SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Jahrgangsstufe 8 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

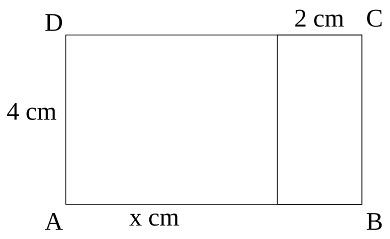
Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Wahlpflichtfächergruppe I

1. Terme

1. Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ auf zwei verschiedene Arten mit dem Platzhalter x.



2. Maria hat Fehler beim Auflösen von Klammern in binomischen Formeln gemacht:
   (a) $(3a + 10b)^2 = 9a^2 - 60ab + 10b^2$
   (b) $(x + 2)(2 - x) = 4 - x^2$
   (c) $(0{,}5x - 6)^2 = 2{,}5x^2 - 3x + 36$

   Streiche mit einem Farbstift (nicht Rot) alle Fehler einzeln an und verbessere Marias Lösungen auf diesem Blatt. (Nicht jede Lösung muss falsch sein.)

3. Gib mindestens zwei verschiedene Terme an, für die gilt:
   $x = 1,5$ liefert $T(\max) = -6$

4. Beweise: Die Zahl $2^{50} - 1$ lässt sich in zwei Faktoren zerlegen.
   Zeige sodann, dass die Zahl $2^{50} - 1$ die Teiler 4051 und 601 besitzt.

5. Fritz hat bei den folgenden Termumformungen Fehler gemacht. Berichtige sie farbig (nicht mit roter Farbe):
   (a) $4x - 6y + 1{,}6z = 2 \cdot (x + 3y + 3{,}2z)$
   (b) $x^2 \cdot x^5 + 3 : \frac{1}{2} = 6 + x^{10}$
   (c) $-(3x - 2x^2 + 7a) = -3x - 2x^2 - 7x$

6. (a) Begründe rechnerisch: Der Term

$$T_1(x) = \frac{-12}{x^2 + 1{,}5x - 1}$$

besitzt die Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\,;0{,}5\}$

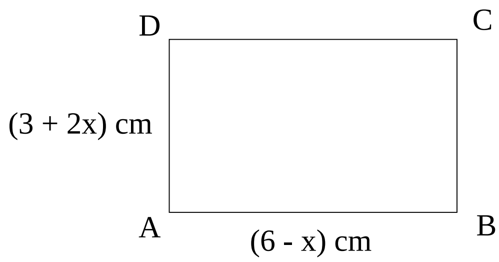
(b) Gib zwei weitere von $T_1(x)$ verschiedene Terme an, welche die gleiche Definitionsmenge wie der Term $T_1(x)$ besitzen.

7. (a) Berechne den Umfang des Rechtecks $ABCD$ für $x = 2{,}5$.

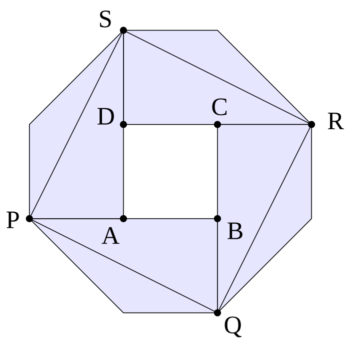
(b) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ für $x = 3{,}5$.

(c) Wie ändert sich die Form des Rechtecks, wenn $x \in \mathbb{Q}^+$ immer kleiner wird?

(d) Gib zwei verschiedene Belegungen von x an, so dass es jeweils dafür kein Rechteck gibt. Begründe deine Wahl.



8. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das Viereck $PQRS$ wurde zusätzlich eingezeichnet.
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat und es gilt: $\overline{AB} = \overline{CR} = x\,\text{cm}$.



(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A des Achtecks in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A(x) = (7x^2)\,\text{cm}^2$]

(c) Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Achtecks $43{,}75\,\text{cm}^2$ beträgt.

(d) Das Achteck lässt sich so in ein Quadrat einbeschreiben, dass zwei Quadratseiten parallel zur Strecke $[DC]$ sind.

- Zeichne dieses Quadrat ein.
- Berechne für $x = 3,25$ seinen Umfang.

(e) Welche besonderen Eigenschaften besitzt das Viereck $PQRS$? Begründe deine Ansicht.

9. Fritz Zweistein sagt: Ich habe da was rausgefunden:

$3^2 = 2^2 + 2 + 3$
$4^2 = 3^2 + 3 + 4$
$5^2 = 4^2 + 4 + 5$

(a) Schreibe die nächste Zeile hin.

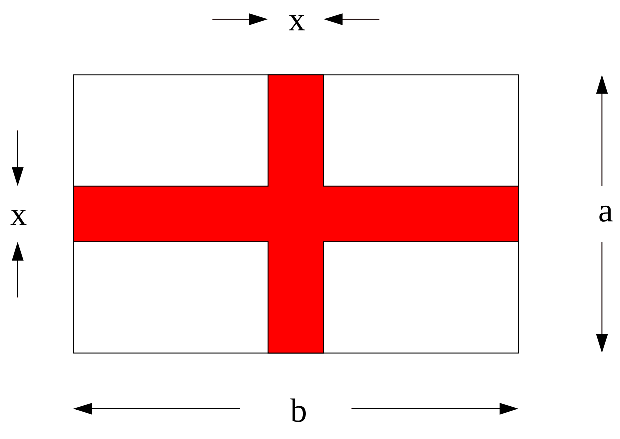
(b) Schreibe auf, welchen Zusammenhang du entdeckt hast.

(c) Finde einem Term, der für jede Gleichung passt.

Bearbeite die obigen Aufträge auch für folgende Gleichungen:

$3^2 = 2 \cdot 4 + 1$
$4^2 = 3 \cdot 5 + 1$
$5^2 = 4 \cdot 6 + 1$

10. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



(a) Zeichne die Figur für $b = 10\,\text{cm}$, $a = 5\,\text{cm}$ und $x = 1\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A des Kreuzes in der Figur in Abhängigkeit von a, b und x.

(c) Die folgenden Terme sollen den Flächeninhalt des weißen Anteils der Flagge darstellen. Kreuze die Terme an, deren Darstellung korrekt ist:

[ ]	$ab - ax - bx + x^2$	[ ]	$ab - ax + bx - x^2$
[ ]	$4[(0{,}5a - 0{,}5x)(0{,}5b - 0{,}5x)]$	[ ]	$\frac{3}{4}ab$
[ ]	$(a - x)(b - x)$	[ ]	$ab - (ax + bx - x^2)$

(d) Gib für $a = 8\,\text{cm}$ und $b = 12\,\text{cm}$ die Menge aller sinnvollen Belegungen von x an.

11. Maria hat bei den folgenden Termumformungen Fehler gemacht. Berichtige sie farbig (nicht mit roter Farbe):

(a) $(a - 0{,}5)^2 = a^2 + a + 2{,}5$

(b) $(2x + 3)^2 = 2x^2 + 12x + 6$

(c) $(4 - x)(x + 4) = x^2 - 16$

12. Löse für $G = \mathbb{Q}$ die folgende Gleichung nach x auf:
$(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = (3 + x)(x - 3) - 4x^2 - 13$

13. Berechne den Extremwert des folgenden Terms:
$T(x) = 2(3 - x)^2 + 12x$
Von welcher Art ist dieser Extremwert?

14. Besitzt der folgende Term einen Extremwert? $T(x) = 3(2 - x^2) - 6x^2$
Wenn du mit „Ja“ antwortest: Von welcher Art ist der Extremwert? Begründung.
Wenn du mit „Nein“ antwortest: Begründung.

15. Daniel stellt sich im Kaufhaus auf eine Rolltreppe. Nach 20 s ist er im oberen Stockwerk angelangt.
Ein anderes Mal ist die Rolltreppe ausgeschaltet. Jetzt braucht er 30 s um auf der Rolltreppe hinaufzulaufen.
Berechne, wie lange Daniel brauchen würde, wenn er auf der eingeschalteten Rolltreppe hinaufliefe.

16. Gegeben sind die beiden Brüche

$$B_1 : \frac{10^{679}}{10^{678}} \quad \text{und} \quad B_2 : \frac{10^{679} + 1}{10^{678} + 1}.$$

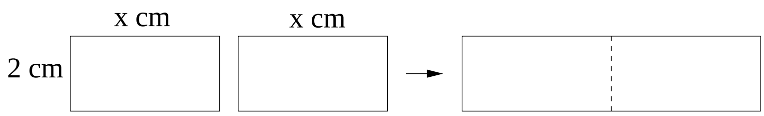
(a) • Notiere drei Besonderheiten des Bruches B_1.

- Welchen Wert hat B_1?

(b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Brüchen B_1 und B_2?

(c) Welcher der beiden Brüche hat den größeren Wert? Begründe.

17.



Zwei kongruente Rechtecke mit der Länge x cm und der Breite 2 cm sollen so lückenlos zu einem größeren Rechteck aneinander gefügt werden, wie es die Abbildung zeigt.
Der Lehrer, Herr Ganfum, stellt dazu die Aufgabe: „Berechne den Umfang u des so entstandenen großen Rechtecks in Abhängigkeit von x."
Das Ergebnis von Sophia ist: $u(x) = (4x + 4)\,\text{cm}$.
Das Ergebnis von Wolfgang ist: $u(x) = [2 \cdot (4 + 2x) - 4]\,\text{cm}$.
Herr Ganfum meint dazu: „Ihr habt beide recht."

(a) Wie hat Sophia gerechnet?

(b) Wie hat Wolfgang gerechnet?

(c) Zeige: Die Terme von Wolfgang und Sophia sind äquivalent.

(d) Berechne die Länge x eines der beiden kleinen Rechtecke, wenn der Umfang des zusammengefügten Rechtecks dann $0,5\,\text{m}$ beträgt.

18. Viele Schülerinnen und Schüler kennen die Werte der Quadrate zweiziffriger Zahlen auswendig:
Z.B.: $12^2 = 144$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$ oder $19^2 = 361$. Karin und Heinz wollen nun eine Möglichkeit finden, wie sie die Quadrate **aller** zweistelligen Zahlen leicht berechnen können.
Heinz versucht es mit 65:
$65 = 60 + 5 \quad \Rightarrow \quad 65^2 = 60^2 + 5^2 = 3600 + 25 = 3625$.
Karin probiert es mit 65 auf eine andere Weise:
$65 = 70 - 5 \quad \Rightarrow \quad 65^2 = 70^2 - 5^2 = 4900 - 25 = 4875$.
Sie meint dazu: „Hier stimmt doch etwas nicht." Auch Heinz geht ein Licht auf: „Klar, wir hätten Klammern setzen müssen!"

(a) Erkläre, was nicht stimmen kann.

(b)
- Notiere, wie Heinz die Klammern setzen müsste.
- Löse die Klammern auf und berechne damit den Wert von 65^2, sowohl wie es Karin als auch wie es Heinz vorhatte.

(c) Anja hat zugeschaut. Sie möchte 99^2 berechnen. Für welche Zerlegung entscheidet sie sich wohl? Für die von Heinz oder die von Karin? Begründe deine Antwort und berechne das Ergebnis im Kopf.

(d) Formuliere die Regel, wie du die Quadrate zweistelliger Zahlen auf diese Weise berechnest.

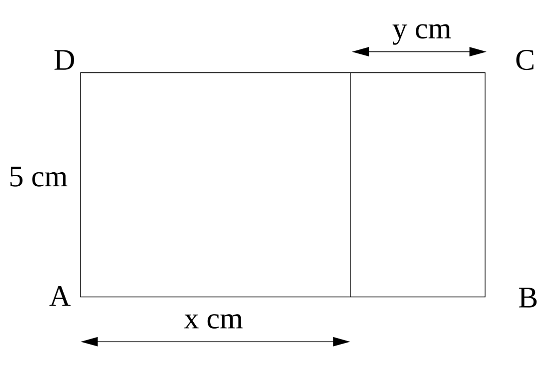
19. Die Klasse 8a der Abel-Schule hat von ihrem Lehrer, Herrn Korfat, die folgende Aufgabe bekommen:
„Berechne den Produktwert aus zwei gleichen natürlichen Zahlen. Subtrahiere nun vom ersten Faktor eine natürliche Zahl und addiere zum zweiten Faktor die gleiche natürliche Zahl. Multipliziere jetzt den Wert der Differenz mit dem der Summe. Vergleiche diesen Produktwert mit jenem, den du anfangs erhalten hast.“
Edwin rechnet: $100 \cdot 100 = 10000$ und $(100 - 99) \cdot (100 + 99) = 199 < 10000$
Egon rechnet: $7 \cdot 7 = 49$ und $(7 - 2) \cdot (7 + 2) = 45 < 49$
Martha rechnet: $1000 \cdot 1000 = 1000000$ und $(1000 - 1000) \cdot (1000 + 1000) = 0 < 1000000$
Helga rechnet: $11 \cdot 11 = 121$ und $(11 - 21) \cdot (11 + 21) = -320 < 121$
Sie melden sich und meinen übereinstimmend: „Der zweite Produktwert ist immer kleiner als der erste.“
Herr Korfat gibt zu bedenken: „Wirklich immer?“
Martha muss zugeben: „Nein, weil ... “

(a) Wie hat Martha ihre Antwort begründet?

(b) Es sei a eine solche natürliche Zahl und k eine zweite natürliche Zahl, die einmal von a subtrahiert und andererseits zu a addiert wird. Löse damit die von Herrn Korfat gestellte Aufgabe.

20. Sind die beiden Terme
$T_1(x) = (123456x - 654321)^2$ und $T_2(x) = (654321 - 123456x)^2$ äquivalent?
Begründe deine Antwort.

21.



(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ für $x = 7$ und $y = 2$.

(b) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ mit den Variablen x und y auf zwei verschiedene Arten.

(c) Das Rechteck $ABCD$ kann für die passende Wahl der Varaibalen x und y zum Quadrat werden. Gib zwei Möglichkeiten an.

(d) Unter allen möglichen Rechtecken $ABCD$ gibt es beliebig viele, die einen Flächeninhalt von $65\,\text{cm}^2$ aufweisen. Gib für diesen Fall drei Belegungen für x und die jeweils dazu passende Belegung für y an. Mache jeweils die Probe.

22. Gegeben ist der Poduktterm $T(x) = (4 - x)(4 + x)$.

(a)
- Tabellarisiere den Term für $x \in [-4; 4]_{\mathbb{Z}}$
- Was fällt dir bei der Betrachtung der Termwerte in der Tabelle alles auf?

(b) Zeige, dass die beiden Terme $T(x) = (4 - x)(4 + x)$ und $T^*(x) = 16 - x^2$ auf $G = \mathbb{Q}$ äquivalent sind.

(c)
- Begründe: Der Term x^2 wird für alle $x \in \mathbb{Q}$ nie negativ.
- Was folgt daraus für den Term $-x^2$?
- Begründe: Der Term $T(x) = (4 - x)(4 + x)$ kann für alle $x \in \mathbb{Q}$ höchstens den Wert 16 annehmen.

23. Sabine und Helmut untersuchen die Extremwerteigenschaften der drei folgenden Terme auf $G = \mathbb{Q}$:

$$T_1(x) = (x - 3)(x + 3)$$
$$T_2(x) = (x - 4)(4 + x)$$
$$T_3(x) = -(5 + x)(5 - x)$$

Helmut hat Folgendes herausgefunden:

- „Nachdem ich eine binomische Formel angewendet habe, ist klar, dass jeder Term ein Minimum besitzt“
- „Die Belegung von x, die das jeweilige Minimum liefert, ist immer die gleiche.“

Sabine hat Zweifel: „Der Term $T_3(x)$ beginnt mit einem Minuszeichen. Also müsste $T_3(x)$ doch ein Maximum enthalten.“

(a) Hat Sabine Recht? Begründe.

(b) Welche Belegung von x liefert jeweils den Extremwert? Begründe.

24. Vereinfache so weit wie möglich:

(a) $1,5ab - (0,5 \cdot a \cdot 2)^2 - \frac{3}{2}ab + a^2 =$

(b) $(3c)^2 - 3c^2 - (-3c)^2 =$

25. Gegeben sind die folgenden Terme auf $G = \mathbb{Q}$:
$T_1(x) = x^3 - x^2 - x - 1$
$T_2(x) = x^2 - 2x + 1$
$T_3(x) = -x \cdot (x+1) - 1$
$T_4(x) = x^2 - 1 - 2 \cdot (x-1)$

(a) Fritz stellt zwei Behauptungen auf:

- „Wenn man für alle Terme den Termwert für $x = -1$ berechnet, dann ist der Wert des ersten Terms größer als der des dritten.“
- „Wenn man für alle Terme den Termwert für $x = -1$ berechnet, dann ist der Wert des zweiten Terms genauso groß wie der des vierten.“

Überprüfe diese beiden Behauptungen durch Einsetzen.

(b) Überprüfe durch Umformung, dass die Terme $T_2(x)$ und $T_4(x)$ äquivalent sind.

(c) Sind die beiden Terme
auf $G = \mathbb{Q}$ über der Grundmenge $G = \{0;\ 1;\ 2\}$ äquivalent? Fertige dazu eine numerische Wertetabelle an.

[Die Idee zu dieser Aufgabe stammt aus: „Thema Mathematik“ im BUCHNER-Verlag, Lehrerband 2008]

26. Egon bildet die Spiegelzahlen von zweiziffrigen Zahlen, indem er deren Ziffern jeweils vertauscht. Dann errechnet er vom jeweilgen Zahlenpaar die Summe, z.B. so:
$13 + 34 = 44$ oder $81 + 18 = 99$ oder $25 + 52 = 77$.
„Komisch, der Summenwert besteht stets aus zwei gleichen Ziffern. Ist das immer so?“, fragt er seinen Vater. Der antwortet: „Nein, finde selbst ein Gegenbeispiel.“
Egon rechnet und entdeckt sogar mehrere Gegenbeispiele.

(a) Finde zwei Beispiele dafür, dass der Summenwert nicht aus lauter gleichen Ziffern bestehen muss.

(b)
- Egon betrachtet die Summenwerte seiner Beispiele in der Aufgabe (a) genauer und entdeckt einen Zusammenhang zwischen den Ziffern. Welcher ist das?
- Jede zweiziffrige Zahl lässt sich als Term in der Form $10a + b$ darstellen, wobei $a \in \{1;\ 2;\ \ldots\ 9\}$ und $b \in \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots\ 9\}$ gilt.
  - Zeige mit Hilfe des obigen Terms, dass jeder Summenwert aus einer zweiziffrigen Zahl und ihrer Spiegelzahl stets durch 11 teilbar ist.

- Wenn du die beiden Ziffern der ursprünglichen zweiziffrigen Zahl auf geeignete Weise kombiniertst, dann erhältst du neben der 11 einen weiteren Teiler des Summenwertes.

(c) Ermittle alle Paare aus einer zweistelligen Zahl und ihrer Spiegelzahl, deren Summenwert 143 beträgt.

27. Jede zweistellige natürliche Zahl lässt sich durch den Term $10a + b$ darstellen, wobei a und b die Ziffern sind.
Beispiel: $75 = 10 \cdot 7 + 5$; also gilt $a = 7$ und $b = 5$.
Unter der Quersumme q einer natürlichen Zahl versteht man die Summe aus ihren einzelnen Ziffern. In unserem Beispiel ist $q = 7 + 5 = 12$.

(a)
- Subrahiere von der Zahl 75 deren Quersumme.
- Notiere die Menge aller Teiler des Differenzwertes.

(b)
- Wiederhole die vorigen Schritte mit der Zahl 59.
- Bestimme den ggT aus beiden Teilermengen.

(c)
- Wiederhole die Rechenschritte mit einemr selbst gewählten zweistelligen Zahl.
- Was stellst du fest?
- Gilt deine Feststellung für alle zweistelligen Zahlen? Begründe deine Antwort.

(d)
- Experimentiere mit dreistelligen Zahlen.
- Begründe: Subtrahiert man von einer dreistelligen deren Quersumme, so ist der Differnzwert stets durch 9 teilbar.

(e) Gilt das für jede beliebige natürliche Zahl? Begründe.

28. Franz soll die Anzahl n von natürlichen Zahlen bestimmen, die zwischen zwei natürlichen zahlen x und y mit $y > x$ liegen.
Nach einigen Rechenbeispielen findet er eine Formel: $n = y - x - 1\,.$ (*)

(a)
- Bestimme mit Hilfe von (*) alle natürlichen Zahlen, die zwischen 69 und 83 liegen.
- Bestätige dein Ergebnis, indem du die in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst.

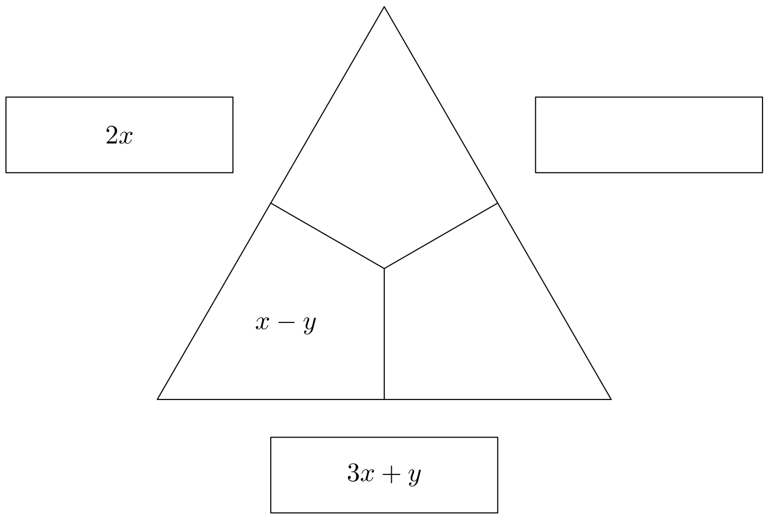
(b) Berechne die Anzahl der natürlichen Zahlen, die größer als 513 799 und gleichzeitig kleiner als 803 102 sind.

(c) Franz überprüft die Formel (*) jetzt an folgenden Sonderfällen:
- x und y sind unmittelbare Nachbarn.
Gilt die Formel (*) auch hierfür?

- x und y sind ganze Zahlen.
  Berechne n für $x = -11$ und $y = 3$ sowie für $x = -39$ und $y = -23$.
  Stimmt die Formel auch in diesen beiden Fällen?

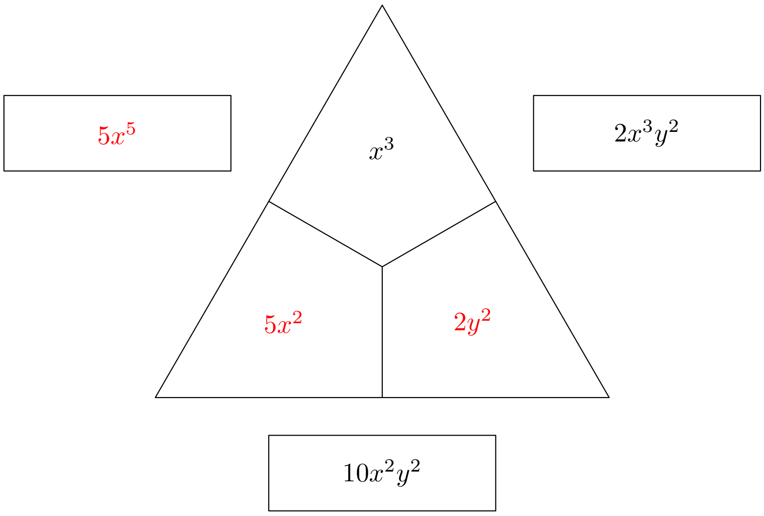
29. Edwin entdeckt in einem Rechenbuch ein Zahlenrätsel:
„Denke dir eine dreistellige Zahl, die durch 10 teilbar ist. Streiche deren letzte Ziffer. Subtrahiere diese neue Zahl von der ursprünglichen dreistelligen Zahl. Dann ist der Differenzwert stets durch die neue Zahl teilbar.“
   (a) Bestätige die obige Behauptung an einem selbst gewählten Beispiel.
   (b) Untersuche an einem weiteren Beispiel, ob die Behauptung auch für vierstellige Zahlen gilt.
   (c) Edwin hat vieles durchprobiert. Alle seine Rechnungen haben die obige Behauptung bestätigt. Schließlich setzt er für die neue Zahl den Platzhalter x und probiert es allgemein mit x. Er kommt zu dem Schluss „Die Behauptung gilt sogar für alle natürlichen durch 10 teilbaren Zahlen!“ Begründe, dass Edwin Recht hat.

30.



In die drei Felder im Dreieck gehören Terme, wobei in jedem der Rechtecke die Summe aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Termen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Terme.

31.

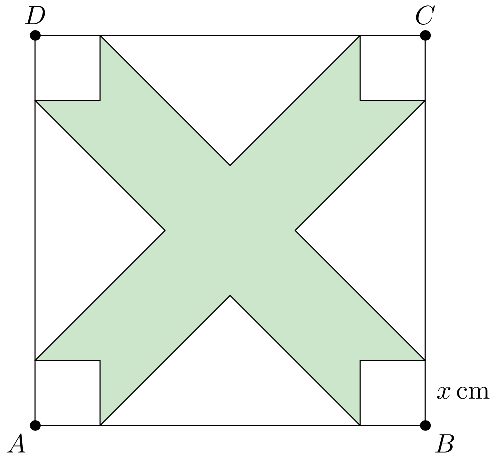


In die drei Felder im Dreieck gehören Terme, wobei in jedem der Rechtecke das Produkt aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Termen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Terme.

32. Lisa weiß, dass eine natürliche Zahl n dann durch 9 teilbar ist, wenn ihre Quersumme QS durch 9 teilbar ist.
Sie stellt sich nun folgende Fragen:
    (1) „Ist der Wert der Summe aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme auch durch 9 teilbar?“
    (2) „Ist der Wert des Produktes aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme durch 27 teilbar?“
    (3) „Ist der Wert des Quotienten aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme durch 9 teilbar?“

    Was meinst du? Begründe jeweils deine Ansicht.

33.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat.
An seinen Eckpunkten befinden sich vier kleine Quadrate, deren Seitenlänge jeweils x m beträgt.
Die vier Dreiecke an den Quadratseiten sind jeweils gleichschenklig-rechtwinkig.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\mathrm{cm}$ und $x = 1$.

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A des eingefärbten Kreuzes gilt in Anhängigkeit von x:

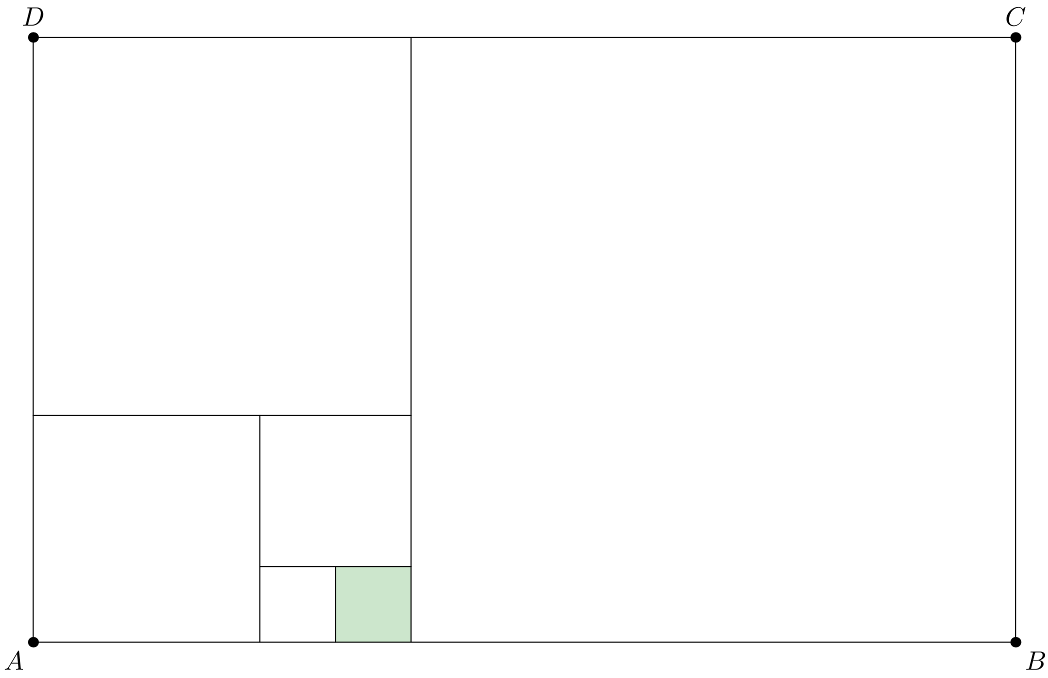
$$A(x) = (-8x^2 + 24x)\,\mathrm{cm}^2 \,.$$

(c) Berechne $A(0)$ und $A(3)$. Deute dein Ergebnis mit Hilfe deiner Zeichnung.

(d) Unter allen Kreuzen gibt es eines, dessen Flächeninhalt maximal ist.

- Berechne dieses Maximum sowie die zugehörige Belegung von x .
- Zeichne erneut das Quadrat $ABCD$ mit dem einbeschriebenen größten Kreuz.
- Wie viel Prozent der Fläche des Quadrates $ABCD$ nimmt das größte Kreuz ein? Löse das Problem auf zwei verschiedene Arten.

34.



Ein rechteckiges Grundstück $ABCD$, dessen Flächeninhalt $2,34\,\mathrm{ha}$ beträgt, ist in lauter quadratische Parzellen eingeteilt. Eine der beiden kleinsten Parzellen, die im Plan farbig gekennzeichent ist, wird eingezäunt.
Berechne die Länge des Zaunes.

35. Gegeben ist die Gleichung $2x+3 = 11$ für $G = \mathbb{N}$. Welche der folgenden Gleichungen haben die gleiche Lösung? Begründe Deine Antwort, ohne die Lösung jeder Gleichung zu berechen.

    (a) $3 + 2x = 11$

    (b) $(3 + x) + x = 11$

    (c) $x + (3 + x) = 11$

    (d) $3 + x = -x + 11$

    (e) $2 + 3 \cdot x = 11$

    (f) $x^2 + 3 = 11$

    (g) $2000x + 3000 = 11000$

2. Lineare Gleichungen und Ungleichungen

1. Gegeben ist die Gleichung

$$13 - 2x = x + 10, \quad G = \mathbb{Z}\,.$$

   (a) Zeige, dass $x = 2$ keine Lösung dieser Gleichung ist.

   (b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass $x = 2$ die Lösung der abgeänderten Gleichung ist, und führe den Nachweis.

2. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung $4 - 6x = 3(11 - 2x)$ ist für $G = \mathbb{Q}$ leer.

3. Gegeben ist die Gleichung

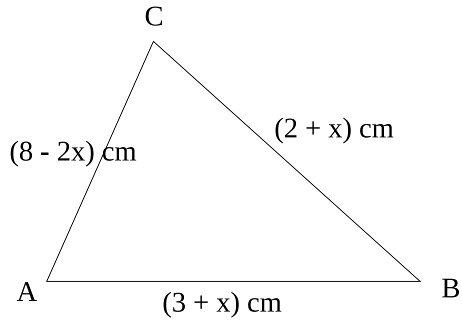
$$7 - x = 3x + 11, \quad G = \mathbb{Z}$$

   (a) Zeige, dass $x = -1$ die Lösung dieser Gleichung ist.

   (b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass die Lösungsmenge der abgeänderten Gleichung leer ist, und führe den Nachweis.

4. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + 8 = 6$ ist für $G = \mathbb{Q}$ leer.

5. Es gilt $x \in \mathbb{Q}^+$.



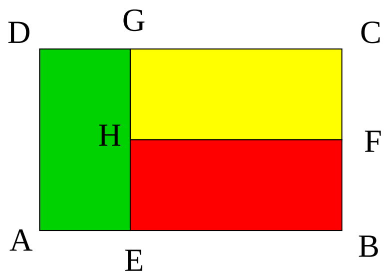
(a) Zeichne das Dreieck ABC für $x = 1$.

(b) Berechne jeweils den Umfang des Dreiecks ABC für $x \in \{1,5;\ 1,\overline{6};\ 2\frac{1}{8}\}$.
Was stellst du fest?
Ist das immer so? Begründe deine Antwort.

(c) Unter allen möglichen Dreiecken ABC gibt es zwei gleichschenklige. Berechne jeweils alle Seitenlängen.

(d) Was ergibt sich für $x = 4$? Bestimme alle Belegungen von x, für die es überhaupt solch ein Dreieck ABC gibt.

6.



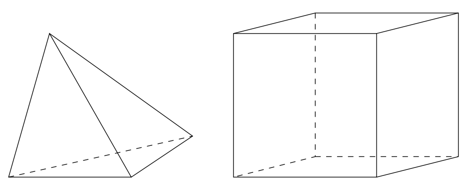
Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.
Die drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Ihre Seitenlängen stehen jeweils im Verhältnis 2:3. Weiter gilt: $\overline{HF} = 3x\,\text{cm}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

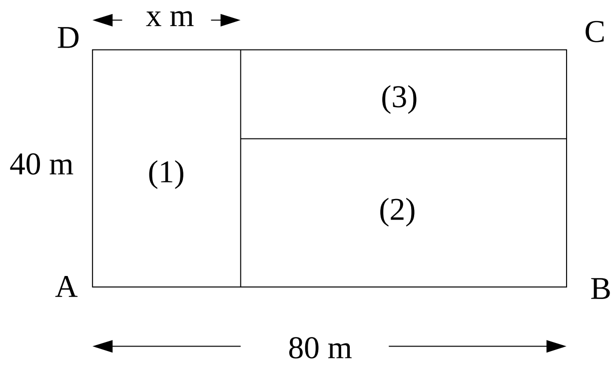
(b) Welchen Flächeninhalt besitzt eines der inneren Rechtecke, wenn der Saum der Fahne 1 m 8 cm lang ist?

7. Die eine Seite eines Rechtecks ist 2 cm länger als die andere. Der Rechteckumfang liegt zwischen 60 cm und 62 cm.
Welche Seitenlängen sind dann für die kürzere Seite möglich?

8. In einer Spielzeugkiste befinden sich Würfel und Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche. Es werden 30 Körper mit 300 Kanten gezählt. Wie viele Würfel und wie viele Pyramiden befinden sich in der Kiste?

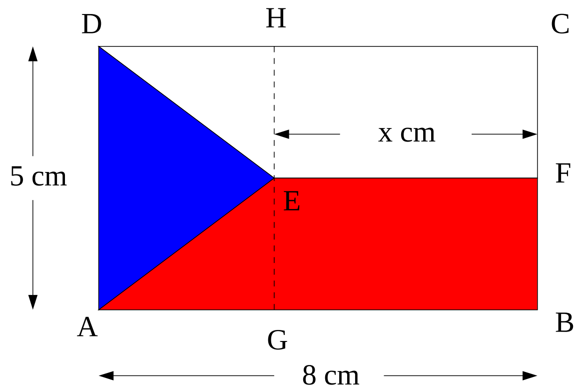


9.



Ein rechteckiges Wiesengrundstück $ABCD$, das zur Gemeinde Besselbach gehört, soll in drei rechteckige Baugrundstücke (1), (2) und (3) aufgeteilt werden. Es gilt stets $x \in \mathbb{Q}^+$. Der dortige Bürgermeister Pickelschau beauftragte seinen Baureferenten Schaufelpick, zu prüfen, ob sich für einen bestimmten x-Wert gleich große Parzellen ergäben.

10. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 5\,\text{cm}$ und $\overline{EF} = x\,\text{cm}$.
Zusätzlich wurde die Hilfslinie $[HG]$ gestrichelt eingezeichnet.
Hinweis: Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne die Figur für $x = 4,5$.

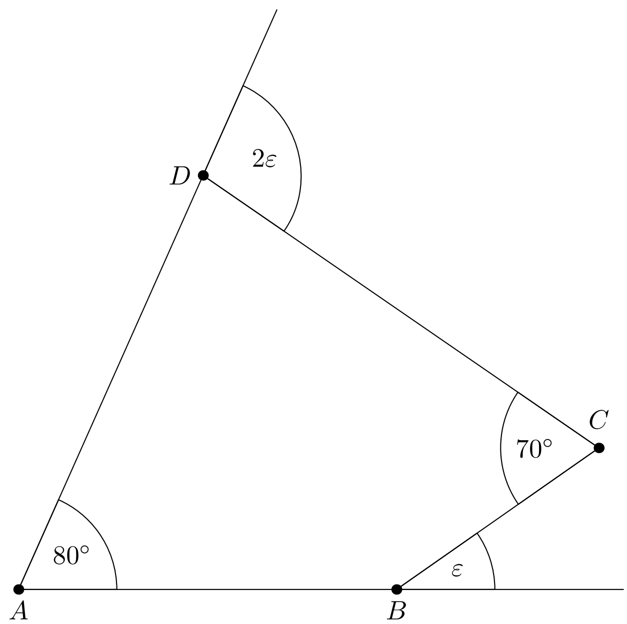
(b) Berechne den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABFE$ in Abhängigkeit von x.
Hinweis: Verwende für deine Überlegungen die Strecke $[HG]$.
[Ergebnis: $A_T(x) = (1,25x + 10)\,\text{cm}^2$]

(c) Berechne x so, dass alle drei Teilflächen im Inneren des Rechtecks $ABCD$ gleich groß sind.

(d) Berechne den Flächeninhalt A_D des Dreiecks AED in Abhängigkeit von x. [Ergebnis: $A_D(x) = (20 - 2,5x)\,\mathrm{cm}^2$]

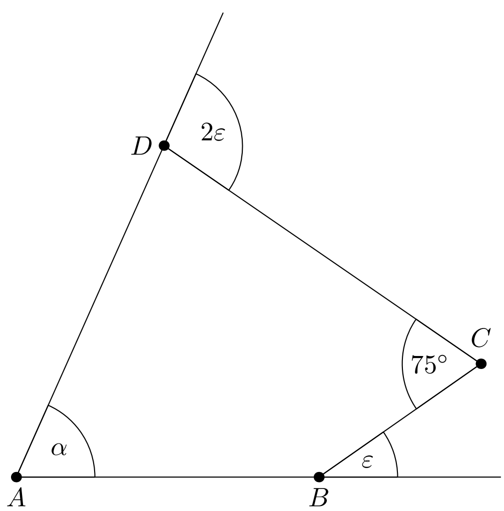
(e) Bestätige das Ergebnis der Aufgabe (c) mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgaben (b) und (d).

11.



Berechne ε.

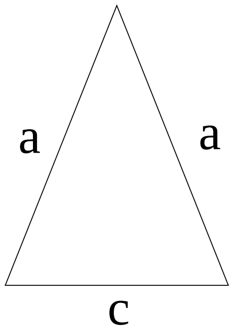
12.



(a) Berechne α für $\varepsilon = 48°$.

(b) Für welche Werte von ε existiert das Viereck $ABCD$?

13.



(a) Um welches besondere Dreieck handelt es sich? Begründe deine Antwort.

(b) Fritz soll für $a = 4,8\,\text{cm}$ und $c = 10\,\text{cm}$ ein solches Dreieck konstruieren. Nach einer Weile meint er: „Aber das geht doch gar nicht!“
Begründe, dass Fritz Recht hat.

(c) Zeichne zwei verschiedene gleichschenklige Dreiecke, die jeweils einen Umfang $u = 12\,\text{cm}$ besitzen.

14. Für alle Ungleichungen gilt: $G = \mathbb{Q}$.

(a) Berechne die Lösungsmenge von $2x - 4 > 0$.

(b) Beründe ohne nach x aufzulösen: Die Ungleichung $6x - 12 > 0$ hat die gleiche Lösungsmenge wie die Ungleichung in der Aufgabe (a).

(c) Bestimme die Lösungsmenge von $1387 \cdot (2x - 4) > 0$.

(d) Bestimme die Lösungsmenge von $(x^2 + 1) \cdot (2x - 4) > 0$.

(e) Bestimme die Lösungsmenge von $(x - 11)^2 \cdot (2x - 4) > 0$.

15. Im September 2011 orderte das Kaufhaus X&Y 200 T-Shirts. Davon wurden im gleichen Monat 76 Stück verkauft.
Einen Monat später verteuerte sich dieser Artikel um je einen EURO. In diesem Zeitraum wurden jedoch nur 72 Exemplare verkauft. Es stellte sich heraus, dass die Einnahmen aus dem Verkauf von diesen T-Shirts im Oktober die gleichen waren wie die im September 2011 .
Berechne den Verkaufpreis eines T-Shirts im September 2011 .

16. Carsten rechnet eine Gleichung aus, die er aus dem Buch übertragen hat. Der Lehrer betrachtet seinen Hefteintrag: „Deine Schrift ist wie schon so oft zum Teil unleserlich, aber dein Ergebnis ist richtig.“
In seinem Heft steht (der unleserliche Teil ist durch ein Kästchen ersetzt):

$$\begin{aligned} 2x - \square &= -2 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

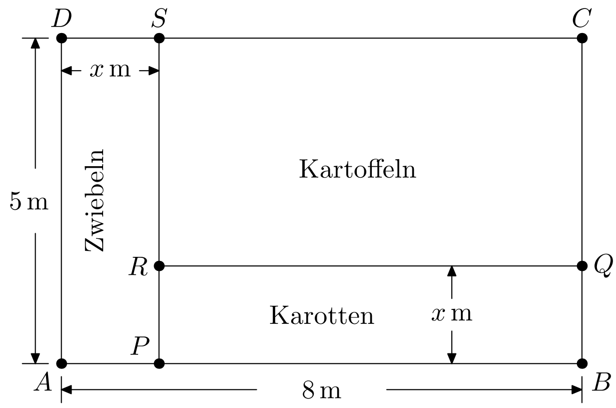
Ermittle auf zwei verschiedene Arten, was im Buch anstelle des Kästchens stand.

17. Carsten rechnet eine Gleichung aus, die er aus dem Buch übertragen hat. Der Lehrer betrachtet seinen Hefteintrag: „Deine Schrift ist wie schon so oft zum Teil unleserlich, aber dein Ergebnis ist richtig.“
In seinem Heft steht (der unleserliche Teil ist durch ein Kästchen ersetzt):

$$\begin{aligned} 2x - \square &= -2 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Ermittle auf zwei verschiedene Arten, was im Buch anstelle des Kästchens stand.

18.

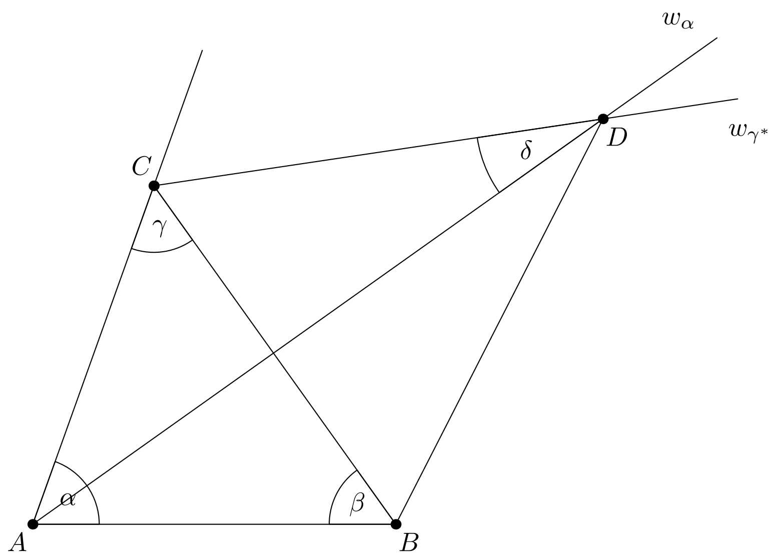


Das rechteckige Feld $ABCD$ ist 8 m lang und 5 m breit.
Auf den drei rechteckigen Parzellen werden Karotten, Zwiebeln und Kartoffeln angebaut. Die beiden Streifen für Karotten und Zwiebeln sind jeweils x m breit. Sie besitzen den gleichen Flächeninhalt. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

(a) Berechne x. [Ergebnis: x=3]

(b) Wie viel Prozent der Gesamtfläche nimmt dann das Kartoffelfeld ein?

19.



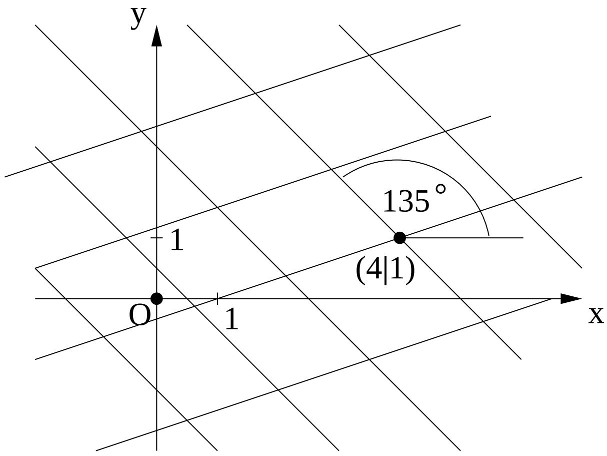
Die Halbgerade w_α halbiert den Winkel α und die Halbgerade w_{γ^*} halbiert den Nebenwinkel von γ. Weiter gilt: $\alpha = 70,8^\circ$ und $\delta = 27,1^\circ$.
Das Viereck $ABDC$ ist nicht achsensymmetrisch.

(a) Berechne die Winkelmaße γ und β. [Teilergebnis: $\beta = 54,2^\circ$]

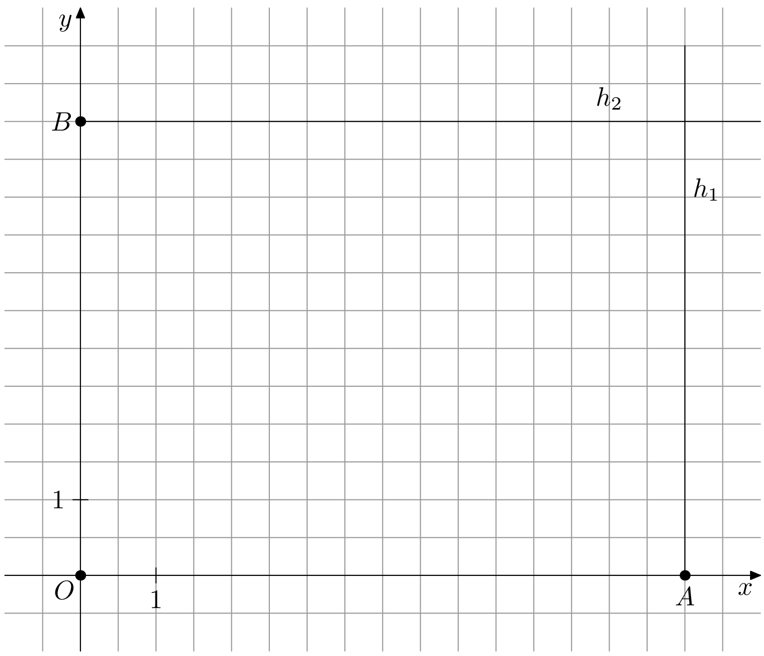
(b) Begründe, dass es sich bei dem Viereck $ABDC$ nicht um ein achsensymmetrisches Drachenviereck handelt.

3. Lineare Funktionen

1. Gib die Gleichungen der beiden Parallelenscharen an, mit deren Hilfe man das unten abgebildete Muster zeichnen kann:



2.



Die beiden Halbgeraden h_1 und h_2 mit den Anfangspunkten $A(8 \mid 0)$ bzw. $B(0 \mid 6)$ stehen auf der x- bzw. y-Achse senkrecht.
Auf der Halbgeraden h_1 wandern Punkte P_n und auf der Halbgeraden h_2 wandern Punkte Q_n. Dabei gilt: $\overline{AP_n} = \overline{BQ_n} = d\,\text{cm}$.

(a) Zeichne für $d = 2$ die beiden Ursprungshalbgeraden $[OP_1$ und $[OQ_1$ in obiges Koordinatensystem ein.

(b) Berechne d so, dass die zugehörigen Ursprungshalbgeraden $[OP_2$ und $[OQ_2$ aufeinander fallen.

[Ergebnis: $d = 4\sqrt{3}$]

(c) Konstruiere die Punkte P_2 und Q_2 und zeichne die zugehörigen Ursprungshalbgeraden $[OP_2$ und $[OQ_2$ ein

4. Dreiecke und Vierecke

1. Von einem Dreieck ABC weiß man:
   (a) $a = 5\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\gamma = 50°$
   (b) $a = b$ und $\beta = 60°$

   Fertige jeweils für den Fall (a) und für den Fall (b) eine Planfigur an. Begründe damit die besonderen Eigenschaften dieser Dreiecke.

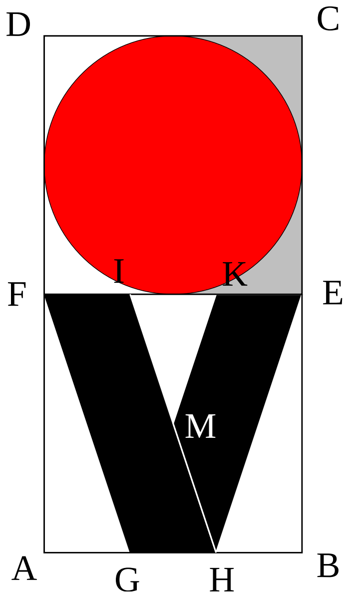
2. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC aus

$$\overline{AB} = 7\,\text{cm} \quad \overline{BC} = 5\,\text{cm} \quad \text{und} \quad \overline{AC} = 6\,\text{cm}$$

   auf zweifache Weise:
   i. Lege die Strecke $[AB]$ waagrecht
   ii. Lege die Strecke $[AC]$ waagrecht.

   (b) Ersetze eine der oben gegebenen Seitenlängen des Dreiecks ABC durch das Maß eines seiner Innenwinkel, so dass das zugehörige Dreieck nicht mehr existiert. Begründe deine Wahl.

0. Das ist ein Bild des Logos der Firma MARABU, die Farben herstellt.



Diese Figur ist aus zwei Quadraten aufgebaut und es gilt:
$\overline{AG} = \overline{GH} = \overline{GH} = \overline{HB} = \overline{FI} = \overline{IK} = \overline{KE} = x\,\text{cm}$.

(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

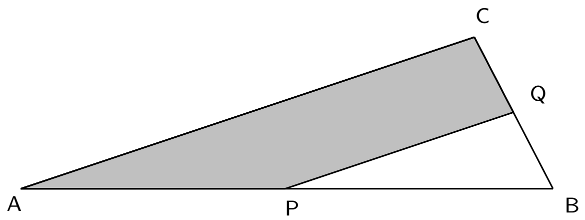
(b) Berechne den Flächeninhalt A des Rechtecks $ABCD$ in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A(x) = 18x^2\,\text{cm}^2$]

(c) Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ $1,125\,\text{dm}^2$ groß ist.

(d) Vergleiche den Flächeninhalt des Dreiecks HBE mit dem des Parallelogramms $GHIF$.

(e) Untersuche rechnerisch, ob die dunkel getönte Restfläche zwischen dem Kreis und dem Quadrat $FECD$ größer oder kleiner ist als die des Dreiecks HBE.

1.



Das Dreieck ABC hat einen Flächeninhalt von $10\,\text{cm}^2$. Zusätzlich gilt: $\overline{AP} = \overline{BP}$ und $\overline{BQ} = \overline{CQ}$.
Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $APQC$.
Hinweis: Zeichne geeignete Hilfslinien ein.

2. Es gibt zwei Möglichkeiten, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Basis 5 cm lang ist und das Maß irgendeines Innenwinkels 70° beträgt.
Konstruiere diese beiden Dreiecke.

3. Es gibt zwei Möglichkeiten, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, in dem ein Innenwinkel 120° beträgt und eine Seite 6 cm lang ist.
Konstruiere diese beiden Dreiecke.

4. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 35°$ und $\gamma = 95°$.

(b) Ändere die Angaben für das Dreieck ABC an einer Stelle so ab, dass mit der abgeänderten Angabe die Konstruktion eines Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Wahl.

5. (a) Von einem Dreieck ABC weiß man: $a = 11{,}3\,\text{cm}$ und $\gamma = 60°$. Außerdem besitzt das Dreieck ABC eine Symmetrieachse.
Konstruiere das Dreieck. Was fällt dir auf?

(b) Von einem weiteren Dreieck ABC weiß man: $\alpha = 47°$, $a = 4{,}5\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = \overline{AB}$. Berechne die restlichen Innenwinkel dieses Dreiecks.

6. Konstruiere ein Dreieck ABC mit $a = 6\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ und $c = 7\,\text{cm}$ auf zweifache Weise:

(a) Lege die Strecke $[BC]$ waagrecht.

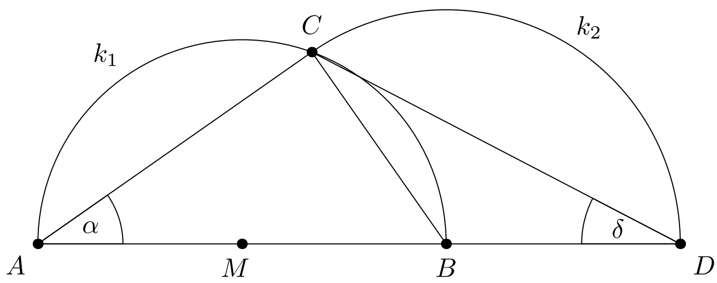
(b) Lege die Seite $[AC]$ waagrecht.

(c) Ändere die Angaben für das Dreieck so ab, dass mit der abgeänderten Angabe die Konstruktion eines Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Abänderung ohne neue Konstruktion.

7. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 92°$ und $a = 8\,\text{cm}$.

(b) Ändere eine der Angaben für das Dreieck ABC so ab, dass dann die Konstruktion des Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Abänderung.

8.



In der obigen Figur sind die Punkte M und B Mittelpunkte der Kreisbögen k_1 und k_2.

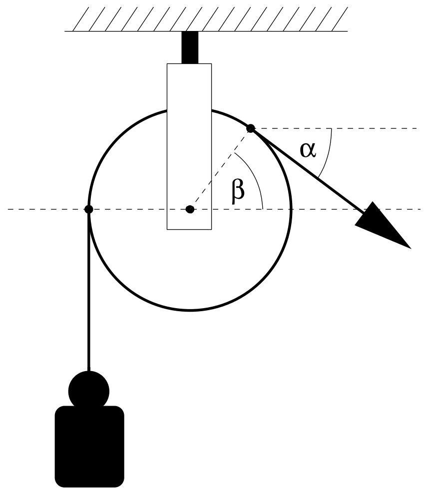
(a)
- Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\alpha = 35°$.
- Wie groß ist δ?

(b) Wie groß ist α für $\delta = 40°$?

(c) Begründe: Für $\delta = 59°$ gäbe es das Dreieck ABC nicht.

(d) Für welche Werte von δ gäbe es überhaupt noch das Dreieck ABC? Begründe deine Antwort.

9.



Ein Seil, das am linken Ende mit einem Gewicht belastet ist, wird über eine feste Rolle geführt. Am rechten Seilstück, das mit der Waagrechten den Winkel α einschließt, wird das Gleichgewicht gehalten.

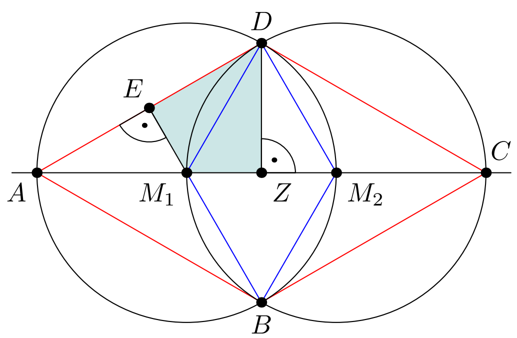
(a) Begründe: $\beta = 90° - \alpha$.

(b) Zeichne die Rolle mit dem Seil für den Radius $r = 3\,\text{cm}$ und $\alpha = 37°$.

(c) Berechne den Bruchteil des Umfangs der festen Rolle, der für $\alpha = 30°$ vom Seil berührt wird.

(d) Wie groß müsste man den Winkel α wählen, damit die Länge des Seilstückes, das die Rolle berührt, 40% des Rollenumfangs beträgt?

10.



Die Punkte M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der beiden Kreise.

(a) Zeichne die Figur mit dem Kreisradius 3 cm.

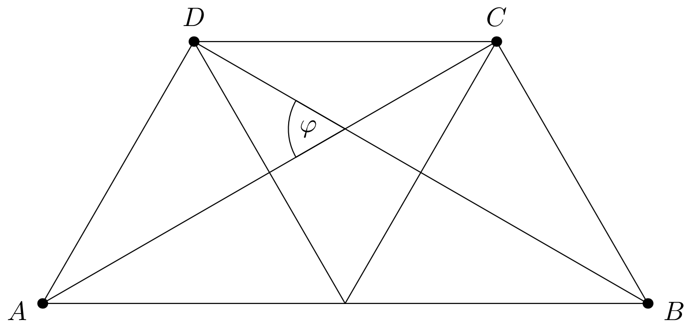
(b) Begründe: Im Viereck BM_2DM_1 gibt es zwei Innenwinkel mit dem Maß 120°.

(c) Wie groß ist der Umfang des Vierecks BM_2DM_1? Um welches besondere Viereck handelt es sich also?

(d) Begründe: Die beiden Dreiecke M_1ZD und EM_1D sind kongruent.

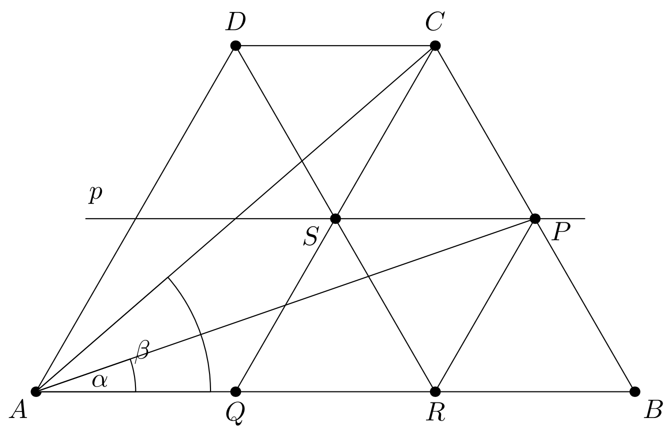
(e) Vergleiche den Flächeninhalt des Vierecks BM_2DM_1 mit dem des Vierecks $ABCD$.

11.



Das Trapez $ABCD$ ist aus drei kongruenten gleichseitigen Dreiecken zusammengefügt.
Berechne das Maß φ des Schnittwinkels der beiden Diagonalen.

12.



Im Trapez $ABCD$ liegen die beiden gleichseitigen Dreiecke ARD und QBC, wobei $\overline{AQ} = \overline{QR} = \overline{RB}$ gilt. Weiter gilt: $\sphericalangle BAP = \alpha$ und $\sphericalangle BAC = \beta$. Die Gerade p verläuft parallel zur Strecke $[AB]$ durch den Punkt S.

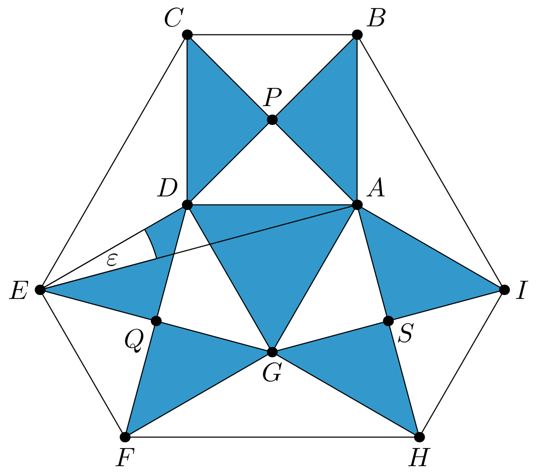
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AQ} = 4\,\text{cm}$.

(b) Zeige: Die Strecke $[AP]$ halbiert den Winkel BAC nicht.

(c) Zeige: Die Dreiecke ARP und ACD sind kongruent.

(d) Begründe: $\alpha + \beta = 60°$.

13.



Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Der Winkel mit dem Maß ε wurde zusätzlich eingezeichnet.

(a) Beschreibe den geometrischen Aufbau des Logos. Verwende die Buchstaben dazu.

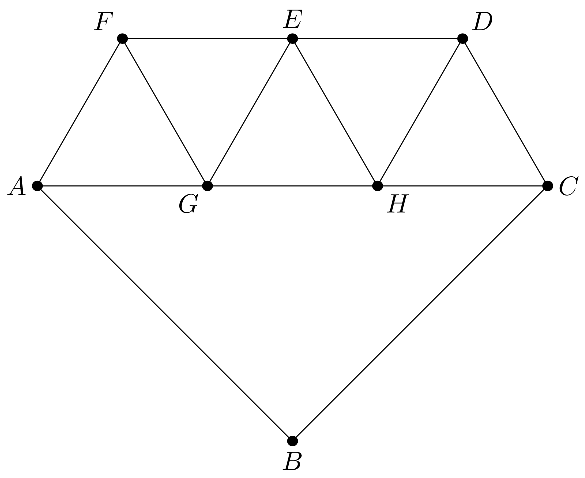
(b) In der Figur kannst du achsensymmetrische Drachen und Trapeze entdecken. Zähle sie jeweils mit Hilfe ihrer Eckpunkte auf.

(c) Berechne die Maße sämtlicher Innenwinkel des Sechsecks $BCEFHI$.

(d) Berechne das Winkelmaß ε.

(e) In der Figur ist ein gleichseitiges Dreieck mit dem Eckpunkt S verborgen. Zeichne es farbig ein.

14.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Viereck $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

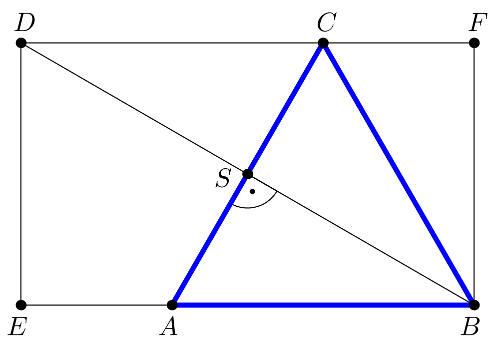
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 9\,\text{cm}$.

(b)
- Begründe: Das Viereck $ACDF$ besitzt einen Umkreis.
- Zeichne den Umkreis k_1 des Vierecks $ACDF$ mit seinem Mittelpunkt M_1 ein.

(c) Zeichne den Umkreis k_2 des Dreiecks ABC mit seinem Mittelpunkt M_2 ein.

(d) Untersuche anhand des Dreiecks AM_1M_2, welcher der beiden Kreise den größeren Durchmesser besitzt.

15.



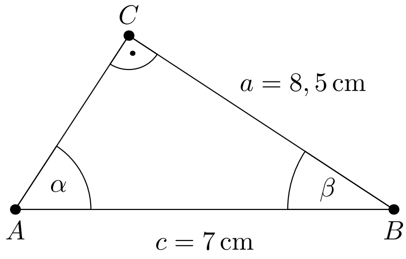
Das gleichseitige Dreieck ABC liegt im Rechteck $EBFD$.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke ABS, SBC und BFC sind kongruent.

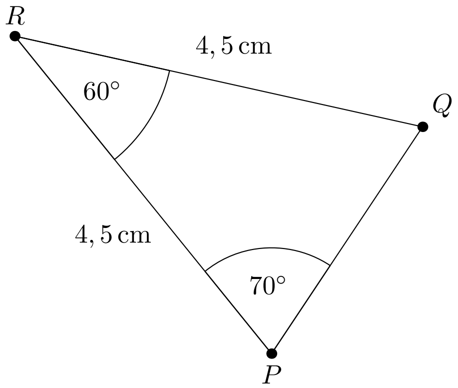
(c) Welchen Anteil der Fläche des Rechtecks $EBFD$ nimmt das Dreieck ABC ein? Begründe.

16.



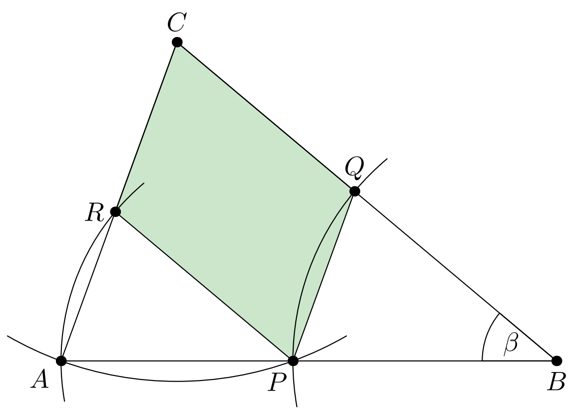
Die Figur ist nicht maßstabgerecht.
Untersuche, ob es ein Dreieck mit den oben angegebenen Bestimmungsstücken gibt.

17.



Die Figur ist nicht maßstabgerecht.
Untersuche, ob es ein Dreieck mit den oben angegebenen Bestimmungsstücken gibt.

18.

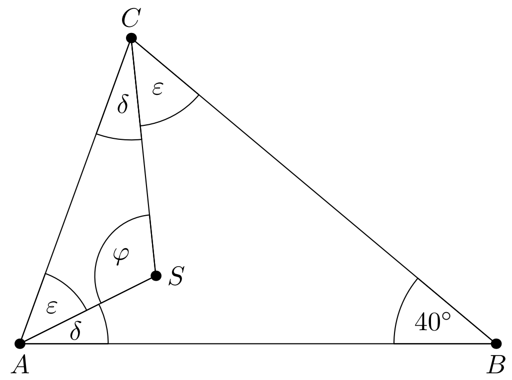


In der obigen Figur gilt: $\overline{AB} = \overline{BC}$. Die Punkte C, P und B sind jeweils die Mittelpunkte der betreffenden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe: das Viereck $PCQR$ ist ein Parallelogramm.

19.

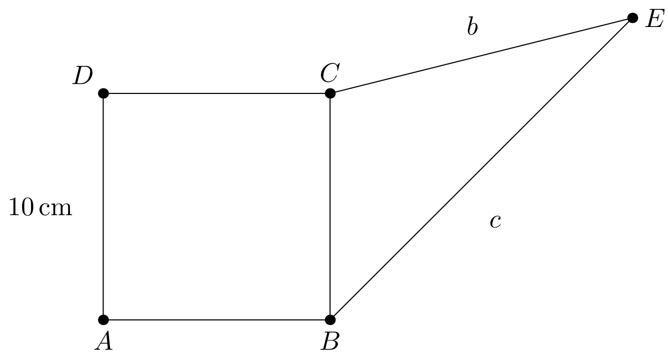


(a) Begründe: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

(b) Zeichne das Dreieck ABC für $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$.

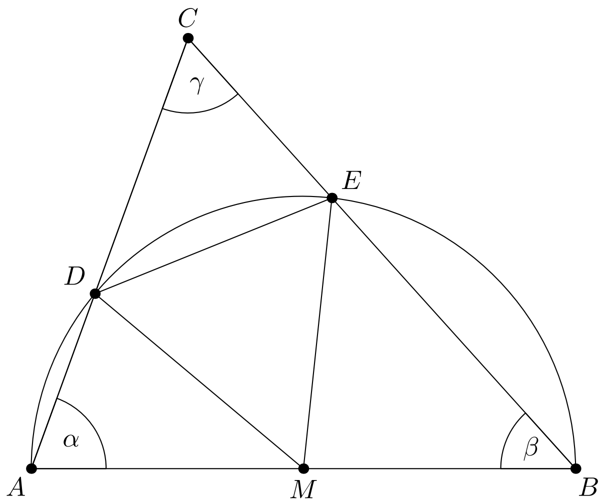
(c) Berechne das Maß φ des Winkels CSA im Dreieck ABC.

20.



Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Der Umfang des Dreiecks BEC ist doppelt so groß wie der Umfang des Quadrates $ABCD$.
Berechne den Umfang der Gesamtfigur.

21.

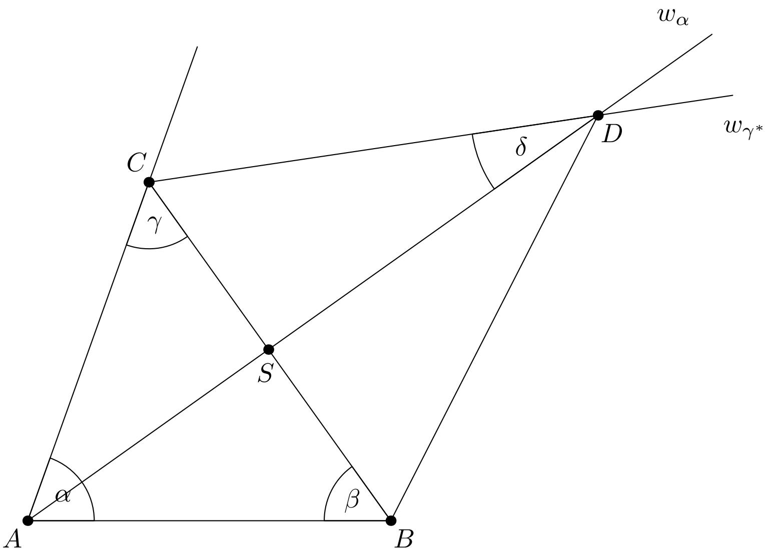


Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 70°$ und $\gamma = 62°$.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks MED.

22.



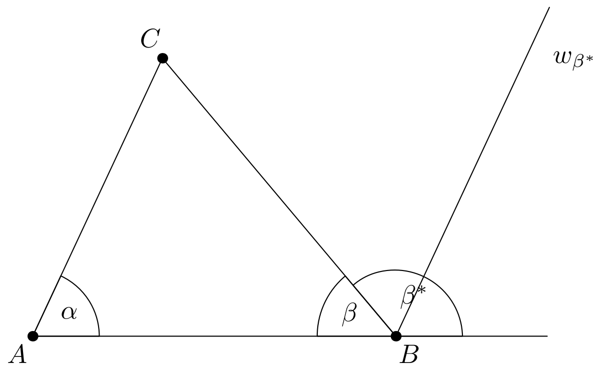
Die Halbgerade w_α halbiert den Winkel α und die Halbgerade w_{γ^*} halbiert den Nebenwinkel von γ.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 70{,}8°$ und $\beta = 54{,}2°$.

(b) Berechne das Winkelmaß δ.

(c) Untersuche, ob es sich bei dem Viereck $ABDC$ um ein achsensymmetrisches Drachenviereck handelt.

23.

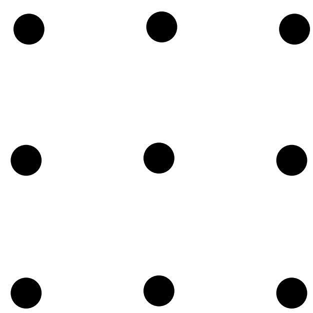


In der Figur halbiert die Halbgerade w_{β^*} den Außenwinkel von β. Gleichzeitig gilt: $w_{\beta^*} \parallel [AC]$.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\beta = 50°$.

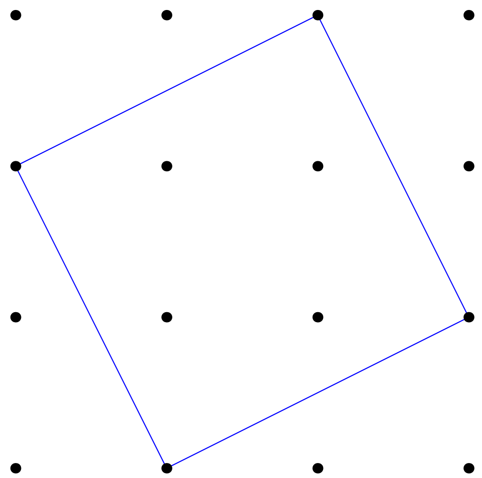
(b) Begründe: Das Dreieck ABC muss gleichschenklig sein.

24. Idee: Toni Chehlarova



Die Schüler/-innen sollen möglichst viele Quadrate finden, deren Eckpunkte auf den schwarzen Punkten liegen.
Martha meint: „In dieser Figur sehe ich sofort vier Quadrate." Sie zeichnet diese ein.
Edwin meint: „In dieser Figur entdecke ich sogar fünf Quadrate." Er zeichnet das fünfte hinzu.
Claudia meint: „Ich habe sogar noch ein Quadrat mehr entdeckt als Edwin."
Was meinst du? Zeichne und begründe.

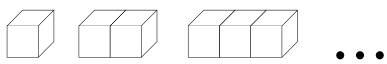
25. Idee: Toni Chehlarova



In das Punktraster ist ein Quadrat eingezeichnet worden.
Finde möglichst viele weitere Quadrate, deren Eckpunkte auf den schwarzen Punkten liegen.

5. Raumgeometrie

1.



Gleiche Würfel werden immer wieder zu neuen Quadern auf die oben dargestellte Weise aneinander gefügt. Die Kantenlänge eines Würfels soll x cm betragen.

(a) Zeige: Für die Oberfläche O_3 des Quaders, der so aus drei Würfeln zusammengefügt ist, gilt $O_3(x) = 14x^2\,\text{cm}^2$.

(b) Zeige: Für die Oberfläche O_4 eines aus vier Würfeln zusammengesetzten Quaders gilt $O_4(x) = 18x^2\,\text{cm}^2$.

(c) Die Oberfläche O_4 eines aus vier Würfeln zusammengesetzten Quaders soll $21,78\,\text{dm}^2$ betragen. Berechne x.

(d) Beschreibe, wie du O_{100} in Abhängigkeit von x berechnest. Gib dein Ergebnis in möglichst einfacher Form an.

(e) Aus wie vielen Würfeln mit der Kantenlänge x cm setzt sich ein Quader mit der Oberfläche $78x^2\,\text{cm}^2$ zusammen?

(f) Untersuche, ob man mit solchen Würfeln auf dieses Weise einen Quader mit einer Oberfläche von $10x^2\,\text{dm}^2$ zusammenbauen kann.

2. Claudia probiert mit ihrer Freundin Susi eine Zahlenzauberei mit einem Würfel aus: „Würfle einmal und lies die Augenzahl ab, ohne dass ich sie sehen kann. Verdopple diese Augenzahl und addiere fünf. Multipliziere dann diesen Summenwert mit fünf. Merke dir dieses Ergebnis.“ Susi hat gewürfelt und gerechnet.
Claudia gibt die nächste Anweisung: „Würfle verdeckt nochmals. Addiere diese Augenzahl zu deinem vorherigen Ergebnis und addiere noch 10. Multipliziere diesen Summenwert mit 10. Würfle ein drittes Mal und addiere diese Augenzahl zum vorherigen Produktwert.“ Das hat Susi gemacht.
Nun fordert Claudia ihre Freundin auf, von dem Ergebnis noch 350 zu subtrahieren und ihr den Wert der Differenz zu nennen.
Susi: „Ich habe 632 herausbekommen.“ „Dann hast du zunächst die Sechs, dann die Drei und am Ende die Zwei gewürfelt.“, antwortet Claudia. „Stimmt!“, ruft Susi überrascht.

(a) Verfolge Susis Rechnungen in allen Einzelheiten.

(b) Rechne mit Buchstaben nach: Der erste Wurf ergibt die Augenzahl a, der zweite die Zahl b und der dritte c.
Weshalb kann Claudia die Augenzahlen dann korrekt wiedergeben?

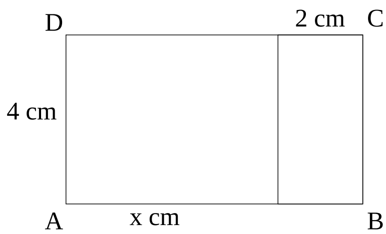
(c) Es gibt auch Spielwürfel mit 8 statt mit 6 Seitenflächen. Hätte Claudias Zahlenzauberei auch mit einem solchen Achterwürfel funktioniert? Begründe.

Teil II.

Wahlpflichtfächergruppe II/III

6. Terme

1. Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ auf zwei verschiedene Arten mit dem Platzhalter x.



2. Maria hat Fehler beim Auflösen von Klammern in binomischen Formeln gemacht:
   (a) $(3a + 10b)^2 = 9a^2 - 60ab + 10b^2$
   (b) $(x + 2)(2 - x) = 4 - x^2$
   (c) $(0{,}5x - 6)^2 = 2{,}5x^2 - 3x + 36$

   Streiche mit einem Farbstift (nicht Rot) alle Fehler einzeln an und verbessere Marias Lösungen auf diesem Blatt. (Nicht jede Lösung muss falsch sein.)

3. Gib mindestens zwei verschiedene Terme an, für die gilt:
   $x = 1,5$ liefert $T(\max) = -6$

4. Beweise: Die Zahl $2^{50} - 1$ lässt sich in zwei Faktoren zerlegen.
   Zeige sodann, dass die Zahl $2^{50} - 1$ die Teiler 4051 und 601 besitzt.

5. Fritz hat bei den folgenden Termumformungen Fehler gemacht. Berichtige sie farbig (nicht mit roter Farbe):
   (a) $4x - 6y + 1{,}6z = 2 \cdot (x + 3y + 3{,}2z)$
   (b) $x^2 \cdot x^5 + 3 : \frac{1}{2} = 6 + x^{10}$
   (c) $-(3x - 2x^2 + 7a) = -3x - 2x^2 - 7x$

6. (a) Begründe rechnerisch: Der Term

$$T_1(x) = \frac{-12}{x^2 + 1{,}5x - 1}$$

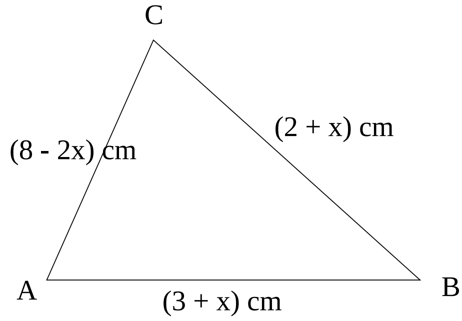
besitzt die Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\,; 0{,}5\}$

(b) Gib zwei weitere von $T_1(x)$ verschiedene Terme an, welche die gleiche Definitionsmenge wie der Term $T_1(x)$ besitzen.

7. Es gilt $x \in \mathbb{Q}^+$.

(a) Zeichne das Dreieck ABC für $x = 1$.

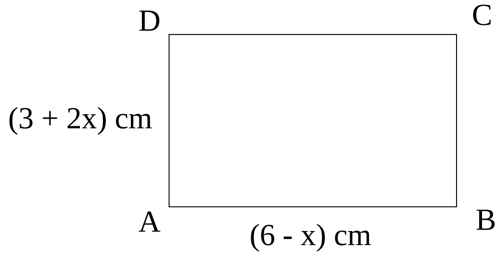
(b) Berechne jeweils den Umfang des Dreiecks ABC für $x \in \{1,5;\ 1,\overline{6};\ 2\frac{1}{8}\}$.
Was stellst du fest?
Ist das immer so? Begründe deine Antwort.



(c) Unter allen möglichen Dreiecken ABC gibt es zwei gleichschenklige. Berechne jeweils alle Seitenlängen.

(d) Was ergibt sich für $x = 4$? Bestimme alle Belegungen von x, für die es überhaupt solch ein Dreieck ABC gibt.

8. (a) Berechne den Umfang des Rechtecks $ABCD$ für $x = 2{,}5$.

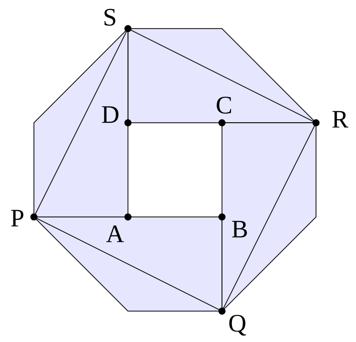


(b) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ für $x = 3{,}5$.

(c) Wie ändert sich die Form des Rechtecks, wenn $x \in \mathbb{Q}^+$ immer kleiner wird?

(d) Gib zwei verschiedene Belegungen von x an, so dass es jeweils dafür kein Rechteck gibt. Begründe deine Wahl.

9. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das Viereck $PQRS$ wurde zusätzlich eingezeichnet.
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat und es gilt: $\overline{AB} = \overline{CR} = x\,\text{cm}$.



(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A des Achtecks in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A(x) = (7x^2)\,\mathrm{cm}^2$]

(c) Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Achtecks $43{,}75\,\mathrm{cm}^2$ beträgt.

(d) Das Achteck lässt sich so in ein Quadrat einbeschreiben, dass zwei Quadratseiten parallel zur Strecke $[DC]$ sind.

- Zeichne dieses Quadrat ein.
- Berechne für $x = 3{,}25$ seinen Umfang.

(e) Welche besonderen Eigenschaften besitzt das Viereck $PQRS$? Begründe deine Ansicht.

10. Fritz Zweistein sagt: Ich habe da was rausgefunden:

$3^2 = 2^2 + 2 + 3$
$4^2 = 3^2 + 3 + 4$
$5^2 = 4^2 + 4 + 5$

(a) Schreibe die nächste Zeile hin.

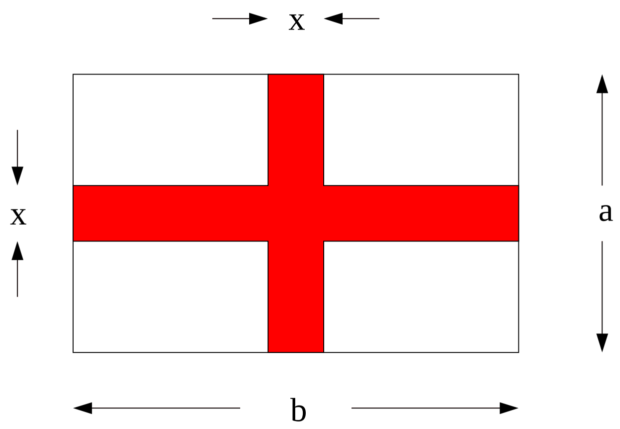
(b) Schreibe auf, welchen Zusammenhang du entdeckt hast.

(c) Finde einem Term, der für jede Gleichung passt.

Bearbeite die obigen Aufträge auch für folgende Gleichungen:

$3^2 = 2 \cdot 4 + 1$
$4^2 = 3 \cdot 5 + 1$
$5^2 = 4 \cdot 6 + 1$

11. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



(a) Zeichne die Figur für $b = 10\,\text{cm}$, $a = 5\,\text{cm}$ und $x = 1\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A des Kreuzes in der Figur in Abhängigkeit von a, b und x.

(c) Die folgenden Terme sollen den Flächeninhalt des weißen Anteils der Flagge darstellen. Kreuze die Terme an, deren Darstellung korrekt ist:

[ ]	$ab - ax - bx + x^2$	[ ]	$ab - ax + bx - x^2$
[ ]	$4[(0{,}5a - 0{,}5x)(0{,}5b - 0{,}5x)]$	[ ]	$\frac{3}{4}ab$
[ ]	$(a - x)(b - x)$	[ ]	$ab - (ax + bx - x^2)$

(d) Gib für $a = 8\,\text{cm}$ und $b = 12\,\text{cm}$ die Menge aller sinnvollen Belegungen von x an.

12. Maria hat bei den folgenden Termumformungen Fehler gemacht. Berichtige sie farbig (nicht mit roter Farbe):

(a) $(a - 0{,}5)^2 = a^2 + a + 2{,}5$

(b) $(2x + 3)^2 = 2x^2 + 12x + 6$

(c) $(4 - x)(x + 4) = x^2 - 16$

13. Löse für $G = \mathbb{Q}$ die folgende Gleichung nach x auf:
$(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = (3 + x)(x - 3) - 4x^2 - 13$

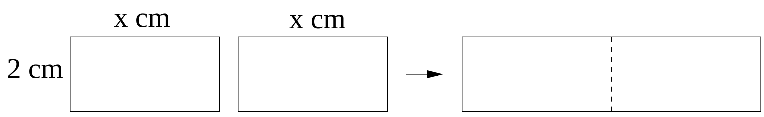
14. Berechne den Extremwert des folgenden Terms:
$T(x) = 2(3 - x)^2 + 12x$
Von welcher Art ist dieser Extremwert?

15. Besitzt der folgende Term einen Extremwert? $T(x) = 3(2 - x^2) - 6x^2$
Wenn du mit „Ja“ antwortest: Von welcher Art ist der Extremwert? Begründung.
Wenn du mit „Nein“ antwortest: Begründung.

16. Daniel stellt sich im Kaufhaus auf eine Rolltreppe. Nach 20 s ist er im oberen Stockwerk angelangt.
Ein anderes Mal ist die Rolltreppe ausgeschaltet. Jetzt braucht er 30 s um auf der Rolltreppe hinaufzulaufen.
Berechne, wie lange Daniel brauchen würde, wenn er auf der eingeschalteten Rolltreppe hinaufliefe.

17. Gegeben sind die beiden Brüche
$$B_1 : \frac{10^{679}}{10^{678}} \quad \text{und} \quad B_2 : \frac{10^{679}+1}{10^{678}+1}.$$
   (a) • Notiere drei Besonderheiten des Bruches B_1.
       • Welchen Wert hat B_1?
   (b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Brüchen B_1 und B_2?
   (c) Welcher der beiden Brüche hat den größeren Wert? Begründe.

18.



Zwei kongruente Rechtecke mit der Länge x cm und der Breite 2 cm sollen so lückenlos zu einem größeren Rechteck aneinander gefügt werden, wie es die Abbildung zeigt.
Der Lehrer, Herr Ganfum, stellt dazu die Aufgabe: „Berechne den Umfang u des so entstandenen großen Rechtecks in Abhängigkeit von x.“
Das Ergebnis von Sophia ist: $u(x) = (4x + 4)$ cm.
Das Ergebnis von Wolfgang ist: $u(x) = [2 \cdot (4 + 2x) - 4]$ cm.
Herr Ganfum meint dazu: „Ihr habt beide recht.“
   (a) Wie hat Sophia gerechnet?
   (b) Wie hat Wolfgang gerechnet?
   (c) Zeige: Die Terme von Wolfgang und Sophia sind äquivalent.
   (d) Berechne die Länge x eines der beiden kleinen Rechtecke, wenn der Umfang des zusammengefügten Rechtecks dann 0,5 m beträgt.

19. Viele Schülerinnen und Schüler kennen die Werte der Quadrate zweiziffriger Zahlen auswendig:
Z.B.: $12^2 = 144$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$ oder $19^2 = 361$. Karin und Heinz wollen

nun eine Möglichkeit finden, wie sie die Quadrate **aller** zweistelligen Zahlen leicht berechnen können.
Heinz versucht es mit 65:
$65 = 60 + 5 \quad \Rightarrow \quad 65^2 = 60^2 + 5^2 = 3600 + 25 = 3625.$
Karin probiert es mit 65 auf eine andere Weise:
$65 = 70 - 5 \quad \Rightarrow \quad 65^2 = 70^2 - 5^2 = 4900 - 25 = 4875.$
Sie meint dazu: „Hier stimmt doch etwas nicht.“ Auch Heinz geht ein Licht auf: „Klar, wir hätten Klammern setzen müssen!“

(a) Erkläre, was nicht stimmen kann.

(b)
- Notiere, wie Heinz die Klammern setzen müsste.
- Löse die Klammern auf und berechne damit den Wert von 65^2, sowohl wie es Karin als auch wie es Heinz vorhatte.

(c) Anja hat zugeschaut. Sie möchte 99^2 berechnen. Für welche Zerlegung entscheidet sie sich wohl? Für die von Heinz oder die von Karin? Begründe deine Antwort und berechne das Ergebnis im Kopf.

(d) Formuliere die Regel, wie du die Quadrate zweistelliger Zahlen auf diese Weise berechnest.

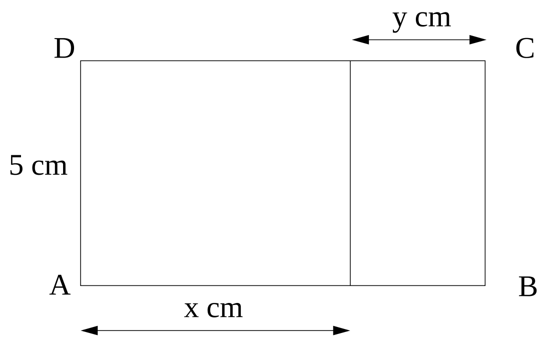
20. Die Klasse 8a der Abel-Schule hat von ihrem Lehrer, Herrn Korfat, die folgende Aufgabe bekommen:
„Berechne den Produktwert aus zwei gleichen natürlichen Zahlen. Subtrahiere nun vom ersten Faktor eine natürliche Zahl und addiere zum zweiten Faktor die gleiche natürliche Zahl. Multipliziere jetzt den Wert der Differenz mit dem der Summe. Vergleiche diesen Produktwert mit jenem, den du anfangs erhalten hast.“
Edwin rechnet: $100 \cdot 100 = 10000$ und $(100 - 99) \cdot (100 + 99) = 199 < 10000$
Egon rechnet: $7 \cdot 7 = 49$ und $(7 - 2) \cdot (7 + 2) = 45 < 49$
Martha rechnet: $1000 \cdot 1000 = 1000000$ und $(1000 - 1000) \cdot (1000 + 1000) = 0 < 1000000$
Helga rechnet: $11 \cdot 11 = 121$ und $(11 - 21) \cdot (11 + 21) = -320 < 121$
Sie melden sich und meinen übereinstimmend: „Der zweite Produktwert ist immer kleiner als der erste.“
Herr Korfat gibt zu bedenken: „Wirklich immer?“
Martha muss zugeben: „Nein, weil ... “

(a) Wie hat Martha ihre Antwort begründet?

(b) Es sei a eine solche natürliche Zahl und k eine zweite natürliche Zahl, die einmal von a subtrahiert und andererseits zu a addiert wird. Löse damit die von Herrn Korfat gestellte Aufgabe.

21. Sind die beiden Terme
$T_1(x) = (123456x - 654321)^2$ und $T_2(x) = (654321 - 123456x)^2$ äquivalent?
Begründe deine Antwort.

22.



(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ für $x = 7$ und $y = 2$.

(b) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ mit den Variablen x und y auf zwei verschiedene Arten.

(c) Das Rechteck $ABCD$ kann für die passende Wahl der Varaibalen x und y zum Quadrat werden. Gib zwei Möglichkeiten an.

(d) Unter allen möglichen Rechtecken $ABCD$ gibt es beliebig viele, die einen Flächeninhalt von $65\,\text{cm}^2$ aufweisen. Gib für diesen Fall drei Belegungen für x und die jeweils dazu passende Belegung für y an. Mache jeweils die Probe.

23. Gegeben ist der Poduktterm $T(x) = (4 - x)(4 + x)$.

(a)
- Tabellarisiere den Term für $x \in [-4; 4]_{\mathbb{Z}}$
- Was fällt dir bei der Betrachtung der Termwerte in der Tabelle alles auf?

(b) Zeige, dass die beiden Terme $T(x) = (4 - x)(4 + x)$ und $T^*(x) = 16 - x^2$ auf $G = \mathbb{Q}$ äquivalent sind.

(c)
- Begründe: Der Term x^2 wird für alle $x \in \mathbb{Q}$ nie negativ.
- Was folgt daraus für den Term $-x^2$?
- Begründe: Der Term $T(x) = (4 - x)(4 + x)$ kann für alle $x \in \mathbb{Q}$ höchstens den Wert 16 annehmen.

24. Sabine und Helmut untersuchen die Extremwerteigenschaften der drei folgenden Terme auf $G = \mathbb{Q}$:

$$T_1(x) = (x - 3)(x + 3)$$
$$T_2(x) = (x - 4)(4 + x)$$
$$T_3(x) = -(5 + x)(5 - x)$$

Helmut hat Folgendes herausgefunden:

- „Nachdem ich eine binomische Formel angewendet habe, ist klar, dass jeder Term ein Minimum besitzt“
- „Die Belegung von x, die das jeweilige Minimum liefert, ist immer die gleiche.“

Sabine hat Zweifel: „Der Term $T_3(x)$ beginnt mit einem Minuszeichen. Also müsste $T_3(x)$ doch ein Maximum enthalten.“

(a) Hat Sabine Recht? Begründe.

(b) Welche Belegung von x liefert jeweils den Extremwert? Begründe.

25. Vereinfache so weit wie möglich:

(a) $1,5ab - (0,5 \cdot a \cdot 2)^2 - \frac{3}{2}ab + a^2 =$

(b) $(3c)^2 - 3c^2 - (-3c)^2 =$

26. Gegeben sind die folgenden Terme auf $G = \mathbb{Q}$:
$T_1(x) = x^3 - x^2 - x - 1$
$T_2(x) = x^2 - 2x + 1$
$T_3(x) = -x \cdot (x + 1) - 1$
$T_4(x) = x^2 - 1 - 2 \cdot (x - 1)$

(a) Fritz stellt zwei Behauptungen auf:

- „Wenn man für alle Terme den Termwert für $x = -1$ berechnet, dann ist der Wert des ersten Terms größer als der des dritten.“
- „Wenn man für alle Terme den Termwert für $x = -1$ berechnet, dann ist der Wert des zweiten Terms genauso groß wie der des vierten.“

Überprüfe diese beiden Behauptungen durch Einsetzen.

(b) Überprüfe durch Umformung, dass die Terme $T_2(x)$ und $T_4(x)$ äquivalent sind.

(c) Sind die beiden Terme
auf $G = \mathbb{Q}$ über der Grundmenge $G = \{0; 1; 2\}$ äquivalent? Fertige dazu eine numerische Wertetabelle an.

[Die Idee zu dieser Aufgabe stammt aus: „Thema Mathematik“ im BUCHNER-Verlag, Lehrerband 2008]

27. Egon bildet die Spiegelzahlen von zweiziffrigen Zahlen, indem er deren Ziffern jeweils vertauscht. Dann errechnet er vom jeweilgen Zahlenpaar die Summe, z.B. so:
$13 + 34 = 44$ oder $81 + 18 = 99$ oder $25 + 52 = 77$.
„Komisch, der Summenwert besteht stets aus zwei gleichen Ziffern. Ist das immer

so?“, fragt er seinen Vater. Der antwortet: „Nein, finde selbst ein Gegenbeispiel.“ Egon rechnet und entdeckt sogar mehrere Gegenbeispiele.

(a) Finde zwei Beispiele dafür, dass der Summenwert nicht aus lauter gleichen Ziffern bestehen muss.

(b)
- Egon betrachtet die Summenwerte seiner Beispiele in der Aufgabe (a) genauer und entdeckt einen Zusammenhang zwischen den Ziffern. Welcher ist das?
- Jede zweiziffrige Zahl lässt sich als Term in der Form $10a + b$ darstellen, wobei $a \in \{1; 2; \ldots 9\}$ und $b \in \{0; 1; 2; \ldots 9\}$ gilt.
  - Zeige mit Hilfe des obigen Terms, dass jeder Summenwert aus einer zweiziffrigen Zahl und ihrer Spiegelzahl stets durch 11 teilbar ist.
  - Wenn du die beiden Ziffern der ursprünglichen zweiziffrigen Zahl auf geeignete Weise kombiniertst, dann erhältst du neben der 11 einen weiteren Teiler des Summenwertes.

(c) Ermittle alle Paare aus einer zweistelligen Zahl und ihrer Spiegelzahl, deren Summenwert 143 beträgt.

28. Jede zweistellige natürliche Zahl lässt sich durch den Term $10a + b$ darstellen, wobei a und b die Ziffern sind.
Beispiel: $75 = 10 \cdot 7 + 5$; also gilt $a = 7$ und $b = 5$.
Unter der Quersumme q einer natürlichen Zahl versteht man die Summe aus ihren einzelnen Ziffern. In unserem Beispiel ist $q = 7 + 5 = 12$.

(a)
- Subrahiere von der Zahl 75 deren Quersumme.
- Notiere die Menge aller Teiler des Differenzwertes.

(b)
- Wiederhole die vorigen Schritte mit der Zahl 59.
- Bestimme den ggT aus beiden Teilermengen.

(c)
- Wiederhole die Rechenschritte mit einemr selbst gewählten zweistelligen Zahl.
- Was stellst du fest?
- Gilt deine Feststellung für alle zweistelligen Zahlen? Begründe deine Antwort.

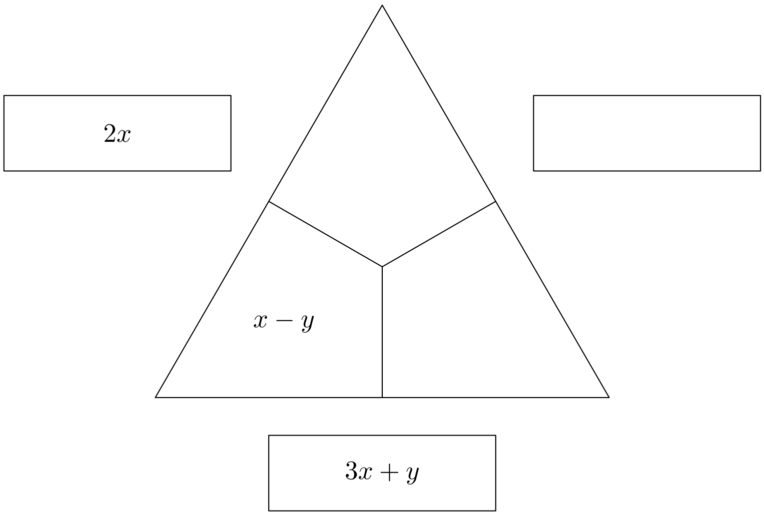
(d)
- Experimentiere mit dreistelligen Zahlen.
- Begründe: Subtrahiert man von einer dreistelligen deren Quersumme, so ist der Differnzwert stets durch 9 teilbar.

(e) Gilt das für jede beliebige natürliche Zahl? Begründe.

29. Franz soll die Anzahl n von natürlichen Zahlen bestimmen, die zwischen zwei natürlichen zahlen x und y mit $y > x$ liegen.
Nach einigen Rechenbeispielen findet er eine Formel: $n = y - x - 1\,.$ (*)
   (a) • Bestimme mit Hilfe von (*) alle natürlichen Zahlen, die zwischen 69 und 83 liegen.
       • Bestätige dein Ergebnis, indem du die in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst.
   (b) Berechne die Anzahl der natürlichen Zahlen, die größer als 513 799 und gleichzeitig kleiner als 803 102 sind.
   (c) Franz überprüft die Formel (*) jetzt an folgenden Sonderfällen:
       • x und y sind unmittelbare Nachbarn.
         Gilt die Formel (*) auch hierfür?
       • x und y sind ganze Zahlen.
         Berechne n für $x = -11$ und $y = 3$ sowie für $x = -39$ und $y = -23$.
         Stimmt die Formel auch in diesen beiden Fällen?

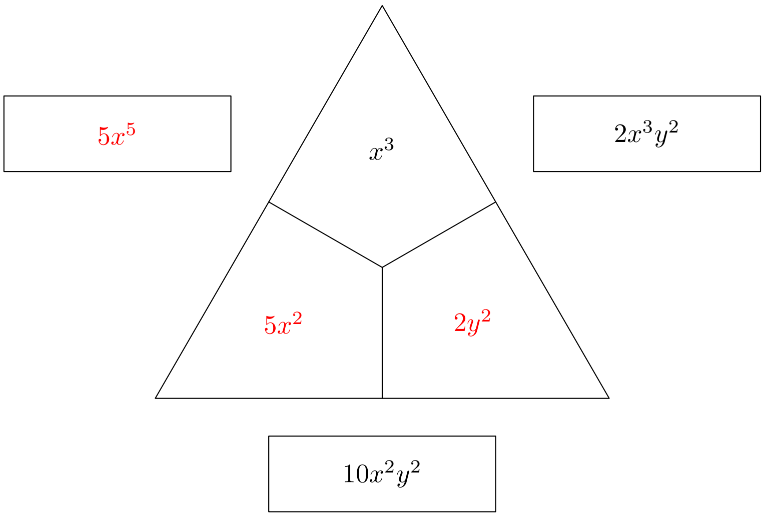
30. Edwin entdeckt in einem Rechenbuch ein Zahlenrätsel:
„Denke dir eine dreistellige Zahl, die durch 10 teilbar ist. Streiche deren letzte Ziffer. Subtrahiere diese neue Zahl von der ursprünglichen dreistelligen Zahl. Dann ist der Differenzwert stets durch die neue Zahl teilbar.“
   (a) Bestätige die obige Behauptung an einem selbst gewählten Beispiel.
   (b) Untersuche an einem weiteren Beispiel, ob die Behauptung auch für vierstellige Zahlen gilt.
   (c) Edwin hat vieles durchprobiert. Alle seine Rechnungen haben die obige Behauptung bestätigt. Schließlich setzt er für die neue Zahl den Platzhalter x und probiert es allgemein mit x. Er kommt zu dem Schluss „Die Behauptung gilt sogar für alle natürlichen durch 10 teilbaren Zahlen!“ Begründe, dass Edwin Recht hat.

31.



In die drei Felder im Dreieck gehören Terme, wobei in jedem der Rechtecke die Summe aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Termen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Terme.

32.



In die drei Felder im Dreieck gehören Terme, wobei in jedem der Rechtecke das Produkt aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Termen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Terme.

33. Lisa weiß, dass eine natürliche Zahl n dann durch 9 teilbar ist, wenn ihre Quersumme QS durch 9 teilbar ist.
Sie stellt sich nun folgende Fragen:

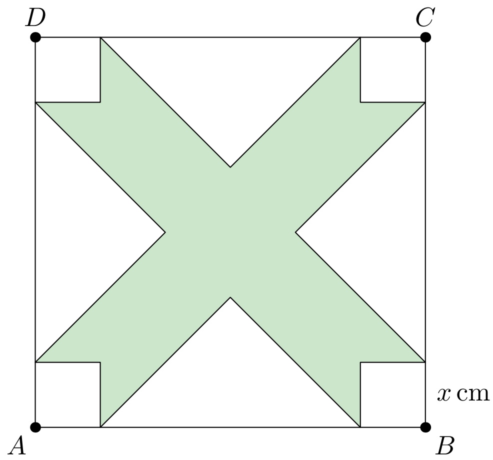
(1) „Ist der Wert der Summe aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme auch durch 9 teilbar?“

(2) „Ist der Wert des Produktes aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme durch 27 teilbar?“

(3) „Ist der Wert des Quotienten aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme durch 9 teilbar?“

Was meinst du? Begründe jeweils deine Ansicht.

34.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat.
An seinen Eckpunkten befinden sich vier kleine Quadrate, deren Seitenlänge jeweils x m beträgt.
Die vier Dreiecke an den Quadratseiten sind jeweils gleichschenklig-rechtwinkig.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $x = 1$.

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A des eingefärbten Kreuzes gilt in Anhängigkeit von x:

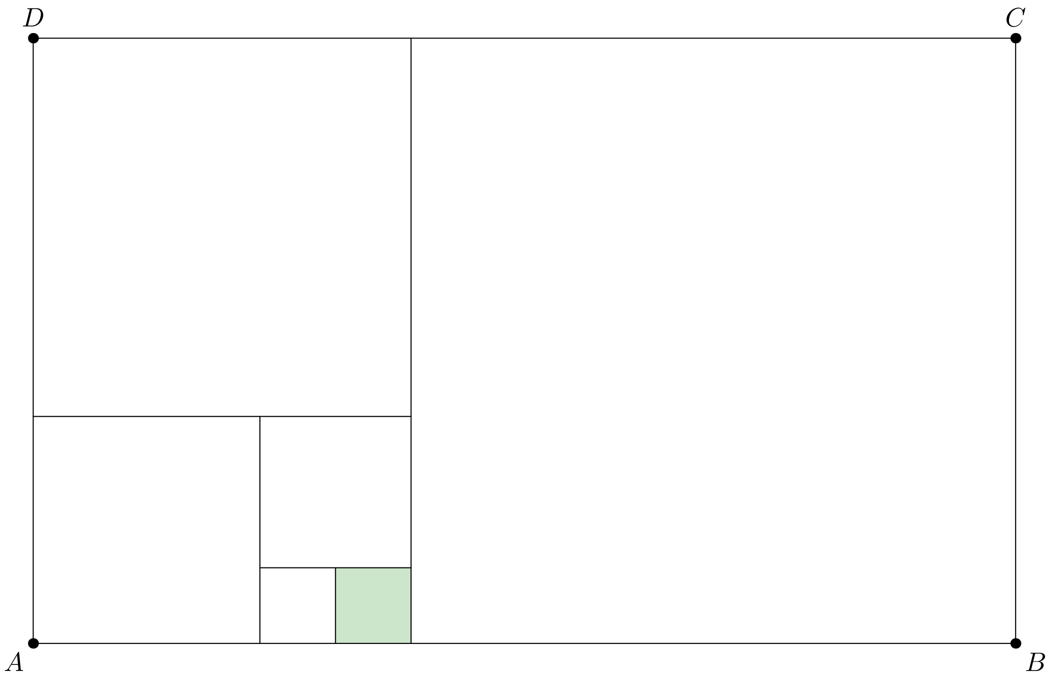
$$A(x) = (-8x^2 + 24x)\,\text{cm}^2\,.$$

(c) Berechne $A(0)$ und $A(3)$. Deute dein Ergebnis mit Hilfe deiner Zeichnung.

(d) Unter allen Kreuzen gibt es eines, dessen Flächeninhalt maximal ist.

- Berechne dieses Maximum sowie die zugehörige Belegung von x.
- Zeichne erneut das Quadrat $ABCD$ mit dem einbeschriebenen größten Kreuz.
- Wie viel Prozent der Fläche des Quadrates $ABCD$ nimmt das größte Kreuz ein? Löse das Problem auf zwei verschiedene Arten.

35.



Ein rechteckiges Grundstück $ABCD$, dessen Flächeninhalt $2{,}34\,\mathrm{ha}$ beträgt, ist in lauter quadratische Parzellen eingeteilt. Eine der beiden kleinsten Parzellen, die im Plan farbig gekennzeichent ist, wird eingezäunt.
Berechne die Länge des Zaunes.

36. Gegeben ist die Gleichung $2x+3=11$ für $G=\mathbb{N}$. Welche der folgenden Gleichungen haben die gleiche Lösung? Begründe Deine Antwort, ohne die Lösung jeder Gleichung zu berechen.

(a) $3+2x=11$

(b) $(3+x)+x=11$

(c) $x+(3+x)=11$

(d) $3+x=-x+11$

(e) $2+3\cdot x=11$

(f) $x^2+3=11$

(g) $2000x+3000=11000$

7. Lineare Gleichungen und Ungleichungen

1. Gegeben ist die Gleichung

$$13 - 2x = x + 10, \quad G = \mathbb{Z}\,.$$

   (a) Zeige, dass $x = 2$ keine Lösung dieser Gleichung ist.

   (b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass $x = 2$ die Lösung der abgeänderten Gleichung ist, und führe den Nachweis.

2. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung $4 - 6x = 3(11 - 2x)$ ist für $G = \mathbb{Q}$ leer.

3. Gegeben ist die Gleichung

$$7 - x = 3x + 11, \quad G = \mathbb{Z}$$

   (a) Zeige, dass $x = -1$ die Lösung dieser Gleichung ist.

   (b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass die Lösungsmenge der abgeänderten Gleichung leer ist, und führe den Nachweis.

4. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + 8 = 6$ ist für $G = \mathbb{Q}$ leer.

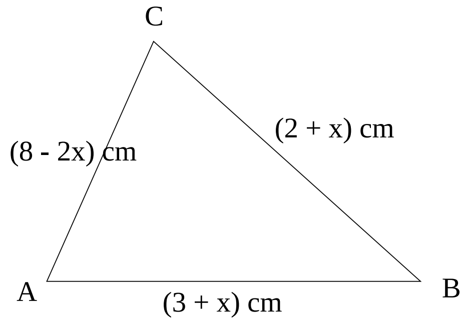
5. Es gilt $x \in \mathbb{Q}^+$.

(a) Zeichne das Dreieck ABC für $x = 1$.

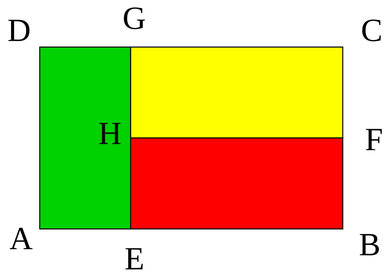
(b) Berechne jeweils den Umfang des Dreiecks ABC für $x \in \{1,5;\ 1,\overline{6};\ 2\frac{1}{8}\}$.
Was stellst du fest?
Ist das immer so? Begründe deine Antwort.

(c) Unter allen möglichen Dreiecken ABC gibt es zwei gleichschenklige. Berechne jeweils alle Seitenlängen.

(d) Was ergibt sich für $x = 4$? Bestimme alle Belegungen von x, für die es überhaupt solch ein Dreieck ABC gibt.



6.



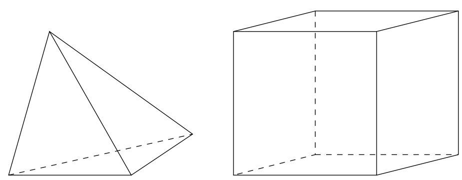
Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.
Die drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Ihre Seitenlängen stehen jeweils im Verhältnis 2:3. Weiter gilt: $\overline{HF} = 3x\,\text{cm}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

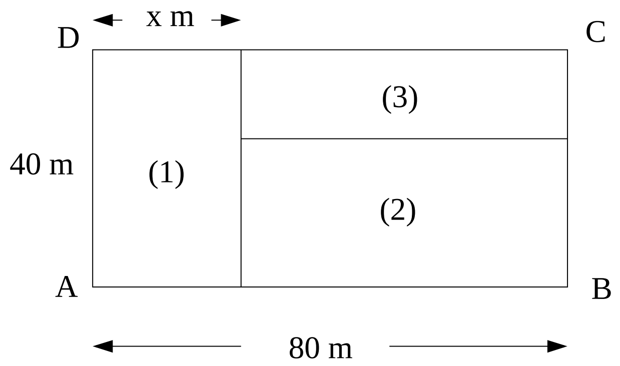
(b) Welchen Flächeninhalt besitzt eines der inneren Rechtecke, wenn der Saum der Fahne 1 m 8 cm lang ist?

7. Die eine Seite eines Rechtecks ist 2 cm länger als die andere. Der Rechteckumfang liegt zwischen 60 cm und 62 cm.
Welche Seitenlängen sind dann für die kürzere Seite möglich?

8. In einer Spielzeugkiste befinden sich Würfel und Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche. Es werden 30 Körper mit 300 Kanten gezählt. Wie viele Würfel und wie viele Pyramiden befinden sich in der Kiste?

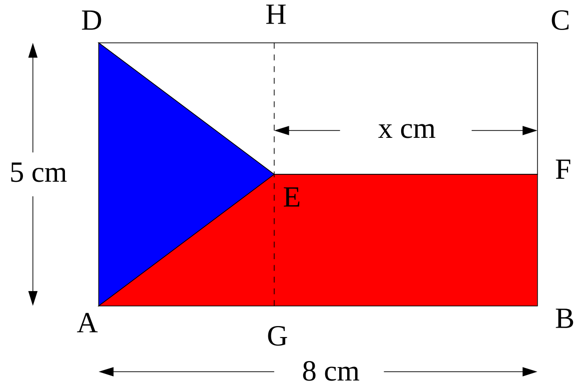


9.



Ein rechteckiges Wiesengrundstück $ABCD$, das zur Gemeinde Besselbach gehört, soll in drei rechteckige Baugrundstücke (1), (2) und (3) aufgeteilt werden. Es gilt stets $x \in \mathbb{Q}^+$. Der dortige Bürgermeister Pickelschau beauftragte seinen Baureferenten Schaufelpick, zu prüfen, ob sich für einen bestimmten x-Wert gleich große Parzellen ergäben.

10. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 5\,\text{cm}$ und $\overline{EF} = x\,\text{cm}$.
Zusätzlich wurde die Hilfslinie $[HG]$ gestrichelt eingezeichnet.
Hinweis: Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne die Figur für $x = 4,5$.

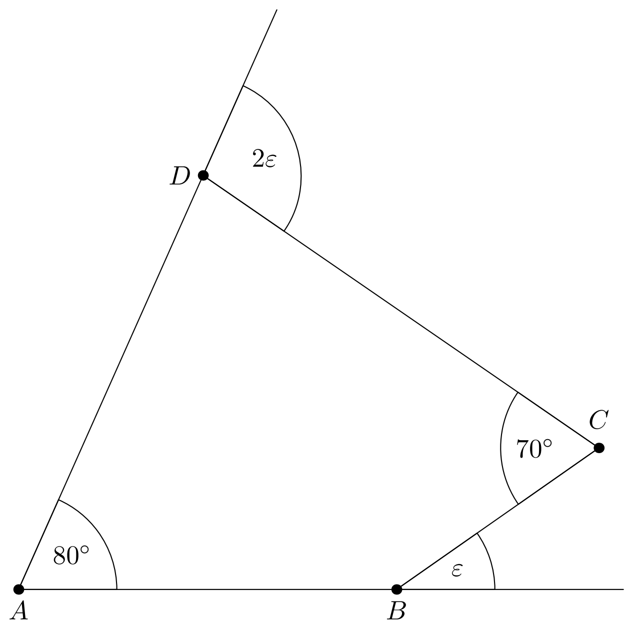
(b) Berechne den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABFE$ in Abhängigkeit von x.
Hinweis: Verwende für deine Überlegungen die Strecke $[HG]$.
[Ergebnis: $A_T(x) = (1,25x + 10)\,\text{cm}^2$]

(c) Berechne x so, dass alle drei Teilflächen im Inneren des Rechtecks $ABCD$ gleich groß sind.

(d) Berechne den Flächeninhalt A_D des Dreiecks AED in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A_D(x) = (20 - 2,5x)\,\mathrm{cm}^2$]

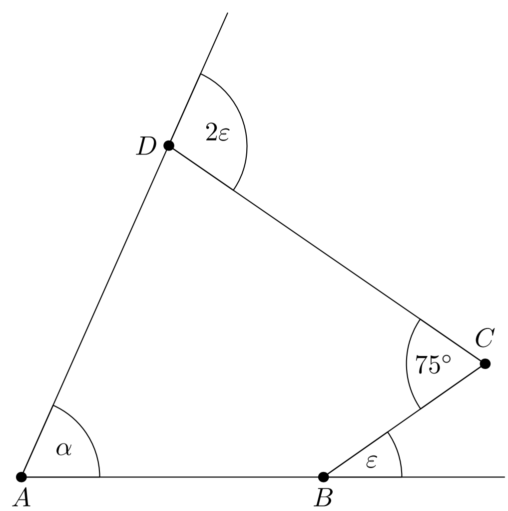
(e) Bestätige das Ergebnis der Aufgabe (c) mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgaben (b) und (d).

11.



Berechne ε.

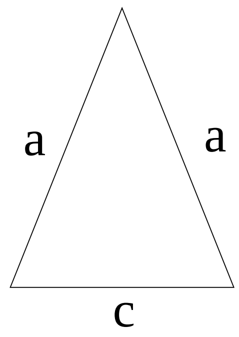
12.



(a) Berechne α für $\varepsilon = 48°$.

(b) Für welche Werte von ε existiert das Viereck $ABCD$?

13.



(a) Um welches besondere Dreieck handelt es sich? Begründe deine Antwort.

(b) Fritz soll für $a = 4{,}8\,\text{cm}$ und $c = 10\,\text{cm}$ ein solches Dreieck konstruieren. Nach einer Weile meint er: „Aber das geht doch gar nicht!“
Begründe, dass Fritz Recht hat.

(c) Zeichne zwei verschiedene gleichschenklige Dreiecke, die jeweils einen Umfang $u = 12\,\text{cm}$ besitzen.

14. Für alle Ungleichungen gilt: $G = \mathbb{Q}$.

(a) Berechne die Lösungsmenge von $2x - 4 > 0$.

(b) Beründe ohne nach x aufzulösen: Die Ungleichung $6x - 12 > 0$ hat die gleiche Lösungsmenge wie die Ungleichung in der Aufgabe (a).

(c) Bestimme die Lösungsmenge von $1387 \cdot (2x - 4) > 0$.

(d) Bestimme die Lösungsmenge von $(x^2 + 1) \cdot (2x - 4) > 0$.

(e) Bestimme die Lösungsmenge von $(x - 11)^2 \cdot (2x - 4) > 0$.

15. Im September 2011 orderte das Kaufhaus X&Y 200 T-Shirts. Davon wurden im gleichen Monat 76 Stück verkauft.
Einen Monat später verteuerte sich dieser Artikel um je einen EURO. In diesem Zeitraum wurden jedoch nur 72 Exemplare verkauft. Es stellte sich heraus, dass die Einnahmen aus dem Verkauf von diesen T-Shirts im Oktober die gleichen waren wie die im September 2011 .
Berechne den Verkaufpreis eines T-Shirts im September 2011 .

16. Carsten rechnet eine Gleichung aus, die er aus dem Buch übertragen hat. Der Lehrer betrachtet seinen Hefteintrag: „Deine Schrift ist wie schon so oft zum Teil unleserlich, aber dein Ergebnis ist richtig.“
In seinem Heft steht (der unleserliche Teil ist durch ein Kästchen ersetzt):

$$\begin{aligned} 2x - \square &= -2 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

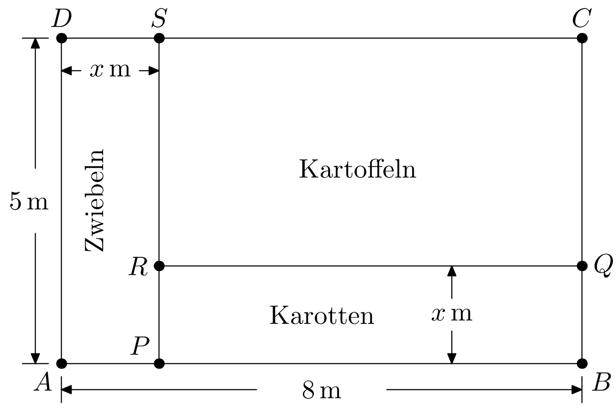
Ermittle auf zwei verschiedene Arten, was im Buch anstelle des Kästchens stand.

17. Carsten rechnet eine Gleichung aus, die er aus dem Buch übertragen hat. Der Lehrer betrachtet seinen Hefteintrag: „Deine Schrift ist wie schon so oft zum Teil unleserlich, aber dein Ergebnis ist richtig.“
In seinem Heft steht (der unleserliche Teil ist durch ein Kästchen ersetzt):

$$\begin{aligned} 2x - \square &= -2 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Ermittle auf zwei verschiedene Arten, was im Buch anstelle des Kästchens stand.

18.

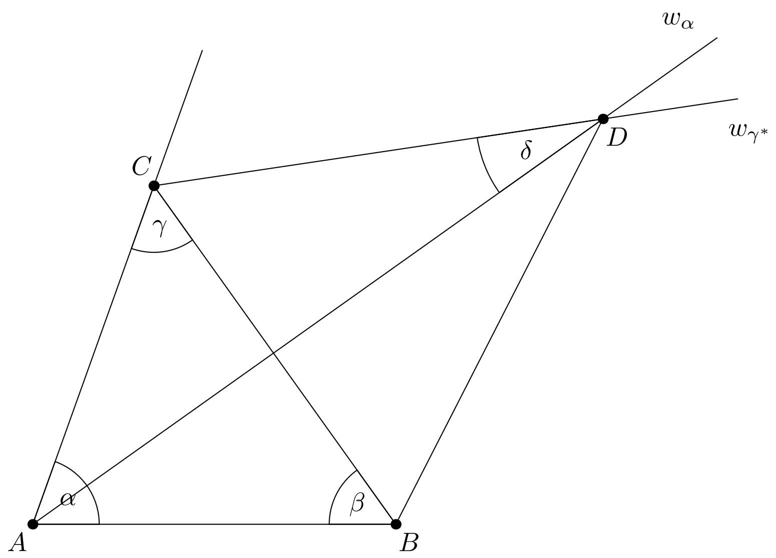


Das rechteckige Feld $ABCD$ ist 8 m lang und 5 m breit.
Auf den drei rechteckigen Parzellen werden Karotten, Zwiebeln und Kartoffeln angebaut. Die beiden Streifen für Karotten und Zwiebeln sind jeweils x m breit. Sie besitzen den gleichen Flächeninhalt. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

(a) Berechne x. [Ergebnis: x=3]

(b) Wie viel Prozent der Gesamtfläche nimmt dann das Kartoffelfeld ein?

19.



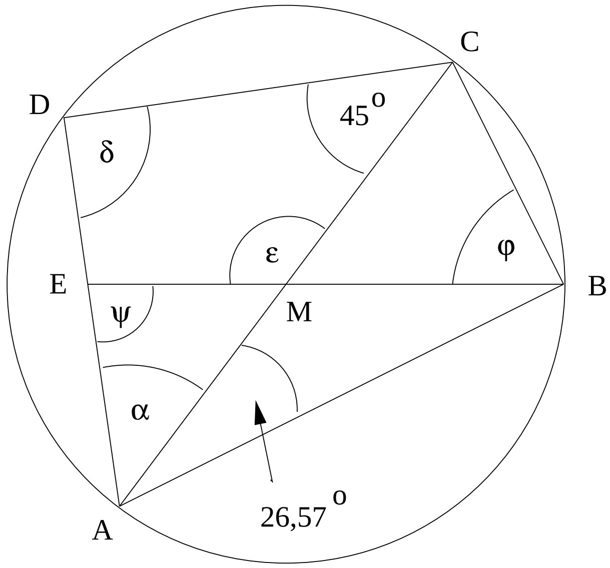
Die Halbgerade w_α halbiert den Winkel α und die Halbgerade w_{γ^*} halbiert den Nebenwinkel von γ. Weiter gilt: $\alpha = 70,8°$ und $\delta = 27,1°$.
Das Viereck $ABDC$ ist nicht achsensymmetrisch.

(a) Berechne die Winkelmaße γ und β. [Teilergebnis: $\beta = 54,2°$]

(b) Begründe, dass es sich bei dem Viereck $ABDC$ nicht um ein achsensymmetrisches Drachenviereck handelt.

8. Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche

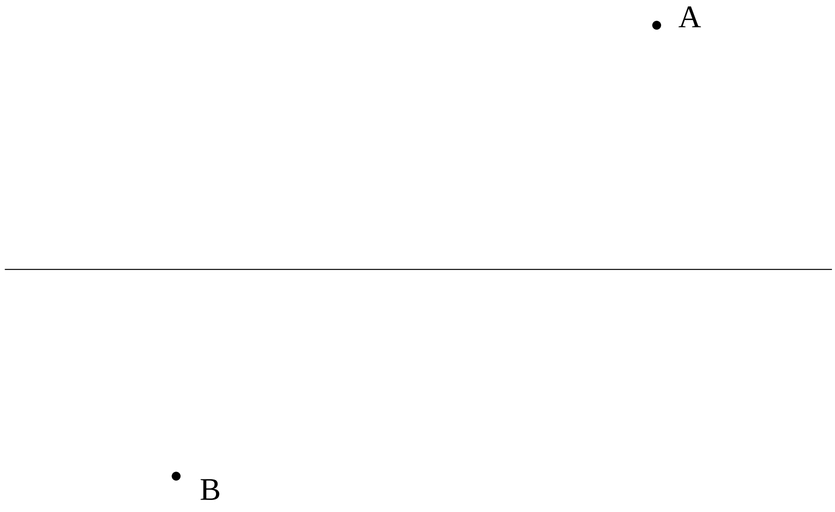
1. Ermittle alle mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße.



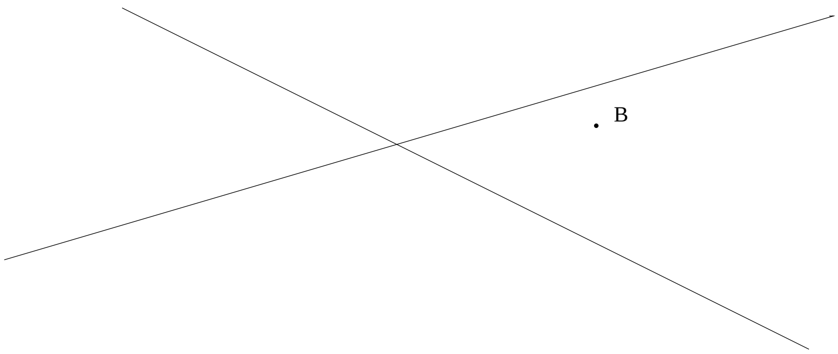
2. Gegeben ist ein Kreis k mit Radius $r = 5\,\text{cm}$ und dem Mittelpunkt $M(1 \mid 2)$.
   Durch die Punkte $A(-5 \mid 4)$ und $B(7 \mid 3)$ verläuft eine Gerade g.
   (a) Fertige gemäß den Angaben eine Zeichnung an.
   Platzbedarf: $-7 \leqq x \leqq 8$ und $-4 \leqq y \leqq 8$
   (b) Kennzeichne farbig eindeutig die Menge aller Punkte auf der Kreislinie k, die von der Geraden g mindestens $2\,\text{cm}$ Abstand haben.
   (c) Fritz behauptet: „Auf der ganzen Kreislinie k gibt es keinen Punkt, der vom Punkt A weniger als $1\,\text{cm}$ entfernt ist.“ Hat Fritz Recht? Die Begründung für eine Antwort sollst du in deiner Zeichnung deutlich machen.

3. Im Zuge des sechsspurigen Ausbaus der Autobahn A3 werden Lärmschutzmaßnahmen notwendig. Der Lärmschutzwall muss vom unten eingezeichneten Mittelstreifen der Autobahn einen Abstand von $50\,\text{m}$ haben. Er wird aber nur in dem Bereich

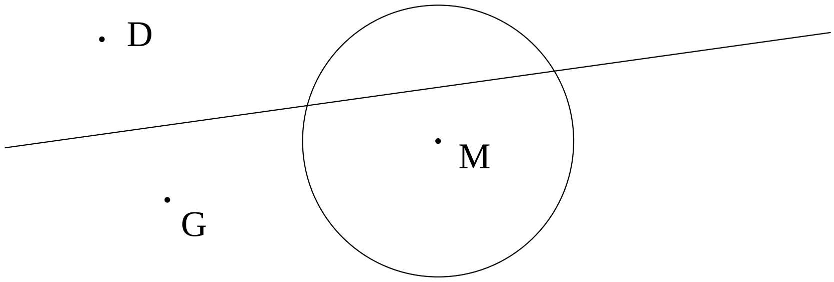
eingerichtet, wo die Entfernung zwischen Ortschaft und Lärmschutzwall weniger als 200 m beträgt. Markiere den möglichen Verlauf des Walls für die Ortschaften A und B! (Maßstab: 100 m $\hat{=}$ 2 cm)



4. In der Nähe einer Landstraßenkreuzung wird ein Familienerholungsheim errrichtet. Es soll von beiden Straßen den gleichen Abstand haben und außerdem von einem Bauernhof B 40 m entfernt liegen. Kennzeichne den möglichen Standort S! (Maßstab: 20 m $\hat{=}$ 1 cm)

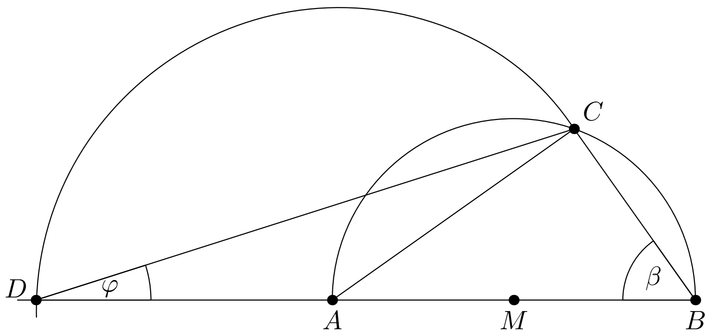


5. Formuliere zur abgebildeten Ortslinienverknüpfung eine mögliche praxisorientierte Aufgabenstellung!



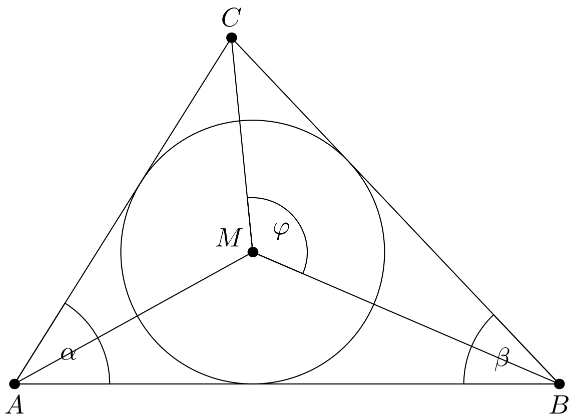
6. Gegeben sind die Punkte $A(4 \mid 4,5), B(3 \mid -1)$ und $C(7 \mid 3)$.
   (a) Zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-1 \leqq x \leqq 10$ und $-3 \leqq y \leqq 8$
   (b) Kennzeichne farbig die Menge aller Punkte P, die jeweils von den Punkten B und C gleich weit entfernt sind und die gleichzeitig vom Punkt A mindestens $2,5\,\text{cm}$ entfernt sind.
   (c) Mache in deiner Zeichnung deutlich, ob es unter allen Punkten P, welche die in Aufgabe (b) genannten Eigenschaften besitzen, solche gibt, die vom Punkt C höchstens $2\,\text{cm}$ entfernt sind. Notiere eine Begründung.

7.



Die Punkte M und A sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.
   (a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\beta = 54,68°$.
   (b) Berechne φ auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

8.



Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist der Punkt M.

(a) Zeichne die Figur für $\alpha = 70^\circ$, $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 44^\circ$.

(b) Berechne das Maß φ des Winkels BMC.

(c)
- Berechne für $\beta = 60^\circ$ erneut das Winkelmaß φ.
  Was fällt dir auf?
- Zeige: $\varphi = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$.

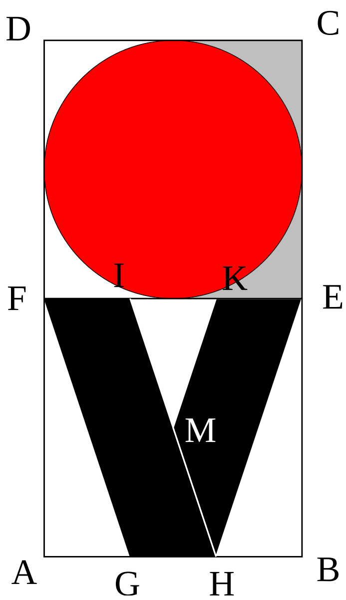
(d) Berechne α für $\varphi = 135{,}68^\circ$.

9. Dreiecke und Vierecke

1. Von einem Dreieck ABC weiß man:
   (a) $a = 5\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\gamma = 50°$
   (b) $a = b$ und $\beta = 60°$

   Fertige jeweils für den Fall (a) und für den Fall (b) eine Planfigur an. Begründe damit die besonderen Eigenschaften dieser Dreiecke.

2. Das ist ein Bild des Logos der Firma MARABU, die Farben herstellt.

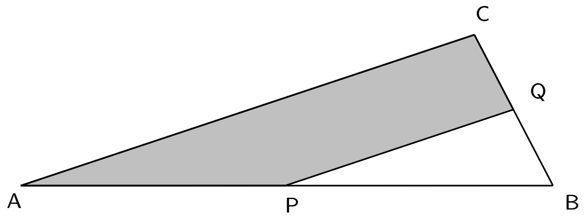


   Diese Figur ist aus zwei Quadraten aufgebaut und es gilt:
   $\overline{AG} = \overline{GH} = \overline{GH} = \overline{HB} = \overline{FI} = \overline{IK} = \overline{KE} = x\,\text{cm}$.

   (a) Zeichne die Figur für $x = 2$.
   (b) Berechne den Flächeninhalt A des Rechtecks $ABCD$ in Abhängigkeit von x.
   [Ergebnis: $A(x) = 18x^2\,\text{cm}^2$]
   (c) Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ $1{,}125\,\text{dm}^2$ groß ist.
   (d) Vergleiche den Flächeninhalt des Dreiecks HBE mit dem des Parallelogramms $GHIF$.

(e) Untersuche rechnerisch, ob die dunkel getönte Restfläche zwischen dem Kreis und dem Quadrat $FECD$ größer oder kleiner ist als die des Dreiecks HBE.

3.



Das Dreieck ABC hat einen Flächeninhalt von $10\,\text{cm}^2$. Zusätzlich gilt: $\overline{AP} = \overline{BP}$ und $\overline{BQ} = \overline{CQ}$.
Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $APQC$.
Hinweis: Zeichne geeignete Hilfslinien ein.

4. Es gibt zwei Möglichkeiten, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Basis 5 cm lang ist und das Maß irgendeines Innenwinkels 70° beträgt.
Konstruiere diese beiden Dreiecke.

5. Es gibt zwei Möglichkeiten, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, in dem ein Innenwinkel 120° beträgt und eine Seite 6 cm lang ist.
Konstruiere diese beiden Dreiecke.

6. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 35°$ und $\gamma = 95°$.
   (b) Ändere die Angaben für das Dreieck ABC an einer Stelle so ab, dass mit der abgeänderten Angabe die Konstruktion eines Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Wahl.

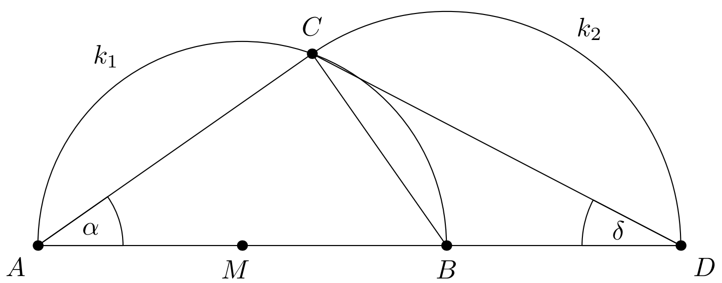
7. (a) Von einem Dreieck ABC weiß man: $a = 11{,}3\,\text{cm}$ und $\gamma = 60°$. Außerdem besitzt das Dreieck ABC eine Symmetrieachse.
Konstruiere das Dreieck. Was fällt dir auf?

(b) Von einem weiteren Dreieck ABC weiß man: $\alpha = 47°$, $a = 4{,}5\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = \overline{AB}$. Berechne die restlichen Innenwinkel dieses Dreiecks.

8. Konstruiere ein Dreieck ABC mit $a = 6\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ und $c = 7\,\text{cm}$ auf zweifache Weise:
   (a) Lege die Strecke $[BC]$ waagrecht.
   (b) Lege die Seite $[AC]$ waagrecht.
   (c) Ändere die Angaben für das Dreieck so ab, dass mit der abgeänderten Angabe die Konstruktion eines Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Abänderung ohne neue Konstruktion.

9. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 92°$ und $a = 8\,\text{cm}$.
   (b) Ändere eine der Angaben für das Dreieck ABC so ab, dass dann die Konstruktion des Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Abänderung.

10.



In der obigen Figur sind die Punkte M und B Mittelpunkte der Kreisbögen k_1 und k_2.

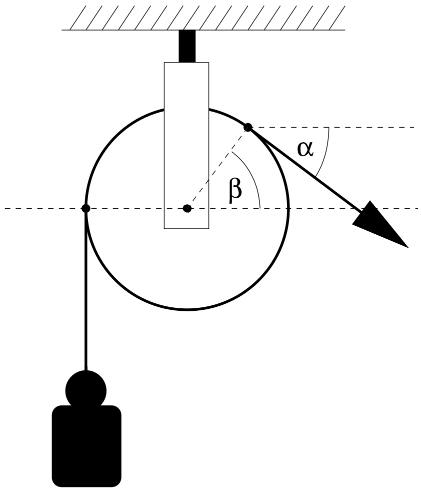
(a)
- Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\alpha = 35°$.
- Wie groß ist δ?

(b) Wie groß ist α für $\delta = 40°$?

(c) Begründe: Für $\delta = 59°$ gäbe es das Dreieck ABC nicht.

(d) Für welche Werte von δ gäbe es überhaupt noch das Dreieck ABC? Begründe deine Antwort.

11.



Ein Seil, das am linken Ende mit einem Gewicht belastet ist, wird über eine feste Rolle geführt. Am rechten Seilstück, das mit der Waagrechten den Winkel α einschließt, wird das Gleichgewicht gehalten.

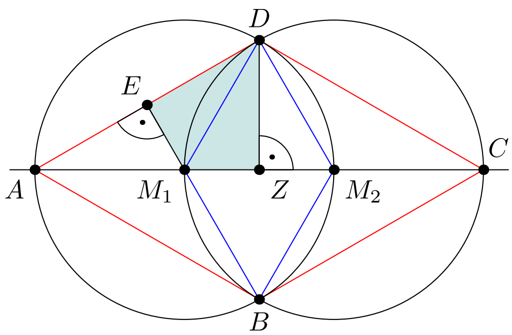
(a) Begründe: $\beta = 90° - \alpha$.

(b) Zeichne die Rolle mit dem Seil für den Radius $r = 3\,\text{cm}$ und $\alpha = 37°$.

(c) Berechne den Bruchteil des Umfangs der festen Rolle, der für $\alpha = 30°$ vom Seil berührt wird.

(d) Wie groß müsste man den Winkel α wählen, damit die Länge des Seilstückes, das die Rolle berührt, 40% des Rollenumfangs beträgt?

12.



Die Punkte M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der beiden Kreise.

(a) Zeichne die Figur mit dem Kreisradius 3 cm.

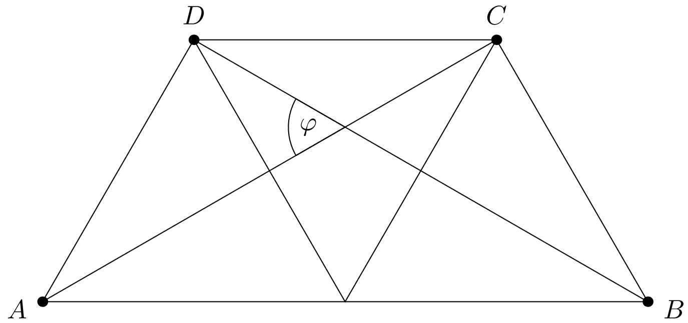
(b) Begründe: Im Viereck BM_2DM_1 gibt es zwei Innenwinkel mit dem Maß 120°.

(c) Wie groß ist der Umfang des Vierecks BM_2DM_1? Um welches besondere Viereck handelt es sich also?

(d) Begründe: Die beiden Dreiecke M_1ZD und EM_1D sind kongruent.

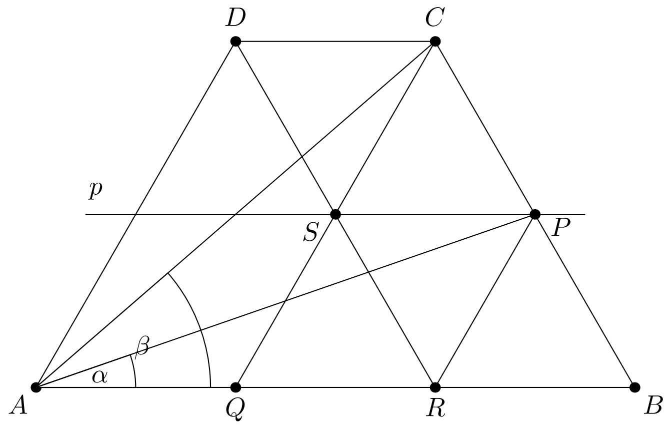
(e) Vergleiche den Flächeninhalt des Vierecks BM_2DM_1 mit dem des Vierecks $ABCD$.

13.



Das Trapez $ABCD$ ist aus drei kongruenten gleichseitigen Dreiecken zusammengefügt.
Berechne das Maß φ des Schnittwinkels der beiden Diagonalen.

14.



Im Trapez $ABCD$ liegen die beiden gleichseitigen Dreiecke ARD und QBC, wobei $\overline{AQ} = \overline{QR} = \overline{RB}$ gilt. Weiter gilt: $\sphericalangle BAP = \alpha$ und $\sphericalangle BAC = \beta$. Die Gerade p verläuft parallel zur Strecke $[AB]$ durch den Punkt S.

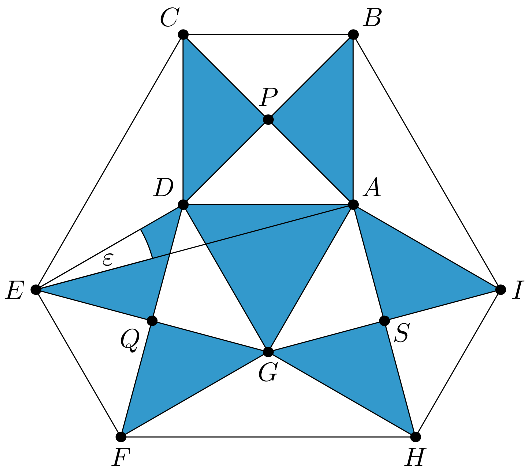
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AQ} = 4\,\text{cm}$.

(b) Zeige: Die Strecke $[AP]$ halbiert den Winkel BAC nicht.

(c) Zeige: Die Dreiecke ARP und ACD sind kongruent.

(d) Begründe: $\alpha + \beta = 60°$.

15.



Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Der Winkel mit dem Maß ε wurde zusätzlich eingezeichnet.

(a) Beschreibe den geometrischen Aufbau des Logos. Verwende die Buchstaben dazu.

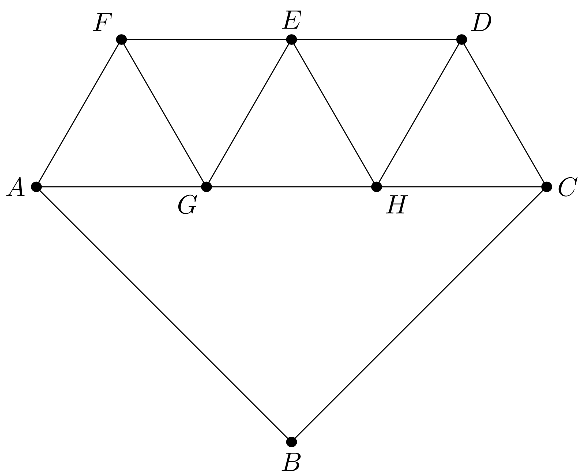
(b) In der Figur kannst du achsensymmetrische Drachen und Trapeze entdecken. Zähle sie jeweils mit Hilfe ihrer Eckpunkte auf.

(c) Berechne die Maße sämtlicher Innenwinkel des Sechsecks $BCEFHI$.

(d) Berechne das Winkelmaß ε.

(e) In der Figur ist ein gleichseitiges Dreieck mit dem Eckpunkt S verborgen. Zeichne es farbig ein.

16.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Viereck $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

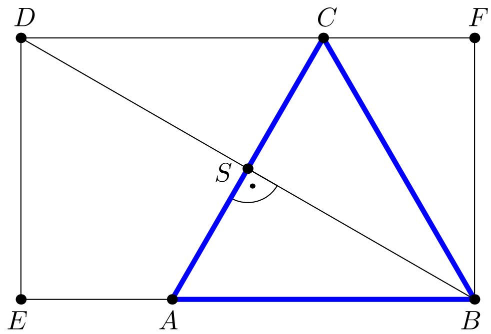
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 9\,\text{cm}$.

(b)
- Begründe: Das Viereck $ACDF$ besitzt einen Umkreis.
- Zeichne den Umkreis k_1 des Vierecks $ACDF$ mit seinem Mittelpunkt M_1 ein.

(c) Zeichne den Umkreis k_2 des Dreiecks ABC mit seinem Mittelpunkt M_2 ein.

(d) Untersuche anhand des Dreiecks AM_1M_2, welcher der beiden Kreise den größeren Durchmesser besitzt.

17.



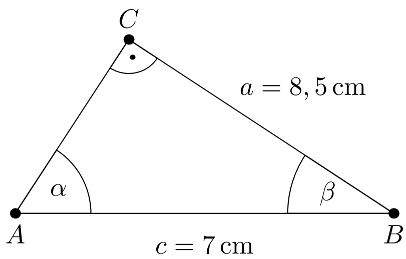
Das gleichseitige Dreieck ABC liegt im Rechteck $EBFD$.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke ABS, SBC und BFC sind kongruent.

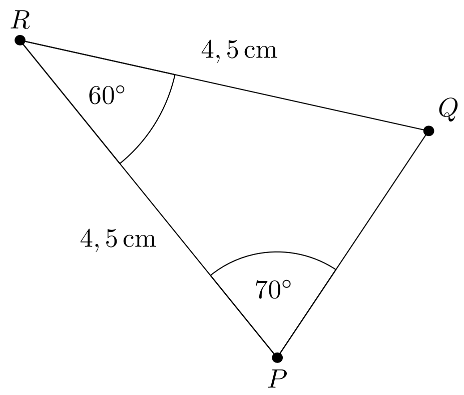
(c) Welchen Anteil der Fläche des Rechtecks $EBFD$ nimmt das Dreieck ABC ein? Begründe.

18.



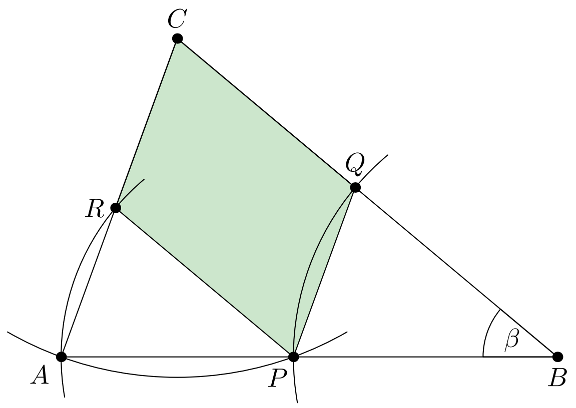
Die Figur ist nicht maßstabgerecht.
Untersuche, ob es ein Dreieck mit den oben angegebenen Bestimmungsstücken gibt.

19.



Die Figur ist nicht maßstabgerecht.
Untersuche, ob es ein Dreieck mit den oben angegebenen Bestimmungsstücken gibt.

20.

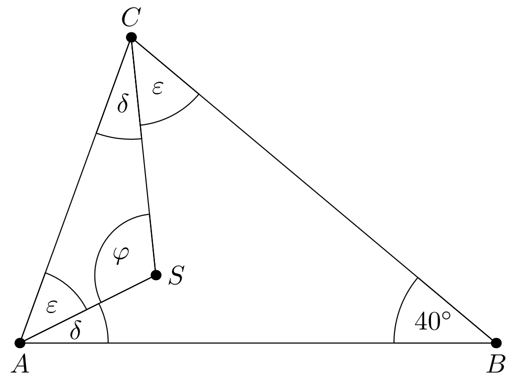


In der obigen Figur gilt: $\overline{AB} = \overline{BC}$. Die Punkte C, P und B sind jeweils die Mittelpunkte der betreffenden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe: das Viereck $PCQR$ ist ein Parallelogramm.

21.

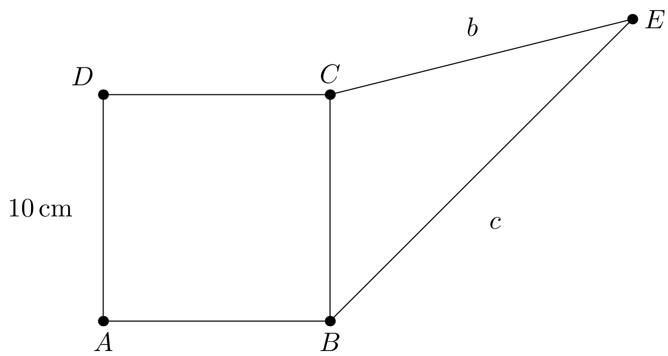


(a) Begründe: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

(b) Zeichne das Dreieck ABC für $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$.

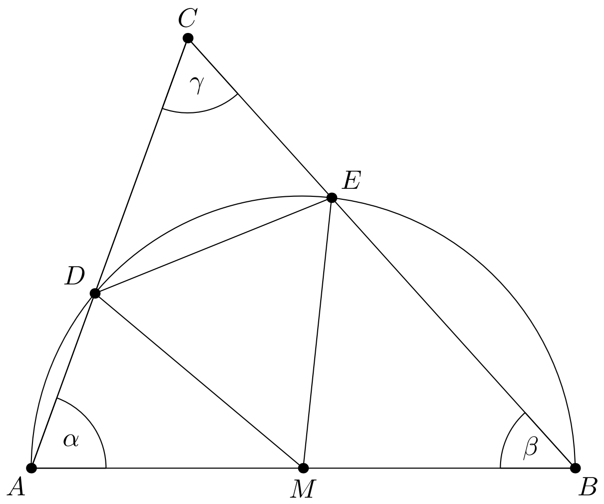
(c) Berechne das Maß φ des Winkels CSA im Dreieck ABC.

22.



Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Der Umfang des Dreiecks BEC ist doppelt so groß wie der Umfang des Quadrates $ABCD$.
Berechne den Umfang der Gesamtfigur.

23.

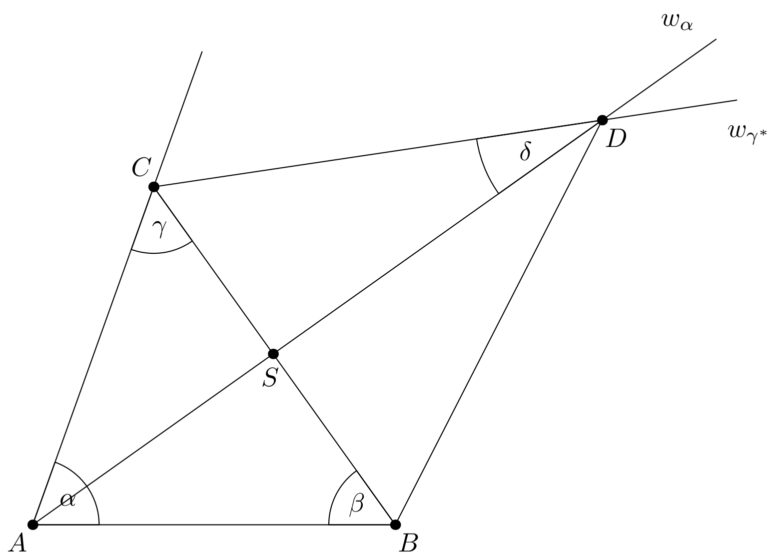


Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 70°$ und $\gamma = 62°$.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks MED.

24.



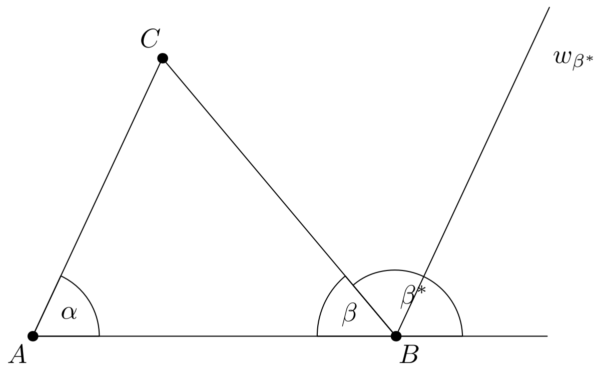
Die Halbgerade w_α halbiert den Winkel α und die Halbgerade w_{γ^*} halbiert den Nebenwinkel von γ.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 70{,}8°$ und $\beta = 54{,}2°$.

(b) Berechne das Winkelmaß δ.

(c) Untersuche, ob es sich bei dem Viereck $ABDC$ um ein achsensymmetrisches Drachenviereck handelt.

25.

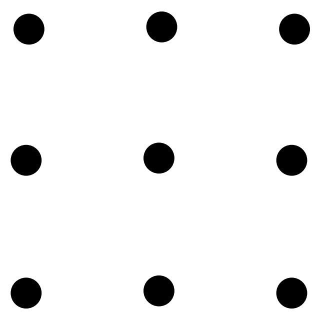


In der Figur halbiert die Halbgerade w_{β^*} den Außenwinkel von β. Gleichzeitig gilt: $w_{\beta^*} \parallel [AC]$.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\beta = 50°$.

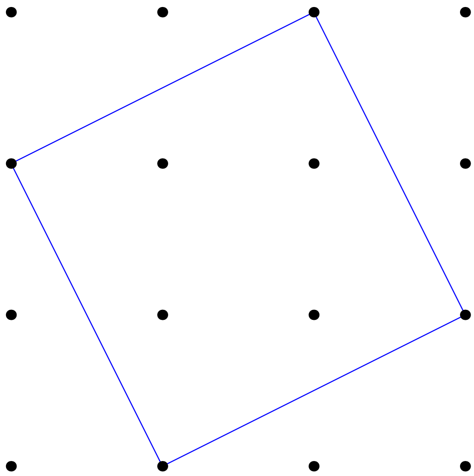
(b) Begründe: Das Dreieck ABC muss gleichschenklig sein.

26. Idee: Toni Chehlarova



Die Schüler/-innen sollen möglichst viele Quadrate finden, deren Eckpunkte auf den schwarzen Punkten liegen.
Martha meint: „In dieser Figur sehe ich sofort vier Quadrate.“ Sie zeichnet diese ein.
Edwin meint: „In dieser Figur entdecke ich sogar fünf Quadrate.“ Er zeichnet das fünfte hinzu.
Claudia meint: „Ich habe sogar noch ein Quadrat mehr entdeckt als Edwin.“
Was meinst du? Zeichne und begründe.

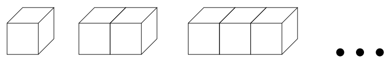
27. Idee: Toni Chehlarova



In das Punktraster ist ein Quadrat eingezeichnet worden.
Finde möglichst viele weitere Quadrate, deren Eckpunkte auf den schwarzen Punkten liegen.

10. Raumgeometrie

1.



Gleiche Würfel werden immer wieder zu neuen Quadern auf die oben dargestellte Weise aneinander gefügt. Die Kantenlänge eines Würfels soll x cm betragen.

(a) Zeige: Für die Oberfläche O_3 des Quaders, der so aus drei Würfeln zusammengefügt ist, gilt $O_3(x) = 14x^2\,\text{cm}^2$.

(b) Zeige: Für die Oberfläche O_4 eines aus vier Würfeln zusammengesetzten Quaders gilt $O_4(x) = 18x^2\,\text{cm}^2$.

(c) Die Oberfläche O_4 eines aus vier Würfeln zusammengesetzten Quaders soll $21,78\,\text{dm}^2$ betragen. Berechne x.

(d) Beschreibe, wie du O_{100} in Abhängigkeit von x berechnest. Gib dein Ergebnis in möglichst einfacher Form an.

(e) Aus wie vielen Würfeln mit der Kantenlänge x cm setzt sich ein Quader mit der Oberfläche $78x^2\,\text{cm}^2$ zusammen?

(f) Untersuche, ob man mit solchen Würfeln auf dieses Weise einen Quader mit einer Oberfläche von $10x^2\,\text{dm}^2$ zusammenbauen kann.

2. Claudia probiert mit ihrer Freundin Susi eine Zahlenzauberei mit einem Würfel aus: „Würfle einmal und lies die Augenzahl ab, ohne dass ich sie sehen kann. Verdopple diese Augenzahl und addiere fünf. Multipliziere dann diesen Summenwert mit fünf. Merke dir dieses Ergebnis.“ Susi hat gewürfelt und gerechnet.
Claudia gibt die nächste Anweisung: „Würfle verdeckt nochmals. Addiere diese Augenzahl zu deinem vorherigen Ergebnis und addiere noch 10. Multipliziere diesen Summenwert mit 10. Würfle ein drittes Mal und addiere diese Augenzahl zum vorherigen Produktwert.“ Das hat Susi gemacht.
Nun fordert Claudia ihre Freundin auf, von dem Ergebnis noch 350 zu subtrahieren und ihr den Wert der Differenz zu nennen.
Susi: „Ich habe 632 herausbekommen.“ „Dann hast du zunächst die Sechs, dann die Drei und am Ende die Zwei gewürfelt.“, antwortet Claudia. „Stimmt!“, ruft Susi überrascht.

(a) Verfolge Susis Rechnungen in allen Einzelheiten.

(b) Rechne mit Buchstaben nach: Der erste Wurf ergibt die Augenzahl a, der zweite die Zahl b und der dritte c.
Weshalb kann Claudia die Augenzahlen dann korrekt wiedergeben?

(c) Es gibt auch Spielwürfel mit 8 statt mit 6 Seitenflächen. Hätte Claudias Zahlenzauberei auch mit einem solchen Achterwürfel funktioniert? Begründe.