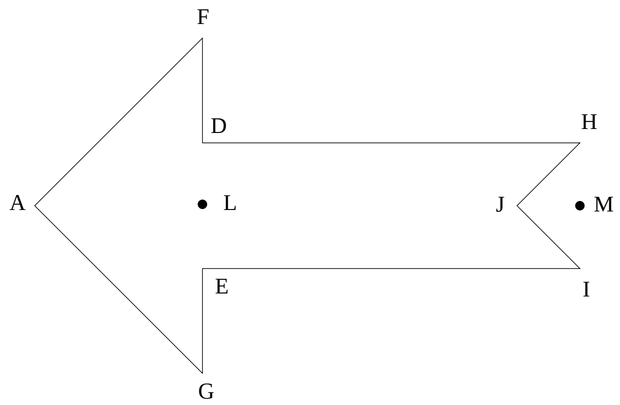
Lösung: (a) $[FG]$ ist genauso lang wie die Diagonale $[AC]$ des Quadrates $ABCD$.
Also gilt: $a\sqrt{2} = 3,2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3,2}{\sqrt{2}} \approx 2,26$.
Für die Zeichnung: $\overline{AF} = \overline{KB} = 2a\,\text{cm} \approx 5,52\,\text{cm}$.



(b) $A(ABCD) = a^2\,\text{cm}^2 = \left(\frac{3,2}{\sqrt{2}}\right)^2\,\text{cm}^2 = 5,12\,\text{cm}^2$

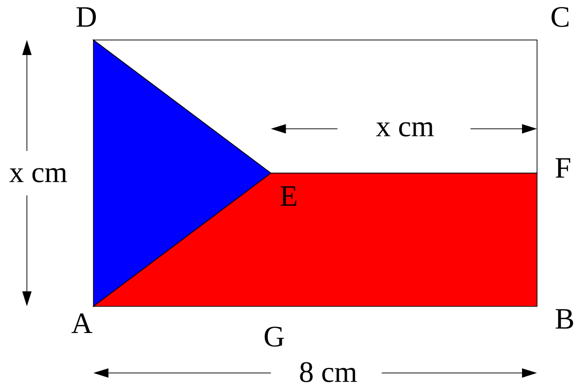
(c)
- Wegen $\overline{CE} = 0,5 \cdot \overline{AC}$ müsste gelten:
  $2a = 1,5a\sqrt{2} \quad (a \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$.
  Weil aber $\sqrt{2}$ irrational ist, liegt hier ein Widerspruch vor.
  Dieser Widerspruch lässt sich auch durch Vergößerung oder Verkleinerung der Figur nicht auflösen: Jede Vergrößerung oder Verkleinerung ist eine winkeltreue Abbildung. Wenn in der Ausgangsfigur keine zwei Winkel maßgleich sind, dann wird dies auch bei einer Größenänderung nicht anders.
- Es wird nur mit Maßzahlen gerechnet.
  1. Möglichkeit:
  $A(AEF) = 0,5\overline{AE} \cdot \overline{FC} = 0,5 \cdot 1,5a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 1,5a^2$.
  2. Möglichkeit:
  $A(AEF) = 0,5 \cdot \overline{AF} \cdot \overline{EM} = 0,5 \cdot 2a \cdot 1,5a = 1,5a^2$.
  3. Möglichkeit:
  Das Lot $[FC]$ zelegt das Dreieck AEF in die beiden rechtwinkligen Teildreiecke ACF und CEF.
  Das Dreieck ACF ist so groß wie das Quadrat $ABCD$: $A(ACF) = a^2$.
  Weil $[FC] \parallel [HN]$ ist, folgt $A(CEF) = A(FCH) = 0,5a^2$.
  $\Rightarrow \quad A(AEF) = a^2 + 0,5a^2 = 1,5a^2$.

8. Berechne den Flächeninhalt des unten skizzierten Pfeiles.
   Dabei gilt: $\overline{AM} = 6\,\text{cm}$, $\overline{AL} = 2\,\text{cm}$, $\overline{FG} = 3\,\text{cm}$, $\overline{HI} = 1,5\,\text{cm}$, $\overline{AJ} = 5,5\,\text{cm}$



Lösung: Der Flächeninhalt beträgt $8,625\,\text{cm}^2$.

9. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = \overline{EF} = x\,\text{cm}$ mit $x \in \mathbb{R}^+$.
Hinweis: Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne die Figur für $x = 4,5$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABFE$ in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A_T(x) = (0,25x^2 + 2x)\,\text{cm}^2$]

(c) Untersuche auf verschiedene Weise, ob es eine Belegung für x gibt, so dass der Flächeninhalt des Trapezes $ABFE$ den Wert $33\,\text{cm}^2$ annimmt.

(d) Berechne x so, dass die Inhalte aller drei Teilflächen im Inneren des Rechtecks $ABCD$ gleich groß sind.

(e) Berechne x so, dass das Dreieck AED gleichseitig wird.

(f) Berechne x so, dass das Dreieck AED gleichschenklig-rechtwinklig wird.

Lösung: (a) –

(b)

$$A_T(x) = \frac{8+x}{2} \cdot \frac{x}{2}\,\text{cm}^2 = \frac{x^2+8x}{4}\,\text{cm}^2 = (0,25x^2+2x)\,\text{cm}^2$$

(c) 1. Möglichkeit (mühsam):
$0,25x^2 + 2x = 33 \quad \Leftrightarrow \quad 0,25(x+4)^2 = 37 \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)^2 = 148(*)$
Wegen $x \in \mathbb{R}^+$ ist (*) gleichwertig mit $x = 2\sqrt{37} - 4 > 8$, was wegen $\overline{EF} = x\,\text{cm} \leqq \overline{AB} = 8\,\text{cm}$ nicht geht.
2. Möglichkeit:
Damit das Dreieck AED existiert, muss $x < 8$ gelten. Das Trapez $ABFE$ nimmt stets weniger als die Hälfte des Rechtecks $ABCD$ ein. Also muss stets $A_T < 32\,\text{cm}^2$ sein und damit kann dieser Flächeninhalt nicht größer als $32\,\text{cm}^2$ (nämlich $33\,\text{cm}^2$) sein.

(d) Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ muss dreimal so groß sein wie der Flächeninhalt des Trapezes $ABFE$:
$3 \cdot (0,25x^2 + 2x) = 8x \quad \Rightarrow \quad 0,75x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \quad x(0,75x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0\ \dagger$ wegen $x \in \mathbb{R}^+ \quad \vee \quad 0,75x - 2 = 0 \Rightarrow \quad x \approx 2,67$

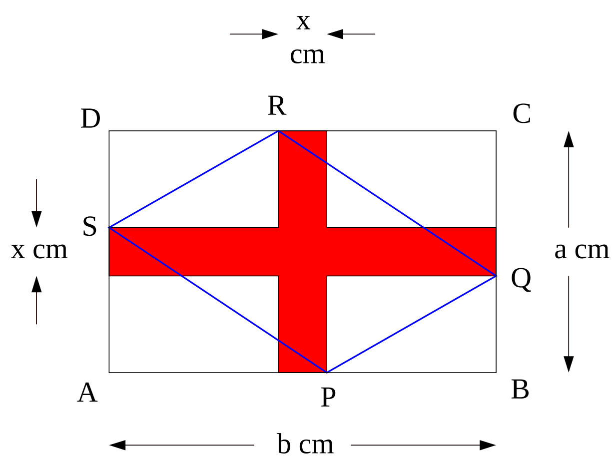
(e) Es muss gelten:

$$8 - x = \frac{x}{2}\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{16}{2+\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 4,29$$

(f) Es muss gelten:

$$x + \frac{x}{2} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 1,5x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 5,33$$

10. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England. Zusätzlich ist noch das Viereck $PQRS$ eingezeichnet.



(a) Zeichne die Figur für $a = 5$, $b = 8$ und $x = 1$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Parallelogramm.

(c) Zeige: Die Berechnung des Flächeninhalts A der Vierecke $PQRS$ in Abhängigkeit von a, b und x ergibt:

$$A(x) = \frac{ab - 0,5x^2}{2}\ \mathrm{cm}^2.$$

(d) Begründe: Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt: $A(PQRS) < 0,5 \cdot A(ABCD)$.

Lösung:

(a) –

(b) $\Delta RQC \cong \Delta APS \quad \wedge \quad \Delta SRD \cong \Delta PBQ$.
Damit sind je zwei gegenüber liegende Seiten des Vierecks $PQRS$ gleich lang. Also handelt es sich um ein Parallelogramm.

(c) Der gesuchte Flächeninhalt ergibt sich z.B. dadurch, dass man an den Eckpunkten des Rechtecks $ABCD$ die vier jeweils paarweise kongruenten rechtwinkligen Dreiecke abschneidet.
Es gilt: $\overline{RD} = 0,5(a-x)\,\mathrm{cm} = \overline{PB} \quad \wedge \quad \overline{SD} = 0,5(b-x)\,\mathrm{cm} = \overline{BQ}$.

$$\begin{aligned} A(SRD) + A(PBQ) &= 2 \cdot [0,5 \cdot 0,5(a-x) \cdot 0,5(b-x)]\,\mathrm{cm}^2 \\ &= 0,25(a-x)(b-x)\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

Weiter gilt: $\overline{RC} = 0,5(b+x)\,\mathrm{cm} = \overline{AP} \quad \wedge \quad \overline{CQ} = 0,5(a+x)\,\mathrm{cm} = \overline{AS}$.

$$\begin{aligned} A(RQC) + A(APS) &= 2 \cdot [0,5 \cdot 0,5(b+x) \cdot 0,5(a+x)]\,\mathrm{cm}^2 \\ &= 0,25(a+x)(b+x)\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

Im Folgenden wird nur mit Maßzahlen gerechnet.

$$\begin{aligned} A(PQRS) &= ab - [0,25(a-x)(b-x) + 0,25(a+x)(b+x)] \\ &= ab - 0,25[ab - ax - bx + x^2 + ab + ax + bx + x^2] \\ &= ab - 0,5ab - 0,5x^2 \\ A(PQRS) &= 0,5(ab - x^2),\ \text{was zu zeigen war.} \end{aligned}$$

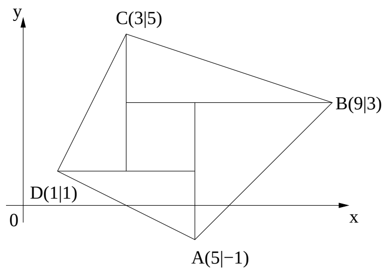
(d) Für die Maßzahlen gilt:

$$\frac{ab - 0,5x^2}{2} = 0,5ab - 0,25x^2$$

Wegen $0,25x^2 > 0$ (für alle $x \in \mathbb{R}^+$) folgt:

$$\frac{ab - 0,5x^2}{2} =< \frac{ab}{2} = 0,5ab = 0,5 \cdot A(ABCD)\,.$$

11. Klaus will den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ berechnen. Er hat dazu in das Viereck Strecken eingezeichnet.



(a) Weshalb hat Klaus diese Einteilung vorgenommen? Kann er auf diese Weise den Flächeninhalt exakt berechnen? Begründe deine Antwort.

(b) Zeichne das Viereck und berechne seinen Flächeninhalt auf eine andere Weise.

(c) Zeichne ein Drachenviereck, das denselben Flächeninhalt wie das Viereck A_{ABCD} besitzt.

Lösung: (a) Die Katheten der Dreiecke sind jeweils zu einer der Koordinatenachsen parallel. Ihre Längen können deshalb mit Hilfe der Koordinaten der Eckpunkte einfach bestimmt werden.

(b) $A_{ABCD} = 26\,cm^2$

(c) - -

12. Gegeben sind die Punkte $A(-1|4)$ und $B(2|1)$ sowie die Gerade $g : y = -2x + 9$. Punkte C_n wandern auf der Geraden g, so dass laufend Dreiecke ABC_n erzeugt werden.

(a) Zeichne die Gerade g und für $C_1(x_1|7)$ das Dreieck ABC_1 in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-2 \leqq x \leqq 7$ und $-4 \leqq y \leqq 10$

(b) Zeige, dass für den Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von x gilt:
$$A(x) = (9 - 1,5\,x)\,\text{cm}^2$$

(c) Gib zwei Belegungen von x an, für die es keines dieser Dreiecke ABC_n gibt. Begründe deine Wahl, z.B. anhand deiner Zeichnung.

(d) Untersuche zeichnerisch, ob es unter allen Dreiecken ABC_n rechtwinklige gibt, welche die Seite $[AB]$ als Kathete besitzen.

(e) Angenommen, die Punkte C_n würden nicht auf der Geraden g, sondern auf einer anderen Geraden g^* wandern. Diese Gerade g^* soll so liegen, dass dann der Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n konstant bleibt.
Zeichne eine solche Gerade g^* ein.

Lösung: (a) -.-

(b) -.-

(c) $x = 6$: Das Dreieck entartet zur Strecke.
$x = 7$: Das betreffende Dreieck erhält den falschen Drehsinn.

(d) Es gibt zwei solche Dreiecke: Man errichte im Punkt A und im Punkt B jeweils eine Senkrechte zur Strecke AB.

(e) g^* muss so zu AB parallel liegen, dass der korrekte Drehsinn gewahrt bleibt.

13. Ein Quadrat besitzt einen Flächeninhalt von $39,69\,\text{cm}^2$.
Berechne die Länge einer Diagonalen.

Lösung: $d = 6,3 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \approx 8,91\,\text{cm}$

14. Gegeben ist das Dreieck ABC durch $A(4 \mid 1)$, $B(-2 \mid 5)$ und $C(-4 \mid 3)$.

(a) Zeichne das Dreieck ABC in ein Koordinatensystem.
Platzbedarf: $-5 \leqq x \leqq 5$ und $-1 \leqq y \leqq 6$

(b) Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks, indem du seine Grundlinie und seine Höhe abmisst.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC exakt mit Hilfe eines geeigneten Rechtecks, das du einzeichnest. [Ergebnis: $A_{\triangle ABC} = 10\,\text{cm}^2$]

(d) Zeichne zwei rechtwinklige Dreiecke, die zwar jeweils den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck ABC besitzen, die aber nicht kongruent sind.

Lösung: (a) - -

(b) - -

(c) Ergebnis: $A_{\triangle ABC} = 10\,\text{cm}^2$

(d) - -

15. Von einem Trapez $ABCD$ weiß man: $A(1|1)$, $B(9|5)$, $C(x|7,5)$ und $D(2|6)$. Außerdem gilt: $[AB] \parallel [CD]$.
Zeichne das Trapez und berechne x.

Lösung: $x = 5$.

16. Ein Trapez $ABCD$ besitzt die Höhe $h = 4,2\,\text{cm}$ und die beiden parallelen Seiten $[AB]$ und $[CD]$. Dabei gilt: $\overline{AB} = 8,5\,\text{cm}$ und $\overline{CD} = x\,\text{cm}$
Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ $30,03\,\text{cm}^2$ groß ist.

Lösung: $x = 5,8$

17. Gegeben sind die Punkte $A(-1|4)$ und $B(2|1)$ sowie die Gerade $g : y = -2x + 9$. Punkte C_n wandern auf der Geraden g, so dass laufend Dreiecke ABC_n erzeugt werden.

(a) Zeichne die Gerade g und für $C_1(x_1|7)$ das Dreieck ABC_1 in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-2 \leqq x \leqq 7$ und $-4 \leqq y \leqq 10$

(b) Zeige, dass für den Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von x gilt:
$$A(x) = (9 - 1,5\,x)\,\text{cm}^2$$

(c) Gib zwei Belegungen von x an, für die es keines dieser Dreiecke ABC_n gibt. Begründe deine Wahl, z.B. anhand deiner Zeichnung.

(d) Untersuche zeichnerisch, ob es unter allen Dreiecken ABC_n rechtwinklige gibt, welche die Seite $[AB]$ als Kathete besitzen.

(e) Angenommen, die Punkte C_n würden nicht auf der Geraden g, sondern auf einer anderen Geraden g^* wandern. Diese Gerade g^* soll so liegen, dass dann der Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n konstant bleibt.
Zeichne eine solche Gerade g^* ein.

Lösung: (a) -.-

(b) -.-

(c) $x = 6$: Das Dreieck entartet zur Strecke.
$x = 7$: Das betreffende Dreieck erhält den falschen Drehsinn.

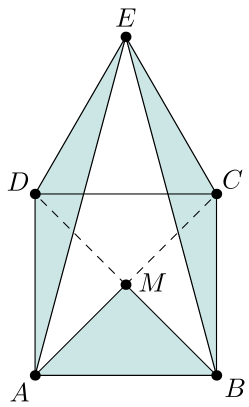
(d) Es gibt zwei solche Dreiecke: Man errichte im Punkt A und im Punkt B jeweils eine Senkrechte zur Strecke AB.

(e) g^* muss so zu AB parallel liegen, dass der korrekte Drehsinn gewahrt bleibt.

18. Ein Quadrat besitzt einen Flächeninhalt von $39,69\,\text{cm}^2$.
Berechne die Länge einer Diagonalen.

Lösung: $d = 6,3 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \approx 8,91\,\text{cm}$

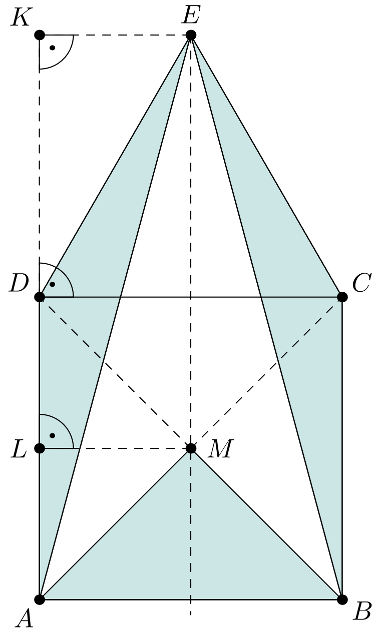
19. An das Quadrat $ABCD$ ist das gleichseitige Dreieck DCE angefügt worden:



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\mathrm{cm}$.

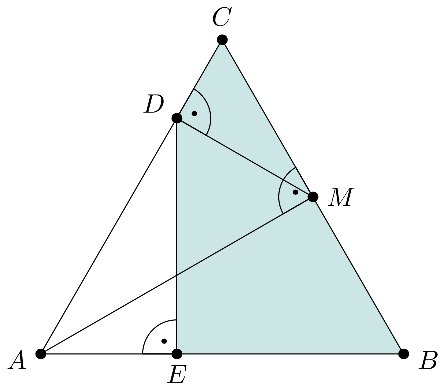
(b) Begründe: Die getönten Dreiecke besitzen den gleichen Flächeninhalt.

Lösung: (a)



(b) In der Figur ist die Gerade EM die Symmetrieachse. Deshalb sind die beiden Dreiecke AED und BCE kongruent, insbesondere also flächengleich.
Der Flächeninhalt der Dreiecke ABM und AMD ist ebenfalls gleich. Die Dreiecke AMD und AED besitzen dieselbe Grundseite $[AD]$. Außerdem sind die zugehörigen Höhen $[LM]$ bzw. $[KE]$ gleich lang. Also besitzen die beiden Dreiecke AMD und AED und damit auch das Dreieck ABM den gleichen Flächeninhalt, nämlich 25% der Quadratfläche.

20.

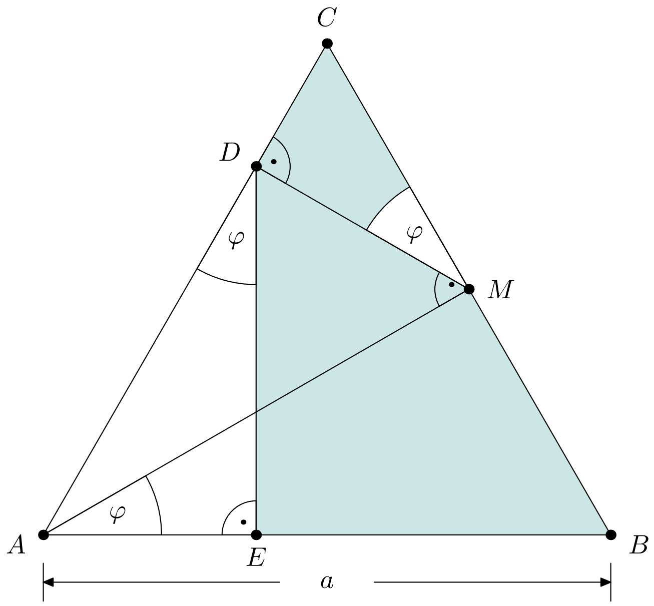


Das Grundstück ABC hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit einer Seitenlänge $a = 75\,\text{m}$. Die Grundstücksfläche $BCDE$ ist ein Rasenspielfeld. Der Rest ist asphaltiert. Es gilt: $\overline{MB} = \overline{MC}$.

(a) Zeichne die Figur mit den Punkten E, M und D im Maßstab $1 : 1000$.

(b) Berechne den Anteil der Rasenfläche am Grundstück ABC in Prozent.

Lösung: (a)



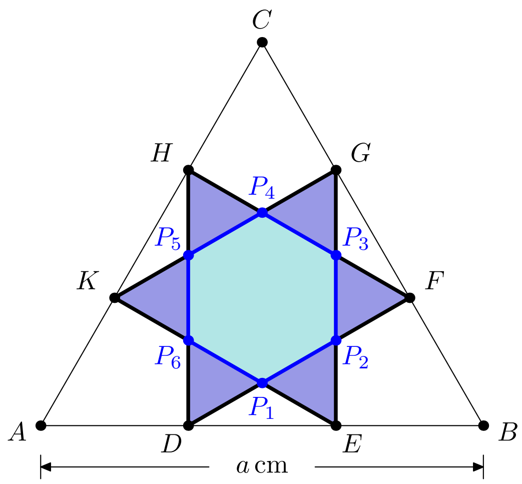
(b) **In einem gleichseitigen Dreieck hat jeder Innenwinkel das Maß** $60°$**.**
Das bedeutet hier: $\varphi = 30°$. Somit sind die Dreiecke ABM, DMC und AED **halbe gleichseitige Dreiecke**.
$\Rightarrow \quad \overline{BM} = \overline{MC} = 0.5a$
$\Rightarrow \quad \overline{DC} = 0,5 \cdot \overline{MC} = 0.5 \cdot 0,5a = 0,25a$
$\Rightarrow \quad \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{DC} = a - 0,25a = 0,75a$
Weiter gilt: $\Delta AED \sim \Delta ABM$. Streckungsfaktor $k = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{0,75a}{a} = 0,75$.

Es ist hier also gleichgültig, wie lang die Seite des Grundstückes ist.

Nun gilt: $A_{\Delta AED} = 0,75^2 \cdot A_{\Delta ABM} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{A_{\Delta AED}}{A_{\Delta ABC}} = \dfrac{1}{2} \cdot 0,5625 = 28,125\%.$

Das ist der prozentuale Anteil der asphaltierten Fläche an der Gesamtfläche (100%). Die Rasenfläche nimmt also knapp 72% des Grundstückes ABC ein.

21.



Das Dreieck ABC ist gleichseitig mit der Seitenlänge a cm. Die Punkte D, E, F, G, H und K dritteln jeweils die Dreiecksseite, auf der sie liegen.

(a) Zeichne die Figur für $a = 7,5$.

(b) Begründe: Die Punkte D, E, F, G, H und K sind Scheitel von rechten Winkeln. Zeichne dazu den Mittelpunkt M der Basis $[AB]$ sowie die Gerade CM ein und vergleiche die Teilverhältnisse auf den Strecken $[AM]$ und $[AC]$.

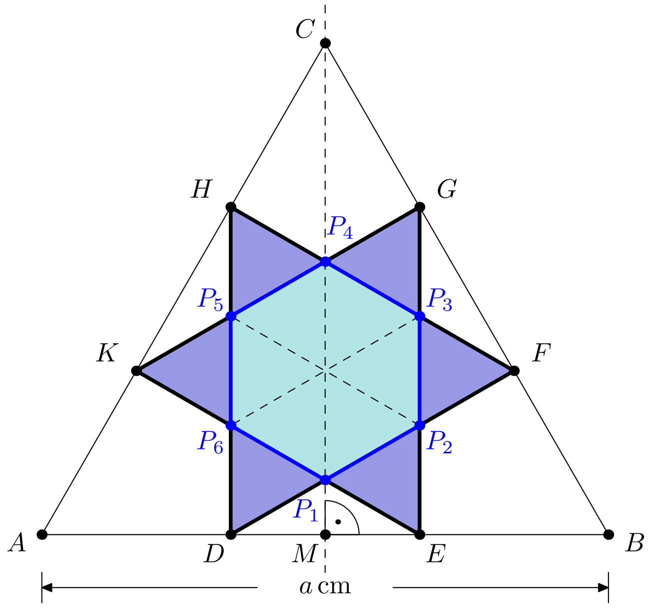
(c) Berechne das Verhältnis k_1 der Flächeninhalte des sechszackigen Sterns und des Dreiecks ABC.

$$[\text{ Ergebnis: } k_1 = \frac{4}{9}\ ]$$

(d) Begründe: Das Verhältnis k_2 der Flächeninhalte des inneren Sechsecks $P_1 \ldots P_6$ und des Dreiecks ABC ist halb so groß wie k_1. Zeichne dazu im Sechseck geeignete Hilfslinien ein.

(e)
- Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, das denselben Flächeninhalt aufweist wie der sechszackige Stern.
- Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, das denselben Flächeninhalt aufweist wie das innere Sechseck $P_1 \ldots P_6$.

Lösung: (a)



(b) Die Gerade $[CM]$ ist eine Symmetrieachse des Dreiecks ABC, die auf der Basis $[AB]$ senkrecht steht.
Nun gilt $\overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$ und $\overline{DM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD}$, weil ja z.B. der Punkt D die Strecke $[AB]$ drittelt.
Also teilt der Punkt D die Strecke $[AM]$ im Verhältnis $2 : 1$. Dasselbe Streckenverhältnis erzeugt aber auch der Punkt H auf der Strecke $[AC]$. Also sind die beiden Dreiecke AMC und ADH zueinander ähnlich.
$\Rightarrow \quad [DH] \parallel [MC] \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle HDA = 90°$.
Aus Symmetriegründen sind die Punkte E, F, G, H und K ebenfalls Scheitel von rechten Winkeln.

(c) Wir rechnen meist ohne die Einheiten „cm“ bzw. „cm²“.
Das Dreieck DBF ist rechtwinklig: $\overline{DF}^{\,2} = \left(\frac{2}{3} \cdot a\right)^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot a\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot a^2$.
Die Dreiecke DBF, HFC und ADH sind kongruent. $\Rightarrow \overline{DF} = \overline{FH} = \overline{HD}$.
Die Dreiecke EBG, KGC und AEK sind kongruent. $\Rightarrow \overline{EG} = \overline{GK} = \overline{KE}$.
Also sind die beiden Dreiecke DFH und EGK gleichseitig. Die sechs kleinen Dreiecke über den Sechsecksseiten $\overline{P_1P_2} \ldots \overline{P_6P_1}$ sind ebenfalls gleichseitig und kongruent. Das Sechseck $P_1 \ldots P_6$ ist damit regelmäßig.

$$A_{\Delta DFH} = \frac{1}{4} \cdot \overline{DF}^{\,2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2.$$

Weil z.B. $\overline{P_1P_2} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DF}$ gilt, folgt:

$$A_{\Delta EP_2P_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot A_{\Delta DFH} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{108} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2.$$

Der Stern besteht z.B. aus den Dreieck DFH, an das drei kleine Dreiecke vom Typ EP_2P_1 angefügt worden sind:

$$A_{\text{Stern}} = \left(\frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{108} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\right) = \frac{1}{9} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2$$

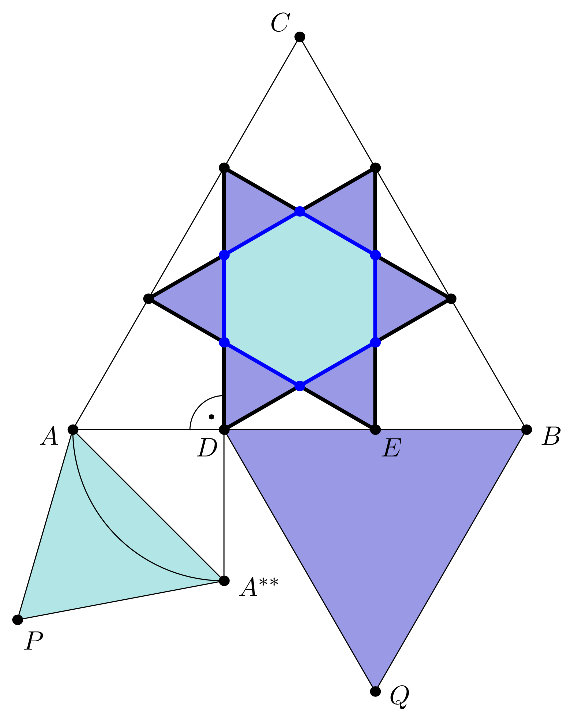
$$k_1 = \frac{A_{\text{Stern}}}{A_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1}{9} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\right) : \left(\frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\right) = \frac{4}{9}$$

(d) Die gesuchten Hilfslinen sind die Diagonalen des Sechsecks. Durch sie wird dieses Sechseck in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegt.
Wenn Du diese sechs kongruenten gleichseitigen Dreieck nach außen klappst, hast du den Stern erzeugt. Also besteht der Stern insgesamt aus 12 solcher Dreiecke. Damit ist der Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks $P_1 \dots P_6$ im Inneren halb so groß wie der des Sterns:

$$k_2 = 0,5 \cdot k_1 = \frac{2}{9}.$$

Anmerkung: Eine Begründung muss also nicht unbedingt rechnerisch erfolgen. Trotzdem kannst du auch wieder das Verhältnis als Bruch von Flächeninhalten herleiten. Das ist aber umständlicher.

(e)



- Für das gesuchte Dreieck „Δ^*“ mit der Seitenlänge a^* cm gilt:

$$A_{\Delta^*} = A_{\text{Stern}} = \frac{4}{9} \cdot A_{\Delta ABC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot A_{\Delta ABC}$$

$$\Rightarrow \quad a^* = \frac{2}{3} \cdot a.$$

Errichte also z.B. unter der Strecke $[DB]$ das gesuchte Dreieck DQB mit der Seitenlänge $\overline{DB} = a^*$. (Siehe Zeichnung oben.)

- Für das gesuchte Dreieck „Δ^{**}" mit der Seitenlänge a^{**} cm gilt:

$$A_{\Delta^{**}} = A_{\text{Sechseck}} = \frac{2}{9} \cdot A_{\Delta ABC} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot A_{\Delta ABC}$$

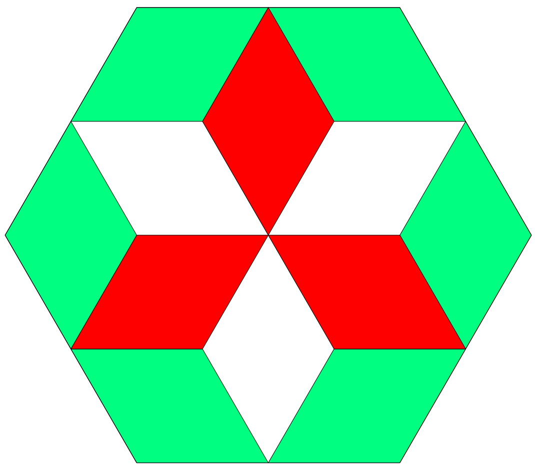
$$\Rightarrow \quad a^{**} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a = \left(\frac{1}{3} \cdot a\right) \sqrt{2}.$$

Der Term $\left(\frac{1}{3} \cdot a\right) \sqrt{2}$ lässt sich als Diagonalenlänge eine Quadrates mit der Seitenlänge $\frac{1}{3} \cdot a$ deuten.

In der Zeichnung oben ist das Dreieck $AA^{**}D$ ein halbes Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AD} = \frac{1}{3} \cdot a$. Damit hat die Diagonale $[AA^{**}]$ die Länge $(\frac{1}{3} \cdot a)\sqrt{2}\,\text{cm} = a^{**}$ cm. Also ist das Dreieck APA^{**} das gesuchte.

Das dunkel getönte gleichseitige Dreieck DQB hat den doppelten Flächeninhalt wie das hell getönte Dreieck APA^{**}.

22.



In das regelmäßige Seckseck mit der Seitenlänge $a = 6\,\text{cm}$ ist ein sechszackiger Stern einbeschrieben, in dem das Mitsubishi-Logo („Drei Diamanten") eingebettet ist. Wenn du das Bild lange genug betrachtest, entdeckst du auch 3 schräge Würfel.

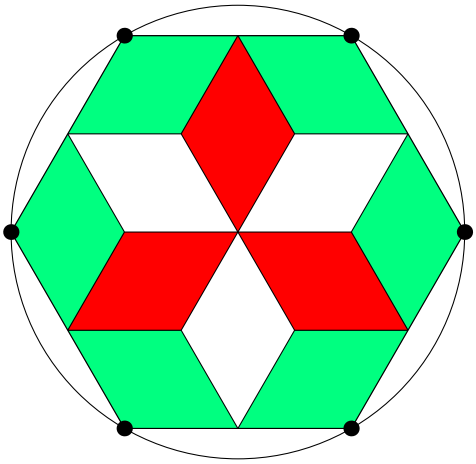
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Die drei „Mitsubishi-Vierecke" sind kongruente Rauten.

(c) Ermittle den prozentualen Anteil des Sterns am Seckseck.

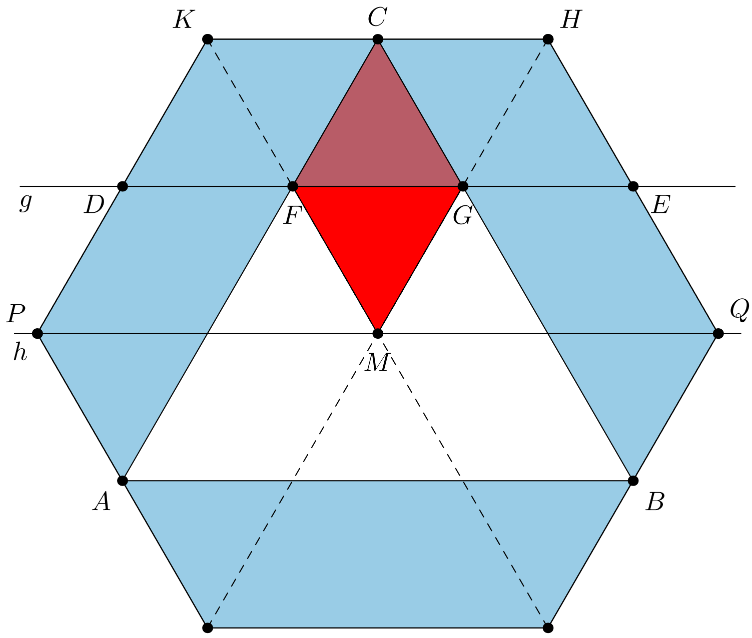
(d) Ermittle den prozentualen Anteil des Mitsubishi-Logos am Seckseck.

Lösung: (a)



Das Bild ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.
Zeichne zunächst einen Kreis mit Radius 6 cm. Um die Eckpunkte auf der Kreislinie zu erhalten, trägst du den Kreisradius 6-Mal auf der Kreislinie ab. Beginne am linken oder am rechten Eckpunkt, dann liegen die oberste und die unterste Seite des Sechsecks waagrecht. Verbinde dann dünn mit dem Bleistift immer zwei entsprechende Seitenmittelpunkte miteinander, so wie es die Zeichnung darstellt.
Damit bist du praktisch fertig. Es gilt jetzt nur noch, die entstandenen Teilflächen entsprechend auszumalen.

(b)



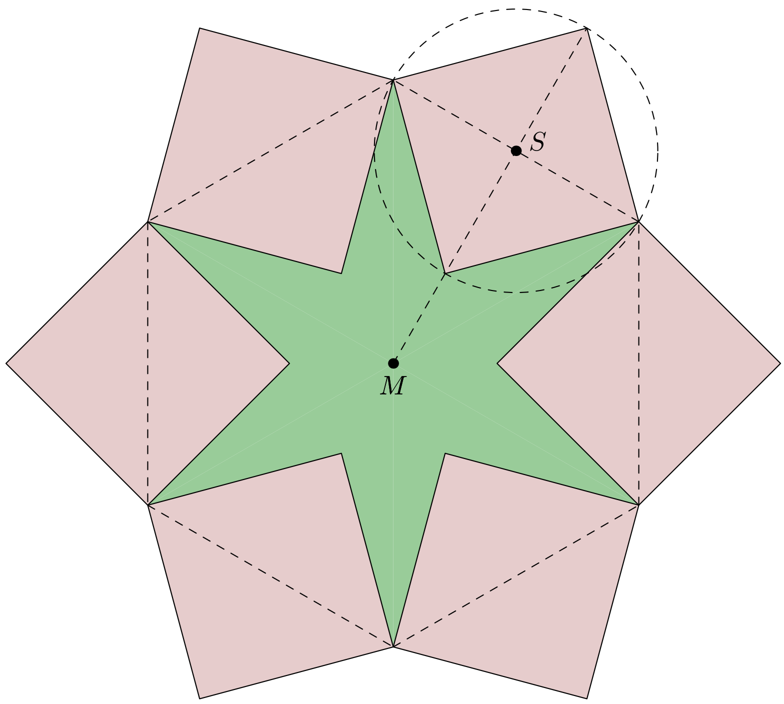
Die beiden gestrichelten Linien und die Zentrale h zerlegen das regelmäßige Seckseck in 6 kongruente gleichseitege Dreiecke.

Also sind die Vierecke $PMHK$ und $MQHK$ kongruente Rauten. Weil die Punkte D und E Seitenmittelpunkte des Sechsecks sind, schneidet die Gerade g die Rautendiagonalen $[KM]$ bzw. $[MH]$ in den Rautenmittelpunkten F und G.
Damit sind die Punkte F und G Seitenmittelpunkte des Dreiecks MHK. Also gilt: $\Delta FGC \cong \Delta MGF$. Das Viereck $MGCF$ ist eine Raute.
Durch Drehung um $120°$ lässt sich ein rotes Viereck mit einem anderen zur Deckung bringen.

(c) Betrachte erneut die Figur in der Lösung der Aufgabe (b):
Die drei gefärbeten Trapeze sind kongruent. Also ist das Dreieck ABC gleichseitig. Aus Symmetriegründen müssen dann alle 3 weißen, alle drei roten und alle sechs grünen Rauten in der Ausgangsfigur kongruent sein.
Das Seckseck enthält 12 Rauten, der Stern enthält 6 Rauten und die Mitsubishi-Figur enthält 3 Rauten.
Prozentualer Anteil des Sterns am Sechseck: $\dfrac{6\,\text{Rauten}}{12\,\text{Rauten}} = 0,5 = 50\%$.

(d) Prozentualer Anteil des Logos am Sechseck: $\dfrac{3\,\text{Rauten}}{12\,\text{Rauten}} = 0,25 = 25\%$.

23.



Die Figur ist dem Logo eines Verlages in München nachempfunden. Ihr liegt ein regelmäßiges Sechseck zugrunde. Die sechs Seiten sind jeweils die Diagonalen der Quadrate. Im Inneren ist ein Stern zu sehen.

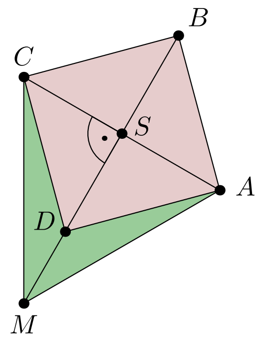
(a) Zeichne zunächst das regelmäßige Sechseck mit einer Seitenlänge von 6 cm. Füge dann die Quadrate hinzu.

(b) Berechne den Flächeninhalt eines Quadrates.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Sterns.

Lösung: (a) Zeichne zunächst einen Kreis mit Radius 6 cm. Um die Eckpunkte auf der Kreislinie zu erhalten, trägst du den Kreisradius 6-mal auf der Kreislinie ab. Beginne am oberen, dann am unteren Eckpunkt.
Um die Quadrate zu kostruieren, zeichnetst du am besten einen THALES-Kreis, dessen Durchmesser irgendeine Seite des regelmäßigen Sechsecks ist. Ein solcher ist schon in der Darstellung oben gestrichelt eingezeichnet. Beachte sodann, dass die Diagonalen in jedem Qaudrat gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen. Die Eckpunkte der restlichen Quadrate erhältst du z.B. durch Punkt- bzw. Achsenspiegelungen.

(b)

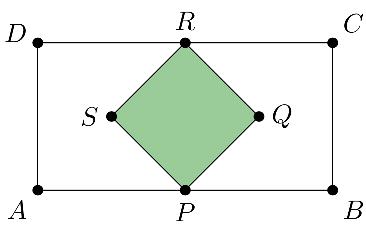


Dieser Ausschnitt der Gesamtfigur ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

(c) Die Diagonalenlänge jedes der 6 Quadrate beträgt 6 cm.
$\Rightarrow \quad A_{\text{Quadrat}} = \frac{1}{2} \cdot 6^2\,\text{cm}^2 = 18\,\text{cm}^2$

(d) Berechne zunächst den Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks. Es besteht aus 6 kongruenten gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge 6 cm.
$\Rightarrow \quad A_{\text{Sechseck}} = 6 \cdot \frac{6^2}{4} \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 54\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \approx 93,53\,\text{cm}^2.$
Um den Stern zu erhalten, musst du aus diesem Sechseck 6 halbe Quadrate ausschneiden.
Die Fläche des Sterns erhältst du also dadurch, dass du von seinem Flächeninhalt den von 3 Quadraten subtrahierst:
$A_{\text{Stern}} = 54\sqrt{3}\,\text{cm}^2 - 3 \cdot 18\,\text{cm}^2 = 18(3\sqrt{3} - 4)\,\text{cm}^2 \approx 21,53\,\text{cm}^2.$

24.



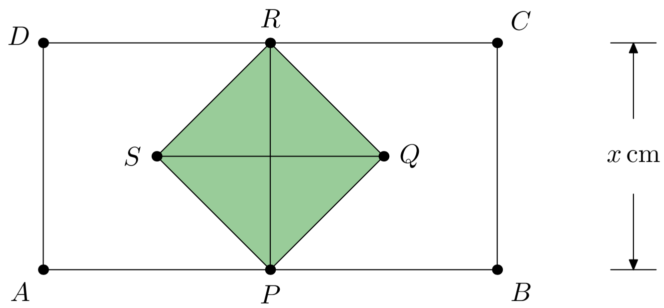
Die Seite $[AB]$ des Rechtecks $ABCD$ ist $6\,\text{cm}$ und die Seite $[BC]$ ist $x\,\text{cm}$ lang. Die Punkte P und R sind die Mittelpunkte der betreffenden Rechtecksseiten. Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat.

(a) • Zeichne die Figur für $x = 3$.
  • Wie viel Prozent der Rechtecksfläche nimmt das Quadrat jetzt ein?

(b) • Zeichne die Figur für $x = 8$.
  • Für welche Belegungen von x liegen die Punkte S und Q des Quadrates nicht außerhalb des Rechtecks? Begründe.

(c) Berechne x so, dass das Quadrat 40% der Rechtecksfläche bedeckt.

Lösung: (a) • $x = 3$:

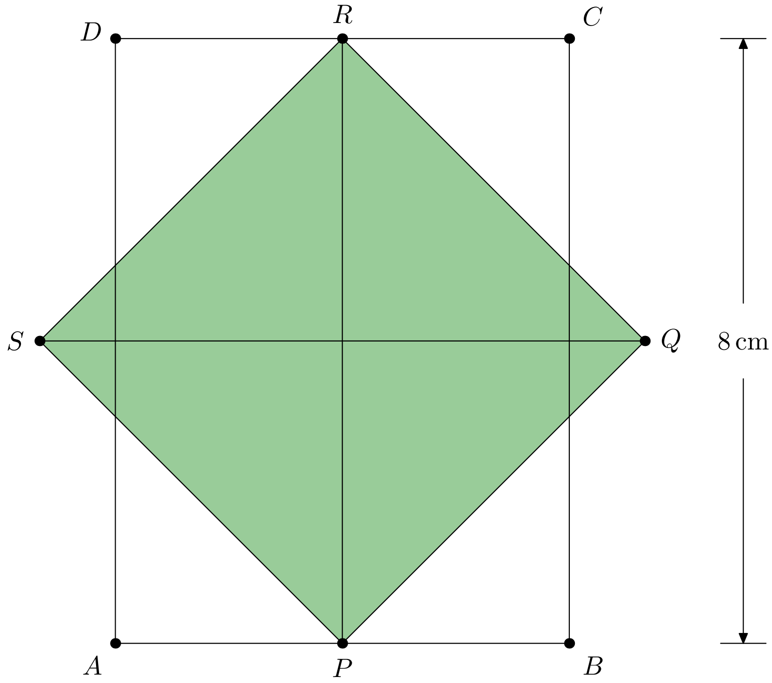


• In jedem Quadrat stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht. Außerdem sind sie gleich lang, und sie halbieren sich. Also gilt $\overline{PR} = \overline{SQ} = 3\,\text{cm}$.
Flächeninhalt des Quadrates: $A_Q = \frac{1}{2} \cdot 3^2\,\text{cm}^2 = 4,5\,\text{cm}^2$.

Flächeninhalt des Rechtecks: $A_R = 6\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 18\,\text{cm}^2$.

Flächenanteil: $\frac{A_Q}{A_R} = \frac{4,5\,\text{cm}^2}{18\,\text{cm}^2} = 0,25 = 25\%$.

(b) • $x = 8$:



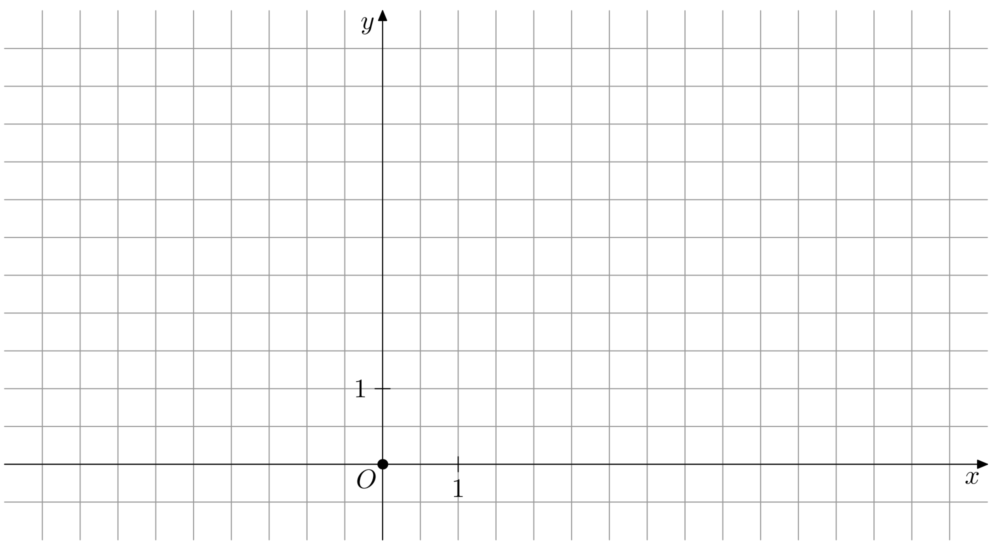
- Es muss gelten: $\overline{SQ} = x\,\text{cm} \leqq 6\,\text{cm}$, also $x \leqq 6$. (Dann wird das Rechteck $ABCD$ selbst zum Quadrat.)

(c)

$$\frac{A_Q}{A_R} = \frac{0,5 \cdot x^2}{6x} = 40\% = 0,4 \text{ mit } x \in \mathbb{R}^+.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{0,5 \cdot x}{6} = 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4,8.$$

25.



Die Punkte D_n liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 0,5x+2$. Sie besitzen jeweils den gleichen Abszissenwert x wie die Punkte $A_n(x \mid 0)$. Zusammen mit den Punkten B_n und C_n entstehen dadurch Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ wobei Folgendes gilt: $C_n \in g$, $\overline{A_nB_n} = 3\,\text{LE}$ und $[A_nD_n] \parallel [B_nC_n]$.

(a) Zeichne die Gerade g und für $x = -1$ und $x = 4$ die beiden Trapeze $A_1B_1C_1D_1$ bzw. $A_2B_2C_2D_2$ in das obige Koordinatensystem.

(b) Berechne alle Belegungen von x, für die es Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ gibt.

(c) Zeige: $C_n(x + 3 \mid 0,5x + 3,5)$.

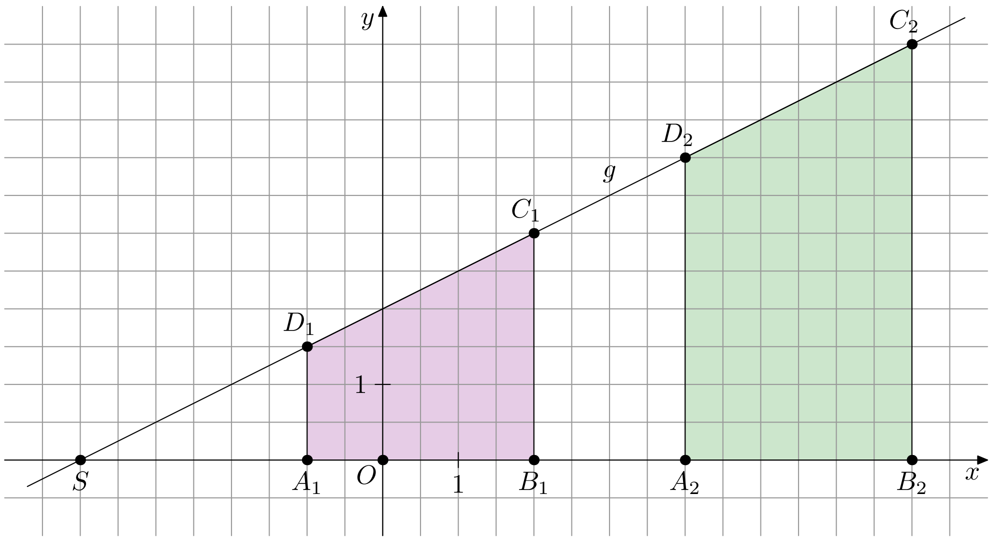
(d) Zeige: Für den Flächeninhalt A aller Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ gilt in Anhängigkeit von x:

$$A(x) = (1,5x + 8,25)\,\text{FE}$$

(e) Unter allen Trapezen $A_nB_nC_nD_n$ gibt es eines, das einen Flächeninhalt von $53,25\,\text{FE}$ aufweist. Berechne x.

(f) Unter allen Trapezen $A_nB_nC_nD_n$ gibt es das Trapez $A_3B_3C_3D_3$, dessen Seite $[B_3C_3]$ fünf Mal so lang ist wie die Seite $[A_3D_3]$. Berechne x.

Lösung: (a)



(b) Die Gerade g schneidet die x-Achse im Punkt S. Wenn einer der Punkte D_n auf S liegt, dann entartet das betreffende Trapez zum Dreieck; es ist also kein Trapez mehr. Falls einer der Punkte D_n im III. Quadranten liegt, wird der Umlaufsinn der Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ falsch.
$g \cap \{x - Achse\} = \{S\}: \quad \Rightarrow \quad 0,5x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4.$
Also gibt es nur für $x > -4$ solche Trapeze $A_nB_nC_nD_n$.

(c) Wegen $C_n \in g$ gilt: $C_n(x_C \mid 0,5x_C + 2) \wedge x_C = x + 3$
$\Rightarrow \quad C_n(x + 3 \mid 0,5 \cdot (x + 3) + 2) = (x + 3 \mid 0,5x + 3,5)$.

(d) $A_{A_nB_nC_nD_n} = \dfrac{\overline{A_nB_n} + \overline{D_nC_n}}{2} \cdot \overline{A_nB_n}$

$$A(x) = \left[\frac{(0,5x+2)+(0,5x+3,5)}{2}\right] \cdot 3\,\mathrm{FE}$$

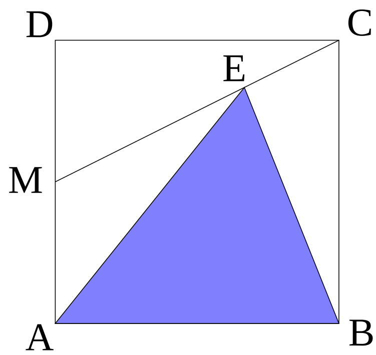
$$A(x) = (1,5x+8,25)\,\mathrm{FE}$$

(e) $1,5x + 8,25 = 53,25 \quad \Leftrightarrow \quad x = 30.$

(f) $\overline{B_nC_n} = 5 \cdot \overline{A_nD_n} \quad \Leftrightarrow \quad 0,5x + 3,5 = 5 \cdot (0,5x + 2) \Leftrightarrow \quad x = -3,25$

Anmerkung: Zur Veranschaulichung der Lösung gibt es die Datei 09eh065.gxt.

26.



Die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ beträgt 6 m. Der Punkt M halbiert die Seite $[AD]$. Die Dreiecke AEM und BCE sind flächengleich.

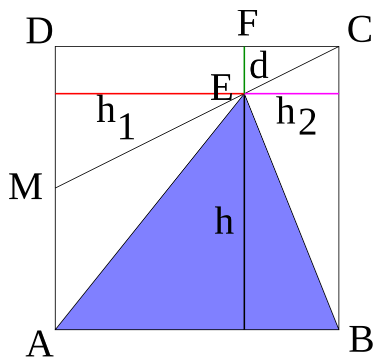
(a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks DMC.

(b) Begründe: Der Abstand des Punktes E zur Seite $[AD]$ ist doppelt so groß wie der zur Seite BC.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABE.

Quelle: Bayerischer Mathematiktest 1998

Lösung:



(a) $A_{\Delta DMC} = 0,5 \cdot \overline{DC} \cdot \overline{DM} = 0,5 \cdot 6\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m} = 9\,\mathrm{m}^2$

(b) Zeichne zunächst die beiden genannten Abstände ein. (Hier: h_1 und h_2)
Den Flächeninhalt von Dreiecken berechnest du gewöhnlich mit dem Term

$$0,5 \cdot \mathit{Grundlinie} \cdot \mathit{Höhe}$$

Wähle als Grundlinie in den beiden Dreiecken AEM und BCE die Strecken $[AM]$ bzw. $[CD]$. Es gilt hier $\overline{AM} = 3\,\mathrm{m}$ und $\overline{BC} = 6\,\mathrm{m}$.
Weil die beiden Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben, muss zum Ausgleich die zugehörige Höhe h_1 doppelt so groß wie die Höhe h_2 sein:
$h_1 = 4\,\mathrm{m}$ und $h_2 = 2\,\mathrm{m}$.

(c) Zeichne zunächst den Abstand d des Punktes E zur Seite $[BC]$ mit dem Fußpunkt F und die Höhe h des Dreiecks ABE ein.
Die beiden Dreiecke MCD und ECF sind zueinander ähnlich:
Die Strecke $[DF]$ ist doppelt so lang wie die Strecke $[FC]$. Das bedeutet:

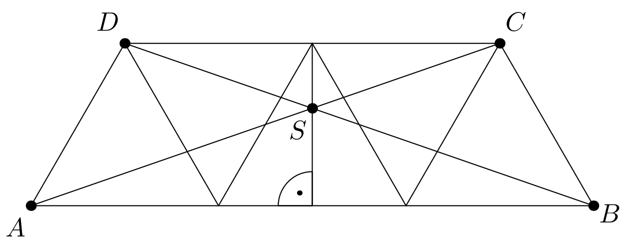
$$\overline{FC} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DC}.$$

Wegen der Ähnlichkeit muss dieses Verhältnis auch für die beiden anderen Katheten der Dreiecke MCD und ECF gelten:

$$\overline{FD} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DM} = 1\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad h = 5\,\mathrm{m}.$$

$$\Rightarrow \quad A_{ABE} = 0,5 \cdot 6\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{m}^2$$

27.



Fünf gleichseitige Dreiecke wurden zu dem Trapez $ABCD$ zusammengefügt.

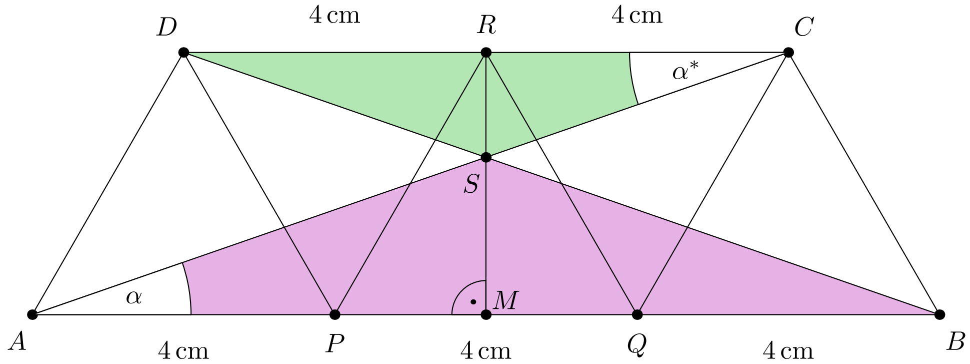
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 12\,\mathrm{cm}$.

(b) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke DSC und ABS.

(c) In welchem Verhältnis teilt der Diagonalenschnittpunkt S die Trapezhöhe?

(d) Berechne den prozentualen Anteil der Fläche des Dreiecks DSC am Trapez $ABCD$.

Lösung: (a)



(b) Die beiden Dreiecke ABS und DSC sind zueinander ähnlich: Es gilt z.B.: $\alpha = \alpha^*$ (Z-Winkel).

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{AB}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{DSC}}{A_{ABS}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

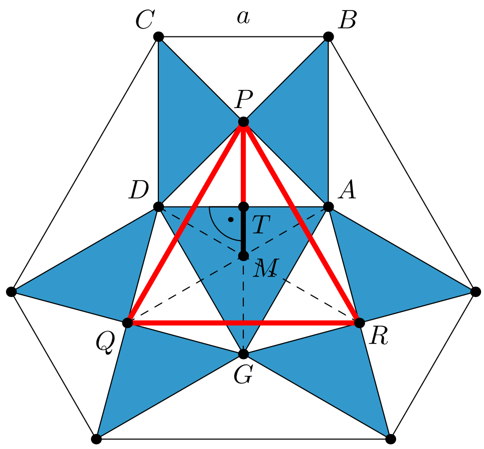
(c) Es muss gelten: $\overline{RS} : \overline{SM} = 2 : 3$. (Siehe Lösung (a).)

(d) Für die Trapezhöhe $[RM]$ gilt: $\overline{RM} = \frac{4}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{cm} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.
Wegen des Teilverhaltnisses von $2 : 3$ teilst du gedanklich $[RM]$ in $2 + 3 = 5$ gleiche Teile. 3 Teile davon entfallen auf die Strecke $[SM]$ und 2 Teile davon entfallen auf die Strecke $[RS]$. Also:

$$\overline{RS} = \frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{3}\,\mathrm{cm} = 0,8\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \overline{SM} = \frac{3}{5} \cdot 2\sqrt{3}\,\mathrm{cm} = 1,2\sqrt{2}.$$

$$\frac{A_{DSC}}{A_{ABCD}} = \frac{0,5 \cdot 8\,\mathrm{cm} \cdot 0,8\sqrt{2}\,\mathrm{cm}}{0,5 \cdot (12+8)\,\mathrm{cm} \cdot 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}} = \frac{4}{25} = 16\%$$

28.

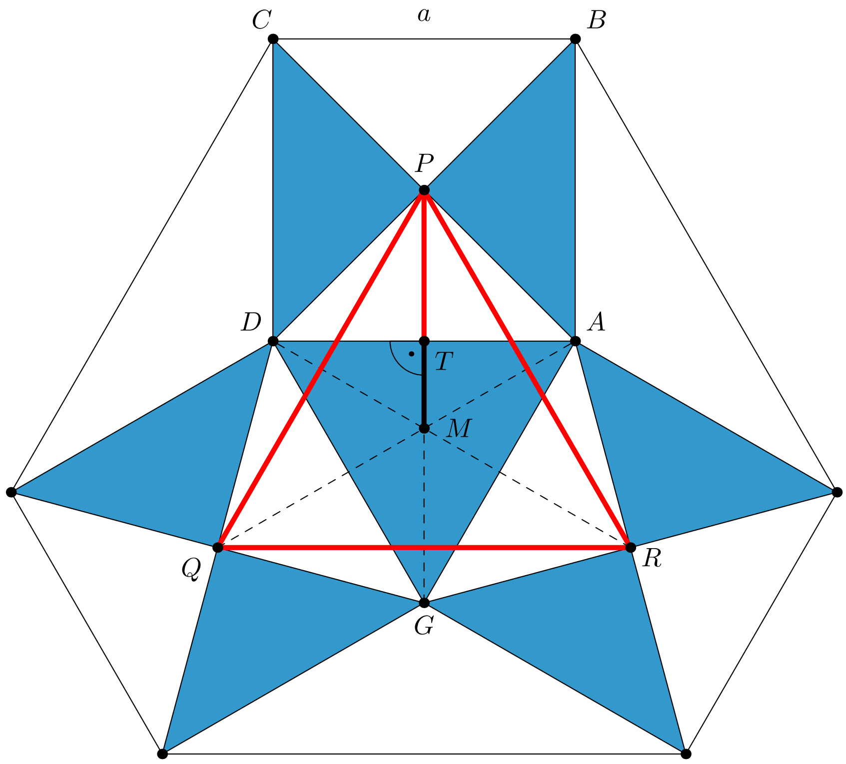


Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Im Zentrum befindet sich das gleichseitige Dreieck ADG. Das Dreieck PQR und die gestrichelten Strecken wurden zusätzlich eingezeichnet. Die Länge der Quadratseite $\overline{BC}$ ist a.

(a) Zeichne die Figur für $a = 4\,\text{cm}$.

(b) Vergleiche den Flächeninhalt der beiden gleichseitigen Dreiecke ADG und PQR in Prozent.

Lösung: (a)



- Am besten beginnst du mit dem gleichseitigen Dreieck ADG im Zentrum.
- Errichte dann die drei Quadrate über den Seiten dieses Dreiecks ADG.

(b) Der Punkt M ist das Zentrum des Logos und gleichzeitig der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks ADG.
Die Strecke $[MT]$ stellt ein Drittel der Höhe h dieses gleichseitigen Dreiecks dar:

$$\overline{MT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3}$$

Für die Strecke $[MP]$ gilt: $\overline{MP} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3} + \frac{1}{2}a = \frac{a}{6}(\sqrt{3}+3)$.

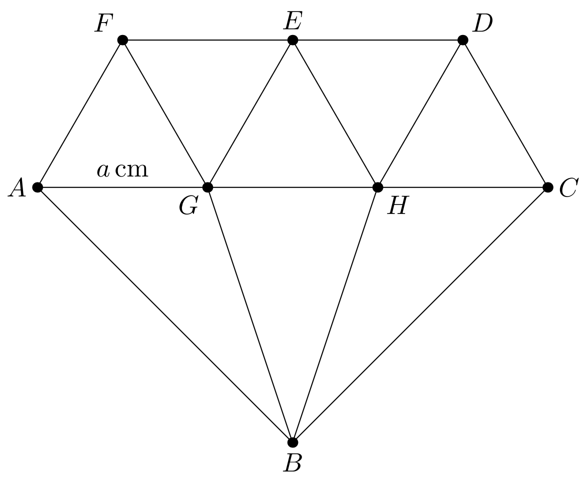
Die Strecke $[MP]$ stellt zwei Drittel der Höhe h^* des gleichseitigen Dreiecks PQR dar:

$$\frac{2}{3} \cdot h^* = \frac{a}{6}(\sqrt{3}+3) \quad \Rightarrow \quad h^* = \frac{a}{4}(\sqrt{3}+3)$$

Nun gilt: $\frac{A_{ADG}}{A_{PQR}} = \left(\frac{h}{h^*}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{4}(\sqrt{3}+3)}\right)^2 \approx 0{,}5359 = 53{,}59\%$

Das bedeutet: Das Dreieck PQR besitzt knapp 54% des Flächeninhaltes des Dreiecks ADG.

29.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Viereck $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken mit der jeweiligen Seitenlänge a cm zusammensetzt.

(a) Zeichne die Figur für $a = 3$.

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A_1 des Vierecks $BHEG$ gilt in Abhängigkeit von a:

$$A_1(a) = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3} + 3\right)\ \mathrm{cm}^2$$

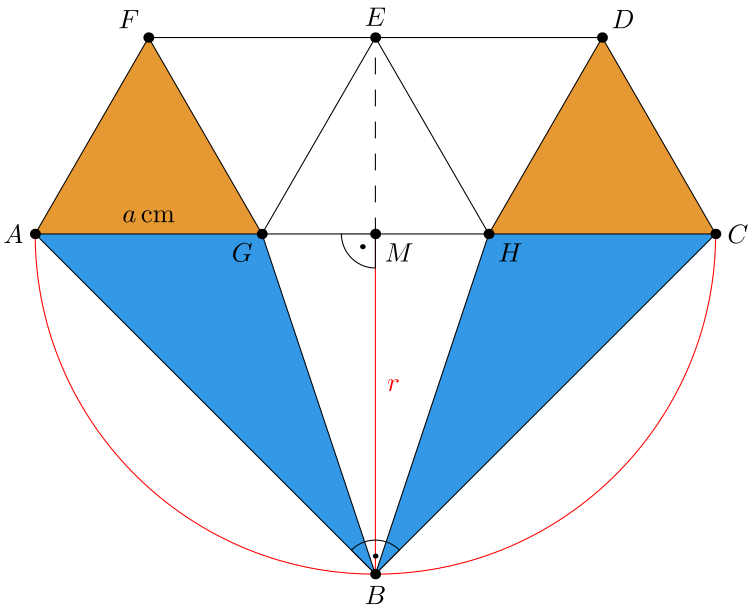
(c)
- Begründe: Das Viereck $ABGF$ besitzt den gleichen Flächeninhalt wie das Viereck $BHEG$.
- Begründe: Das Viereck $BHEG$ bedeckt weniger als ein Drittel der Fläche des Fünfecks $ABCDF$.

(d) Zeige: Für den Flächeninhalt A_2 des Vierecks $BHEG$ gilt in Abhängigkeit von a:

$$A_2(a) = \frac{a^2}{4}\left(5\sqrt{3} + 9\right)\ \mathrm{cm}^2$$

(e) Wie viel Prozent der Fläche des Fünfecks $ABCDF$ wird vom Viereck $BHEG$ eingenommen?

Lösung: (a)



(b) Das Viereck $BHEG$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, der sich aus den beiden Dreiecken BHG und GHE zusammensetzt.
Der THALES-Halbkreis mit dem Durchmesser $[AC]$ und dem Radius r macht deutlich, dass $\overline{AM} = \overline{MB} = 1,5\,a\,\text{cm}$ gilt.

$$A_1(a) = \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot 1,5\,a + \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right)\,\text{cm}^2 = \left(\frac{3}{4}\,a^2 + \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right)\,\text{cm}^2$$

$$A_1(a) = \frac{a^2}{4}(\sqrt{3} + 3)\,\text{cm}^2$$

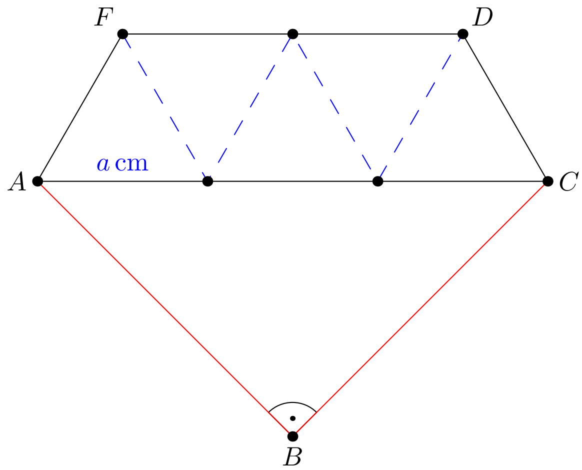
(c)
- Die Dreiecke AGF und GHE sind kongruent, also flächengleich. Die beiden Dreiecke ABG und BHG haben gleich lange Grundlinien: $\overline{AG} = \overline{GH}$.
  Der Kreisradius r stellt stellt die gemeinsame Höhe auf die beiden genannten Grundlinien dar (im Dreieck ABG liegt diese Höhe außerhalb). Also sind beide Dreiecke flächengleich. Damit sind auch beide Vierecke flächengleich.
- Die beiden Vierecke $ABGF$ und $BCDH$ sind aus Symmetriegründen kongruent, also flächengleich. Daher sind im Fünfeck $ABCDF$ drei Vierecke von der Größe des Vierecks $BHEG$ und zusätzlich noch die beiden gleichseitigen Dreiecke AGF und HCD enthalten.
  Also bedeckt das Viereck $BHEF$ weniger als ein Drittel der Fläche des Fünfecks $ABCDF$.

(d) $$A_2(a) = \left(5 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 1,5a\right)\,\text{cm}^2 = \frac{a^2}{4}\left(5\sqrt{3} + 9\right)\,\text{cm}^2$$

(e) $$\frac{A_1(a)}{A_2(a)} = \frac{\frac{a^2}{4}(\sqrt{3} + 3)\,\text{cm}^2}{\frac{a^2}{4}\left(5\sqrt{3} + 9\right)\,\text{cm}^2} \approx 0,2679 = 26,79\%$$

Das Viereck $BHEG$ bedeckt also etwas mehr als 25% der Fünfecksfläche.

30.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Viereck $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken mit der jeweiligen Seitenlänge a cm zusammensetzt.

(a) Zeichne die Figur für $a = 3$.

(b) Vergleiche den Flächeninhalt des Vierecks $ACDF$ mit dem des Dreiecks ABC.

Lösung: (a) Klar.

(b) Bei dem Viereck $ACDF$ handelt es sich um ein achsensymmetrisches Trapez. Dessen Flächenterm könntest du zwar ohne Weiteres aufstellen, aber die Summe der Flächeninhalte der fünf gleichseitigen Dreiecke ist bequemer:

$$A_{ACDF} = 5 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2 = \frac{a^2}{4} \cdot 5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$$

Das Dreieck ABC ist ein halbes Quadat mit der Diagonalenlänge $\overline{AC} = 3a$ cm:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3a)^2\,\mathrm{cm}^2 = \frac{a^2}{4} \cdot 9\,\mathrm{cm}^2$$

Der Faktor $\frac{a^2}{4}$ taucht in beiden Flächentermen auf.

Also musst du nur noch den Rest vergleichen, nämlich $5\sqrt{3}$ mit 9:
$5\sqrt{3} < 8{,}67 < 9$. Also ist der Flächeninhalt des Trapezes $ACDF$ kleiner als der des Dreiecks ABC. (Das Trapez ist jedoch nur um knapp 4% kleiner als das Dreieck.)

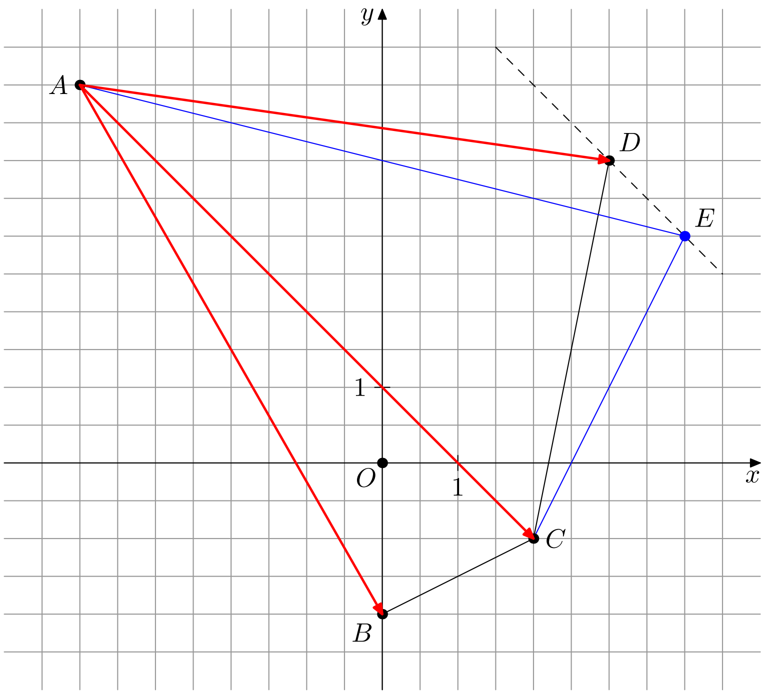
31. Gegeben ist das Viereck $ABCD$ durch $A(-4 \mid 5), B(0 \mid -2), C(2 \mid -1)$ und $D(3 \mid 4)$.

(a) Zeichne dieses Viereck in ein Koordinatensystem.
Platzbedarf: $-5 \leqq x \leqq 4$ und $-3 \leqq y \leqq 6$

(b) Berechne den Flächeninhalt dieses Vierecks.

(c) Ersetze in der Zeichnung den Punkt D durch einen anderen Punkt E, so dass das Viereck $ABCE$ den gleichen Flächeninhalt aufweist wie das Viereck $ABCD$.

Lösung: (a)



(b)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0+4 \\ -2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

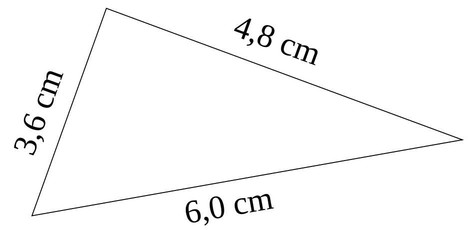
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{ABCD} = \left[\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & -6 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \right] \mathrm{cm}^2 = 27\,\mathrm{cm}^2$$

(c) Z.B.: $E(4 \mid 3)$ (siehe Zeichnung).
Anmerkungen:
Wenn der Punkt D seine Lage verändert, dann bleibt der Flächeninhalt des Dreiecks ABC konstant. Also musst du nur darauf achten, dass der Punkt D so platziert wird, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ACD unverändert bleibt.
Egal, wo du den Punkt D hinlegst: Die Grundlinie $[AC]$ des Dreiecks ACD bleibt erhalten. Damit sich der Flächeninhalt dieses Dreiecks nicht ändert, muss also die Höhe und damit der Abstand des Punktes D zur Grundlinie $[AC]$ unverändert bleiben.
Der gesuchte Punkt E muss sich dann auf der Parallelen (siehe gestrichelte Linie) zur

Diagonalen $[AC]$ durch den Punkt D aufhalten, weil alle Punkte auf dieser Parallelen den gleichen Abstand zur Grunlinie $[AC]$ besitzen. Es gibt daher beliebig viele Lösungen.

32.



Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.

Lösung: Es gilt: $3,6^2 + 4,8^2 = 6^2$ Also ist das Dreieck rechtwinklig.

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 3,6\,\mathrm{cm} \cdot 4,8\,\mathrm{cm} = 8,64\,\mathrm{cm}^2.$$

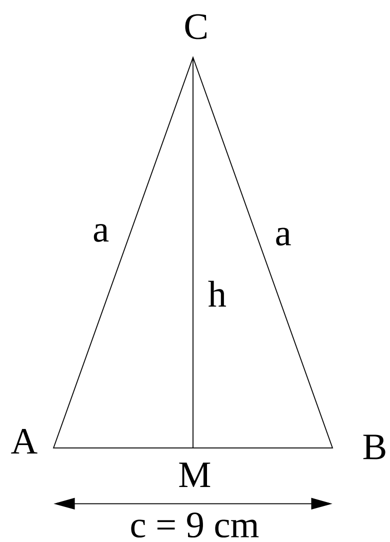
33. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC besitzt einen Flächeninhalt von $27\,\mathrm{cm}^2$. Die Basis $[AB]$ ist $9\,\mathrm{cm}$ lang.

(a) Fertige eine Skizze an. Berechne die Länge der Höhe auf die Basis.

(b) Der Umfang dieses Dreiecks ist $24\,\mathrm{cm}$ lang. Berechne die Länge der Schenkel.

(c) Welche Abmessungen könnte ein Rechteck haben, das denselben Flächeninhalt wie dieses Dreieck aufweist?

Lösung: (a)



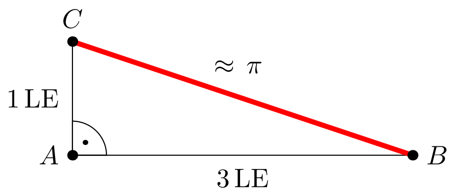
Es gilt also: $27\,\text{cm}^2 = 0{,}5 \cdot 9\,\text{cm} \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = 6\,\text{cm}$.

(b) Hier gilt: $9\,\text{cm} + 2a = 24\,\text{cm} \quad \Leftrightarrow \quad a = 7{,}5\,\text{cm}$.

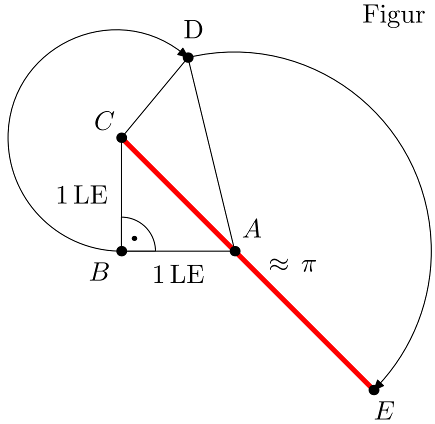
(c) Für das z.B. x cm breite und y cm hohe Rechteck gilt dann:
$x \cdot y = 27$. Es könnte also z.B. 9 cm breit und 3 cm hoch sein oder 20 cm breit und 1,35 cm hoch sein oder ...

34.

Figur 1



Figur 2



Im Jahre 1882 bewies der deutsche Mathematiker Ferdinand LINDEMANN, dass die Konstruktion einer Strecke mit der Länge π LE nicht möglich ist, wenn man nur Zirkel und Lineal verwendet.
Die Konstruktion einer solchen Streckenlänge kann also mit Zirkel und Lineal nur näherungsweise erfolgen:
Die Streckenlängen $\overline{BC}$ in der Figur 1 und $\overline{CE}$ in der Figur 2 stellen zwei Ergebnisse von Näherungskonstruktionen einer Strecke mit der Maßzahl π LE dar, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit die Konstruktion rechter Winkel mit Zirkel und Lineal weggelassen worden ist.

(a)
- Berechne den Näherungswert für π in der Figur 1.
- Berechne die prozentuale Abweichung dieses Näherungswertes vom Taschenrechnerwert für π auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

(b)
- Berechne die Streckenlänge $\overline{CE}$ in der Figur 2.
- Vergleiche die beiden Näherungen für π in der Figur 1 und in der Figur 2.
- ARCHIMEDES benutzte für π den Wert $\frac{22}{7}$. Vergleiche diesen Wert mit π auf deinem Taschenrechner und mit dem Wert aus der Figur 2.

(c) Laut einem Tabellenwerk ist der Äquatorradius r der Erde $6378{,}388\,\text{km}$ lang. Beachte für die Lösung der folgenden Aufgaben, dass immer nur drei Nachkommastellen verwendet werden dürfen, weil der Erdradius auch auf drei Nachkommastellen angegeben ist (warum eigentlich?).

- Berechne die Äquatorlänge l_1 mit Hilfe des Näherungswertes $\overline{CE}$.
- Berechne die Äquatorlänge l_2 mit Hilfe von π auf deinem Taschenrechner.
- Wie groß ist die Differenz dieser beiden Ergebnisse?
- Für wie schwerwiegend hältst du diesen Unterschied? Begründe.

Lösung: (a)

- Figur 1: $\pi \approx \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \approx 3,162\,227\,766\ldots$
- Taschenrechner: $\pi \approx 3,141\,592\,654\ldots$

$$\frac{3,162\,227\,766 - 3,141\,592\,654}{3,141\,592\,654} \approx 0,0066 = 0,66\%$$

(b)

- $\Delta\, BAC: \quad \overline{AC} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
  $\Delta\, ADC: \quad \overline{DE} = \overline{AD} = \sqrt{\sqrt{2}^{\,2} + 1^2} = \sqrt{3}$
  Also $\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3,146\,264\,37\ldots.$
- Beim Näherungswert für π in der Figur 1 stimmt die erste Kommastelle und in der Figur 2 stimmen die erste und die zweite Kommastelle.
- ARCHIMEDES: $\frac{22}{7} = 3,142\,857\,143\ldots$
  Taschenrechner: $\pi = 3,141\,592\,654\ldots$
  Figur 2: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,146\,264\,37\ldots.$

(c)

- $l_1 = 2 \cdot 6378,388\,\text{km} \cdot 3,146 \approx 40\,132,871\,\text{km}$
- $l_2 = 2 \cdot 6378,388\,\text{km} \cdot 3,142 \approx 40\,081,790\,\text{km}$
- $\Delta l \approx 51\,\text{km}$.
- Dieser Unterschied ist praktisch bedeutungslos, weil der Erdäquator nur näherungsweise eine Kreisline darstellt.
  Außerhalb der Meeresoberfläche führt die Äuatorline z.B. in Ecuador in Südamerika über die Andenkette hinweg oder in Kenia in Afrika dicht an dem über 5000 m Mount Kenia vorbei.
  Auch die Ozeane bilden keine einheitliche Oberfläche. Der Meeresspiegel variiert global in seiner Höhe bis zu 200 m.

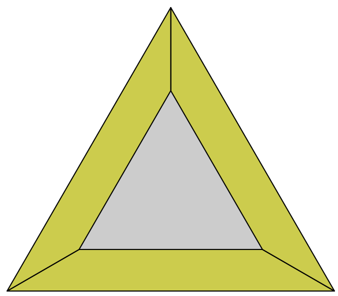
35. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = x^2 - 9$ und der Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Entscheide, ob folgende Aussagen über den Graphen von f jeweils richtig oder falsch sind.

	richtig	falsch
Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt. (0|9)	[ ]	[ ]
Der Punkt (4|6) liegt auf dem Graphen.	[ ]	[ ]
Für $x \in]-3;3[$ verläuft der Graph unterhalb der x-Achse.	[ ]	[ ]
Der Graph ist zur y-Achse symmetrisch.	[ ]	[ ]

Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2005

Lösung: falsch, falsch, richtig, richtig

36.



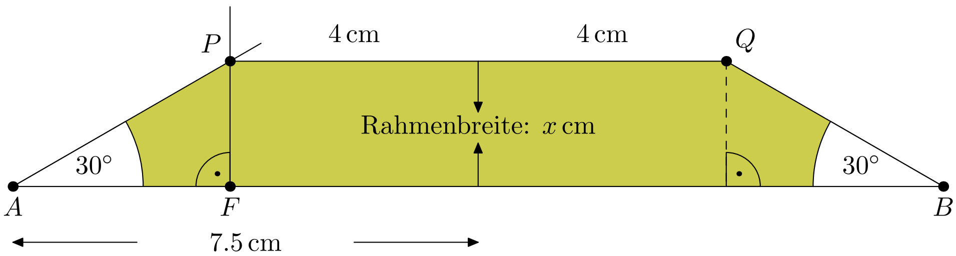
Schreinermeister Sägebricht fertigt den Holzrahmen für einen Spiegel in Form eines gleichseitigen Dreiecks an. Die Seitenlänge des äußeren Dreiecks beträgt $1,50\,\mathrm{m}$, die des inneren Dreiecks $0,80\,\mathrm{m}$.

(a) Zeichne die drei Teilstücke des Rahmens im Maßstab $1:10$. Schneide sie aus und klebe sie richtig zusammengefügt in dein Heft.

(b) Berechne die Rahmenbreite.
Du könntest dabei folgendermaßen vorgehen:

- Berechne den Flächeninhalt eines der drei Teilstücke des Rahmens aus den Flächeninhalten der beiden gleichseitigen Dreiecke.
- Berechne daraus die Rahmenbreite.

Lösung: (a)



Die Seiten der beiden gleichseitigen Dreiecke sind in deiner Zeichnung 15 cm bzw. 8 cm lang. Alle drei Teilstücke des Rahmens sind kongruente gleichschenklige Trapeze.

1. Zeichne zunächst $[AB]$.
2. Trage am Punkt A den $30°$-Winkel an.
3. Weiter muss gelten: $\overline{AF} = 7,5\,\mathrm{cm} - 4\,\mathrm{cm} = 3,5\,\mathrm{cm}$. Zeichne den Punkt F.
3. Errichte im Punkt F die Senkrechte zu $[AB]$.
4. Dort, wo sich diese Senkrechte mit dem freien Schenkel des $30°$-Winkels schneidet, liegt der Punkt P. Der Punkt Q liegt symmetrisch zum Punkt P.
Jedes deiner gezeichneten Trapeze müsste etwa 2 cm hoch sein.

(b) Flächeninhalt des Holzrahmens beträgt:

$$A_{\text{Rahmen}} = \left(\frac{150^2}{4} \cdot \sqrt{3} - \frac{80^2}{4} \cdot \sqrt{3} \right) \text{cm}^2$$

Der Flächeninhalt eines Teilstückes beträgt dann

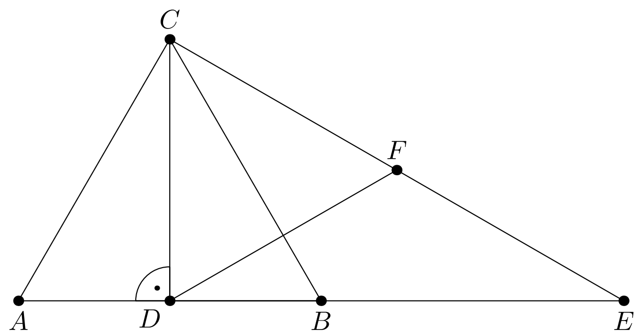
$$A_{\text{Trapez}} = \left[\left(\frac{150^2}{4} \cdot \sqrt{3} - \frac{80^2}{4} \cdot \sqrt{3} \right) : 3 \right] \text{cm}^2 = \frac{4025\sqrt{3}}{3} \approx 2323,83\,\text{cm}^2$$

Nach der Flächenformel für Trapeze gilt dann für die Rahmenbreite x cm (= Trapezhöhe, siehe Zeichnung):

$$\frac{150+80}{2} \cdot x \approx 2323,83 \quad \Rightarrow \quad x \approx 20,21.$$

Meister Sägebricht fertigt also einen Rahmen mit einer Breite von $20,2\,\text{cm}$ an. Holz kann er nicht auf hundertstel Millimeter genau bearbeiten, daher fällt in der Praxis die „1“ an der zweiten Kommastelle weg.

37.



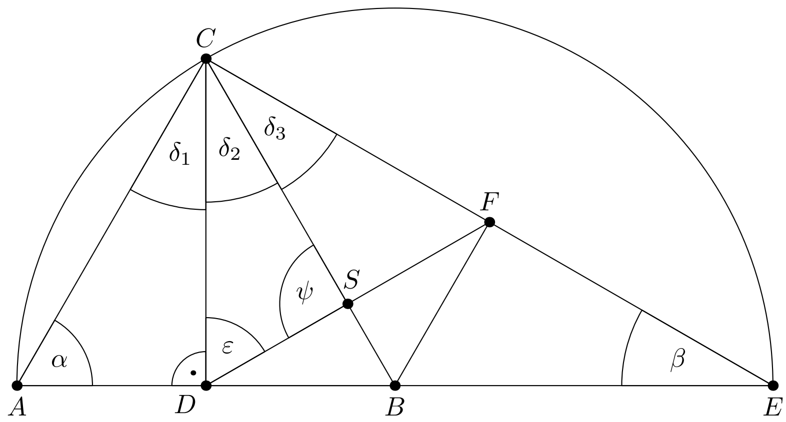
Die beiden Dreiecke ABC und DFC sind gleichseitig.

(a) Zeichne die Figur für $a = \overline{AB} = 5\,\text{cm}$.

(b) Zeichne die Strecke $[FB]$ ein.

(c)
- Begründe: Die Punkte C und E liegen auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius a.
- Begründe: Das Viereck $DBFC$ ist ein achsensymmetrischer Drachen.
- Begründe sowohl mit als auch ohne Rechnung: Das Drachenviereck $DBFC$ besitzt den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck ABC.

Lösung:



(a) Siehe oben.

(b) Siehe oben.

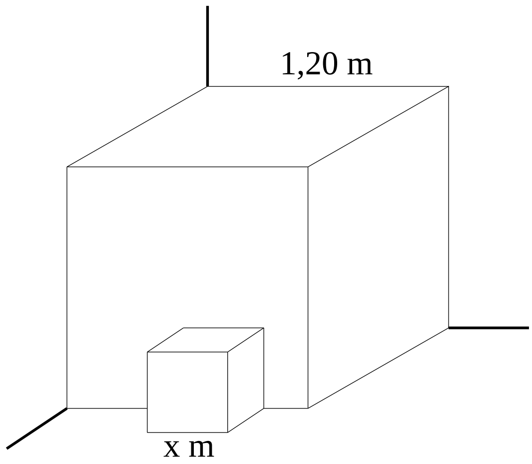
(c)
- Es gilt: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 30°$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\sphericalangle ACE = 90°$.
  Wegen $\alpha = 60°$ folgt $\beta = 30° = \delta_3$.
  $\Rightarrow$ $\quad\overline{BE} = \overline{BC} = \overline{BA} = a$. Also sind die Punkte A, C und E vom Punkt B gleichweit entfernt. Also liegen sie auf eine Kreislinie mit dem Mittelpunkt B. Diese Kreislinie ist der THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$.
- Wegen $\varepsilon = 60°$ und $\delta_2 = 30°$ folgt $\psi = 90°$.
  Also halbiert der Punkt S die Basis des gleichseitigen Dreiecks DEC. Also ist die Halbgerade $[CB$ die Symmetrieachse des Vierecks $DBFC$. Also ist das Viereck $DBFC$ ein achsensymmetrischer Drachen.
- **Ohne Rechnung:**
  Der halbe Drachen DBC bildet die Hälfte des Dreiecks DBC. Also ist der ganze Drachen genauso groß wie das Dreieck ABC.
  Mit Rechnung:

  $$A_{DBFC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DF} \cdot \overline{CB}$$

  $$\overline{DF} = \overline{DC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a \text{ und } \overline{DC} = a.$$

  $$\Rightarrow \quad A_{DBFC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = A_{\Delta ABC}.$$

38.



Familie Subku zieht um. In einer Zimmerecke ihrer neuen Wohnung steht ein würfelförmiger Karton mit einer Kantenlänge von $1,20\,\mathrm{m}$.
Die Möbelpacker haben ihm einen kleineren Karton mit der Kantenlänge $x\,\mathrm{m}$ entnommen und so hingestellt, dass sich eine Seitenfläche des großen und eine des kleinen Kartons berühren. Es stellt sich heraus, dass die einsehbare Oberfläche des großen und die einsehbare Oberfläche des kleinen Würfels übereinstimmen.

(a) Zeige: Es muss dann $x = 0,24 \cdot \sqrt{15}$ gelten.

(b) Wie viel Prozent des Volumens großen Würfels nimmt der kleine Würfel ein?

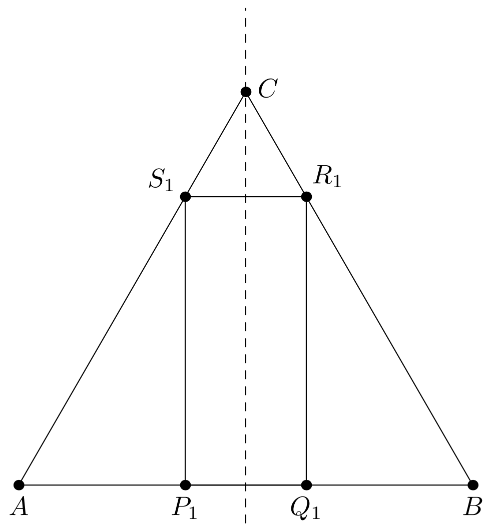
Lösung: (a) Vom großen Würfel sind zwei Seitenflächen voll sichtbar: $A_1 = 2 \cdot 1,2^2\,\mathrm{m}^2$.
Von der vorderen Seitenfläche sind $A_2 = (1,2^2 - x^2)\,\mathrm{m}^2$ zu sehen.
Vom kleinen Würfel sind vier Seitenflächen sichtbar: $A_3 = 4 \cdot x^2\,\mathrm{m}^2$.
Es muss gelten: $A_1 + A_2 = A_3$:

$$2 \cdot 1,2^2 + (1,2^2 - x^2) = 4 \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot 1,2^2 = 5 \cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1,2 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 0,24 \cdot \sqrt{15}.$$

(b) $$\frac{V_{klein}}{V_{groß}} = \frac{\left(0,24 \cdot \sqrt{15}\right)^3}{1,2^3} \approx 0,4648 = 46,48\%$$

39.



In das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Setenlänge $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ werden Rechtecke $P_nQ_nR_nS_n$ mit $\overline{P_nQ_n} = x\,\text{cm}$ so einbeschrieben, wie es die Darstellung anhand des Beispielrechtecks $P_1Q_1R_1S_1$ für $x = 1,6$ zeigt.

(a) Für welche Belegungen von x gibt es solche Rechtecke $P_nQ_nR_nS_n$?

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Rechtecke $P_nQ_nR_nS_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-2x^2 + 12x\right)\,\text{cm}^2$$

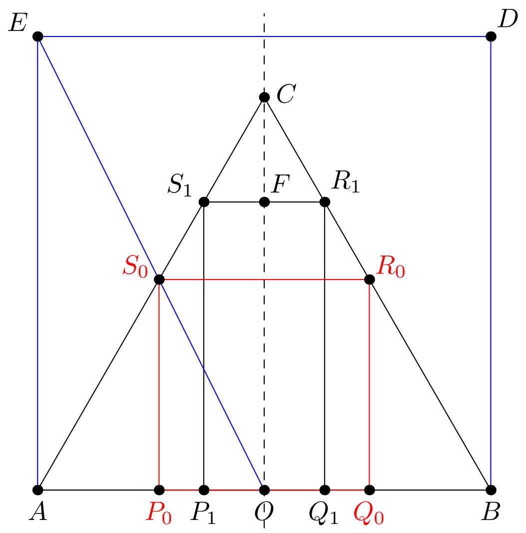
(c) Zeige: $\dfrac{A(x)}{A_{\Delta\,ABC}} = (-0,08x^2 + 0,4x)\,\text{cm}^2$

(d) Unter allen Rechtecken $P_nQ_nR_nS_n$ gibt die Rechtecke $P_2Q_2R_2S_2$ und $P_3Q_3R_3S_3$, die 32% der Fläche des Dreiecks ABC einnehmen. Berechne die zugehörigen Belegungen von x.

(e) Unter allen Rechtecken $P_nQ_nR_nS_n$ gibt es das Quadrat $P_0Q_0R_0S_0$.

- Zeichne dieses Quadrat farbig ein.
- Untersuche, ob das Quadrat $P_0Q_0R_0S_0$ unter allen möglichen Rechtecken $P_nQ_nR_nS_n$ das flächengrößte ist.

Lösung:



(a) $x \in]0; 6[_{\mathbb{R}}$

(b) In diesem Fall geht es auch ohne Vierstreckensatz:
Die beiden rechtwinkligen Dreiecke AP_nS_n und Q_nBR_n lassen sich zu einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $y = 2 \cdot (3 - \frac{x}{2})\,\text{cm} = (6-x)\,\text{cm}$ zusammenfügen.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A_{P_nQ_nR_nS_n} &= A_{\Delta\,ABC} - 2 \cdot A_{\Delta\,AP_nS_n} - A_{\Delta\,S_nR_nC} \\
&= \left[\frac{6^2}{4}\sqrt{3} - \frac{(6-x)^2}{4}\sqrt{3} - \frac{x^2}{4}\sqrt{3}\right]\,\text{cm}^2 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}(36 - 36 + 12x - x^2 - x^2)\,\text{cm}^2 \\
A(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-2x^2 + 12x\right)\,\text{cm}^2
\end{aligned}$$

(c) $$\frac{A(x)}{A_{\Delta\,ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (-2x^2 + 12x)}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2}\,\text{cm}^2 = \frac{1}{18}(-x^2 + 6x)\,\text{cm}^2$$

(d) Es gilt: $\frac{1}{18}(-x^2 + 6x) = 32\% = 0,32 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 6x - 5,76 = 0$
$\Rightarrow \quad x_1 = 1,2$ und $x_2 = 4,8$

(e)
- Siehe Zeichnung oben: Zeichne zunächst ein Probequadrat, z.B. das Quadrat $ABDE$. Weil alle Quadrate und damit alle halben Quadrate zueinander ähnlich sind, muss z.B. der gesuchte Punkt S_0 der Schnittpunkt der Strecken $[AC]$ und $[EO]$ sein. Die Lage der restlichen gesuchten Punkte ist dann klar.
- Die Dreiecke ABC und S_nR_nC sind zueinander ähnlich. Also gilt:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{S_nR_n}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CF}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6}{x} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{18\sqrt{3}}{6 + 3\sqrt{3}} = 12\sqrt{3} - 18.$$

Andererseits gilt nach (b): $A(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4}(-x^2 + 6x)\,\text{cm}^2$.

$A(x) = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot (x-3)^2 + \frac{9}{4}\sqrt{3}\right]\,\text{cm}^2$.

Einerseits beträgt die Seitenlänge des Quadrates $P_0Q_0R_0S_0$ $(12\sqrt{3} - 18)\,\text{cm} \approx 2,78\,\text{cm}$.
Andererseits beträgt die Seitenlänge des maximalen Rechtecks 3 cm.
Also ist das maximale Rechteck kein Quadrat.

40. In ein Rechteck $PQRS$ mit den Seitenlängen $\overline{PQ} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{QR} = 6\,\text{cm}$ werden Dreiecke PA_nB_n einbeschrieben. Dabei gilt:

- $A_n \in [QR]$ und $B_n \in [RS]$
- $\overline{Q_nA} = \overline{SB_n} = x\,\text{cm}$

(a) Zeichne das Rechteck $PQRS$ und für $x = 2$ das Dreieck PA_1B_1.

(b) Für welche Belegungen von x gibt es solche Dreiecke PA_nB_n?

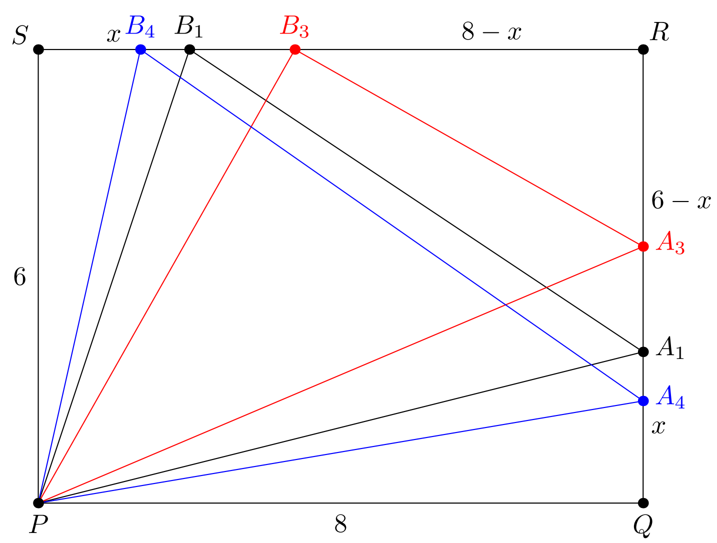
(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Dreiecke PA_nB_n gilt in Abhängigkeit von x:
$$A(x) = (24 - 0,5x^2)\,\text{cm}^2$$

(d) Unter allen Dreiecken PA_nB_n gibt es das Dreieck PA_2B_2, dessen Fläche 34,64% des Rechtecks $PQRS$ bedeckt. Berechne x.

(e) Unter allen Dreiecken PA_nB_n gibt es das rechtwinklige Dreieck PA_3B_3 mit der Hypotenuse $[PA_3]$. Berechne x.

(f) Unter allen Dreiecken PA_nB_n gibt es das gleichschenklige Dreieck PA_4B_4 mit der Basis $[PB_4]$. Berechne x.

Lösung: (a)



(b) $x \in [0; 6]_{\mathbb{R}}$

(c) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned}
A_{\Delta\, PA_nB_n} &= A_{PQRS} - A_{\Delta\, PQA_n} - A_{\Delta\, A_nRB_n} - A_{\Delta\, PB_nS} \\
&= 48 - 0,5 \cdot 8 \cdot x - 0,5 \cdot (8-x) \cdot (6-x) - 0,5 \cdot 6 \cdot x \\
&= 48 - 4x - 24 + 4x + 3x - 0.5x^2 - 3x \\
A(x) &= (24 - 0,5x^2)\,\mathrm{cm}^2
\end{aligned}$$

(d) $24 - 0,5x^2 = 0,3464 \cdot 48 \quad \Rightarrow \quad x = 3,84$

(e) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned}
\overline{PA_n}^{\,2} &= \overline{AB_n}^{\,2} + \overline{PB_n}^{\,2} \\
8^2 + x^2 &= (6-x)^2 + (8-x)^2 + 6^2 + x^2 \\
64 + x^2 &= 36 - 12x + x^2 + 64 - 16x + x^2 + 36 + x^2
\end{aligned}$$

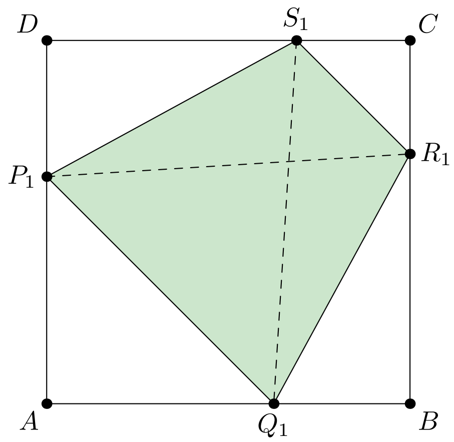
$\Rightarrow \quad x^2 - 14x + 36 = 0 \quad D = 52 \quad \sqrt{D} = 2\sqrt{13}$. Es scheint sogar zwei Dreiecke zu geben. Aber:
$x_1 = 7 + \sqrt{13} \approx 10,61 \notin [0; 6] \quad x_2 = 7 - \sqrt{13} \approx 3,39 \in [0; 6]$
$\Rightarrow \quad L = \{7 - \sqrt{13}\}$, siehe „rotes“ Dreieck.

(f) Wir rechnen nur mit Maßzahlen:

$$\begin{aligned}
\overline{PA_n} &= \overline{A_nB_n} \\
8^2 + x^2 &= (6-x)^2 + (8-x)^2 \\
64 + x^2 &= 36 - 12x + x^2 + 64 - 16x + x^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad x^2 - 28x + 36 = 0 \quad D = 640 \quad \sqrt{D} = 8\sqrt{10}$. Wieder scheint es zwei Dreiecke zu geben.
$x_1 = 14 + 4\sqrt{10} \approx 26,65 \notin [0; 6] \quad x_2 = 14 - \sqrt{10} \approx 1,35 \in [0; 6]$
$\Rightarrow \quad L = \{14 - \sqrt{10}\}$, siehe „blaues“ Dreieck.

41.



In das Quadrat $ABCD$ werden Trapeze $P_nQ_nR_nS_n$ auf die oben dargestellte Weise einbeschrieben.
Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{CR_n} = \overline{CS_n} = x\,\text{cm}$ und $\overline{AP_n} = \overline{AQ_n} = 2x\,\text{cm}$.

(a) Zeichne das Quadrat $ABCD$ und für $x = 2,5$ das Trapez $P_1Q_1R_1S_1$.

(b) Für welche Belegungen von x existieren solche Trapeze $P_nQ_nR_nS_n$?

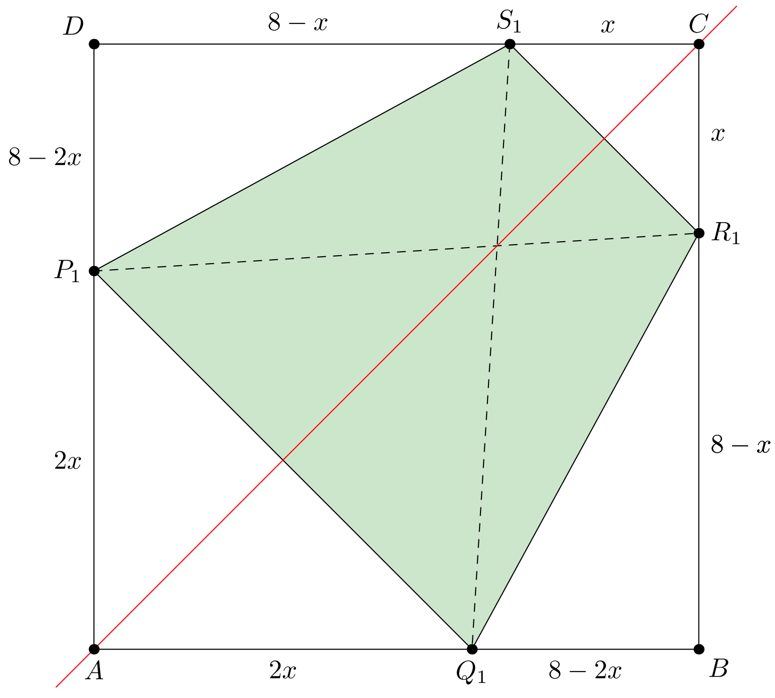
(c)
- Zeige durch Rechnung: Für $x = 2,\overline{6}$ liegt die Diagonale $[S_2Q_2]$ im Trapez $P_2Q_2R_2S_2$ parallel zur Quadratseite $[BC]$ bzw. $[AD]$.
- Begründe: Die Diagonalen des Trapezes $P_2Q_2R_2S_2$ stehen senkrecht aufeinander.

(d) Berechne den Flächeninhalt A der Trapeze $P_nQ_nR_nS_n$ in Abhängigkeit von x, indem du von der Quadratfläche bestimmte Teilflächen subtrahierst.
[Ergebnis: $A(x) = (-4,5x^2 + 24x)\,\text{cm}^2$]

(e)
- Begründe durch Rechnung: Unter allen Trapezen $P_nQ_nR_nS_n$ ist das Trapez $P_2Q_2R_2S_2$, das flächengrößte.
- Begründe: Das flächengößte Trapez $P_2Q_2R_2S_2$ nimmt 50% der Quadratfläche ein.

(f) Untersuche auf verschiedene Weise, ob es unter allen Trapezen $P_nQ_nR_nS_n$ eines gibt, dessen Flächeninhalt $41,07\,\text{cm}^2$ beträgt.

Lösung: (a)



(b) Es muss gelten: $2x \leqq 8 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqq 4$.

(c)
- Es muss gelten: $\overline{Q_2B} = \overline{CS_2} \quad \Rightarrow \quad 8 - 2x = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,\overline{6}$.

- Alle Trapeze $P_nQ_nR_nS_n$ besitzen die Gerade AC als Symmetrieachse. Sie schließt mit den Quadratseiten jeweils einen 45°-Winkel ein.
  Wenn $[S_2Q_2]$ an AC gespiegelt wird, dann erhältst du die Diagonale $[P_2R_2]$, die dann parallel zu $[AB]$ bzw. $[CD]$ liegt.
  Also gilt: $[P_2R_2] \perp [S_2Q_2]$.

(d)

$$\begin{aligned} A_{P_nQ_nR_nS_n} &= A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta\, P_nS_nD} - A_{\Delta\, AQ_nP_n} - A_{\Delta\, CS_nR_n} \\ A(x) &= \left[8 \cdot 8 - 2 \cdot 0,5 \cdot (8-2x)(8-x) - 0,5 \cdot (2x)^2 - 0,5 \cdot x^2\right] \text{ cm}^2 \\ &= \left[64 - 64 + 8x + 16x - 2x^2 - 0,5x^2 - 2x^2\right] \text{ cm}^2 \\ A(x) &= \left(-4,5x^2 + 24x\right) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

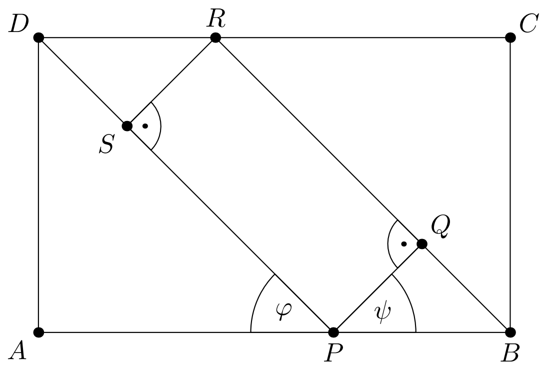
(e)
- $a = -4,5 \quad b = 24 \quad c = 0$:

  $$x_S = -\frac{24}{2 \cdot (-4,5)} = \frac{8}{3} = 2,\overline{6}.$$ Siehe Lösung (c).

- $y_S = 0 - \dfrac{24^2}{4 \cdot (-4,5)} = 32$; das ist aber die Hälfte (= 50%) der Quadratfläche.

(f) **1. Möglichkeit:**
Die maximale Trapezfläche beträgt $32\,\text{cm}^2$. Dann gibt es kein Trapez, das noch größer, nämlich $41,07\,\text{cm}^2$ ist.
2. Möglichkeit:
$-4,5x^2 + 24x = 41,07 \quad \Leftrightarrow \quad -4,5x^2 + 24x - 41,07 = 0$
Diskriminante $D = 24^2 - 4 \cdot (-4,5) \cdot (-41,07) = -163,26 < 0\,(\dagger)$
Also gibt es keine reelle Lösung und damit kein Trapez mit einem solchen Flächeninhalt.

42.



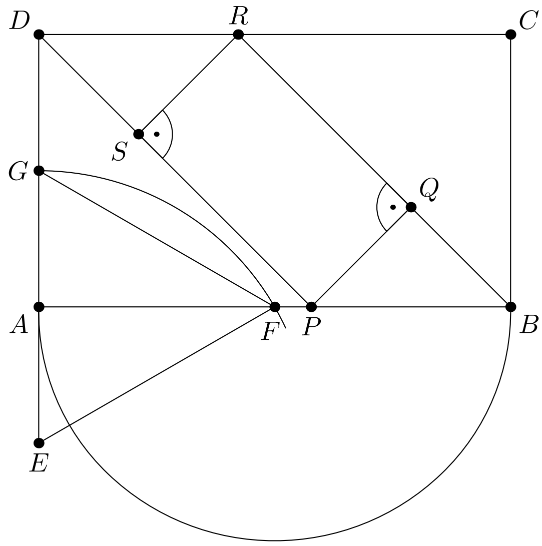
Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ und $\overline{BC} = \overline{AD} = b$. Für das einbeschriebene Rechteck $PQRS$ gilt: $\overline{AP} = \overline{RC} = b$.

(a) Zeichne die Figur für $a = 8\,\text{cm}$, und $b = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: $\varphi = \psi = 45°$.

(c) Berechne in deiner Zeichnung den Anteil der Fläche des Rechtecks $PQRS$ am Rechteck $ABCD$ in Prozent.

(d)



In der obigen Figur gilt:
– Der Punkt G halbiert die Seite $[AD]$.
– Das Dreieck EFG ist gleichseitig.
– Der Punkt E ist der Mittelpunkt des Kreisbogens durch den Punkt F.
– Der Punkt F ist der Mittelpunkt des Halbkreises mit dem Durchmesser $[AB]$.

- Zeichne die Figur für $b = 6\,\text{cm}$.
- Berechne erneut den Flächenanteil des Rechtrecks $PQRS$ am Rechteck $ABCD$ in Prozent.

(e) Es gilt allgemein: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot(a-b)\cdot(3b-a)}{ab} = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(3\dfrac{b}{a} - 4 + \dfrac{a}{b}\right)$.

Setzen wir $\dfrac{b}{a} = k$, so ergibt sich weiter: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(3k - 4 + \dfrac{1}{k}\right) = T(k)$.

- Zeige, dass der Term $T^*(k) = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k}\right)^2 + 2 - \sqrt{3}$ und $T(k)$ äquivalent sind.
- Berechne diejenige Belegung von k, für die das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Rechtecke $PQRS$ und $ABCD$ maximal wird. Gib das maximale Flächenverhältnis in Prozent an.
- Begründe: Die Konstruktion in der Aufgabe (d) liefert dieses Maximum.

Lösung: (a) Klar.

(b) Das Dreieck APD ist ein halbes Quadrat. $\Rightarrow \quad \varphi = 45°$.
Die drei Winkel mit dem Scheitel P ergeben einen gestreckten Winkel:
$\varphi + 90° + \psi = 180° \quad \Rightarrow \quad \psi = 45°$.

(c) **Wir rechnen im Folgenden ab und zu nur mit Maßzahlen.**
$\overline{PB} = 8 - 5 = 3\,\text{cm}. \quad 3 = \dfrac{\overline{PQ}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \quad \overline{PQ} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = 1,5 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} = \overline{SR} = \overline{DS}$.

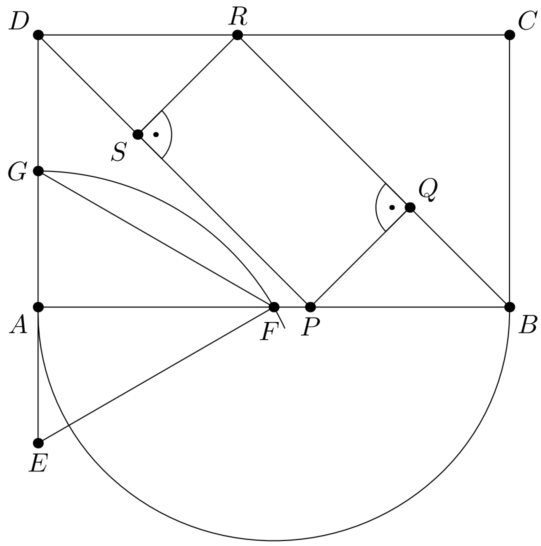
$\overline{PD} = 5 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{PS} = 5\sqrt{2} - 1,5\sqrt{2} = 3,5\sqrt{2}\,\text{cm}$.

$A_{PQRS} = \overline{PQ} \cdot \overline{RS} = 1,5\sqrt{2} \cdot 3,5\sqrt{2} = 10,5\,\text{cm}^2$.

$A_{ABCD} = 40\,\text{cm}^2$.

$\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{10,5\,\text{cm}^2}{40\,\text{cm}^2} = 0,2625 = 26,25\%$.

(d)



- Klar.
- Die Strecke [AF] stellt die Höhe des gleichseitigen Dreiecks EFG mit einer Seitenlänge von 6 cm dar. Also gilt:
  $\overline{AF} = 3\sqrt{3}\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad a = 2 \cdot \overline{AF} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$.
  $\overline{PB} = 6\sqrt{3} - 6 = 6 \cdot (\sqrt{3} - 1)\,\text{cm}$.

  $\overline{PQ} = \dfrac{\overline{PB}}{\sqrt{2}} = \dfrac{6 \cdot (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})\,\text{cm} = \overline{DS}$.

  $\overline{PS} = 6\sqrt{2} - 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = (9\sqrt{2} - 3\sqrt{6})\,\text{cm}$.
  $A_{PQRS} = 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot (9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}) = (72\sqrt{3} - 108)\,\text{cm}^2$.

$$A_{ABCD} = 6 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2\,.$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(72\sqrt{3} - 108)\,\mathrm{cm}^2}{36\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,26795 \approx 26,80\%\,.$$

(e) Es gilt allgemein: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot (a-b) \cdot (3b-a)}{ab} = -\dfrac{1}{2} \cdot \left(3\dfrac{b}{a} - 4 + \dfrac{a}{b}\right)$.

Setzen wir $\dfrac{b}{a} = k$, so ergibt sich weiter: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = -\dfrac{1}{2} \cdot \left(3k - 4 + \dfrac{1}{k}\right) = T(k)\,.$

-
$$\begin{aligned} T^*(k) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k}\right)^2 + 2 - \sqrt{3} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - 2\sqrt{3} + 3k\right) + 2 - \sqrt{3} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - 2\sqrt{3} + 3k - 4 + 2\sqrt{3}\right) \\ T^*(k) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} + 3k - 4\right) = T(k) \end{aligned}$$

- $\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k} = 0$

  $\Leftrightarrow \quad 1 = k\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad k = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{b}{a}\,.$

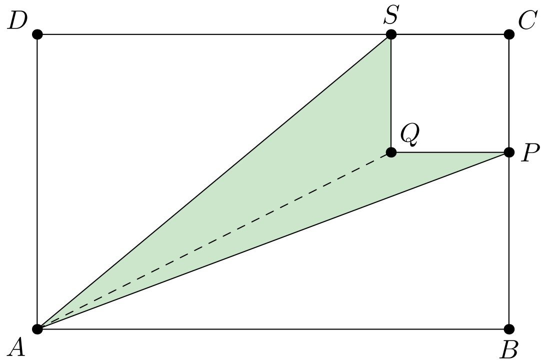
  $T(k)_{max} = T\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 - \sqrt{3} \approx 0,26795 \approx 26,80\%.$

- Es gilt $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad a = b\sqrt{3}$

  In der Aufgabe (d) hattest du mit $b = 6\,\mathrm{cm}$ konstruiert. Für die Höhe im gleichseitigen Dreieck EFG der Konstruktion (d) ergibt sich dann $\overline{AF} = 3\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Weil der Punkt F gleichzeitig Mittelpunkt des Halbkreises ist, gilt $a = 2{\cdot}3\sqrt{3}\,\mathrm{cm} = 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Also ergibt sich:

  $k = \dfrac{b}{a} = \dfrac{6\,\mathrm{cm}}{6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, wie in der Lösung (e) schon errechnet.

43.



Aus dem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ und $\overline{BC} = \overline{AD} = b$ werden Quadrate mit der Seitenlänge x herausgeschnitten. Dadurch entstehen Vierecke $AP_nQ_nS_n$.

(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ für $a = 8\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ und das Viereck $AP_1Q_1S_1$ für $x = 2\,\text{cm}$.

(b) Gib alle Belegungen von x an, für die es solche Vierecke $AP_nQ_nS_n$ gibt.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Vierecke $AP_nQ_nS_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

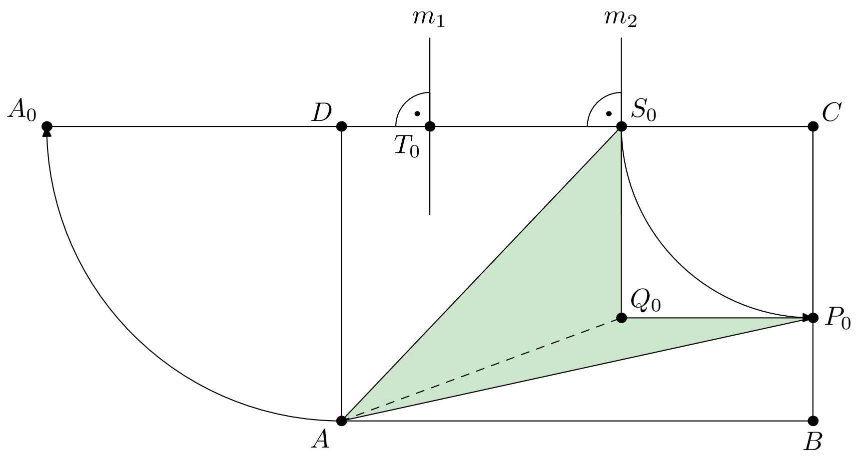
$$A(x) = -x^2 + \frac{1}{2}(a+b) \cdot x$$

Tipp: Deute die Strecken $[P_nQ_n]$ und $[Q_nS_n]$ jeweils als Grundlinien der Teildreiecke AP_nQ_n bzw. AQ_nS_n.

(d) Unter allen Vierecken $AP_nQ_nS_n$ gibt es das Viereck $AP_0Q_0S_0$, dessen Flächeninhalt maximal ist.

Zeige, dass $x = \frac{1}{4}(a+b)$ das Viereck $AP_0Q_0S_0$ liefert.

(e)



In der obigen Figur gilt:

- Der Punkt D ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von Punkt A zum Punkt A_0.
- Der Punkt C ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von Punkt P_0 zum Punkt S_0.
- Der Punkt T_0 ist der Mittelpunkt der Strecke $[A_0C]$.
- Der Punkt S_0 ist der Mittelpunkt der Strecke $[T_0C]$.

Begründe anhand dieser Konstruktion, dass das Viereck $AP_0Q_0S_0$ dasjenige mit dem maximalen Flächeninhalt ist.

Lösung: (a) Klar.

(b) $x \in]0, 5[_{\mathbb{R}}$.

(c) Wir rechnen mit der Formel: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2}\cdot$ Grundlinie $\cdot$ Höhe: In den Dreiecken AP_nQ_n bzw AQ_nS_n gilt:

$$A_{AP_nQ_n} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (b - x) \quad = \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}x^2 \tag{13.1}$$

$$A_{AQ_nS_n} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (a - x) \quad = \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}x^2 \tag{13.2}$$

$$(1) + (2): \quad A_{AP_nQ_nS_n} = \frac{1}{2}(a + b) \cdot x - x^2 \tag{13.3}$$

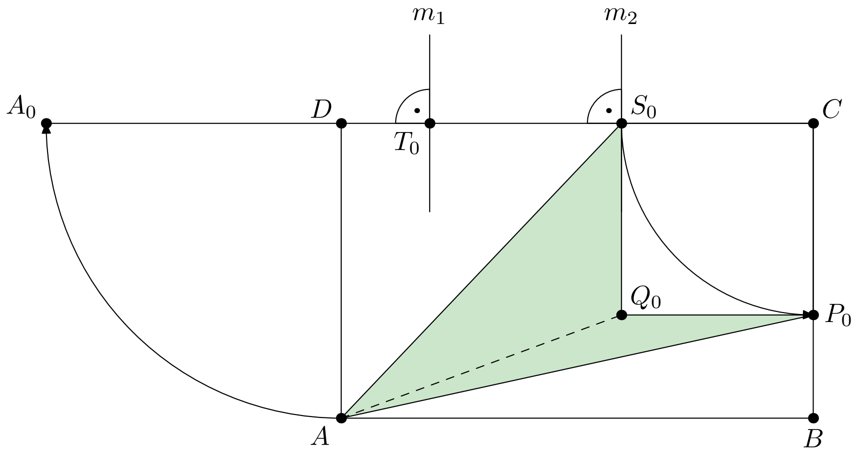
Die Gleichung (3) ist die geforderte.

(d)

$$\begin{aligned}
A(x) &= -x^2 + \frac{1}{2}(a + b) \cdot x \\
&= -\left[x^2 - \frac{1}{2}(a + b) \cdot x + \frac{1}{4}(a + b)^2 - \frac{1}{4}(a + b)^2\right] \\
&= -\left[\left(x - \frac{1}{4}(a + b)\right)^2 - \frac{1}{4}(a + b)^2\right] \\
A(x) &= -\left(x - \frac{1}{4}(a + b)\right)^2 + \frac{1}{4}(a + b)^2
\end{aligned}$$

$x = \frac{1}{4}(a + b)$ liefert $A_{max} = \frac{(a + b)^2}{16}$.

(e)

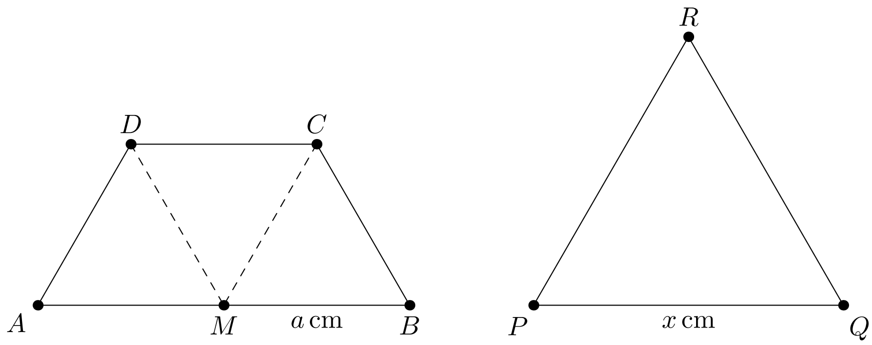


Hier gilt $\overline{A_0C} = a + b$.

Der Punkt T_0 halbiert die Strecke $[A_0C]$: $\overline{T_0C} = \dfrac{a+b}{2}$.

Der Punkt S_0 halbiert die Strecke $[T_0C]$: $\overline{S_0C} = \dfrac{a+b}{4} = x$.

44.



Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ ist aus drei kongruenten gleichseitigen Dreiecken mit der jeweiligen Seitenlänge von a cm zusammengefügt worden. Dieses Trapez und das gleichseitige Dreieck PQR mit der Seitenlänge x cm sollen den gleichen Umfang besitzen.

(a) Zeige, dass dann $x = \dfrac{5}{3}a$ gilt.

(b) Berechne das Verhältnis der Flächen der beiden Figuren.

(c) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ größer als der des Dreiecks PQR?

Lösung: (a) Gleicher Umfang: $5a = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{5}{3}a\,.$

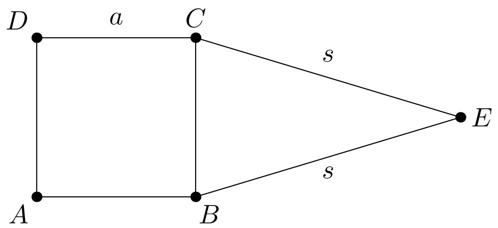
(b) $A_{\text{Trapez}} = 3 \cdot \dfrac{a^2}{4}\sqrt{3} = \dfrac{3}{4}a^2\sqrt{3}\,.$

$$A_{\Delta\, PQR} = \frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\left(\frac{5}{3}a\right)^2}{4}\sqrt{3} = \frac{25}{36}a^2\sqrt{3}\,.$$

$$\frac{A_{\Delta\, PQR}}{A_{\text{Trapez}}} = \frac{\frac{25}{36}a^2\sqrt{3}}{\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}} = \frac{25}{36}\cdot\frac{4}{3} = \frac{100}{108}\left(=\frac{25}{27}\right).$$

(c) $A_{\Delta\, PQR} \mathrel{\widehat{=}} 100\%\,.$
Nach Lösung (b) gilt $A_{\text{Trapez}} \mathrel{\widehat{=}} 108\%\,.$
Dann ist also der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ um 8% größer als der des Dreiecks PQR.

45.



Die Figur $ABECD$ setzt sich aus dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a und dem gleichschenkligen Dreieck BEC mit $\overline{BE} = \overline{CE} = s$ zusammen. Das Dreieck BEC und das Quadrat $ABCD$ haben den gleichen Umfang.

(a) Zeige: Es muss $s = 1,5a$ gelten.

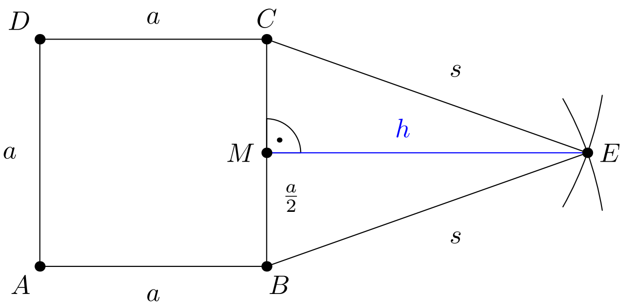
(b) Zeichne die Fgur für $a = 3\,\text{cm}$.

(c) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte des Dreiecks BEC und des Quadrates $ABCD$ in Prozent.

(d) Wie lang müsste die Schenkellänge s sein, damit die Flächeninhalte des Quadrates $ABCD$ und des Dreiecks BEC gleich groß werden?

Lösung: (a) $u_{BEC} = a + s + s = 2s + a \qquad u_{ABCD} = 4a$
$2s + a = 4a \quad \Leftrightarrow \quad s = 1,5a\,.$

(b)



Die beiden Kreisbögen mit dem Radius $r = 1,5 \cdot 3\,\text{cm} = 4,5\,\text{cm}$ und den Mittelpunkten B bzw. C schneiden sich im Punkt E.

(c) ΔBEM: $\quad h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (1,5a) - (0.5a)^2 = 2.25a^2 - 0.25a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow \quad h = a\sqrt{2}$

$$A_{\Delta BEC} = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2}{2}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad A_{ABCD} = a^2\,.$$

$$\frac{A_{\Delta BEC}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{a^2}{2}\sqrt{2}}{a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071 = 70,71\%$$

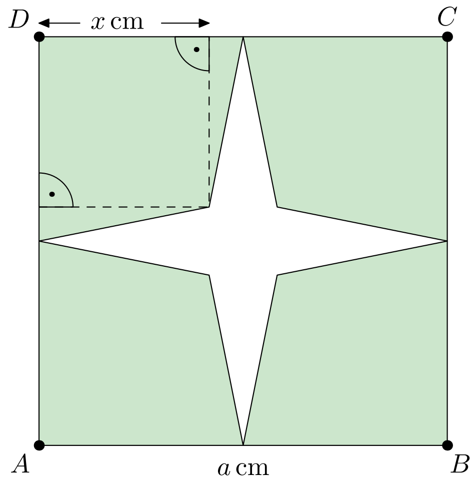
(d) $h^2 = s^2 - \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}}\,.$

$$A_{\Delta BEC} = A_{ABCD} \quad : \quad \frac{a}{2}\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} = a^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} = a \quad \Big|\ ^2$$

$$\Rightarrow \quad s^2 - \frac{a^2}{4} = 4a^2 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 = \frac{16a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{a}{2}\sqrt{17} \approx 2,06 \cdot a\,.$$

46.



Schneidet man aus dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a cm die vier getönten kongruenten Vierecke weg, so bleibt der weiße Stern im Zentrum übrig.

(a) Zeichne die obige Figur für $a = 6$ und $x = 2,5$.

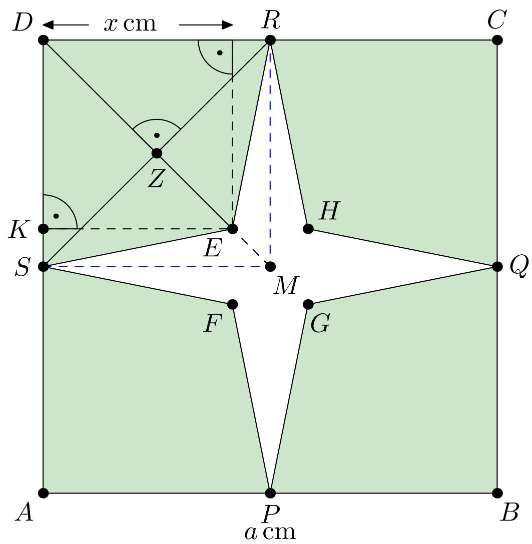
(b) Begründe: Jedes dieser vier getönten kongruenten Vierecke ist ein Drachenviereck.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A des weißen Sterns gilt in Abhängigkeit von x:
$$A(x) = (36 - 12x)\,\text{cm}^2$$
.

(d)
- Berechne $A(3)$ und deute dein Ergebnis mit Hilfe der Zeichnung.
- Berechne $A(1,5)$ und deute dein Ergebnis mit Hilfe der Zeichnung.

(e) Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Sterns $3,6\,\text{cm}^2$ beträgt.

Lösung: (a)



(b) Das Viereck $SMRD$ ist ein Quadrat, dessen Diagonalen $[DM]$ und $[SR]$ folgende Eigenschaften besitzen:

- $[SR] \perp [DM]$. Wegen $E \in [DM]$ folgt $[SR] \perp [DE]$.
- DM ist sowohl die Symmetrieachse des Quadrates $SMRD$ als auch die des Vierecks $SERD$.

Also ist das Viereck $SERD$ ein achsensymmetrischer Drachen.

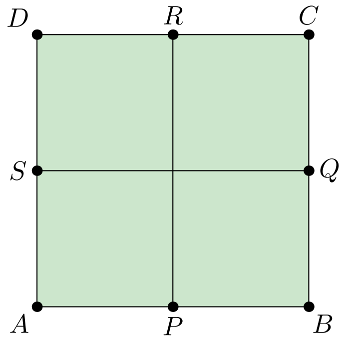
(c) $A_{SERD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SR} \cdot \overline{DE}$. (*)

$[SR]$ ist eine Diagonale des Quadrates $SMRD$ mit der Seitenlänge 3 cm: $\Rightarrow$ $\overline{SR} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.
$[DE]$ ist eine Diagonale des Quadrates mit der Seitenlänge $\overline{KD} = x$ cm und der Diagonale $[DE]$: $\Rightarrow$ $\overline{DE} = x\sqrt{2}\,\text{cm}$.
Mit (*) folgt dann:

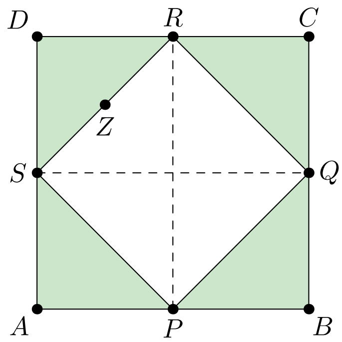
$$A_{SERD} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2}\,\text{cm}^2 = 3x\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{\text{Stern}} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{SERD} = 36\,\text{cm}^2 - 4 \cdot 3x\,\text{cm}^2 = (36 - 12x)\,\text{cm}^2\,.$$

(d)
- $A(3) = (36 - 12 \cdot 3)\,\text{cm}^2 = 0\,\text{cm}^2$.
  Für $x = 3$ deckt sich das Drachenviereck $SERD$ mit dem Quadrat $SMRD$. Das geschieht auf die gleiche Weise mit den drei restlichen Drachenvierecken. Dann sieht die Figur so aus:

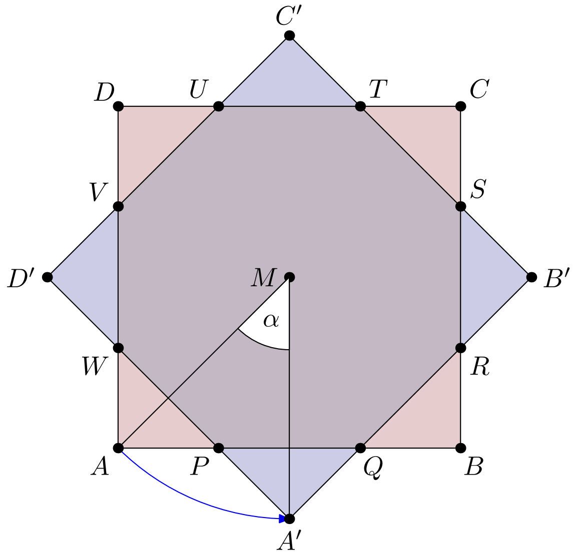
  D.h. der Stern entartet zu zwei gekreuzten Strecken $[PR]$ und $[SQ]$, deren Flächeninhalt 0 ist.
- $A(1,5) = (36 - 12 \cdot 1,5)\,\text{cm}^2 = 18\,\text{cm}^2$.
  Für $x = 1,5$ kommt der Punkt E auf den Diagonalenschnittpunkt Z des Drachenvierecks $SERD$ zu liegen; d.h. das Drachenviereck entartet zum gleichschenkligrechtwinkligen Dreieck SRD. Damit wird der Stern zu einem einbeschriebenen Quadrat dessen Eckpunkte jeweils auf einem Mittelpunkt der Seiten des Quadrates $ABCD$ fallen. Dann sieht die Figur so aus:

  Anhand der gestrichelten Diagonalen des zum Quadrat $PQRS$ entarteten Sterns erkennst du, dass dieses Quadrat halb so groß wie das äußere Quadrat $ABCD$ ausfällt, was auch die obige Rechnung bestätigt.

(e) $36 - 12x = 3,6 \quad \Leftrightarrow \quad 32,4 = 12x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,7$.

47.



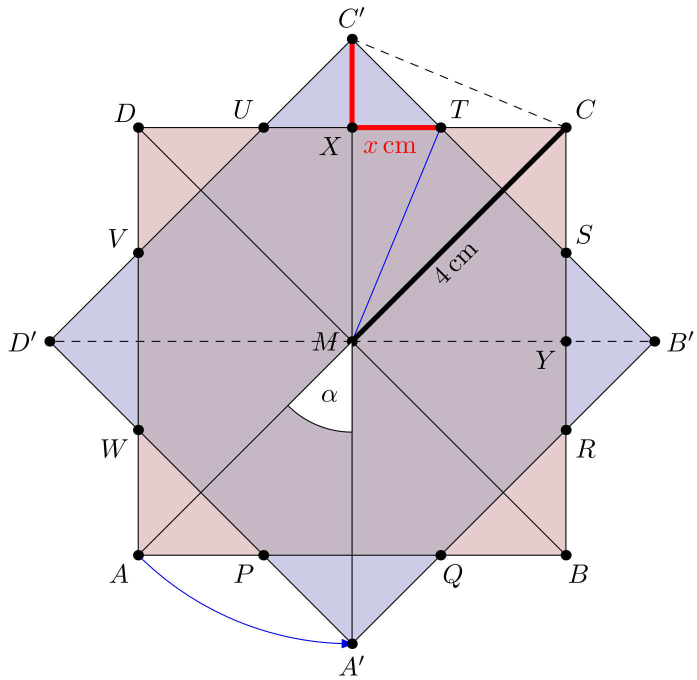
Das Quadrat $A'B'C'D'$ ist dadurch entstanden, dass das Quadrat $ABCD$ um seinen Mittelpunkt M um einen Winkel mit dem Maß α so gedreht worden ist, dass bestimmte Symmetrieachsen vom Ur- und vom Bildquadrat zur Deckung kommen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$.

(b) Wie groß ist α? Begründe deine Antwort.

(c)
- Ist das Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig?
- Berechne den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUVW$.

Lösung: (a)



(b) $\alpha = 45°$.
Es gilt z.B.: $MD' \perp MA'$. Die Diagonale $[AC]$ halbiert diesen rechten Winkel.

(c)
- Aus Symmetriegründen sind die vier Dreiecke, die über das Quadrat $ABCD$ hinausragen und die vier Dreiecke, die über das gedrehte Quadrat $A'B'C'D'$ hinausragen, alle kongruent. Also sind alle Seiten des fraglichen Achtecks geich lang.
  Die Diagonalen der Quadrate $ABCD$ und $A'B'C'D'$ schließen paarweise einen 45°-Winkel ein. Also haben alle Innenwinkel des Achtecks das Maß $180° - 45° = 135°$.
  Also ist das Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig.
- Subtrahierst du vom gedrehten Quadrat $A'B'C'D'$ die Flächen der vier Dreiecke, die über das Quadrat $ABCD$ hinausragen, dann erhältst du den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUVW$.
  Betrachte z.B. das Dreieck UTC'. Aus Symmetriegründen muss es gleichschenklig-rechtwinklig sein. Also gilt: $\overline{XT} = \overline{XC'} = x\,\text{cm}.$.
  Das Dreieck $MCXC'$ ist gleichschenklig: $\overline{MC} = \overline{MC'} = 4\,\text{cm}$.
  Damit gilt einerseits: $\overline{MX} = (4 - x)\,\text{cm}$. (*)
  Das Viereck $MYCX$ ist ein Quadrat, dessen Diagonale 4 cm lang ist. Damit gilt andererseits: $\overline{MX} = \frac{4}{\sqrt{2}}\,\text{cm}$.

  Mit (*) ergibt sich:

  $$4 - x = \frac{4}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = 4 - \frac{4}{\sqrt{2}} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \,.$$

  Das Dreieck UTC' ist genauso groß wie ein Quadrat mit der Seitenlänge x cm .

  $$A_{UTC'} = x^2\,\text{cm}^2 = \left(4 \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{cm}^2 = 16 \cdot \frac{2 - 2\sqrt{2} + 1}{2}\,\text{cm}^2 \,.$$

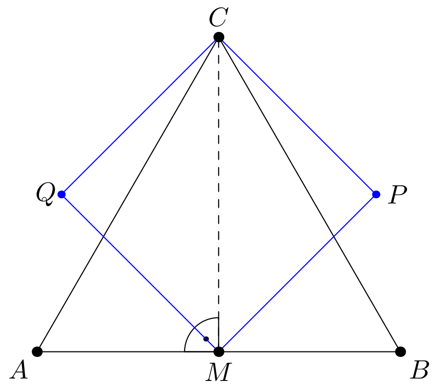
  $$A_{UTC'} = 8 \cdot (3 - 2\sqrt{2})\,\text{cm}^2 \,.$$

  Wegen $A_{PQRSTUVW} = A_{A'B'C'D'} - 4 \cdot A_{UTC'}$ folgt:

  $$A_{PQRSTUVW} = \frac{1}{2} \cdot 8^2\,\text{cm}^2 - 4 \cdot 8 \cdot (3 - 2\sqrt{2})\,\text{cm}^2$$

  $$A_{PQRSTUVW} = 32 \cdot [1 - (3 - 2\sqrt{2})]\,\text{cm}^2 = 32 \cdot [2\sqrt{2} - 2]\,\text{cm}^2$$
  $$A_{PQRSTUVW} = 64 \cdot (\sqrt{2} - 1)\,\text{cm}^2 \approx 26,51\,\text{cm}^2 \,.$$

48.



Das Dreieck ABC ist gleichseitig. Das Viereck $MPCQ$ ist ein Quadrat.

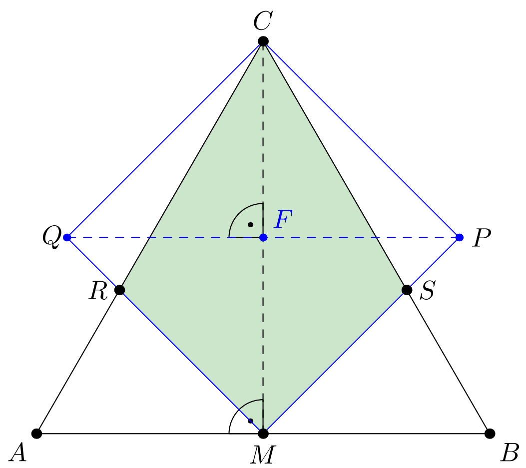
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC größer als der des Quadrates $MPCQ$?

(c) Im Inneren des Dreiecks ABC liegt ein Viereck.
Um welches besondere Viereck handelt es sich? Begründe deine Antwort.

(d) Zeige: Für den Umfang u des gezeichneten Quadrates $MPCQ$ gilt:
$u = 6\sqrt{6}\,\text{cm}$.

Lösung: (a)



(b) Flächeninhalt A_Δ des Dreiecks ABC: $A_\Delta = \frac{6^2}{4} \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

Jedes Quadrat darf sich auch „Drachenviereck“ nennen. Am einfachsten kommst du mit der Flächenformel für das Drachenviereck zum Ziel:

Hier: $A_{MPCQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MC}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2 \text{cm}^2 = 13{,}5\,\text{cm}^2$.

$\frac{13{,}5\,\text{cm}^2}{9\sqrt{3}}\,\text{cm}^2 \approx 0{,}8660 = 86{,}60\%$

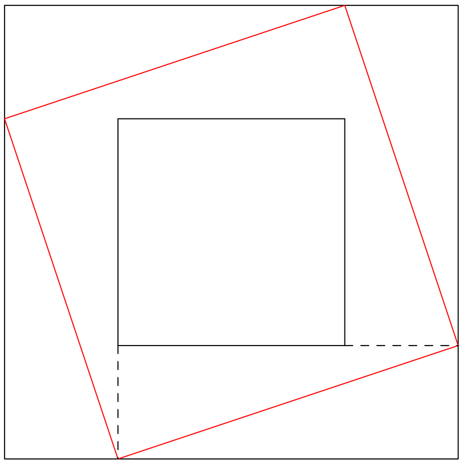
$100\% - 86,60\% = 13,40\%$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist etwa um $13,40\%$ größer als der des Quadrates $MPCQ$.

(c) Das Viereck $MSCR$ ist ein achsensymmetrisches Drachenviereck.
Begründung:

- Seine Diagonalen stehen (wie auch die des Quadrates $MPCQ$) aufeinander senkrecht.
- Die Gerade MC ist die Sysmmetrieachse des Drachenvierecks.

(d) $u = 4 \cdot \overline{MP} = 4 \cdot \overline{MF}\sqrt{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{cm} = 6\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$.

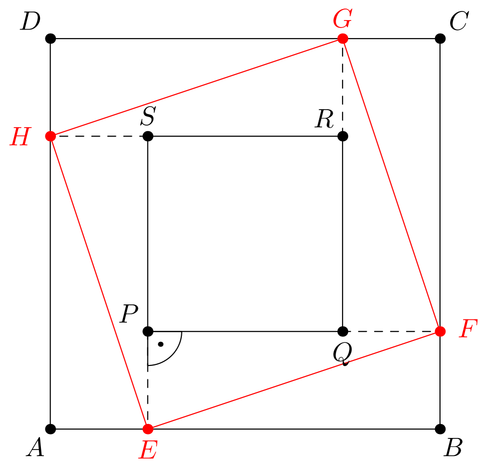
49.



Das große Quadrat hat einen Umfang von $81,6\,\mathrm{cm}$ und das kleine Quadrat hat einen Umfang von $34\,\mathrm{cm}$. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Berechne den Flächeninhalt des mittleren Quadrates auf verschiedene Weise:

- Mit Hilfe der Berechnung der Seitenlänge des mittleren Quadrates
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

Lösung:

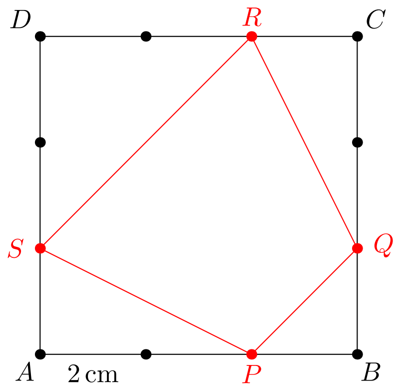


- Es gilt: $\overline{AB} = 81,6\,\text{cm} : 4 = 20,4\,\text{cm}$ und $\overline{PQ} = 34\,\text{cm} : 4 = 8,5\,\text{cm}$.
  Dann folgt: $\overline{QF} = \overline{PE} = (20,4\,\text{cm} - 8,5\,\text{cm}) : 2 = 5,95\,\text{cm}$.
  Weiter folgt: $\overline{PF} = 8,5\,\text{cm} + 5,95\,\text{cm} = 14,45\,\text{cm}$.
  $\Delta\, EFP$: $\overline{EF}^2 = A_{EFGH} = \overline{PF}^2 + \overline{PE}^2 = (14,45\,\text{cm})^2 + (5,95\,\text{cm})^2$
  $\Rightarrow \quad A_{EFGH} = 244,205\,\text{cm}^2$.
- **1. Möglichkeit:** $A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{\Delta\, EBF}$
  $A_{EFGH} = (20,4\,\text{cm})^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45\,\text{cm} \cdot 5,95\,\text{cm} = 244,205\,\text{cm}^2$.

  2. Möglichkeit: $A_{EFGH} = A_{PQRS} + 4 \cdot A_{\Delta\, EFP}$
  $A_{EFGH} = (8,5\,\text{cm})^2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45\,\text{cm} \cdot 5,95\,\text{cm} = 244,205\,\text{cm}^2$.

  Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

50.



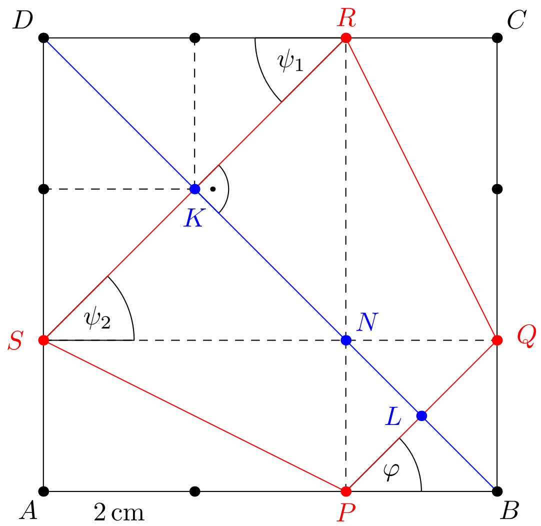
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Jede Quadratseite ist in drei Abschnitte eingeteilt, die jeweils 2cm lang sind. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ besitzt zwei parallele Seiten.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ auf zwei verschiedene Arten:
- Mit Hilfe der Berechnung der zugehörigen Formelgleichung
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

Lösung: (a)



(b) Das Dreieck SRD ist gleichschenklig-rechtwinklig . $\Rightarrow$ $\psi_1 = 45°$.
Dann gilt auch $\psi_2 = 45°$ (Z-Winkel) .
Das Dreieck PBQ ist gleichschenklig-rechtwinklig . $\Rightarrow$ $\varphi = 45°$.
Also folgt: $[PQ] \parallel [SR]$.
Das Viereck $PQRS$ ist ein (achsensymmetrisches) Trapez..

(c)
- Für die Trapezfläche A gilt: $A_{PQRS} = \dfrac{\overline{SR} + \overline{PQ}}{2} \cdot \overline{KL}$.

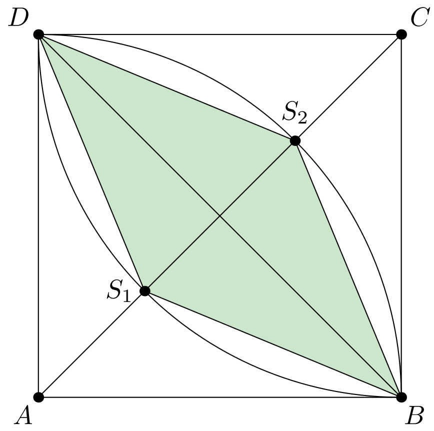
  Die Strecke $[SR]$ ist die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 4 cm . Also folgt: $\overline{SR} = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.
  $[DK]$, $[NB]$ und $[PQ]$ sind jeweils Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge 2 cm .
  Also folgt: $\overline{DK} = \overline{NB} = \overline{PQ} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ und $\overline{LB} = \sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.
  Im Quadrat $ABCD$ gilt: $\overline{DB} = 6\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.
  Damit gilt: $\overline{KL} = 6\sqrt{2}\,\mathrm{cm} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm} - \sqrt{2}\,\mathrm{cm} = 3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

  Und damit gilt: $A_{PQRS} = \dfrac{4\sqrt{2}\,\mathrm{cm} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}}{2} \cdot 3\sqrt{2}\,\mathrm{cm} = 18\,\mathrm{cm}^2$.

- Das Trapez $PQRS$ ist von vier rechtwinkligen Dreiecken eingeschlossen. Zwei von ihnen sind kongruent.
  $A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta\,APS} - A_{\Delta\,SRD} - A_{\Delta\,PBQ}$.

  $A_{PQRS} = 36\,\mathrm{cm}^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\,\mathrm{cm}^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\,\mathrm{cm}^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 = 18\,\mathrm{cm}^2$.

51.



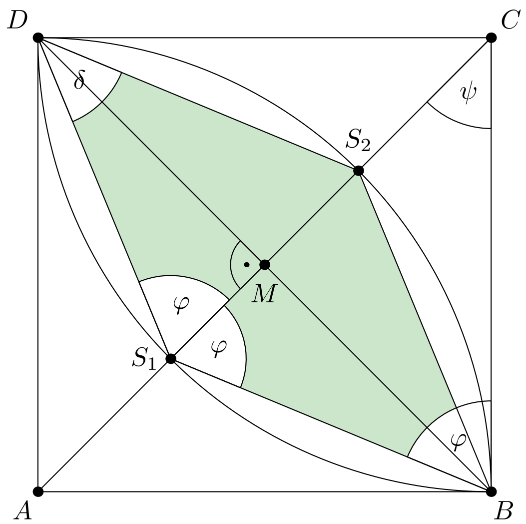
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte A und C.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Vierecks S_1BS_2D.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck S_1BS_2D ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



Das Viereck S_1BS_2D ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(b) Im Quadrat $ABCD$ halbiert die Diagonale $[AC]$ den rechten Winkel DCB. Also gilt: $\psi = 45°$.
Das Dreieck S_1BC ist gleichschenklig. $\Rightarrow \quad \varphi = (180° - 45°) : 2 = 67{,}5°$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle BS_1D = 2 \cdot \varphi = 135° = \sphericalangle DS_2B$.

$$\Rightarrow \quad \delta = \sphericalangle S_1DS_2 = \sphericalangle S_2BS_1 = (360° - 4 \cdot 67{,}5°) : 2 = 45°\,.$$

(c) $A_{\text{Drachen}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{S_1S_2}\,.$

$\overline{BD} = 6 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm}\,(\approx 8{,}49\,\text{cm})\,.$

Wegen $\overline{S_1C} = 6\,\text{cm}$ folgt $\overline{AS_1} = \overline{CS_2} = (6 \cdot \sqrt{2} - 6)\,\text{cm}\,(\approx 2{,}49\,\text{cm})\,.$

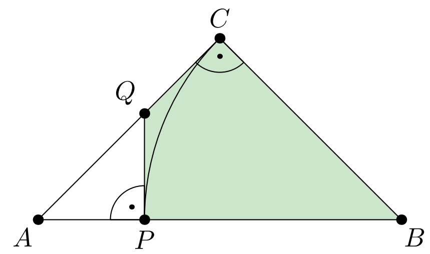
Dann ist $\overline{S_1S_2} = \left[6 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \left(6 \cdot \sqrt{2} - 6\right)\right]\,\text{cm} = \left(12 - 6\sqrt{2}\right)\,\text{cm}\,(\approx 3{,}51\,\text{cm})\,.$

$A_{\text{Drachen}} = \frac{1}{2} \cdot \left[6\sqrt{2} \cdot \left(12 - 6\sqrt{2}\right)\right]\,\text{cm}^2\,.$

$A_{\text{Drachen}} = \left(36\sqrt{2} - 36\right)\,\text{cm}^2 (\approx 14{,}91\,\text{cm}^2)\,.$

$$\frac{A_{\text{Drachen}}}{A_{\text{Quadrat}}} = \frac{(36\sqrt{2} - 36)\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4142 = 41{,}42\%\,.$$

52.



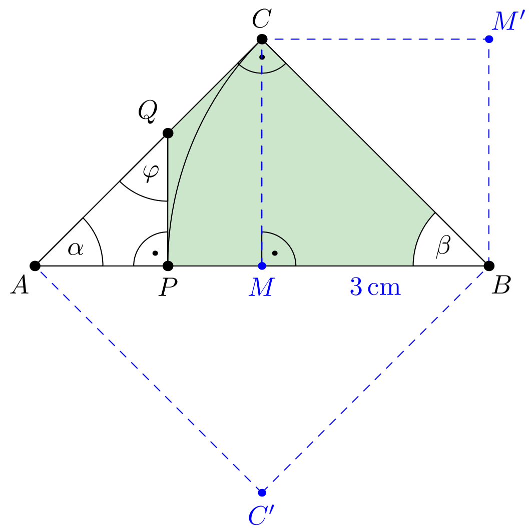
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt B.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke ABC und APQ sind zueinander ähnlich.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC nimmt das Dreieck APQ ein? Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Es gilt $\alpha = \beta = 45°$. Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck APQ gilt aber auch $\alpha = \varphi = 45°$. Also stimmen die beiden Dreiecke ABC und APQ paarweise in ihren Innenwinkelmaßen überein. Damit sind sie zueinander ähnlich.

(c) Weil die beiden Dreiecke ABC und APQ zueinander ähnlich sind, gilt für den Ähnlichkeitsfaktor k z.B.:

$$k = \frac{\overline{AP}}{\overline{BC}}\,.$$

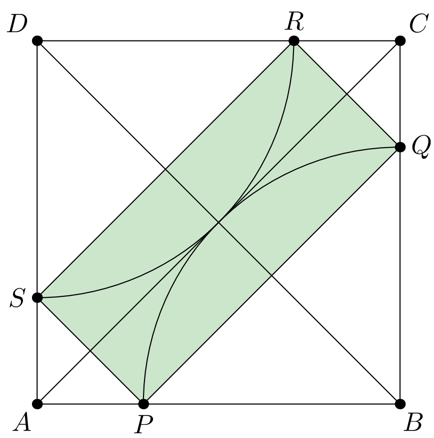
Das Dreieck MBC ist ein halbes Quadrat mit der Daigonalenlänge $\overline{BC} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.

$\overline{AP} = \overline{BA} - \overline{BP} = \overline{BA} - \overline{BC} = (6 - 3\sqrt{2})\,\text{cm}$.

Damit folgt $k = \dfrac{(6 - 3\sqrt{2})\,\text{cm}}{6\,\text{cm}}$.

Und $\dfrac{A_{\Delta\,APQ}}{A_{\Delta\,ABC}} = k^2 = \left[\dfrac{(6 - 3\sqrt{2})\,\text{cm}}{(3\sqrt{2})\,\text{cm}}\right]^2 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,1716 = 17,16\,\%$.

53.



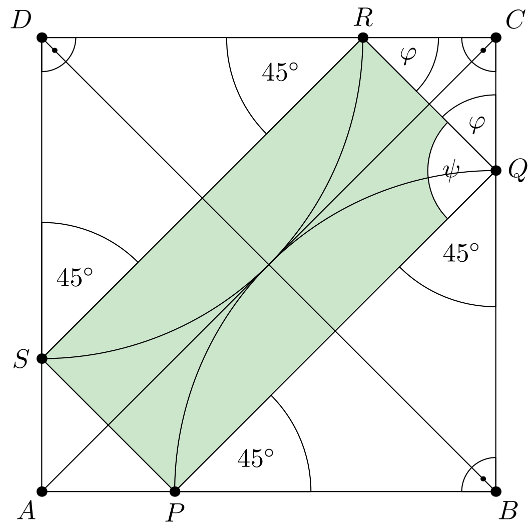
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte B und D.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Rechteck.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck $PQRS$ ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Die beiden Dreiecke PBQ und SRD sind gleichschenklig-rechtwinklig. Also haben ihre spitzen Innenwinkel das Maß $45°$.
Weiter gilt: $\overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{BQ} = \overline{DC} - \overline{DR} = \overline{CR}$. Also ist auch das Dreieck RQC gleichschenklig-rechtwinklig. Dann gilt $\varphi = 45°$.
Am Punkt Q gilt somit: $45° + \psi + 45° = 180° \quad \Rightarrow \quad \psi = 90°.$.
Aus Symmetriegründen sind dann auch die drei restlichen Innenwinkel des Vierecks $PQRS$ rechte Winkel. Also handelt es sich hierbei um ein Rechteck.

(c) Eine mögliche Strategie: $A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot (A_{\Delta\,PBQ} + A_{\Delta\,RQC})$

$$A_{\Delta\,PBQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2\ \text{cm}^2 = 9\,\text{cm}^2\,.$$

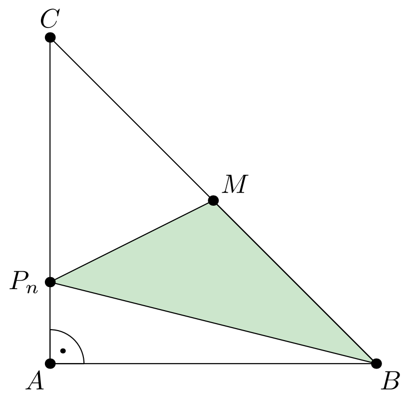
$$A_{\Delta\,RQC} = \frac{1}{2} \cdot \left(6 - 3\sqrt{2}\right)^2\ \text{cm}^2 = (27 - 18\sqrt{2})\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{PQRS} = 36\,\text{cm}^2 - 2 \cdot [9\,\text{cm}^2 + (27 - 18\sqrt{2})\,\text{cm}^2] = (36\sqrt{2} - 36)\,\text{cm}^2\,.$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(36\sqrt{2} - 36)\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = \frac{(36(\sqrt{2} - 1)\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2}$$

$$= \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142 = 41,42\%$$

54.



Der Punkt M halbiert die Hypotenuse $[BC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC.
Punkte P_n mit $\overline{AP_n} = x\,\text{cm}$ wandern auf der Kathete $[AC]$, so dass laufend Dreiecke BMP_n erzeugt werden.

(a) Zeichne das Dreieck ABC für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ zusammen mit dem Dreieck BMP_1 für $x = 2$.

(b) Für welche Belegungen von x gibt es solche Dreiecke BMP_n?

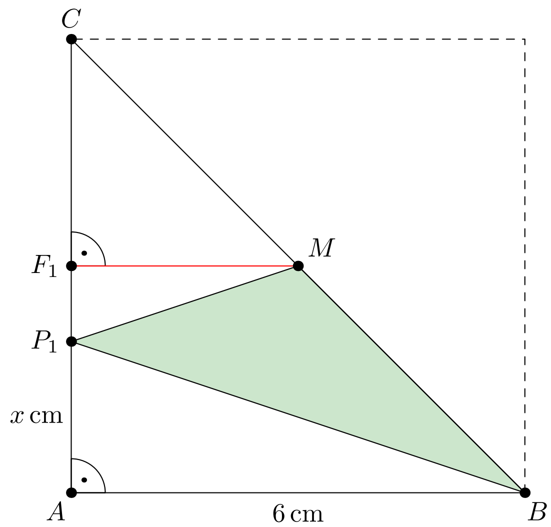
(c) Berechne den Flächeninhalt A der Dreiecke BMP_n in Abhängigkeit von x.
Ergebnis: $A(x) = (9 - 1,5x)\,\text{cm}^2$
Tipp: Fälle das Lot von M auf $[AC]$.

(d) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das Dreieck BMP_2, dessen Flächeninhalt $6,6\,\text{cm}^2$ beträgt. Berechne die zugehörige Belegung von x.

(e) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das gleichschenklige Dreieck BMP_3 mit der Basis $[MP_3]$. Berechne die zugehörige Belegung von x. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

(f) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das Dreieck BMP_3, dessen Flächeninhalt 20% der Fläche des Dreiecks ABC einnimmt. Berechne die zugehörige Belegung von x.

Lösung: (a)



(b) Für $x = 0$ ergibt sich das maximale Dreieck. Für $x = 6$ entartet das betreffende Dreieck zur Doppelstrecke $[BC]$.
Also gibt es Dreiecke für $x \in [0;\, 6[_{\mathbb{R}}$.

(c) Eine mögliche Strategie: Berechne jeweils den Flächeninhalt der Dreiecke ABP_n und P_nMC in Abhängigkeit von x. Subtrahiere die beiden Flächeninhalte dann vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

$$A_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{\Delta\, ABP_n} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot x\,\text{cm} = 3x\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{\Delta\, P_nMC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_nC} \cdot \overline{F_nM} = \frac{1}{2} \cdot (6-x)\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = (9 - 1,5x)\,\text{cm}^2\,.$$

$$A(x) = [18 - 3x - (9 - 1,5x)]\,\text{cm}^2 = (9 - 1,5x)\,\text{cm}^2 = A_{\Delta\, P_nMC}\,.$$

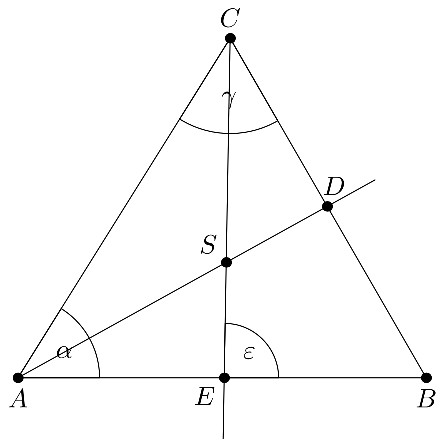
Kommentar: Die Flächeninhalte der Dreiecke BCP_n werden ständig durch deren Seitenhalbierende $[P_nM]$ halbiert.

(d) $9 - 1,5x = 6,6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,6\,.$

(e) Es muss gelten: $\overline{CP_n} = \overline{CM}\,.$
$\overline{CP_n} = (6 - x)\,\text{cm}\,.$
Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck ABC ist ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $\overline{BC} = 6\sqrt{2}\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{CM} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}\,.$
Damit muss gelten: $6 - x = 3\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 - 3\sqrt{2} \approx 1,76\,.$

(f) $20\% = 0,2\,.$
$(9 - 1,5x)\,\text{cm}^2 = 0.2 \cdot 18\,\text{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - 1,5x = 3,6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3,6\,.$

55.

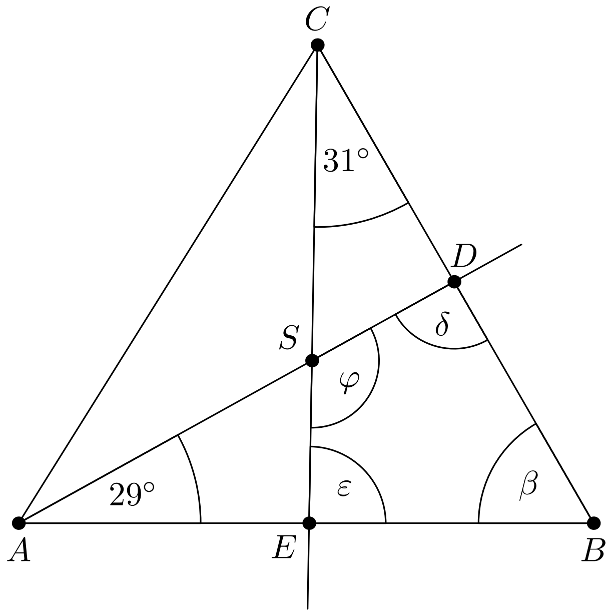


In der Figur gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 58°$ und $\gamma = 62°$.
Die Halbgeraden $[CE$ und $[AD$ halbieren α und γ .

(a) Zeichne die Figur.

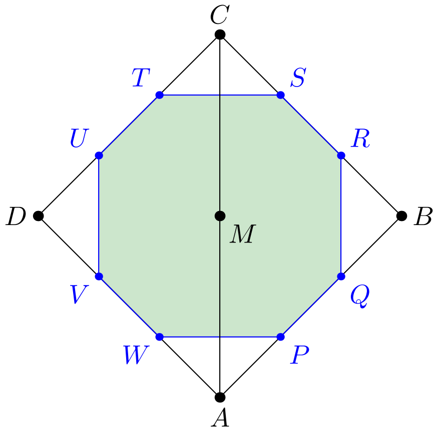
(b)
- Begründe: $\varepsilon = 89°$.
- Begründe: Das Viereck $EBDF$ ist kein achsensymmetrischer Drachen.
- Untersuche, ob das Viereck $EBDF$ ein Sehnenviereck ist.

Lösung: (a)



- $\Delta\, ABC$: $\beta = 180° - 58° - 62° = 60°$.
  $\Delta\, EBC$: $\varepsilon = 180° - 31° - 60° = 89°$.
- $\Delta\, ABD$: $\delta = 180° - 29° - 60° = 91° \neq 89°$.
  Also ist das Viereck $EBDF$ kein achsensymmetrischer Drachen.
- Im Viereck $EBDF$ gilt: $\varepsilon + \delta = 180° \quad \Rightarrow \quad \varphi + \beta = 180°$. Also ist das Viereck $EBDF$ ein Sehnenviereck; d.h. es besitzt einen Umkreis.

56.



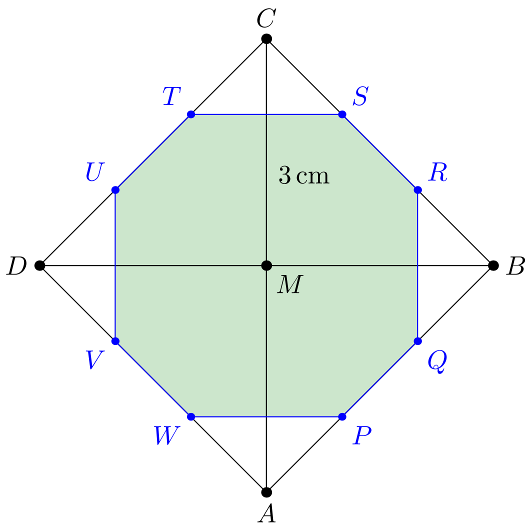
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. In dieses Quadrat ist das Achteck $PQRSTUV$ einbeschrieben worden.
Die Punktepaare (P, Q), (R, S), (T, U) und (V, W) teilen jeweils die Länge der Seite, auf der sie liegen, in drei gleiche Teile.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Untersuche rechnerisch, ob das einbeschriebene Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig ist.

(c) Berechne den Anteil der Fläche, den das Achteck am der Fläche des Quadrates $ABCD$ einnimmt, in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)

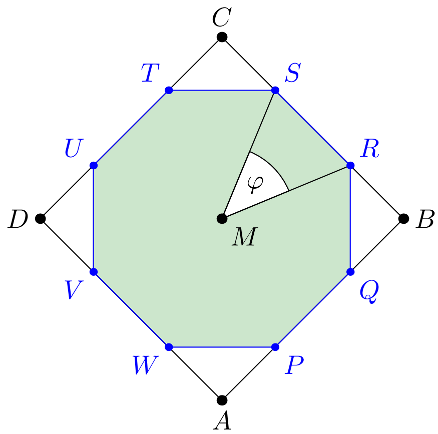


(b) Es gilt: $\Delta\, TSC \sim \Delta\, DBC$.
Weil z.B. $\overline{TC} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DC}$ gilt, folgt dann $\overline{TS} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DB} = \frac{1}{3} \cdot 6\,\text{cm} = 2\,\text{cm}$.
Andererseits gilt z.B.:
$\overline{BC} = 3 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{SR} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BC} = \sqrt{2}\,\text{cm} < 2\,\text{cm}$.
Also ist das Achteck nicht regelmäßig.

(c) Den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUVW$ kannst du am einfachsten dadurch berechnen, dass du vom Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ die Flächeninhalte der vier kongruenten weißen Dreiecke an seinen Eckpunkten subtrahierst. Den Flächeninhalt A jedes dieser Dreiecke berechnest du am besten mit der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.
$A_{PQRSTUVW} = \frac{1}{2} \cdot (6\,\text{cm})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} = 18\,\text{cm}^2 - 4\,\text{cm}^2 = 14\,\text{cm}^2$

$$\frac{A_{PQRSTUVW}}{A_{\Delta\, ABC}} = \frac{14\,\text{cm}^2}{18\,\text{cm}^2} = 0,\overline{7} \approx 77,78\,\%\,.$$

57.



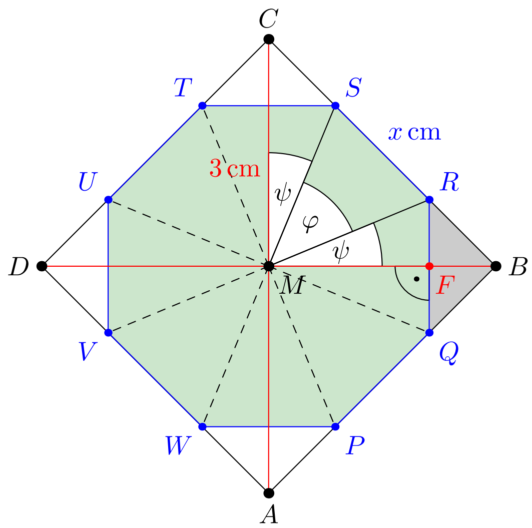
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. In dieses Quadrat ist das regelmäßige Achteck $PQRSTUV$ einbeschrieben worden.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Umfang u_8 dieses regelmäßigen Achtecks $PQRSTUV$. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

(c) Berechne den Anteil der Fläche, den das Achteck am der Fläche des Quadrates $ABCD$ einnimmt, in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



Die Mittelpunktswinkel aller Teildreiecke dieses regelmäßigen Achtecks haben alle das gleiche Maß $\varphi = 360° : 8 = 22{,}5°$. Aus Symmetriegründen gilt dann $\psi = 22{,}5° : 2 = 11{,}25°$.
Damit entsteht die Figur so, wie sie in der Angabe dargestellt ist.

(b) Das Dreieck MBC ist gleichschenklig-rechtwinklig, also ein halbes Quadrat. $\Rightarrow \quad \overline{BC} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.
Das Dreieck QBR ist gleichschenklig-rechtwinklig, also ein halbes Quadrat. Es sei $\overline{RQ} = x\,\text{cm}$. $\quad \Rightarrow \quad \overline{RB} = \frac{x}{\sqrt{2}}\,\text{cm} = \overline{SC}$.
$\Rightarrow \quad \overline{BC} = 3\sqrt{2}\,\text{cm} = \left(2 \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} + x\right)\,\text{cm} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{2}}{\text{cm}}$.
$\Leftrightarrow \quad 6 = 2x + x\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{6}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$
$x = 3(2 - \sqrt{2})$. **(*)**
Dann ist $u_8 = 24(2 - \sqrt{2})\,\text{cm} \approx 14{,}06\,\text{cm}$.

(c) Berechne zunächst den Flächeninhalt eines Teildreiecks z.B. $\Delta\, MQR$:

$$A_{\Delta\, MQR} = \frac{1}{2} \cdot \overline{RQ} \cdot \overline{MF} \;\text{ mit }\; \overline{MF} = \overline{MB} - \overline{FB}\,,\text{ wobei } \overline{MB} = 3\,\text{cm gilt.}$$

Weil das Dreieck QBR gleichschenklig-rechtwinklig ist, gilt:

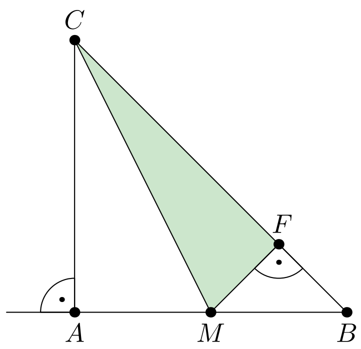
$$\overline{FB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{RQ} = \frac{1}{2} \cdot x\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{MF} = (3 - \frac{1}{2} \cdot x)\,\text{cm} \;\; .$$

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\, MQR} = \frac{1}{2} \cdot x\,\text{cm} \cdot \overline{MF} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (3 - \frac{1}{2} \cdot x)\,\text{cm}^2 \,.$$

Mit **(*)** aus der Lösung b) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
A_{\Delta\,MQR} &= \frac{1}{2}\cdot 3(2-\sqrt{2})\cdot\left[3-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(2-\sqrt{2})\right]\,\mathrm{cm}^2\\
&= \frac{3(2-\sqrt{2})}{2}\cdot\left[3-3\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]\,\mathrm{cm}^2=\frac{6-3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cm}^2\\
A_{\Delta\,MQR} &= \frac{9}{2}\cdot(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{cm}^2\\
A_{PQRSTUVW} &= 8\cdot A_{\Delta\,MQR}=8\cdot\frac{9}{2}\cdot(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{cm}^2=36\cdot(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{cm}^2\\
A_{ABCD} &= \frac{1}{2}\cdot 6\,\mathrm{cm}\cdot 6\,\mathrm{cm}=18\,\mathrm{cm}^2\\
\frac{A_{PQRSTUVW}}{A_{ABCD}} &= \frac{36\cdot(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{cm}^2}{18\,\mathrm{cm}^2}=2\cdot(\sqrt{2}-1)\approx 0,8284=82,84\% \quad .
\end{aligned}$$

58.



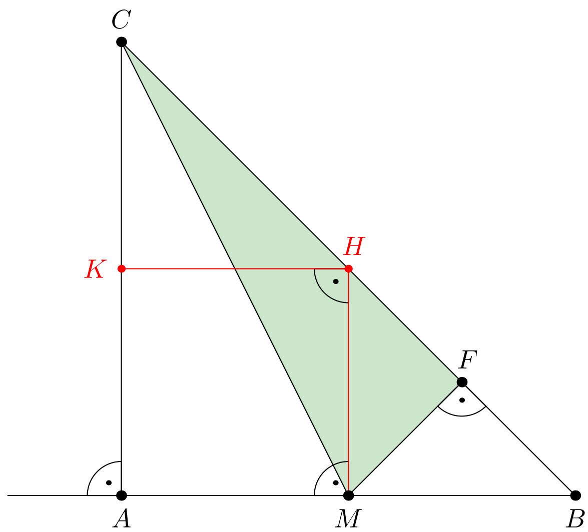
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Der Punkt M halbiert die Kathete $[AB]$.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB}=6\,\mathrm{cm}$.

(b) Berechne den Flächenanteil des getönten Dreiecks MFC am Dreieck ABC in Prozent.
Tipp: Zeichne geeignete Hilfslinien ein, die parallel zu den Katheten $[AB]$ bzw. $[AC]$ verlaufen.

(c) Untersuche, ob der Winkel ACB von CM halbiert wird.

Lösung: (a)



(b) Die beiden Dreiecke MBH und KHC sind kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke. Zusammen sind sie so groß wie das Quadrat $AMHK$.
Das bedeutet, dass das der Flächeninhalt des Dreiecks MBH ein Viertel des Flächeninhalts des Dreeicks ABC beträgt. Das Dreieck MBF ist halb so groß wie das Dreieck MBH.

Also gilt: $A_{\Delta\, MBF} = \frac{1}{8} \cdot A_{\Delta\, ABC}$.

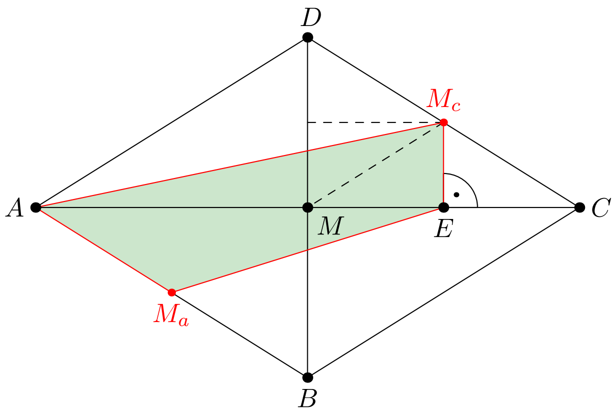
Die Dreiecke AMC und MBC haben den gleichen Flächeninhalt, weil ihre Grundlinien und Höhen jeweils gleich lang sind. Damit sind sie jeweils halb so groß wie das Dreieck ABC.

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\, MFC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta\, ABC} - \frac{1}{8} \cdot A_{\Delta\, ABC} = \frac{3}{8} \cdot A_{\Delta\, ABC} = 0{,}375 \cdot A_{\Delta\, ABC}.$$

Der Flächenanteil beträgt somit $37{,}5\%$.

(c) Nimm an, dass die Halbgerade $[CM$ den Winkel ACB halbiert.
Der Punkt M würde dann ebenfalls auf der Winkelhalbierenden liegen. Dann müsste sein Abstand zum Schenkel $[CA$ der gleiche sein wie zum Schenkel $[CB$. Es müsste also gelten $\overline{AF} = \overline{AM}$.
Im rechtwinkligen Dreieck MBF ist $[MB]$ die Hypotenuse; d.h.
$\overline{MF} < \overline{MB} = \overline{AM}$.
Also wird wird der Winkel ACB nicht von der Halbgeraden $[CM$ halbiert.

59.

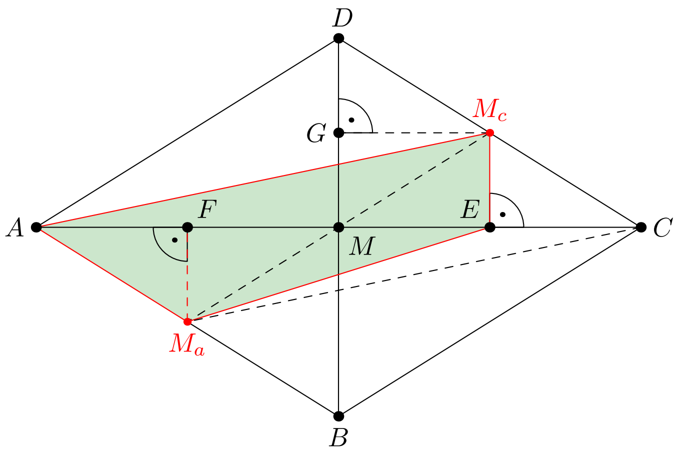


Das Viereck $ABCD$ ist eine Raute. Die Punkte M_a und M_c sind Seitenmittelpunkte.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BD} = 5\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächenanteil des getönten Vierecks AM_aEM_c am Viereck $ABCD$ in Prozent.

Lösung: (a)



(b) Die gestrichelten Hilfslinien in der Eingangsfigur machen dir klar, dass $A_{\Delta\,ECM_c} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta\,MCD}$ gilt.
Aus Symmetriegründen folgt dann: $A_{\Delta\,ECM_c} = \frac{1}{16} \cdot A_{ABCD}$.

Die Strecke $[AM_c]$ stellt im Dreieck ACD eine Seitenhalbierende dar.
Also gilt: $A_{\Delta\,ACM_c} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta\,ACM_c}$.
Dann ist $A_{\Delta\,ACM_c} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCD}$.
Wegen $A_{\Delta\,AEM_c} = A_{\Delta\,ACM_c} - A_{\Delta\,ECM_c}$ folgt dann:
$A_{\Delta\,AEM_c} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCD} - \frac{1}{16} \cdot A_{ABCD} = \frac{3}{16} \cdot A_{ABCD}$.

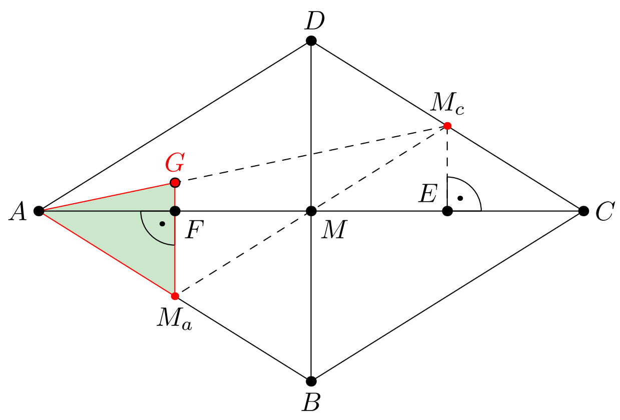
Die beiden Dreiecke AM_aE und AEM_c besitzen die gleiche Grundlinie $[AE]$.
Wegen $\overline{FM_a} = \overline{EM_c}$ sind ihre Höhen gleich lang. Folglich gilt:

$A_{\Delta\, AM_aE} = A_{\Delta\, AEM_c} = \frac{3}{16} \cdot A_{ABCD}$.

Damit ist $A_{AM_aEM_c} = 2 \cdot \frac{3}{16} \cdot A_{ABCD} = \frac{3}{8} \cdot A_{ABCD}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{A_{AM_aEM_c}}{A_{ABCD}} = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\,\% .$$

60.

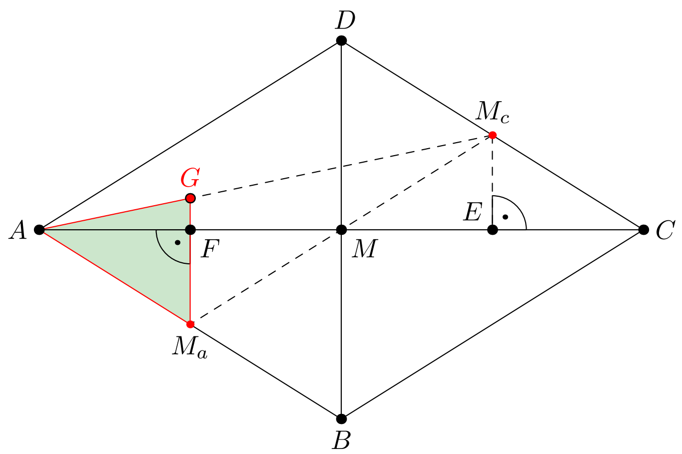


Das Viereck $ABCD$ ist eine Raute. Die Punkte M_a und M_c sind Seitenmittelpunkte.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BD} = 5\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächenanteil des getönten Dreiecks AM_aG am Viereck $ABCD$ in Prozent.

Lösung: (a)



(b) Den Flächeninhalt A des Dreiecks AM_aG kannst du mit

$$A_{\Delta\, AM_aG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{M_aG} \cdot \overline{FA} . \qquad (*)$$

berechnen.

Nun ist $\overline{M_aG} = \overline{M_aF} + \overline{FG}$. **(**)**

Es gilt offensichtlich $\overline{FA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AC}$.

Analog gilt $\overline{M_aF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{4} \cdot \overline{BD}$.

Weiter machen dir die gestrichelten Hilfslinien anhand der Ähnlichkeitssätze Folgendes klar:

$\overline{AF} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AC}$ und $\overline{AF} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AE}$

Dann gilt: $\overline{FG} = \frac{1}{3} \cdot \overline{EM_c} = \frac{1}{3} \cdot \overline{M_aF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{12} \cdot \overline{BD}$.

Mit **(**)** ergibt sich dann $\overline{M_aG} = \frac{1}{4} \cdot \overline{BD} + \frac{1}{12} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BD}$.

Mit **(*)** ergibt sich schließlich

$$A_{\Delta\, AM_aG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{BD} \cdot \frac{1}{4} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}.$$

Mit $A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}$ folgt:

$$\frac{A_{\Delta\, AM_aG}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}} = \frac{1}{12} = 0{,}08\overline{3} = 8{,}\overline{3}\%.$$

14. Abbildung durch zentrische Streckung

1. Untersuche, ob die Punkte $P(0|0)$, $Q(6|2,5)$ und $R(11|4,5)$ auf einer Geraden liegen.

Lösung: Es gibt mehrere Möglichkeiten: z.B. über Steigungsdreiecke, Vektoren, Geradengleichungen.
Antwort: Nein, aber ziemlich knapp.

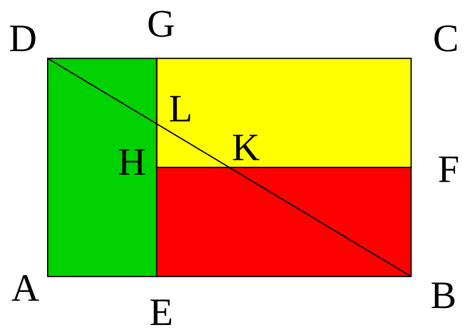
2. Gegeben sind die Punkte $A(3|-2)$ und $B(1|2)$.
Um wie viel Prozent muss man die Strecke $[AB]$ mindestens verlängern, bis man auf die y-Achse trifft? Löse die Aufgabe auf verschiedene Weise.

Lösung: Z.B. über Steigungsdreiecke oder die Länge von Strecken.
Antwort: Um 50%.

3. Verlängere die Strecke $[DE]$ mit $D(-4|2)$ und $E(2|3)$ um 10% ihrer Länge über den Punkt E hinaus bis zum Punkt E^*.
Berechne die Koordinaten des Punktes E^*.

Lösung: $E^*(2,6|3,1)$.

4.



Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.
Zusätzlich ist noch die Diagonale $[DB]$ eingezeichnet. Alle drei Rechtecke im Inneren haben den gleichen Flächeninhalt.

(a) Gib alle zueinander ähnlichen Dreiecke an.

(b) Berechne für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ die Länge der Strecke $[AD]$. Zeichne dann die zugehörige Figur.

[Teilergebnis: $\overline{AD} = 4\,\text{cm}$]

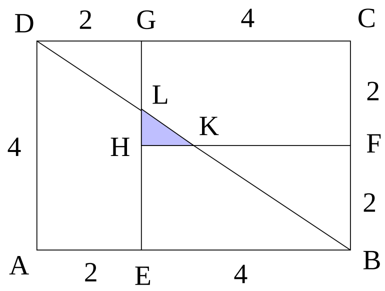
(c) Berechne den Flächenanteil des Dreiecks HKL am Rechteck $ABCD$.

Lösung:

(a) $\Delta LGD \sim \Delta HKL \sim \Delta KBF \sim \Delta EBL \sim \Delta DAB \sim \Delta DBC$

(b) Es sei $\overline{AD} = x\,\text{cm}$.
Weil alle Rechtecke im Inneren flächengleich sind, muss $\overline{DG} = \overline{BF} = \overline{FC} = 0,5x\,\text{cm}$ gelten.
Dann ist $\overline{EB} = (6 - 0,5x)\,\text{cm} = \overline{AD} = x\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad 6 = 1,5x \qquad \overline{AD} = 4\,\text{cm}$; d.h. alle inneren Rechtecke sind sogar **kongruent**.
Nun kannst du die Figur zeichnen.

(c)



$\Delta DLG \sim \Delta DBC$:

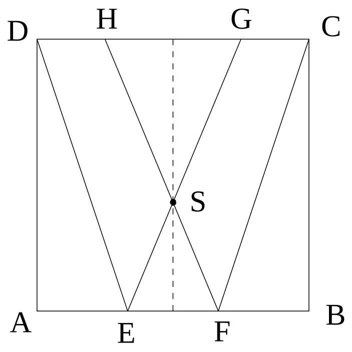
$$\frac{\overline{GL}}{2} = \frac{4}{6} \quad \Rightarrow \quad \overline{GL} = \frac{4}{3}$$

$$\overline{HL} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} = 0,5 \cdot \overline{GL}$$

Aus (a): $\Delta HKL \sim \Delta LGD$ mit dem Ähnlichkeitsfaktor $k = 0,5$.
$\Rightarrow \quad A(HKL) = 0,5^2 \cdot A(LGD) = 0,25 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3}\,\text{cm}^2 = \frac{2}{3}\,\text{cm}^2$

$$\frac{A(HKL)}{A(ABCD)} = \frac{2}{3} : 24 = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$$

5.



In der obigen Figur ist $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm. Es gilt: $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$.
Die Punkte G und H sind auf $[CD]$ beweglich und es gilt $\overline{DH} = \overline{GC} = x$ cm.

(a) Zeichne die Figur für $x = 1,2$.

(b) Der Abstand des Punktes S von der Seite $[CD]$ sei y cm.
Zeige auf verschiedene Weise, dass für y gilt:

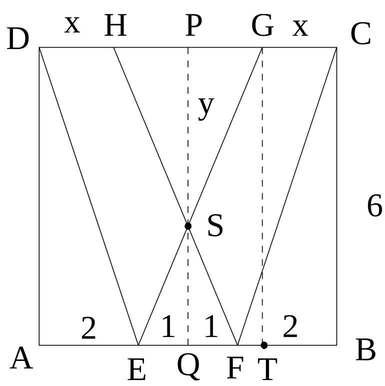
$$y = \frac{6 \cdot (3 - x)}{(4 - x)}.$$

Hinweis für eine Möglichkeit: Zeichne vom Punkt G ausgehend eine Hilfslinie ein und betrachte ähnliche Dreiecke.

(c) Berechne x auf verschiedene Weise so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks HSG doppelt so groß wie der des Dreiecks EFS wird.

Lösung: (a) –

(b)



Wenn y zunimmt (abnimmt), dann wird x größer (kleiner).

(c) **1. Möglichkeit** (mit der Hilfslinie $\overline{GT}$) :
Wegen $\overline{EB} = 4$ cm folgt $\overline{ET} = (4 - x)$ cm.
$\Delta PSG \sim \Delta ETG$:

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PG}} = \frac{\overline{GT}}{\overline{ET}} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{3 - x} = \frac{6}{4 - x}.$$

Damit ergibt sich der gewünschte Ausdruck.
2. Möglichkeit (ohne die Hilfslinie $\overline{GT}$) :
Es gilt: $\overline{QS} = (6 - y)$ cm und $\Delta PSG \sim \Delta ETG$:

$$\frac{\overline{SP}}{\overline{PG}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{EQ}} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{3-x} = \frac{6-y}{1}.$$

$\Rightarrow \quad y = (3-x)(6-y) = 18 - 3y - 6x + xy \quad \Leftrightarrow \quad y(x-4) = 6x - 18$, woraus die obige Beziehung folgt.

(d) **1. Möglichkeit** (elegant):
Es gilt $\Delta EFS \sim \Delta HSG$. Wenn das Dreieck HSG doppelt so groß wie das Dreieck EFS ist, dann muss für die entsprechenden Seitenlängen der Streckungsfaktor den Wert $\sqrt{2}$ besitzen.
Es muss z.B. gelten:
$\overline{HG} = \sqrt{2} \cdot \overline{EF}$, also $6 - 2x = \sqrt{2} \cdot 2$. Damit ergibt sich $x = 3 - \sqrt{2} \approx 1,59$.

2. Möglichkeit (aufwändig):
Es muss gelten: $A(HSG) = 2 \cdot A(EFS)$. Also: $\frac{1}{2} \cdot \overline{HG} \cdot \overline{PS} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{QS}$
$(3-x) \cdot y = 2 \cdot (6-y) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{12}{5-x}$.
Mit dem Ergebnis der Aufgabe (b) folgt dann

$$\frac{6 \cdot (3-x)}{(4-x)} = \frac{12}{5-x}$$

Diese Bruchgleichung führt dann auf die quadratische Gleichung

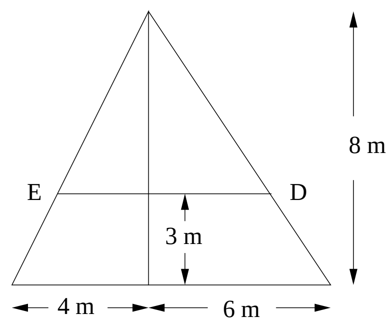
$$x^2 - 6x + 7 = 0 \quad \text{mit} \quad G =]0;3[_{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}\,.$$

Das Pluszeichen entfällt wegen $3 + \sqrt{2} > 3$.

6. Am 10. August wirft der Olympiaturm in München einen 406 m langen Schatten. Gleichzeitig wirft ein 2 m hoher Stab einen 2,8 m langen Schatten. Bestimme die Höhe des Olympiaturmes.

Lösung: Der Turm ist 290 m hoch.

7. Gegeben ist die Schnittzeichnung eines Dachstuhles. In 3 m Höhe soll ein Balken von E nach D eingesetzt werden. Wie lang ist der Balken?



Lösung: $\overline{DE} = 6,25\,\mathrm{m}$

8. Ein Baum ist vom Objektiv einer Kamera 42 m entfernt. Auf der Bildebene, die 15 cm vom Objektiv entfernt ist, entsteht ein $2,5\,\mathrm{cm}$ großes Bild.

   Fertige eine Skizze an und berechne die Höhe des Baumes.

Lösung: $7,0\,\mathrm{m}$

9. Alkohol und Autofahren passen nicht zusammen. Das leuchtet ein. Aber die wenigsten wissen, wie langsam der Alkohol im Körper abgebaut wird. Der durchschnittliche Abbauwert beträgt lediglich 0,15 Promille stündlich. Weder Schlaf noch Mocca können dies beschleunigen. Wer z.B. nach einer Feier um Mitternacht einen Alkoholspiegel von 1,5 Promille erreicht hat, kann sich leicht ausrechnen, wann er/sie wieder restlos nüchtern ist. Denn bereits bei 0,3 Promille kann man sich durch auffälliges Fahrverhalten strafbar machen. Ab 0,5 Promille macht man sich strafbar, auch wenn nichts passiert ist, und ab 1,1 Promille ist man absolut fahruntauglich; es liegt eine Straftat vor.

   (a) Zeichne den zugehörigen Graphen. (Hinweis: Tragt zunächst auf der x-Achse die Uhrzeit ab: der Nullpunkt entspricht 24.00 Uhr - jede weitere Stunde entspricht 3 Kästchen. Tragt auf der y-Achse den Promillegehalt ab: $0,1$ Promille entspricht dabei 2 Kästchen.)

   (b) Um wie viel Uhr sind $1,1$ Promille, $0,5$ Promile und $0,3$ Promille erreicht?

   (c) Welche Promillezahl hat der Fahrer/die Fahrerin morgens um 7.40 Uhr?

   (d) Wenn du einen Fahrzeugführer vor den Gefahren des Autofahrens unter Alkoholeinfluss warnen möchtest, würdest du ihm den Text oder die Graphik in die Hand geben? (Begründe deine Antwort!)

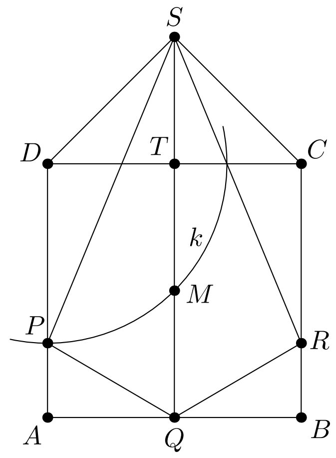
Lösung: (a) - -

(b) Der Fahrer erreicht 1,1 Promille um 2.40 Uhr, 0,5 Promille um 6.40 Uhr und 0,3 Promille um 8.00 Uhr.

(c) Morgens um 7.40 Uhr hat der Fahrer 0,35 Promille.

(d) - -

10. An das Quadrat $ABCD$ ist das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck DCS angefügt worden.
    Der Punkt D ist der Mittelpunkt des Kreisbogens k durch den Quadratmittelpunkt M. Dadurch entsteht der achsensymmetrische Drachen $PQRS$.



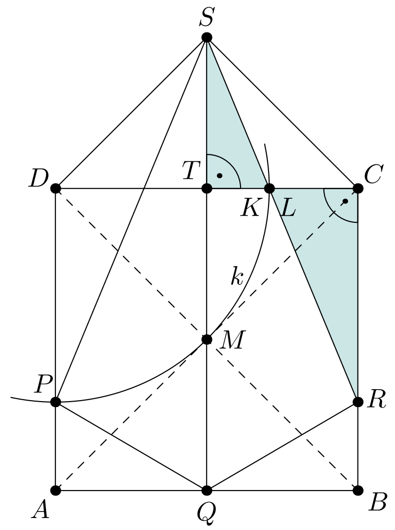
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Für die Länge der Seite $[AB]$ soll jetzt gelten: $\overline{AB} = 2a$.
Berechne damit den Anteil des Flächeninhalts der Drachenfigur $PQRS$ an der Gesamtfläche der Figur $ABCSD$ als Bruch und in Prozent.

(c) Welchen Flächeninhalt hätte das Quadrat $ABCD$, wenn die Dreiecksseite $[DS]$ $14,5\,\text{cm}$ lang wäre?

(d) Es sieht so aus, als ob der Kreisbogen k durch den Schnittpunkt der Strecke $[SR]$ mit der Strecke $[TC]$ verlaufen würde. Trügt der Anschein? Rechne wieder mit $\overline{AB} = 2a$.

Lösung: (a)



(b) Es gilt: $\overline{DC} = 2a$ und $\overline{TS} = a$ (Das ist die Dreieckshöhe.)
$A_{ABCSD} = A_{ABCD} + A_{DCS} = (2a)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = 5a^2$
$A_{PQRS} = \overline{QS} \cdot \overline{PR} = \frac{1}{2} \cdot (2a + a) \cdot 2a = 3a^2$
$\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCSD}} = \dfrac{3a^2}{5a^2} = \dfrac{3}{5} = 0,6 = 60\%$

(c) Das Dreieck DCS ist ein halbes Quadrat, dessen Seite jetzt 14,5 cm lang wäre. Also würde gelten: $A_{DCS} = \frac{1}{2} \cdot 14,5^2\,\text{cm}^2 = 105,125\,\text{cm}^2$.
Mit Hilfe der gestrichelten Linien erkennst du: Das Quadrat $ABCD$ ist in vier kongruente Dreiecke zerlegt worden, die zum Dreieck DCS kongruent sind.
Das Quadrat $ABCD$ hätte also einen Flächeninhalt von $4 \cdot 105,125\,\text{cm}^2 = 420,5\,\text{cm}^2$.

(d) Es sei K der Schnittpunkt der Strecke $[SR]$ mit der Strecke $[TC]$.
Es gilt dann: $\overline{KC} = \overline{DC} - \overline{DK} = 2a - a\sqrt{2} = a(2-\sqrt{2})$
Weiter gilt: $\overline{TK} = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2}-1)$
Dann gilt für Das Teilverhältnis

$$\frac{\overline{KC}}{\overline{TK}} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{a(\sqrt{2}-1)} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}^{\,2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)}{1\cdot(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}$$

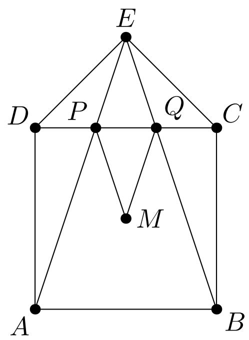
Natürlich kämst du mit $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$ zum selben Resultat.

Es sei L der Schnittpunkt des Kreisbogens k mit der Strecke $[TC]$. Zwar liegen die Punkte K und L in der Zeichnung aufeinander, aber ist das auch tatsächlich so?
Die Dreiecke LRC und TLS sind beide rechtwinklig und sie besitzen im Punkt L maßgleiche Scheitelwinkel. Also sind die beiden Dreiecke zueinander ähnlich und du kannst den Vierstreckensatz anwenden:

$$\frac{\overline{LC}}{\overline{TL}} = \frac{\overline{RC}}{\overline{TS}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{TS}} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

Also teilt der Punkt L die Strecke $[TC]$ im gleichen Verhältnis wie der Punkt K. Dann müssen aber die beiden Punkte K und L aufeinander liegen; d.h. der Kreisbogen k verläuft tatsächlich durch den Schnittpunkt der Strecke $[SR]$ mit der Strecke $[TC]$.

11. An das Quadrat $ABCD$ mit dem Mittelpunkt M ist das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck DCE angefügt worden:

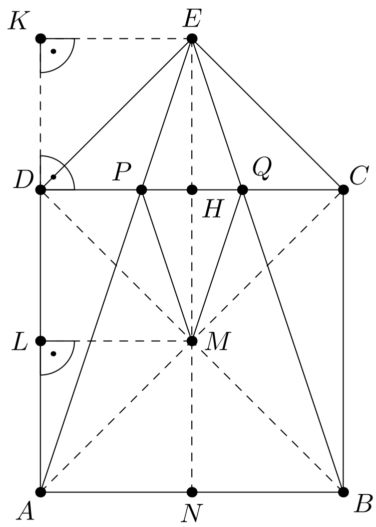


(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Wie viel Prozent der Figur wird vom Dreieck ABE eingenommen?

(c) Wie viel Prozent der Fläche des Dreiecks ABE wird vom Viereck $MQEP$ eingenommen?

Lösung: (a)



(b) Offensichtlich passt das Dreieck DCE fünfmal in die Figur hinein.
Die Dreiecke AMD und AED besitzen die gleiche Grundseite $[AD]$. Ihre Höhen $[ML]$ bzw. $[EK]$ sind gleich lang. Also sind diese beiden Dreiecke flächengleich.
Daher gilt: $A_{\Delta AED} = \frac{1}{5} \cdot A_{ABCED}$.
Aus Symmetriegründen folgt: $A_{\Delta ABE} = A_{ABCED} - 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot A_{ABCED} = \frac{3}{5} A_{ABCED}$.
$\Rightarrow \quad \dfrac{A_{\Delta ABE}}{A_{ABCED}} = \dfrac{3}{5} = 60\%$

(c) Aus Symmetriegründen muss das Viereck $MQEP$ eine Raute sein. Die Dreiecke ANE und PHE sind zueinander ähnlich:

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{EN}} = \frac{1}{3}$$

Daraus ergibt sich übrigens, dass die Strecke $[CD]$ von den Punkten P und Q in drei gleiche Teile geteilt wird.

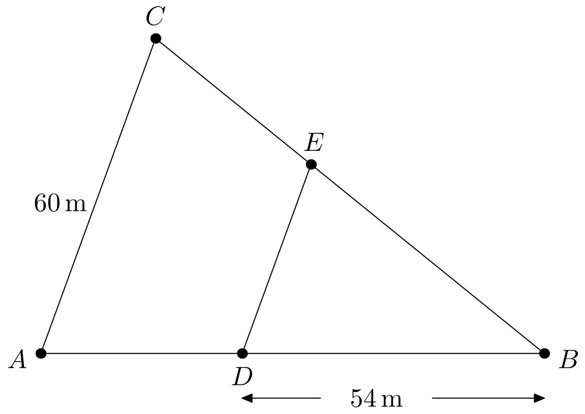
$$\Rightarrow \quad \frac{A_{\Delta PHE}}{A_{\Delta ANE}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = \frac{A_{\Delta PQE}}{A_{\Delta ABE}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A_{PQME}}{A_{\Delta ABE}} = \frac{2}{9} \approx 22,22\%$$

12. Die Maße zweier Innenwinkel in einem Dreieck betragen $73,47°$ und $41,26°$.
Kann dieses Dreieck zu einem anderen Dreieck ähnlich sein, in dem ein Innenwinkel das Maß $65,27°$ besitzt? Begründe deine Antwort.

Lösung: Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in allen drei Innenwinkelmaßen übereinstimmen.
Der dritte Innenwinkel im ursprünglichen Dreieck hat das Maß $180° - 73,47° - 41,26° = 65,27°$. In ihm hat also der dritte Innenwinkel das Maß $65,27°$.
Das andere Dreieck besitzt dieses Innenwinkelmaß ebenfalls. Also kann dieses Dreieck (wenn auch die beiden anderen Innenwinkel paarweise übereinstimmen) zu ersten Dreieck ähnlich sein.

13.

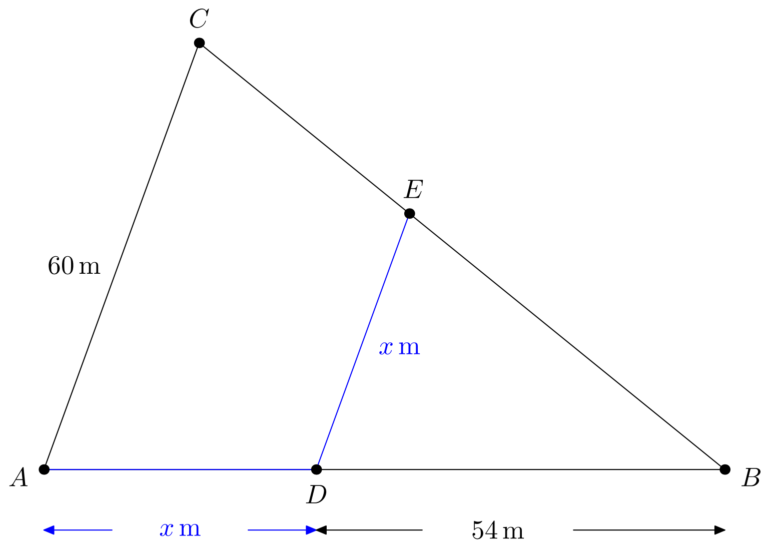


Frau Kermel vererbt ihr Grundstück ABC, das durch den Zaun $[DE]$ unterteilt ist, an ihre beiden Töchter Leni und Sarah. Dieser Zaun $[DE]$ ist genauso lang wie der Abstand der Punkte A und D.
Sarah bekommt den trapezförmigen Teil $ADEC$.

(a) Berechne die Länge des Zaunes.

(b) Wie viel Prozent der gesamten Grundstücksfläche nimmt Sarahs Anteil ein?

Lösung: (a)



Das Viereck $ADEC$ ist ein Trapez. Also ist $[AC] \parallel [DE]$.
Daher gilt: $\Delta DBE \sim \Delta ABC$. Nach einem Vierstreckensatz folgt:

$$\frac{x}{60} = \frac{54}{54 + x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 54x - 3240 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung besitzt die Lösungen 36 und -90, wobei -90 natürlich ausscheidet.
Also ist der Zaun 36 m lang.

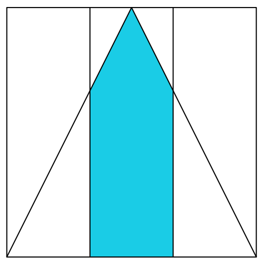
(b) Für den Ähnlichkeitsmaßstab k gilt z.B.: $k = \frac{x\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{m}} = \frac{36\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{m}} = 0,6$

Für Lenis Anteil DBE gilt: $A_{\Delta DBE} = 0,6^2 \cdot A_{\Delta ABC}$.

Weiter folgt: $\frac{A_{\Delta DBE}}{A_{\Delta ABC}} = 0,6^2 = 0,36 = 36\%$.

Also bekommt Sarah den restlichen Anteil von 100%, nämlich 64%.

14.

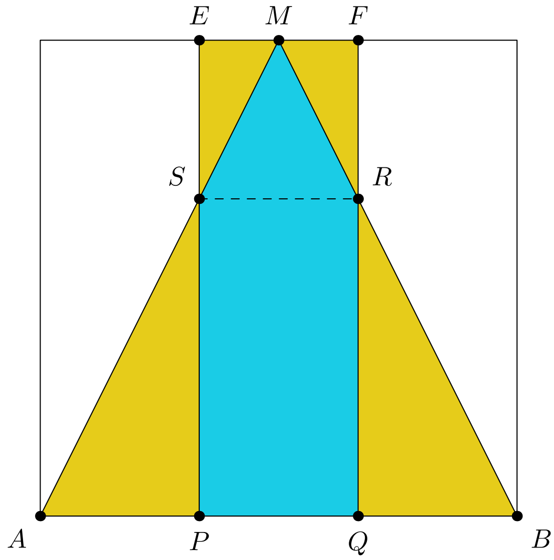


Das ist ein Bild des Logos der Baufirma „Fix & Fertig“. Es besteht aus einem Quadrat, das aus drei kongruenten Streifen zusammengesetzt ist. Das einbeschriebene Dreieck ist gleichschenklig.

(a) Zeichne die Figur, so dass die Quadratseite 6, 3 cm lang ist.

(b) Berechne den Anteil der eingefärbten Fläche am Quadrat als Bruch.

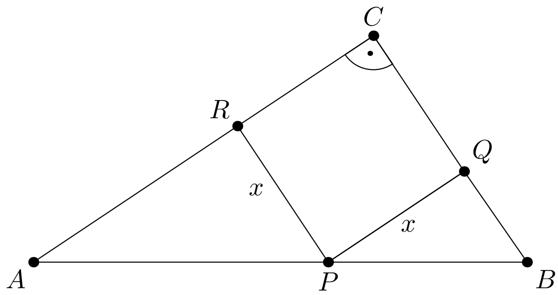
Lösung: (a)



(b) Die Dreiecke APS und SME sind zueinander ähnlich.
Es gilt z.B.: $\overline{AP} : \overline{EM} = 1 : 2 = \overline{PS} : \overline{SE}$.
Die Strecke $[PE]$ ist $6{,}3\,\text{cm}$ lang. Nach dem obigen Seitenverhältnis von $1 : 2$ folgt:
$\overline{PS} = 4{,}2\,\text{cm}$ und $\overline{SE} = 2{,}1\,\text{cm} = \overline{SR}$. Das Viereck $SRFE$ ist ein Quadrat.
Für den Flächeninhalt A der Figur $PQRMSP$ gilt dann:
$A = 2{,}1\,\text{cm} \cdot 4{,}2\,\text{cm} + 0{,}5 \cdot 2{,}1^2\,\text{cm}^2 = 11{,}025\,\text{cm}^2$.

Flächenanteil: $\dfrac{11{,}025\,\text{cm}^2}{6{,}3^2\,\text{cm}^2} = 0{,}2\overline{7} = \dfrac{2}{10} + \dfrac{7}{90} = \dfrac{25}{90} = \dfrac{5}{18}$.

15.



In das rechtwinklige Dreieck ABC ist das Quadrat $PQCR$ mit der Seitenlänge $x\,\text{cm}$ einbeschrieben.

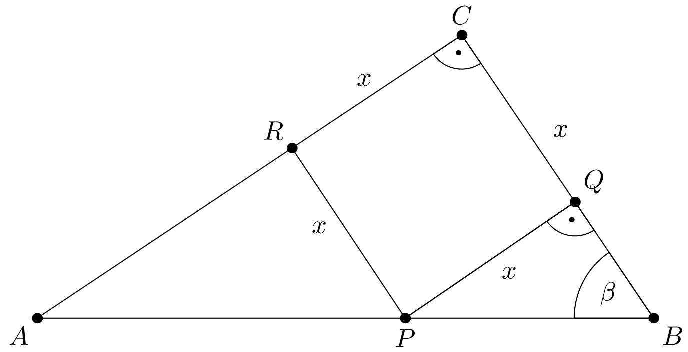
(a) Zeichne die Figur für $\overline{BC} = a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = b = 9\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke PBQ und ABC sind zueinander ähnlich.

(c) Zeige: $x = 3{,}6$.

(d) Berechne den prozentualen Anteil der Fläche des Quadrates $PQCS$ an der Fläche des Dreiecks ABC.

Lösung: (a)



Die Figur wurde im Maßstab 2 : 3 gezeichnet.

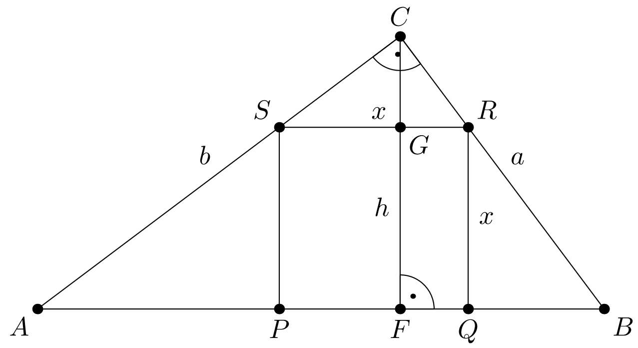
(b) Die beiden Dreiecke PBQ und ABC sind rechtwinklig. Ein Winkel hat jeweils das Maß β. Also stimmen diese Dreiecke wegen der Innenwinkelsumme von 180° in allen drei Inenwinkeln überein. Also sind sie zueinander ähnlich.

(c) $A_{\Delta PBQ} \sim A_{\Delta ABC}$ Vierstreckensatz: $\dfrac{\overline{BQ}}{x} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{6-x}{x} = \dfrac{6}{9}$

$\Leftrightarrow \quad 54 - 9x = 6x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3,6$

(d) $\dfrac{A_{PQCR}}{A_{\Delta ABC}} = \dfrac{3,6^{\,2}\,\mathrm{cm}^2}{0,5 \cdot 6 \cdot 9\,\mathrm{cm}^2} = 0,48 = 48\%$

16.



In das rechtwinklige Dreieck ABC ist das Quadrat $PQRS$ mit der Seitenlänge x cm einbeschrieben.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{BC} = a = 6\,\mathrm{cm}$ und $\overline{AC} = b = 8\,\mathrm{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke FBC und ABC sind zueinander ähnlich.

(c) Zeige: Für die Dreieckshöhe h gilt:

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ \mathrm{cm}.$$

(d) Begründe: Die Dreiecke SRC und ABC sind zueinander ähnlich.

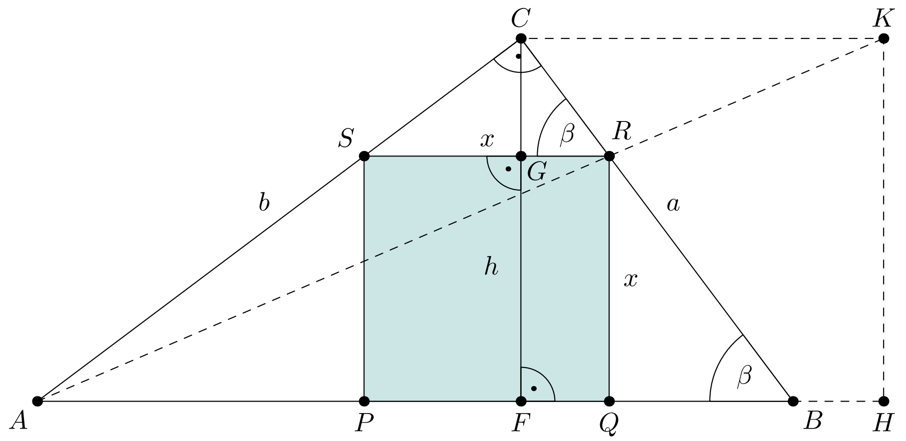
(e) Zeige:

$$x = \frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+ab+b^2}.$$

(f) • Berechne mit Hilfe des Ergebnisses der Aufgabe (e) den prozentualen Anteil der Fläche des Quadrates $PQRS$ an der Fläche des Dreiecks ABC für den Fall, dass das Dreieck ABC gleichschenklig-rechtwinklig ist.

• Begründe dein Ergebnis elementargeometrisch mit Hilfe einer entsprechenden Zeichnung.

Lösung: (a)



Zeichne z.B. das Probequadrat $QHKC$ mit der Seitenlänge $h[= 4,8\,\text{cm}]$. $[AK] \cap [BC] = \{R\}$. Zeichne dann das Quadrat mit der Seite $[RQ]$ fertig.

(b) Aus der Zeichnung in (a) ist ersichtlich, dass beide Dreiecke rechtwinklig sind. Außerdem taucht in beiden Dreiecken der Winkel mit dem Maß β auf. Also stimmen die beiden Dreiecke sogar in allen drei Innenwinkeln überein. Also sind sie zueinander ähnlich.

(c) Wegen $\Delta FBC \sim \Delta ABC$ gilt:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h}{a} = \frac{b}{c}$$

$\Leftrightarrow \quad h = \dfrac{ab}{c}.$ Mit $c = \sqrt{a^2+b^2}\,\text{cm}$ folgt die Behauptung.

Für $a = 6\,\text{cm}$ und $b = 8\,\text{cm}$ ergibt sich $h = 4,8\,\text{cm}$.

(d) In beiden Dreiecken tauchen Stufenwinkel mit dem Maß β auf. Also sind die beiden Dreiecke zueinander ähnlich.

(e) Wegen $\Delta SRC \sim \Delta ABC$ verhalten sich die Längen der Hypotenusen wie die entsprechenden Höhen in beiden Dreiecken:

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{c} = \frac{h-x}{h} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{hc}{h+c}$$

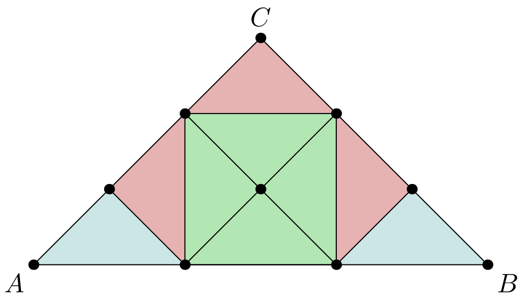
Mit $h = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ cm und $c = \sqrt{a^2+b^2}$ cm ergibt sich:

$$x = \frac{ab}{\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sqrt{a^2+b^2}}.$$

Erweitert man den Bruch mit $\sqrt{a^2+b^2}$, so ergibt sich die Behauptung.

(f)
- In diesem Fall gilt $b = a$. $\Rightarrow \quad x = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3a^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

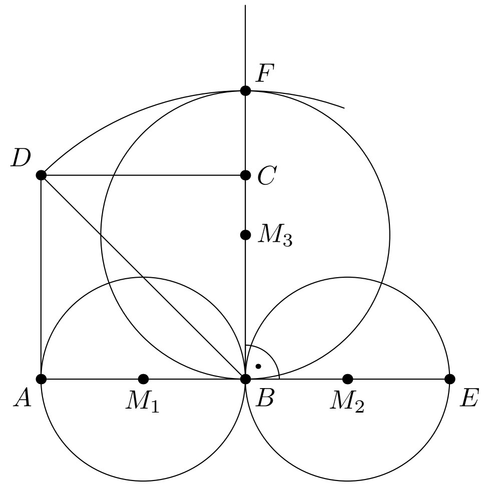
  $$\Rightarrow \quad \frac{A_{PQRS}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{x^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{\frac{a^2 \cdot 2}{3^2}}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{4}{9} = 0,\overline{4} = 44,\overline{4}\%$$

- 

  Das Dreieck ABC lässt sich in neun kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck zerlegen. Vier davon nimmt das einbeschriebene Quadrat ein. Also beträgt der Flächennateil dieses Quadrates am Dreieck ABC

  $\dfrac{4}{9} = 0,\overline{4} = 44,\overline{4}\%$

17.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Punkt B ist der Mittelpunkt des Kreisbogens, der durch die Punkte D und F verläuft. M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der beiden kleinen Kreise, während der große Kreis den Mittelpunkt M_3 besitzt.

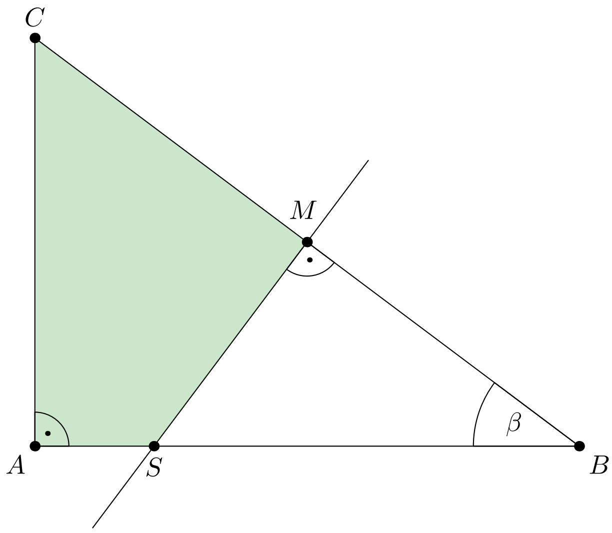
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AE} = 6\,\text{cm}$.

(b) Vergleiche Die Flächeninhalte A_1 und A_2 der beiden kleinen Kreise mit dem Flächeninhalt A_3 des großen Kreises.

Lösung: (a) Klar.

(b) $A_1 = A_2 = 1,5^2\pi\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad A_1 + A_2 = 2 \cdot 1,5^2\pi\,\text{cm}^2$ ($\approx 14,14\,\text{cm}^2$)
Der Durchmesser d des großen Kreises ist genauso lang wie die Diagonale $[BD]$ des Quadates $ABCD$.
$\Rightarrow \quad d = 3\sqrt{2}\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad r_3 = 1,5\sqrt{2}\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad A_3 = (1,5\sqrt{2})^2\pi\,\text{cm}^2 = 2 \cdot 1,5^2\pi\,\text{cm}^2 = A_1 + A_2$.
Also sind die beiden kleinen Kreise zusammen genauso groß wie der große Kreis.
Oder kürzer: Der Durchmesser des großen Kreises ist $\sqrt{2}-$ mal so groß wie der Durchmesser eines kleinen Kreises. Also ist der Flächenihalt des großen Kreises doppelt ($= (\sqrt{2})^2$) so groß wie der eines kleinen Kreises.

18.



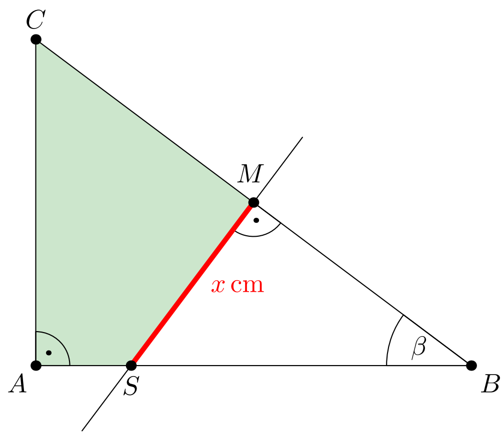
Der Hypotenusenmittelpunkt des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist der Punkt M. In der Figur gilt weiter: $\overline{AB} = 7{,}2\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 5{,}4\,\text{cm}$.

(a) Begründe: Die beiden Dreiecke SBM und ABC sind zueinander ähnlich.

(b) Zeige: $\overline{MS} = 3{,}375\,\text{cm}$.

(c) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $ASMC$ am Dreieck ABC in Prozent.

Lösung: (a)



In beiden Dreiecken ABC und SBM kommt der Innenwinkel mit dem Maß β vor. Zudem sind beide Dreiecke rechtwinklig. Also müssen beide Dreiecke auch im Maß des dritten Innenwinkels übereinstimmen; also gilt $\Delta\, SBM \sim \Delta\, ABC$.

(b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen.
PYTHAGORAS im Dreieck ABC: $\overline{BC}^2 = 7{,}2^2 + 5{,}4^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = 9\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad \overline{BM} = 4{,}5\,\text{cm}$.

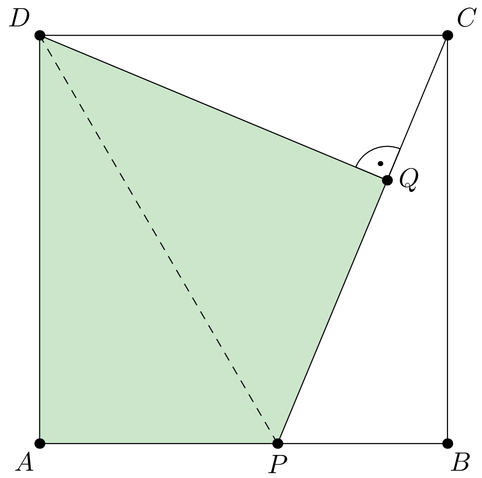
Vierstreckensatz: $\dfrac{\overline{MS}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}: \quad \dfrac{x}{4{,}5} = \dfrac{5{,}4}{7{,}2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3{,}375.$

(c) Berechne den Ähnlichkeitsfaktor: Z.B. $k = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \dfrac{4,5}{7,2} = 0,625$.

Dann gilt $\dfrac{A_{\Delta\,SBM}}{A_{\Delta\,ABC}} = k^2 = 0,625^2 = 0,390625$.

Das bedeutet: Das Dreieck SBM nimmt $39,0625\%$ der Fläche des Dreiecks ABC ein. Dann nimmt das Viereck $ASMC$ $100\% - 39,0625\% = 60,9375\%$ der Fläche des Dreiecks ABC ein.

19.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a.

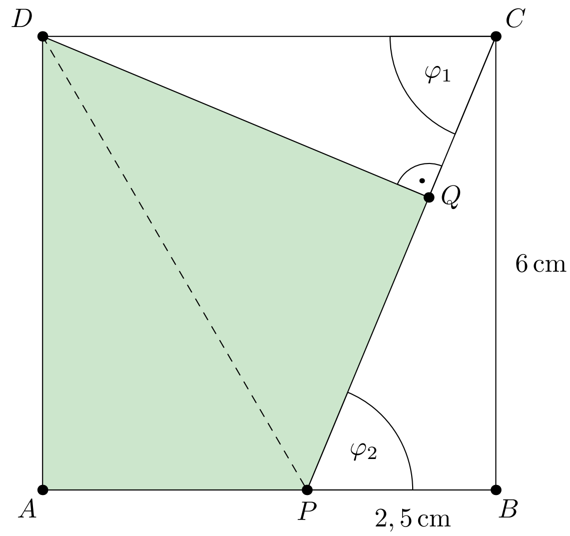
(a) Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{PB} = 2,5\,\text{cm}$.

(b) Begründe ohne Messung: Die Diagonale $[DP]$ ist keine Symmetrieachse im Viereck $APQD$.

(c) Begründe: Die beiden Dreiecke PBC und DQC sind zueinander ähnlich.

(d) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $APQD$ an der Fläche des Quadrates $ABCD$ in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Die Kathete $\overline{AD}$ im rechtwinkligen Dreieck APD besitzt die Länge a. Die Hypotenuse $\overline{DC}$ im rechtwinkligen Dreieck DQC hat ebenfalls die Länge a. Weil aber in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite darstellt, gilt: $\overline{DQ} < a = \overline{AD}$. Somit kann die Diagonale $\overline{DP}$ im Viereck $APQD$ nicht Symmetrieachse dieses Vierecks sein.

(c) In den beiden rechtwinkligen Dreiecken DQC und PBC gilt: $\varphi_1 = \varphi_2$ (Z-Winkel). Damit stimmen die beiden Dreiecke paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck stimmen diese beiden Dreiecke in allen drei Innenwinkelmaßen überein. Also gilt: $\Delta\,PBC \sim \Delta\,DQC$.

(d) Strategie: $A_{APQD} = A_{ABCD} - (A_{\Delta\,PBC} + A_{\Delta\,DQC})$.

$$A_{\Delta\,PBC} = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 6\,\mathrm{cm}^2 = 7,5\,\mathrm{cm}^2 .$$

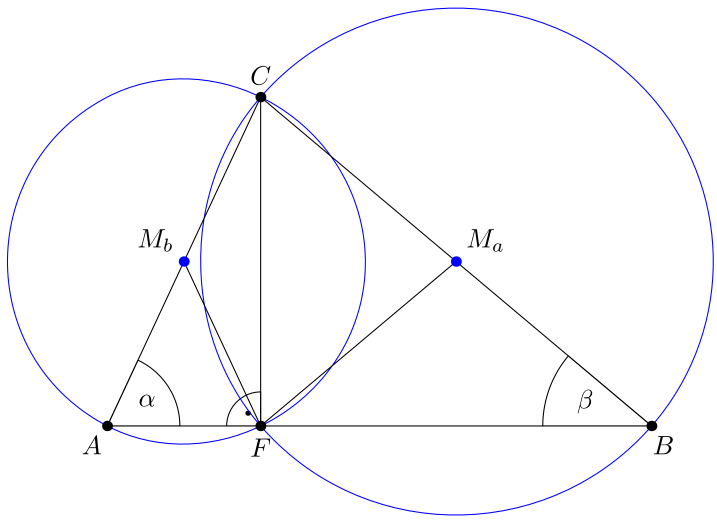
Wegen (c) folgt: $A_{\Delta\,DQC} = k^2 \cdot A_{\Delta\,PBC}$ mit dem Streckungsfaktor k.

Mit $k = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{PC}}$ folgt: $\quad k = \dfrac{6\,\mathrm{cm}}{\sqrt{2,5^2+6^2}\,\mathrm{cm}} = \dfrac{12}{13}$.

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\,DQC} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2 = \frac{144}{169} \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2 .$$

$$\begin{aligned} A_{APQD} &= 36\,\mathrm{cm}^2 - \left(7,5\,\mathrm{cm}^2 + \frac{144}{169} \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2\right) \\ &= 36\,\mathrm{cm}^2 - \frac{313}{169} \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2 \\ \frac{A_{APQD}}{A_{ABCD}} &= \frac{6084 - 2374,5}{169 \cdot 36} = \frac{3707,5}{6084} \approx 0,6094 = 60,94\,\% . \end{aligned}$$

20.



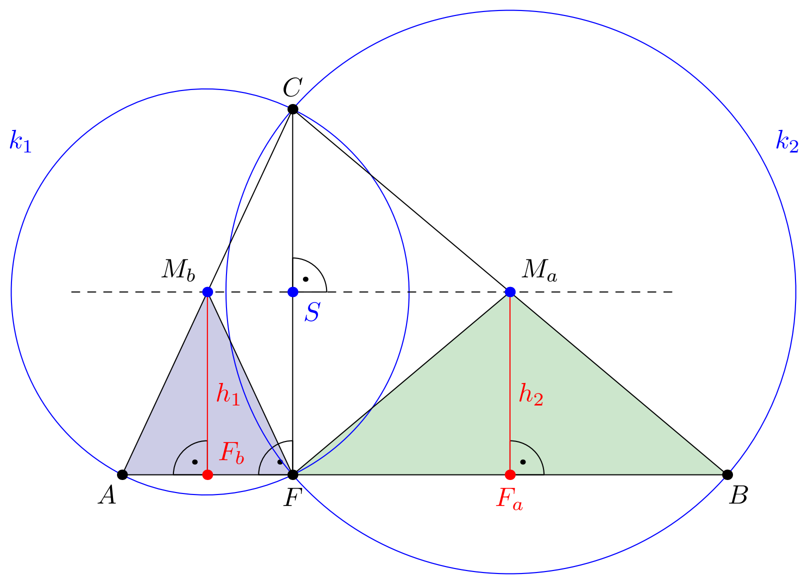
Im Dreieck ABC mit der Höhe $[CF]$ sind die Punkte M_a und M_b die Mittelpunkte der Umkreise der Teildreiecke FBC bzw. AFC.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe auf verschiedene Weise: Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Begründe: Zusammen bedecken die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a die Hälfte des Dreiecks ABC.

Lösung: (a)



(b) **1. Möglichkeit:**
Im Kreis k_1 gilt: $\overline{M_bA} = \overline{M_bF} = \overline{M_bC}$.
Im Kreis k_2 gilt: $\overline{M_aB} = \overline{M_aF} = \overline{M_aC}$.
Also sind im Viereck FM_aCM_b zweimal zwei benachbarte Seiten gleich lang. Also handelt es sich um ein achsensymmetrisches Drachenviereck.

2. Möglichkeit:
In jedem rechtwinkligen Dreieck fällt dessen Umkreismittelpunkt mit dem Hypotenusenmittelpunkt zusammen. Also sind die Kreismittelpunkte M_a und M_b gleichzeitig die Mittelpunkte der Seiten $a = [BC]$ bzw. $b = [AC]$.
Die Dreiecke FBC und F_aBM_a sind zueinander ähnlich.
Wegen $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM_a}$ folgt dann $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{F_aM_a} = 2 \cdot \overline{F_bM_b}$.
Also gilt: $h_1 = h_2 = \overline{SF} = \overline{FC}$. Daher liegt die Gerade M_aM_b zur Grundlinie $[AB]$ des Dreiecks ABC parallel. Diese Parallele steht damit auf der Diagonalen des Vierecks FM_aCM_b senkrecht. Gleichzeitig halbiert der Punkt S die Höhe $[CF]$ des Dreiecks ABC. Also ist das Viereck FM_aCM_b ein achsensymmetrischer Drachen.

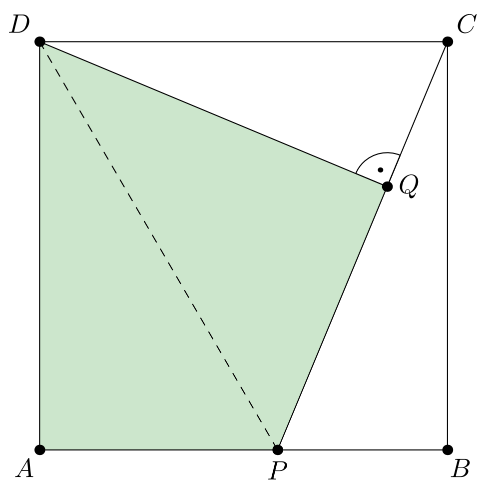
(c) Die in der 2. Möglichkeit verwendete Argumentation ergibt nun Folgendes:

- Die vier Dreiecke F_aBM_a, FF_aM_a, FM_aS und SM_aC sind kongruent. Das Dreieck FBM_a besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
  Also ist das Dreieck FBM_a halb so groß wie das Teildreieck FBC .
- Die vier Dreiecke AF_bM_b, F_bFM_b, FSM_b und M_bSC sind kongruent. Das Dreieck AFM_b besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
  Also ist das Dreieck AFM_b halb so groß wie das Teildreieck AFC .

Also sind die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a zusammen halb so groß wie das Dreieck ABC .

Oder:
Weil der Schnittpunkt S auf halber Höhe im Dreieck ABC liegt, gilt:
$A_{\Delta\, M_bM_aC} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta\, ABC}$ (zentrische Streckung mit $k = \frac{1}{2}$) .
Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen mit der Diagonalen $[M_aM_b]$ als Symmetrieachse.
$\Rightarrow \quad A_{FM_aCM_b} = 2 \cdot \frac{1}{4} A_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta\, ABC}$.
Dann muss der Rest, nämlich derjenige, der aus den beiden Dreiecken AFM_b und FBM_a besteht, ebenfalls die Hälfte des Dreiecks ABC einnehmen.

21.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a.

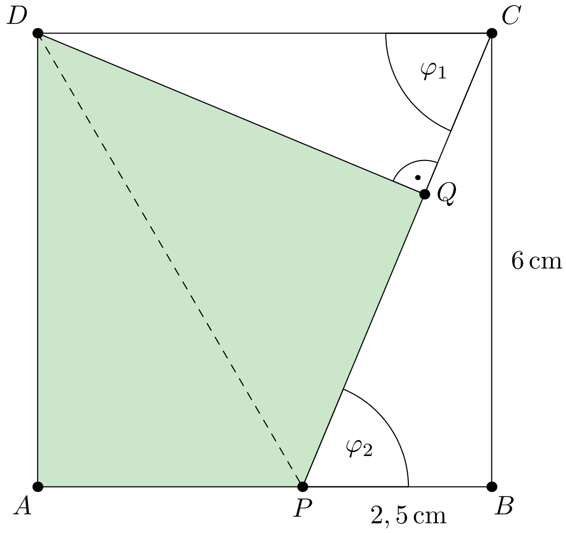
(a) Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{PB} = 2,5\,\text{cm}$.

(b) Begründe ohne Messung: Die Diagonale $[DP]$ ist keine Symmetrieachse im Viereck $APQD$.

(c) Begründe: Die beiden Dreiecke PBC und DQC sind zueinander ähnlich.

(d) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $APQD$ an der Fläche des Quadrates $ABCD$ in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Die Kathete $\overline{AD}$ im rechtwinkligen Dreieck APD besitzt die Länge a. Die Hypotenuse $\overline{DC}$ im rechtwinkligen Dreieck DQC hat ebenfalls die Länge a. Weil aber in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite darstellt, gilt: $\overline{DQ} < a = \overline{AD}$. Somit kann die Diagonale $\overline{DP}$ im Viereck $APQD$ nicht Symmetrieachse dieses Vierecks sein.

(c) In den beiden rechtwinkligen Dreiecken DQC und PBC gilt: $\varphi_1 = \varphi_2$ (Z-Winkel). Damit stimmen die beiden Dreiecke paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von $180°$ in jedem Dreieck stimmen diese beiden Dreiecke in allen drei Innenwinkelmaßen überein. Also gilt: $\Delta\, PBC \sim \Delta\, DQC$.

(d) Strategie: $A_{APQD} = A_{ABCD} - (A_{\Delta\, PBC} + A_{\Delta\, DQC})$.

$$A_{\Delta\, PBC} = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 6\,\text{cm}^2 = 7,5\,\text{cm}^2\,.$$

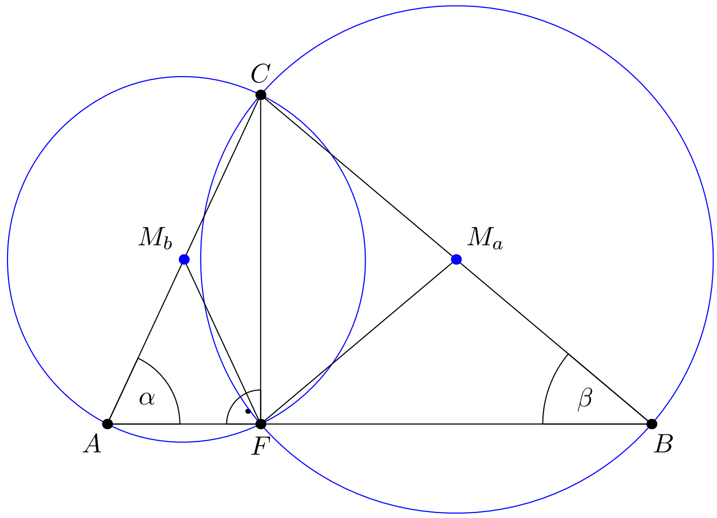
Wegen (c) folgt: $A_{\Delta\, DQC} = k^2 \cdot A_{\Delta\, PBC}$ mit dem Streckungsfaktor k.

Mit $k = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{PC}}$ folgt: $k = \dfrac{6\,\text{cm}}{\sqrt{2,5^2 + 6^2}\,\text{cm}} = \dfrac{12}{13}$.

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\, DQC} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot 7{,}5\,\mathrm{cm}^2 = \frac{144}{169} \cdot 7{,}5\,\mathrm{cm}^2\,.$$

$$\begin{aligned} A_{APQD} &= 36\,\mathrm{cm}^2 - \left(7{,}5\,\mathrm{cm}^2 + \frac{144}{169}\cdot 7{,}5\,\mathrm{cm}^2\right) \\ &= 36\,\mathrm{cm}^2 - \frac{313}{169}\cdot 7{,}5\,\mathrm{cm}^2 \\ \frac{A_{APQD}}{A_{ABCD}} &= \frac{6084 - 2374{,}5}{169\cdot 36} = \frac{3707{,}5}{6084} \approx 0{,}6094 = 60{,}94\%\,. \end{aligned}$$

22.



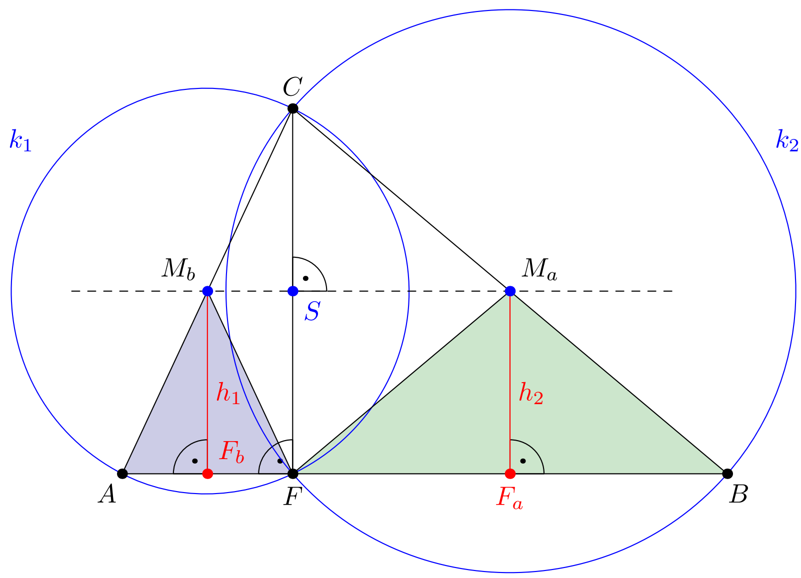
Im Dreieck ABC mit der Höhe $[CF]$ sind die Punkte M_a und M_b die Mittelpunkte der Umkreise der Teildreiecke FBC bzw. AFC.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 65^\circ$ und $\beta = 40^\circ$.

(b) Begründe auf verschiedene Weise: Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Begründe: Zusammen bedecken die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a die Hälfte des Dreiecks ABC.

Lösung: (a)



(b) **1. Möglichkeit:**
Im Kreis k_1 gilt: $\overline{M_bA} = \overline{M_bF} = \overline{M_bC}$.
Im Kreis k_2 gilt: $\overline{M_aB} = \overline{M_aF} = \overline{M_aC}$.
Also sind im Viereck FM_aCM_b zweimal zwei benachbarte Seiten gleich lang. Also handelt es sich um ein achsensymmetrisches Drachenviereck.
2. Möglichkeit:
In jedem rechtwinkligen Dreieck fällt dessen Umkreismittelpunkt mit dem Hypotenusenmittelpunkt zusammen. Also sind die Kreismittelpunkte M_a und M_b gleichzeitig die Mittelpunkte der Seiten $a = [BC]$ bzw. $b = [AC]$.
Die Dreiecke FBC und F_aBM_a sind zueinander ähnlich.
Wegen $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM_a}$ folgt dann $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{F_aM_a} = 2 \cdot \overline{F_bM_b}$.
Also gilt: $h_1 = h_2 = \overline{SF} = \overline{FC}$. Daher liegt die Gerade M_aM_b zur Grundlinie $[AB]$ des Dreiecks ABC parallel. Diese Parallele steht damit auf der Diagonalen des Vierecks FM_aCM_b senkrecht. Gleichzeitig halbiert der Punkt S die Höhe $[CF]$ des Dreiecks ABC. Also ist das Viereck FM_aCM_b ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Die in der 2. Möglichkeit verwendete Argumentation ergibt nun Folgendes:

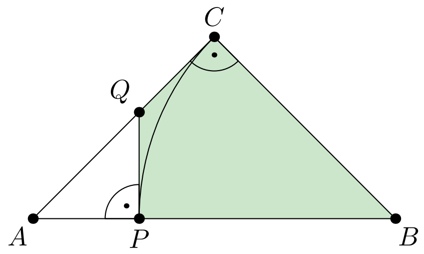
- Die vier Dreiecke F_aBM_a, FF_aM_a, FM_aS und SM_aC sind kongruent. Das Dreieck FBM_a besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
  Also ist das Dreieck FBM_a halb so groß wie das Teildreieck FBC .
- Die vier Dreiecke AF_bM_b, F_bFM_b, FSM_b und M_bSC sind kongruent. Das Dreieck AFM_b besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
  Also ist das Dreieck AFM_b halb so groß wie das Teildreieck AFC .

Also sind die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a zusammen halb so groß wie das Dreieck ABC .

Oder:
Weil der Schnittpunkt S auf halber Höhe im Dreieck ABC liegt, gilt:
$A_{\Delta\, M_bM_aC} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta\, ABC}$ (zentrische Streckung mit $k = \frac{1}{2}$) .
Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen mit der Diagonalen $[M_aM_b]$

als Symmetrieachse.
$\Rightarrow \quad A_{FM_aCM_b} = 2 \cdot \frac{1}{4} A_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta\, ABC}$.
Dann muss der Rest, nämlich derjenige, der aus den beiden Dreiecken AFM_b und FBM_a besteht, ebenfalls die Hälfte des Dreiecks ABC einnehmen.

23.



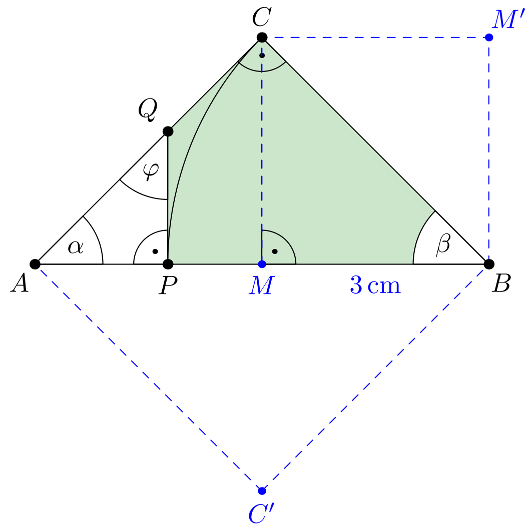
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt B .

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke ABC und APQ sind zueinander ähnlich.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC nimmt das Dreieck APQ ein? Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Es gilt $\alpha = \beta = 45°$. Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck APQ gilt aber auch $\alpha = \varphi = 45°$. Also stimmen die beiden Dreiecke ABC und APQ paarweise in ihren Innenwinkelmaßen überein. Damit sind sie zueinander ähnlich.

(c) Weil die beiden Dreiecke ABC und APQ zueinander ähnlich sind, gilt für den Ähnlichkeitsfaktor k z.B.:

$$k = \frac{\overline{AP}}{\overline{BC}}\,.$$

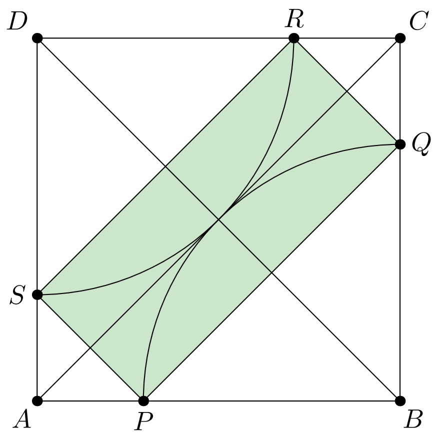
Das Dreieck MBC ist ein halbes Quadrat mit der Daigonalenlänge $\overline{BC} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.

$\overline{AP} = \overline{BA} - \overline{BP} = \overline{BA} - \overline{BC} = (6 - 3\sqrt{2})\,\text{cm}$.

Damit folgt $k = \dfrac{(6 - 3\sqrt{2})\,\text{cm}}{6\,\text{cm}}$.

Und $\dfrac{A_{\Delta\,APQ}}{A_{\Delta\,ABC}} = k^2 = \left[\dfrac{(6 - 3\sqrt{2})\,\text{cm}}{(3\sqrt{2})\,\text{cm}}\right]^2 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,1716 = 17,16\%$.

24.



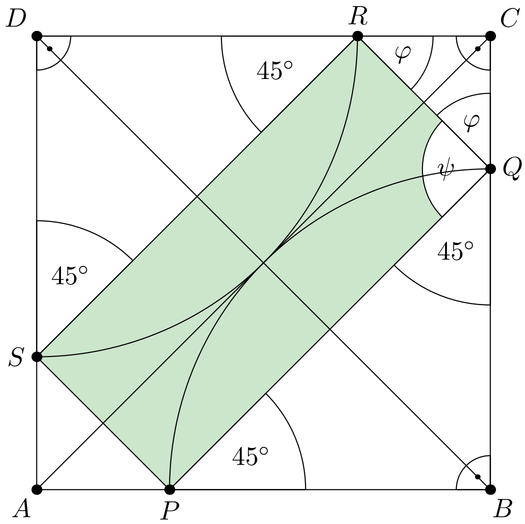
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte B und D.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Rechteck.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck $PQRS$ ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Die beiden Dreiecke PBQ und SRD sind gleichschenklig-rechtwinklig. Also haben ihre spitzen Innenwinkel das Maß $45°$.
Weiter gilt: $\overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{BQ} = \overline{DC} - \overline{DR} = \overline{CR}$. Also ist auch das Dreieck RQC gleichschenklig-rechtwinklig. Dann gilt $\varphi = 45°$.
Am Punkt Q gilt somit: $45° + \psi + 45° = 180° \quad \Rightarrow \quad \psi = 90°.$.
Aus Symmetriegründen sind dann auch die drei restlichen Innenwinkel des Vierecks $PQRS$ rechte Winkel. Also handelt es sich hierbei um ein Rechteck.

(c) Eine mögliche Strategie: $A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot (A_{\Delta\, PBQ} + A_{\Delta\, RQC})$

$$A_{\Delta\, PBQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 \text{ cm}^2 = 9\,\text{cm}^2 \,.$$

$$A_{\Delta\, RQC} = \frac{1}{2} \cdot \left(6 - 3\sqrt{2}\right)^2 \text{ cm}^2 = (27 - 18\sqrt{2})\,\text{cm}^2 \,.$$

$$A_{PQRS} = 36\,\text{cm}^2 - 2 \cdot [9\,\text{cm}^2 + (27 - 18\sqrt{2})\,\text{cm}^2] = (36\sqrt{2} - 36)\,\text{cm}^2 \,.$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(36\sqrt{2} - 36)\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = \frac{(36(\sqrt{2} - 1)\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2}$$

$$= \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142 = 41,42\%$$

15. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

1. Es gibt Dreiecke mit einem Flächeninhalt von $24\,\mathrm{cm}^2$. Zeichne zwei solche Dreiecke, die diesen Flächeninhalt aufweisen, die aber nicht kongruent zueinander sind.

Lösung: - -

2. Die eine Seite eines Rechtecks $ABCD$ ist halb so lang wie die andere Rechtecksseite. Der Umfang des Rechtecks ist $54\,\mathrm{cm}$ lang.
   (a) Berechne die beiden Seitenlängen des Rechtecks.
   (b) Berechne die Länge einer Diagonalen.

Lösung: (a) $9\,\mathrm{cm}$, $18\,\mathrm{cm}$
(b) $d = \sqrt{405}\,\mathrm{cm} \approx 20,12\,\mathrm{cm}$

3. In einem Rechteck $EFGH$ sind die beiden Diagonalen zusammen $22\,\mathrm{cm}$ lang. Eine Seite dieses Rechtecks ist $5,5\,\mathrm{cm}$ lang.
   (a) Zeichne dieses Rechteck.
   (b) Bestimme sämtliche Winkelmaße am Diagonalenschnittpunkt.
   (c) Berechne jeweils den Flächeninhalt sämtlicher Teildreiecke in diesem Rechteck. Es gibt mehrere Möglichkeiten.
   (d) Berechne den Abstand eines Eckpunktes zur entsprechenden Diagonalen.

Lösung: (b) $60°$, $120°$
(c) $A_1 = 2,75 \cdot \sqrt{90,75}\,\mathrm{cm}^2 \approx 26,20\,\mathrm{cm}^2$ $\quad A_2 = 1,375 \cdot \sqrt{90,75}\,\mathrm{cm}^2 \approx 13,10\,\mathrm{cm}^2$
$A_3 = A_2$
(d) $d = 2,75 \cdot \sqrt{3}\,\mathrm{cm} \approx 4,76\,\mathrm{cm}$

4. Untersuche, ob die Punkte $P(0|0)$, $Q(6|2,5)$ und $R(11|4,5)$ auf einer Geraden liegen.

Lösung: Es gibt mehrere Möglichkeiten: z.B. über Steigungsdreiecke, Vektoren, Geradengleichungen.
Antwort: Nein, aber ziemlich knapp.

5. Gegeben sind die Punkte $A(3|-2)$ und $B(1|2)$.
   Um wie viel Prozent muss man die Strecke $[AB]$ mindestens verlängern, bis man auf die y-Achse trifft? Löse die Aufgabe auf verschiedene Weise.

Lösung: Z.B. über Steigungsdreiecke oder die Länge von Strecken.
Antwort: Um 50%.

6. Verlängere die Strecke $[DE]$ mit $D(-4|2)$ und $E(2|3)$ um 10% ihrer Länge über den Punkt E hinaus bis zum Punkt E^*.
   Berechne die Koordinaten des Punktes E^*.

Lösung: $E^*(2,6|3,1)$.

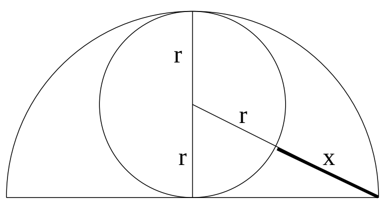
7. Ein Quadrat besitzt einen Flächeninhalt von $39,69\,\text{cm}^2$.
   Berechne die Länge einer Diagonalen.

Lösung: $d = 6,3 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \approx 8,91\,\text{cm}$

8. Die Diagonale eines Quadrates ist 7 cm. lang.
   (a) Zeichne dieses Quadrat.
   (b) Berechne den Umfang dieses Quadrates.

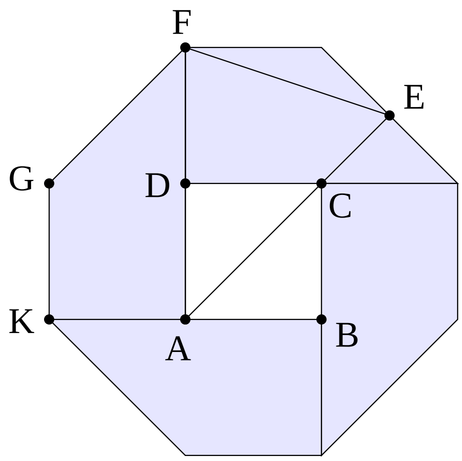
Lösung: (b) $u = 14 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \approx 19,80\,\text{cm}$

9. Berechne auf Grund der Skizze die Länge der Strecke x in Abhängigkeit vom Radius r.



Lösung: $x = 1,24\,r$

10. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das weiße Viereck ist ein Quadrat. Es gilt $\overline{AB} = \overline{DF} = a\,\text{cm}$. Zusätzlich ist hier das Dreieck AEF eigezeichnet.

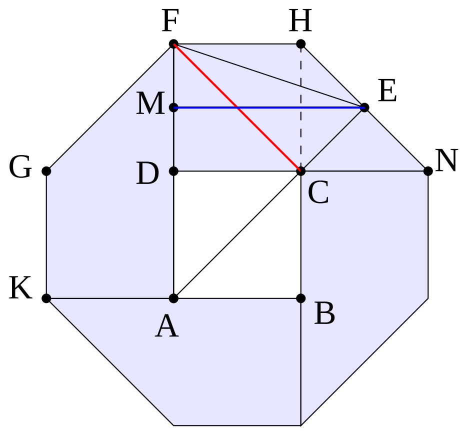


(a) Zeichne die Figur für $\overline{FG} = 3,2\,\text{cm}$ so, dass die Strecke $[KB]$ waagrecht liegt.

(b) Berechne in deiner Zeichnung den Flächeninhalt Quadrates $ABCD$.

(c)
- Untersuche ohne Verwendung des Taschenrechners, ob das Dreieck AEF gleichschenklig ist. Gilt dein Ergebnis auch dann noch, wenn die Figur verkleinert oder vergrößert wird? Begründe deine Ansicht.
- Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks auf drei verschiedene Arten in Abhängigkeit von a.

Lösung: (a) $[FG]$ ist genauso lang wie die Diagonale $[AC]$ des Quadrates $ABCD$.
Also gilt: $a\sqrt{2} = 3,2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3,2}{\sqrt{2}} \approx 2,26$.
Für die Zeichnung: $\overline{AF} = \overline{KB} = 2a\,\text{cm} \approx 5,52\,\text{cm}$.

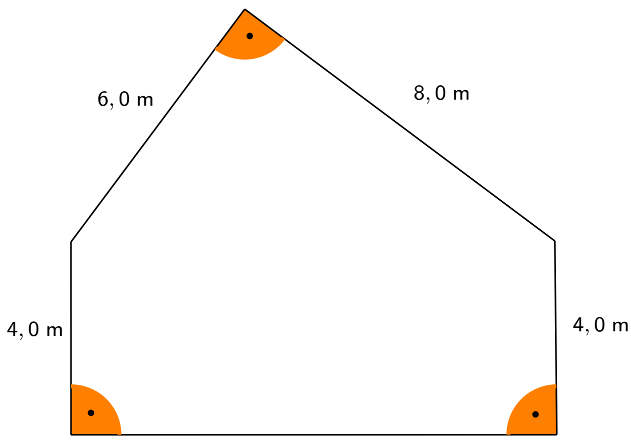


(b) $A(ABCD) = a^2\,\text{cm}^2 = \left(\frac{3,2}{\sqrt{2}}\right)^2\,\text{cm}^2 = 5,12\,\text{cm}^2$

(c)
- Wegen $\overline{CE} = 0,5 \cdot \overline{AC}$ müsste gelten:
  $2a = 1,5a\sqrt{2} \quad (a \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$.
  Weil aber $\sqrt{2}$ irrational ist, liegt hier ein Widerspruch vor.
  Dieser Widerspruch lässt sich auch durch Vergößerung oder Verkleinerung der Figur nicht auflösen: Jede Vergrößerung oder Verkleinerung ist eine winkeltreue Abbildung. Wenn in der Ausgangsfigur keine zwei Winkel maßgleich sind, dann wird dies auch bei einer Größenänderung nicht anders.

- Es wird nur mit Maßzahlen gerechnet.
  1. Möglichkeit:
  $A(AEF) = 0,5\overline{AE} \cdot \overline{FC} = 0,5 \cdot 1,5a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 1,5a^2$.
  2. Möglichkeit:
  $A(AEF) = 0,5 \cdot \overline{AF} \cdot \overline{EM} = 0,5 \cdot 2a \cdot 1,5a = 1,5a^2$.
  3. Möglichkeit:
  Das Lot $[FC]$ zelegt das Dreieck AEF in die beiden rechtwinkligen Teildreiecke ACF und CEF.
  Das Dreieck ACF ist so groß wie das Quadrat $ABCD$: $A(ACF) = a^2$.
  Weil $[FC] \parallel [HN]$ ist, folgt $A(CEF) = A(FCH) = 0,5a^2$.
  $\Rightarrow \quad A(AEF) = a^2 + 0,5a^2 = 1,5a^2$.

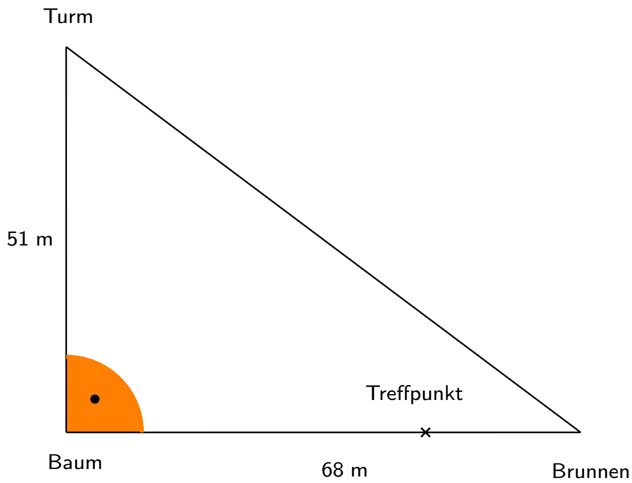
11.



Berechne den Umfang des Fünfecks.

Lösung: Der Umfang beträgt 32 m.

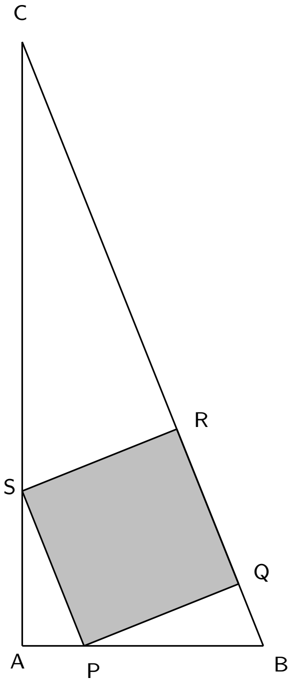
12.



Der Brunnen ist 68 m und der Turm 51 m vom Baum entfernt. Beim Turm laufen Sabrina und Daniel gleichzeitig mit derselben Geschwindigkeit los. Daniel läuft zuerst zum Baum und dann Richtung Brunnen. Sabrina geht zuerst zum Brunnen und dann Richtung Baum. Berechne den Abstand vom Treffpunkt zum Brunnen.

Lösung: Der Treffpunkt ist 17 m vom Brunnen entfernt.

13.



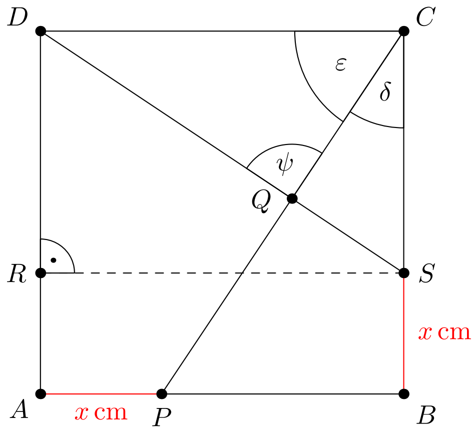
Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC und das einbeschriebene Quadrat $PQRS$.
Es gilt: $\overline{AP} = 2,0\,\text{cm}$ und $\overline{AS} = 5,0\,\text{cm}$.
Berechne Länge der Hypotenuse $[BC]$.

Lösung: $\overline{BC} = 21\,\text{cm}$

14. Eine kleine Pizza hat einen Durchmesser von $23,0\,\text{cm}$. Berechne den Durchmesser einer großen Pizza, die den doppelten Flächeninhalt hat.

Lösung: Die große Pizza hat einen Durchmesser von $32,5\,\text{cm}$.

15.

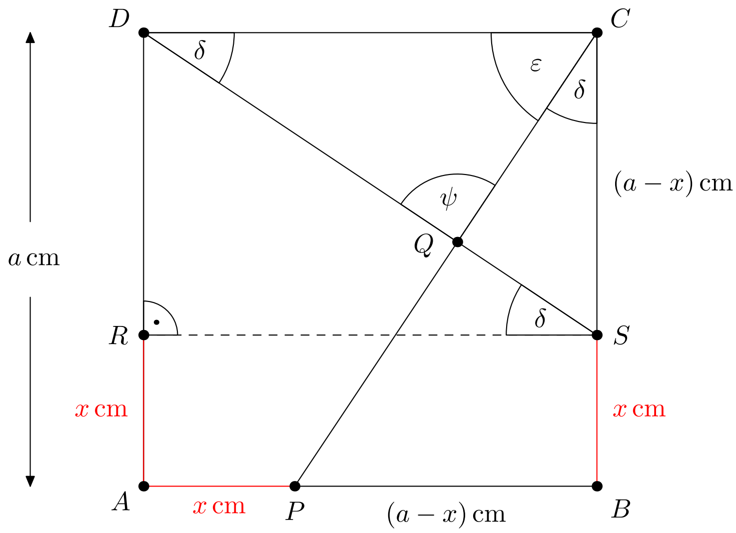


Die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ ist a cm lang.

(a) Zeichne die Figur für $a = 6$ und x = 2.

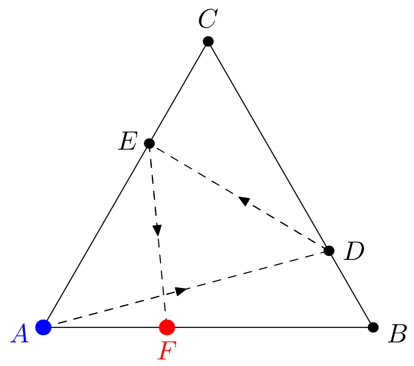
(b) Begründe: $\psi = 90°$.

Lösung: (a)



(b) Am Punkt C gilt: $\varepsilon + \delta = 90°$. **(*)**
Die rechtwinkligen Dreiecke PBC und RSD sind kongruent, denn es gilt: $\overline{PB} = \overline{RD} = (a - x)$ cm und $\overline{BC} = \overline{RS} = a$ cm.
Also folgt $\sphericalangle DSR = \delta = \sphericalangle SDC$ (Z-Winkel).
Wegen **(*)** gilt im Dreieck $DQC : \psi = 90°$.

16.



Herr Theo Lith ist als Platzwart für das Spielfeld ABC verantwortlich, das die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit einer Seitenlänge von 56 m besitzt.
Auf einem Kontrollgang startet er vom Eingang A auf dem kürzesten Weg zur Seite $[BC]$. Von dort aus läuft er wieder auf dem kürzesten Weg zur Seite $[AC]$. Dann begibt er sich erneut auf dem kürzesten Weg zur Grundstücksseite $[AB]$ und trifft dort auf den Fahnenmasten F.

(a) Der gestrichelt eingezeichnete Kontrollweg von Herrn Lith in der obigen Zeichnung ist falsch eingetragen. Was ist daran verkehrt?

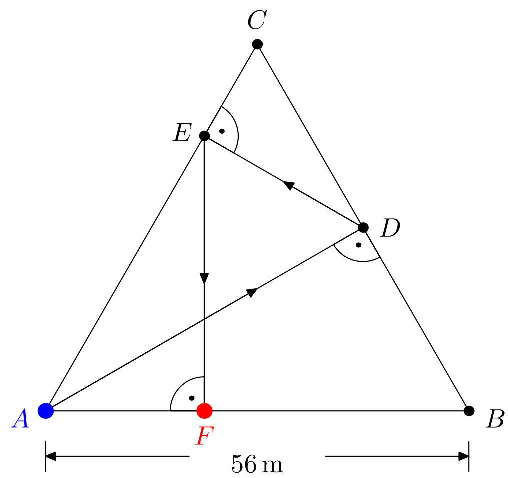
(b) Zeichne die Figur mit dem richtigen Weg im Maßstab 1 : 1000. Trage dann den Weg von Herrn Lith und die Punkte D, E und F korrekt ein.

(c) Zeige: $\overline{AF} : \overline{FB} = 3 : 5$.

(d) Bestätige mit Hilfe der Angabe (c) die Position des Fahnenmastes durch eine weitere Konstruktion in deiner Zeichnung.

Lösung: (a) Die kürzeste Entfernung eines Punktes zu einer Strecke (Geraden) ist das Lot von diesem Punkt auf die Strecke (Gerade). Aber hier steht z.B. die Strecke $[AD]$ offensichtlich nicht auf der Dreiecksseite $[BC]$ senkrecht.

(b)

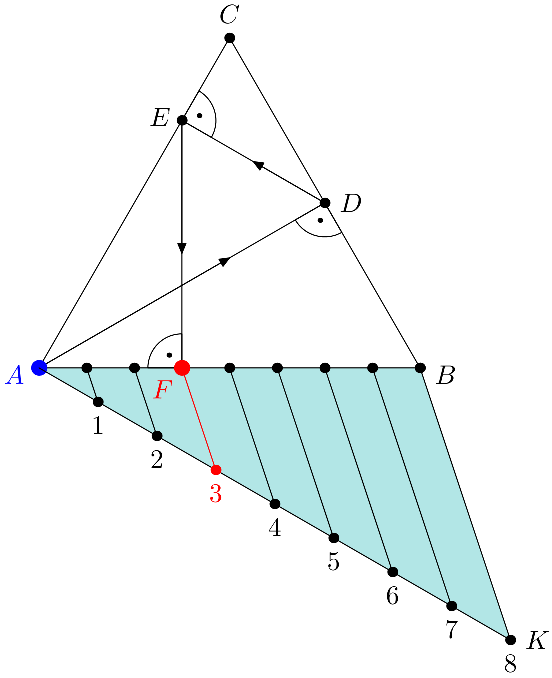


(c) Der Punkt D halbiert die Seite $[BC]$. $\Rightarrow$ $\overline{DC} = 28\,\text{m}$.
Das Dreieck EDC ist ein halbes gleichseitiges Dreieck mit $\overline{EC} = 0,5 \cdot \overline{DC} = 14\,\text{m}$.

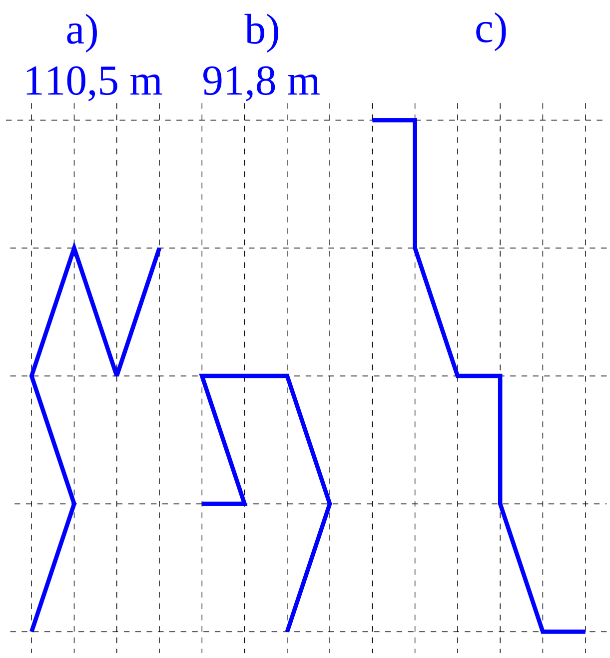
$\Rightarrow \quad \overline{AE} = 56\,\text{m} - 14\,\text{m} = 42\,\text{m}.$
Das Dreieck AFE ist wieder ein halbes gleichseitiges Dreieck: $\overline{AF} = 21\,\text{m}.$
$\Rightarrow \quad \overline{FB} = 56\,\text{m} - 21\,\text{m} = 35\,\text{m}.$

$$\frac{21\,\text{m}}{35\,\text{m}} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \overline{AF} : \overline{FB} = 3 : 5.$$

(d) Wähle z.B. eine 8 cm lange Strecke $[AK]$ und teile sie in 8 gleiche Teile. Zeichne die zugehörigen Hilfslinien parallel zu $[BK]$ ein. Der Winkel, den die Strecken $[AK]$ und $[AB]$ einschließen, spielt zwar keine Rolle; du solltest ihn aber wegen der Zeichengenauigkeit nicht zu spitz wählen. Es folgt dann: Der Punkt F teilt die Strecke $[AB]$ im Verhältnis $3 : 8$.
Damit gilt: $\overline{AF} : \overline{FB} = 3 : 5$.



17.



Die Längen der zwei Wege a) und b) sind angegeben. Wie lang ist der Weg c)?

Lösung:

Weg a)

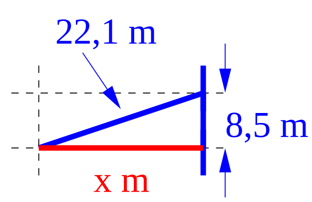
Er besteht aus 5 gleich langen Strecken, denn jede Strecke stellt die Diagonale eines rechteckigen Gitterkästchens dar:
$110,5\,\text{m} : 5 = 22,1\,\text{m}$. So lang ist die Diagonale eines Gitterkästchens.

Weg b)

Er enthält 3 gleich lange Rechtecksdiagonalen eines Gitterkästchens. Der Rest dieses Weges ist dreimal so lang wie Breite eines Gitterkästchens. Für die Breite eines Gitterkästchens gilt dann:
$(91,8\,\text{m} - 3 \cdot 22,1\,\text{m}) : 3 = 8,5\,\text{m}$.

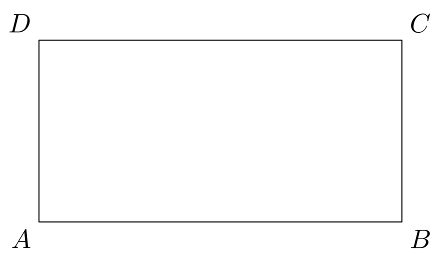
Weg c)

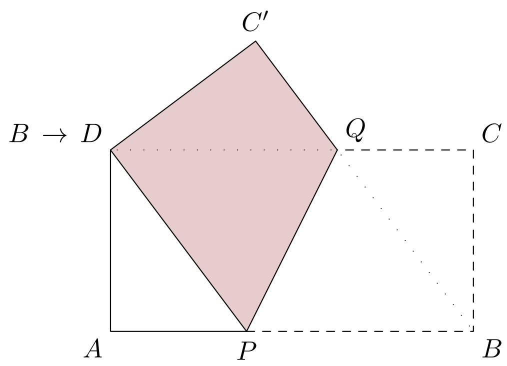
Von einem Gitterkästchen kennst du nun dessen Diagonalenlänge $(22,1\,\text{m})$ und dessen Breite $(8,5\,\text{m})$.
Dann lässt sich mit dem Satz des PYTHAGORAS die Höhe eines Gitterkästchens ausrechnen. (Das Gitterkästchen ist hier aus Platzgründen waagrecht gelegt):



Hier gilt: $x^2 + 8,5^2 = 22,1^2 \quad \Rightarrow \quad x = 20,4$. Für die Länge des Weges c) ergibt sich dann: $3 \cdot 8,5\,\text{m} + 2 \cdot 22,1\,\text{m} + 2 \cdot 20,4\,\text{m} = 110,5\,\text{m}$; d.h. die Wege a) und c) sind gleich lang.

18.





Das dargestellte Rechteck $ABCD$ wird so gefaltet, dass der Eckpunkt B auf den Eckpunkt D zu liegen kommt. Dadurch entsteht die Faltkante $[PQ]$.

(a) Schneide aus kariertem Papier ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$ aus. Falte es auf die oben beschriebene Weise.

(b) Zeichne die Figur oben rechts für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

(c)
- Begründe mit Hilfe von Winkelmaßen: Das Viereck $PBQD$ ist ein Parallelogramm.
- Begründe: Das Viereck $PBQD$ ist sogar eine Raute.

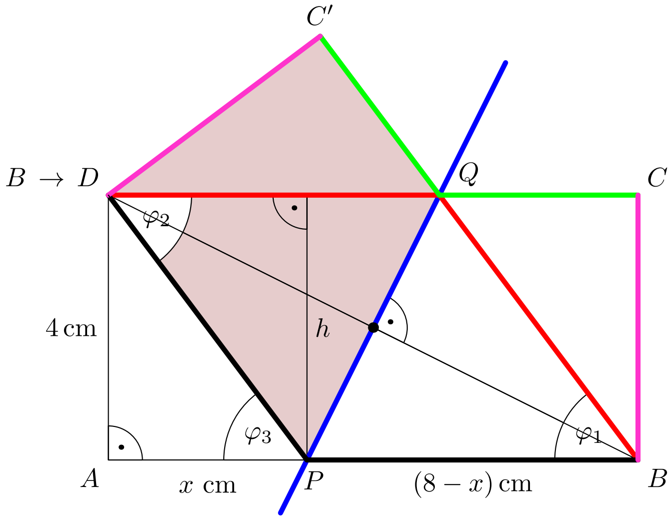
(d) Es sei $\overline{AP} = x\,\text{cm}$. Zeige rechnerisch: $x = 3$.

(e) Berechne den Flächeninhalt der Raute $PBQD$ auf zwei verschiedene Arten mit Hilfe von Teildreiecken.

(f) Berechne erneut den Flächeninhalt der Raute $PBQD$ mit Hilfe ihrer Diagonalenlängen.

Lösung: (a) Klar.

(b)



(c)

- Jede Faltachse ist gleichzeitig Spiegel- bzw. Symmetrieachse.
  Also gilt: $\Delta PBQ \cong \Delta PQD \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \varphi_2$.
  Wegen $[AB] \parallel [BD]$ folgt $\varphi_2 = \varphi_3$ (Z-Winkel).
  Also gilt: $\varphi_1 = \varphi_3$ und damit $[BQ] \parallel [PD]$.
  Weil gleichzeitig $[PB] \parallel [QD]$ gilt, sind die beiden gegenüberliegenden Seiten jeweils parallel: Das Viereck $PBQD$ muss ein Parallelogramm sein.
- Das Parallelogramm $PBQD$ besitzt die Symmetrieachse PQ. Jedes Parallelogramm mit einer Symmetrieachse ist eine Raute.

(d) Es gilt: $\overline{PB} = \overline{PD} = (8 - x)\,\text{cm}$.
PYTHAGORAS im Dreieck ABD: $(8-x)^2 = 4^2 + x^2$.
$\Leftrightarrow \quad 64 - 16x + x^2 = x^2 + 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$.

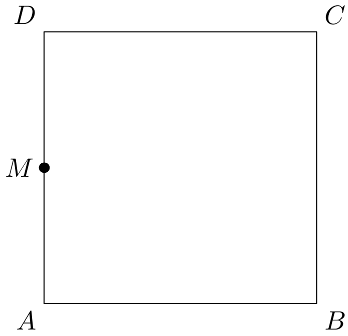
(e) **1. Möglichkeit:** Berechne die Fläche des Teildreiecks PQD.
$A_{\Delta QPD} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{DQ} \cdot h$
Weil jede Raute ein gleichseitiges Viereck ist, gilt $\overline{DQ} = 8\,\text{cm} - 3\,\text{cm} = 5\,\text{cm}$.
Also: $A_{\Delta QPD} = \left(\dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4\right)\,\text{cm}^2 = 10\,\text{cm}^2$. Die Raute $PBQD$ ist doppelt so groß wie dieses Teildreieck: $\quad A_{PBQD} = 20\,\text{cm}^2$.

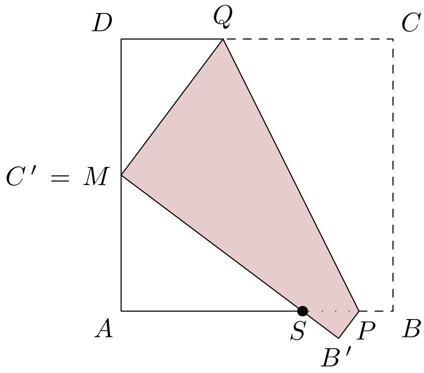
2. Möglichkeit: Schneide vom Rechteck $ABCD$ die beiden kongruenten Dreiecke APD und BCQ ab:
$A_{PBQD} = (8 \cdot 4)\,\text{cm}^2 - 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\right)\,\text{cm}^2 = 20\,\text{cm}^2$

(f) Es gilt: $\overline{FQ} = \overline{DQ} - \overline{DF} = 5\,\text{cm} - 3\,\text{cm} = 2\,\text{cm}$.
PYTHAGORAS im Dreieck PQF: $\quad \overline{PQ}^{\,2} = \left(4^2 + 2^2\right)\,\text{cm}^2$
$\Rightarrow \quad \overline{PQ} = \sqrt{20}\,\text{cm}$.
PYTHAGORAS im Dreieck ABD: $\quad \overline{BD}^{\,2} = \left(8^2 + 4^2\right)\,\text{cm}^2$
$\Rightarrow \quad \overline{BD} = \sqrt{80}\,\text{cm}$.

$$\Rightarrow \quad A_{PBQD} = \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{80}\right) \text{cm}^2 = 20\,\text{cm}^2.$$

19.





Das dargestellte Quadrat $ABCD$ wird so gefaltet, dass der Eckpunkt C auf den Mittelpunktpunkt M der Seite $[AD]$ zu liegen kommt. Dadurch entsteht die Faltkante $[PQ]$.

(a) Schneide aus kariertem Papier ein Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ aus. Falte es auf die oben beschriebene Weise.

(b) Zeichne die Figur oben rechts für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(c) Es sei $\overline{DQ} = x\,\text{cm}$. Zeige rechnerisch: $x = 2,25$.

(d) Zeige: $\overline{DQ} : \overline{DC'} = 3 : 4$.

(e) Begründe: Die Dreiecke $C'QD$, ASC' und $SB'P$ sind zueinander ähnlich.

(f) Berechne $\overline{AS}$.

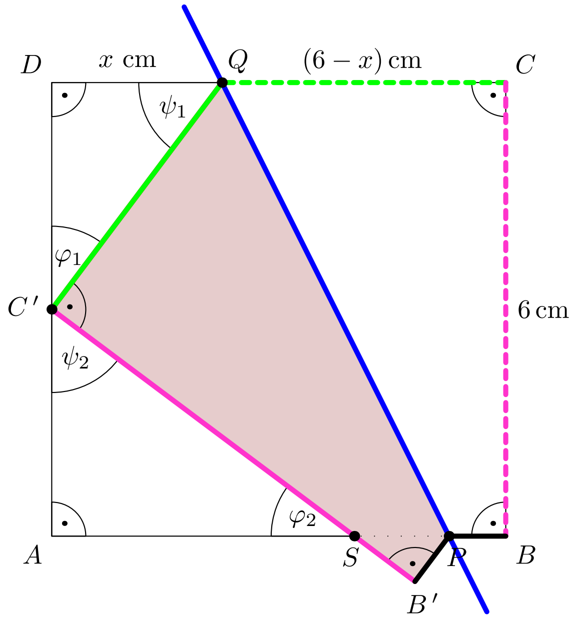
(g) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ASC'.

(h) Berechne $\overline{C'S}$. [Ergebnis: $\overline{C'S} = 5\,\text{cm}$]

(i) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ liegt nach dem Falten unter der Kante $[AB]$?

Lösung: (a) Klar.

(b)



(c) Die Faltachse PQ ist gleichzeitig die Spiegelachse. Jede Achsenspiegelung ist längen- und winkeltreu. Es gilt also $\overline{CQ} = \overline{QC'} = (6-x)$ cm.

PYTHAGORAS im Dreieck $C'QD$: $\overline{C'Q}^{\,2} = \overline{C'D}^{\,2} + \overline{DQ}^{\,2}$:
$(6-x)^2 = x^2 + 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad 36 - 12x + x^2 = x^2 + 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,25$

(d) $\overline{DQ} : \overline{DC'} = 2,25 : 3 = 0,75 = \dfrac{3}{4} = 3 : 4.$

(e) Im Dreieck $C'QD$ gilt: $\varphi_1 + \psi_1 = 90°$ (*).
Am Scheitel C' gilt: $\varphi_1 + 90° + \psi_2 = 180° \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 + \psi_2 = 90°$.
Mit (*) folgt $\psi_2 = \psi_1$. Somit stimmen die beiden rechtwinkligen Dreiecke $C'QD$ und ASC' in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck müssen die beiden Dreiecke auch im Maß des dritten Innenwinkels übereinstimmen: $\varphi_1 = \varphi_2$. Also gilt: $\Delta C'QD \sim \Delta ASC'$.
Im Dreieck $SB'P$ gilt: $\sphericalangle B'SP = \varphi_2$ (Scheitelwinkel) $= \varphi_1$. Die beiden Dreiecke ASC' und $SB'P$ sind rechtwinklig. Also sind sie zueinander ähnlich. Also sind alle drei Dreiecke zueinander ähnlich.

(f) In der Lösung (d) wurde gezeigt, dass $\overline{DQ} : \overline{DC'} = 3 : 4$ gilt.
Wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $C'QD$ und ASC' muss ebenso $\overline{AC'} : \overline{AS} = 3 : 4$ gelten.
Also: $\dfrac{3}{\overline{AS}} = \dfrac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AS} = 4\,\text{cm}.$

(g) $A_{\Delta ASC'} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AS} \cdot \overline{AC'} = \dfrac{1}{2} \cdot (4 \cdot 3)\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2.$

(h) PYTHAGORAS im Dreieck ASC':
$\overline{C'S}^{\,2} = \overline{AS}^{\,2} + \overline{AC'}^{\,2}$: $\quad \overline{C'S}^{\,2} = 3^2\,\text{cm}^2 + 4^2\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{C'S} = 5\,\text{cm}$

(i) $\overline{SB'} = \overline{C'B'} - \overline{C'S}$

Wegen $\overline{C'B'} = \overline{CB} = 6\,\text{cm}$ folgt: $\overline{SB'} = 6\,\text{cm} - 5\,\text{cm} = 1\,\text{cm}$.
Wie vorher in (e) dargelegt, gilt $\Delta ASC' \sim \Delta SB'P$.

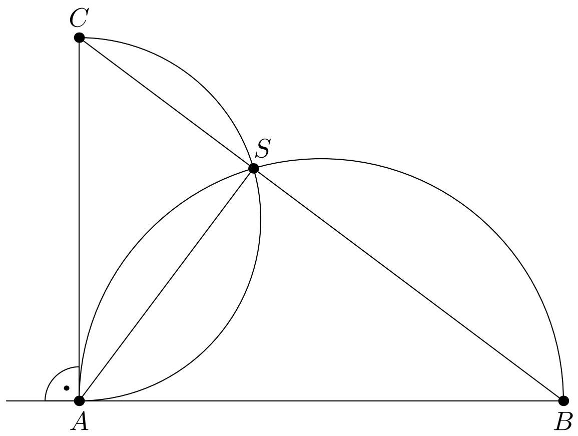
Weiter gilt: $\dfrac{\overline{SB'}}{\overline{AS}} = \dfrac{1}{4}$.

Der Streckungsfaktor k beträgt hier also $\dfrac{1}{4}$.

$$A_{\Delta SB'P} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot A_{\Delta ASC'} \quad \Rightarrow \quad A_{\Delta SB'P} = \frac{1}{16} \cdot 6\,\text{cm}^2 = 0,375\,\text{cm}^2$$

$$\frac{A_{\Delta SB'P}}{A_{ABCD}} = \frac{0,375\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} \approx 0,0104 = 1,04\%.$$

20.



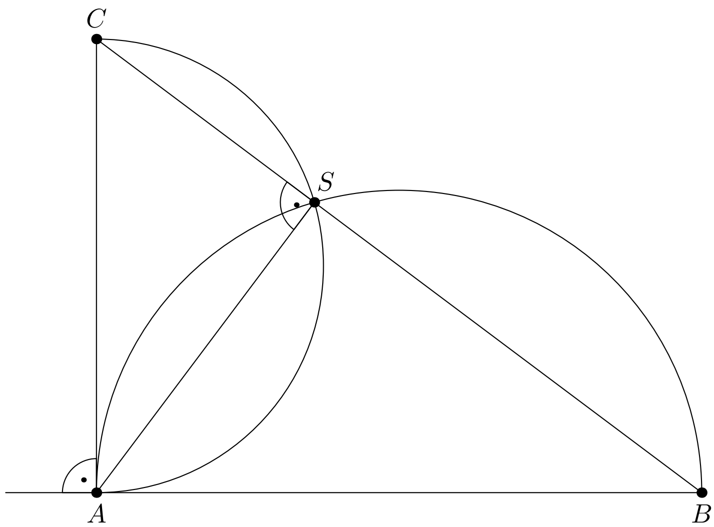
Die zwei Halbkreise haben die beiden Katheten $[AB]$ bzw. $[AC]$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC als Durchmesser. Die Halbkreise schneiden sich im Punkt S.
Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$

(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe:

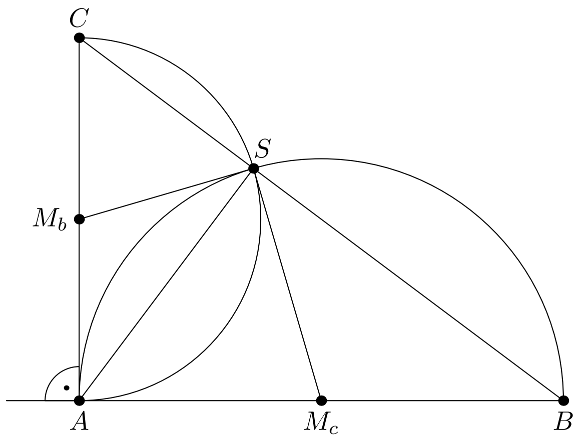
- Das Dreieck ASC ist rechtwinklig.
- Der Schnittpunkt S liegt auf der Hypotenuse $[BC]$.

Lösung: (a)



(b)
- Der Punkt S liegt auf dem THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AC]$. Also gilt: $\sphericalangle CSA = 90°$.
- Der Punkt S liegt aber auch auf dem THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$. $\Rightarrow \quad \sphericalangle ASB = 90°$.
  Also hat der Winkel CSB das Maß $180°$. Daher liegt der Punkt S auf der Hypotenuse $[BC]$.

21.



Die zwei Mittelpunkte M_b und M_c der beiden Katheten $[AC]$ bzw. $[AB]$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC sind auch die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen. Die Halbkreise schneiden sich im Punkt S, der gleichzeitig auf der Hypotenuse $[BC]$ liegt.
Weiter gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$

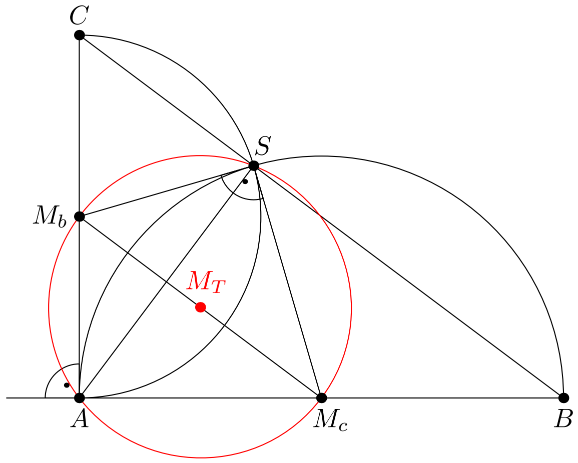
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe:

- Das Viereck AM_cSM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.
- Das Viereck AM_cSM_bbesitzt einen Umkreis.
  Tipp: Zeichne die Strecke M_cM_b ein.

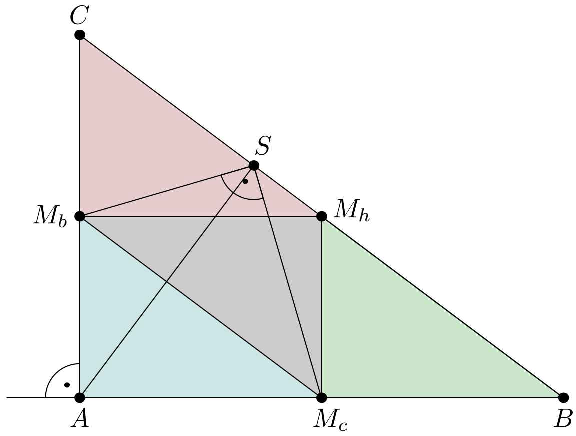
(c)
- Zeichne das Dreieck ABC mit dem Drachenviereck AM_cSM_b erneut.
- Berechne den Flächenanteil des Vierecks AM_cSM_b am Dreieck ABC in Prozent.
  Tipp: Betrachte den Flächenanteil des Dreiecks AM_cM_b am Dreieck ABC. Zeichne auch den Hypotenusenmittelpunkt M_h ein.

Lösung: (a)



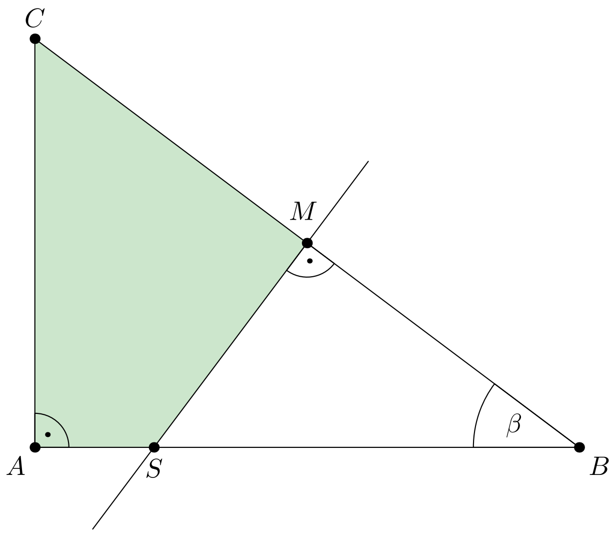
(b)
- Es gilt: $\overline{M_bS} = \overline{M_bA}$ = Radius des kleinen Halbkreises und $\overline{M_cS} = \overline{M_cA}$ = Radius des großen Halbkreises.
  Wenn in einem Viereck zwei Paare benachbarter Seiten jeweils gleich lang sind, dann ist dieses Viereck ein achsensymmetrischer Drachen.
- Die beiden kongruenten rechtwinkligen Dreiecke AM_cM_b und M_bM_cS besitzen die gemeinsame Hypotenuse $[BC]$. Diese Hypotenuse muss daher der Durchmesser des THALES-Kreises sein, der auch durch die Punkte A und S verläuft. Damit ist dieser THALES-Kreis der Umkreis des Drachenvierecks AM_cSM_b. Sein Mittelpunkt M_T ist der Mittelpunkt der Diagonalen $[M_cM_b]$.

(c)
-



- Mit Hilfe der drei Mittelpunkte M_c, M_h und M_b der Seiten des Dreiecks ABC lässt sich dieses Dreieck in vier kongruente Teildreiecke zerlegen.
  Das halbe Drachenviereck AM_cM_b ist eines dieser Teildreiecke, die jeweils 25% der Fläche des Dreiecks ABC einnehmen.
  Also nimmt das Drachenviereck AM_cSM_b 50% der Fläche des Dreiecks ABC ein.

22.



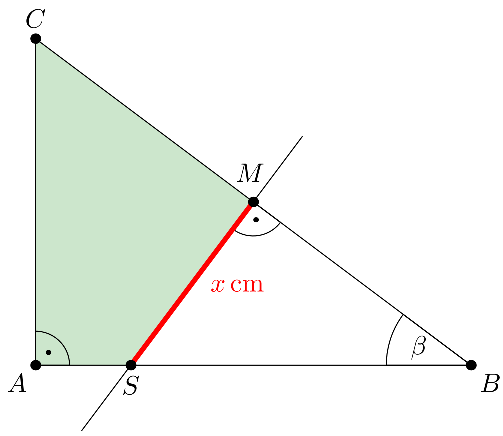
Der Hypotenusenmittelpunkt des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist der Punkt M.
In der Figur gilt weiter: $\overline{AB} = 7,2\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 5,4\,\text{cm}$.

(a) Begründe: Die beiden Dreiecke SBM und ABC sind zueinander ähnlich.

(b) Zeige: $\overline{MS} = 3,375\,\text{cm}$.

(c) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $ASMC$ am Dreieck ABC in Prozent.

Lösung: (a)



In beiden Dreiecken ABC und SBM kommt der Innenwinkel mit dem Maß β vor. Zudem sind beide Dreiecke rechtwinklig. Also müssen beide Dreiecke auch im Maß des dritten Innenwinkels übereinstimmen; also gilt $\Delta\, SBM \sim \Delta\, ABC$.

(b) Wir rechnen nur mit Maßzahlen.
PYTHAGORAS im Dreieck ABC: $\overline{BC}^2 = 7,2^2 + 5,4^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = 9\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad \overline{BM} = 4,5\,\text{cm}$.

Vierstreckensatz: $\dfrac{\overline{MS}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}: \quad \dfrac{x}{4,5} = \dfrac{5,4}{7,2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3,375.$

(c) Berechne den Ähnlichkeitsfaktor: Z.B. $k = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \dfrac{4,5}{7,2} = 0,625.$

Dann gilt $\dfrac{A_{\Delta\, SBM}}{A_{\Delta\, ABC}} = k^2 = 0,625^2 = 0,390625.$

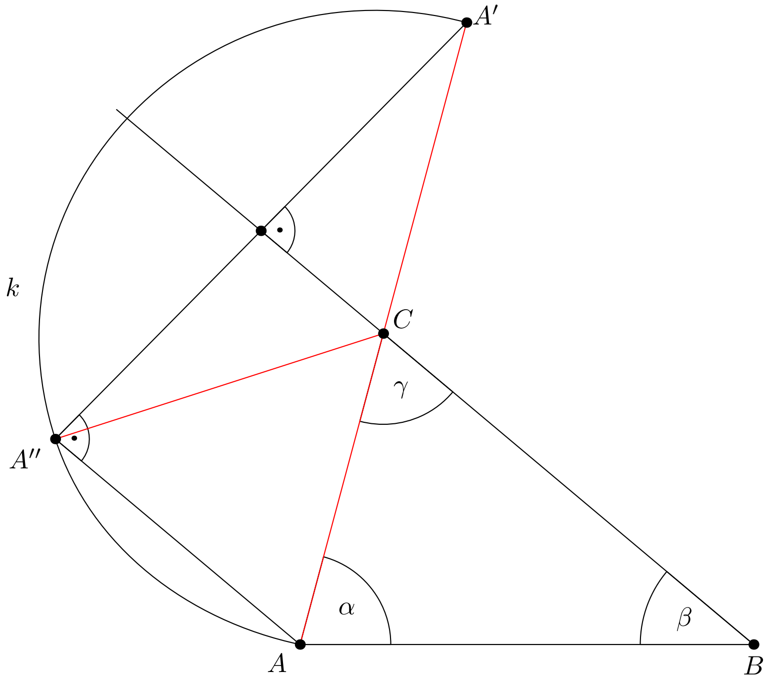
Das bedeutet: Das Dreieck SBM nimmt $39,0625\%$ der Fläche des Dreiecks ABC ein. Dann nimmt das Viereck $ASMC$ $100\% - 39,0625\% = 60,9375\%$ der Fläche des Dreiecks ABC ein.

23. (a) Zeichne ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 75°$ und $\beta = 40°$.

(b)
- Spiegle den Punkt A am Punkt C. Sein Spiegelbild ist der Punkt A'.
- Spiegle den Punkt A' an der Halbgeraden $[BC$. Sein Spiegelbild ist der Punkt A''.

(c) Begründe:
- Das Dreieck ACA'' ist gleichschenklig.
- Das Dreieck $AA'A''$ ist rechtwinklig.

Lösung: (a)

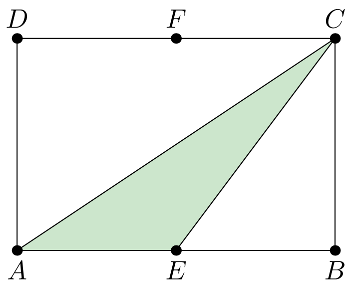


- Siehe Zeichnung.
- Siehe Zeichnung.

(b) Begründe:

- Jede Punktspiegelung ist längentreu. Also gilt: $\overline{CA} = \overline{CA'}$.
  Jede Achsenspiegelung ist längentreu. Also gilt: $\overline{CA'} = \overline{CA''}$.
  $\Rightarrow \quad \overline{CA} = \overline{CA''}$. Also ist das Dreieck ACA'' gleichschenklig.
- Es gilt: $\overline{CA} = \overline{CA''} = \overline{CA'}$. Das bedeutet, dass die drei Punkte A, A' und A'' vom Punkt C gleich weit entfernt sind. Folglich müssen die Punkte A, A' und A'' auf einer Kreislinie k mit dem Mittelpunkt C liegen. Diese Kreislinie ist nun der THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AA']$. Also ist das Dreieck $AA''A'$ wegen $A'' \in k$ rechtwinklig.

24.



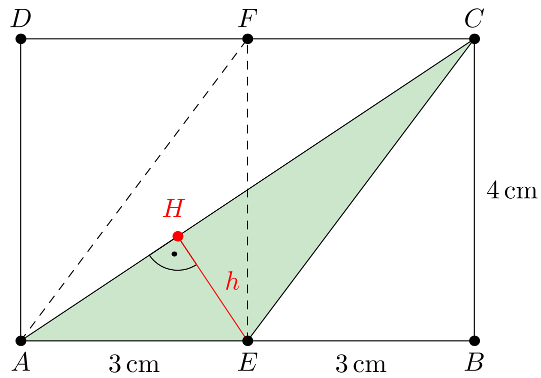
Für das Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.
Die Punkte E und F sind die Mittelpunkte der Seite $[AB]$ bzw. $[CD]$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Welchen Bruchteil der Rechtecksfläche nimmt das Dreieck AEC ein? Löse die Aufgabe auf zwei verschiedene Arten.

(c) Berechne den Abstand des Punktes E von der Strecke $[AC]$. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) **1. Möglichkeit:**
Die Dreiecke AEC und AEF haben die gleiche Grundlinie $[AE]$ und gleichlange Höhen $[BC]$ bzw. $[EF]$. Also besitzen sie den gleichen Flächeninhalt.
Das Dreick AEF nimmt ein Viertel der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ein, also trifft dies auch für das Dreieck AEC zu.
2. Möglichkeit:
$A_{AEC} = A_{ABCD} - A_{EBC} - A_{ACD}$.

$$A_{\Delta\, EBC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2 \text{ und } A_{\Delta\, ACD} = 6 \cdot 4\,\text{cm}^2 : 2 = 12\,\text{cm}^2$$

$$\Rightarrow \quad A_{AEC} = 24\,\text{cm}^2 - 6\,\text{cm}^2 - 12\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2\,.$$

Das ist aber ein Viertel der Fläche des Rechtecks $ABCD$.

(c) Der Abstand eine Punktes zu einer Strecke (oder Geraden) ist immer die kürzeste Entfernung dieses Punktes zur Strecke. Sie wird durch das **Lot** vom Punkt E auf die Strecke $[AC]$ dargestellt.
Wir wissen schon, dass $A_{\Delta\, AEC} = 6\,\text{cm}^2$ gilt.
Der gesuchte Abstand h ist die Höhe im Dreieck AEC mit der Grundlinie $[AC]$:
$A_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h\,.$

$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 4^2}\,\text{cm} = \sqrt{52}\,\text{cm}\,.$$

$$6\,\text{cm}^2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{52}\,\text{cm} \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{12\,\text{cm}^2}{\sqrt{52}\,\text{cm}} \approx 1{,}66\,\text{cm}\,.$$

25. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

(a) Zeichne dieses Dreieck, so dass die Kathete $[AB]$ waagrecht liegt.

(b) Punkte P_n wandern auf der Seite $[AB]$ und Punkte Q_n wandern gleichzeitig auf der Seite $[BC]$, wobei $\overline{AP_n} = \overline{BQ_n} = x\,\mathrm{cm}$ gilt. Dadurch entstehen Vierecke AP_nQ_nC.
Zeichne für $x = 1,5$ das Viereck AP_1Q_1C ein.

(c) Gib die Menge aller möglichen Belegungen von x an.

(d) Unter allen Vierecken AP_nQ_nC gibt es das Trapez AP_2Q_2C.
- Berechne die zugehörige Belegung von x.

  [Ergebnis: $x = 2,4$]
- Zeichne dieses Trapez in anderer Farbe ein.
- Berechne den Flächeninhalt dieses Trapezes. **Tipp:** Berechne zunächst den Flächeninhalt des Dreiecks P_2BQ_2.
- Berechne die Höhe h dieses Trapezes AP_2Q_2C. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

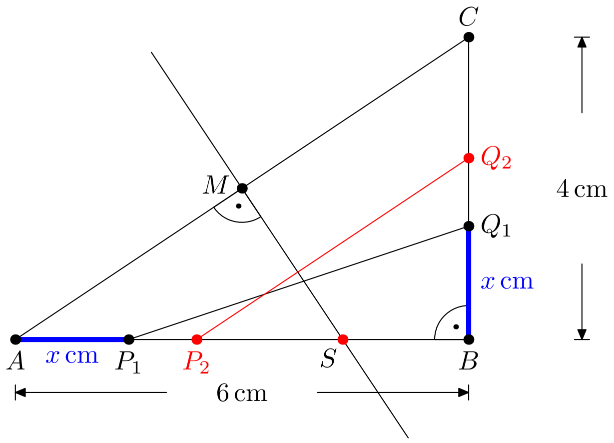
(e) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Vierecke AP_nQ_nC gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = (0,5x^2 - 3x + 12)\,\mathrm{cm}^2 .$$

(f) Unter allen Vierecken AP_nQ_nC gibt es das Viereck AP_2Q_2C, das den minimalen Flächeninhalt besitzt.
Berechne dieses Minimum und die zugehörige Belegung von x.

(g) Untersuche, ob es unter allen Vierecken AP_nQ_nC achsensymmetrische gibt.

Lösung: (a)



(b) Siehe Zeichnung.

(c) Auf der Kathete $[BC]$ kann x nicht länger als 4 cm. werden. Für $x = 0$ und $x = 4$ gibt es kein Viereck. Also: $x \in \,]0;\,4[_{\mathbb{R}}$.

(d)
- Ein Viereck, darf sich dann Trapez nennen, wenn es zwei parallele Seiten besitzt. In der Zeichnung ist das Trapez AP_2Q_2C vorhanden. Du siehst, dass die Dreiecke P_2BQ_2 und ABC dann zueinander ähnlich sind. Wende den Vierstreckensatz an, wobei die Variable x mit eingebunden sein muss:

$$\frac{6-x}{x}=\frac{6}{4} \quad\Leftrightarrow\quad 24-4x=6x \quad\Leftrightarrow\quad 24=10x \quad\Leftrightarrow\quad x=2,4\,.$$

- Siehe Zeichnung.
- $A_{\Delta\, P_2BQ_2}=0.5\cdot 3,6\cdot 2,4\,\mathrm{cm}^2=4,32\,\mathrm{cm}^2$.
  $A_{\Delta\, ABC}=0.5\cdot 6\cdot 4\,\mathrm{cm}^2=12\,\mathrm{cm}^2$.
  $A_{AP_2Q_2C}=A_{\Delta\, ABC}-A_{\Delta\, P_2BQ_2}=12\,\mathrm{cm}^2-4,32\,\mathrm{cm}^2=7,68\,\mathrm{cm}^2$.
- $\overline{AC}=\sqrt{6^2+4^2}\,\mathrm{cm}=\sqrt{52}\,\mathrm{cm}\,(\approx 7,21\,\mathrm{cm})$.
  $\overline{P_2Q_2}=\sqrt{3,6^2+2,4^2}=\sqrt{18,72}\,\mathrm{cm}\,(\approx 4,33\,\mathrm{cm})$.

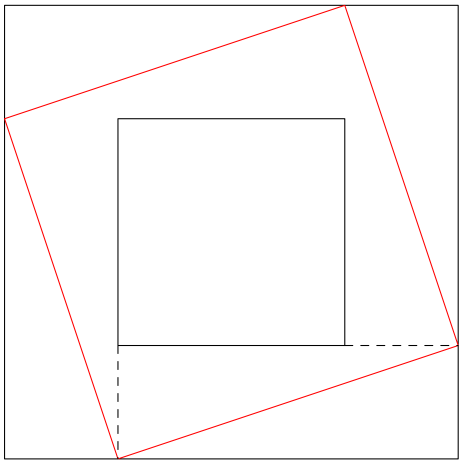
$$A_{AP_2Q_2C}=\frac{\sqrt{52}\,\mathrm{cm}+\sqrt{18,72}}{2}\cdot h=7,68\,\mathrm{cm}^2 \quad\Rightarrow\quad h\approx 1,33\,\mathrm{cm}\,.$$

(e) $A(x)=A_{AP_nQ_nC}=0.5\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}-0.5\cdot\overline{P_nB}\cdot\overline{BQ_n}$
$A(x)=12\,\mathrm{cm}^2-0.5\cdot(6-x)\cdot x\,\mathrm{cm}^2=(12-3x+0,5x^2)\,\mathrm{cm}^2$.
Also gilt: $A(x)=(0,5x^2-3x+12)\,\mathrm{cm}^2$.

(f) $A(x)=(0,5x^2-3x+12)\,\mathrm{cm}^2=0.5\cdot(x^2-6x+3^3-9+24)\,\mathrm{cm}^2$
$=0.5\cdot[(x-3)^2+15]\,\mathrm{cm}^2=[-0.5\cdot(x-3)^2+7,5]\,\mathrm{cm}^2$.
$x=3$ liefert $A_{\min}=7,5\,\mathrm{cm}^2$.

(g) Die Symmetrieachse müsste entweder durch zwei Eckpunkte des fraglichen Vierecks oder durch zwei seiner Seitemittelpunkte verlaufen. Der Verlauf durch zwei Eckpunkte ist offensichtlich ausgeschlossen.
Im anderen Fall müsste die Symmetrieachse die gemeinsame Mittelsenkrechte zweier Vierecksseiten sein. Diese Vierecksseiten müssten dann aber zueinader parallel sein. Also wäre das gesuchte achsensymmetrische Viereck ein gleichschenkliges Trapez.
Da es aber nur nur ein Trapez, nämlich AP_2Q_2C, gibt und $\overline{AP_2}=2,4\,\mathrm{cm}\neq\overline{CQ_2}=1,6\,\mathrm{cm}$ gilt, gibt es unter allen Vierecken AP_nQ_nC kein achsensymmetrisches.

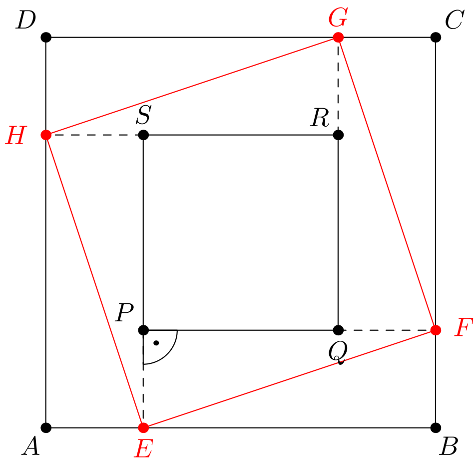
26.



Das große Quadrat hat einen Umfang von $81,6\,\text{cm}$ und das kleine Quadrat hat einen Umfang von $34\,\text{cm}$. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Berechne den Flächeninhalt des mittleren Quadrates auf verschiedene Weise:

- Mit Hilfe der Berechnung der Seitenlänge des mittleren Quadrates
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

Lösung:

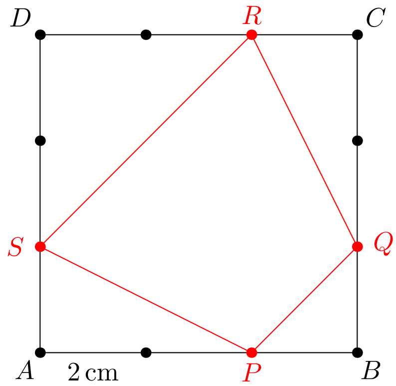


- Es gilt: $\overline{AB} = 81,6\,\text{cm} : 4 = 20,4\,\text{cm}$ und $\overline{PQ} = 34\,\text{cm} : 4 = 8,5\,\text{cm}$.
  Dann folgt: $\overline{QF} = \overline{PE} = (20,4\,\text{cm} - 8,5\,\text{cm}) : 2 = 5,95\,\text{cm}$.
  Weiter folgt: $\overline{PF} = 8,5\,\text{cm} + 5,95\,\text{cm} = 14,45\,\text{cm}$.
  $\Delta\, EFP$: $\overline{EF}^2 = A_{EFGH} = \overline{PF}^2 + \overline{PE}^2 = (14,45\,\text{cm})^2 + (5,95\,\text{cm})^2$
  $\Rightarrow \quad A_{EFGH} = 244,205\,\text{cm}^2$.
- **1. Möglichkeit:** $A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{\Delta\, EBF}$
  $A_{EFGH} = (20,4\,\text{cm})^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45\,\text{cm} \cdot 5,95\,\text{cm} = 244,205\,\text{cm}^2$.

  2. Möglichkeit: $A_{EFGH} = A_{PQRS} + 4 \cdot A_{\Delta\, EFP}$
  $A_{EFGH} = (8,5\,\text{cm})^2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45\,\text{cm} \cdot 5,95\,\text{cm} = 244,205\,\text{cm}^2$.

  Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

27.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Jede Quadratseite ist in drei Abschnitte eingeteilt, die jeweils 2cm lang sind. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

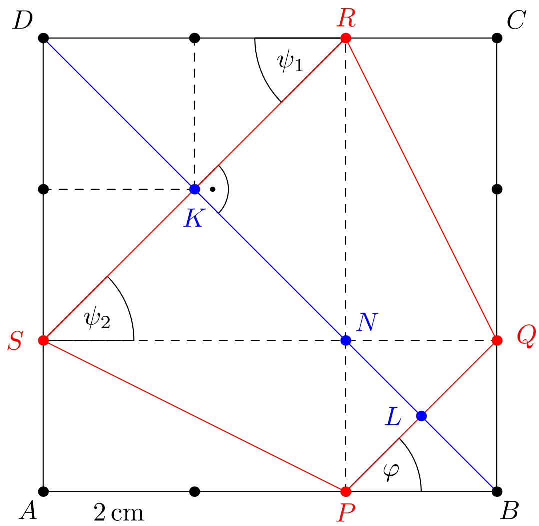
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ besitzt zwei parallele Seiten.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ auf zwei verschiedene Arten:

- Mit Hilfe der Berechnung der zugehörigen Formelgleichung
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

Lösung: (a)



(b) Das Dreieck SRD ist gleichschenklig-rechtwinklig . $\Rightarrow$ $\psi_1 = 45°$.
Dann gilt auch $\psi_2 = 45°$ (Z-Winkel) .
Das Dreieck PBQ ist gleichschenklig-rechtwinklig . $\Rightarrow$ $\varphi = 45°$.
Also folgt: $[PQ] \parallel [SR]$.
Das Viereck $PQRS$ ist ein (achsensymmetrisches) Trapez..

(c) •

Für die Trapezfläche A gilt: $A_{PQRS} = \dfrac{\overline{SR} + \overline{PQ}}{2} \cdot \overline{KL}$.

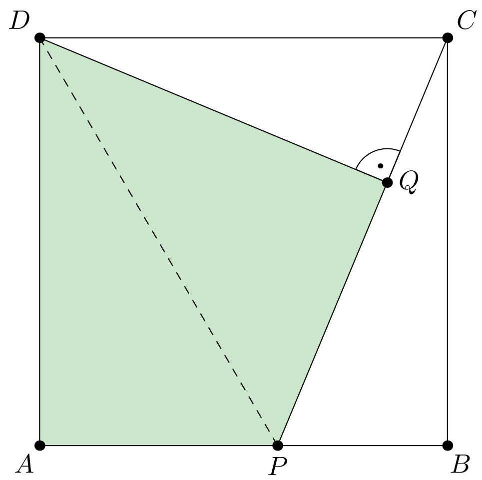
Die Strecke $[SR]$ ist die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge $4\,\text{cm}$. Also folgt: $\overline{SR} = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$.
$[DK]$, $[NB]$ und $[PQ]$ sind jeweils Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge $2\,\text{cm}$.
Also folgt: $\overline{DK} = \overline{NB} = \overline{PQ} = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$ und $\overline{LB} = \sqrt{2}\,\text{cm}$.
Im Quadrat $ABCD$ gilt: $\overline{DB} = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$.
Damit gilt: $\overline{KL} = 6\sqrt{2}\,\text{cm} - 2\sqrt{2}\,\text{cm} - \sqrt{2}\,\text{cm} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.

Und damit gilt: $A_{PQRS} = \dfrac{4\sqrt{2}\,\text{cm} + 2\sqrt{2}\,\text{cm}}{2} \cdot 3\sqrt{2}\,\text{cm} = 18\,\text{cm}^2$.

• Das Trapez $PQRS$ ist von vier rechtwinkligen Dreiecken eingeschlossen. Zwei von ihnen sind kongruent.
$A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta\,APS} - A_{\Delta\,SRD} - A_{\Delta\,PBQ}$.

$A_{PQRS} = 36\,\text{cm}^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\,\text{cm}^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\,\text{cm}^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\,\text{cm}^2 = 18\,\text{cm}^2$.

28.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a.

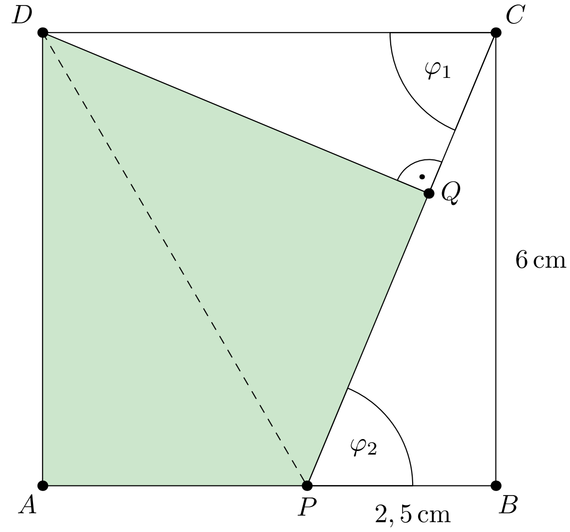
(a) Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{PB} = 2,5\,\text{cm}$.

(b) Begründe ohne Messung: Die Diagonale $[DP]$ ist keine Symmetrieachse im Viereck $APQD$.

(c) Begründe: Die beiden Dreiecke PBC und DQC sind zueinander ähnlich.

(d) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $APQD$ an der Fläche des Quadrates $ABCD$ in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Die Kathete $\overline{AD}$ im rechtwinkligen Dreieck APD besitzt die Länge a. Die Hypotenuse $\overline{DC}$ im rechtwinkligen Dreieck DQC hat ebenfalls die Länge a. Weil aber in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite darstellt, gilt: $\overline{DQ} < a = \overline{AD}$. Somit kann die Diagonale $\overline{DP}$ im Viereck $APQD$ nicht Symmetrieachse dieses Vierecks sein.

(c) In den beiden rechtwinkligen Dreiecken DQC und PBC gilt: $\varphi_1 = \varphi_2$ (Z-Winkel). Damit stimmen die beiden Dreiecke paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von $180°$ in jedem Dreieck stimmen diese beiden Dreiecke in allen drei Innenwinkelmaßen überein. Also gilt: $\Delta\, PBC \sim \Delta\, DQC$.

(d) Strategie: $A_{APQD} = A_{ABCD} - (A_{\Delta\, PBC} + A_{\Delta\, DQC})$.

$$A_{\Delta\, PBC} = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 6\,\text{cm}^2 = 7,5\,\text{cm}^2\,.$$

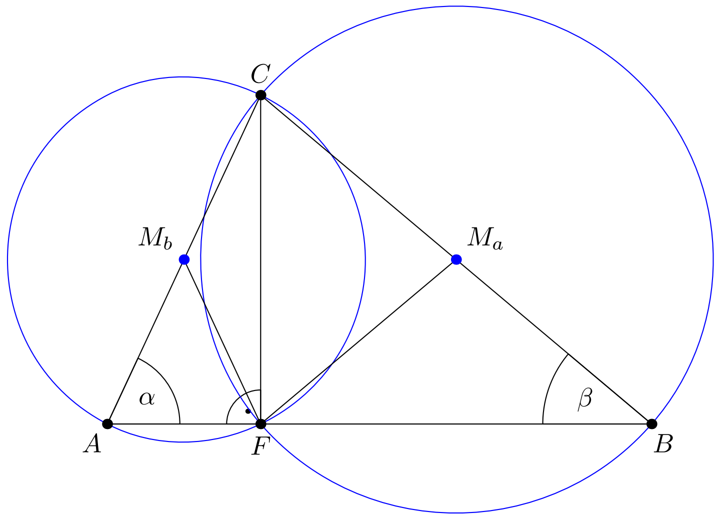
Wegen (c) folgt: $A_{\Delta\, DQC} = k^2 \cdot A_{\Delta\, PBC}$ mit dem Streckungsfaktor k.

Mit $k = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{PC}}$ folgt: $\quad k = \dfrac{6\,\text{cm}}{\sqrt{2,5^2 + 6^2}\,\text{cm}} = \dfrac{12}{13}\,.$

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\, DQC} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot 7,5\,\text{cm}^2 = \frac{144}{169} \cdot 7,5\,\text{cm}^2\,.$$

$$\begin{aligned} A_{APQD} &= 36\,\text{cm}^2 - \left(7,5\,\text{cm}^2 + \frac{144}{169} \cdot 7,5\,\text{cm}^2\right) \\ &= 36\,\text{cm}^2 - \frac{313}{169} \cdot 7,5\,\text{cm}^2 \\ \frac{A_{APQD}}{A_{ABCD}} &= \frac{6084 - 2374,5}{169 \cdot 36} = \frac{3707,5}{6084} \approx 0,6094 = 60,94\,\%\,. \end{aligned}$$

29.



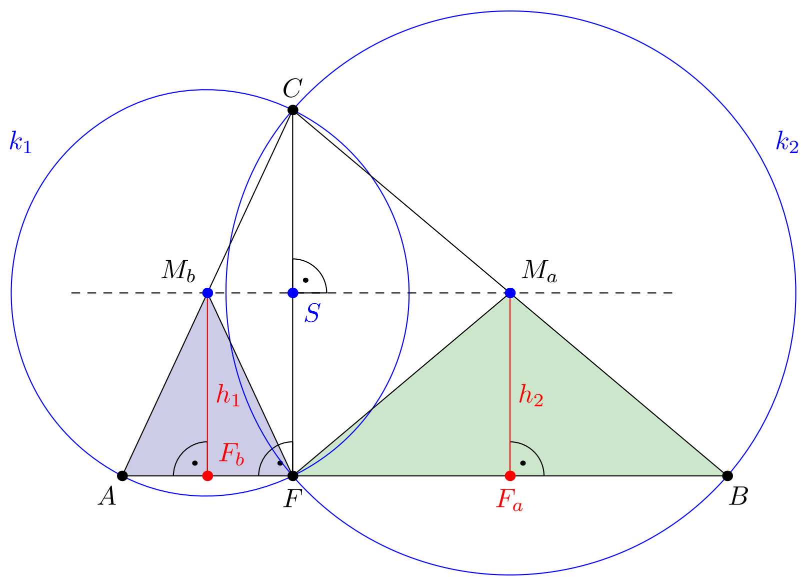
Im Dreieck ABC mit der Höhe $[CF]$ sind die Punkte M_a und M_b die Mittelpunkte der Umkreise der Teildreiecke FBC bzw. AFC.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe auf verschiedene Weise: Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Begründe: Zusammen bedecken die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a die Hälfte des Dreiecks ABC.

Lösung: (a)



(b) **1. Möglichkeit:**
Im Kreis k_1 gilt: $\overline{M_bA} = \overline{M_bF} = \overline{M_bC}$.
Im Kreis k_2 gilt: $\overline{M_aB} = \overline{M_aF} = \overline{M_aC}$.
Also sind im Viereck FM_aCM_b zweimal zwei benachbarte Seiten gleich lang. Also handelt es sich um ein achsensymmetrisches Drachenviereck.
2. Möglichkeit:
In jedem rechtwinkligen Dreieck fällt dessen Umkreismittelpunkt mit dem Hypotenusenmittelpunkt zusammen. Also sind die Kreismittelpunkte M_a und M_b gleichzeitig die Mittelpunkte der Seiten $a = [BC]$ bzw. $b = [AC]$.
Die Dreiecke FBC und F_aBM_a sind zueinander ähnlich.
Wegen $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM_a}$ folgt dann $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{F_aM_a} = 2 \cdot \overline{F_bM_b}$.
Also gilt: $h_1 = h_2 = \overline{SF} = \overline{FC}$. Daher liegt die Gerade M_aM_b zur Grundlinie $[AB]$ des Dreiecks ABC parallel. Diese Parallele steht damit auf der Diagonalen des Vierecks FM_aCM_b senkrecht. Gleichzeitig halbiert der Punkt S die Höhe $[CF]$ des Dreiecks ABC. Also ist das Viereck FM_aCM_b ein achsensymmetrischer Drachen.

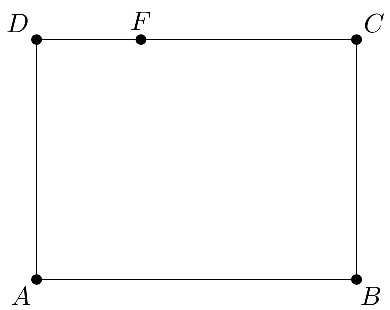
(c) Die in der 2. Möglichkeit verwendete Argumentation ergibt nun Folgendes:

- Die vier Dreiecke F_aBM_a, FF_aM_a, FM_aS und SM_aC sind kongruent. Das Dreieck FBM_a besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
Also ist das Dreieck FBM_a halb so groß wie das Teildreieck FBC.
- Die vier Dreiecke AF_bM_b, F_bFM_b, FSM_b und M_bSC sind kongruent. Das Dreieck AFM_b besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
Also ist das Dreieck AFM_b halb so groß wie das Teildreieck AFC.

Also sind die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a zusammen halb so groß wie das Dreieck ABC.

Oder:
Weil der Schnittpunkt S auf halber Höhe im Dreieck ABC liegt, gilt:
$A_{\Delta\, M_bM_aC} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta\, ABC}$ (zentrische Streckung mit $k = \frac{1}{2}$).
Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen mit der Diagonalen $[M_aM_b]$ als Symmetrieachse.
$\Rightarrow \quad A_{FM_aCM_b} = 2 \cdot \frac{1}{4} A_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta\, ABC}$.
Dann muss der Rest, nämlich derjenige, der aus den beiden Dreiecken AFM_b und FBM_a besteht, ebenfalls die Hälfte des Dreiecks ABC einnehmen.

30.



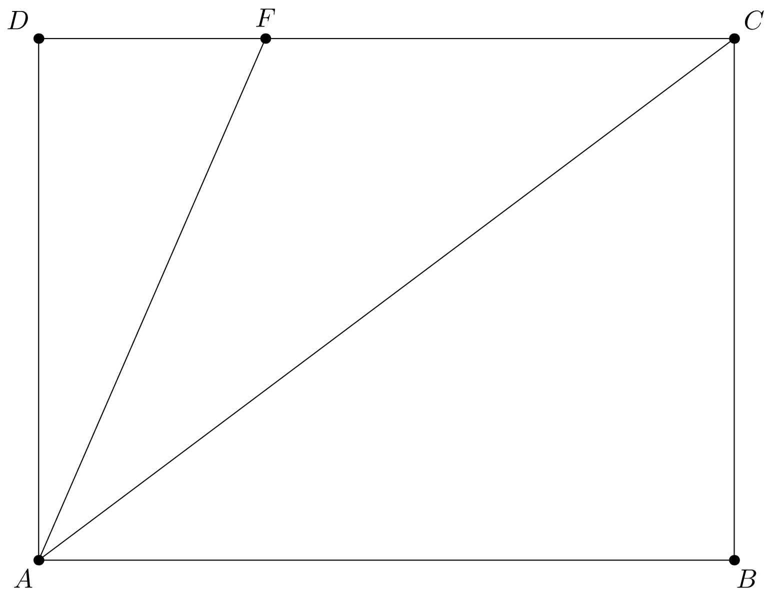
Die beiden Freunde Hans und Michael wollen ein Bundesligaspiel besuchen. Auf ihrem Weg dorthin gelangen sie vor dem Stadion an einen rechteckigen Parkplatz $ABCD$. Sie befinden sich am Punkt A und wollen den Platz diagonal zum Punkt C überqueren. Michael entdeckt jedoch einen Kameraden, der am Punkt F steht und läuft erst geradewegs zu ihm. Dann begeben sich die beiden direkt zum Punkt C, an dem schon Hans wartet.

(a) Es soll gelten $\overline{AB} = 92\,\text{m}$, $\overline{BC} = 69\,\text{m}$ und $\overline{FC} = 60\,\text{m}$.
Fertige eine Zeichnung im Maßstab 1 : 1000 an.

(b) Begründe ohne Messung: Michael muss einen längeren Weg von A über F nach C zurücklegen als Hans.

(c) Berechne die Streckenlänge, die Michael mehr als Hans zurücklegen muss. Runde auf ganze Meter.

Lösung: (a)

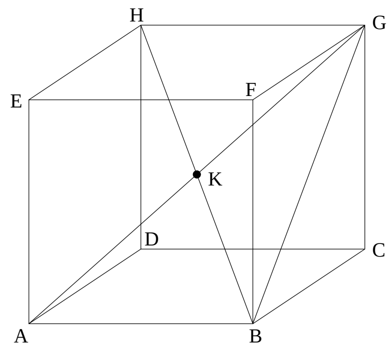


(b) Im Dreieck ACF gilt die Dreiecksungleichung: Zwei Seitenlängen müssen zusammen mehr ergeben als die Länge der dritten Dreiecksseite; d.h. hier gilt: $\overline{AF} + \overline{FC} > \overline{AC}$.

(c) $\overline{DF} = 32\,\text{m}$.
Im Dreieck AFD gilt: $\overline{AF} = \sqrt{32^2 + 69^2}\,\text{m} = \sqrt{5785}\,\text{m}$.
Im Dreieck ABC gilt: $\overline{AC} = \sqrt{92^2 + 69^2}\,\text{m} = 115\,\text{m}$.
Wegunterschied: $\sqrt{5785}\,\text{m} - 115\,\text{m} \approx 21\,\text{m}$.

16. Raumgeometrie

1. Die folgende Skizze stellt das Schrägbild eines Würfels mit einer Kantenlänge von 6 cm dar.



   (a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABK. Runde das Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

   (b) Vergleiche den Flächeninhalt des Dreiecks ABK mit dem des Dreiecks BGK. Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) $A = 12,73\,\text{cm}^2$

(b) - -