SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 8 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Wahlpflichtfächergruppe I

1. Terme

1. Maßzahlen: $A_{ABCD} = 4 \cdot x + 4 \cdot 2 = 4 \cdot (x + 2)$

2. (a) Es muss $100b^2$ heißen.
   (b) richtig
   (c) Es muss $0{,}25x^2 - 6x + 36$ heißen.

3. $T(x) = -(x - 1,5)^2 - 6$ oder $T(x) = -0,87654321(x - 1,5)^2 - 6$

4. $2^{50} - 1 = (2^{25} + 1) \cdot (2^{25} - 1) = 33\,554\,433 \ \cdot \ 33\,554\,431 = (3 \cdot 11 \cdot 251 \cdot 4051) \cdot (1801 \cdot 601 \cdot 31)$

5. (a) $4x - 6y + 1{,}6z = 2 \cdot (2x - 3y + 0{,}8z)$
   (b) $x^2 \cdot x^5 + 3 : \frac{1}{2} = 6 + x^7$
   (c) $-(3x - 2x^2 + 7a) = -3x + 2x^2 - 7a$

6. (a) Die Belegungen $x = -2$ und $x = 0{,}5$ sind zwei Nullstellen des Nenners. Mehr Nullstellen gibt es nicht.
   (b) Z.B.: $T_2(x) = \frac{1}{(x+2)(x-0{,}5)}$ und $T_3(x) = \frac{1+x^4}{(x+2)(x-0{,}5)\cdot(-387)}$

7. (a) $u = 23\,\text{cm}$
   (b) $A = 25\,\text{cm}^2$
   (c) Das Rechteck wird breiter und niedriger.
   (d) Z.B. $x = 6$: Das Rechteck entartet zur Strecke.
   Oder $x = 7$, dann hätte die Strecke $[AB]$ eine negative Länge.
   Hinweis: Manche Schüler/innen sind der Ansicht, dass der Fall $x = 1$ eine richtige Antwort sei, denn ein Quadrat ist eben nach ihrer Ansicht kein Rechteck.

8. (a) –
   (b) Im Achteck sind sieben Quadrate mit der Seitenlänge x enthalten.
   Also gilt: $A(x) = 7 \cdot x^2\,\text{cm}^2$.

(c) $x = 2,5$

(d)
- –
- Die Seitenlänge des umbeschriebenen Quadrates beträgt in diesem Fall $3 \cdot 3,25\,\text{cm}$. Also ist sein Umfang $4 \cdot 3 \cdot 3,25\,\text{cm} = 39\,\text{cm}$ lang.

(e) Es gilt: $\Delta PQB \cong \Delta CQR \cong \Delta SDR \cong \Delta PAS$ (s,w,s). Also ist $PQRS$ eine Raute. In rechtwinkligen Dreiecken ergeben die beiden spitzen Innenwinkel einen rechten. In jedem Eckpunkt des Quadrates $PQRS$ liegt ein Paar solcher Winkel. Also handelt es sich sogar um ein Quadrat.

9. (a) - -
   (b) - -
   (c) $a^2 = (a-1)^2 + (a-1) + a$
   (a) - -
   (b) - -
   (c) $a^2 = (a-1) \cdot (a+1) + 1$

10.
   (a) –
   (b) $A = ax + bx - x^2$
   (c) [**X**] [ ]
   [**X**] [ ]
   [**X**] [**X**]
   (d) $x \in \,]0\,\text{cm}; 8\,\text{cm}[_{\mathbb{Q}}$

11. (a) $(a - 0{,}5)^2 = a^2 - a + 0{,}25$
   (b) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$
   (c) $(4-x)(x+4) = 16 - x^2$

12. $x = -3$

13. Wegen $T(x) = 2x^2 + 18$ ergibt sich das Minimum 18 .

14. Der Term besitzt keinen Extremwert, sondern nur den konstanten Wert 6.

15. Daniel braucht $12\,\text{s}$.

16. (a)
    - Z.B.:
      - Zähler und Nenner sind Zehnerpotenzen
      - Der Exponent im Zähler ist um 1 größer als der des Nenners
      - Der Zähler ist größer als der Nenner
    - $\dfrac{10^{679}}{10^{678}} = 10^{679-678} = 10$

    (b) Addiert man im Bruch B_1 jeweils 1 zum Zähler und zum Nenner, dann erhält man den Bruch B_2.

    (c) $B_1 = \dfrac{10^{679}}{10^{678}} = \dfrac{10}{1} = \dfrac{10 \cdot (10^{678}+1)}{1 \cdot (10^{678}+1)} = \dfrac{10^{679}+10}{10^{678}+1} > \dfrac{10^{679}+1}{10^{678}+1} = B_2$

    Also hat der Bruch B_1 den größeren Wert.

17. (a) Sophia hat erkannt, dass im großen Rechteck die Länge $x\,\text{cm}$ 4 Mal und die Breite $2\,\text{cm}$ doppelt vorkommt. Daher gilt $u(x) = (4x+4)\,\text{cm}$.

    (b) Wolfgang verdoppelt zunächst einfach den Umfang eines Rechtecks. Dann subtrahiert er noch zwei Mal diejenige Breite eines kleinen Rechtecks, die im Inneren des großen Rechtecks verschwindet (siehe gestrichelte Linie):
    $u(x) = [2 \cdot (2 \cdot 2 + 2 \cdot x) - 4]\,\text{cm} = [2 \cdot (4+2x) - 4]\,\text{cm}$.

    (c) Wolfgang: $2 \cdot (4+2x) - 4] = 8 + 4x - 4 = 4x + 4$. Das ist der Term von Sophia.

    (d) $0,5\,\text{m} = 50\,\text{cm}$.
    Es muss dann z.B. mit Sophias Ergebnis $4x + 4 = 50$ gelten. $\Leftrightarrow x = 11,5$

18. (a) Für den Wert von 65^2 können nicht zwei verschiedene Ergebnisse herauskommen. Außerdem ist $65^2 = 4225$.

    (b)
    - $65^2 = (60+5)^2$
    - Heinz: $(60+5)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 5 + 5^2 = 3600 + 600 + 25 = 4225$
      Karin: $(70-5)^2 = 70^2 - 2 \cdot 70 \cdot 5 + 5^2 = 4900 - 700 + 25 = 4225$

    (c) Anja entscheidet sich für die Methode von Karin, denn 99 liegt näher an 100 (mit dieser Zahl lässt sich bequem rechnen).
    Also: $99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$.

    (d) Z.B.:
    - Stelle die zweiziffrige Zahl als Summe oder Differenz zum nächst größeren oder kleineren Zehnervielfachen dar.

- Quadriere das Zehnfache der ersten Ziffer.
- Addiere (oder subtrahiere) das doppelte Produkt aus dem Zehnfachen der ersten Ziffer und der zweiten Ziffer.
- Addiere das Quadrat der zweiten Ziffer. Dann bist du fertig.

19. (a) „Nein, weil dies nur von ein paar Beispielen gestützt wird. Die Gültigkeit in allen Fällen ist nicht sichergestellt.“

    (b) $(a-k)\cdot(a+k) = a^2 - k^2 < a^2$. Damit ist klar: Der zweite Produktwert ist **stets** kleiner als der erste.

20. Der Term T_1 hat die Form $(A-B)^2$, der Term T_2 vertauscht den Klammerinhalt von T_1 am Minuszeichen. T_2 hat also die Form $(B-A)^2$.
Nun ist z.B. $(7-3)^2 = 4^2 = 16$ und $(3-7)^2 = (-4)^2 = 16$
Wenn du also den Klammerinhalt der 2. binomischen Formel am Minuszeichen vertauchst, dann wechselt der Klammerinhalt (wenn er nicht gerade null ist) das Vorzeichen. Beim Quadrieren ist das Ergebnis dasselbe, wie du im Zahlenbeispiel $(7-3)^2 = (3-7)^2 = 16$ sehen kannst.
In den Klammern der eigentlichen Aufgabe steht zwar noch der Platzhalter x, aber x ist ja auch nur der Stellvertreter für jeweils eine Zahl. Somit gilt das, was im Zahlenbeispiel gezeigt worden ist, ebenso für die beiden Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$: Die beiden Terme sind äquivalent.

21. (a) Klar: Dein Rechteck $ABCD$ muss 9 cm breit und 5 cm hoch werden.

    (b) **1. Möglichkeit:** $A_{ABCD} = 5\cdot(x+y)\,\text{cm}^2$
    2. Möglichkeit: $A_{ABCD} = (5\cdot x + 5\cdot y)\ \text{cm}^2$

    (c) Beim Quadrat muss hier $5 = (x+y)$ gelten. Wenn x und $y \in \mathbb{N}$ gelten würde, dann folgt in diesem Fall:

x	1	2	3	4
y	4	3	2	1

    (d) In diesem Fall muss gelten: $5\cdot(x+y) = 65 \;|:5 \quad\Leftrightarrow\quad x+y = 13$.
    Für x und $y \in \mathbb{N}$ ergibt sich:

x	1	2	3	4	...	12
y	12	11	10	9	...	1
$5\cdot(x+y) =$	65	65	65	65	...	65

22. (a) •

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$T(x)$	0	7	12	15	16	15	12	7	0

- Zunächst nehmen die Termwerte von links nach rechts zu bis zum Wert 16.
  Dann nehmen die Termwerte bis zum Wert 0 wieder ab.
  Der Termwert 16 ist der größte.
  Die Termwerte scharen sich symmetrisch um diesen Maximalwert.

(b) Es ist $T(x) = (4-x)(4+x) = 16 + 4x - 4x - x^2 = 16 - x^2 = T^*(x)$.

(c)
- Es ist $x^2 = x \cdot x$; d.h. x wird für alle $x \in \mathbb{Q}$ mit sich selbst multipliziert.
  Ist x positiv, dann ist $x \cdot x$ auch positiv.
  Ist x negativ, dann ist $x \cdot x$ trotzdem positiv.
  Ist $x = 0$, dann ist $x \cdot x = 0$.
  Also kann x^2 nie negativ werden.
- Dann kann $-x^2$ nie positiv werden, weil das Minuszeichen nicht mitquadriert wird.
- Weil $-x^2$ höchstens den Wert 0 annehmen kann, nimmt $T^*(x) = 16-x^2$ höchstens den Wert 16 an.

23. (a) Es gilt:
$T_1(x) = (x-3)(x+3) = x^2 - 9$
$T_2(x) = (x-4)(4+x) = (x-4)(x+4) = x^2 - 16$
$T_3(x) = -(5+x)(5-x) = -(25-x^2) = -25 + x^2 = x^2 - 25$
Der (heimliche) Faktor vor x^2 ist stets $1 > 0$, Also besitzen alle drei Terme ein Minimum.

(b) $T_1(x) = x^2 - 9 = (x-0)^2 - 9$
$T_2(x) = x^2 - 16 = (x-0)^2 - 16$
$T_1(x) = x^2 - 25 = (x-0)^2 - 25$
Also liefert stets $x = 0$ das jeweilige Minimum. Sabine hat nicht Recht.

24. (a) $1,5ab - (0,5 \cdot a \cdot 2)^2 - \frac{3}{2}ab + a^2 = 1,5ab - (1a)^2 - 1,5ab + a^2 = -a^2 + a^2 = 0$

(b) $(3c)^2 - 3c^2 - (-3c)^2 = 9c^2 - 3c^2 - 9c^2 = -3c^2$

25. (a) $T_1(-1) = -1 - 1 + 1 - 1 = -2$
$T_2(-1) = 1 + 2 + 1 = 4$
$T_3(-1) = 1 \cdot 0 - 1 = -1$
$T_4(-1) = 1 - 1 + 2 \cdot 1 + 2 = 4$
Die erste Behauptung stimmt, die zweite ist falsch

(b) $T_4(x) = x^2 - 1 - 2 \cdot (x-1) = x^2 - 1 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 = T_4(x)$. Die beiden Terme sind äquivalent.

(c)

x	0	1	2
$T_5(x) = (x+5)^2$	25	36	49
$T_6(x) = x^2 + 25$	25	26	29

Die letzten beiden Spalten der Tabelle zeigen keine Übereinstimmung; also sind die beiden Terme nicht äquivalent.

26. (a) Z.B.: $97 + 79 = 176$ oder $56 + 65 = 121$ oder ...

(b)
- Die Summe aus der ersten und der letzen Ziffer des Sumenwertes ergibt jeweils die mittlere Ziffer.
-
  - $(10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11 \cdot (a + b)$.
    Der Summenwert enthält also stets den Faktor 11.
  - Der zweite Teiler entsteht aus dem Summenwert der beiden Ziffern der zweistelligen Zahl. Begründung siehe Lösung oben.

(c) Es gilt $11(a + b) = 143 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 13$. Gesucht sind also Ziffernpaare $(a \mid b)$, so dass $a + b = 13$ wird. Das ergibt folgende Zahlenpaare:
$\{(9 \mid 4)\,; (8 \mid 5)\,; (7 \mid 6)\, (6 \mid 7)\,; (5 \mid 8)\,; (4 \mid 9)\,.$

27. (a)
- $75 - 12 = 63$.
- $T_{63} = 1; 3; 7; 9; 21; 63$.

(b)
- $59 - 14 = 45._{45} = 1; 3; 5; 9; 15; 45$.
- $ggT(45; 63) = 9$

(c)
-
- Der Wert der Differenz aus der Zahl und ihrer Quersume ist wieder durch 9 teilbar.
- Zweistellige Zahl $10a + b$; $q = a + b$.
  Differenzwert: $10a + b - (a + b) = 9a$; also ist der Differenzwert stets durch 9 teilbar.

(d)
-
- Dreistellige Zahl: $100a + 10b + c$; $q = a + b + c$.
  Differenzwert: $100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9 \cdot (11a + b)$; also ist auch dieser Differenzwert stets durch 9 teilbar.

(e) Ja, denn $10^n \cdot a - a$ liefert ausschließlich Neuner als Ziffern.

28. (a)
- $n = 83 - 69 - 1 = 13$.
- $\{70;\ 71;\ 72;\ 73;\ 74;\ 75;\ 76;\ 77;\ 78;\ 79;\ 80;\ 81;\ 82\}$.
  Die Lösungsmenge enthält 13 Zahlen.

(b) $n = 803\,102 - 513\,799 - 1 = 289\,302$.

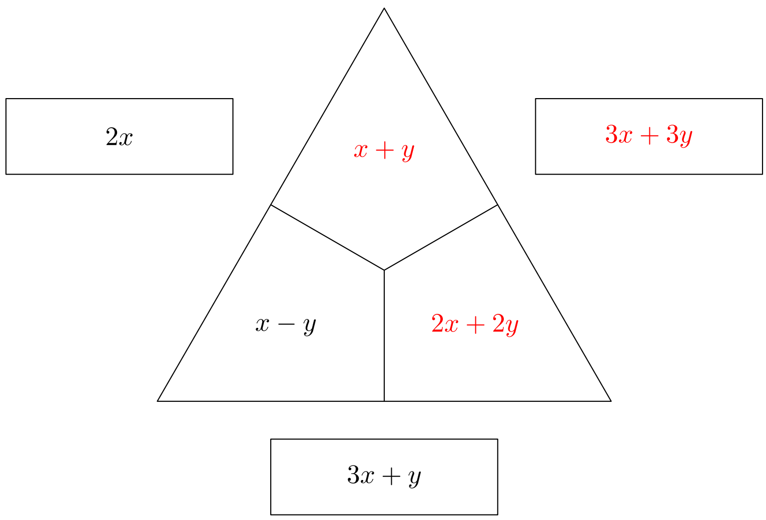
(c)
- Für x und y gilt dann $y = x + 1$.
  $n = (x + 1) - x - 1 = 0$. In der Tat gibt es keine natürlichen Zahlen zwischen zwei Zahlennachbarn. Die Formel **(*)** gilt auch in diesem Fall.
- $n_1 = 3 - (-11) - 1 = 3 + 11 - 1 = 13$.
  Wenn du alle in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst, bestätigt sich die Formel.
  $n_2 = -23 - (-39) - 1 = -23 + 39 - 1 = 15$.
  Wenn du auch in diesem Fall alle in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst, bestätigt sich die Formel erneut.

29. (a) Z.B. 470: Die neue (zweistellige) natürliche Zahl heißt dann 47.
$470 - 47 = 423$. $423 : 47 = 9$: Stimmt.

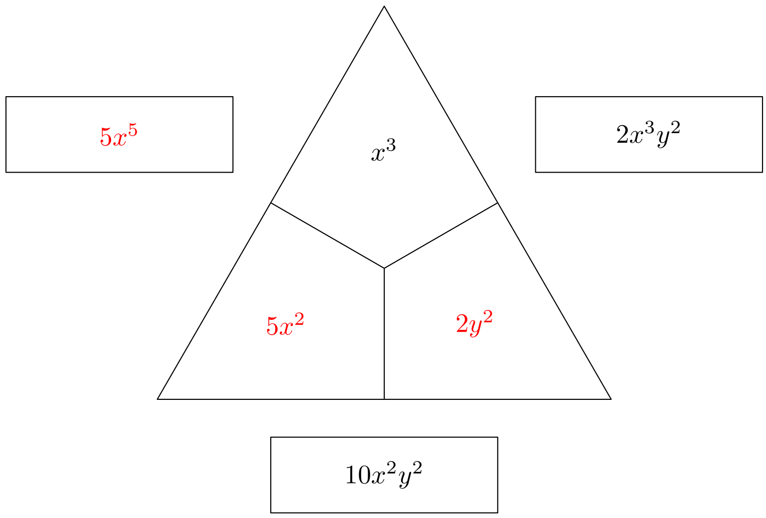
(b) Z.B. 5730: Die neue (dreistellige) natürliche Zahl heißt dann 573.
$5730 - 573 = 5157$. $5157 : 573 = 9$: Stimmt auch.

(c) Die neue Zahl ist x. Wenn deren zugehörige ursprüngliche Zahl durch 10 teilbar sein soll muss diese auf 0 enden. Dann ist diese aber zehnmal so groß wie die neue Zahl. Also kannst du für die alte Zahl $10x$ schreiben. Somit ergibt sich:
$10x - x = 9x$. Der Wert der Differnz ist also $9x$ und damit sowohl durch 9 als auch durch x, also die neue Zahl, teilbar.

30.



31.



32. In jedem all gilt: $n = 9 \cdot x$ und $QS = 9 \cdot y$.

Zu Frage (1):
$n + QS = 9x + 9y = 9 \cdot (x + y)$. Die Antwort heißt „Ja“.

Zu Frage (2):
$n \cdot QS = 9x \cdot 9y = 81 \cdot (xy) = 27 \cdot 3 \cdot (x \cdot y)$. Die Antwort heißt wieder „Ja“.

Zu Frage (3):

$\dfrac{n}{QS} = \dfrac{9x}{9y} = \dfrac{x}{y}$. Nun müsste y ein Teiler von x sein. Aber ist das immer so?

1. Beispiel:
$n = 648 \quad \Rightarrow \quad QS = 18 \quad 648 : 18 = 36$. Dieses Beispiel liefert eine Bestätigung.

2. Beispiel:
$n = 927 \quad \Rightarrow \quad QS = 18 \quad 917 : 18 = 50$ Rest 17 . Dieses Beispiel verneint die Frage (3).

Also ist der Wert des Quotienten aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme nicht immer ganz.

33. (a) Klar.

(b)

$$\begin{aligned} A(x) &= [6^2 - 4 \cdot x^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (6 - 2x) \cdot (3 - x)]\,\mathrm{cm}^2 \\ &= [36 - 4x^2 - 2 \cdot (18 - 6x - 6x + 2x^2)]\,\mathrm{cm}^2 \\ &= [36 - 4x^2 - 36 + 12x + 12x - 4x^2]\,\mathrm{cm}^2 \\ A(x) &= (-8x^2 + 24x)\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

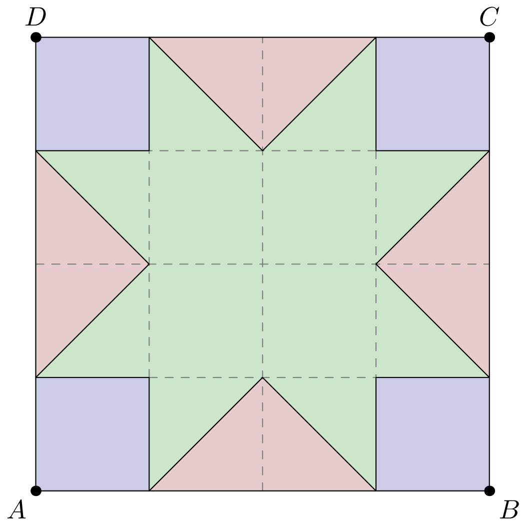
(c) $A(0) = 0\,\mathrm{cm}^2$. Das zugehörige Kreuz entartet zu den beiden Diagonalen des Quadrates $ABCD$.
$A(3) = 0\,\mathrm{cm}^2$. Es entsteht ein Kreuz das aus den Seitenmittelpunkten des Quadrates $ABCD$ erzeugt worden ist.

(d) •

$$\begin{aligned} A(x) &= (-8x^2 + 24x)\,\mathrm{cm}^2 \\ &= -8 \cdot (x^2 - 3x + 1,5^2 - 2,25)\,\mathrm{cm}^2 \\ &= -8 \cdot [(x - 1,5)^2 - 2,25)\,\mathrm{cm}^2 \\ A(x) &= [(-8(x - 1,5)^2 + 18]\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

$x = 1,5$ liefert $A_{\max} = 18\,\mathrm{cm}^2$.

•



Zeichne das Quadrat $ABCD$ erneut mit dem größten Kreuz.

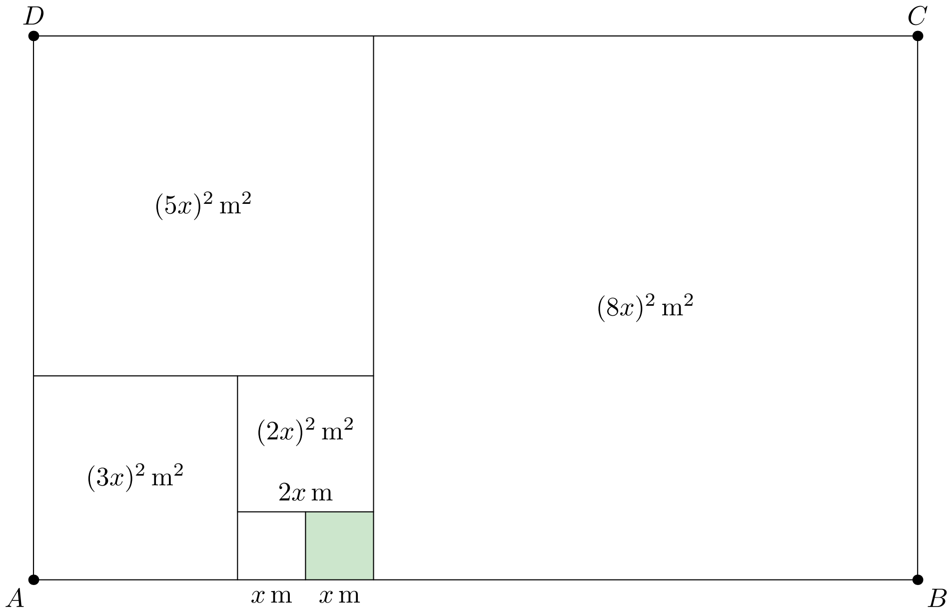
• 1. Möglichkeit: mit Hilfe der Lösung oben

$$\frac{A_{\text{Kreuz}}}{A_{\text{ABCD}}} = \frac{18\,\mathrm{cm}^2}{36\,\mathrm{cm}^2} = 0,5 = 50\%.$$

2. Möglichkeit: Die gestrichelten Hilfslinien zerlegen das Quadrat $ABCD$ in 16 kongruente kleine Quadrate.
Im Zentrum des Kreuzes befinden sich 4 gleich große Quadrate. Der Rest des

Kreuzes setzt sich aus 8 kongruenten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken zusammen, wobei jedes halb so groß wie ein Quadrat im Zenrtrum ist. Diese 8 Dreiecke ergeben wiederum 4 Quadrate. Also nimmt das Kreuz insgesamt den gleichen Flächeninhalt ein, wie die 8 Quadrate.
Das sind aber zusammen 50% der Fläche des Quadrates $ABCD$.

34.



$2,34\,\mathrm{ha} = 23\,400\,\mathrm{m}^2$.
Die beiden kleinsten Parzellen haben eine Breite von $(x + x)\,\mathrm{m} = 2x\,\mathrm{m}$.
Diese Seitenlänge geht dann auf das nächst größere Quadrat über.
Dessen Flächeninhalt beträgt dann $(2x)^2\,\mathrm{m}^2$.
Auf diese Weise ermittelst du die Flächeninhalte der nächsten Quadrate (siehe Lösungsskizze).
Am Ende ergibt sich für die Maßzahlen:

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + (2x)^2 + (3x)^2 + (5x)^2 + (8x)^2 &= 23\,400 \\ 2x^2 + 4x^2 + 9x^2 + 25x^2 + 64x^2 &= 23\,400 \\ 104x^2 &= 23\,400 \qquad |:104 \\ x^2 &= 225 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Der Umfang eines dieser kleinsten Quadrate beträgt $4 \cdot 15\,\mathrm{m} = 60\,\mathrm{m}$. Das ist dann die gesuchte Zaunlänge.

35. (a) Ja, weil $3 + 2x = 2x + 3$ gilt (Kommutativgesetz der Addition und Punkt-vor-Strich-Regel)

(b) Ja, weil $(3 + x) + x = 3 + (x + x) = 3 + 2 \cdot x$ gilt; dann erhältst du die Gleichung (a) in der Angabe.

(c) Ja, weil $x + (3 + x) = x + 3 + x = x + x + 3 = 2x + 3$ gilt. Du erhältst dann die Gleichung oben in der Angabe.

(d) Ja. Begründung: Mit der Umformung $3+x = -x+11 \mid +x$ erhältst du die Gleichung (a) in der Angabe.

(e) Nein, weil nach der Regel „Punkt vor Strich“ $2 + 3 \cdot x \neq 2 + 3 \cdot x$ gilt. (Mache es Dir an Beispielen mit Zahlen deutlich.)

(f) Nein, weil $x^2 = x \cdot x$ ist und $2 \cdot x = x + x$ gilt. (Mache es Dir an Beispielen mit Zahlen deutlich.)

(g) $2000x + 3000 = 11000 \mid : 1000$ ergibt die Gleichung oben in der Angabe.

2. Lineare Gleichungen und Ungleichungen

1. (a) Einsetzen (b) z.B.: $13 - 2x = x + 7$

2. Es ergibt sich $4 - 0 \cdot x = 33$. Das ist für keine Belegung von x erfüllbar.

3. (a) Entweder $x = -1$ einsetzen oder die Gleichung nach x auflösen.
   (b) z.B. $G = \mathbb{N}$ wählen oder $7 - x = 3x + 12$ usw.

4. Es ergibt sich $x^2 = -2$. Es gibt keine Zahl, die mit sich selbst multipliziert einen negativen Produktwert ergibt.

5. Wir rechnen nur mit Maßzahlen.

   (a) Die Dreiecksseiten sind 3 cm, 6 cm und 4 cm lang.

   (b) Wegen $(8 - 2x) + (2 + x) + (3 + x) = 13$ ist der Umfang konstant 13 cm lang.

   (c) 1. Fall:
   $8 - 2x = 2 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$
   $a = 5\,\text{cm}$, $b = 2\,\text{cm}$ und $c = 5\,\text{cm}$
   2. Fall:
   $8 - 2x = 3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\overline{6}\,\text{cm}$
   $a = 3,\overline{6}\,\text{cm}$; $b = 4,\overline{6}\,\text{cm}$ und $c = 4,\overline{6}\,\text{cm}$.
   3. Fall:
   $2 + x = 3 + x$ ist nicht erfüllbar, weil stets $2 + x < 3 + x$ gilt.

   (d) Für $x = 4$ wird $\overline{AC} = 0\,\text{cm}$; d.h. das Dreieck entartet zur Strecke.
   Es muss $\overline{AC} > 0$ gelten; d.h. es muss $0 < x < 4$ (*)sein.
   Gleichzeitig müssen alle Dreiecksungleichungen erfüllt sein:

   1. Bedingung: $(8-2x)+(3+x) > 2+x \quad \Leftrightarrow \quad x < 4,5$; ist wegen (*) ohnehin erfüllt.
   2. Bedingung: $(8 - 2x) + (2 + x) > 3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x < 3,5$ (**)
   3. Bedingung: $(2 + x) + (3 + x) > 8 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad x > 0,75$
   Mit (**) gibt es nur für $0,75 < x < 3,5$ solche Dreiecke.

6.

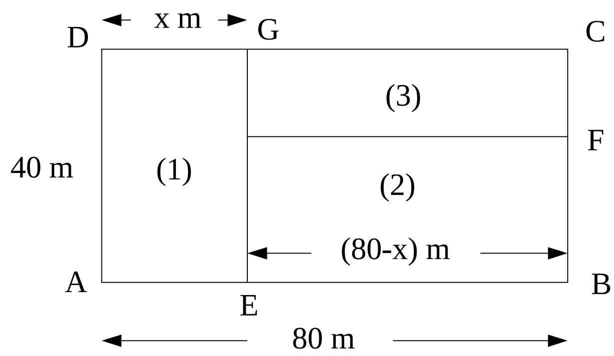
   (a) –

   (b) Es gilt: $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{HG} = 4x\,\text{cm}$ und $\overline{AB} = 5x\,\text{cm}$.
   Dann folgt für den Umfang u: $u(x) = 18x\,\text{cm}$.
   $18x = 108 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad \text{und} \quad 2x = 12 \quad \text{sowie} \quad 3x = 18.$
   Damit folgt für den Flächeninhalt A eines dieser Rechtecke im Inneren: $A = 12\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} = 216\,\text{cm}^2$

7. Die kürzere Seite liegt zwischen $14\,\text{cm}$ und $14{,}5\,\text{cm}$.

8. Es sind 20 Würfel und 10 Pyramiden.

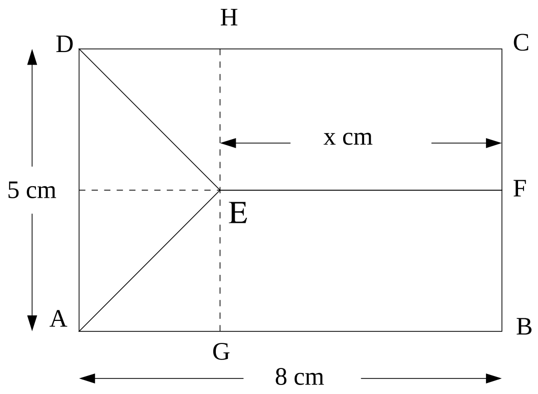
9.



Es muss einerseits $\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{DG} = x\,\text{m}$ gelten.
Wegen $\overline{BC} = 40\,\text{m}$ folgt: $x = 20$. *)
Andererseits muss gleichzeitig $\overline{EB} = \overline{AD}$ gelten:
$\Rightarrow \quad 80 - x = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 40$ **)
Die Ergebnisse *) und **) stehen im Widerspruch. Also gibt es keine Belegung von x, die drei flächengleiche Rechtecke erzeugt.

10. (a) –

   (b)



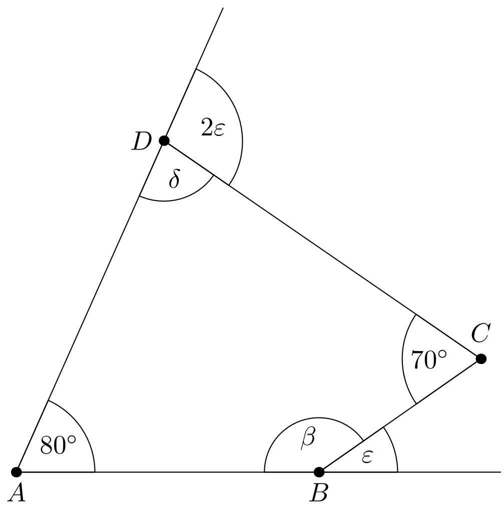
$A(ABFE) = [A(ABCD) - A(AED)] : 2 = [40\,\text{cm}^2 - 0,5 \cdot 5 \cdot (8 - x)\,\text{cm}^2] : 2$
$A_T = 20\,\text{cm}^2 - (10 - 1,25x)\,\text{cm}^2 = (1,25x + 10)\,\text{cm}^2$

(c) Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ muss dreimal so groß sein wie der Flächeninhalt des Trapezes $ABFE$:
$3 \cdot (1,25x + 10) = 40 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{3} \approx 2,67$

(d) $A(AED) = A(ABCD) - 2 \cdot A(ABFE) = 40\,\text{cm}^2 - 2 \cdot (1,25x + 10)\,\text{cm}^2$
$A_D(x) = (20 - 2,5x)\,\text{cm}^2$

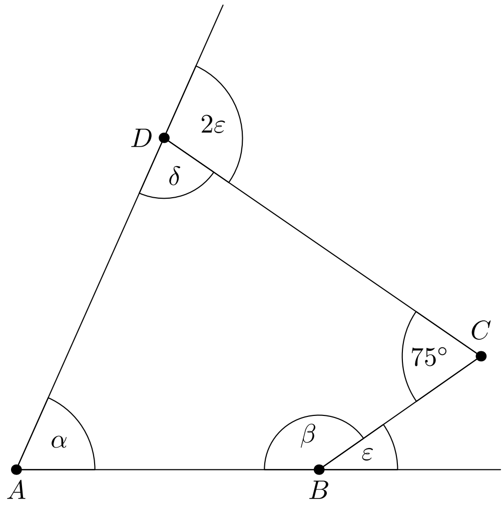
(e) Es muss gelten $A_T = A_D$: $\quad 1,25x + 10 = 20 - 2,5x \quad \Rightarrow \quad x \approx 2,67$

11.



Im Viereck $ABCD$ gilt: $80° + \beta + 70° + \delta = 360°$. (*)
β ist der Nebenwinkel von ε : $\beta = 180° - \varepsilon$. (1)
δ ist der Nebenwinkel von 2ε : $\delta = 180° - 2\varepsilon$. (2)
Wir ersetzen in der Gleichung (*) β durch $180° - \varepsilon$ und δ durch $180° - 2\varepsilon$.
Dann ergibt sich: $80° + 180° - \varepsilon + 70° + 180° - 2\varepsilon = 360°$.
$\Leftrightarrow \quad -3\varepsilon = -150° \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 50°$.

12.



(a) Aus $\varepsilon = 48°$ folgt: $\beta = 180° - 48° = 132°$ und $\delta = 180° - 96° = 84°$.
In jedem Viereck beträgt die Innenwinkelsumme 360°:
$\alpha + 132° + 75° + 84° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 69°$.

(b) Im Viereck $ABCD$ gilt: $\alpha + \beta + 75° + \delta = 360°$. (*)
β ist der Nebenwinkel von ε : $\beta = 180° - \varepsilon$. (1)
δ ist der Nebenwinkel von 2ε : $\delta = 180° - 2\varepsilon$. (2)
Wir ersetzen in der Gleichung (*) β durch $180° - \varepsilon$ und δ durch $180° - 2\varepsilon$.
Dann ergibt sich: $\alpha + 180° - \varepsilon + 75° + 180° - 2\varepsilon = 360°$.
$\Leftrightarrow \quad \alpha - 3\varepsilon = -75° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 3\varepsilon - 75°$.
Damit das Viereck $ABCD$ existiert, muss $\alpha > 0$ gelten:
$\Leftrightarrow \quad 3\varepsilon - 75° > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon > 25°$.
Wenn du andererseits am Punkt D das Winkelmaß 2ε betrachtest, dann muss $2\varepsilon < 180°$ und damit $\varepsilon < 90°$ gelten.
Insgesamt muss also $25° < \varepsilon < 90°$ gelten.

13. (a) Das Dreieck ist gleichschenklig, denn zwei Seiten haben die gleiche Länge a.

(b) In jedem Dreieck müssen zwei Seiten länger als die dritte Seite sein:
Es müsste z.B. $4{,}8\,\text{cm} + 4{,}8\,\text{cm} > 10\,\text{cm}$ werden. Diese Bedingung ist nicht erfüllt, also gibt es kein solches Dreieck; Fritz hat Recht.

(c) Zum Beispiel:

a	$4{,}5\,\text{cm}$	$3\,\text{cm}$
c	$3{,}7\,\text{cm}$	$3\,\text{cm}$
u	$2 \cdot 4{,}5\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$	$2 \cdot 3\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$

Es gibt beliebig viele Lösungen.

14. (a) $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}}$.

(b) Wenn du die Ungleichung in Aufgabe (a) auf beiden Seiten mit 3 multiplizerst, dann erhältst du die Ungleichung (b). Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

(c) Wenn du Ungleichung (a) auf beiden Seiten mit 1387 multiplizerst, dann erhältst du die Ungleichung (c). Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

(d) Weil $x^2 + 1$ stets positiv ist, muss $2x - 4$ auch positiv (also > 0) bleiben. An der Lösungsmenge ändert sich nichts.

(e) Weil $x^2 + 1$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ positiv ist, folgt aus den gleichen Gründen wie oben $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}}$.

(f) Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob die Lösungsmenge zu den vorigen unverändert bleibt. Doch du musst hier vorsichtiger sein: Der Faktor $(x - 11)^2$ ist nicht für alle Belegungen von x positiv, denn $x = 11$ ist eine Nullstelle dieses Terms; d.h. für $x = 11$ ergibt sich $(11 - 11)^2 \cdot (2 \cdot 11 - 4) = 0$ und nicht > 0 .Das bedeutet: $x = 11$ gehört nicht zur Lösungsmenge.
Damit gilt hier $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}} \setminus \{11\}$.

15. Preis pro T-Shirt im September 2011: x EURO .
Preis pro T-Shirt im Oktober 2011: $(x + 1)$ EURO .
Wir rechnen im Folgenden nur mit Maßzahlen.
$76 \cdot x = 72 \cdot (x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 72 \quad \Leftrightarrow \quad x = 18\,.$
Im September 2011 kostete eines dieser T-Shirts 18 EURO.

16. **1. Möglichkeit:**
Um von der ersten zur zweiten Zeile zu kommen, hat Carsten offenbar auf beiden Seiten der Gleichung im Buch die Zahl 16 addiert. Dadurch fällt das Kästchen in der zweiten Zeile weg. Also stand die unleserliche Zahl 16 anstelle des Kästchens da.
2. Möglichkeit:
Der Lehrer hat $x = 7$ als richtige Lösung bestätigt. Setze diese Lösung in die erste Zeile ein:
$2 \cdot 7 - \square = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 14 - \square = -2 \mid -14 \quad \Leftrightarrow \quad -\square = -16 \mid \cdot (-1)$
$\Leftrightarrow \quad \square = 16\,.$

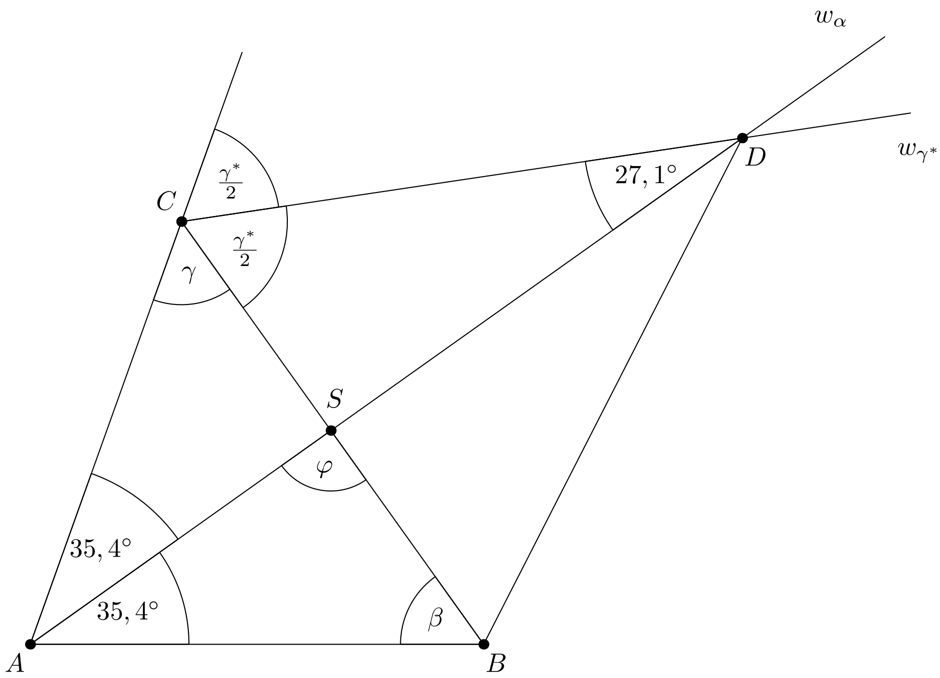
17. **1. Möglichkeit:**
Um von der ersten zur zweiten Zeile zu kommen, hat Carsten offenbar auf beiden Seiten der Gleichung im Buch die Zahl 16 addiert. Dadurch fällt das Kästchen in der zweiten Zeile weg. Also stand die unleserliche Zahl 16 anstelle des Kästchens da.
2. Möglichkeit:
Der Lehrer hat $x = 7$ als richtige Lösung bestätigt. Setze diese Lösung in die erste Zeile ein:
$2 \cdot 7 - \square = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 14 - \square = -2 \mid -14 \quad \Leftrightarrow \quad -\square = -16 \mid \cdot (-1)$
$\Leftrightarrow \quad \square = 16\,.$

18. (a) Es gilt: $\overline{RQ} = (8 - x)\,\mathrm{m}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.
Dann folgt: $x \cdot (8 - x)\,\mathrm{m}^2 = 5 \cdot x\,\mathrm{m}^2 \;\mid : \; (x\,\mathrm{m}^2)$ mit $x > 0$
$\Leftrightarrow \quad 8 - x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3\,.$

(b) $A_{\text{Kartoffelfeld}} = \overline{RQ} \cdot \overline{RS} = 5\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = 10\,\text{m}^2\,.$

$$\frac{A_{\text{Kartoffelfeld}}}{A_{ABCD}} = \frac{10\,\text{m}^2}{40\,\text{m}^2} = 0,25 = 25\%\,.$$

19. (a)



Im Dreieck ADC gilt: $35,4° + 27,1° + \dfrac{\gamma^*}{2} + \gamma = 180° \quad (1)\,.$
Weiter gilt: $\gamma^* = 180° - \gamma\,.$
In (1): $35,4° + 27,1° + (180° - \gamma) : 2 + \gamma = 180°\,.$
$\Leftrightarrow \quad 62,5° + 90° - 0,5\gamma + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 62,5° + 0,5\gamma = 90°$
$\Leftrightarrow \quad \gamma = 55°\,.$
Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck ABC ergibt sich:
$70,8° + 55° + \beta = 180° \Rightarrow \quad \beta = 54,2°\,.$

Eine andere Möglichkeit:

$\frac{\gamma^*}{2}$ ist ein Außenwinkel am Dreieck ADC. Jeder Außenwinkel an einem Dreieck ist genau so groß wie die Summe der Maße der beiden nicht anliegenden Innenwinkel. Das bedeutet hier:

$$\frac{\gamma^*}{2} = 35,4° + 27,1° = 62,5° \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^* = 125°\,.$$

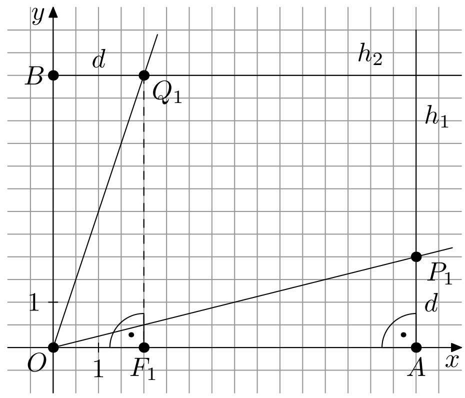
$\gamma = 180° - 125° = 55° \quad \ldots \quad \beta = 54,2°\,.$

(b) In jedem (achsensymmetrischen) Drachenviereck müssen die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck ABS gilt: $\varphi = 180^\circ - 35,4^\circ - 54,2^\circ = 90,4^\circ \neq 90^\circ$.
Das Viereck $ABDC$ ist also kein (achsensymmetrisches) Drachenviereck.

3. Lineare Funktionen

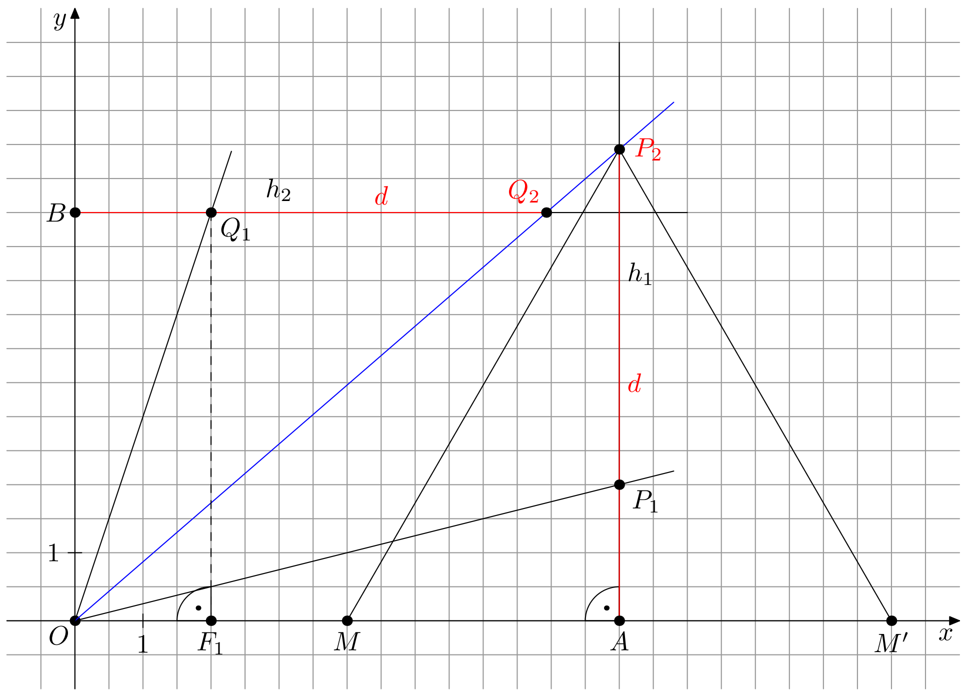
1. $g_1(t): y = -x + t$ und $g_2(t): y = \frac{1}{3}x + t$

2. (a)



(b) Der Steigungsfaktor in den beiden Steigugsdreiecken OF_1Q und OAP_1 muss der gleiche sein:
$\dfrac{6}{d} = \dfrac{d}{8} \quad \Leftrightarrow \quad d^{\,2} = 48 \quad \Rightarrow \quad d = 4\sqrt{3} \approx 6,93.$

(c) Die Maßzahl $d = 4\sqrt{3}\,]$ lässt sich als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $A = 8\,\mathrm{cm}$ deuten:



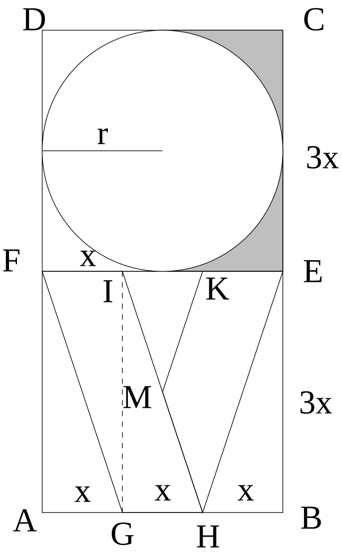
Der Punkt M' ist durch Spiegelung des Mittelpunktes M der Strecke $[OA]$ am Punkt A entstanden. Über der Strecke MM' wird nun das gleichseitige Dreieck $MM'P_2$ errichtet, dessen Höhe $[AP_2]$ die gesuchte Länge von $\frac{8}{2}\sqrt{3}\,\text{cm}$ besitzt.

4. Dreiecke und Vierecke

1. (a) Es ist ein gleichschenkliges Dreieck.
   (b) Es ist ein gleichseitiges Dreieck.

2. (a) Es ist jeweils auf den richtigen Drehsinn zu achten.
   (b) Z.B.: Ersetze $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$ durch $\beta = \sphericalangle CBA = 100°$. Wegen $\overline{AB} > \overline{AC}$ müsste dann $\gamma = \sphericalangle ACB > \beta = 100°$ gelten, was nicht geht.

0. (a) –
   (b)



Es gilt: $\overline{AB} = 3x\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6x\,\text{cm}$. $\Rightarrow \quad A(x) = 18x^2\,\text{cm}^2$

   (c) $18x^2\,\text{cm}^2 = 112{,}5\,\text{cm}^2$ für $x \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow \; x = 2{,}5$
   (d) Durch die Strecke $[IG]$ wird das Parallelogramm $GHIF$ in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt, die jeweils zu dem rechtwinkligen Dreieck HBE kongruent sind.
   $\Rightarrow \quad A(GHIF) = 2 \cdot A(HBE)$
   (e) Für den Kreisradius gilt: $r = 1{,}5x$
   $A(\text{dunkel}) = [(3x)^2 - (1{,}5x)^2 \cdot \pi] : 2\,\text{cm}^2 = 0{,}5 \cdot (9 - 2{,}25\pi)x^2\,\text{cm}^2$

Die Dreiecke HBE und AGF sind kongruent:
$A(HBE) = 0,5 \cdot x \cdot 3x\,\text{cm}^2 = 1,5x^2\,\text{cm}^2$

$$\frac{A(\text{dunkel})}{A(HBE)} = \frac{0,5 \cdot (9 - 2,25\pi)x^2\,\text{cm}^2}{1,5x^2\,\text{cm}^2} \approx \frac{1,93}{3} < 1$$

Die dunkel getönte Fläche ist also kleiner als die Fläche des Dreiecks HBE.

1. Der Flächeninhalt des Vierecks $APQC$ beträgt $7,5\,\text{cm}^2$.

2. 1. Fall: Beide Basiswinkel haben das Maß 70°. Dann hat der dritte Winkel das Maß 40°.
   2. Fall: Der Winkel an der Spitze hat das Maß 70°. Dann hat jeder Basiswinkel das Maß 55°.

3. - -

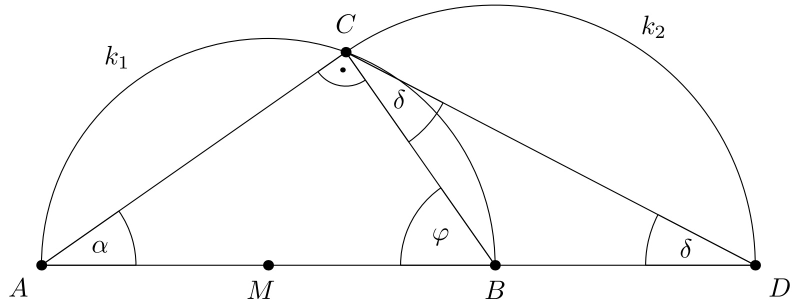
4. (b) z.B. $a = 7\,\text{cm}$ statt $\alpha = 35°$

5. (a) Das Dreieck ist gleichseitig.
   (b) Das Dreieck ist gleichschenklig: $\beta = \gamma = 66{,}5°$

6. (c) z.B. $c = 10{,}5\,\text{cm}$ oder $\alpha = 90{,}01°$

7. (b) z.B. statt $a = 8\,\text{cm}$: $\beta = 90°$
   oder $c = 9\,\text{cm}$ statt $c = 6\,\text{cm}$.

8. (a)
   - Zeichne den Halbkreis k_1 über der Strecke $[AB]$, die 6 cm lang ist.
     Trage im Punkt A den Winkel $\alpha = 35°$ an.
     Der freie Schenkel von α schneidet k_1 im Punkt C.
     Der Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ schneidet die Halbgerade $[AB$ im Punkt D. Der Rest ist Formsache.



- Der Punkt C liegt auf dem THALES-Kreis über $[AB]$.
  $\Rightarrow \quad \sphericalangle ACB = 90° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 90° - 35° = 55°$.
  Weiter gilt: $\overline{BD} = \overline{BC} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle BCD = \delta$
  φ ist Außenwinkel am Dreieck $BDC \quad \Rightarrow \quad 55° = 2 \cdot \delta \quad \Rightarrow \quad \delta = 27,5°$

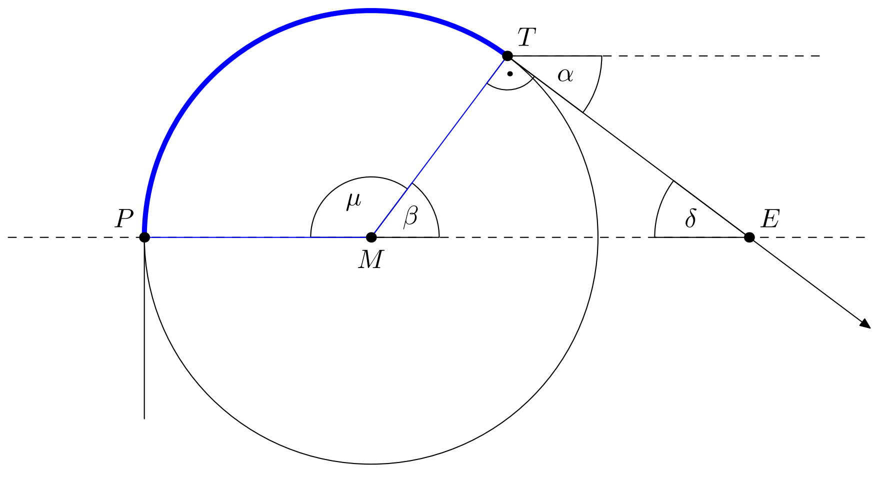
(b) Nun kannst du rückwärts schließen:
Wenn $\delta = 40°$ ist, dann muss $\varphi = 2 \cdot 40° = 80°$ sein.
$\Rightarrow \quad \alpha = 90° - 80° = 10°$

(c) Wäre $\delta = 59°$, dann wäre nach dem Satz vom Außenwinkel $\varphi = 59° + 59° = 118°$. Weil das Dreieck ABC aber rechtwinklig ist, wäre in ihm die Innenwinkelsumme von 180° überschritten.

(d) Der Winkel mit dem Maß φ muss stets ein spitzer Winkel bleiben, denn sonst bliebe das Dreieck ABC nicht rechtwinklig.
Also: $\varphi = 2 \cdot \delta < 90° \quad \Rightarrow \quad \delta < 45°$
Wenn $\delta = 0°$ wäre, dann würde $\varphi = 0°$ folgen. Dann läge der Punkt C auf dem Punkt A, und das Dreieck ABC wäre zusammen mit der ganzen Figur zur Strecke entartet.
Also gibt es das Dreieck ABC nur für $0° < \delta < 45°$.
Anmerkung: Es gibt dazu eine mit GEONExT erstellte dynamische Konstruktion: 08eh100.gxt

9. (a) Siehe Zeichnung zu (b):
Die Halbgerade $[TE$ liegt auf der Kreistangente mit dem Berührpunkt T. Der Berührradius $[MT]$ steht auf dieser Tangente senkrecht. Weiter gilt: $\delta = \alpha$ (Z-Winkel).
$\Rightarrow \quad \beta = 90° - \delta = 90° - \alpha$.

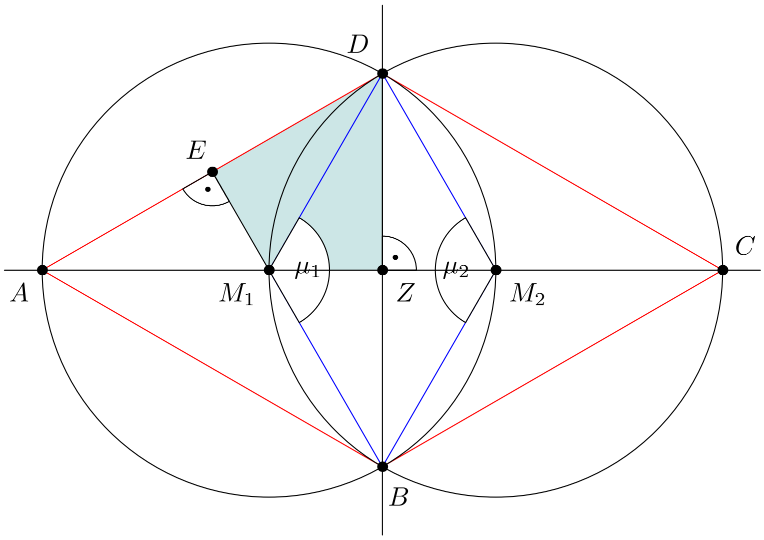
(b) Wenn also $\alpha = 37°$ ist, dann folgt $\beta = 90° - 37° = 53°$.
Damit kannst du den Berührradius mit dem Punkt T und seine Kreistangente konstruieren. Das linke Seilende führt senrecht nach unten.



(c) Aus $\alpha = 30°$ folgt $\beta = 60° \quad \Rightarrow \quad \mu = 180° - 60° = 120°$.
Der Mittelpunktswinkel μ nimmt also ein Drittel des Vollwinkels (360°) ein. Damit bedeckt das Seil ein Drittel des Rollenumfangs.

(d) Berechne α aus dem Mittelpunktswinkel μ:
$\mu = 40\%$ von $360° = 0,4 \cdot 360° = 144°$.
$\beta = 180° - 144° = 36° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° - 36° = 54°$.

10. (a)

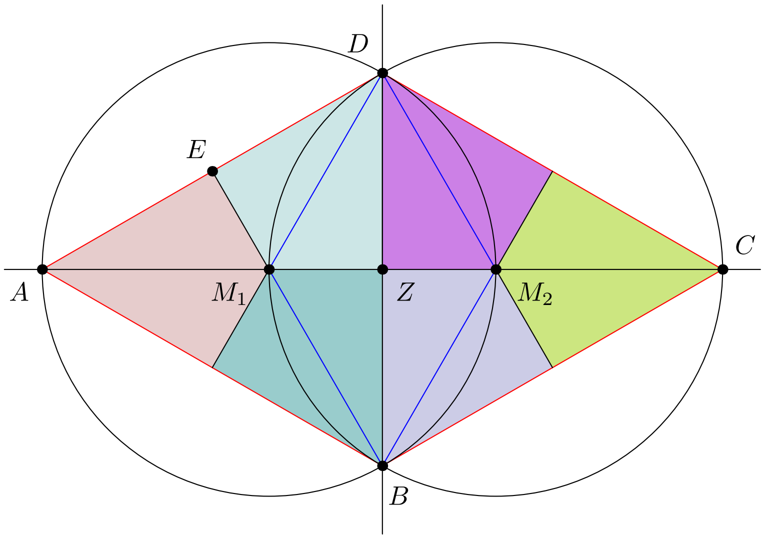


(b) Die Dreiecke M_1M_2D und M_1BM_2 sind gleichseitig; ihre Seitenlänge beträgt jeweils 3 cm (Kreisradius).
$\Rightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 = 60° + 60° = 120°$.

(c) Der Umfang des Vierecks BM_2DM_1 ist $4 \cdot 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$ lang. Es handelt sich um ein gleichseitiges Viereck, also um eine Raute.

(d) Das Dreieck AM_1D ist gleichschenklig: $\overline{M_1A} = \overline{M_1D} = 3\,\text{cm}$.
$\sphericalangle DM_1A = 180° - 60° = 120° \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle M_1AD = \sphericalangle ADM_1 = 30°$
$\sphericalangle EDM_1 = \sphericalangle M_1DZ = 30°$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle M_1ED = \sphericalangle DZM_1 = 90° \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle DM_1E = \sphericalangle ZM_1D = 60°$
Die beiden Dreiecke M_1ZD und EM_1D stimmen damit in allen drei Innenwinkelmaßen überein und sie haben die Seite $[M_1D]$ gemeinsam. Also sind diese beiden Dreiecke kongruent.

(e)

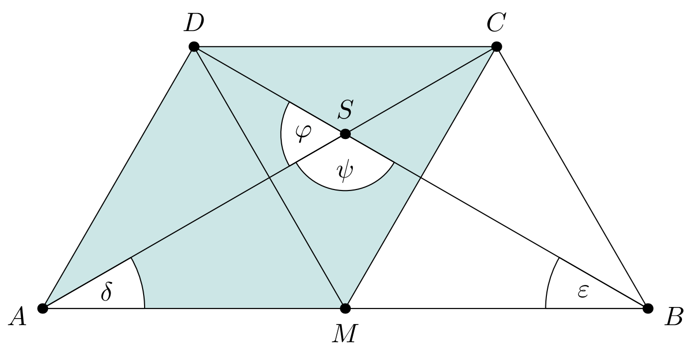


Die Raute $ABCD$ lässt sich mit sechs kongruenten Drachenvierecken parkettieren. Die Raute BM_2DM_1 ist nach (d) so groß wie zwei dieser Drachenvierecke. Also ist die Raute $ABCD$ dreimal so groß wie die Raute BM_2DM_1.

Anregung: Setze diese Parkettierung auf deinem Zeichenblatt fort. Du kannst dabei viele andere Flächen und deren Zusammenhänge entdecken.

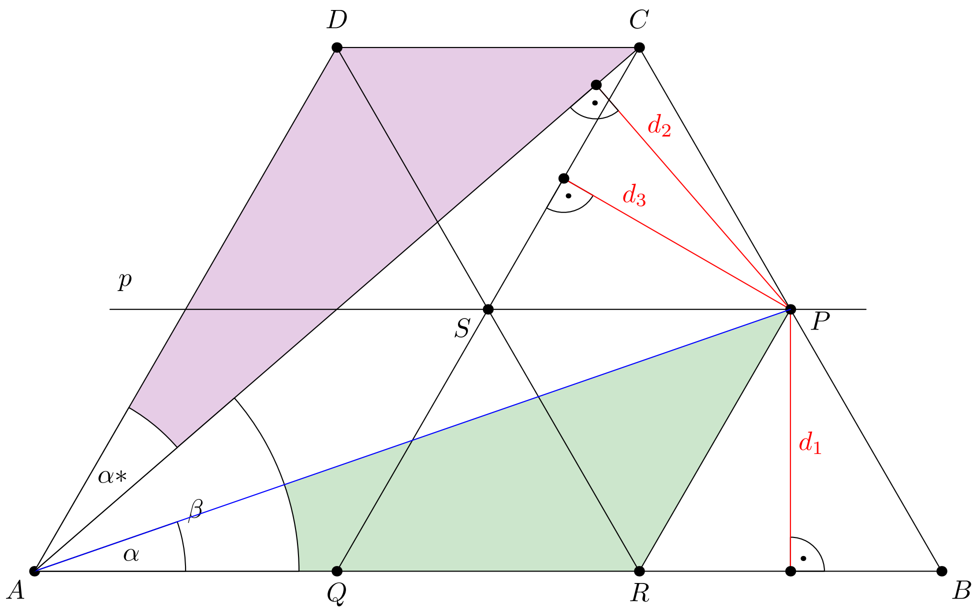
Anmerkung: Viele (z.T. weltberühmte) Werke des holländischen Graphikers **M.C. Escher** (1898 - 1972) sind Parkettierungen von ebenen Flächen oder Flächen im Raum.
Literaturhinweis: „*Die Welten des M.C. Escher*“, Manfred Pawlak Verlagsgesellschaft MbH, Herrsching

11.



Das Viereck $AMCD$ ist eine Raute, deren Diagonalen die Innenwinkel halbieren.
Z.B.: Das Dreieck ABS ist gleichschenklig. $\Rightarrow$ $\delta = \varepsilon = 30°$
$\Rightarrow$ $\psi = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$ $\Rightarrow$ $\varphi = 180° - 120° = 60°$.

12. (a)



(b) Wenn der Punkt P auf der Winkelhalbierenden läge, dann müssten die Abstände d_1 und d_2 zu den Schenkeln $[AB]$ bzw. $[AC]$ gleich lang sein.
Nun sind aber die Höhen d_1 und d_3 in den gleichseitigen Dreiecken RBP und SPC gleich lang, weil diese Dreiecke kongruent sind. Offensichtlich gilt nun: $d_2 > d_3 = d_1$.
Also liegt der Punkt P nicht auf der Halbierenden des Winkels BAC.

(c) Es gilt:
$\overline{AR} = \overline{AD} \quad \wedge \quad \overline{RP} = \overline{DC} \quad \wedge \quad \sphericalangle PRA = \sphericalangle ADC = 120°$
$\Rightarrow \quad \Delta ARP \cong \Delta ABP$ (sws)-Kongruenz.

(d) Weil $\Delta ARP \cong \Delta ABP$ gilt, folgt $\alpha = \alpha*$.
$\Rightarrow \quad \beta + \alpha = \beta + \alpha* = 60°$

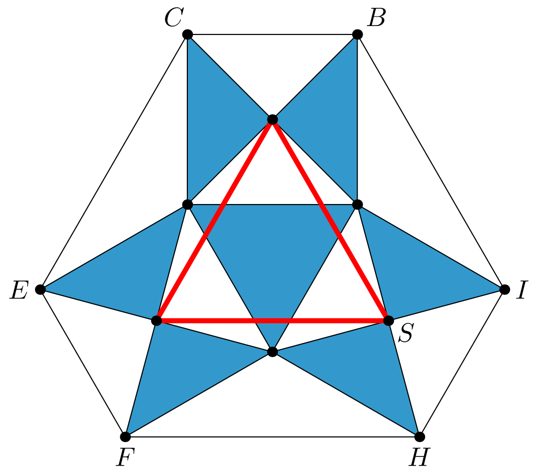
13. (a)
- Die Figur stellt ein Sechseck dar, das zwar achsensymmetrisch, aber nicht regelmäßig ist.
- Im Zentrum der Figur steht das gleichseitige Dreieck ADG.
- Über den Seiten dieses Dreiecks sind die drei kongruenten Quadrate $ABCD$, $DEFG$ und $GHIA$ errichtet.
- Jedes Quadrat wird durch die beiden Diagonalen in vier kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt, wobei jeweils zwei gegenüber liegende eingefärbt sind.
- Die beiden benachbarten äußeren Eckpunkte von je zwei Quadraten sind durch Strecken miteinander verbunden.

(b) Es gibt **drei** solche Trapeze: $FHAD$, $IBDG$ und $CEGA$.
Es gibt **drei** solche Drachenvierecke: $GAPD$, $ADQG$ und $DGSA$.

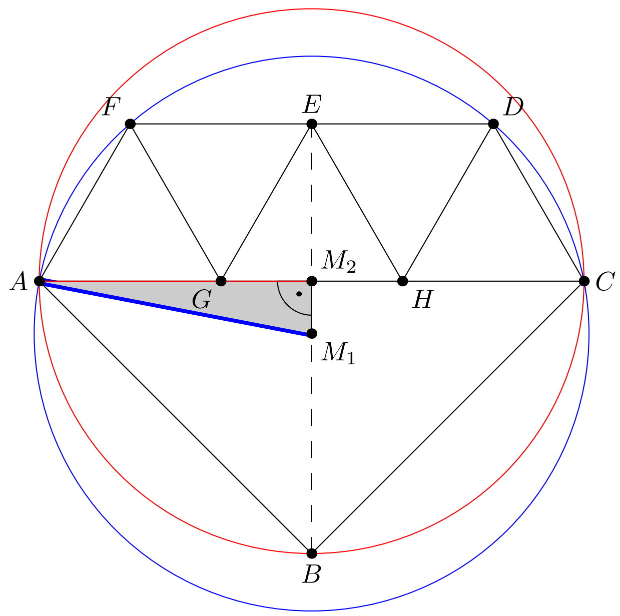
(c) Das Dreieck DCE ist gleichschenklig, denn die beiden Quadratseiten $\overline{DC}$ und $\overline{DE}$ sind gleich lang.
$\sphericalangle EDC = \sphericalangle EDG + \sphericalangle GDA + \sphericalangle ADC = 90° + 60° + 90° = 240°$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle CDE = 360° - 240° = 120°$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle ECD = (180° - 120°) : 2 = 30° \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle ECB = 30° + 90° = 120°$
Die Figur ist achsen- und drehsymmetrisch mit den Drehwinkeln 120° und 240°. Also haben alle Innenwinkel dieses Logos das Maß 120°.

(d) Wie in der Lösung (c) schon gezeigt, gilt: $\sphericalangle EDA = 90° + 60° = 150°$ und $\overline{ED} = \overline{DA} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = (180° - 150°) : 2 = 15°$.

(e)



14. (a) Die Figur ist etwas verkleinert gezeichnet.



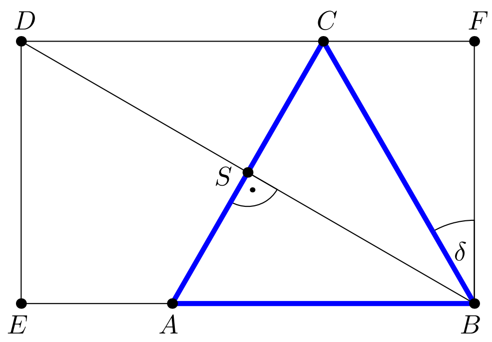
(b) • Bei dem Viereck $ACDF$ handelt es sich um ein achsensymmetrisches Trapez mit der Symmetrieachse BE. Alle achsensymmetrischen Trapeze besitzen einen

Umkreis.

- Siehe Zeichnung.

(c) Der Umkreis des Dreiecks ABC hat den Radius $\overline{M_2A}$. Das ist eine Kathete im rechtwinkligen Dreieck AM_1M_2.
Der Umkreis des achsensymmetrischen Trapezes hat den Radius $\overline{M_1A}$. Das ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck AM_1M_2.
Weil die Hypotenuse in **jedem** rechtwinkligen Dreieck die längste Seite darstellt, ist der Radius und damit auch der Durchmesser des Kreises k_1 länger als der des Kreises k_2.

15. (a)



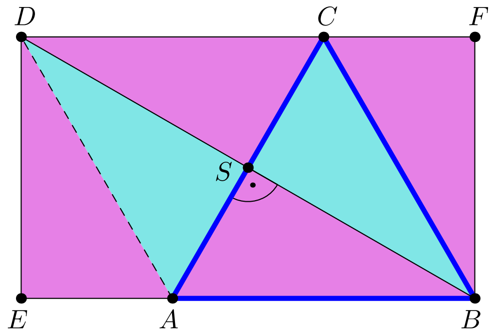
- Beginne mit dem Dreieck ABC und dem Mittelpunkt S der Seite $[AC]$.
- Zeichne die Halbgerade $[BS$ ein.
- Die Parallele zu $[AB]$ durch den Punkt C schneidet diese Parallele im Punkt D. Der Rest ist klar.

(b) $\Delta ABS \cong \Delta SBC$, weil BS eine Symmetrieachse ist.
Die beiden rechtwinkligen Dreicke SBC und BFC besitzen die Seite $[BS]$ als gemeinsame Hypotenuse. Außerdem gilt $\delta = 90° - 60° = 30° = \sphericalangle CBS$.
Also sind alle drei fraglichen Dreiecke kongruent.

(c) Es gilt: $\Delta DSC \cong \Delta ABS$.
Begründung: Die beiden rechtwinkligen Dreiecke besitzen je einen 30°- und einen 60°-Winkel (Z-Winkel). Neben den drei Innenwinkeln stimmen diese beiden Dreiecke noch in den Kathetenlängen $\overline{AS}$ und $\overline{SC}$ überein.
Also: $\Delta DSC \cong \Delta ABS$.
Das Dreieck ABC ist in zwei kongruente Teildreiecke zerlegt.
Das rechtwinklige Dreieck DBF besteht aus drei kongruenten Teildreiecken. Alle fünf Teildreiecke sind kongruent.
Weil $\Delta DBF \cong \Delta EBD$ gilt, ist das Rechteck $EBFD$ ist damit in sechs dieser kongruenten Teildreieck zerlegbar.

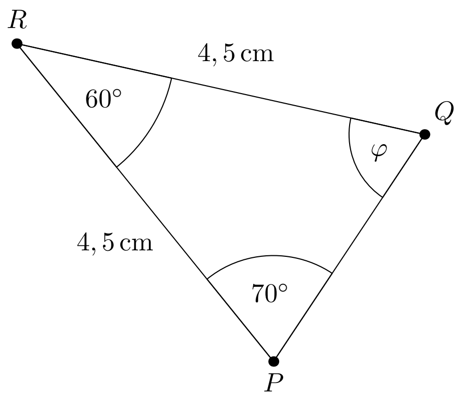
Damit gilt: $\dfrac{A_{\Delta ABC}}{A_{EBFD}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Oder:
Die Hilfsline $[DA]$ veranschaulicht diesen Sachverhalt ohne weiteres:



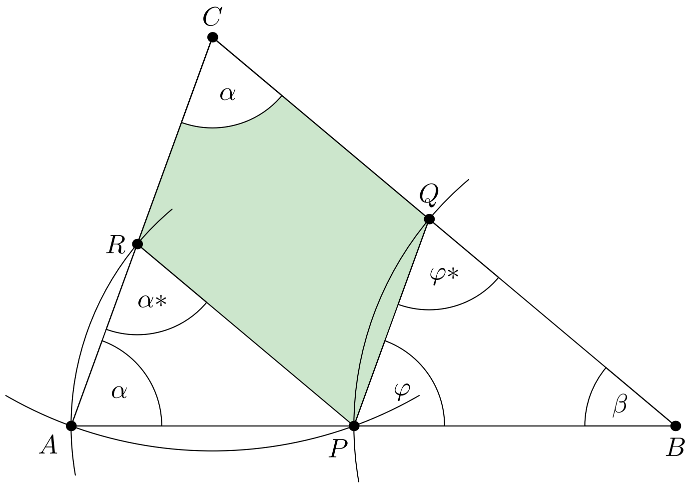
16. Das Dreieck ist rechtwinklig, denn es gilt $\gamma = 90°$.
    Wegen $a > c$ folgt dann $\alpha > \gamma = 90°$. Also folgt $\alpha > 90°$.
    Damit würde $\alpha + \gamma > 180°$ werden, was in Dreiecken nicht geht.
    Das Dreieck gibt es also nicht.

17.



Das Dreieck ist gleichschenklig mit der Basis $[PQ]$, denn es gilt $\overline{PR} = \overline{QR} = 4,5\,\text{cm}$.
Dann folgt $\varphi = 70°$. Wegen $70° + 70° + 60° = 200°$ wäre die Innenwinkelsumme von $180°$ überschritten. Das Dreieck existiert nicht.

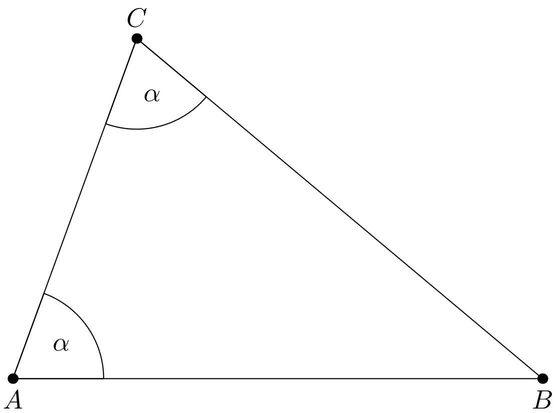
18. (a)



(b) Wegen $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt $\sphericalangle ACB = \alpha$.
Das Dreieck APR ist gleichschenklig mit der Basis $[AR]$
$\Rightarrow \quad \alpha = \alpha*$ und damit auch $\alpha* = \sphericalangle ACB$.
Damit sind α und $\sphericalangle ACB$ F-Winkel. $\Rightarrow \quad [PR] \parallel [CQ] \quad (1)$.
Im gleichschenkligen Dreieck ABC glt: $\alpha = (180° - \beta) : 2$.
Im gleichschenkligen Dreieck PBQ glt: $\varphi = (180° - \beta) : 2 = \alpha$.
Damit sind α und $\sphericalangle BPQ$ F-Winkel. $\Rightarrow \quad [PQ] \parallel [RC] \quad (2)$.
Also sind im Viereck $PQCR$ wegen (1) und (2) jeweils die beiden gegenüber liegenden Seiten parallel. Also handelt es sich um ein Parallelogramm.

19. (a) Im Dreieck ABC gilt: $\alpha = \sphericalangle BAC = \delta + \varepsilon = \sphericalangle ACB = \gamma$.
Also haben zwei Innenwinkel des Dreiecks ABC gleiches Maß; damit ist das Dreieck ABC gleichschenklig. Es besitzt die Basis $[AC]$.

(b) Um das Dreieck zeichnen zu können, brauchst du neben der Streckenlänge $\overline{AB}$ und dem 40°-Winkel noch ein weiteres Bestimmungsstück:
Du kannst entweder $\overline{BC} = 7\,\text{cm}$ verwenden oder das Winkelmaß
$$\alpha = (180° - 40°) : 2 = 70°$$
berechnen.

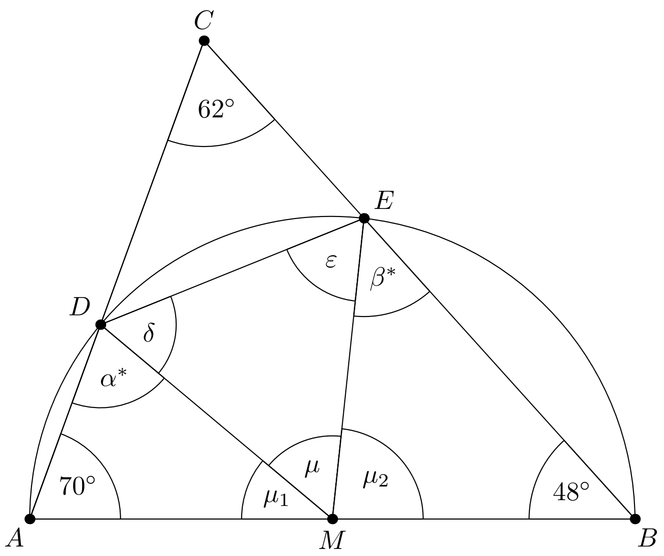


(c) Es gilt $\alpha = \delta + \varepsilon = 70°$.

Dann folgt im Dreieck ASC: $\underbrace{\delta + \varepsilon}_{=70^\circ} + \varphi = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \varphi = 110^\circ$.

20. $u_{\Delta BEC} = 10\,\text{cm} + b + c \quad u_{ABCD} = 4 \cdot 10\,\text{cm} = 40\,\text{cm}$
$u_{\Delta BEC} = 2 \cdot u_{ABCD}$. Also: $10\,\text{cm} + b + c = 2 \cdot 40\,\text{cm} = 80\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad b + c = 70\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad u_{ABECD} = 3 \cdot 10\,\text{cm} + 70\,\text{cm} = 100\,\text{cm}$.

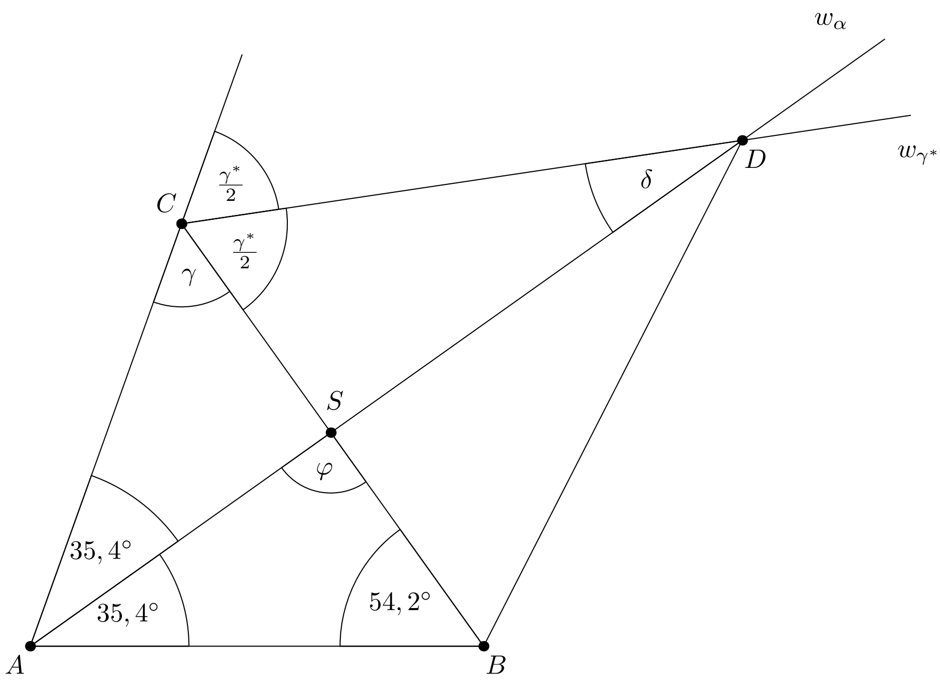
21. (a)



Berechne zunächst das Winkelmaß $\beta = 180^\circ - 70^\circ - 62^\circ = 48^\circ$ und zeichne dann das Dreieck ABC (w,s,w), dann den Halbkreis . . . .

(b) Für den Kreiradius r gilt: $r = \overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MD} = \overline{ME}$.
Das Dreieck AMD ist daher gleichschenklig.
Also gilt: $\alpha^* = \alpha$ und damit $\mu_1 = 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ$.
Das Dreieck MBE ist ebenfalls gleichschenklig.
Also gilt: $\beta^* = \beta$ und damit $\mu_2 = 180^\circ - 2 \cdot 48^\circ = 84^\circ$.
$\Rightarrow \quad \mu = 180^\circ - 40^\circ - 84^\circ = 56^\circ$.
Auch das Dreieck MED ist gleichschenklig.
Also gilt: $\delta = \varepsilon = (180^\circ - 56^\circ) : 2 = 62^\circ$.

22. (a)



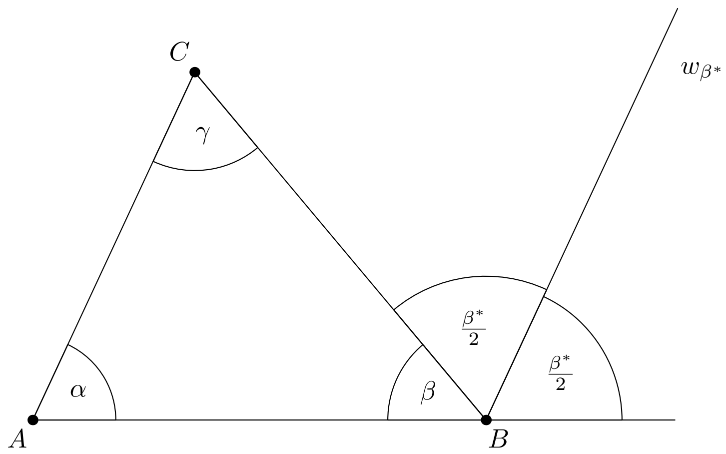
(b) Es gilt: $\gamma = 180° - 70,8° - 54,2° = 55°$.

$$\Rightarrow \quad \gamma^* = 180° - 55° = 125° \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma^*}{2} = 62,5° \,.$$

Im Dreieck ADC gilt dann $\delta = 180° - 35,4° - 55° - 62,5° = 27,2°$.

(c) In jedem (achsensymmetrischen) Drachenviereck müssen die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck ABS gilt: $\varphi = 180° - 35,4° - 54,2° = 90,4° \neq 90°$.
Das Viereck $ABDC$ ist also kein (achsensymmetrisches) Drachenviereck.

23. (a)

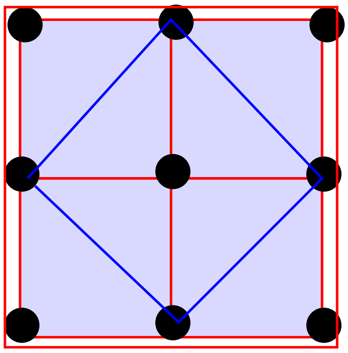


(b) In der Figur gilt: $\gamma = \dfrac{\beta^*}{2}$ (Z-Winkel).

Ebenso gilt: $\alpha = \dfrac{\beta^*}{2}$ (F-Winkel).

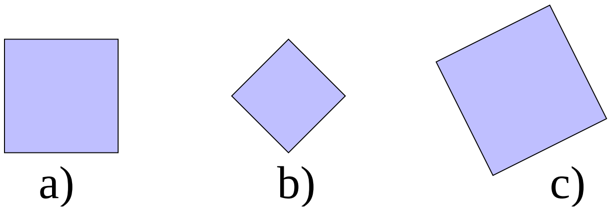
$\Rightarrow \quad \alpha = \gamma$; also ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

24.



Martha hat die vier gleich großen Quadrate im Inneren (blau) entdeckt.
Edwin könnte das große Quadrat außen herum gesehen haben.
Claudia hat genauer hingeschaut und zeichnet das blaue Quadrat noch ein.

25.



Die obiger Figur zeigt die verschiedenen (nicht maßstabsgerecht gezeichneten) Quadrattypen a), b) und c), die du im Punkteraster entdecken kannst.
Vom Typ a) gibt es zunächst 9 kleine Quadrate.
Hinzu kommen noch 4 Quadrate, deren Seite doppelt so lang ist wie die von einem kleinen Quadrat.
Dazu kommt noch 1 Quadrat, dessen Seite dreimal so lang ist wie die von einem kleinen Quadrat.
Vom Typ b) gibt es 4 Quadrate.
Vom Typ c) tauchen nur 2 verschiedene Quadrate auf (eines davon ist eingezeichnet).
Insgesamt enthält die Figur also maximal 20 Quadrate.

5. Raumgeometrie

1. (a) Die Oberfläche der beiden Endstücke links und rechts beträgt zusammen $2 \cdot 5 \cdot (x\,\text{cm})^2 = 10x^2\,\text{cm}^2$.
   Hinzu kommt ein Mittelstück, das sich aus vier Quadraten zusammensetzt: $4 \cdot (x\,\text{cm})^2 = 4\,\text{cm}^2$. Also sind es zusammen $14x^2\,\text{cm}^2$.

   (b) Zu dem vorigen Quader aus drei Würfeln kommt noch ein Mittelstück hinzu:
   $O_4 = 14x^2\,\text{cm}^2 + 4x^2\,\text{cm}^2 = 14x^2\,\text{cm}^2$.

   (c) $21,78\,\text{dm}^2 = 2178\,\text{cm}^2$
   $2178 = 18x^2 \;|:18 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 121 \quad \Leftrightarrow \quad x = 11$
   Die Kantenlänge eines Würfels beträgt also 11 cm.

   (d) Die Reihe aus 100 Würfeln besteht aus zwei Endstücken und 98 Mittelstücken.
   Die Oberfläche eines Endstückes beträgt $5 \cdot x^2\,\text{cm}^2$, die eines Mittelstückes beträgt $4 \cdot x^2\,\text{cm}^2$. Also folgt: $O_{100} = 2 \cdot 5 \cdot x^2\,\text{cm}^2 + 98 \cdot 4 \cdot x^2\,\text{cm}^2 = 402x^2\,\text{cm}^2$.

   (e) Subtrahiere zunächst die beiden Endstücke zu je $5 \cdot x^2\,\text{cm}^2$:
   $78x^2\,\text{cm}^2 - 10 \cdot x^2\,\text{cm}^2 = 68x^2\,\text{cm}^2$
   Auf jedes Mittelstück entfallen $4 \cdot x^2\,\text{cm}^2$.
   $68x^2\,\text{cm}^2 : 4 \cdot x^2\,\text{cm}^2 = 17$ Mittelstücke. Also besteht der Quader aus 19 Würfeln.

   (f) $10x^2\,\text{dm}^2 = 1000x^2\,\text{cm}^2$.
   Subtrahiere wieder die beiden Endstücke. Dann bleiben $990x^2\,\text{cm}^2$. Auf jedes Mittelstück entfallen wieder $4 \cdot x^2\,\text{cm}^2$. Weil aber $990x^2\,\text{cm}^2 : 4x^2\,\text{cm}^2$ keine ganze Zahl ergibt, kann es diesen Quader nicht geben.

2. (a) Der erste Wurf war eine Sechs: $(6 \cdot 2 + 5) \cdot 5 = 85$.
   Der zweite Wurf war eine Drei: $[(85 + 3) + 10] \cdot 10 = 980$.
   Der dritte Wurf war eine Zwei: $980 + 2 = 982 \quad 982 - 350 = 632$.
   Erster Wurf: 6. Zweiter Wurf: 3. dritter Wurf: 2.

   (b) Der erste Wurf war eine a: $(a \cdot 2 + 5) \cdot 5 = 10a + 25$.
   Der zweite Wurf war eine b: $[(10a + 25) + b + 10] \cdot 10 = 100a + 10b + 350$.
   Der dritte Wurf war eine c: $100a + 10b + 350 + c$.
   350 werden dann subtrahiert. Das Ergebnis lautet zum Schluss $100a + 10b + c$. Das ist aber gerade die Zahl abc in der Ziffernschreibweise. Diese gibt die gewürfelten Augenzahlen in der richtigen Reihenfolge wieder.

   (c) Weil die Augenzahlen auch bei einem Würfel aus acht Seitenflächen Ziffern sind, funktioniert Claudias Zahlenzauberei ebenso in diesem Fall.

Teil II.

Wahlpflichtfächergruppe II/III

6. Terme

1. Maßzahlen: $A_{ABCD} = 4 \cdot x + 4 \cdot 2 = 4 \cdot (x + 2)$

2. (a) Es muss $100b^2$ heißen.
   (b) richtig
   (c) Es muss $0{,}25x^2 - 6x + 36$ heißen.

3. $T(x) = -(x - 1,5)^2 - 6$ oder $T(x) = -0,87654321(x - 1,5)^2 - 6$

4. $2^{50} - 1 = (2^{25} + 1) \cdot (2^{25} - 1) = 33\,554\,433 \cdot 33\,554\,431 = (3 \cdot 11 \cdot 251 \cdot 4051) \cdot (1801 \cdot 601 \cdot 31)$

5. (a) $4x - 6y + 1{,}6z = 2 \cdot (2x - 3y + 0{,}8z)$
   (b) $x^2 \cdot x^5 + 3 : \frac{1}{2} = 6 + x^7$
   (c) $-(3x - 2x^2 + 7a) = -3x + 2x^2 - 7a$

6. (a) Die Belegungen $x = -2$ und $x = 0{,}5$ sind zwei Nullstellen des Nenners. Mehr Nullstellen gibt es nicht.
   (b) Z.B.: $T_2(x) = \frac{1}{(x+2)(x-0{,}5)}$ und $T_3(x) = \frac{1+x^4}{(x+2)(x-0{,}5)\cdot(-387)}$

7. Wir rechnen nur mit Maßzahlen.
   (a) Die Dreiecksseiten sind 3 cm, 6 cm und 4 cm lang.
   (b) Wegen $(8 - 2x) + (2 + x) + (3 + x) = 13$ ist der Umfang konstant 13 cm lang.
   (c) 1. Fall:
   $8 - 2x = 2 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$
   $a = 5\,\text{cm}$, $b = 2\,\text{cm}$ und $c = 5\,\text{cm}$
   2. Fall:
   $8 - 2x = 3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\overline{6}\,\text{cm}$
   $a = 3,\overline{6}\,\text{cm}$; $b = 4,\overline{6}\,\text{cm}$ und $c = 4,\overline{6}\,\text{cm}$.
   3. Fall:
   $2 + x = 3 + x$ ist nicht erfüllbar, weil stets $2 + x < 3 + x$ gilt.

(d) Für $x = 4$ wird $\overline{AC} = 0\,\text{cm}$; d.h. das Dreieck entartet zur Strecke.
Es muss $\overline{AC} > 0$ gelten; d.h. es muss $0 < x < 4$ (*)sein.
Gleichzeitig müssen alle Dreiecksungleichungen erfüllt sein:

1. Bedingung: $(8-2x)+(3+x) > 2+x \quad \Leftrightarrow \quad x < 4,5$; ist wegen (*) ohnehin erfüllt.
2. Bedingung: $(8-2x)+(2+x) > 3+x \quad \Leftrightarrow \quad x < 3,5$ (**)
3. Bedingung: $(2+x)+(3+x) > 8-2x \quad \Leftrightarrow \quad x > 0,75$

Mit (**) gibt es nur für $0,75 < x < 3,5$ solche Dreiecke.

8. (a) $u = 23\,\text{cm}$

   (b) $A = 25\,\text{cm}^2$

   (c) Das Rechteck wird breiter und niedriger.

   (d) Z.B. $x = 6$: Das Rechteck entartet zur Strecke.
   Oder $x = 7$, dann hätte die Strecke $[AB]$ eine negative Länge.
   Hinweis: Manche Schüler/innen sind der Ansicht, dass der Fall $x = 1$ eine richtige Antwort sei, denn ein Quadrat ist eben nach ihrer Ansicht kein Rechteck.

9. (a) –

   (b) Im Achteck sind sieben Quadrate mit der Seitenlänge x enthalten.
   Also gilt: $A(x) = 7 \cdot x^2\,\text{cm}^2$.

   (c) $x = 2,5$

   (d)
   - –
   - Die Seitenlänge des umbeschriebenen Quadrates beträgt in diesem Fall $3 \cdot 3,25\,\text{cm}$. Also ist sein Umfang $4 \cdot 3 \cdot 3,25\,\text{cm} = 39\,\text{cm}$ lang.

   (e) Es gilt: $\Delta PQB \cong \Delta CQR \cong \Delta SDR \cong \Delta PAS$ (s,w,s). Also ist $PQRS$ eine Raute.
   In rechtwinkligen Dreiecken ergeben die beiden spitzen Innenwinkel einen rechten. In jedem Eckpunkt des Quadrates $PQRS$ liegt ein Paar solcher Winkel. Also handelt es sich sogar um ein Quadrat.

10. (a) - -

    (b) - -

    (c) $a^2 = (a-1)^2 + (a-1) + a$

    (a) - -

    (b) - -

    (c) $a^2 = (a-1) \cdot (a+1) + 1$

11.

(a) –

(b) $A = ax + bx - x^2$

(c) $\begin{array}{ll} [\mathbf{X}] & [\ \ ] \\ [\mathbf{X}] & [\ \ ] \\ [\mathbf{X}] & [\mathbf{X}] \end{array}$

(d) $x \in]0\,\text{cm}; 8\,\text{cm}[_{\mathbb{Q}}$

12. (a) $(a - 0{,}5)^2 = a^2 - a + 0{,}25$

    (b) $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

    (c) $(4 - x)(x + 4) = 16 - x^2$

13. $x = -3$

14. Wegen $T(x) = 2x^2 + 18$ ergibt sich das Minimum 18 .

15. Der Term besitzt keinen Extremwert, sondern nur den konstanten Wert 6.

16. Daniel braucht 12 s.

17. (a)
    - Z.B.:
        - Zähler und Nenner sind Zehnerpotenzen
        - Der Exponent im Zähler ist um 1 größer als der des Nenners
        - Der Zähler ist größer als der Nenner
    - $\dfrac{10^{679}}{10^{678}} = 10^{679-678} = 10$

    (b) Addiert man im Bruch B_1 jeweils 1 zum Zähler und zum Nenner, dann erhält man den Bruch B_2.

    (c) $B_1 = \dfrac{10^{679}}{10^{678}} = \dfrac{10}{1} = \dfrac{10 \cdot (10^{678} + 1)}{1 \cdot (10^{678} + 1)} = \dfrac{10^{679} + 10}{10^{678} + 1} > \dfrac{10^{679} + 1}{10^{678} + 1} = B_2$

    Also hat der Bruch B_1 den größeren Wert.

18. (a) Sophia hat erkannt, dass im großen Rechteck die Länge x cm 4 Mal und die Breite 2 cm doppelt vorkommt. Daher gilt $u(x) = (4x + 4)$ cm.

    (b) Wolfgang verdoppelt zunächst einfach den Umfang eines Rechtecks. Dann subtrahiert er noch zwei Mal diejenige Breite eines kleinen Rechtecks, die im Inneren des großen Rechtecks verschwindet (siehe gestrichelte Linie):
    $u(x) = [2 \cdot (2 \cdot 2 + 2 \cdot x) - 4]$ cm $= [2 \cdot (4 + 2x) - 4]$ cm.

    (c) Wolfgang: $2 \cdot (4 + 2x) - 4] = 8 + 4x - 4 = 4x + 4$. Das ist der Term von Sophia.

    (d) $0,5\,\text{m} = 50\,\text{cm}$.
    Es muss dann z.B. mit Sophias Ergebnis $4x + 4 = 50$ gelten. $\Leftrightarrow x = 11,5$

19. (a) Für den Wert von 65^2 können nicht zwei verschiedene Ergebnisse herauskommen. Außerdem ist $65^2 = 4225$.

    (b)
    - $65^2 = (60 + 5)^2$
    - Heinz: $(60 + 5)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 5 + 5^2 = 3600 + 600 + 25 = 4225$
      Karin: $(70 - 5)^2 = 70^2 - 2 \cdot 70 \cdot 5 + 5^2 = 4900 - 700 + 25 = 4225$

    (c) Anja entscheidet sich für die Methode von Karin, denn 99 liegt näher an 100 (mit dieser Zahl lässt sich bequem rechnen).
    Also: $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$.

    (d) Z.B.:
    - Stelle die zweiziffrige Zahl als Summe oder Differenz zum nächst größeren oder kleineren Zehnervielfachen dar.
    - Quadriere das Zehnfache der ersten Ziffer.
    - Addiere (oder subtrahiere) das doppelte Produkt aus dem Zehnfachen der ersten Ziffer und der zweiten Ziffer.
    - Addiere das Quadrat der zweiten Ziffer. Dann bist du fertig.

20. (a) „Nein, weil dies nur von ein paar Beispielen gestützt wird. Die Gültigkeit in allen Fällen ist nicht sichergestellt.“

    (b) $(a - k) \cdot (a + k) = a^2 - k^2 < a^2$. Damit ist klar: Der zweite Produktwert ist **stets** kleiner als der erste.

21. Der Term T_1 hat die Form $(A - B)^2$, der Term T_2 vertauscht den Klammerinhalt von T_1 am Minuszeichen. T_2 hat also die Form $(B - A)^2$.
    Nun ist z.B. $(7 - 3)^2 = 4^2 = 16$ und $(3 - 7)^2 = (-4)^2 = 16$
    Wenn du also den Klammerinhalt der 2. binomischen Formel am Minuszeichen vertauchst, dann wechselt der Klammerinhalt (wenn er nicht gerade null ist) das Vorzeichen. Beim Quadrieren ist das Ergebnis dasselbe, wie du im Zahlenbeispiel $(7 - 3)^2 = (3 - 7)^2 = 16$ sehen kannst.

In den Klammern der eigentlichen Aufgabe steht zwar noch der Platzhalter x, aber x ist ja auch nur der Stellvertreter für jeweils eine Zahl. Somit gilt das, was im Zahlenbeispiel gezeigt worden ist, ebenso für die beiden Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$: Die beiden Terme sind äquivalent.

22. (a) Klar: Dein Rechteck $ABCD$ muss 9 cm breit und 5 cm hoch werden.

(b) **1. Möglichkeit:** $A_{ABCD} = 5 \cdot (x + y)\,\text{cm}^2$
2. Möglichkeit: $A_{ABCD} = (5 \cdot x + 5 \cdot y)\ \text{cm}^2$

(c) Beim Quadrat muss hier $5 = (x + y)$ gelten. Wenn x und $y \in \mathbb{N}$ gelten würde, dann folgt in diesem Fall:

x	1	2	3	4
y	4	3	2	1

(d) In diesem Fall muss gelten: $5 \cdot (x + y) = 65 \ |:5 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 13$.
Für x und $y \in \mathbb{N}$ ergibt sich:

x	1	2	3	4	...	12
y	12	11	10	9	...	1
$5 \cdot (x + y) =$	65	65	65	65	...	65

23. (a)
-

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$T(x)$	0	7	12	15	16	15	12	7	0

- Zunächst nehmen die Termwerte von links nach rechts zu bis zum Wert 16.
Dann nehmen die Termwerte bis zum Wert 0 wieder ab.
Der Termwert 16 ist der größte.
Die Termwerte scharen sich symmetrisch um diesen Maximalwert.

(b) Es ist $T(x) = (4 - x)(4 + x) = 16 + 4x - 4x - x^2 = 16 - x^2 = T^*(x)$.

(c)
- Es ist $x^2 = x \cdot x$; d.h. x wird für alle $x \in \mathbb{Q}$ mit sich selbst multipliziert.
Ist x positiv, dann ist $x \cdot x$ auch positiv.
Ist x negativ, dann ist $x \cdot x$ trotzdem positiv.
Ist $x = 0$, dann ist $x \cdot x = 0$.
Also kann x^2 nie negativ werden.
- Dann kann $-x^2$ nie positiv werden, weil das Minuszeichen nicht mitquadriert wird.
- Weil $-x^2$ höchstens den Wert 0 annehmen kann, nimmt $T^*(x) = 16 - x^2$ höchstens den Wert 16 an.

24. (a) Es gilt:
$T_1(x) = (x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$
$T_2(x) = (x - 4)(4 + x) = (x - 4)(x + 4) = x^2 - 16$

$T_3(x) = -(5+x)(5-x) = -(25-x^2) = -25+x^2 = x^2-25$
Der (heimliche) Faktor vor x^2 ist stets $1 > 0$, Also besitzen alle drei Terme ein Minimum.

(b) $T_1(x) = x^2 - 9 = (x-0)^2 - 9$
$T_2(x) = x^2 - 16 = (x-0)^2 - 16$
$T_1(x) = x^2 - 25 = (x-0)^2 - 25$
Also liefert stets $x = 0$ das jeweilige Minimum. Sabine hat nicht Recht.

25. (a) $1,5ab - (0,5 \cdot a \cdot 2)^2 - \frac{3}{2}ab + a^2 = 1,5ab - (1a)^2 - 1,5ab + a^2 = -a^2 + a^2 = 0$

(b) $(3c)^2 - 3c^2 - (-3c)^2 = 9c^2 - 3c^2 - 9c^2 = -3c^2$

26. (a) $T_1(-1) = -1 - 1 + 1 - 1 = -2$
$T_2(-1) = 1 + 2 + 1 = 4$
$T_3(-1) = 1 \cdot 0 - 1 = -1$
$T_4(-1) = 1 - 1 + 2 \cdot 1 + 2 = 4$
Die erste Behauptung stimmt, die zweite ist falsch

(b) $T_4(x) = x^2 - 1 - 2 \cdot (x-1) = x^2 - 1 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 = T_4(x)$. Die beiden Terme sind äquivalent.

(c)

x	0	1	2
$T_5(x) = (x+5)^2$	25	36	49
$T_6(x) = x^2 + 25$	25	26	29

Die letzten beiden Spalten der Tabelle zeigen keine Übereinstimmung; also sind die beiden Terme nicht äquivalent.

27. (a) Z.B.: $97 + 79 = 176$ oder $56 + 65 = 121$ oder ...

(b)
- Die Summe aus der ersten und der letzen Ziffer des Sumenwertes ergibt jeweils die mittlere Ziffer.
-
  - $(10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11 \cdot (a+b)$.
    Der Summenwert enthält also stets den Faktor 11.
  - Der zweite Teiler entsteht aus dem Summenwert der beiden Ziffern der zweistelligen Zahl. Begründung siehe Lösung oben.

(c) Es gilt $11(a+b) = 143 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 13$. Gesucht sind also Ziffernpaare $(a \mid b)$, so dass $a + b = 13$ wird. Das ergibt folgende Zahlenpaare:
$\{(9 \mid 4); (8 \mid 5); (7 \mid 6) (6 \mid 7); (5 \mid 8); (4 \mid 9)$.

28. (a)
    - $75 - 12 = 63$.
    - $T_{63} = 1; 3; 7; 9; 21; 63$.

    (b)
    - $59 - 14 = 45._{45} = 1; 3; 5; 9; 15; 45$.
    - $ggT(45; 63) = 9$

    (c)
    -
    - Der Wert der Differenz aus der Zahl und ihrer Quersume ist wieder durch 9 teilbar.
    - Zweistellige Zahl $10a + b$; $q = a + b$.
      Differenzwert: $10a + b - (a + b) = 9a$; also ist der Differenzwert stets durch 9 teilbar.

    (d)
    -
    - Dreistellige Zahl: $100a + 10b + c$; $q = a + b + c$.
      Differenzwert: $100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9 \cdot (11a + b)$; also ist auch dieser Differenzwert stets durch 9 teilbar.

    (e) Ja, denn $10^n \cdot a - a$ liefert ausschließlich Neuner als Ziffern.

29. (a)
    - $n = 83 - 69 - 1 = 13$.
    - $\{70; 71; 72; 73; 74; 75; 76; 77; 78; 79; 80; 81; 82\}$.
      Die Lösungsmenge enthält 13 Zahlen.

    (b) $n = 803\,102 - 513\,799 - 1 = 289\,302$.

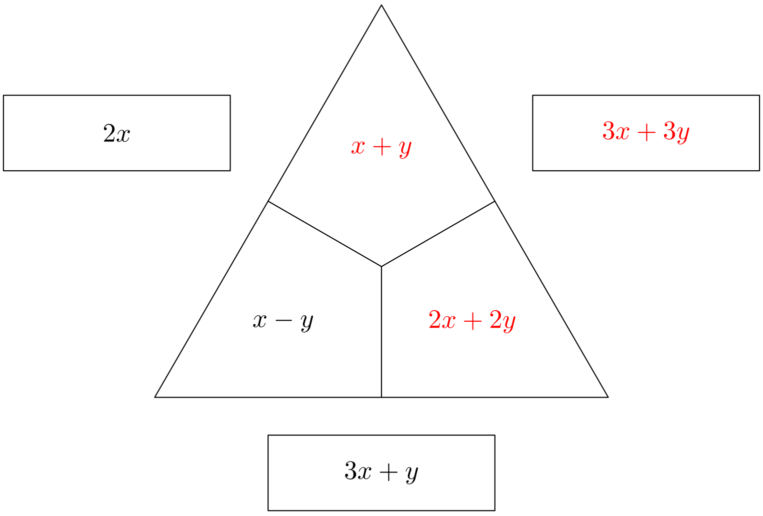
    (c)
    - Für x und y gilt dann $y = x + 1$.
      $n = (x + 1) - x - 1 = 0$. In der Tat gibt es keine natürlichen Zahlen zwischen zwei Zahlennachbarn. Die Formel (*) gilt auch in diesem Fall.
    - $n_1 = 3 - (-11) - 1 = 3 + 11 - 1 = 13$.
      Wenn du alle in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst, bestätigt sich die Formel.
      $n_2 = -23 - (-39) - 1 = -23 + 39 - 1 = 15$.
      Wenn du auch in diesem Fall alle in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst, bestätigt sich die Formel erneut.

30. (a) Z.B. 470: Die neue (zweistellige) natürliche Zahl heißt dann 47.
    $470 - 47 = 423$. $423 : 47 = 9$: Stimmt.

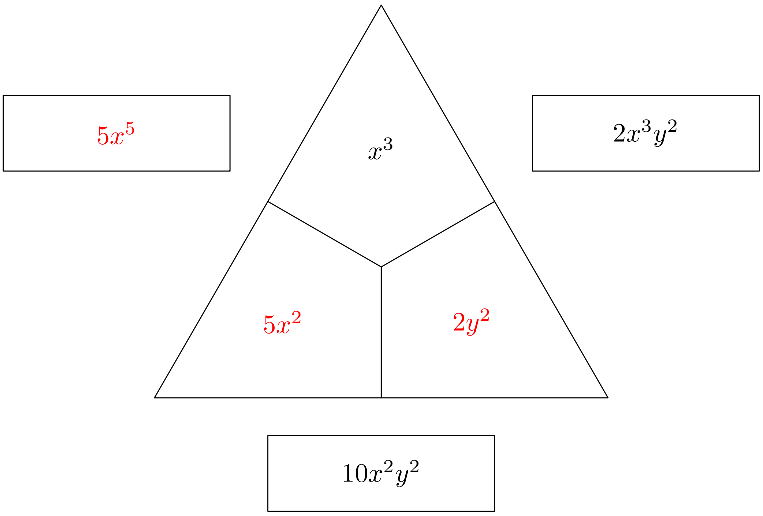
    (b) Z.B. 5730: Die neue (dreistellige) natürliche Zahl heißt dann 573.
    $5730 - 573 = 5157$. $5157 : 573 = 9$: Stimmt auch.

    (c) Die neue Zahl ist x. Wenn deren zugehörige ursprüngliche Zahl durch 10 teilbar sein soll muss diese auf 0 enden. Dann ist diese aber zehnmal so groß wie die neue Zahl. Also kannst du für die alte Zahl $10x$ schreiben. Somit ergibt sich:
    $10x - x = 9x$. Der Wert der Differnz ist also $9x$ und damit sowohl durch 9 als auch durch x, also die neue Zahl, teilbar.

31.



32.



33. In jedem all gilt: $n = 9 \cdot x$ und $QS = 9 \cdot y$.

Zu Frage (1):
$n + QS = 9x + 9y = 9 \cdot (x + y)$. Die Antwort heißt „Ja“.

Zu Frage (2):
$n \cdot QS = 9x \cdot 9y = 81 \cdot (xy) = 27 \cdot 3 \cdot (x \cdot y)$. Die Antwort heißt wieder „Ja“.

Zu Frage (3):

$\frac{n}{QS} = \frac{9x}{9y} = \frac{x}{y}$. Nun müsste y ein Teiler von x sein. Aber ist das immer so?

1. Beispiel:
$n = 648 \quad \Rightarrow \quad QS = 18 \quad 648 : 18 = 36$. Dieses Beispiel liefert eine Bestätigung.

2. Beispiel:
$n = 927 \quad \Rightarrow \quad QS = 18 \quad 917 : 18 = 50$ Rest 17. Dieses Beispiel verneint die Frage (3).

Also ist der Wert des Quotienten aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme nicht immer ganz.

34. (a) Klar.

(b)

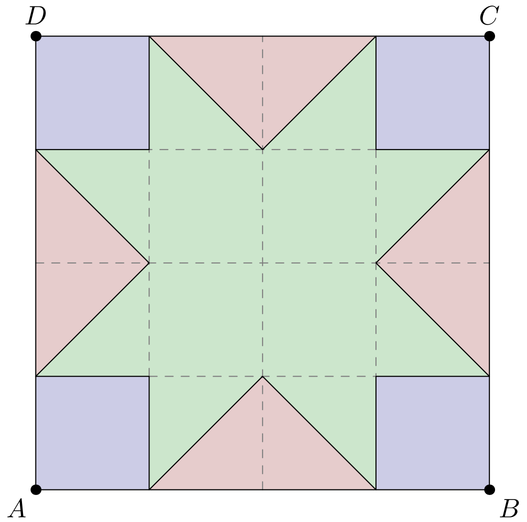
$$\begin{aligned} A(x) &= [6^2 - 4 \cdot x^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (6-2x) \cdot (3-x)]\,\mathrm{cm}^2 \\ &= [36 - 4x^2 - 2 \cdot (18 - 6x - 6x + 2x^2)]\,\mathrm{cm}^2 \\ &= [36 - 4x^2 - 36 + 12x + 12x - 4x^2]\,\mathrm{cm}^2 \\ A(x) &= (-8x^2 + 24x)\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

(c) $A(0) = 0\,\mathrm{cm}^2$. Das zugehörige Kreuz entartet zu den beiden Diagonalen des Quadrates $ABCD$.
$A(3) = 0\,\mathrm{cm}^2$. Es entsteht ein Kreuz das aus den Seitenmittelpunkten des Quadrates $ABCD$ erzeugt worden ist.

(d)

- $$\begin{aligned} A(x) &= (-8x^2 + 24x)\,\mathrm{cm}^2 \\ &= -8 \cdot (x^2 - 3x + 1,5^2 - 2,25)\,\mathrm{cm}^2 \\ &= -8 \cdot [(x-1,5)^2 - 2,25)\,\mathrm{cm}^2 \\ A(x) &= [(-8(x-1,5)^2 + 18]\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

  $x = 1,5$ liefert $A_{\max} = 18\,\mathrm{cm}^2$.
-



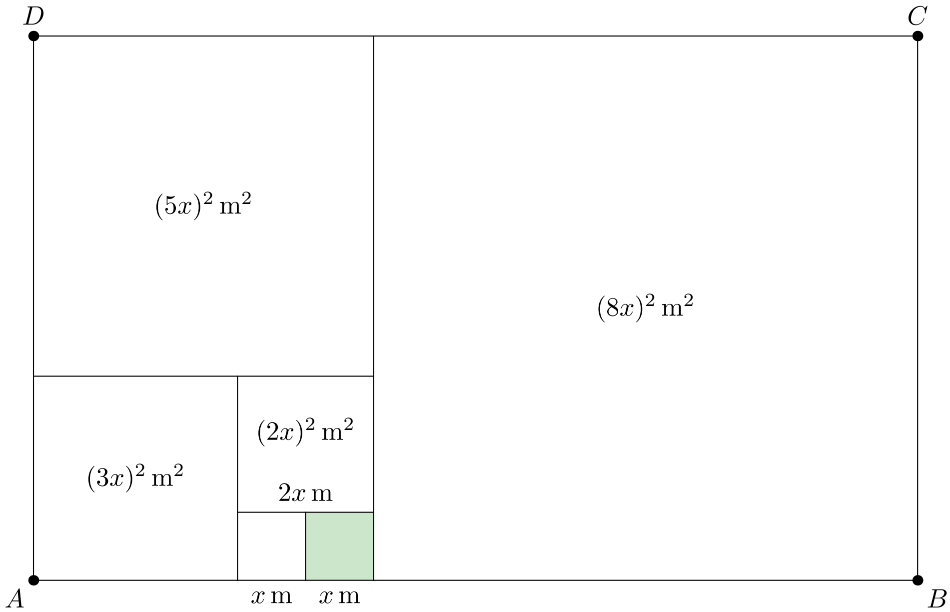
Zeichne das Quadrat $ABCD$ erneut mit dem größten Kreuz.

- 1. Möglichkeit: mit Hilfe der Lösung oben

$$\frac{A_{\text{Kreuz}}}{A_{\text{ABCD}}} = \frac{18\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = 0,5 = 50\%\,.$$

2. Möglichkeit: Die gestrichelten Hilfslinien zerlegen das Quadrat $ABCD$ in 16 kongruente kleine Quadrate.
Im Zentrum des Kreuzes befinden sich 4 gleich große Quadrate. Der Rest des Kreuzes setzt sich aus 8 kongruenten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken zusammen, wobei jedes halb so groß wie ein Quadrat im Zenrtrum ist. Diese 8 Dreiecke ergeben wiederum 4 Quadrate. Also nimmt das Kreuz insgesamt den gleichen Flächeninhalt ein, wie die 8 Quadrate.
Das sind aber zusammen 50% der Fläche des Quadrates $ABCD$.

35.



$2{,}34\,\mathrm{ha} = 23\,400\,\mathrm{m}^2$.
Die beiden kleinsten Parzellen haben eine Breite von $(x + x)\,\mathrm{m} = 2x\,\mathrm{m}$.
Diese Seitenlänge geht dann auf das nächst größere Quadrat über.
Dessen Flächeninhalt beträgt dann $(2x)^2\,\mathrm{m}^2$.
Auf diese Weise ermittelst du die Flächeninhalte der nächsten Quadrate (siehe Lösungsskizze).
Am Ende ergibt sich für die Maßzahlen:

$$\begin{aligned}
x^2 + x^2 + (2x)^2 + (3x)^2 + (5x)^2 + (8x)^2 &= 23\,400 \\
2x^2 + 4x^2 + 9x^2 + 25x^2 + 64x^2 &= 23\,400 \\
104x^2 &= 23\,400 \qquad |: 104 \\
x^2 &= 225 \\
x &= 15
\end{aligned}$$

Der Umfang eines dieser kleinsten Quadrate beträgt $4 \cdot 15\,\mathrm{m} = 60\,\mathrm{m}$. Das ist dann die gesuchte Zaunlänge.

36. (a) Ja, weil $3 + 2x = 2x + 3$ gilt (Kommutativgesetz der Addition und Punkt-vor-Strich-Regel)
   (b) Ja, weil $(3 + x) + x = 3 + (x + x) = 3 + 2 \cdot x$ gilt; dann erhältst du die Gleichung (a) in der Angabe.
   (c) Ja, weil $x + (3 + x) = x + 3 + x = x + x + 3 = 2x + 3$ gilt. Du erhältst dann die Gleichung oben in der Angabe.
   (d) Ja. Begründung: Mit der Umformung $3 + x = -x + 11 \;|\; +x$ erhältst du die Gleichung (a) in der Angabe.
   (e) Nein, weil nach der Regel „Punkt vor Strich“ $2 + 3 \cdot x \neq 2 + 3 \cdot x$ gilt. (Mache es Dir an Beispielen mit Zahlen deutlich.)

(f) Nein, weil $x^2 = x \cdot x$ ist und $2 \cdot x = x + x$ gilt. (Mache es Dir an Beispielen mit Zahlen deutlich.)

(g) $2000x + 3000 = 11000 \; |: 1000$ ergibt die Gleichung oben in der Angabe.

7. Lineare Gleichungen und Ungleichungen

1. (a) Einsetzen (b) z.B.: $13 - 2x = x + 7$

2. Es ergibt sich $4 - 0 \cdot x = 33$. Das ist für keine Belegung von x erfüllbar.

3. (a) Entweder $x = -1$ einsetzen oder die Gleichung nach x auflösen.
   (b) z.B. $G = \mathbb{N}$ wählen oder $7 - x = 3x + 12$ usw.

4. Es ergibt sich $x^2 = -2$. Es gibt keine Zahl, die mit sich selbst multipliziert einen negativen Produktwert ergibt.

5.

   Wir rechnen nur mit Maßzahlen.

   (a) Die Dreiecksseiten sind $3\,\text{cm}, 6\,\text{cm}$ und $4\,\text{cm}$ lang.

   (b) Wegen $(8 - 2x) + (2 + x) + (3 + x) = 13$ ist der Umfang konstant $13\,\text{cm}$ lang.

   (c) 1. Fall:
   $8 - 2x = 2 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$
   $a = 5\,\text{cm}$, $b = 2\,\text{cm}$ und $c = 5\,\text{cm}$
   2. Fall:
   $8 - 2x = 3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\overline{6}\,\text{cm}$
   $a = 3,\overline{6}\,\text{cm}$; $b = 4,\overline{6}\,\text{cm}$ und $c = 4,\overline{6}\,\text{cm}$.
   3. Fall:
   $2 + x = 3 + x$ ist nicht erfüllbar, weil stets $2 + x < 3 + x$ gilt.

   (d) Für $x = 4$ wird $\overline{AC} = 0\,\text{cm}$; d.h. das Dreieck entartet zur Strecke.
   Es muss $\overline{AC} > 0$ gelten; d.h. es muss $0 < x < 4$ (*)sein.
   Gleichzeitig müssen alle Dreiecksungleichungen erfüllt sein:

   1. Bedingung: $(8-2x)+(3+x) > 2+x \quad \Leftrightarrow \quad x < 4,5$; ist wegen (*) ohnehin erfüllt.
   2. Bedingung: $(8 - 2x) + (2 + x) > 3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x < 3,5$ (**)
   3. Bedingung: $(2 + x) + (3 + x) > 8 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad x > 0,75$
   Mit (**) gibt es nur für $0,75 < x < 3,5$ solche Dreiecke.

6.

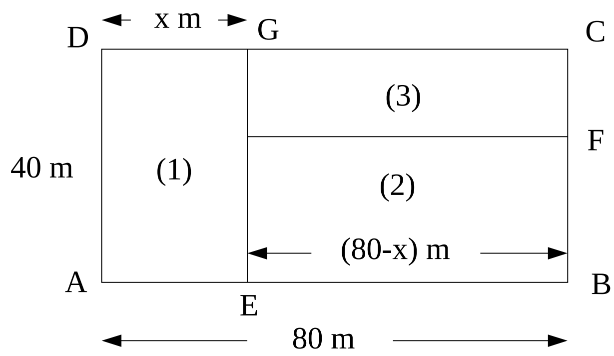
   (a) –

   (b) Es gilt: $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{HG} = 4x\,\text{cm}$ und $\overline{AB} = 5x\,\text{cm}$.
   Dann folgt für den Umfang u: $u(x) = 18x\,\text{cm}$.
   $18x = 108 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad \text{und} \quad 2x = 12 \quad \text{sowie} \quad 3x = 18.$
   Damit folgt für den Flächeninhalt A eines dieser Rechtecke im Inneren: $A = 12\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} = 216\,\text{cm}^2$

7. Die kürzere Seite liegt zwischen $14\,\text{cm}$ und $14,5\,\text{cm}$.

8. Es sind 20 Würfel und 10 Pyramiden.

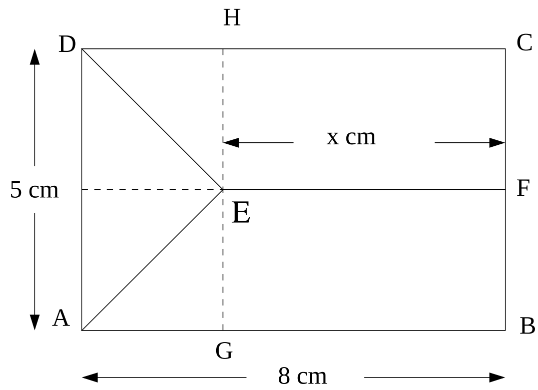
9.



Es muss einerseits $\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{DG} = x\,\text{m}$ gelten.
Wegen $\overline{BC} = 40\,\text{m}$ folgt: $x = 20$. *)
Andererseits muss gleichzeitig $\overline{EB} = \overline{AD}$ gelten:
$\Rightarrow \quad 80 - x = x \qquad \Leftrightarrow \quad x = 40$ **)
Die Ergebnisse *) und **) stehen im Widerspruch. Also gibt es keine Belegung von x, die drei flächengleiche Rechtecke erzeugt.

10. (a) –

   (b)



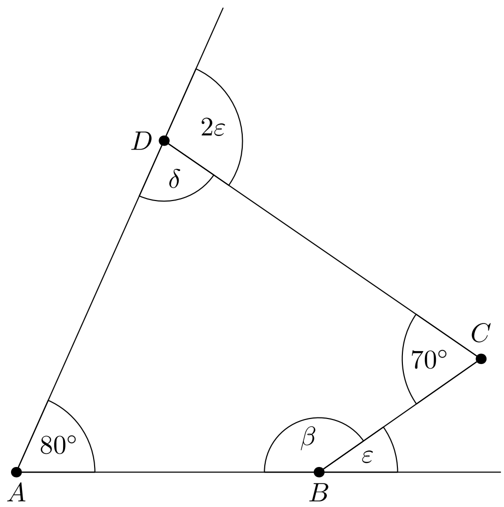
$A(ABFE) = [A(ABCD) - A(AED)] : 2 = [40\,\mathrm{cm}^2 - 0,5 \cdot 5 \cdot (8 - x)\,\mathrm{cm}^2] : 2$
$A_T = 20\,\mathrm{cm}^2 - (10 - 1,25x)\,\mathrm{cm}^2 = (1,25x + 10)\,\mathrm{cm}^2$

(c) Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ muss dreimal so groß sein wie der Flächeninhalt des Trapezes $ABFE$:
$3 \cdot (1,25x + 10) = 40 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{3} \approx 2,67$

(d) $A(AED) = A(ABCD) - 2 \cdot A(ABFE) = 40\,\mathrm{cm}^2 - 2 \cdot (1,25x + 10)\,\mathrm{cm}^2$
$A_D(x) = (20 - 2,5x)\,\mathrm{cm}^2$

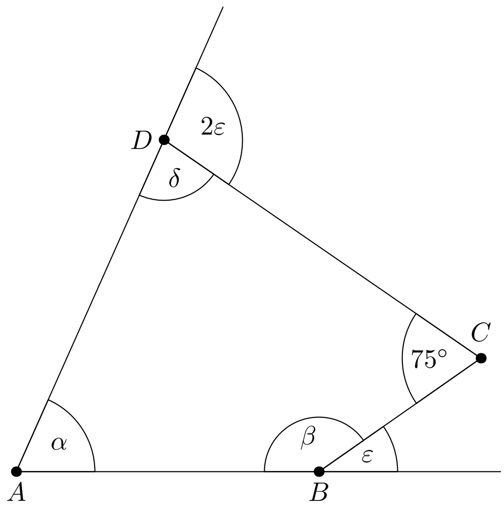
(e) Es muss gelten $A_T = A_D$: $\quad 1,25x + 10 = 20 - 2,5x \quad \Rightarrow \quad x \approx 2,67$

11.



Im Viereck $ABCD$ gilt: $80° + \beta + 70° + \delta = 360°$. (*)
β ist der Nebenwinkel von ε : $\beta = 180° - \varepsilon$. (1)
δ ist der Nebenwinkel von 2ε : $\delta = 180° - 2\varepsilon$. (2)
Wir ersetzen in der Gleichung (*) β durch $180° - \varepsilon$ und δ durch $180° - 2\varepsilon$.
Dann ergibt sich: $80° + 180° - \varepsilon + 70° + 180° - 2\varepsilon = 360°$.
$\Leftrightarrow \quad -3\varepsilon = -150° \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 50°$.

12.



(a) Aus $\varepsilon = 48°$ folgt: $\beta = 180° - 48° = 132°$ und $\delta = 180° - 96° = 84°$.
In jedem Viereck beträgt die Innenwinkelsumme 360°:
$\alpha + 132° + 75° + 84° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 69°$.

(b) Im Viereck $ABCD$ gilt: $\alpha + \beta + 75° + \delta = 360°$. (*)
β ist der Nebenwinkel von $\varepsilon: \beta = 180° - \varepsilon$. (1)
δ ist der Nebenwinkel von $2\varepsilon: \delta = 180° - 2\varepsilon$. (2)
Wir ersetzen in der Gleichung (*) β durch $180° - \varepsilon$ und δ durch $180° - 2\varepsilon$.
Dann ergibt sich: $\alpha + 180° - \varepsilon + 75° + 180° - 2\varepsilon = 360°$.
$\Leftrightarrow \quad \alpha - 3\varepsilon = -75° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 3\varepsilon - 75°$.
Damit das Viereck $ABCD$ existiert, muss $\alpha > 0$ gelten:
$\Leftrightarrow \quad 3\varepsilon - 75° > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon > 25°$.
Wenn du andererseits am Punkt D das Winkelmaß 2ε betrachtest, dann muss $2\varepsilon < 180°$ und damit $\varepsilon < 90°$ gelten.
Insgesamt muss also $25° < \varepsilon < 90°$ gelten.

13. (a) Das Dreieck ist gleichschenklig, denn zwei Seiten haben die gleiche Länge a.

(b) In jedem Dreieck müssen zwei Seiten länger als die dritte Seite sein:
Es müsste z.B. $4{,}8\,\text{cm} + 4{,}8\,\text{cm} > 10\,\text{cm}$ werden. Diese Bedingung ist nicht erfüllt, also gibt es kein solches Dreieck; Fritz hat Recht.

(c) Zum Beispiel:

a	$4{,}5\,\text{cm}$	$3\,\text{cm}$
c	$3{,}7\,\text{cm}$	$3\,\text{cm}$
u	$2 \cdot 4{,}5\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$	$2 \cdot 3\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$

Es gibt beliebig viele Lösungen.

14. (a) $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}}$.

(b) Wenn du die Ungleichung in Aufgabe (a) auf beiden Seiten mit 3 multiplizerst, dann erhältst du die Ungleichung (b). Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

(c) Wenn du Ungleichung (a) auf beiden Seiten mit 1387 multiplizerst, dann erhältst du die Ungleichung (c). Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

(d) Weil $x^2 + 1$ stets positiv ist, muss $2x - 4$ auch positiv (also > 0) bleiben. An der Lösungsmenge ändert sich nichts.

(e) Weil $x^2 + 1$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ positiv ist, folgt aus den gleichen Gründen wie oben $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}}$.

(f) Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob die Lösungsmenge zu den vorigen unverändert bleibt. Doch du musst hier vorsichtiger sein: Der Faktor $(x - 11)^2$ ist nicht für alle Belegungen von x positiv, denn $x = 11$ ist eine Nullstelle dieses Terms; d.h. für $x = 11$ ergibt sich $(11 - 11)^2 \cdot (2 \cdot 11 - 4) = 0$ und nicht > 0 .Das bedeutet: $x = 11$ gehört nicht zur Lösungsmenge.
Damit gilt hier $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}} \setminus \{11\}$.

15. Preis pro T-Shirt im September 2011: x EURO .
Preis pro T-Shirt im Oktober 2011: $(x + 1)$ EURO .
Wir rechnen im Folgenden nur mit Maßzahlen.
$76 \cdot x = 72 \cdot (x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 72 \quad \Leftrightarrow \quad x = 18\,.$
Im September 2011 kostete eines dieser T-Shirts 18 EURO.

16. **1. Möglichkeit:**
Um von der ersten zur zweiten Zeile zu kommen, hat Carsten offenbar auf beiden Seiten der Gleichung im Buch die Zahl 16 addiert. Dadurch fällt das Kästchen in der zweiten Zeile weg. Also stand die unleserliche Zahl 16 anstelle des Kästchens da.
2. Möglichkeit:
Der Lehrer hat $x = 7$ als richtige Lösung bestätigt. Setze diese Lösung in die erste Zeile ein:
$2 \cdot 7 - \square = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 14 - \square = -2 \mid -14 \quad \Leftrightarrow \quad -\square = -16 \mid \cdot (-1)$
$\Leftrightarrow \quad \square = 16\,.$

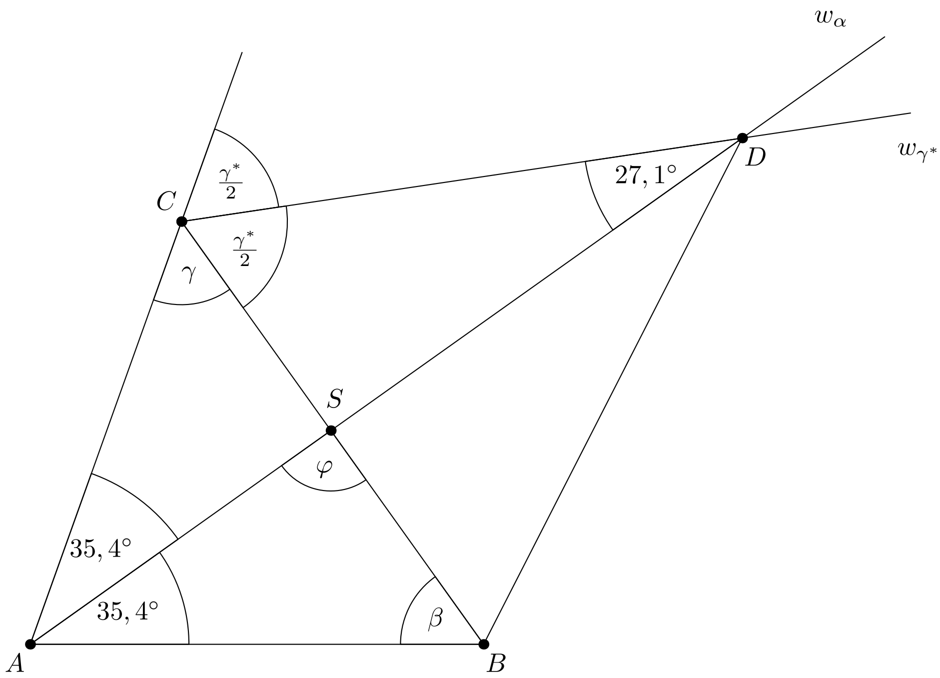
17. **1. Möglichkeit:**
Um von der ersten zur zweiten Zeile zu kommen, hat Carsten offenbar auf beiden Seiten der Gleichung im Buch die Zahl 16 addiert. Dadurch fällt das Kästchen in der zweiten Zeile weg. Also stand die unleserliche Zahl 16 anstelle des Kästchens da.
2. Möglichkeit:
Der Lehrer hat $x = 7$ als richtige Lösung bestätigt. Setze diese Lösung in die erste Zeile ein:
$2 \cdot 7 - \square = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 14 - \square = -2 \mid -14 \quad \Leftrightarrow \quad -\square = -16 \mid \cdot (-1)$
$\Leftrightarrow \quad \square = 16\,.$

18. (a) Es gilt: $\overline{RQ} = (8 - x)\,\mathrm{m}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.
Dann folgt: $x \cdot (8 - x)\,\mathrm{m}^2 = 5 \cdot x\,\mathrm{m}^2 \;\mid : \; (x\,\mathrm{m}^2)$ mit $x > 0$
$\Leftrightarrow \quad 8 - x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3\,.$

(b) $A_{\text{Kartoffelfeld}} = \overline{RQ} \cdot \overline{RS} = 5\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = 10\,\text{m}^2\,.$

$$\frac{A_{\text{Kartoffelfeld}}}{A_{ABCD}} = \frac{10\,\text{m}^2}{40\,\text{m}^2} = 0,25 = 25\%\,.$$

19. (a)



Im Dreieck ADC gilt: $35,4° + 27,1° + \dfrac{\gamma^*}{2} + \gamma = 180° \quad (1)\,.$
Weiter gilt: $\gamma^* = 180° - \gamma\,.$
In (1): $35,4° + 27,1° + (180° - \gamma) : 2 + \gamma = 180°\,.$
$\Leftrightarrow \quad 62,5° + 90° - 0,5\gamma + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 62,5° + 0,5\gamma = 90°$
$\Leftrightarrow \quad \gamma = 55°\,.$
Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck ABC ergibt sich:
$70,8° + 55° + \beta = 180° \Rightarrow \quad \beta = 54,2°\,.$

Eine andere Möglichkeit:

$\frac{\gamma^*}{2}$ ist ein Außenwinkel am Dreieck ADC. Jeder Außenwinkel an einem Dreieck ist genau so groß wie die Summe der Maße der beiden nicht anliegenden Innenwinkel. Das bedeutet hier:

$$\frac{\gamma^*}{2} = 35,4° + 27,1° = 62,5° \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^* = 125°\,.$$

$\gamma = 180° - 125° = 55° \quad \ldots \quad \beta = 54,2°\,.$

(b) In jedem (achsensymmetrischen) Drachenviereck müssen die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck ABS gilt: $\varphi = 180° - 35,4° - 54,2° = 90,4° \neq 90°$.
Das Viereck $ABDC$ ist also kein (achsensymmetrisches) Drachenviereck.

8. Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche

1. $\delta = 90°$ $\alpha = 45°$ $\varepsilon = 126{,}86°$ $\varphi = 63{,}43°$ $\psi = 81{,}86°$

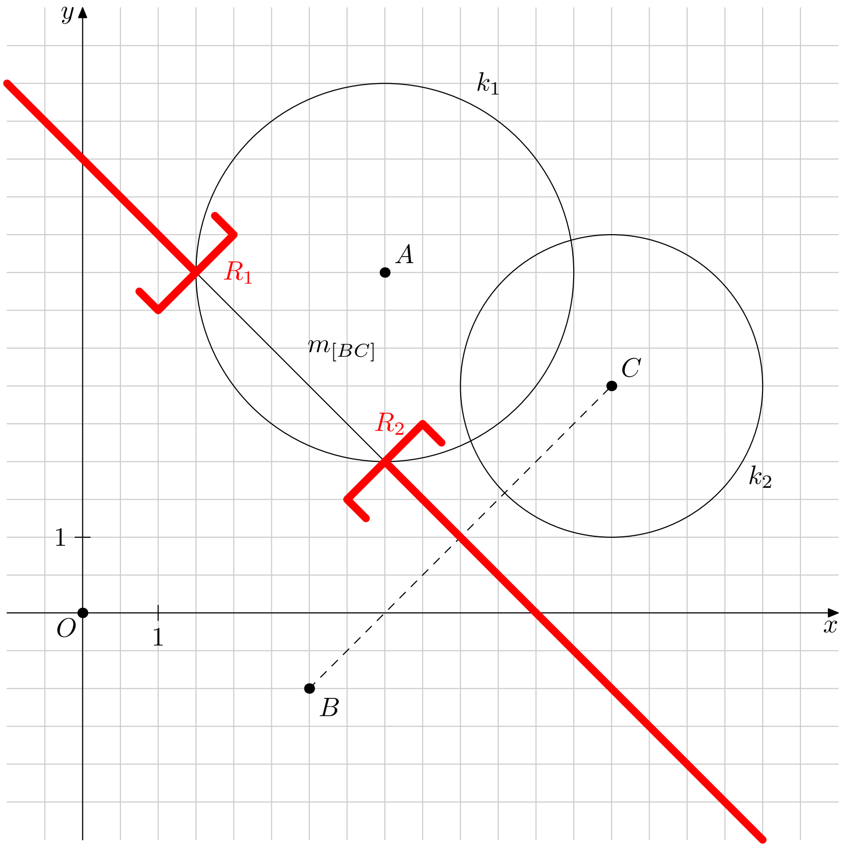
2. (a) –
   (b) –
   (c) Fritz hat Recht, denn der Kreis um A mit Radius 1 cm meidet die Kreislinie k.

3. - -

4. - -

5. - -

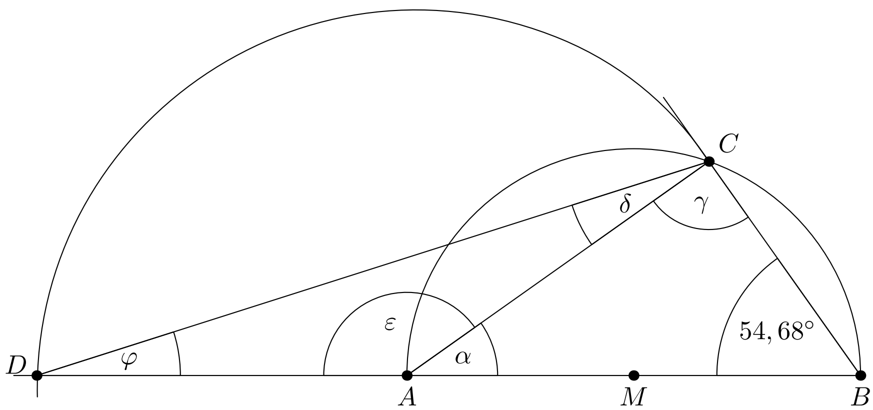
6. (a)



Kommentar:
Alle Punkte P, die gleichweit von B und C entfernt sind, liegen auf der **Mittelsenkrechten** $m_{[BC]}$.
Gleichzeitig dürfen die Punkte P **nicht innerhalb des Kreises** k_1 um den Punkt A mit dem Radius $2,5\,\text{cm}$ liegen. Damit ergibt sich die farbig dargestellte Lösungsmenge. Die Randpunkte R_1 und R_2 der beiden Halbgeraden gehören zur Lösungsmenge dazu, weil beide sowohl auf der Mittelsenkrechten als auch nicht im Inneren von k_1 liegen.

(b) Alle Punkte, die vom Punkt C höchstens $2\,\text{cm}$ entfernt sind, dürfen sich **nicht außerhalb** der Kreislinie k_2 aufhalten. Weil aber die Kreislinie k_2 die Mittelsenkrechte $m_{[AB]}$ und damit auch die farbig gekennzeichnete Lösungsmenge meidet, gibt es die fraglichen Punkte nicht.

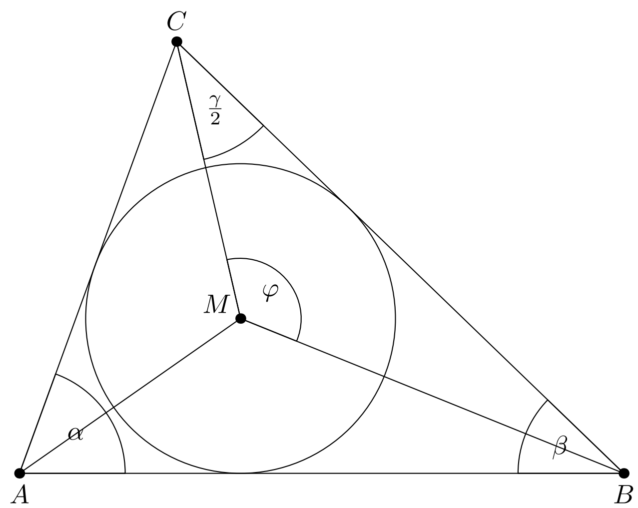
7. (a)



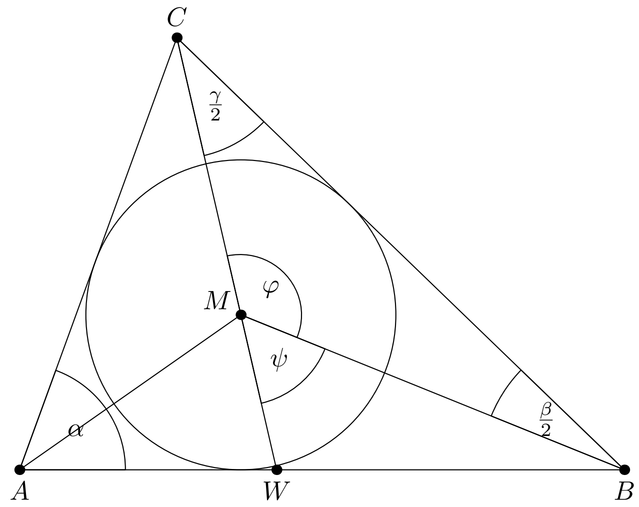
- Zeichne den Halbkreis mit dem Durchmesser $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.
- Trage im Punkt B den Winkel mit dem Maß $54,68° \approx 55°$ an.
- Der freie Schenkel des $55°$-Winkels schneidet den Halbkreis im Punkt C.
- Zeichne den Kreisbogen mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{AC}$ vom Punkt C aus so weit, bis er die Halbgerade $[BA$ schneidet. Der Schnittpunkt ist der Punkt D.

(b) Der Kreisbogen über dem Durchmesser $[AB]$ ist der THALES-Kreis.
$\Rightarrow \quad \gamma = 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° - 54,68° = 35,32°$.
ε ist der Nebenwinkel von α: $\quad \varepsilon = 180° - 35,32° = 144,68°$.
Das Dreieck DAC ist gleichschenklig: $\overline{AD} = \overline{AC}$.
$\Rightarrow \quad \delta = \varphi = (180° - 144,68°) : 2 = 17,66°$.

8. (a)



(b) $\gamma = 180° - 70° - 44° = 66°$.
Die drei Winkelhabierenden des Dreiecks ABC schneiden sich im Inkreismittelpunkt M.
Also folgt: $\varphi = 180° - 0,5 \cdot 44° - 0.5 \cdot 66° = 125°$.

(c)
- $\gamma = 180° - 70° - 60° = 50°$.
  $\varphi = 180° - 0,5 \cdot 60° - 0.5 \cdot 50° = 125°$.
  Das Winkelmaß φ hängt gar nicht vom Winkelmaß β ab.
- 

  Der Winkel mit dem Maß ψ ist ein Außenwinkel am Dreieck MBC: $\Rightarrow \quad \psi = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

  Gleichzeitig gilt $\varphi = 180° - \psi$.

  Wegen $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ folgt $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

  Also ergibt sich: $\varphi = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

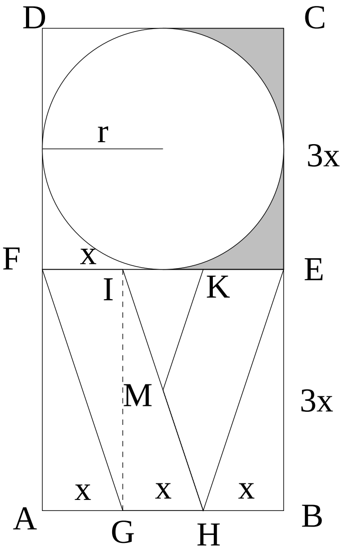
  Und damit $\varphi = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

(d) $90° + \frac{\alpha}{2} = 135,68° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 91,36°$.

9. Dreiecke und Vierecke

1. (a) Es ist ein gleichschenkliges Dreieck.
   (b) Es ist ein gleichseitiges Dreieck.

2. (a) –
   (b)



Es gilt: $\overline{AB} = 3x\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6x\,\text{cm}$. $\Rightarrow \quad A(x) = 18x^2\,\text{cm}^2$

   (c) $18x^2\,\text{cm}^2 = 112,5\,\text{cm}^2$ für $x \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow \quad x = 2,5$

   (d) Durch die Strecke $[IG]$ wird das Parallelogramm $GHIF$ in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt, die jeweils zu dem rechtwinkligen Dreieck HBE kongruent sind.
   $\Rightarrow \quad A(GHIF) = 2 \cdot A(HBE)$

   (e) Für den Kreisradius gilt: $r = 1,5x$
   $A(\text{dunkel}) = [(3x)^2 - (1,5x)^2 \cdot \pi] : 2\,\text{cm}^2 = 0,5 \cdot (9 - 2,25\pi)x^2\,\text{cm}^2$
   Die Dreiecke HBE und AGF sind kongruent:
   $A(HBE) = 0,5 \cdot x \cdot 3x\,\text{cm}^2 = 1,5x^2\,\text{cm}^2$

$$\frac{A(\text{dunkel})}{A(HBE)} = \frac{0,5 \cdot (9 - 2,25\pi)x^2\,\text{cm}^2}{1,5x^2\,\text{cm}^2} \approx \frac{1,93}{3} < 1$$

Die dunkel getönte Fläche ist also kleiner als die Fläche des Dreiecks HBE.

3. Der Flächeninhalt des Vierecks $APQC$ beträgt $7,5\,\mathrm{cm}^2$.

4. 1. Fall: Beide Basiswinkel haben das Maß 70°. Dann hat der dritte Winkel das Maß 40°.
   2. Fall: Der Winkel an der Spitze hat das Maß 70°. Dann hat jeder Basiswinkel das Maß 55°.

5. - -

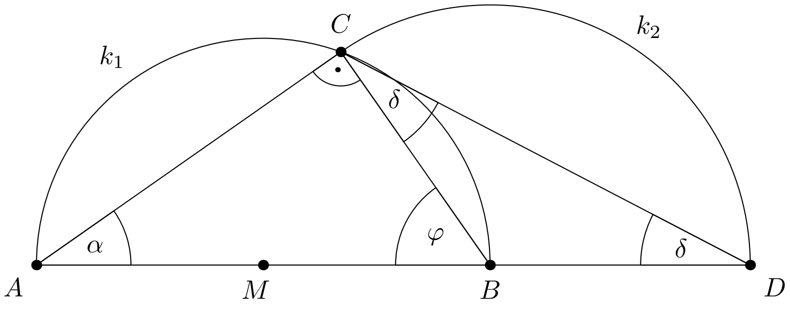
6. (b) z.B. $a = 7\,\mathrm{cm}$ statt $\alpha = 35°$

7. (a) Das Dreieck ist gleichseitig.
   (b) Das Dreieck ist gleichschenklig: $\beta = \gamma = 66{,}5°$

8. (c) z.B. $c = 10{,}5\,\mathrm{cm}$ oder $\alpha = 90{,}01°$

9. (b) z.B. statt $a = 8\,\mathrm{cm}$: $\beta = 90°$
   oder $c = 9\,\mathrm{cm}$ statt $c = 6\,\mathrm{cm}$.

10. (a)
   - Zeichne den Halbkreis k_1 über der Strecke $[AB]$, die 6 cm lang ist.
     Trage im Punkt A den Winkel $\alpha = 35°$ an.
     Der freie Schenkel von α schneidet k_1 im Punkt C.
     Der Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ schneidet die Halbgerade $[AB$ im Punkt D. Der Rest ist Formsache.



   - Der Punkt C liegt auf dem THALES-Kreis über $[AB]$.
     $\Rightarrow \quad \sphericalangle ACB = 90° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 90° - 35° = 55°.$
     Weiter gilt: $\overline{BD} = \overline{BC} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle BCD = \delta$
     φ ist Außenwinkel am Dreieck $BDC \quad \Rightarrow \quad 55° = 2 \cdot \delta \quad \Rightarrow \quad \delta = 27,5°$

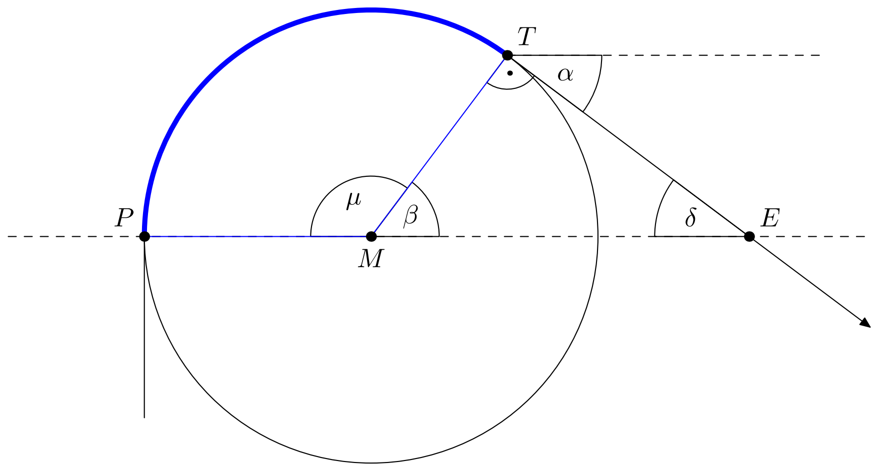
(b) Nun kannst du rückwärts schließen:
Wenn $\delta = 40°$ ist, dann muss $\varphi = 2 \cdot 40° = 80°$ sein.
$\Rightarrow \quad \alpha = 90° - 80° = 10°$

(c) Wäre $\delta = 59°$, dann wäre nach dem Satz vom Außenwinkel
$\varphi = 59° + 59° = 118°$. Weil das Dreieck ABC aber rechtwinklig ist, wäre in ihm die Innenwinkelsumme von 180° überschritten.

(d) Der Winkel mit dem Maß φ muss stets ein spitzer Winkel bleiben, denn sonst bliebe das Dreieck ABC nicht rechtwinklig.
Also: $\varphi = 2 \cdot \delta < 90° \quad \Rightarrow \quad \delta < 45°$
Wenn $\delta = 0°$ wäre, dann würde $\varphi = 0°$ folgen. Dann läge der Punkt C auf dem Punkt A, und das Dreieck ABC wäre zusammen mit der ganzen Figur zur Strecke entartet.
Also gibt es das Dreieck ABC nur für $0° < \delta < 45°$.
Anmerkung: Es gibt dazu eine mit GEONExT erstellte dynamische Konstruktion: 08eh100.gxt

11. (a) Siehe Zeichnung zu (b):
Die Halbgerade $[TE$ liegt auf der Kreistangente mit dem Berührpunkt T. Der Berührradius $[MT]$ steht auf dieser Tangente senkrecht. Weiter gilt: $\delta = \alpha$ (Z-Winkel).
$\Rightarrow \quad \beta = 90° - \delta = 90° - \alpha$.

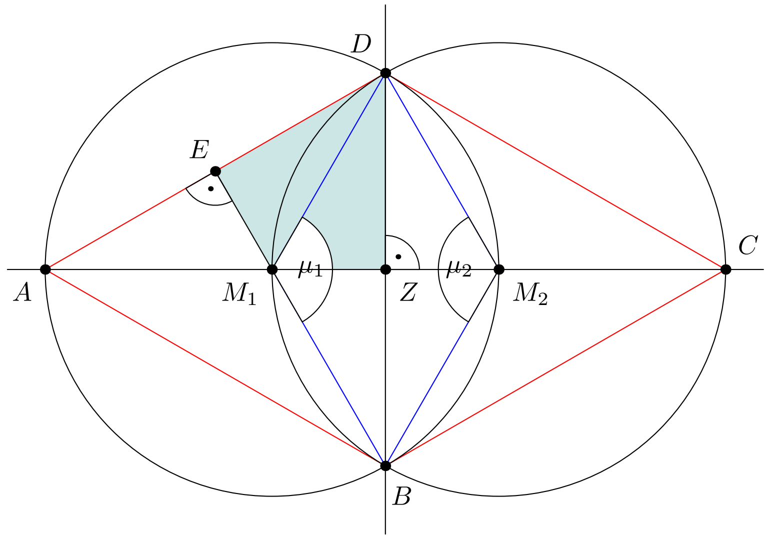
(b) Wenn also $\alpha = 37°$ ist, dann folgt $\beta = 90° - 37° = 53°$.
Damit kannst du den Berührradius mit dem Punkt T und seine Kreistangente konstruieren. Das linke Seilende führt senrecht nach unten.



(c) Aus $\alpha = 30°$ folgt $\beta = 60° \quad \Rightarrow \quad \mu = 180° - 60° = 120°$.
Der Mittelpunktswinkel μ nimmt also ein Drittel des Vollwinkels (360°) ein. Damit bedeckt das Seil ein Drittel des Rollenumfangs.

(d) Berechne α aus dem Mittelpunktswinkel μ:
$\mu = 40\%$ von $360° = 0,4 \cdot 360° = 144°$.
$\beta = 180° - 144° = 36° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° - 36° = 54°$.

12. (a)

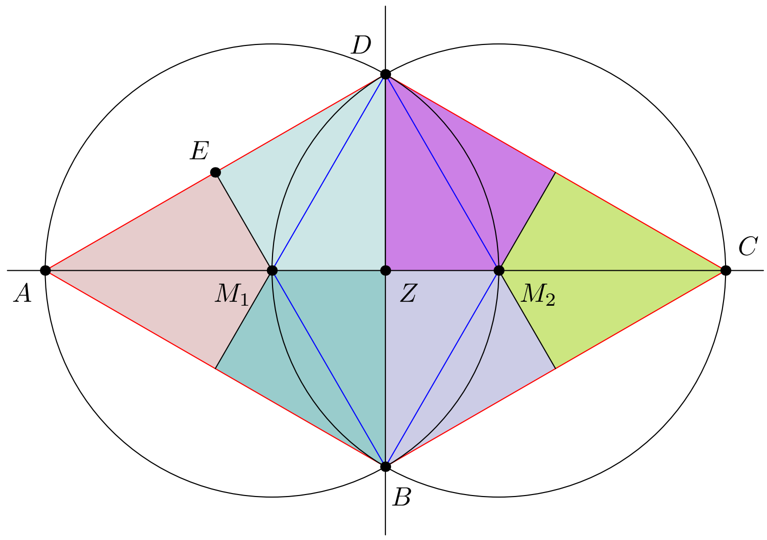


(b) Die Dreiecke M_1M_2D und M_1BM_2 sind gleichseitig; ihre Seitenlänge beträgt jeweils 3 cm (Kreisradius).
$\Rightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 = 60° + 60° = 120°$.

(c) Der Umfang des Vierecks BM_2DM_1 ist $4 \cdot 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$ lang. Es handelt sich um ein gleichseitiges Viereck, also um eine Raute.

(d) Das Dreieck AM_1D ist gleichschenklig: $\overline{M_1A} = \overline{M_1D} = 3\,\text{cm}$.
$\sphericalangle DM_1A = 180° - 60° = 120° \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle M_1AD = \sphericalangle ADM_1 = 30°$
$\sphericalangle EDM_1 = \sphericalangle M_1DZ = 30°$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle M_1ED = \sphericalangle DZM_1 = 90° \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle DM_1E = \sphericalangle ZM_1D = 60°$
Die beiden Dreiecke M_1ZD und EM_1D stimmen damit in allen drei Innenwinkelmaßen überein und sie haben die Seite $[M_1D]$ gemeinsam. Also sind diese beiden Dreiecke kongruent.

(e)

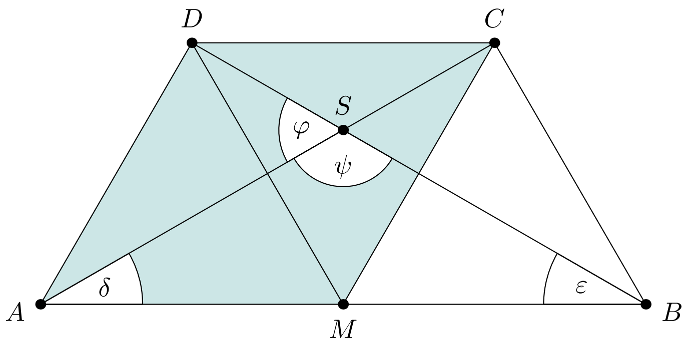


Die Raute $ABCD$ lässt sich mit sechs kongruenten Drachenvierecken parkettieren.
Die Raute BM_2DM_1 ist nach (d) so groß wie zwei dieser Drachenvierecke.
Also ist die Raute $ABCD$ dreimal so groß wie die Raute BM_2DM_1.

Anregung: Setze diese Parkettierung auf deinem Zeichenblatt fort. Du kannst dabei viele andere Flächen und deren Zusammenhänge entdecken.

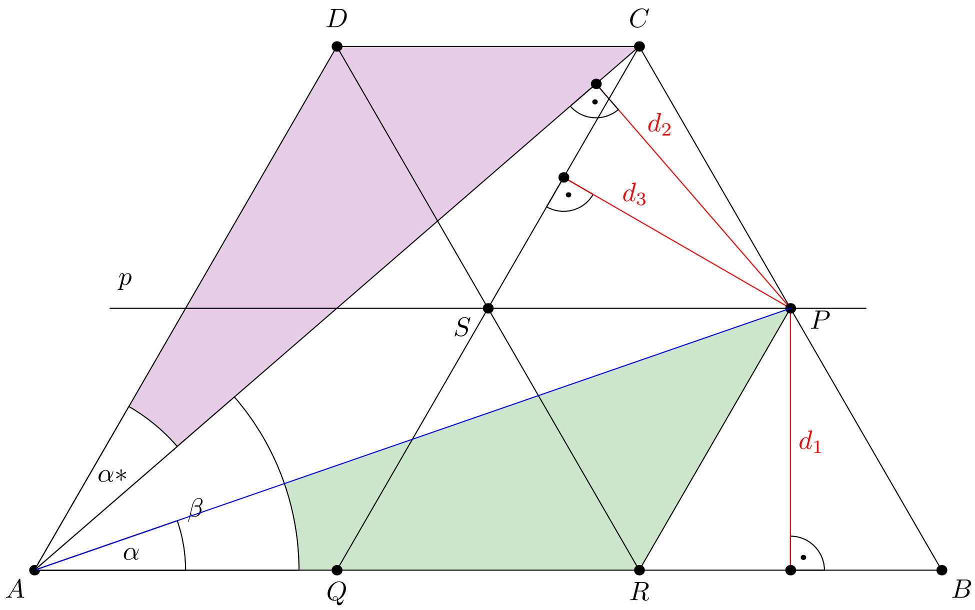
Anmerkung: Viele (z.T. weltberühmte) Werke des holländischen Graphikers **M.C. Escher** (1898 - 1972) sind Parkettierungen von ebenen Flächen oder Flächen im Raum.
Literaturhinweis: „*Die Welten des M.C. Escher*", Manfred Pawlak Verlagsgesellschaft MbH, Herrsching

13.



Das Viereck $AMCD$ ist eine Raute, deren Diagonalen die Innenwinkel halbieren.
Z.B.: Das Dreieck ABS ist gleichschenklig. $\Rightarrow \quad \delta = \varepsilon = 30°$
$\Rightarrow \quad \psi = 180° - 2 \cdot 30° = 120° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 180° - 120° = 60°$.

14. (a)



(b) Wenn der Punkt P auf der Winkelhalbierenden läge, dann müssten die Abstände d_1 und d_2 zu den Schenkeln $[AB]$ bzw. $[AC]$ gleich lang sein.
Nun sind aber die Höhen d_1 und d_3 in den gleichseitigen Dreiecken RBP und SPC gleich lang, weil diese Dreiecke kongruent sind. Offensichtlich gilt nun: $d_2 > d_3 = d_1$.
Also liegt der Punkt P nicht auf der Halbierenden des Winkels BAC.

(c) Es gilt:
$\overline{AR} = \overline{AD} \quad \wedge \quad \overline{RP} = \overline{DC} \quad \wedge \quad \sphericalangle PRA = \sphericalangle ADC = 120°$
$\Rightarrow \quad \Delta ARP \cong \Delta ABP$ (sws)-Kongruenz.

(d) Weil $\Delta ARP \cong \Delta ABP$ gilt, folgt $\alpha = \alpha*$.
$\Rightarrow \quad \beta + \alpha = \beta + \alpha* = 60°$

15. (a)
- Die Figur stellt ein Sechseck dar, das zwar achsensymmetrisch, aber nicht regelmäßig ist.
- Im Zentrum der Figur steht das gleichseitige Dreieck ADG.
- Über den Seiten dieses Dreiecks sind die drei kongruenten Quadrate $ABCD$, $DEFG$ und $GHIA$ errichtet.
- Jedes Quadrat wird durch die beiden Diagonalen in vier kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt, wobei jeweils zwei gegenüber liegende eingefärbt sind.
- Die beiden benachbarten äußeren Eckpunkte von je zwei Quadraten sind durch Strecken miteinander verbunden.

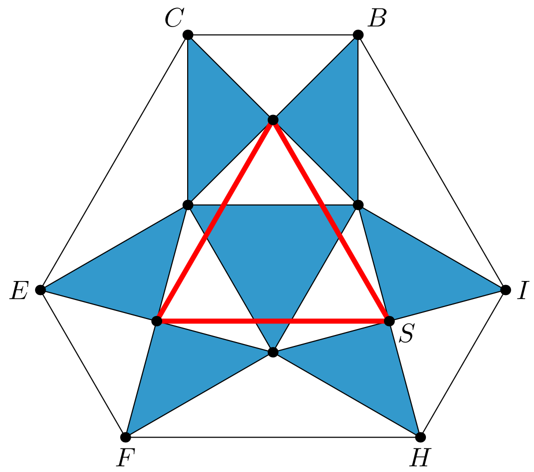
(b) Es gibt **drei** solche Trapeze: $FHAD$, $IBDG$ und $CEGA$.
Es gibt **drei** solche Drachenvierecke: $GAPD$, $ADQG$ und $DGSA$.

(c) Das Dreieck DCE ist gleichschenklig, denn die beiden Quadratseiten $\overline{DC}$ und $\overline{DE}$ sind gleich lang.

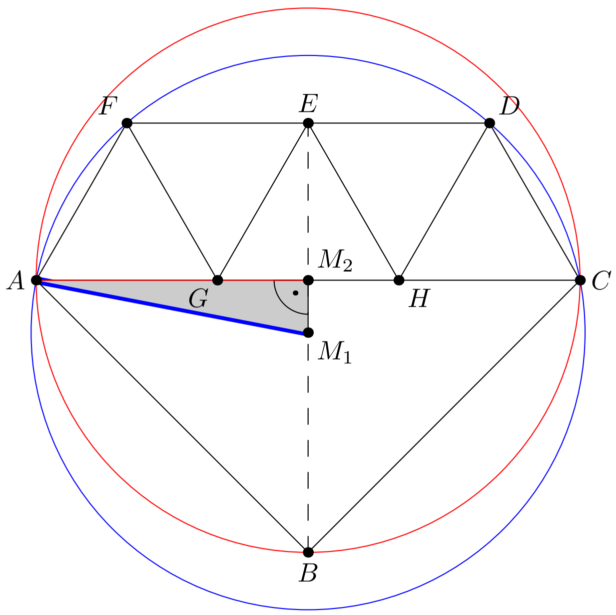
$\sphericalangle EDC = \sphericalangle EDG + \sphericalangle GDA + \sphericalangle ADC = 90° + 60° + 90° = 240°$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle CDE = 360° - 240° = 120°$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle ECD = (180° - 120°) : 2 = 30° \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle ECB = 30° + 90° = 120°$
Die Figur ist achsen- und drehsymmetrisch mit den Drehwinkeln 120° und 240°. Also haben alle Innenwinkel dieses Logos das Maß 120°.

(d) Wie in der Lösung (c) schon gezeigt, gilt: $\sphericalangle EDA = 90° + 60° = 150°$ und $\overline{ED} = \overline{DA} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = (180° - 150°) : 2 = 15°$.

(e)



16. (a) Die Figur ist etwas verkleinert gezeichnet.

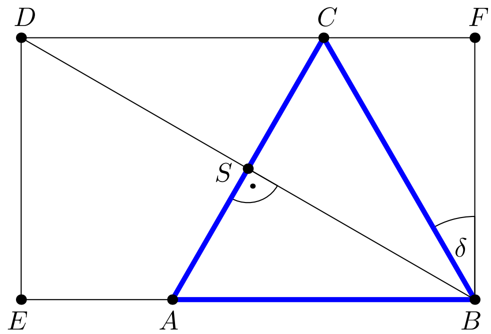


(b) • Bei dem Viereck $ACDF$ handelt es sich um ein achsensymmetrisches Trapez mit der Symmetrieachse BE. Alle achsensymmetrischen Trapeze besitzen einen Umkreis.

- Siehe Zeichnung.

(c) Der Umkreis des Dreiecks ABC hat den Radius $\overline{M_2A}$. Das ist eine Kathete im rechtwinkligen Dreieck AM_1M_2.
Der Umkreis des achsensymmetrischen Trapezes hat den Radius $\overline{M_1A}$. Das ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck AM_1M_2.
Weil die Hypotenuse in **jedem** rechtwinkligen Dreieck die längste Seite darstellt, ist der Radius und damit auch der Durchmesser des Kreises k_1 länger als der des Kreises k_2.

17. (a)



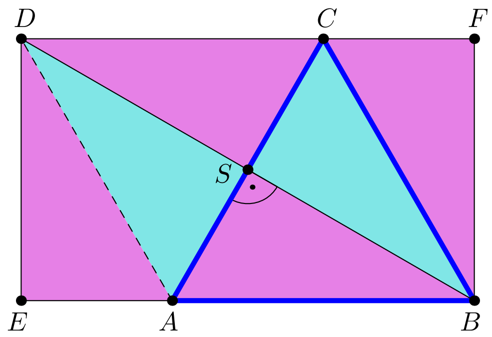
- Beginne mit dem Dreieck ABC und dem Mittelpunkt S der Seite $[AC]$.
- Zeichne die Halbgerade $[BS$ ein.
- Die Parallele zu $[AB]$ durch den Punkt C schneidet diese Parallele im Punkt D. Der Rest ist klar.

(b) $\Delta ABS \cong \Delta SBC$, weil BS eine Symmetrieachse ist.
Die beiden rechtwinkligen Dreicke SBC und BFC besitzen die Seite $[BS]$ als gemeinsame Hypotenuse. Außerdem gilt $\delta = 90° - 60° = 30° = \sphericalangle CBS$.
Also sind alle drei fraglichen Dreiecke kongruent.

(c) Es gilt: $\Delta DSC \cong \Delta ABS$.
Begründung: Die beiden rechtwinkligen Dreiecke besitzen je einen 30°- und einen 60°-Winkel (Z-Winkel). Neben den drei Innenwinkeln stimmen diese beiden Dreiecke noch in den Kathetenlängen $\overline{AS}$ und $\overline{SC}$ überein.
Also: $\Delta DSC \cong \Delta ABS$.
Das Dreieck ABC ist in zwei kongruente Teildreiecke zerlegt.
Das rechtwinklige Dreieck DBF besteht aus drei kongruenten Teildreiecken. Alle fünf Teildreiecke sind kongruent.
Weil $\Delta DBF \cong \Delta EBD$ gilt, ist das Rechteck $EBFD$ ist damit in sechs dieser kongruenten Teildreieck zerlegbar.

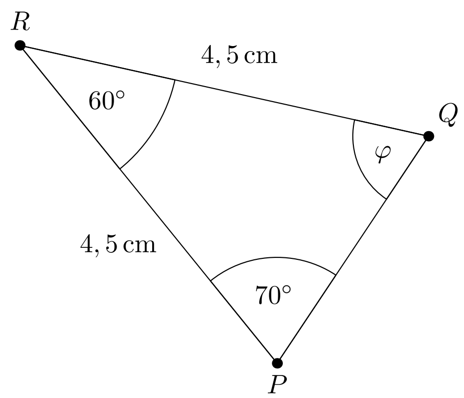
Damit gilt: $\dfrac{A_{\Delta ABC}}{A_{EBFD}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Oder:
Die Hilfsline $[DA]$ veranschaulicht diesen Sachverhalt ohne weiteres:



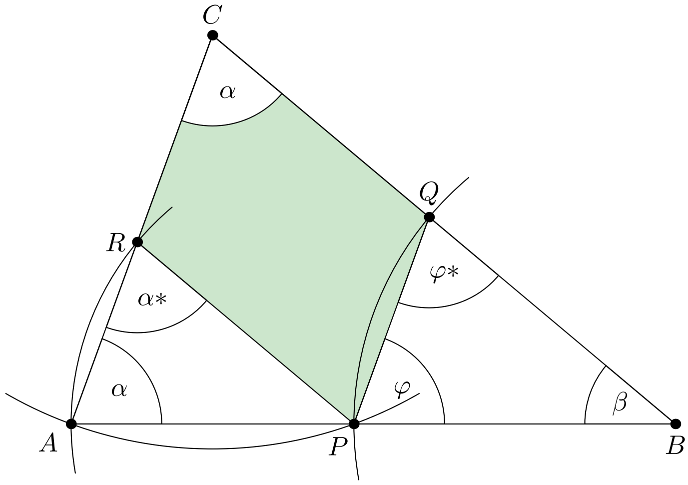
18. Das Dreieck ist rechtwinklig, denn es gilt $\gamma = 90°$.
Wegen $a > c$ folgt dann $\alpha > \gamma = 90°$. Also folgt $\alpha > 90°$.
Damit würde $\alpha + \gamma > 180°$ werden, was in Dreiecken nicht geht.
Das Dreieck gibt es also nicht.

19.



Das Dreieck ist gleichschenklig mit der Basis $[PQ]$, denn es gilt $\overline{PR} = \overline{QR} = 4,5\,\text{cm}$.
Dann folgt $\varphi = 70°$. Wegen $70° + 70° + 60° = 200°$ wäre die Innenwinkelsumme von $180°$ überschritten. Das Dreieck existiert nicht.

20. (a)



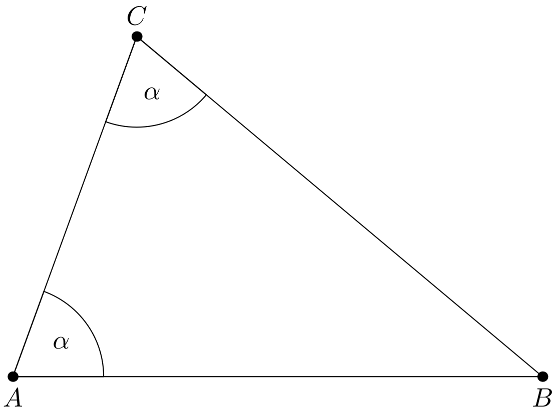
(b) Wegen $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt $\sphericalangle ACB = \alpha$.
Das Dreieck APR ist gleichschenklig mit der Basis $[AR]$
$\Rightarrow \quad \alpha = \alpha*$ und damit auch $\alpha* = \sphericalangle ACB$.
Damit sind α und $\sphericalangle ACB$ F-Winkel. $\Rightarrow \quad [PR] \parallel [CQ] \quad (1)$.
Im gleichschenkligen Dreieck ABC glt: $\alpha = (180° - \beta) : 2$.
Im gleichschenkligen Dreieck PBQ glt: $\varphi = (180° - \beta) : 2 = \alpha$.
Damit sind α und $\sphericalangle BPQ$ F-Winkel. $\Rightarrow \quad [PQ] \parallel [RC] \quad (2)$.
Also sind im Viereck $PQCR$ wegen (1) und (2) jeweils die beiden gegenüber liegenden Seiten parallel. Also handelt es sich um ein Parallelogramm.

21. (a) Im Dreieck ABC gilt: $\alpha = \sphericalangle BAC = \delta + \varepsilon = \sphericalangle ACB = \gamma$.
Also haben zwei Innenwinkel des Dreiecks ABC gleiches Maß; damit ist das Dreieck ABC gleichschenklig. Es besitzt die Basis $[AC]$.

(b) Um das Dreieck zeichnen zu können, brauchst du neben der Streckenlänge $\overline{AB}$ und dem 40°-Winkel noch ein weiteres Bestimmungsstück:
Du kannst entweder $\overline{BC} = 7\,\text{cm}$ verwenden oder das Winkelmaß

$$\alpha = (180° - 40°) : 2 = 70°$$

berechnen.

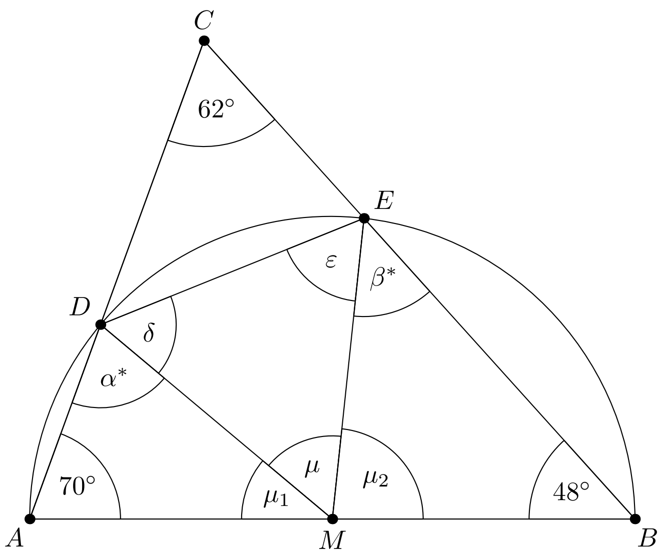


(c) Es gilt $\alpha = \delta + \varepsilon = 70°$.

Dann folgt im Dreieck ASC: $\underbrace{\delta+\varepsilon}_{=70^\circ} + \varphi = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \varphi = 110^\circ$.

22. $u_{\Delta BEC} = 10\,\text{cm} + b + c \quad u_{ABCD} = 4 \cdot 10\,\text{cm} = 40\,\text{cm}$
$u_{\Delta BEC} = 2 \cdot u_{ABCD}$. Also: $10\,\text{cm} + b + c = 2 \cdot 40\,\text{cm} = 80\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad b + c = 70\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad u_{ABECD} = 3 \cdot 10\,\text{cm} + 70\,\text{cm} = 100\,\text{cm}$.

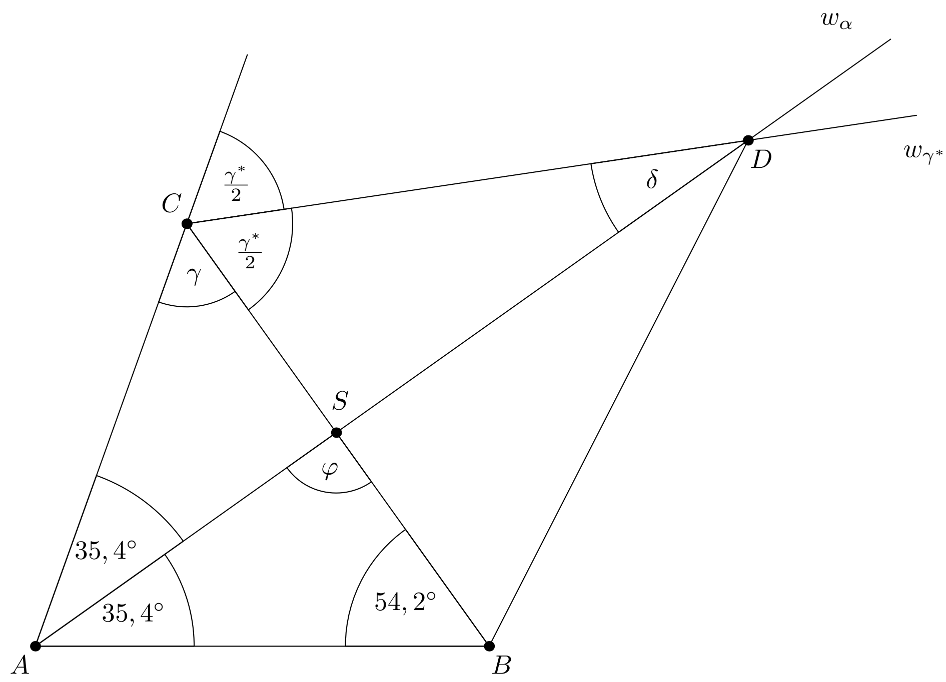
23. (a)



Berechne zunächst das Winkelmaß $\beta = 180^\circ - 70^\circ - 62^\circ = 48^\circ$ und zeichne dann das Dreieck ABC (w,s,w), dann den Halbkreis . . . .

(b) Für den Kreiradius r gilt: $r = \overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MD} = \overline{ME}$.
Das Dreieck AMD ist daher gleichschenklig.
Also gilt: $\alpha^* = \alpha$ und damit $\mu_1 = 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ$.
Das Dreieck MBE ist ebenfalls gleichschenklig.
Also gilt: $\beta^* = \beta$ und damit $\mu_2 = 180^\circ - 2 \cdot 48^\circ = 84^\circ$.
$\Rightarrow \quad \mu = 180^\circ - 40^\circ - 84^\circ = 56^\circ$.
Auch das Dreieck MED ist gleichschenklig.
Also gilt: $\delta = \varepsilon = (180^\circ - 56^\circ) : 2 = 62^\circ$.

24. (a)



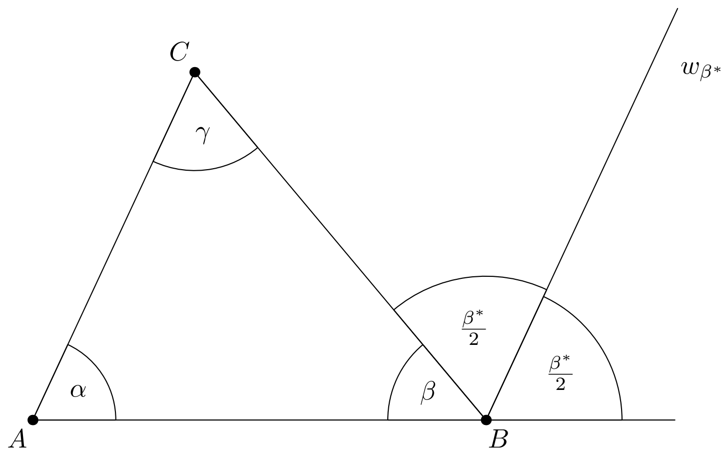
(b) Es gilt: $\gamma = 180° - 70,8° - 54,2° = 55°$.

$$\Rightarrow \quad \gamma^* = 180° - 55° = 125° \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma^*}{2} = 62,5° .$$

Im Dreieck ADC gilt dann $\delta = 180° - 35,4° - 55° - 62,5° = 27,2°$.

(c) In jedem (achsensymmetrischen) Drachenviereck müssen die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck ABS gilt: $\varphi = 180° - 35,4° - 54,2° = 90,4° \neq 90°$.
Das Viereck $ABDC$ ist also kein (achsensymmetrisches) Drachenviereck.

25. (a)

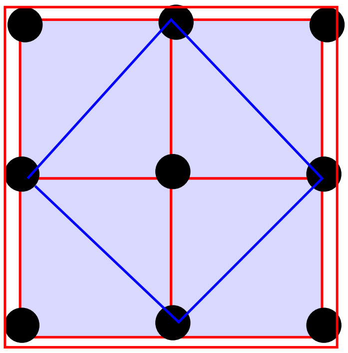


(b) In der Figur gilt: $\gamma = \dfrac{\beta^*}{2}$ (Z-Winkel).

Ebenso gilt: $\alpha = \dfrac{\beta^*}{2}$ (F-Winkel).

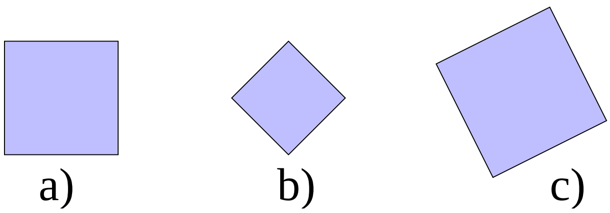
$\Rightarrow \quad \alpha = \gamma$; also ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

26.



Martha hat die vier gleich großen Quadrate im Inneren (blau) entdeckt.
Edwin könnte das große Quadrat außen herum gesehen haben.
Claudia hat genauer hingeschaut und zeichnet das blaue Quadrat noch ein.

27.



Die obiger Figur zeigt die verschiedenen (nicht maßstabsgerecht gezeichneten) Quadrattypen a), b) und c), die du im Punkteraster entdecken kannst.
Vom Typ a) gibt es zunächst 9 kleine Quadrate.
Hinzu kommen noch 4 Quadrate, deren Seite doppelt so lang ist wie die von einem kleinen Quadrat.
Dazu kommt noch 1 Quadrat, dessen Seite dreimal so lang ist wie die von einem kleinen Quadrat.
Vom Typ b) gibt es 4 Quadrate.
Vom Typ c) tauchen nur 2 verschiedene Quadrate auf (eines davon ist eingezeichnet).
Insgesamt enthält die Figur also maximal 20 Quadrate.

10. Raumgeometrie

1. (a) Die Oberfläche der beiden Endstücke links und rechts beträgt zusammen $2 \cdot 5 \cdot (x\,\mathrm{cm})^2 = 10x^2\,\mathrm{cm}^2$.
   Hinzu kommt ein Mittelstück, das sich aus vier Quadraten zusammensetzt: $4 \cdot (x\,\mathrm{cm})^2 = 4\,\mathrm{cm}^2$. Also sind es zusammen $14x^2\,\mathrm{cm}^2$.

   (b) Zu dem vorigen Quader aus drei Würfeln kommt noch ein Mittelstück hinzu:
   $O_4 = 14x^2\,\mathrm{cm}^2 + 4x^2\,\mathrm{cm}^2 = 14x^2\,\mathrm{cm}^2$.

   (c) $21,78\,\mathrm{dm}^2 = 2178\,\mathrm{cm}^2$
   $2178 = 18x^2 \;|: 18 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 121 \quad \Leftrightarrow \quad x = 11$
   Die Kantenlänge eines Würfels beträgt also $11\,\mathrm{cm}$.

   (d) Die Reihe aus 100 Würfeln besteht aus zwei Endstücken und 98 Mittelstücken.
   Die Oberfläche eines Endstückes beträgt $5 \cdot x^2\,\mathrm{cm}^2$, die eines Mittelstückes beträgt $4 \cdot x^2\,\mathrm{cm}^2$. Also folgt: $O_{100} = 2 \cdot 5 \cdot x^2\,\mathrm{cm}^2 + 98 \cdot 4 \cdot x^2\,\mathrm{cm}^2 = 402x^2\,\mathrm{cm}^2$.

   (e) Subtrahiere zunächst die beiden Endstücke zu je $5 \cdot x^2\,\mathrm{cm}^2$:
   $78x^2\,\mathrm{cm}^2 - 10 \cdot x^2\,\mathrm{cm}^2 = 68x^2\,\mathrm{cm}^2$
   Auf jedes Mittelstück entfallen $4 \cdot x^2\,\mathrm{cm}^2$.
   $68x^2\,\mathrm{cm}^2 : 4 \cdot x^2\,\mathrm{cm}^2 = 17$ Mittelstücke. Also besteht der Quader aus 19 Würfeln.

   (f) $10x^2\,\mathrm{dm}^2 = 1000x^2\,\mathrm{cm}^2$.
   Subtrahiere wieder die beiden Endstücke. Dann bleiben $990x^2\,\mathrm{cm}^2$. Auf jedes Mittelstück entfallen wieder $4 \cdot x^2\,\mathrm{cm}^2$. Weil aber $990x^2\,\mathrm{cm}^2 : 4x^2\,\mathrm{cm}^2$ keine ganze Zahl ergibt, kann es diesen Quader nicht geben.

2. (a) Der erste Wurf war eine Sechs: $(6 \cdot 2 + 5) \cdot 5 = 85$.
   Der zweite Wurf war eine Drei: $[(85 + 3) + 10] \cdot 10 = 980$.
   Der dritte Wurf war eine Zwei: $980 + 2 = 982 \quad 982 - 350 = 632$.
   Erster Wurf: 6. Zweiter Wurf: 3. dritter Wurf: 2.

   (b) Der erste Wurf war eine a: $(a \cdot 2 + 5) \cdot 5 = 10a + 25$.
   Der zweite Wurf war eine b: $[(10a + 25) + b + 10] \cdot 10 = 100a + 10b + 350$.
   Der dritte Wurf war eine c: $100a + 10b + 350 + c$.
   350 werden dann subtrahiert. Das Ergebnis lautet zum Schluss $100a + 10b + c$. Das ist aber gerade die Zahl abc in der Ziffernschreibweise. Diese gibt die gewürfelten Augenzahlen in der richtigen Reihenfolge wieder.

   (c) Weil die Augenzahlen auch bei einem Würfel aus acht Seitenflächen Ziffern sind, funktioniert Claudias Zahlenzauberei ebenso in diesem Fall.