SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Jahrgangsstufe 8 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

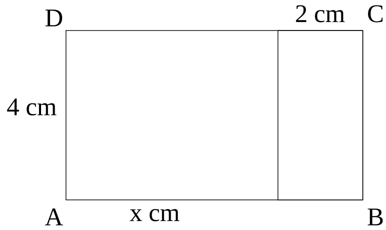
Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Wahlpflichtfächergruppe I

1. Terme

1. Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ auf zwei verschiedene Arten mit dem Platzhalter x.



Lösung: Maßzahlen: $A_{ABCD} = 4 \cdot x + 4 \cdot 2 = 4 \cdot (x + 2)$

2. Maria hat Fehler beim Auflösen von Klammern in binomischen Formeln gemacht:
   (a) $(3a + 10b)^2 = 9a^2 - 60ab + 10b^2$
   (b) $(x + 2)(2 - x) = 4 - x^2$
   (c) $(0{,}5x - 6)^2 = 2{,}5x^2 - 3x + 36$

   Streiche mit einem Farbstift (nicht Rot) alle Fehler einzeln an und verbessere Marias Lösungen auf diesem Blatt. (Nicht jede Lösung muss falsch sein.)

Lösung: (a) Es muss $100b^2$ heißen.
(b) richtig
(c) Es muss $0{,}25x^2 - 6x + 36$ heißen.

3. Gib mindestens zwei verschiedene Terme an, für die gilt:
   $x = 1,5$ liefert $T(\max) = -6$

Lösung: $T(x) = -(x - 1,5)^2 - 6$ oder $T(x) = -0,87654321(x - 1,5)^2 - 6$

4. Beweise: Die Zahl $2^{50} - 1$ lässt sich in zwei Faktoren zerlegen.
   Zeige sodann, dass die Zahl $2^{50} - 1$ die Teiler 4051 und 601 besitzt.

Lösung: $2^{50} - 1 = (2^{25} + 1) \cdot (2^{25} - 1) = 33\,554\,433 \cdot 33\,554\,431 = (3 \cdot 11 \cdot 251 \cdot 4051) \cdot (1801 \cdot 601 \cdot 31)$

5. Fritz hat bei den folgenden Termumformungen Fehler gemacht. Berichtige sie farbig (nicht mit roter Farbe):
   (a) $4x - 6y + 1{,}6z = 2 \cdot (x + 3y + 3{,}2z)$
   (b) $x^2 \cdot x^5 + 3 : \frac{1}{2} = 6 + x^{10}$
   (c) $-(3x - 2x^2 + 7a) = -3x - 2x^2 - 7x$

Lösung: (a) $4x - 6y + 1{,}6z = 2 \cdot (2x - 3y + 0{,}8z)$
(b) $x^2 \cdot x^5 + 3 : \frac{1}{2} = 6 + x^7$
(c) $-(3x - 2x^2 + 7a) = -3x + 2x^2 - 7a$

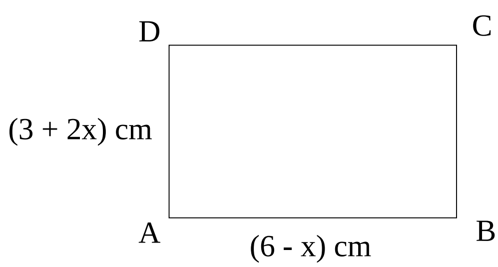
6. (a) Begründe rechnerisch: Der Term

$$T_1(x) = \frac{-12}{x^2 + 1{,}5x - 1}$$

besitzt die Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\,; 0{,}5\}$
   (b) Gib zwei weitere von $T_1(x)$ verschiedene Terme an, welche die gleiche Definitionsmenge wie der Term $T_1(x)$ besitzen.

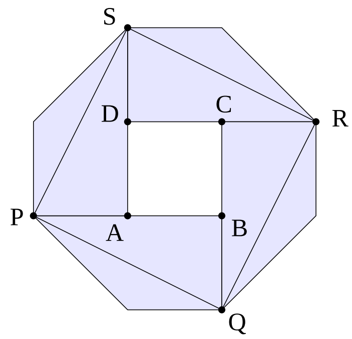
Lösung: (a) Die Belegungen $x = -2$ und $x = 0{,}5$ sind zwei Nullstellen des Nenners. Mehr Nullstellen gibt es nicht.
(b) Z.B.: $T_2(x) = \frac{1}{(x+2)(x-0{,}5)}$ und $T_3(x) = \frac{1+x^4}{(x+2)(x-0{,}5)\cdot(-387)}$

7. (a) Berechne den Umfang des Rechtecks $ABCD$ für $x = 2{,}5$.
   (b) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ für $x = 3{,}5$.
   (c) Wie ändert sich die Form des Rechtecks, wenn $x \in \mathbb{Q}^+$ immer kleiner wird?
   (d) Gib zwei verschiedene Belegungen von x an, so dass es jeweils dafür kein Rechteck gibt. Begründe deine Wahl.



Lösung: (a) $u = 23\,\text{cm}$
(b) $A = 25\,\text{cm}^2$
(c) Das Rechteck wird breiter und niedriger.
(d) Z.B. $x = 6$: Das Rechteck entartet zur Strecke.
Oder $x = 7$, dann hätte die Strecke $[AB]$ eine negative Länge.
Hinweis: Manche Schüler/innen sind der Ansicht, dass der Fall $x = 1$ eine richtige Antwort sei, denn ein Quadrat ist eben nach ihrer Ansicht kein Rechteck.

8. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das Viereck $PQRS$ wurde zusätzlich eingezeichnet.
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat und es gilt: $\overline{AB} = \overline{CR} = x\,\text{cm}$.



(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A des Achtecks in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A(x) = (7x^2)\,\text{cm}^2$]

(c) Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Achtecks $43{,}75\,\text{cm}^2$ beträgt.

(d) Das Achteck lässt sich so in ein Quadrat einbeschreiben, dass zwei Quadratseiten parallel zur Strecke $[DC]$ sind.
- Zeichne dieses Quadrat ein.
- Berechne für $x = 3{,}25$ seinen Umfang.

(e) Welche besonderen Eigenschaften besitzt das Viereck $PQRS$? Begründe deine Ansicht.

Lösung: (a) –

(b) Im Achteck sind sieben Quadrate mit der Seitenlänge x enthalten.
Also gilt: $A(x) = 7 \cdot x^2\,\text{cm}^2$.

(c) $x = 2{,}5$

(d)
- –
- Die Seitenlänge des umbeschriebenen Quadrates beträgt in diesem Fall $3 \cdot 3{,}25\,\text{cm}$. Also ist sein Umfang $4 \cdot 3 \cdot 3{,}25\,\text{cm} = 39\,\text{cm}$ lang.

(e) Es gilt: $\Delta PQB \cong \Delta CQR \cong \Delta SDR \cong \Delta PAS$ (s,w,s). Also ist $PQRS$ eine Raute.
In rechtwinkligen Dreiecken ergeben die beiden spitzen Innenwinkel einen rechten. In jedem Eckpunkt des Quadrates $PQRS$ liegt ein Paar solcher Winkel. Also handelt es sich sogar um ein Quadrat.

9. Fritz Zweistein sagt: Ich habe da was rausgefunden:

   $3^2 = 2^2 + 2 + 3$
   $4^2 = 3^2 + 3 + 4$
   $5^2 = 4^2 + 4 + 5$

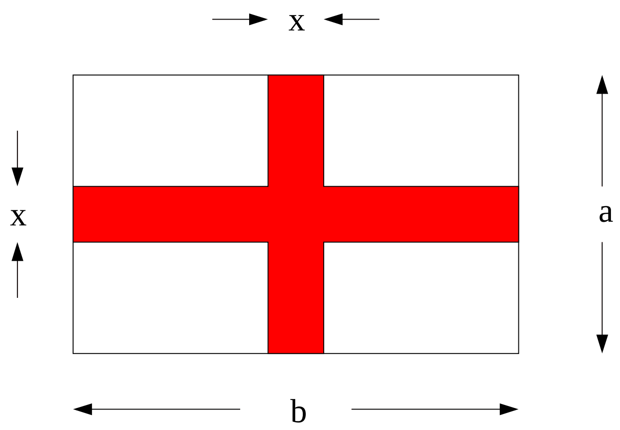
   (a) Schreibe die nächste Zeile hin.
   (b) Schreibe auf, welchen Zusammenhang du entdeckt hast.
   (c) Finde einem Term, der für jede Gleichung passt.

   Bearbeite die obigen Aufträge auch für folgende Gleichungen:

   $3^2 = 2 \cdot 4 + 1$
   $4^2 = 3 \cdot 5 + 1$
   $5^2 = 4 \cdot 6 + 1$

Lösung: (a) - -
(b) - -
(c) $a^2 = (a-1)^2 + (a-1) + a$
(a) - -
(b) - -
(c) $a^2 = (a-1) \cdot (a+1) + 1$

10. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



   (a) Zeichne die Figur für $b = 10\,\text{cm}$, $a = 5\,\text{cm}$ und $x = 1\,\text{cm}$.
   (b) Berechne den Flächeninhalt A des Kreuzes in der Figur in Abhängigkeit von a, b und x.

(c) Die folgenden Terme sollen den Flächeninhalt des weißen Anteils der Flagge darstellen. Kreuze die Terme an, deren Darstellung korrekt ist:

[ ]	$ab - ax - bx + x^2$	[ ]	$ab - ax + bx - x^2$
[ ]	$4[(0{,}5a - 0{,}5x)(0{,}5b - 0{,}5x)]$	[ ]	$\frac{3}{4}ab$
[ ]	$(a - x)(b - x)$	[ ]	$ab - (ax + bx - x^2)$

(d) Gib für $a = 8\,\text{cm}$ und $b = 12\,\text{cm}$ die Menge aller sinnvollen Belegungen von x an.

Lösung:

(a) –

(b) $A = ax + bx - x^2$

(c)

[**X**]	[ ]
[**X**]	[ ]
[**X**]	[**X**]

(d) $x \in]0\,\text{cm}; 8\,\text{cm}[_{\mathbb{Q}}$

11. Maria hat bei den folgenden Termumformungen Fehler gemacht. Berichtige sie farbig (nicht mit roter Farbe):

(a) $(a - 0{,}5)^2 = a^2 + a + 2{,}5$

(b) $(2x + 3)^2 = 2x^2 + 12x + 6$

(c) $(4 - x)(x + 4) = x^2 - 16$

Lösung: (a) $(a - 0{,}5)^2 = a^2 - a + 0{,}25$

(b) $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

(c) $(4 - x)(x + 4) = 16 - x^2$

12. Löse für $G = \mathbb{Q}$ die folgende Gleichung nach x auf:
$(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = (3 + x)(x - 3) - 4x^2 - 13$

Lösung: $x = -3$

13. Berechne den Extremwert des folgenden Terms:
$T(x) = 2(3 - x)^2 + 12x$
Von welcher Art ist dieser Extremwert?

Lösung: Wegen $T(x) = 2x^2 + 18$ ergibt sich das Minimum 18 .

14. Besitzt der folgende Term einen Extremwert? $T(x) = 3(2 - x^2) - 6x^2$
Wenn du mit „Ja“ antwortest: Von welcher Art ist der Extremwert? Begründung.
Wenn du mit „Nein“ antwortest: Begründung.

Lösung: Der Term besitzt keinen Extremwert, sondern nur den konstanten Wert 6.

15. Daniel stellt sich im Kaufhaus auf eine Rolltreppe. Nach 20 s ist er im oberen Stockwerk angelangt.
Ein anderes Mal ist die Rolltreppe ausgeschaltet. Jetzt braucht er 30 s um auf der Rolltreppe hinaufzulaufen.
Berechne, wie lange Daniel brauchen würde, wenn er auf der eingeschalteten Rolltreppe hinaufliefe.

Lösung: Daniel braucht 12 s.

16. Gegeben sind die beiden Brüche

$$B_1 : \frac{10^{679}}{10^{678}} \quad \text{und} \quad B_2 : \frac{10^{679}+1}{10^{678}+1}.$$

(a)
- Notiere drei Besonderheiten des Bruches B_1.
- Welchen Wert hat B_1?

(b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Brüchen B_1 und B_2?

(c) Welcher der beiden Brüche hat den größeren Wert? Begründe.

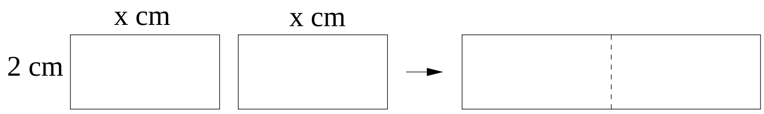
Lösung: (a)
- Z.B.:
  - Zähler und Nenner sind Zehnerpotenzen
  - Der Exponent im Zähler ist um 1 größer als der des Nenners
  - Der Zähler ist größer als der Nenner
- $\frac{10^{679}}{10^{678}} = 10^{679-678} = 10$

(b) Addiert man im Bruch B_1 jeweils 1 zum Zähler und zum Nenner, dann erhält man den Bruch B_2.

(c) $B_1 = \frac{10^{679}}{10^{678}} = \frac{10}{1} = \frac{10 \cdot (10^{678}+1)}{1 \cdot (10^{678}+1)} = \frac{10^{679}+10}{10^{678}+1} > \frac{10^{679}+1}{10^{678}+1} = B_2$

Also hat der Bruch B_1 den größeren Wert.

17.



Zwei kongruente Rechtecke mit der Länge x cm und der Breite 2 cm sollen so lückenlos zu einem größeren Rechteck aneinander gefügt werden, wie es die Abbildung zeigt.
Der Lehrer, Herr Ganfum, stellt dazu die Aufgabe: „Berechne den Umfang u des so entstandenen großen Rechtecks in Abhängigkeit von x."
Das Ergebnis von Sophia ist: $u(x) = (4x + 4)\,\text{cm}$.
Das Ergebnis von Wolfgang ist: $u(x) = [2 \cdot (4 + 2x) - 4]\,\text{cm}$.
Herr Ganfum meint dazu: „Ihr habt beide recht."

(a) Wie hat Sophia gerechnet?

(b) Wie hat Wolfgang gerechnet?

(c) Zeige: Die Terme von Wolfgang und Sophia sind äquivalent.

(d) Berechne die Länge x eines der beiden kleinen Rechtecke, wenn der Umfang des zusammengefügten Rechtecks dann $0,5\,\text{m}$ beträgt.

Lösung: (a) Sophia hat erkannt, dass im großen Rechteck die Länge x cm 4 Mal und die Breite 2 cm doppelt vorkommt. Daher gilt $u(x) = (4x + 4)\,\text{cm}$.

(b) Wolfgang verdoppelt zunächst einfach den Umfang eines Rechtecks. Dann subtrahiert er noch zwei Mal diejenige Breite eines kleinen Rechtecks, die im Inneren des großen Rechtecks verschwindet (siehe gestrichelte Linie):
$u(x) = [2 \cdot (2 \cdot 2 + 2 \cdot x) - 4]\,\text{cm} = [2 \cdot (4 + 2x) - 4]\,\text{cm}$.

(c) Wolfgang: $2 \cdot (4 + 2x) - 4] = 8 + 4x - 4 = 4x + 4$. Das ist der Term von Sophia.

(d) $0,5\,\text{m} = 50\,\text{cm}$.
Es muss dann z.B. mit Sophias Ergebnis $4x + 4 = 50$ gelten. $\Leftrightarrow x = 11,5$

18. Viele Schülerinnen und Schüler kennen die Werte der Quadrate zweiziffriger Zahlen auswendig:
Z.B.: $12^2 = 144$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$ oder $19^2 = 361$. Karin und Heinz wollen nun eine Möglichkeit finden, wie sie die Quadrate **aller** zweistelligen Zahlen leicht berechnen können.
Heinz versucht es mit 65:
$65 = 60 + 5 \quad \Rightarrow \quad 65^2 = 60^2 + 5^2 = 3600 + 25 = 3625.$
Karin probiert es mit 65 auf eine andere Weise:
$65 = 70 - 5 \quad \Rightarrow \quad 65^2 = 70^2 - 5^2 = 4900 - 25 = 4875.$
Sie meint dazu: „Hier stimmt doch etwas nicht." Auch Heinz geht ein Licht auf: „Klar, wir hätten Klammern setzen müssen!"

(a) Erkläre, was nicht stimmen kann.

(b) • Notiere, wie Heinz die Klammern setzen müsste.

- Löse die Klammern auf und berechne damit den Wert von 65^2, sowohl wie es Karin als auch wie es Heinz vorhatte.

(c) Anja hat zugeschaut. Sie möchte 99^2 berechnen. Für welche Zerlegung entscheidet sie sich wohl? Für die von Heinz oder die von Karin? Begründe deine Antwort und berechne das Ergebnis im Kopf.

(d) Formuliere die Regel, wie du die Quadrate zweistelliger Zahlen auf diese Weise berechnest.

Lösung: (a) Für den Wert von 65^2 können nicht zwei verschiedene Ergebnisse herauskommen. Außerdem ist $65^2 = 4225$.

(b)
- $65^2 = (60 + 5)^2$
- Heinz: $(60 + 5)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 5 + 5^2 = 3600 + 600 + 25 = 4225$
  Karin: $(70 - 5)^2 = 70^2 - 2 \cdot 70 \cdot 5 + 5^2 = 4900 - 700 + 25 = 4225$

(c) Anja entscheidet sich für die Methode von Karin, denn 99 liegt näher an 100 (mit dieser Zahl lässt sich bequem rechnen).
Also: $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$.

(d) Z.B.:
- Stelle die zweiziffrige Zahl als Summe oder Differenz zum nächst größeren oder kleineren Zehnervielfachen dar.
- Quadriere das Zehnfache der ersten Ziffer.
- Addiere (oder subtrahiere) das doppelte Produkt aus dem Zehnfachen der ersten Ziffer und der zweiten Ziffer.
- Addiere das Quadrat der zweiten Ziffer. Dann bist du fertig.

19. Die Klasse 8a der Abel-Schule hat von ihrem Lehrer, Herrn Korfat, die folgende Aufgabe bekommen:
„Berechne den Produktwert aus zwei gleichen natürlichen Zahlen. Subtrahiere nun vom ersten Faktor eine natürliche Zahl und addiere zum zweiten Faktor die gleiche natürliche Zahl. Multipliziere jetzt den Wert der Differenz mit dem der Summe. Vergleiche diesen Produktwert mit jenem, den du anfangs erhalten hast.“
Edwin rechnet: $100 \cdot 100 = 10000$ und $(100 - 99) \cdot (100 + 99) = 199 < 10000$
Egon rechnet: $7 \cdot 7 = 49$ und $(7 - 2) \cdot (7 + 2) = 45 < 49$
Martha rechnet: $1000 \cdot 1000 = 1000000$ und $(1000 - 1000) \cdot (1000 + 1000) = 0 < 1000000$
Helga rechnet: $11 \cdot 11 = 121$ und $(11 - 21) \cdot (11 + 21) = -320 < 121$
Sie melden sich und meinen übereinstimmend: „Der zweite Produktwert ist immer kleiner als der erste.“
Herr Korfat gibt zu bedenken: „Wirklich immer?“
Martha muss zugeben: „Nein, weil … “

(a) Wie hat Martha ihre Antwort begründet?

(b) Es sei a eine solche natürliche Zahl und k eine zweite natürliche Zahl, die einmal von a subtrahiert und andererseits zu a addiert wird. Löse damit die von Herrn Korfat gestellte Aufgabe.

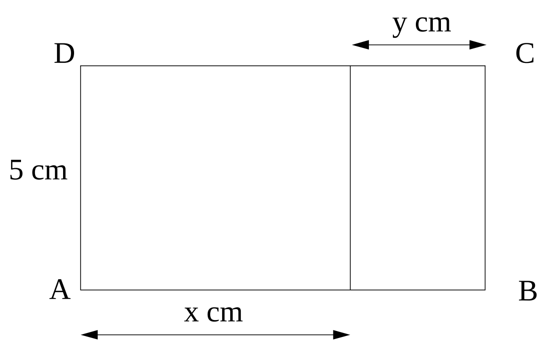
Lösung: (a) „Nein, weil dies nur von ein paar Beispielen gestützt wird. Die Gültigkeit in allen Fällen ist nicht sichergestellt.“

(b) $(a - k) \cdot (a + k) = a^2 - k^2 < a^2$. Damit ist klar: Der zweite Produktwert ist **stets** kleiner als der erste.

20. Sind die beiden Terme
$T_1(x) = (123456x - 654321)^2$ und $T_2(x) = (654321 - 123456x)^2$ äquivalent?
Begründe deine Antwort.

Lösung: Der Term T_1 hat die Form $(A - B)^2$, der Term T_2 vertauscht den Klammerinhalt von T_1 am Minuszeichen. T_2 hat also die Form $(B - A)^2$.
Nun ist z.B. $(7 - 3)^2 = 4^2 = 16$ und $(3 - 7)^2 = (-4)^2 = 16$
Wenn du also den Klammerinhalt der 2. binomischen Formel am Minuszeichen vertauchst, dann wechselt der Klammerinhalt (wenn er nicht gerade null ist) das Vorzeichen. Beim Quadrieren ist das Ergebnis dasselbe, wie du im Zahlenbeispiel $(7 - 3)^2 = (3 - 7)^2 = 16$ sehen kannst.
In den Klammern der eigentlichen Aufgabe steht zwar noch der Platzhalter x, aber x ist ja auch nur der Stellvertreter für jeweils eine Zahl. Somit gilt das, was im Zahlenbeispiel gezeigt worden ist, ebenso für die beiden Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$: Die beiden Terme sind äquivalent.

21.



(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ für $x = 7$ und $y = 2$.

(b) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ mit den Variablen x und y auf zwei verschiedene Arten.

(c) Das Rechteck $ABCD$ kann für die passende Wahl der Varaibalen x und y zum Quadrat werden. Gib zwei Möglichkeiten an.

(d) Unter allen möglichen Rechtecken $ABCD$ gibt es beliebig viele, die einen Flächeninhalt von $65\,\text{cm}^2$ aufweisen. Gib für diesen Fall drei Belegungen für x und die jeweils dazu passende Belegung für y an. Mache jeweils die Probe.

Lösung: (a) Klar: Dein Rechteck $ABCD$ muss $9\,\text{cm}$ breit und $5\,\text{cm}$ hoch werden.

(b) **1. Möglichkeit:** $A_{ABCD} = 5 \cdot (x + y)\,\text{cm}^2$
2. Möglichkeit: $A_{ABCD} = (5 \cdot x + 5 \cdot y)\ \text{cm}^2$

(c) Beim Quadrat muss hier $5 = (x + y)$ gelten. Wenn x und $y \in \mathbb{N}$ gelten würde, dann folgt in diesem Fall:

x	1	2	3	4
y	4	3	2	1

(d) In diesem Fall muss gelten: $5 \cdot (x + y) = 65 \;|: 5 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 13.$
Für x und $y \in \mathbb{N}$ ergibt sich:

x	1	2	3	4	...	12
y	12	11	10	9	...	1
$5 \cdot (x + y) =$	65	65	65	65	...	65

22. Gegeben ist der Podukterm $T(x) = (4 - x)(4 + x)$.

(a)
- Tabellarisiere den Term für $x \in [-4; 4]_{\mathbb{Z}}$
- Was fällt dir bei der Betrachtung der Termwerte in der Tabelle alles auf?

(b) Zeige, dass die beiden Terme $T(x) = (4 - x)(4 + x)$ und $T^*(x) = 16 - x^2$ auf $G = \mathbb{Q}$ äquivalent sind.

(c)
- Begründe: Der Term x^2 wird für alle $x \in \mathbb{Q}$ nie negativ.
- Was folgt daraus für den Term $-x^2$?
- Begründe: Der Term $T(x) = (4 - x)(4 + x)$ kann für alle $x \in \mathbb{Q}$ höchstens den Wert 16 annehmen.

Lösung: (a)
-

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$T(x)$	0	7	12	15	16	15	12	7	0

- Zunächst nehmen die Termwerte von links nach rechts zu bis zum Wert 16.
  Dann nehmen die Termwerte bis zum Wert 0 wieder ab.
  Der Termwert 16 ist der größte.
  Die Termwerte scharen sich symmetrisch um diesen Maximalwert.

(b) Es ist $T(x) = (4 - x)(4 + x) = 16 + 4x - 4x - x^2 = 16 - x^2 = T^*(x)$.

(c)
- Es ist $x^2 = x \cdot x$; d.h. x wird für alle $x \in \mathbb{Q}$ mit sich selbst multipliziert.
  Ist x positiv, dann ist $x \cdot x$ auch positiv.
  Ist x negativ, dann ist $x \cdot x$ trotzdem positiv.
  Ist $x = 0$, dann ist $x \cdot x = 0$.
  Also kann x^2 nie negativ werden.

- Dann kann $-x^2$ nie positiv werden, weil das Minuszeichen nicht mitquadriert wird.
- Weil $-x^2$ höchstens den Wert 0 annehmen kann, nimmt $T^*(x) = 16 - x^2$ höchstens den Wert 16 an.

23. Sabine und Helmut untersuchen die Extremwerteigenschaften der drei folgenden Terme auf $G = \mathbb{Q}$:

$$T_1(x) = (x-3)(x+3)$$
$$T_2(x) = (x-4)(4+x)$$
$$T_3(x) = -(5+x)(5-x)$$

Helmut hat Folgendes herausgefunden:

- „Nachdem ich eine binomische Formel angewendet habe, ist klar, dass jeder Term ein Minimum besitzt“
- „Die Belegung von x, die das jeweilige Minimum liefert, ist immer die gleiche.“

Sabine hat Zweifel: „Der Term $T_3(x)$ beginnt mit einem Minuszeichen. Also müsste $T_3(x)$ doch ein Maximum enthalten.“

(a) Hat Sabine Recht? Begründe.

(b) Welche Belegung von x liefert jeweils den Extremwert? Begründe.

Lösung: (a) Es gilt:
$T_1(x) = (x-3)(x+3) = x^2 - 9$
$T_2(x) = (x-4)(4+x) = (x-4)(x+4) = x^2 - 16$
$T_3(x) = -(5+x)(5-x) = -(25-x^2) = -25 + x^2 = x^2 - 25$
Der (heimliche) Faktor vor x^2 ist stets $1 > 0$, Also besitzen alle drei Terme ein Minimum.

(b) $T_1(x) = x^2 - 9 = (x-0)^2 - 9$
$T_2(x) = x^2 - 16 = (x-0)^2 - 16$
$T_1(x) = x^2 - 25 = (x-0)^2 - 25$
Also liefert stets $x = 0$ das jeweilige Minimum. Sabine hat nicht Recht.

24. Vereinfache so weit wie möglich:

(a) $1,5ab - (0,5 \cdot a \cdot 2)^2 - \frac{3}{2}ab + a^2 =$

(b) $(3c)^2 - 3c^2 - (-3c)^2 =$

Lösung: (a) $1,5ab - (0,5 \cdot a \cdot 2)^2 - \frac{3}{2}ab + a^2 = 1,5ab - (1a)^2 - 1,5ab + a^2 = -a^2 + a^2 = 0$

(b) $(3c)^2 - 3c^2 - (-3c)^2 = 9c^2 - 3c^2 - 9c^2 = -3c^2$

25. Gegeben sind die folgenden Terme auf $G = \mathbb{Q}$:
$T_1(x) = x^3 - x^2 - x - 1$
$T_2(x) = x^2 - 2x + 1$
$T_3(x) = -x \cdot (x+1) - 1$
$T_4(x) = x^2 - 1 - 2 \cdot (x-1)$

(a) Fritz stellt zwei Behauptungen auf:

- „Wenn man für alle Terme den Termwert für $x = -1$ berechnet, dann ist der Wert des ersten Terms größer als der des dritten."
- „Wenn man für alle Terme den Termwert für $x = -1$ berechnet, dann ist der Wert des zweiten Terms genauso groß wie der des vierten."

Überprüfe diese beiden Behauptungen durch Einsetzen.

(b) Überprüfe durch Umformung, dass die Terme $T_2(x)$ und $T_4(x)$ äquivalent sind.

(c) Sind die beiden Terme
auf $G = \mathbb{Q}$ über der Grundmenge $G = \{0; 1; 2\}$ äquivalent? Fertige dazu eine numerische Wertetabelle an.

[Die Idee zu dieser Aufgabe stammt aus: „Thema Mathematik" im BUCHNER-Verlag, Lehrerband 2008]

Lösung: (a) $T_1(-1) = -1 - 1 + 1 - 1 = -2$
$T_2(-1) = 1 + 2 + 1 = 4$
$T_3(-1) = 1 \cdot 0 - 1 = -1$
$T_4(-1) = 1 - 1 + 2 \cdot 1 + 2 = 4$
Die erste Behauptung stimmt, die zweite ist falsch

(b) $T_4(x) = x^2 - 1 - 2 \cdot (x-1) = x^2 - 1 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 = T_4(x)$. Die beiden Terme sind äquivalent.

(c)

x	0	1	2
$T_5(x) = (x+5)^2$	25	36	49
$T_6(x) = x^2 + 25$	25	26	29

Die letzten beiden Spalten der Tabelle zeigen keine Übereinstimmung; also sind die beiden Terme nicht äquivalent.

26. Egon bildet die Spiegelzahlen von zweiziffrigen Zahlen, indem er deren Ziffern jeweils vertauscht. Dann errechnet er vom jeweilgen Zahlenpaar die Summe, z.B. so:
$13 + 34 = 44$ oder $81 + 18 = 99$ oder $25 + 52 = 77$.
„Komisch, der Summenwert besteht stets aus zwei gleichen Ziffern. Ist das immer so?", fragt er seinen Vater. Der antwortet: „Nein, finde selbst ein Gegenbeispiel."
Egon rechnet und entdeckt sogar mehrere Gegenbeispiele.

(a) Finde zwei Beispiele dafür, dass der Summenwert nicht aus lauter gleichen Ziffern bestehen muss.

(b) • Egon betrachtet die Summenwerte seiner Beispiele in der Aufgabe (a) genauer und entdeckt einen Zusammenhang zwischen den Ziffern. Welcher ist das?

• Jede zweiziffrige Zahl lässt sich als Term in der Form $10a + b$ darstellen, wobei $a \in \{1; 2; \ldots 9\}$ und $b \in \{0; 1; 2; \ldots 9\}$ gilt.

  – Zeige mit Hilfe des obigen Terms, dass jeder Summenwert aus einer zweiziffrigen Zahl und ihrer Spiegelzahl stets durch 11 teilbar ist.

  – Wenn du die beiden Ziffern der ursprünglichen zweiziffrigen Zahl auf geeignete Weise kombiniertst, dann erhältst du neben der 11 einen weiteren Teiler des Summenwertes.

(c) Ermittle alle Paare aus einer zweistelligen Zahl und ihrer Spiegelzahl, deren Summenwert 143 beträgt.

Lösung: (a) Z.B.: $97 + 79 = 176$ oder $56 + 65 = 121$ oder ...

(b) • Die Summe aus der ersten und der letzen Ziffer des Sumenwertes ergibt jeweils die mittlere Ziffer.

•

  – $(10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11 \cdot (a + b)$.
  Der Summenwert enthält also stets den Faktor 11.

  – Der zweite Teiler entsteht aus dem Summenwert der beiden Ziffern der zweistelligen Zahl. Begründung siehe Lösung oben.

(c) Es gilt $11(a + b) = 143 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 13$. Gesucht sind also Ziffernpaare $(a \mid b)$, so dass $a + b = 13$ wird. Das ergibt folgende Zahlenpaare:
$\{(9 \mid 4); (8 \mid 5); (7 \mid 6)\,(6 \mid 7); (5 \mid 8); (4 \mid 9)$.

27. Jede zweistellige natürliche Zahl lässt sich durch den Term $10a + b$ darstellen, wobei a und b die Ziffern sind.
Beispiel: $75 = 10 \cdot 7 + 5$; also gilt $a = 7$ und $b = 5$.
Unter der Quersumme q einer natürlichen Zahl versteht man die Summe aus ihren einzelnen Ziffern. In unserem Beispiel ist $q = 7 + 5 = 12$.

(a) • Subrahiere von der Zahl 75 deren Quersumme.

• Notiere die Menge aller Teiler des Differenzwertes.

(b) • Wiederhole die vorigen Schritte mit der Zahl 59.

• Bestimme den ggT aus beiden Teilermengen.

(c) • Wiederhole die Rechenschritte mit einemr selbst gewählten zweistelligen Zahl.

- Was stellst du fest?
- Gilt deine Feststellung für alle zweistelligen Zahlen? Begründe deine Antwort.

(d)
- Experimentiere mit dreistelligen Zahlen.
- Begründe: Subtrahiert man von einer dreistelligen deren Quersumme, so ist der Differnzwert stets durch 9 teilbar.

(e) Gilt das für jede beliebige natürliche Zahl? Begründe.

Lösung: (a)
- $75 - 12 = 63$.
- $T_{63} = 1; 3; 7; 9; 21; 63$.

(b)
- $59 - 14 = 45 ._{45} = 1; 3; 5; 9; 15; 45$.
- $ggT(45; 63) = 9$

(c)
-
- Der Wert der Differenz aus der Zahl und ihrer Quersume ist wieder durch 9 teilbar.
- Zweistellige Zahl $10a + b$; $q = a + b$.
  Differenzwert: $10a+b-(a+b) = 9a$; also ist der Differenzwert stets durch 9 teilbar.

(d)
-
- Dreistellige Zahl: $100a + 10b + c$; $q = a + b + c$.
  Differenzwert: $100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9 \cdot (11a + b)$; also ist auch dieser Differenzwert stets durch 9 teilbar.

(e) Ja, denn $10^n \cdot a - a$ liefert ausschließlich Neuner als Ziffern.

28. Franz soll die Anzahl n von natürlichen Zahlen bestimmen, die zwischen zwei natürlichen zahlen x und y mit $y > x$ liegen.
Nach einigen Rechenbeispielen findet er eine Formel: $n = y - x - 1\,.$ (*)

(a)
- Bestimme mit Hilfe von (*) alle natürlichen Zahlen, die zwischen 69 und 83 liegen.
- Bestätige dein Ergebnis, indem du die in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst.

(b) Berechne die Anzahl der natürlichen Zahlen, die größer als 513 799 und gleichzeitig kleiner als 803 102 sind.

(c) Franz überprüft die Formel (*) jetzt an folgenden Sonderfällen:
- x und y sind unmittelbare Nachbarn.
  Gilt die Formel (*) auch hierfür?
- x und y sind ganze Zahlen.
  Berechne n für $x = -11$ und $y = 3$ sowie für $x = -39$ und $y = -23$.
  Stimmt die Formel auch in diesen beiden Fällen?

Lösung: (a)
- $n = 83 - 69 - 1 = 13$.
- $\{70; 71; 72; 73; 74; 75; 76; 77; 78; 79; 80; 81; 82\}$.
  Die Lösungsmenge enthält 13 Zahlen.

(b) $n = 803\,102 - 513\,799 - 1 = 289\,302$.

(c)
- Für x und y gilt dann $y = x + 1$.
  $n = (x + 1) - x - 1 = 0$. In der Tat gibt es keine natürlichen Zahlen zwischen zwei Zahlennachbarn. Die Formel **(*)** gilt auch in diesem Fall.
- $n_1 = 3 - (-11) - 1 = 3 + 11 - 1 = 13$.
  Wenn du alle in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst, bestätigt sich die Formel.
  $n_2 = -23 - (-39) - 1 = -23 + 39 - 1 = 15$.
  Wenn du auch in diesem Fall alle in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst, bestätigt sich die Formel erneut.

29. Edwin entdeckt in einem Rechenbuch ein Zahlenrätsel:
„Denke dir eine dreistellige Zahl, die durch 10 teilbar ist. Streiche deren letzte Ziffer. Subtrahiere diese neue Zahl von der ursprünglichen dreistelligen Zahl. Dann ist der Differenzwert stets durch die neue Zahl teilbar.“

(a) Bestätige die obige Behauptung an einem selbst gewählten Beispiel.

(b) Untersuche an einem weiteren Beispiel, ob die Behauptung auch für vierstellige Zahlen gilt.

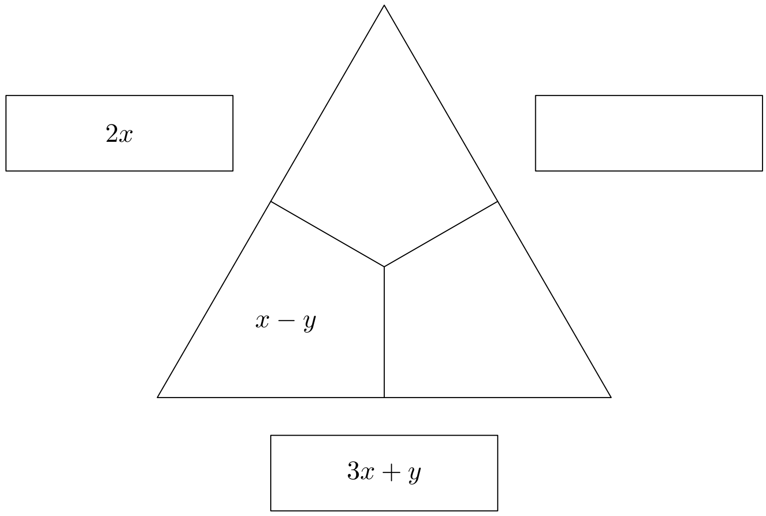
(c) Edwin hat vieles durchprobiert. Alle seine Rechnungen haben die obige Behauptung bestätigt. Schließlich setzt er für die neue Zahl den Platzhalter x und probiert es allgemein mit x. Er kommt zu dem Schluss „Die Behauptung gilt sogar für alle natürlichen durch 10 teilbaren Zahlen!“ Begründe, dass Edwin Recht hat.

Lösung: (a) Z.B. 470: Die neue (zweistellige) natürliche Zahl heißt dann 47.
$470 - 47 = 423$. $423 : 47 = 9$: Stimmt.

(b) Z.B. 5730: Die neue (dreistellige) natürliche Zahl heißt dann 573.
$5730 - 573 = 5157$. $5157 : 573 = 9$: Stimmt auch.

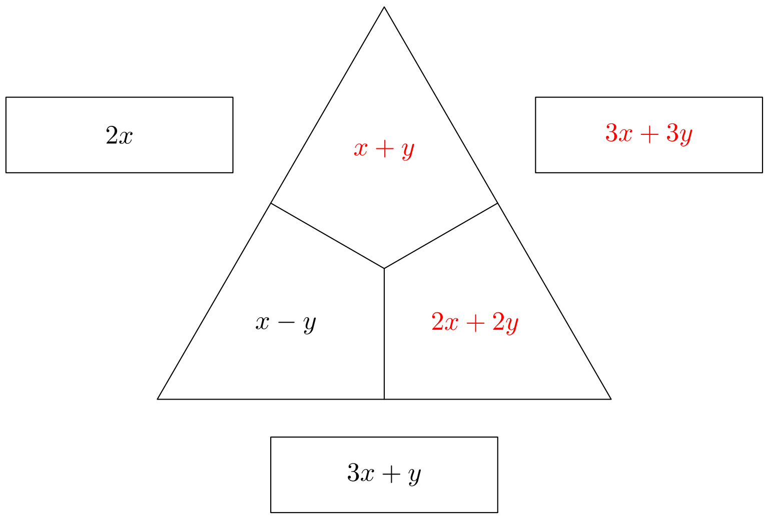
(c) Die neue Zahl ist x. Wenn deren zugehörige ursprüngliche Zahl durch 10 teilbar sein soll muss diese auf 0 enden. Dann ist diese aber zehnmal so groß wie die neue Zahl. Also kannst du für die alte Zahl $10x$ schreiben. Somit ergibt sich:
$10x - x = 9x$. Der Wert der Differnz ist also $9x$ und damit sowohl durch 9 als auch durch x, also die neue Zahl, teilbar.

30.

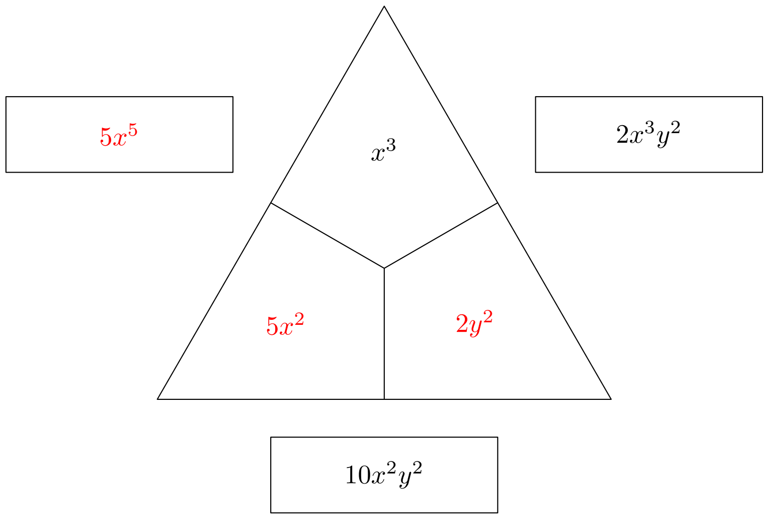


In die drei Felder im Dreieck gehören Terme, wobei in jedem der Rechtecke die Summe aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Termen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Terme.

Lösung:

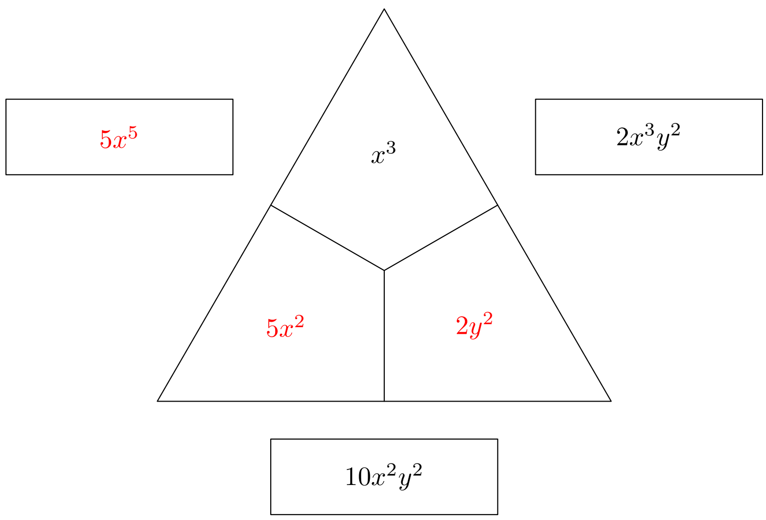


31.



In die drei Felder im Dreieck gehören Terme, wobei in jedem der Rechtecke das Produkt aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Termen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Terme.

Lösung:



32. Lisa weiß, dass eine natürliche Zahl n dann durch 9 teilbar ist, wenn ihre Quersumme QS durch 9 teilbar ist.
Sie stellt sich nun folgende Fragen:
    (1) „Ist der Wert der Summe aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme auch durch 9 teilbar?"
    (2) „Ist der Wert des Produktes aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme durch 27 teilbar?"

(3) „Ist der Wert des Quotienten aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme durch 9 teilbar?“

Was meinst du? Begründe jeweils deine Ansicht.

Lösung: In jedem all gilt: $n = 9 \cdot x$ und $QS = 9 \cdot y$.

Zu Frage (1):
$n + QS = 9x + 9y = 9 \cdot (x + y)$. Die Antwort heißt „Ja“.

Zu Frage (2):
$n \cdot QS = 9x \cdot 9y = 81 \cdot (xy) = 27 \cdot 3 \cdot (x \cdot y)$. Die Antwort heißt wieder „Ja“.

Zu Frage (3):

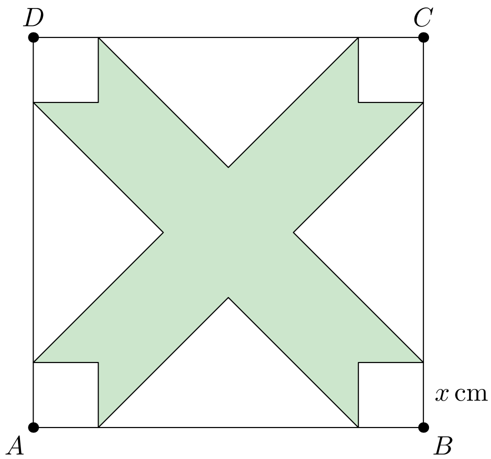
$\frac{n}{QS} = \frac{9x}{9y} = \frac{x}{y}$. Nun müsste y ein Teiler von x sein. Aber ist das immer so?

1. Beispiel:
$n = 648 \quad \Rightarrow \quad QS = 18 \quad 648 : 18 = 36$. Dieses Beispiel liefert eine Bestätigung.

2. Beispiel:
$n = 927 \quad \Rightarrow \quad QS = 18 \quad 917 : 18 = 50$ Rest 17 . Dieses Beispiel verneint die Frage (3).

Also ist der Wert des Quotienten aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme nicht immer ganz.

33.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat.
An seinen Eckpunkten befinden sich vier kleine Quadrate, deren Seitenlänge jeweils

x m beträgt.
Die vier Dreiecke an den Quadratseiten sind jeweils gleichschenklig-rechtwinkig.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $x = 1$.

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A des eingefärbten Kreuzes gilt in Anhängigkeit von x:

$$A(x) = (-8x^2 + 24x)\,\text{cm}^2 .$$

(c) Berechne $A(0)$ und $A(3)$. Deute dein Ergebnis mit Hilfe deiner Zeichnung.

(d) Unter allen Kreuzen gibt es eines, dessen Flächeninhalt maximal ist.
- Berechne dieses Maximum sowie die zugehörige Belegung von x.
- Zeichne erneut das Quadrat $ABCD$ mit dem einbeschriebenen größten Kreuz.
- Wie viel Prozent der Fläche des Quadrates $ABCD$ nimmt das größte Kreuz ein? Löse das Problem auf zwei verschiedene Arten.

Lösung: (a) Klar.

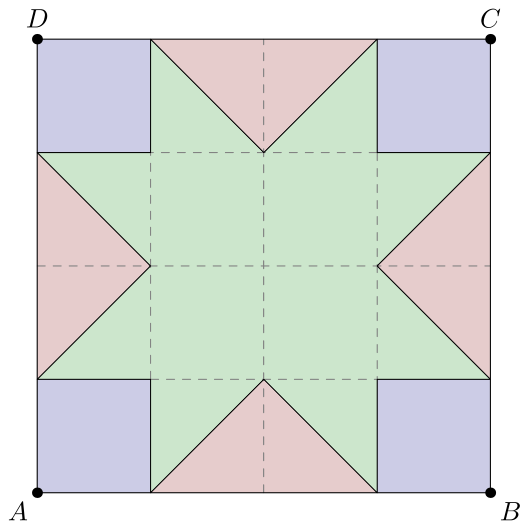
(b)

$$\begin{aligned} A(x) &= [6^2 - 4\cdot x^2 - 4\cdot 0,5\cdot(6-2x)\cdot(3-x)]\,\text{cm}^2 \\ &= [36 - 4x^2 - 2\cdot(18 - 6x - 6x + 2x^2)]\,\text{cm}^2 \\ &= [36 - 4x^2 - 36 + 12x + 12x - 4x^2]\,\text{cm}^2 \\ A(x) &= (-8x^2 + 24x)\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

(c) $A(0) = 0\,\text{cm}^2$. Das zugehörige Kreuz entartet zu den beiden Diagonalen des Quadrates $ABCD$.
$A(3) = 0\,\text{cm}^2$. Es entsteht ein Kreuz das aus den Seitenmittelpunkten des Quadrates $ABCD$ erzeugt worden ist.

(d)
- $$\begin{aligned} A(x) &= (-8x^2 + 24x)\,\text{cm}^2 \\ &= -8\cdot(x^2 - 3x + 1,5^2 - 2,25)\,\text{cm}^2 \\ &= -8\cdot[(x-1,5)^2 - 2,25)\,\text{cm}^2 \\ A(x) &= [(-8(x-1,5)^2 + 18]\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

  $x = 1,5$ liefert $A_{\text{max}} = 18\,\text{cm}^2$.
-



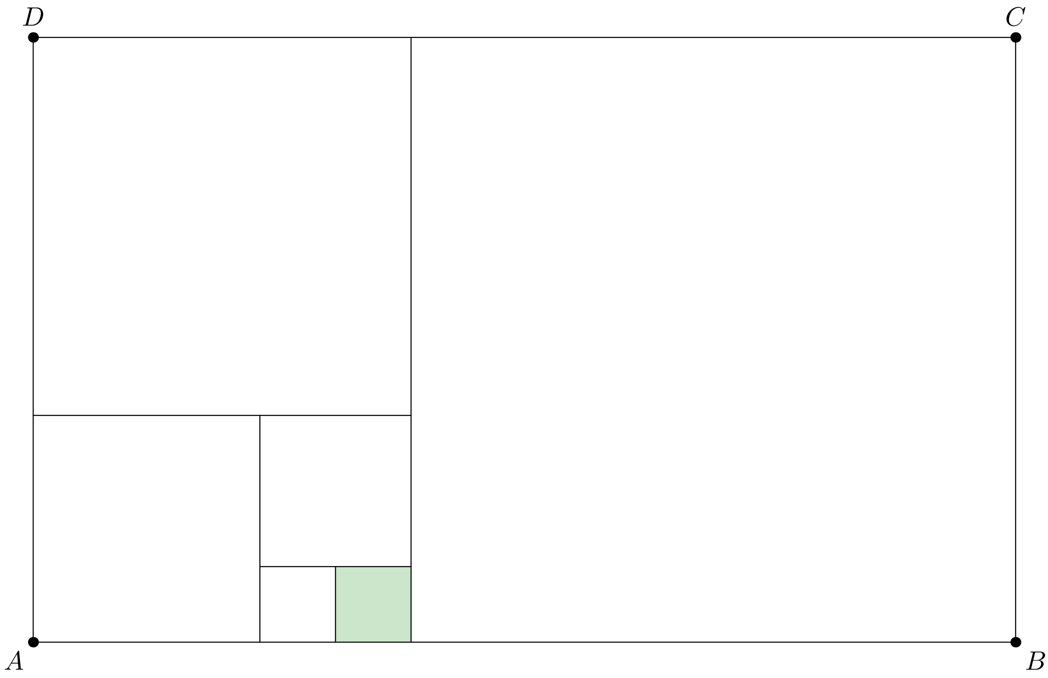
Zeichne das Quadrat $ABCD$ erneut mit dem größten Kreuz.

- 1. Möglichkeit: mit Hilfe der Lösung oben

$$\frac{A_{\text{Kreuz}}}{A_{\text{ABCD}}} = \frac{18\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = 0,5 = 50\%\,.$$

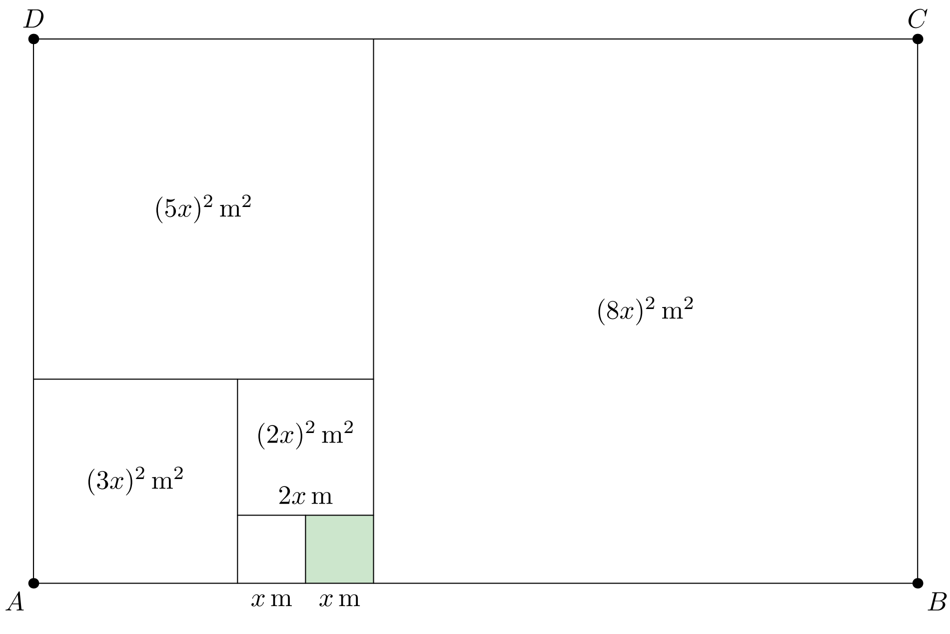
2. Möglichkeit: Die gestrichelten Hilfslinien zerlegen das Quadrat $ABCD$ in 16 kongruente kleine Quadrate.
Im Zentrum des Kreuzes befinden sich 4 gleich große Quadrate. Der Rest des Kreuzes setzt sich aus 8 kongruenten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken zusammen, wobei jedes halb so groß wie ein Quadrat im Zenrtrum ist. Diese 8 Dreiecke ergeben wiederum 4 Quadrate. Also nimmt das Kreuz insgesamt den gleichen Flächeninhalt ein, wie die 8 Quadrate.
Das sind aber zusammen 50% der Fläche des Quadrates $ABCD$.

34.



Ein rechteckiges Grundstück $ABCD$, dessen Flächeninhalt $2,34\,\text{ha}$ beträgt, ist in lauter quadratische Parzellen eingeteilt. Eine der beiden kleinsten Parzellen, die im Plan farbig gekennzeichent ist, wird eingezäunt.
Berechne die Länge des Zaunes.

Lösung:



$2,34\,\text{ha} = 23\,400\,\text{m}^2$.
Die beiden kleinsten Parzellen haben eine Breite von $(x + x)\,\text{m} = 2x\,\text{m}$.
Diese Seitenlänge geht dann auf das nächst größere Quadrat über.
Dessen Flächeninhalt beträgt dann $(2x)^2\,\text{m}^2$.

Auf diese Weise ermittelst du die Flächeninhalte der nächsten Quadrate (siehe Lösungsskizze).
Am Ende ergibt sich für die Maßzahlen:

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + (2x)^2 + (3x)^2 + (5x)^2 + (8x)^2 &= 23\,400 \\ 2x^2 + 4x^2 + 9x^2 + 25x^2 + 64x^2 &= 23\,400 \\ 104x^2 &= 23\,400 \qquad |: 104 \\ x^2 &= 225 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Der Umfang eines dieser kleinsten Quadrate beträgt $4 \cdot 15\,\mathrm{m} = 60\,\mathrm{m}$. Das ist dann die gesuchte Zaunlänge.

35. Gegeben ist die Gleichung $2x+3 = 11$ für $G = \mathbb{N}$. Welche der folgenden Gleichungen haben die gleiche Lösung? Begründe Deine Antwort, ohne die Lösung jeder Gleichung zu berechen.

(a) $3 + 2x = 11$

(b) $(3 + x) + x = 11$

(c) $x + (3 + x) = 11$

(d) $3 + x = -x + 11$

(e) $2 + 3 \cdot x = 11$

(f) $x^2 + 3 = 11$

(g) $2000x + 3000 = 11000$

Lösung: (a) Ja, weil $3 + 2x = 2x + 3$ gilt (Kommutativgesetz der Addition und Punkt-vor-Strich-Regel)

(b) Ja, weil $(3 + x) + x = 3 + (x + x) = 3 + 2 \cdot x$ gilt; dann erhältst du die Gleichung (a) in der Angabe.

(c) Ja, weil $x + (3 + x) = x + 3 + x = x + x + 3 = 2x + 3$ gilt. Du erhältst dann die Gleichung oben in der Angabe.

(d) Ja. Begründung: Mit der Umformung $3+x = -x+11 \mid +x$ erhältst du die Gleichung (a) in der Angabe.

(e) Nein, weil nach der Regel „Punkt vor Strich“ $2 + 3 \cdot x \neq 2 + 3 \cdot x$ gilt. (Mache es Dir an Beispielen mit Zahlen deutlich.)

(f) Nein, weil $x^2 = x \cdot x$ ist und $2 \cdot x = x + x$ gilt. (Mache es Dir an Beispielen mit Zahlen deutlich.)

(g) $2000x + 3000 = 11000 \mid: 1000$ ergibt die Gleichung oben in der Angabe.

2. Lineare Gleichungen und Ungleichungen

1. Gegeben ist die Gleichung

$$13 - 2x = x + 10, \quad G = \mathbb{Z}\,.$$

   (a) Zeige, dass $x = 2$ keine Lösung dieser Gleichung ist.

   (b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass $x = 2$ die Lösung der abgeänderten Gleichung ist, und führe den Nachweis.

Lösung: (a) Einsetzen (b) z.B.: $13 - 2x = x + 7$

2. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung $4 - 6x = 3(11 - 2x)$ ist für $G = \mathbb{Q}$ leer.

Lösung: Es ergibt sich $4 - 0 \cdot x = 33$. Das ist für keine Belegung von x erfüllbar.

3. Gegeben ist die Gleichung

$$7 - x = 3x + 11, \quad G = \mathbb{Z}$$

   (a) Zeige, dass $x = -1$ die Lösung dieser Gleichung ist.

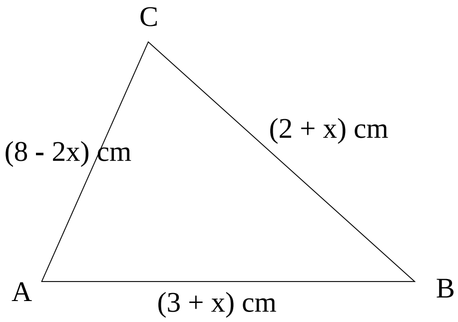
   (b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass die Lösungsmenge der abgeänderten Gleichung leer ist, und führe den Nachweis.

Lösung: (a) Entweder $x = -1$ einsetzen oder die Gleichung nach x auflösen.
(b) z.B. $G = \mathbb{N}$ wählen oder $7 - x = 3x + 12$ usw.

4. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + 8 = 6$ ist für $G = \mathbb{Q}$ leer.

Lösung: Es ergibt sich $x^2 = -2$. Es gibt keine Zahl, die mit sich selbst multipliziert einen negativen Produktwert ergibt.

5. Es gilt $x \in \mathbb{Q}^+$.
   (a) Zeichne das Dreieck ABC für $x = 1$.
   (b) Berechne jeweils den Umfang des Dreiecks ABC für $x \in \{1,5;\ 1,\overline{6};\ 2\frac{1}{8}\}$.
   Was stellst du fest?
   Ist das immer so? Begründe deine Antwort.
   (c) Unter allen möglichen Dreiecken ABC gibt es zwei gleichschenklige. Berechne jeweils alle Seitenlängen.
   (d) Was ergibt sich für $x = 4$? Bestimme alle Belegungen von x, für die es überhaupt solch ein Dreieck ABC gibt.



Lösung:

Wir rechnen nur mit Maßzahlen.

(a) Die Dreiecksseiten sind 3 cm, 6 cm und 4 cm lang.

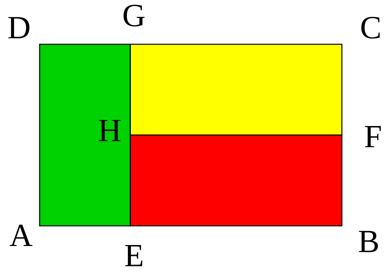
(b) Wegen $(8 - 2x) + (2 + x) + (3 + x) = 13$ ist der Umfang konstant 13 cm lang.

(c) 1. Fall:
$8 - 2x = 2 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$
$a = 5\,\text{cm}$, $b = 2\,\text{cm}$ und $c = 5\,\text{cm}$
2. Fall:
$8 - 2x = 3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\overline{6}\,\text{cm}$
$a = 3,\overline{6}\,\text{cm}$; $b = 4,\overline{6}\,\text{cm}$ und $c = 4,\overline{6}\,\text{cm}$.
3. Fall:
$2 + x = 3 + x$ ist nicht erfüllbar, weil stets $2 + x < 3 + x$ gilt.

(d) Für $x = 4$ wird $\overline{AC} = 0\,\text{cm}$; d.h. das Dreieck entartet zur Strecke.
Es muss $\overline{AC} > 0$ gelten; d.h. es muss $0 < x < 4$ (*)sein.
Gleichzeitig müssen alle Dreiecksungleichungen erfüllt sein:

1. Bedingung: $(8 - 2x) + (3 + x) > 2 + x \quad \Leftrightarrow \quad x < 4,5$; ist wegen (*) ohnehin erfüllt.
2. Bedingung: $(8 - 2x) + (2 + x) > 3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x < 3,5$ (**)
3. Bedingung: $(2 + x) + (3 + x) > 8 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad x > 0,75$
Mit (**) gibt es nur für $0,75 < x < 3,5$ solche Dreiecke.

6.



Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.
Die drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Ihre Seitenlängen stehen jeweils im Verhältnis 2:3. Weiter gilt: $\overline{HF} = 3x\,\text{cm}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

(b) Welchen Flächeninhalt besitzt eines der inneren Rechtecke, wenn der Saum der Fahne 1 m 8 cm lang ist?

Lösung:

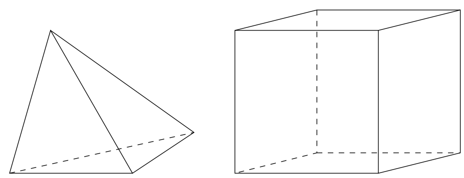
(a) –

(b) Es gilt: $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{HG} = 4x\,\text{cm}$ und $\overline{AB} = 5x\,\text{cm}$.
Dann folgt für den Umfang u: $u(x) = 18x\,\text{cm}$.
$18x = 108 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad \text{und} \quad 2x = 12 \quad \text{sowie} \quad 3x = 18.$
Damit folgt für den Flächeninhalt A eines dieser Rechtecke im Inneren: $A = 12\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} = 216\,\text{cm}^2$

7. Die eine Seite eines Rechtecks ist 2 cm länger als die andere. Der Rechteckumfang liegt zwischen 60 cm und 62 cm.
Welche Seitenlängen sind dann für die kürzere Seite möglich?

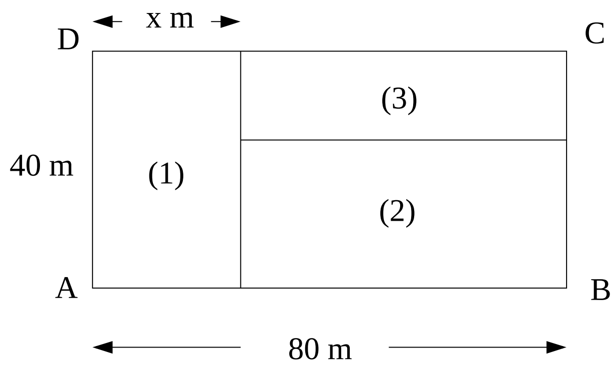
Lösung: Die kürzere Seite liegt zwischen 14 cm und 14,5 cm.

8. In einer Spielzeugkiste befinden sich Würfel und Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche. Es werden 30 Körper mit 300 Kanten gezählt. Wie viele Würfel und wie viele Pyramiden befinden sich in der Kiste?



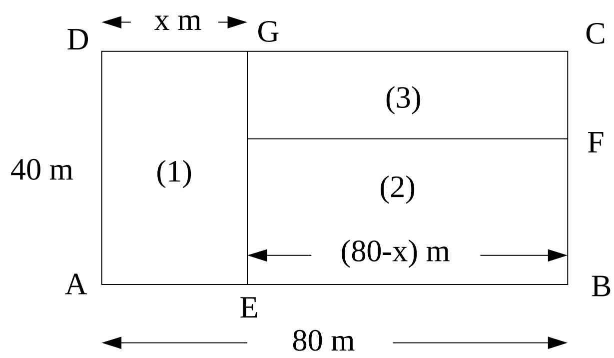
Lösung: Es sind 20 Würfel und 10 Pyramiden.

9.



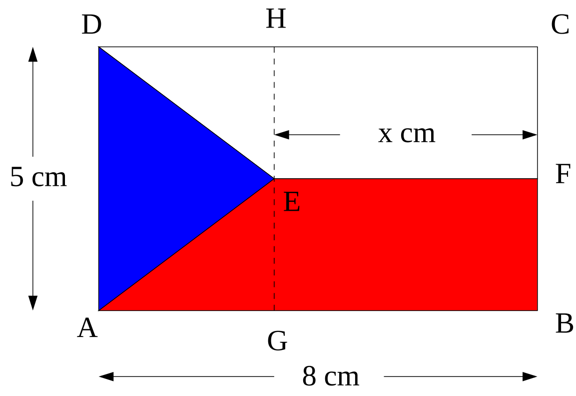
Ein rechteckiges Wiesengrundstück $ABCD$, das zur Gemeinde Besselbach gehört, soll in drei rechteckige Baugrundstücke (1), (2) und (3) aufgeteilt werden. Es gilt stets $x \in \mathbb{Q}^+$. Der dortige Bürgermeister Pickelschau beauftragte seinen Baureferenten Schaufelpick, zu prüfen, ob sich für einen bestimmten x-Wert gleich große Parzellen ergäben.

Lösung:



Es muss einerseits $\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{DG} = x\,\text{m}$ gelten.
Wegen $\overline{BC} = 40\,\text{m}$ folgt: $x = 20.$ *)
Andererseits muss gleichzeitig $\overline{EB} = \overline{AD}$ gelten:
$\Rightarrow \quad 80 - x = x \qquad \Leftrightarrow \quad x = 40$ **)
Die Ergebnisse *) und **) stehen im Widerspruch. Also gibt es keine Belegung von x, die drei flächengleiche Rechtecke erzeugt.

10. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 5\,\text{cm}$ und $\overline{EF} = x\,\text{cm}$.
Zusätzlich wurde die Hilfslinie $[HG]$ gestrichelt eingezeichnet.
Hinweis: Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne die Figur für $x = 4,5$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABFE$ in Abhängigkeit von x. **Hinweis:** Verwende für deine Überlegungen die Strecke $[HG]$.
[Ergebnis: $A_T(x) = (1,25x + 10)\,\text{cm}^2$]

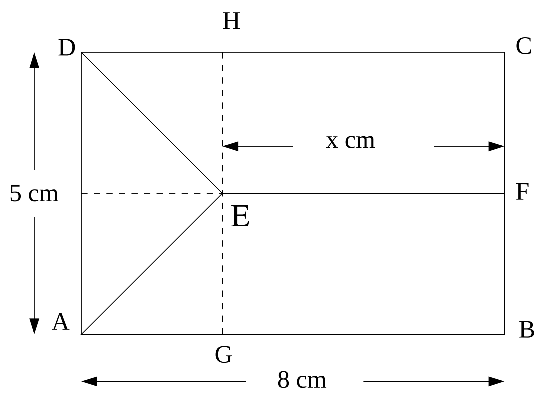
(c) Berechne x so, dass alle drei Teilflächen im Inneren des Rechtecks $ABCD$ gleich groß sind.

(d) Berechne den Flächeninhalt A_D des Dreiecks AED in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A_D(x) = (20 - 2,5x)\,\text{cm}^2$]

(e) Bestätige das Ergebnis der Aufgabe (c) mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgaben (b) und (d).

Lösung: (a) –

(b)



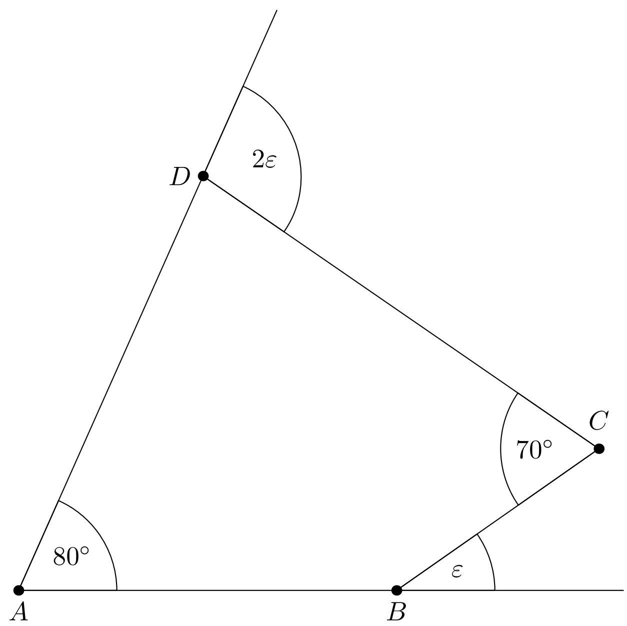
$A(ABFE) = [A(ABCD) - A(AED)] : 2 = [40\,\text{cm}^2 - 0,5 \cdot 5 \cdot (8 - x)\,\text{cm}^2] : 2$
$A_T = 20\,\text{cm}^2 - (10 - 1,25x)\,\text{cm}^2 = (1,25x + 10)\,\text{cm}^2$

(c) Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ muss dreimal so groß sein wie der Flächeninhalt des Trapezes $ABFE$:
$3 \cdot (1,25x + 10) = 40 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{3} \approx 2,67$

(d) $A(AED) = A(ABCD) - 2 \cdot A(ABFE) = 40\,\text{cm}^2 - 2 \cdot (1,25x + 10)\,\text{cm}^2$
$A_D(x) = (20 - 2,5x)\,\text{cm}^2$

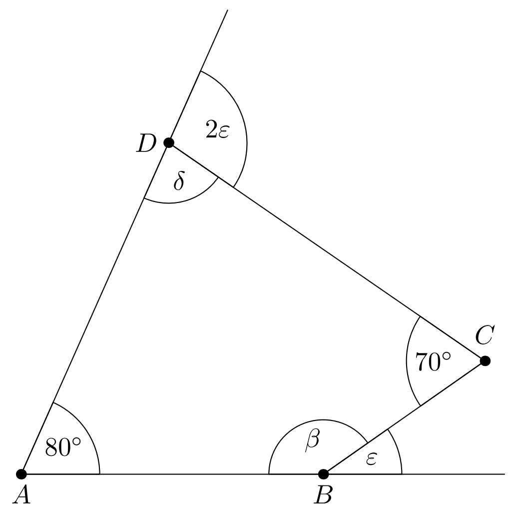
(e) Es muss gelten $A_T = A_D$: $\quad 1,25x + 10 = 20 - 2,5x \quad \Rightarrow \quad x \approx 2,67$

11.



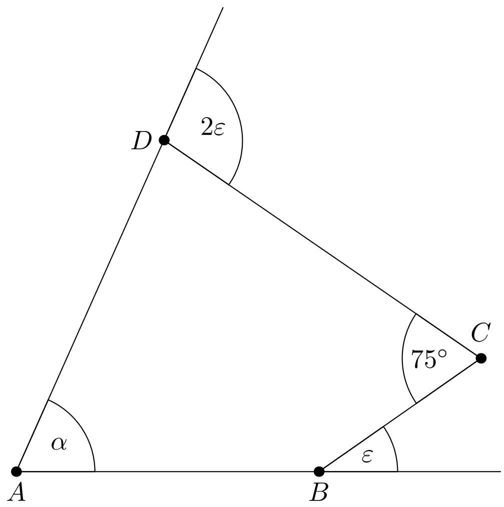
Berechne ε.

Lösung:



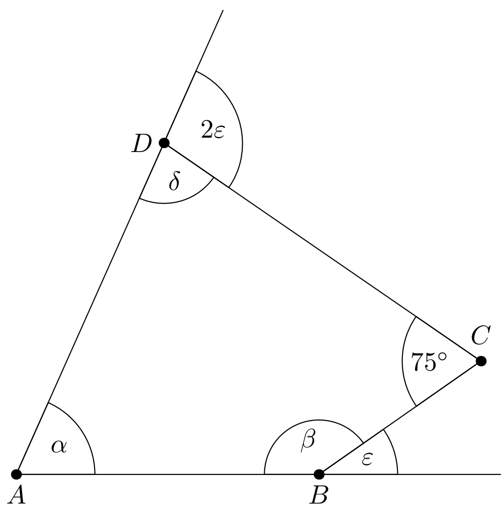
Im Viereck $ABCD$ gilt: $80° + \beta + 70° + \delta = 360°$. (*)
β ist der Nebenwinkel von ε: $\beta = 180° - \varepsilon$. (1)
δ ist der Nebenwinkel von 2ε: $\delta = 180° - 2\varepsilon$. (2)
Wir ersetzen in der Gleichung (*) β durch $180° - \varepsilon$ und δ durch $180° - 2\varepsilon$.
Dann ergibt sich: $80° + 180° - \varepsilon + 70° + 180° - 2\varepsilon = 360°$.
$\Leftrightarrow \quad -3\varepsilon = -150° \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 50°$.

12.



(a) Berechne α für $\varepsilon = 48°$.
(b) Für welche Werte von ε existiert das Viereck $ABCD$?

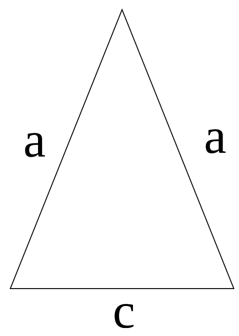
Lösung:



(a) Aus $\varepsilon = 48°$ folgt: $\beta = 180° - 48° = 132°$ und $\delta = 180° - 96° = 84°$.
In jedem Viereck beträgt die Innenwinkelsumme $360°$:
$\alpha + 132° + 75° + 84° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 69°$.

(b) Im Viereck $ABCD$ gilt: $\alpha + \beta + 75° + \delta = 360°$. (*)
β ist der Nebenwinkel von ε: $\beta = 180° - \varepsilon$. (1)
δ ist der Nebenwinkel von 2ε: $\delta = 180° - 2\varepsilon$. (2)
Wir ersetzen in der Gleichung (*) β durch $180° - \varepsilon$ und δ durch $180° - 2\varepsilon$.
Dann ergibt sich: $\alpha + 180° - \varepsilon + 75° + 180° - 2\varepsilon = 360°$.
$\Leftrightarrow \quad \alpha - 3\varepsilon = -75° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 3\varepsilon - 75°$.
Damit das Viereck $ABCD$ existiert, muss $\alpha > 0$ gelten:
$\Leftrightarrow \quad 3\varepsilon - 75° > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon > 25°$.
Wenn du andererseits am Punkt D das Winkelmaß 2ε betrachtest, dann muss $2\varepsilon < 180°$ und damit $\varepsilon < 90°$ gelten.
Insgesamt muss also $25° < \varepsilon < 90°$ gelten.

13.



(a) Um welches besondere Dreieck handelt es sich? Begründe deine Antwort.

(b) Fritz soll für $a = 4{,}8\,\text{cm}$ und $c = 10\,\text{cm}$ ein solches Dreieck konstruieren. Nach einer Weile meint er: „Aber das geht doch gar nicht!“
Begründe, dass Fritz Recht hat.

(c) Zeichne zwei verschiedene gleichschenklige Dreiecke, die jeweils einen Umfang $u = 12\,\text{cm}$ besitzen.

Lösung: (a) Das Dreieck ist gleichschenklig, denn zwei Seiten haben die gleiche Länge a.

(b) In jedem Dreieck müssen zwei Seiten länger als die dritte Seite sein:
Es müsste z.B. $4{,}8\,\text{cm} + 4{,}8\,\text{cm} > 10\,\text{cm}$ werden. Diese Bedingung ist nicht erfüllt, also gibt es kein solches Dreieck; Fritz hat Recht.

(c) Zum Beispiel:

a	$4{,}5\,\text{cm}$	$3\,\text{cm}$
c	$3{,}7\,\text{cm}$	$3\,\text{cm}$
u	$2 \cdot 4{,}5\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$	$2 \cdot 3\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$

Es gibt beliebig viele Lösungen.

14. Für alle Ungleichungen gilt: $G = \mathbb{Q}$.

(a) Berechne die Lösungsmenge von $2x - 4 > 0$.

(b) Beründe ohne nach x aufzulösen: Die Ungleichung $6x - 12 > 0$ hat die gleiche Lösungsmenge wie die Ungleichung in der Aufgabe (a).

(c) Bestimme die Lösungsmenge von $1387 \cdot (2x - 4) > 0$.

(d) Bestimme die Lösungsmenge von $(x^2 + 1) \cdot (2x - 4) > 0$.

(e) Bestimme die Lösungsmenge von $(x - 11)^2 \cdot (2x - 4) > 0$.

Lösung: (a) $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}}$.

(b) Wenn du die Ungleichung in Aufgabe (a) auf beiden Seiten mit 3 multiplizerst, dann erhältst du die Ungleichung (b). Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

(c) Wenn du Ungleichung (a) auf beiden Seiten mit 1387 multiplizerst, dann erhältst du die Ungleichung (c). Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

(d) Weil $x^2 + 1$ stets positiv ist, muss $2x - 4$ auch positiv (also > 0) bleiben. An der Lösungsmenge ändert sich nichts.

(e) Weil $x^2 + 1$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ positiv ist, folgt aus den gleichen Gründen wie oben $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}}$.

(f) Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob die Lösungsmenge zu den vorigen unverändert bleibt. Doch du musst hier vorsichtiger sein: Der Faktor $(x - 11)^2$ ist nicht für alle Belegungen von x positiv, denn $x = 11$ ist eine Nullstelle dieses Terms; d.h. für $x = 11$ ergibt sich $(11 - 11)^2 \cdot (2 \cdot 11 - 4) = 0$ und nicht > 0 .Das bedeutet: $x = 11$ gehört nicht zur Lösungsmenge.
Damit gilt hier $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}} \setminus \{11\}$.

15. Im September 2011 orderte das Kaufhaus X&Y 200 T-Shirts. Davon wurden im gleichen Monat 76 Stück verkauft.
Einen Monat später verteuerte sich dieser Artikel um je einen EURO. In diesem Zeitraum wurden jedoch nur 72 Exemplare verkauft. Es stellte sich heraus, dass die Einnahmen aus dem Verkauf von diesen T-Shirts im Oktober die gleichen waren wie die im September 2011 .
Berechne den Verkaufpreis eines T-Shirts im September 2011 .

Lösung: Preis pro T-Shirt im September 2011: x EURO .
Preis pro T-Shirt im Oktober 2011: $(x + 1)$ EURO .
Wir rechnen im Folgenden nur mit Maßzahlen.
$76 \cdot x = 72 \cdot (x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 72 \quad \Leftrightarrow \quad x = 18$.
Im September 2011 kostete eines dieser T-Shirts 18 EURO.

16. Carsten rechnet eine Gleichung aus, die er aus dem Buch übertragen hat. Der Lehrer betrachtet seinen Hefteintrag: „Deine Schrift ist wie schon so oft zum Teil unleserlich, aber dein Ergebnis ist richtig.“
In seinem Heft steht (der unleserliche Teil ist durch ein Kästchen ersetzt):

$$\begin{array}{lcr} 2x - \square & = & -2 \\ 2x & = & 14 \\ x & = & 7 \end{array}$$

Ermittle auf zwei verschiedene Arten, was im Buch anstelle des Kästchens stand.

Lösung: **1. Möglichkeit:**
Um von der ersten zur zweiten Zeile zu kommen, hat Carsten offenbar auf beiden Seiten der Gleichung im Buch die Zahl 16 addiert. Dadurch fällt das Kästchen in der zweiten Zeile weg. Also stand die unleserliche Zahl 16 anstelle des Kästchens da.
2. Möglichkeit:
Der Lehrer hat $x = 7$ als richtige Lösung bestätigt. Setze diese Lösung in die erste Zeile ein:
$2 \cdot 7 - \square = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 14 - \square = -2 \mid -14 \quad \Leftrightarrow \quad -\square = -16 \mid \cdot(-1)$
$\Leftrightarrow \quad \square = 16\,.$

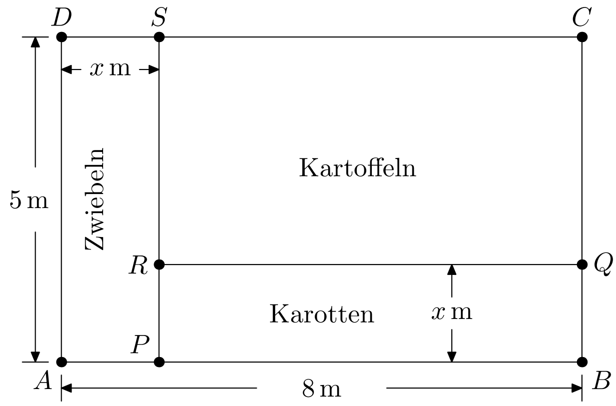
17. Carsten rechnet eine Gleichung aus, die er aus dem Buch übertragen hat. Der Lehrer betrachtet seinen Hefteintrag: „Deine Schrift ist wie schon so oft zum Teil unleserlich, aber dein Ergebnis ist richtig.“
In seinem Heft steht (der unleserliche Teil ist durch ein Kästchen ersetzt):

$$\begin{array}{lcr} 2x - \square & = & -2 \\ 2x & = & 14 \\ x & = & 7 \end{array}$$

Ermittle auf zwei verschiedene Arten, was im Buch anstelle des Kästchens stand.

Lösung: **1. Möglichkeit:**
Um von der ersten zur zweiten Zeile zu kommen, hat Carsten offenbar auf beiden Seiten der Gleichung im Buch die Zahl 16 addiert. Dadurch fällt das Kästchen in der zweiten Zeile weg. Also stand die unleserliche Zahl 16 anstelle des Kästchens da.
2. Möglichkeit:
Der Lehrer hat $x = 7$ als richtige Lösung bestätigt. Setze diese Lösung in die erste Zeile ein:
$2 \cdot 7 - \square = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 14 - \square = -2 \mid -14 \quad \Leftrightarrow \quad -\square = -16 \mid \cdot(-1)$
$\Leftrightarrow \quad \square = 16\,.$

18.



Das rechteckige Feld $ABCD$ ist 8 m lang und 5 m breit.
Auf den drei rechteckigen Parzellen werden Karotten, Zwiebeln und Kartoffeln angebaut. Die beiden Streifen für Karotten und Zwiebeln sind jeweils x m breit. Sie besitzen den gleichen Flächeninhalt. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

(a) Berechne x. [Ergebnis: x=3]

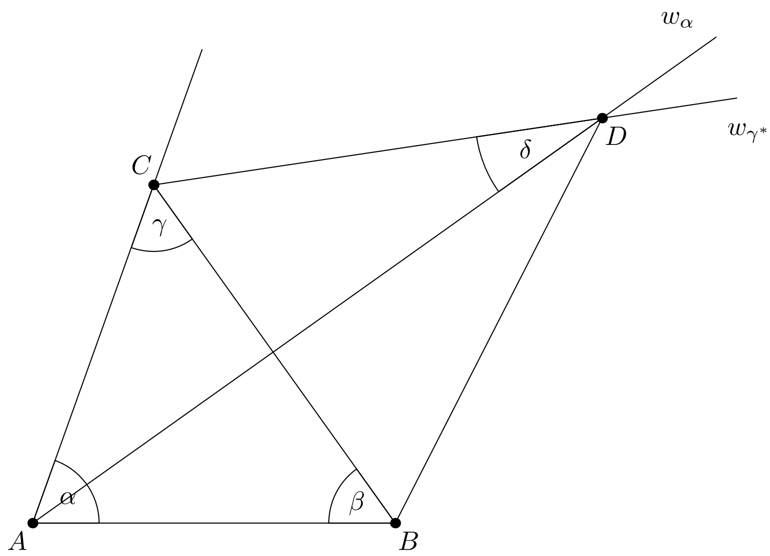
(b) Wie viel Prozent der Gesamtfläche nimmt dann das Kartoffelfeld ein?

Lösung: (a) Es gilt: $\overline{RQ} = (8-x)\,\text{m}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.
Dann folgt: $x \cdot (8-x)\,\text{m}^2 = 5 \cdot x\,\text{m}^2 \;\;|: (x\,\text{m}^2)$ mit $x > 0$
$\Leftrightarrow \quad 8 - x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3\,.$

(b) $A_{\text{Kartoffelfeld}} = \overline{RQ} \cdot \overline{RS} = 5\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = 10\,\text{m}^2\,.$

$$\frac{A_{\text{Kartoffelfeld}}}{A_{ABCD}} = \frac{10\,\text{m}^2}{40\,\text{m}^2} = 0{,}25 = 25\%\,.$$

19.

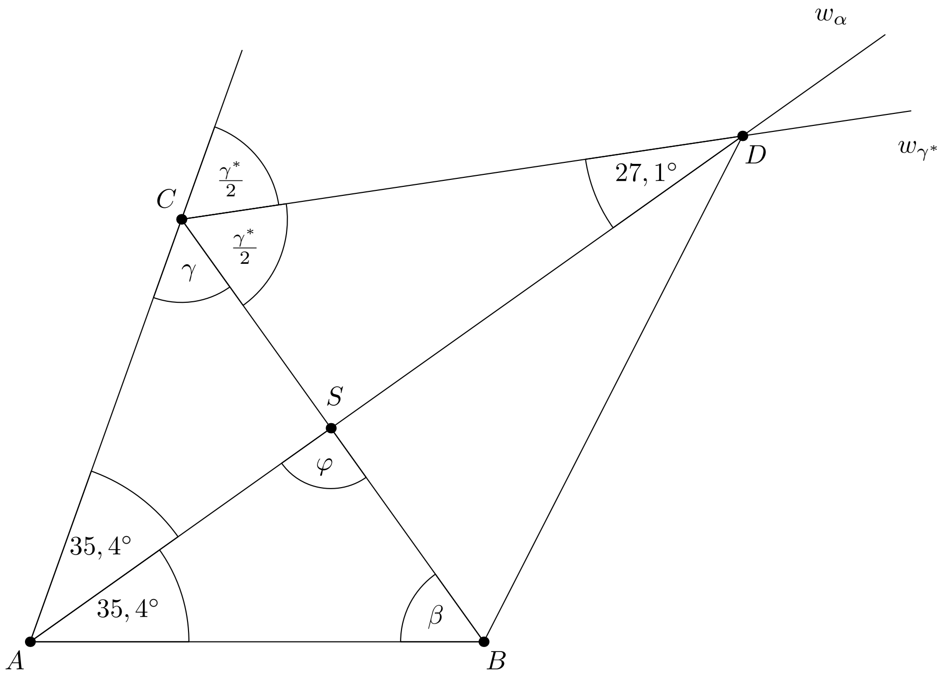


Die Halbgerade w_α halbiert den Winkel α und die Halbgerade w_{γ^*} halbiert den Nebenwinkel von γ. Weiter gilt: $\alpha = 70,8^\circ$ und $\delta = 27,1^\circ$.
Das Viereck $ABDC$ ist nicht achsensymmetrisch.

(a) Berechne die Winkelmaße γ und β. [Teilergebnis: $\beta = 54,2^\circ$]

(b) Begründe, dass es sich bei dem Viereck $ABDC$ nicht um ein achsensymmetrisches Drachenviereck handelt.

Lösung: (a)



Im Dreieck ADC gilt: $35,4^\circ + 27,1^\circ + \dfrac{\gamma^*}{2} + \gamma = 180^\circ \quad (1)$.
Weiter gilt: $\gamma^* = 180^\circ - \gamma$.
In (1): $35,4^\circ + 27,1^\circ + (180^\circ - \gamma) : 2 + \gamma = 180^\circ$.
$\Leftrightarrow \quad 62,5^\circ + 90^\circ - 0,5\gamma + \gamma = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad 62,5^\circ + 0,5\gamma = 90^\circ$
$\Leftrightarrow \quad \gamma = 55^\circ$.
Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck ABC ergibt sich:
$70,8^\circ + 55^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow \quad \beta = 54,2^\circ$.

Eine andere Möglichkeit:

$\frac{\gamma^*}{2}$ ist ein Außenwinkel am Dreieck ADC. Jeder Außenwinkel an einem Dreieck ist genau so groß wie die Summe der Maße der beiden nicht anliegenden Innenwinkel. Das bedeutet hier:

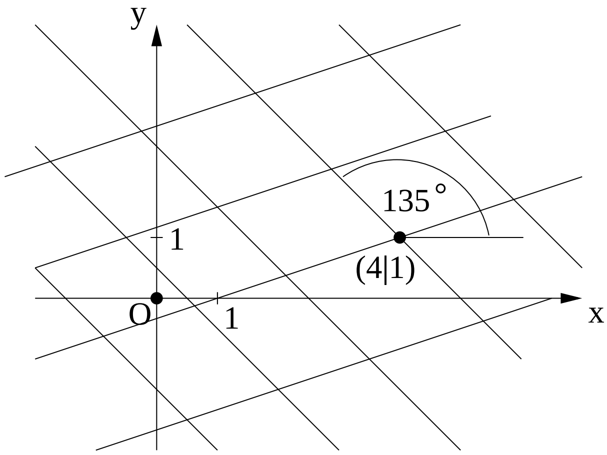
$$\frac{\gamma^*}{2} = 35,4^\circ + 27,1^\circ = 62,5^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^* = 125^\circ.$$

$\gamma = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ \quad \ldots \quad \beta = 54,2^\circ$.

(b) In jedem (achsensymmetrischen) Drachenviereck müssen die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck ABS gilt: $\varphi = 180° - 35,4° - 54,2° = 90,4° \neq 90°$.
Das Viereck $ABDC$ ist also kein (achsensymmetrisches) Drachenviereck.

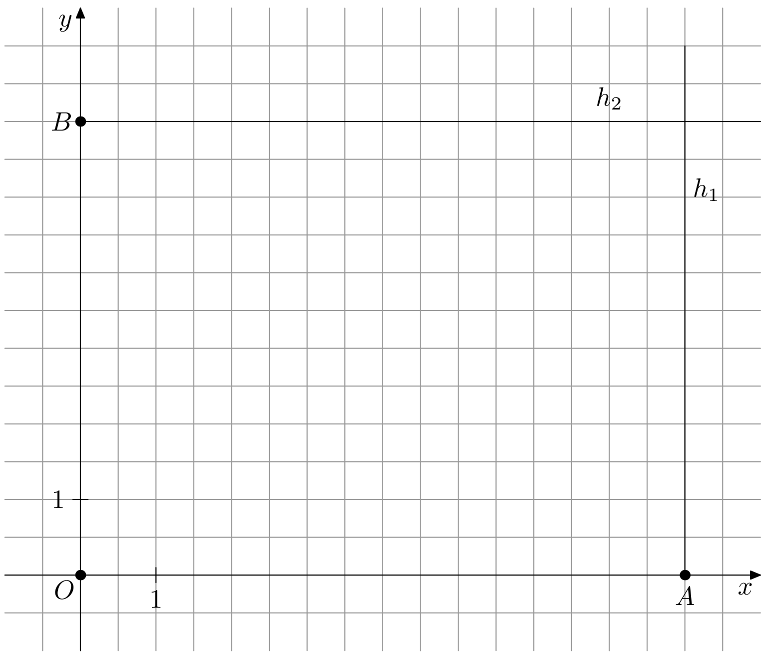
3. Lineare Funktionen

1. Gib die Gleichungen der beiden Parallelenscharen an, mit deren Hilfe man das unten abgebildete Muster zeichnen kann:



Lösung: $g_1(t): y = -x + t$ und $g_2(t): y = \frac{1}{3}x + t$

2.



Die beiden Halbgeraden h_1 und h_2 mit den Anfangspunkten $A(8 \mid 0)$ bzw. $B(0 \mid 6)$ stehen auf der x- bzw. y-Achse senkrecht.
Auf der Halbgeraden h_1 wandern Punkte P_n und auf der Halbgeraden h_2 wandern Punkte Q_n. Dabei gilt: $\overline{AP_n} = \overline{BQ_n} = d\,\text{cm}$.

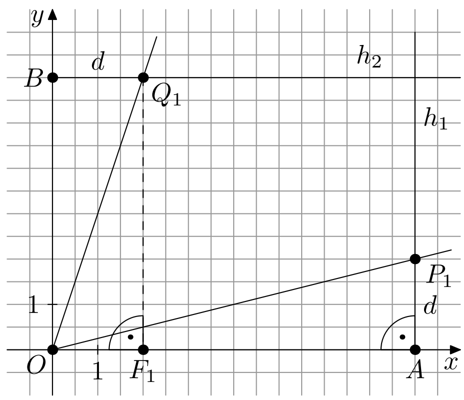
(a) Zeichne für $d = 2$ die beiden Ursprungshalbgeraden $[OP_1$ und $[OQ_1$ in obiges Koordinatensystem ein.

(b) Berechne d so, dass die zugehörigen Ursprungshalbgeraden $[OP_2$ und $[OQ_2$ aufeinander fallen.

[Ergebnis: $d = 4\sqrt{3}$]

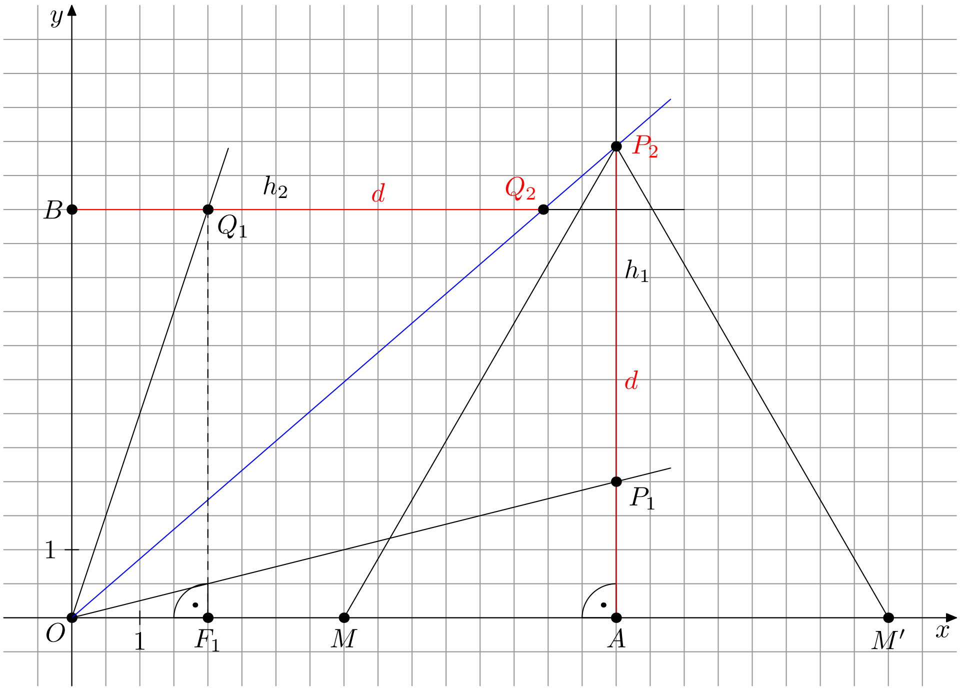
(c) Konstruiere die Punkte P_2 und Q_2 und zeichne die zugehörigen Ursprungshalbgeraden $[OP_2$ und $[OQ_2$ ein

Lösung: (a)



(b) Der Steigungsfaktor in den beiden Steigugsdreiecken OF_1Q und OAP_1 muss der gleiche sein:
$\dfrac{6}{d} = \dfrac{d}{8} \quad \Leftrightarrow \quad d^2 = 48 \quad \Rightarrow \quad d = 4\sqrt{3} \approx 6,93.$

(c) Die Maßzahl $d = 4\sqrt{3}$] lässt sich als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $A = 8\,\text{cm}$ deuten:



Der Punkt M' ist durch Spiegelung des Mittelpunktes M der Strecke $[OA]$ am Punkt A entstanden. Über der Strecke MM' wird nun das gleichseitige Dreieck $MM'P_2$ errichtet, dessen Höhe $[AP_2]$ die gesuchte Länge von $\frac{8}{2}\sqrt{3}\,\text{cm}$ besitzt.

4. Dreiecke und Vierecke

1. Von einem Dreieck ABC weiß man:
   (a) $a = 5\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\gamma = 50°$
   (b) $a = b$ und $\beta = 60°$

   Fertige jeweils für den Fall (a) und für den Fall (b) eine Planfigur an. Begründe damit die besonderen Eigenschaften dieser Dreiecke.

Lösung: (a) Es ist ein gleichschenkliges Dreieck.
(b) Es ist ein gleichseitiges Dreieck.

2. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC aus

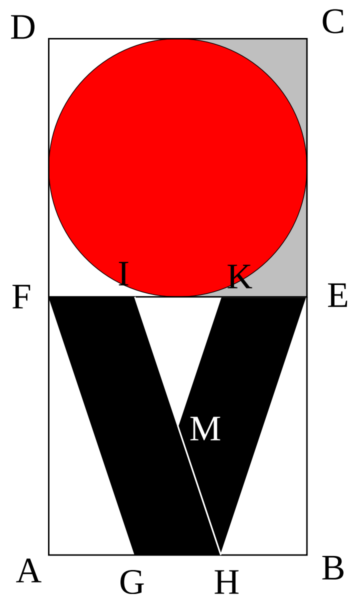
$$\overline{AB} = 7\,\text{cm} \quad \overline{BC} = 5\,\text{cm} \quad \text{und} \quad \overline{AC} = 6\,\text{cm}$$

   auf zweifache Weise:
   i. Lege die Strecke $[AB]$ waagrecht
   ii. Lege die Strecke $[AC]$ waagrecht.

   (b) Ersetze eine der oben gegebenen Seitenlängen des Dreiecks ABC durch das Maß eines seiner Innenwinkel, so dass das zugehörige Dreieck nicht mehr existiert. Begründe deine Wahl.

Lösung: (a) Es ist jeweils auf den richtigen Drehsinn zu achten.
(b) Z.B.: Ersetze $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$ durch $\beta = \sphericalangle CBA = 100°$. Wegen $\overline{AB} > \overline{AC}$ müsste dann $\gamma = \sphericalangle ACB > \beta = 100°$ gelten, was nicht geht.

0. Das ist ein Bild des Logos der Firma MARABU, die Farben herstellt.



Diese Figur ist aus zwei Quadraten aufgebaut und es gilt:
$\overline{AG} = \overline{GH} = \overline{GH} = \overline{HB} = \overline{FI} = \overline{IK} = \overline{KE} = x\,\text{cm}$.

(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A des Rechtecks $ABCD$ in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A(x) = 18x^2\,\text{cm}^2$]

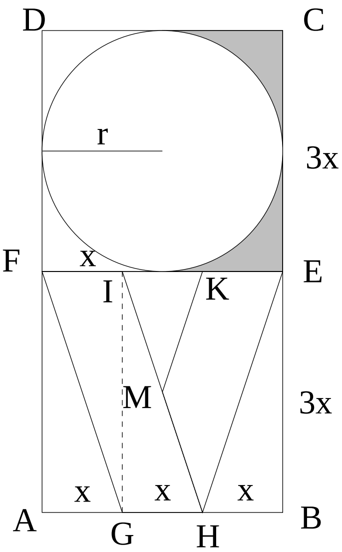
(c) Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ $1,125\,\text{dm}^2$ groß ist.

(d) Vergleiche den Flächeninhalt des Dreiecks HBE mit dem des Parallelogramms $GHIF$.

(e) Untersuche rechnerisch, ob die dunkel getönte Restfläche zwischen dem Kreis und dem Quadrat $FECD$ größer oder kleiner ist als die des Dreiecks HBE.

Lösung: (a) –

(b)



Es gilt: $\overline{AB} = 3x\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6x\,\text{cm}$. $\Rightarrow \quad A(x) = 18x^2\,\text{cm}^2$

(c) $18x^2\,\text{cm}^2 = 112{,}5\,\text{cm}^2$ für $x \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow \; x = 2{,}5$

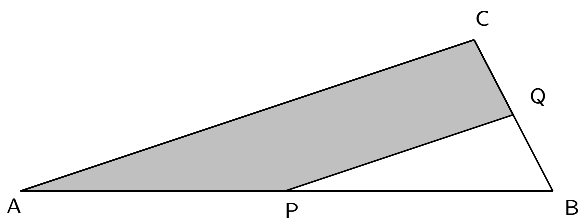
(d) Durch die Strecke $[IG]$ wird das Parallelogramm $GHIF$ in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt, die jeweils zu dem rechtwinkligen Dreieck HBE kongruent sind.
$\Rightarrow \quad A(GHIF) = 2 \cdot A(HBE)$

(e) Für den Kreisradius gilt: $r = 1{,}5x$
$A(\text{dunkel}) = [(3x)^2 - (1{,}5x)^2 \cdot \pi] : 2\,\text{cm}^2 = 0{,}5 \cdot (9 - 2{,}25\pi)x^2\,\text{cm}^2$
Die Dreiecke HBE und AGF sind kongruent:
$A(HBE) = 0{,}5 \cdot x \cdot 3x\,\text{cm}^2 = 1{,}5x^2\,\text{cm}^2$

$$\frac{A(\text{dunkel})}{A(HBE)} = \frac{0{,}5 \cdot (9 - 2{,}25\pi)x^2\,\text{cm}^2}{1{,}5x^2\,\text{cm}^2} \approx \frac{1{,}93}{3} < 1$$

Die dunkel getönte Fläche ist also kleiner als die Fläche des Dreiecks HBE.

1.



Das Dreieck ABC hat einen Flächeninhalt von $10\,\text{cm}^2$. Zusätzlich gilt: $\overline{AP} = \overline{BP}$ und $\overline{BQ} = \overline{CQ}$.
Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $APQC$.
Hinweis: Zeichne geeignete Hilfslinien ein.

Lösung: Der Flächeninhalt des Vierecks $APQC$ beträgt $7,5\,\text{cm}^2$.

2. Es gibt zwei Möglichkeiten, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Basis 5 cm lang ist und das Maß irgendeines Innenwinkels $70°$ beträgt.
   Konstruiere diese beiden Dreiecke.

Lösung: 1. Fall: Beide Basiswinkel haben das Maß $70°$. Dann hat der dritte Winkel das Maß $40°$.
2. Fall: Der Winkel an der Spitze hat das Maß $70°$. Dann hat jeder Basiswinkel das Maß $55°$.

3. Es gibt zwei Möglichkeiten, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, in dem ein Innenwinkel $120°$ beträgt und eine Seite 6 cm lang ist.
   Konstruiere diese beiden Dreiecke.

Lösung: - -

4. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 35°$ und $\gamma = 95°$.
   (b) Ändere die Angaben für das Dreieck ABC an einer Stelle so ab, dass mit der abgeänderten Angabe die Konstruktion eines Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Wahl.

Lösung: (b) z.B. $a = 7\,\text{cm}$ statt $\alpha = 35°$

5. (a) Von einem Dreieck ABC weiß man: $a = 11{,}3\,\text{cm}$ und $\gamma = 60°$. Außerdem besitzt das Dreieck ABC eine Symmetrieachse.
   Konstruiere das Dreieck. Was fällt dir auf?
   (b) Von einem weiteren Dreieck ABC weiß man: $\alpha = 47°$, $a = 4{,}5\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = \overline{AB}$.
   Berechne die restlichen Innenwinkel dieses Dreiecks.

Lösung: (a) Das Dreieck ist gleichseitig.
(b) Das Dreieck ist gleichschenklig: $\beta = \gamma = 66{,}5°$

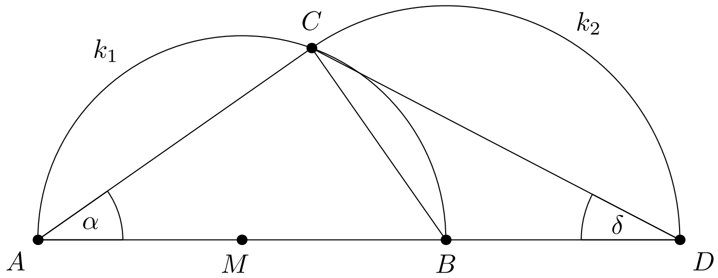
6. Konstruiere ein Dreieck ABC mit $a = 6\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ und $c = 7\,\text{cm}$ auf zweifache Weise:
   (a) Lege die Strecke $[BC]$ waagrecht.
   (b) Lege die Seite $[AC]$ waagrecht.
   (c) Ändere die Angaben für das Dreieck so ab, dass mit der abgeänderten Angabe die Konstruktion eines Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Abänderung ohne neue Konstruktion.

Lösung: (c) z.B. $c = 10{,}5\,\text{cm}$ oder $\alpha = 90{,}01°$

7. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 92°$ und $a = 8\,\text{cm}$.
   (b) Ändere eine der Angaben für das Dreieck ABC so ab, dass dann die Konstruktion des Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Abänderung.

Lösung: (b) z.B. statt $a = 8\,\text{cm}$: $\beta = 90°$
oder $c = 9\,\text{cm}$ statt $c = 6\,\text{cm}$.

8.



In der obigen Figur sind die Punkte M und B Mittelpunkte der Kreisbögen k_1 und k_2.

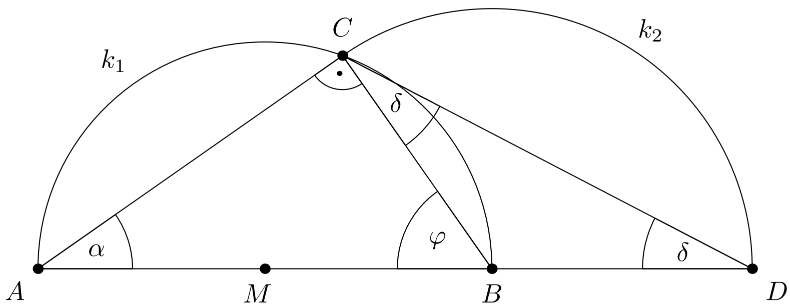
(a) • Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\alpha = 35°$.
  • Wie groß ist δ?

(b) Wie groß ist α für $\delta = 40°$?

(c) Begründe: Für $\delta = 59°$ gäbe es das Dreieck ABC nicht.

(d) Für welche Werte von δ gäbe es überhaupt noch das Dreieck ABC? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) • Zeichne den Halbkreis k_1 über der Strecke $[AB]$, die 6 cm lang ist.
Trage im Punkt A den Winkel $\alpha = 35°$ an.
Der freie Schenkel von α schneidet k_1 im Punkt C.
Der Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ schneidet die Halbgerade $[AB$ im Punkt D. Der Rest ist Formsache.



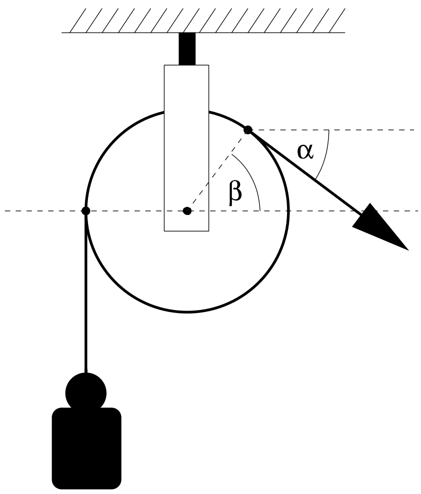
- Der Punkt C liegt auf dem THALES-Kreis über $[AB]$.
  $\Rightarrow \quad \sphericalangle ACB = 90° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 90° - 35° = 55°$.
  Weiter gilt: $\overline{BD} = \overline{BC} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle BCD = \delta$
  φ ist Außenwinkel am Dreieck $BDC \quad \Rightarrow \quad 55° = 2 \cdot \delta \quad \Rightarrow \quad \delta = 27,5°$

(b) Nun kannst du rückwärts schließen:
Wenn $\delta = 40°$ ist, dann muss $\varphi = 2 \cdot 40° = 80°$ sein.
$\Rightarrow \quad \alpha = 90° - 80° = 10°$

(c) Wäre $\delta = 59°$, dann wäre nach dem Satz vom Außenwinkel $\varphi = 59° + 59° = 118°$. Weil das Dreieck ABC aber rechtwinklig ist, wäre in ihm die Innenwinkelsumme von 180° überschritten.

(d) Der Winkel mit dem Maß φ muss stets ein spitzer Winkel bleiben, denn sonst bliebe das Dreieck ABC nicht rechtwinklig.
Also: $\varphi = 2 \cdot \delta < 90° \quad \Rightarrow \quad \delta < 45°$
Wenn $\delta = 0°$ wäre, dann würde $\varphi = 0°$ folgen. Dann läge der Punkt C auf dem Punkt A, und das Dreieck ABC wäre zusammen mit der ganzen Figur zur Strecke entartet.
Also gibt es das Dreieck ABC nur für $0° < \delta < 45°$.
Anmerkung: Es gibt dazu eine mit GEONExT erstellte dynamische Konstruktion: 08eh100.gxt

9.



Ein Seil, das am linken Ende mit einem Gewicht belastet ist, wird über eine feste Rolle geführt. Am rechten Seilstück, das mit der Waagrechten den Winkel α einschließt, wird das Gleichgewicht gehalten.

(a) Begründe: $\beta = 90° - \alpha$.

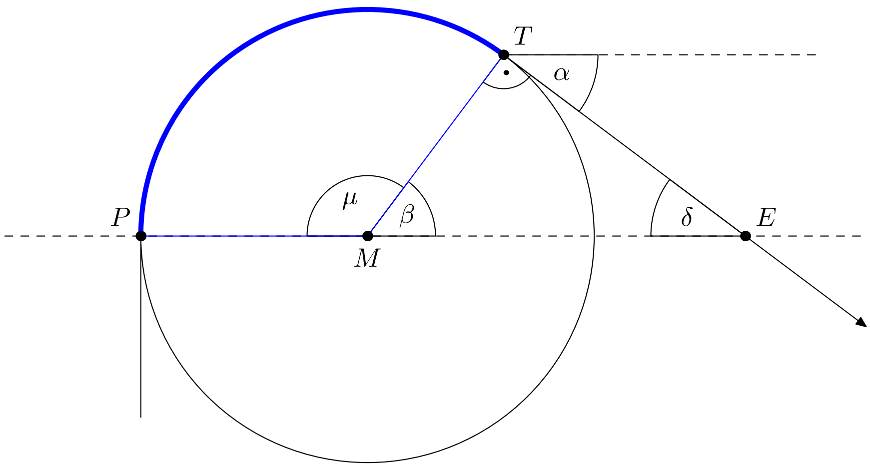
(b) Zeichne die Rolle mit dem Seil für den Radius $r = 3\,\text{cm}$ und $\alpha = 37°$.

(c) Berechne den Bruchteil des Umfangs der festen Rolle, der für $\alpha = 30°$ vom Seil berührt wird.

(d) Wie groß müsste man den Winkel α wählen, damit die Länge des Seilstückes, das die Rolle berührt, 40% des Rollenumfangs beträgt?

Lösung: (a) Siehe Zeichnung zu (b):
Die Halbgerade $[TE$ liegt auf der Kreistangente mit dem Berührpunkt T. Der Berührradius $[MT]$ steht auf dieser Tangente senkrecht. Weiter gilt: $\delta = \alpha$ (Z-Winkel).
$\Rightarrow \quad \beta = 90° - \delta = 90° - \alpha$.

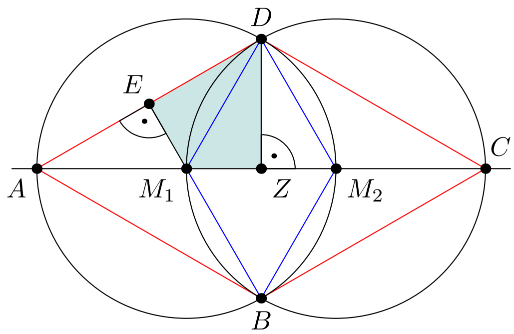
(b) Wenn also $\alpha = 37°$ ist, dann folgt $\beta = 90° - 37° = 53°$.
Damit kannst du den Berührradius mit dem Punkt T und seine Kreistangente konstruieren. Das linke Seilende führt senrecht nach unten.



(c) Aus $\alpha = 30°$ folgt $\beta = 60° \quad \Rightarrow \quad \mu = 180° - 60° = 120°$.
Der Mittelpunktswinkel μ nimmt also ein Drittel des Vollwinkels (360°) ein. Damit bedeckt das Seil ein Drittel des Rollenumfangs.

(d) Berechne α aus dem Mittelpunktswinkel μ:
$\mu = 40\%$ von $360° = 0,4 \cdot 360° = 144°$.
$\beta = 180° - 144° = 36° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° - 36° = 54°$.

10.



Die Punkte M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der beiden Kreise.

(a) Zeichne die Figur mit dem Kreisradius 3 cm.

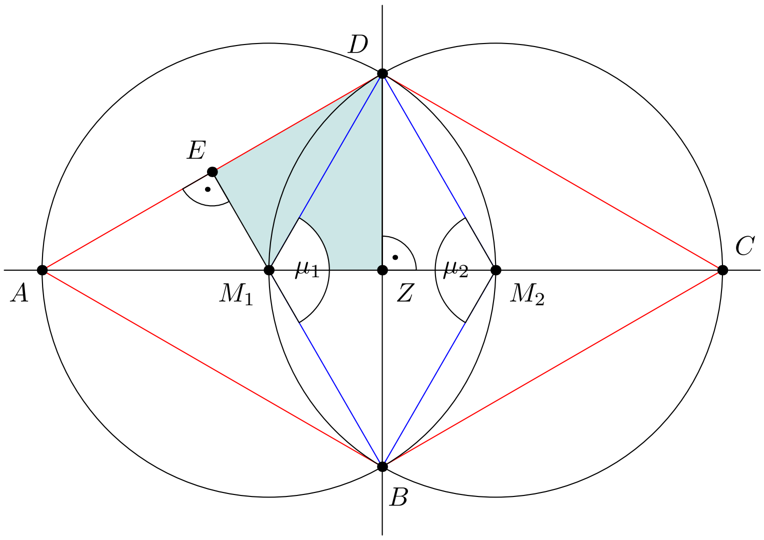
(b) Begründe: Im Viereck BM_2DM_1 gibt es zwei Innenwinkel mit dem Maß 120°.

(c) Wie groß ist der Umfang des Vierecks BM_2DM_1? Um welches besondere Viereck handelt es sich also?

(d) Begründe: Die beiden Dreiecke M_1ZD und EM_1D sind kongruent.

(e) Vergleiche den Flächeninhalt des Vierecks BM_2DM_1 mit dem des Vierecks $ABCD$.

Lösung: (a)

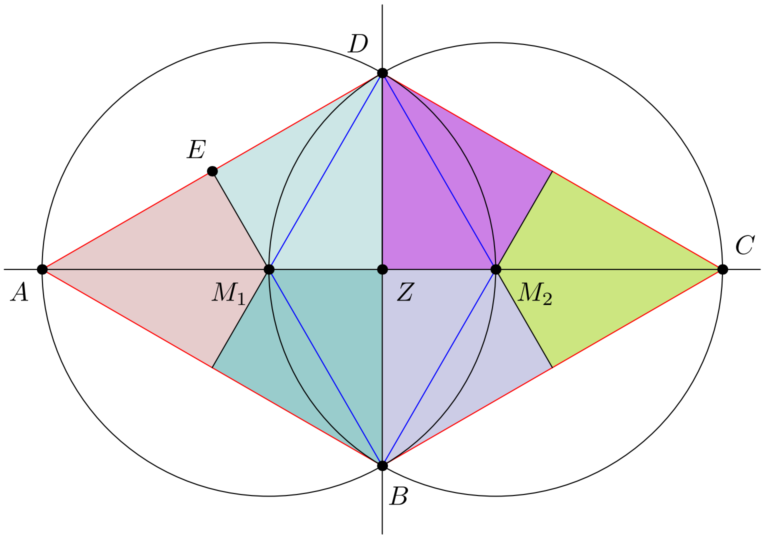


(b) Die Dreiecke M_1M_2D und M_1BM_2 sind gleichseitig; ihre Seitenlänge beträgt jeweils 3 cm (Kreisradius).
$\Rightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 = 60° + 60° = 120°$.

(c) Der Umfang des Vierecks BM_2DM_1 ist $4 \cdot 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$ lang. Es handelt sich um ein gleichseitiges Viereck, also um eine Raute.

(d) Das Dreieck AM_1D ist gleichschenklig: $\overline{M_1A} = \overline{M_1D} = 3\,\text{cm}$.
$\sphericalangle DM_1A = 180° - 60° = 120° \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle M_1AD = \sphericalangle ADM_1 = 30°$
$\sphericalangle EDM_1 = \sphericalangle M_1DZ = 30°$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle M_1ED = \sphericalangle DZM_1 = 90° \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle DM_1E = \sphericalangle ZM_1D = 60°$
Die beiden Dreiecke M_1ZD und EM_1D stimmen damit in allen drei Innenwinkelmaßen überein und sie haben die Seite $[M_1D]$ gemeinsam. Also sind diese beiden Dreiecke kongruent.

(e)

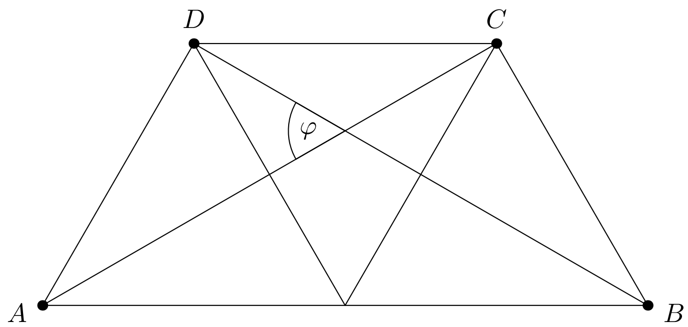


Die Raute $ABCD$ lässt sich mit sechs kongruenten Drachenvierecken parkettieren. Die Raute BM_2DM_1 ist nach (d) so groß wie zwei dieser Drachenvierecke.
Also ist die Raute $ABCD$ dreimal so groß wie die Raute BM_2DM_1.

Anregung: Setze diese Parkettierung auf deinem Zeichenblatt fort. Du kannst dabei viele andere Flächen und deren Zusammenhänge entdecken.

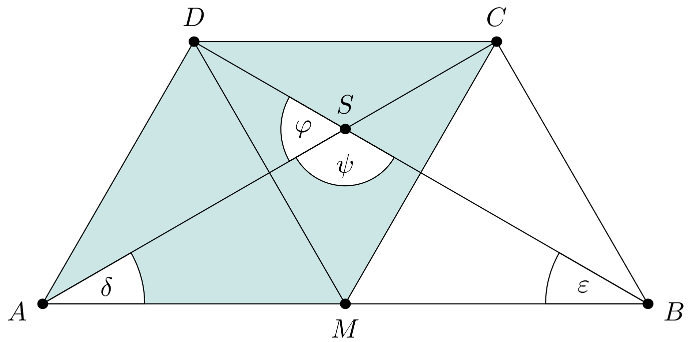
Anmerkung: Viele (z.T. weltberühmte) Werke des holländischen Graphikers **M.C. Escher** (1898 - 1972) sind Parkettierungen von ebenen Flächen oder Flächen im Raum. Literaturhinweis: „*Die Welten des M.C. Escher*“, Manfred Pawlak Verlagsgesellschaft MbH, Herrsching

11.



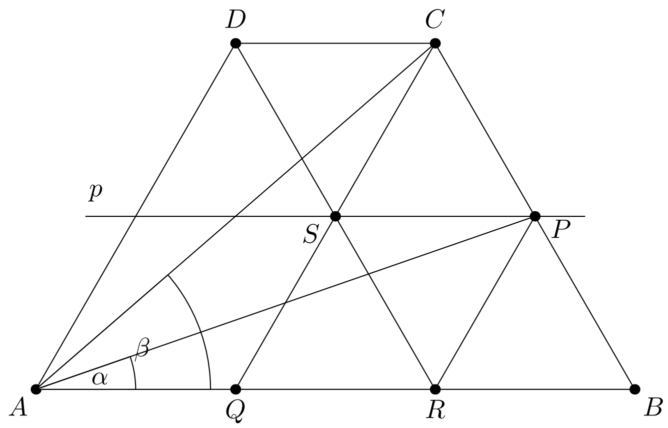
Das Trapez $ABCD$ ist aus drei kongruenten gleichseitigen Dreiecken zusammengefügt.
Berechne das Maß φ des Schnittwinkels der beiden Diagonalen.

Lösung:



Das Viereck $AMCD$ ist eine Raute, deren Diagonalen die Innenwinkel halbieren.
Z.B.: Das Dreieck ABS ist gleichschenklig. $\Rightarrow$ $\delta = \varepsilon = 30°$
$\Rightarrow$ $\psi = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$ $\Rightarrow$ $\varphi = 180° - 120° = 60°$.

12.



Im Trapez $ABCD$ liegen die beiden gleichseitigen Dreiecke ARD und QBC, wobei $\overline{AQ} = \overline{QR} = \overline{RB}$ gilt. Weiter gilt: $\sphericalangle BAP = \alpha$ und $\sphericalangle BAC = \beta$. Die Gerade p verläuft parallel zur Strecke $[AB]$ durch den Punkt S.

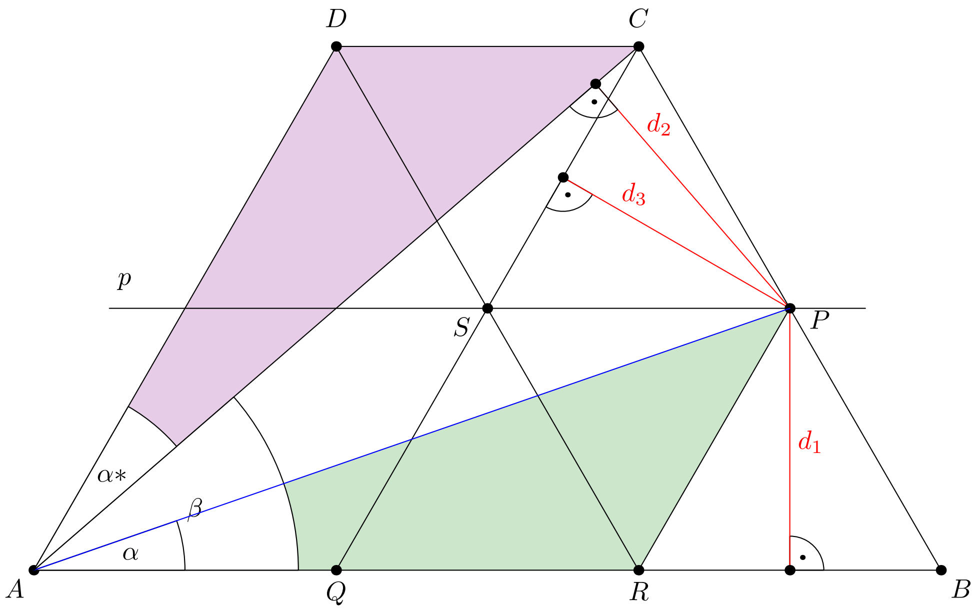
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AQ} = 4\,\text{cm}$.

(b) Zeige: Die Strecke $[AP]$ halbiert den Winkel BAC nicht.

(c) Zeige: Die Dreiecke ARP und ACD sind kongruent.

(d) Begründe: $\alpha + \beta = 60°$.

Lösung: (a)

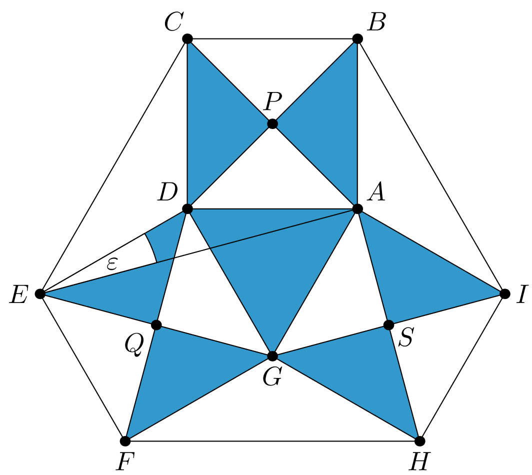


(b) Wenn der Punkt P auf der Winkelhalbierenden läge, dann müssten die Abstände d_1 und d_2 zu den Schenkeln $[AB]$ bzw. $[AC]$ gleich lang sein.
Nun sind aber die Höhen d_1 und d_3 in den gleichseitigen Dreiecken RBP und SPC gleich lang, weil diese Dreiecke kongruent sind. Offensichtlich gilt nun: $d_2 > d_3 = d_1$.
Also liegt der Punkt P nicht auf der Halbierenden des Winkels BAC.

(c) Es gilt:
$\overline{AR} = \overline{AD} \quad \wedge \quad \overline{RP} = \overline{DC} \quad \wedge \quad \sphericalangle PRA = \sphericalangle ADC = 120°$
$\Rightarrow \quad \Delta ARP \cong \Delta ABP$ (sws)-Kongruenz.

(d) Weil $\Delta ARP \cong \Delta ABP$ gilt, folgt $\alpha = \alpha*$.
$\Rightarrow \quad \beta + \alpha = \beta + \alpha* = 60°$

13.



Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Der Winkel mit dem Maß ε wurde zusätzlich eingezeichnet.

(a) Beschreibe den geometrischen Aufbau des Logos. Verwende die Buchstaben dazu.

(b) In der Figur kannst du achsensymmetrische Drachen und Trapeze entdecken. Zähle sie jeweils mit Hilfe ihrer Eckpunkte auf.

(c) Berechne die Maße sämtlicher Innenwinkel des Sechsecks $BCEFHI$.

(d) Berechne das Winkelmaß ε.

(e) In der Figur ist ein gleichseitiges Dreieck mit dem Eckpunkt S verborgen. Zeichne es farbig ein.

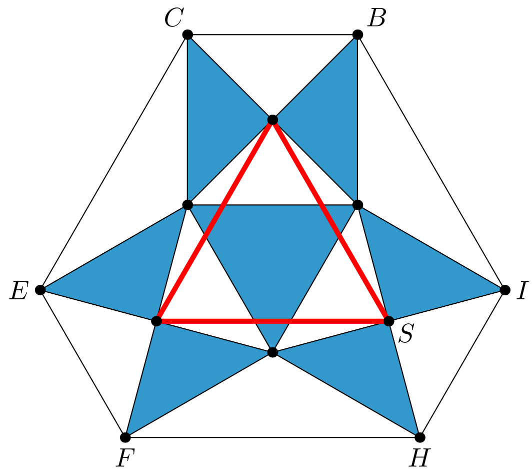
Lösung: (a)
- Die Figur stellt ein Sechseck dar, das zwar achsensymmetrisch, aber nicht regelmäßig ist.
- Im Zentrum der Figur steht das gleichseitige Dreieck ADG.
- Über den Seiten dieses Dreiecks sind die drei kongruenten Quadrate $ABCD$, $DEFG$ und $GHIA$ errichtet.
- Jedes Quadrat wird durch die beiden Diagonalen in vier kongruente gleichschenkligrechtwinklige Dreiecke zerlegt, wobei jeweils zwei gegenüber liegende eingefärbt sind.
- Die beiden benachbarten äußeren Eckpunkte von je zwei Quadraten sind durch Strecken miteinander verbunden.

(b) Es gibt **drei** solche Trapeze: $FHAD$, $IBDG$ und $CEGA$.
Es gibt **drei** solche Drachenvierecke: $GAPD$, $ADQG$ und $DGSA$.

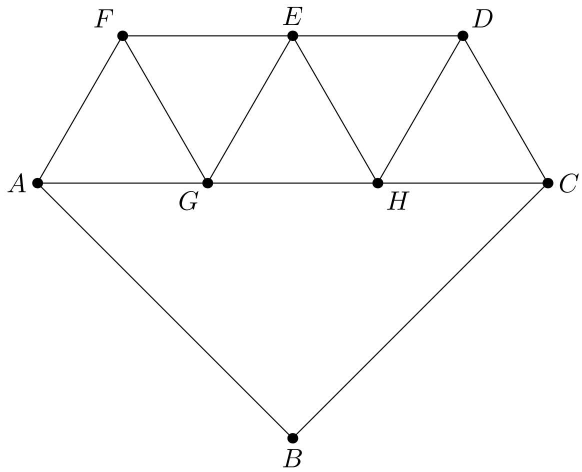
(c) Das Dreieck DCE ist gleichschenklig, denn die beiden Quadratseiten $\overline{DC}$ und $\overline{DE}$ sind gleich lang.
$\sphericalangle EDC = \sphericalangle EDG + \sphericalangle GDA + \sphericalangle ADC = 90° + 60° + 90° = 240°$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle CDE = 360° - 240° = 120°$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle ECD = (180° - 120°) : 2 = 30° \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle ECB = 30° + 90° = 120°$
Die Figur ist achsen- und drehsymmetrisch mit den Drehwinkeln 120° und 240°. Also haben alle Innenwinkel dieses Logos das Maß 120°.

(d) Wie in der Lösung (c) schon gezeigt, gilt: $\sphericalangle EDA = 90° + 60° = 150°$ und $\overline{ED} = \overline{DA} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = (180° - 150°) : 2 = 15°$.

(e)



14.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Viereck $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

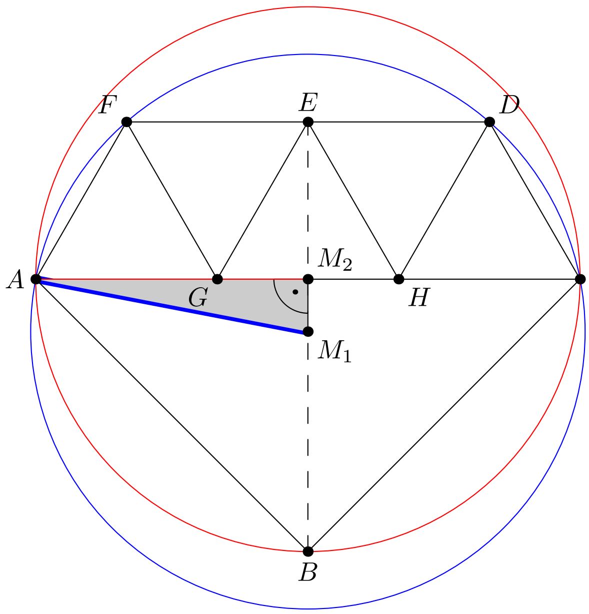
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 9\,\text{cm}$.

(b)
- Begründe: Das Viereck $ACDF$ besitzt einen Umkreis.
- Zeichne den Umkreis k_1 des Vierecks $ACDF$ mit seinem Mittelpunkt M_1 ein.

(c) Zeichne den Umkreis k_2 des Dreiecks ABC mit seinem Mittelpunkt M_2 ein.

(d) Untersuche anhand des Dreiecks AM_1M_2, welcher der beiden Kreise den größeren Durchmesser besitzt.

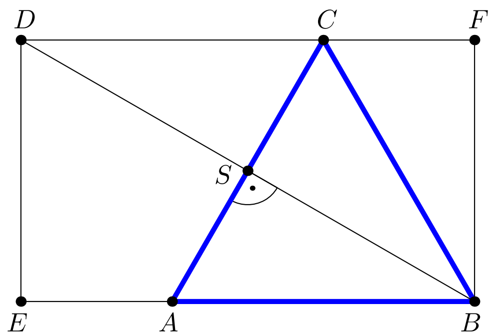
Lösung: (a) Die Figur ist etwas verkleinert gezeichnet.



(b)
- Bei dem Viereck $ACDF$ handelt es sich um ein achsensymmetrisches Trapez mit der Symmetrieachse BE. Alle achsensymmetrischen Trapeze besitzen einen Umkreis.
- Siehe Zeichnung.

(c) Der Umkreis des Dreiecks ABC hat den Radius $\overline{M_2A}$. Das ist eine Kathete im rechtwinkligen Dreieck AM_1M_2.
Der Umkreis des achsensymmetrischen Trapezes hat den Radius $\overline{M_1A}$. Das ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck AM_1M_2.
Weil die Hypotenuse in **jedem** rechtwinkligen Dreieck die längste Seite darstellt, ist der Radius und damit auch der Durchmesser des Kreises k_1 länger als der des Kreises k_2.

15.



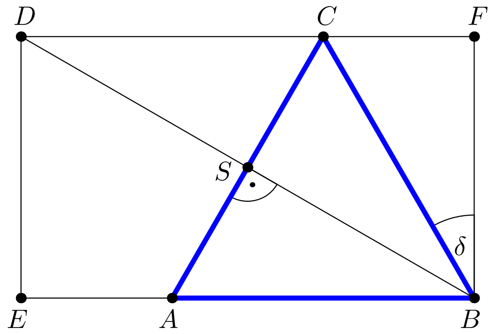
Das gleichseitige Dreieck ABC liegt im Rechteck $EBFD$.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke ABS, SBC und BFC sind kongruent.

(c) Welchen Anteil der Fläche des Rechtecks $EBFD$ nimmt das Dreieck ABC ein? Begründe.

Lösung: (a)



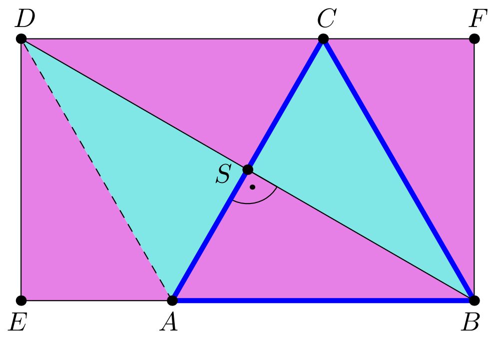
- Beginne mit dem Dreieck ABC und dem Mittelpunkt S der Seite $[AC]$.
- Zeichne die Halbgerade $[BS$ ein.
- Die Parallele zu $[AB]$ durch den Punkt C schneidet diese Parallele im Punkt D. Der Rest ist klar.

(b) $\Delta ABS \cong \Delta SBC$, weil BS eine Symmetrieachse ist.
Die beiden rechtwinkligen Dreicke SBC und BFC besitzen die Seite $[BS]$ als gemeinsame Hypotenuse. Außerdem gilt $\delta = 90° - 60° = 30° = \sphericalangle CBS$.
Also sind alle drei fraglichen Dreiecke kongruent.

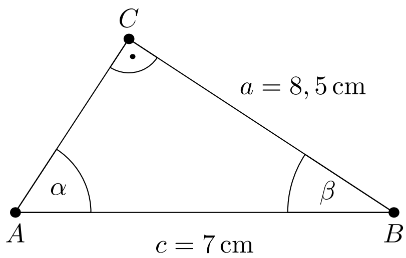
(c) Es gilt: $\Delta DSC \cong \Delta ABS$.
Begründung: Die beiden rechtwinkligen Dreiecke besitzen je einen 30°- und einen 60°-Winkel (Z-Winkel). Neben den drei Innenwinkeln stimmen diese beiden Dreiecke noch in den Kathetenlängen $\overline{AS}$ und $\overline{SC}$ überein.
Also: $\Delta DSC \cong \Delta ABS$.
Das Dreieck ABC ist in zwei kongruente Teildreiecke zerlegt.
Das rechtwinklige Dreieck DBF besteht aus drei kongruenten Teildreiecken. Alle fünf Teildreiecke sind kongruent.
Weil $\Delta DBF \cong \Delta EBD$ gilt, ist das Rechteck $EBFD$ ist damit in sechs dieser kongruenten Teildreieck zerlegbar.

Damit gilt: $\dfrac{A_{\Delta ABC}}{A_{EBFD}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Oder:
Die Hilfsline $[DA]$ veranschaulicht diesen Sachverhalt ohne weiteres:



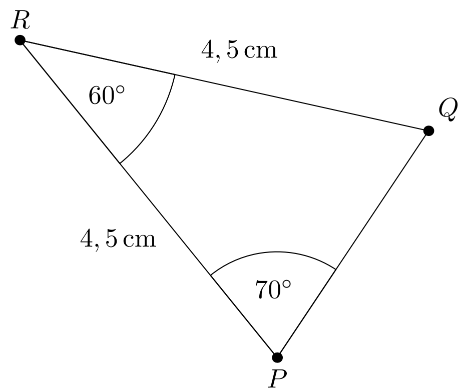
16.



Die Figur ist nicht maßstabgerecht.
Untersuche, ob es ein Dreieck mit den oben angegebenen Bestimmungsstücken gibt.

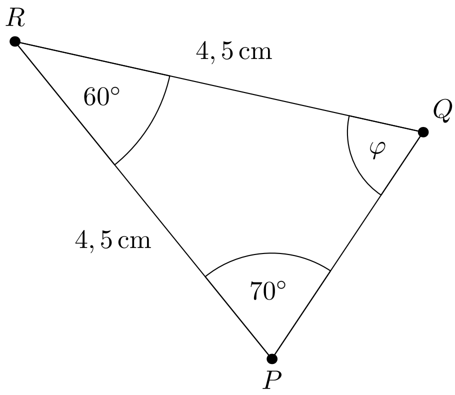
Lösung: Das Dreieck ist rechtwinklig, denn es gilt $\gamma = 90°$.
Wegen $a > c$ folgt dann $\alpha > \gamma = 90°$. Also folgt $\alpha > 90°$.
Damit würde $\alpha + \gamma > 180°$ werden, was in Dreiecken nicht geht.
Das Dreieck gibt es also nicht.

17.



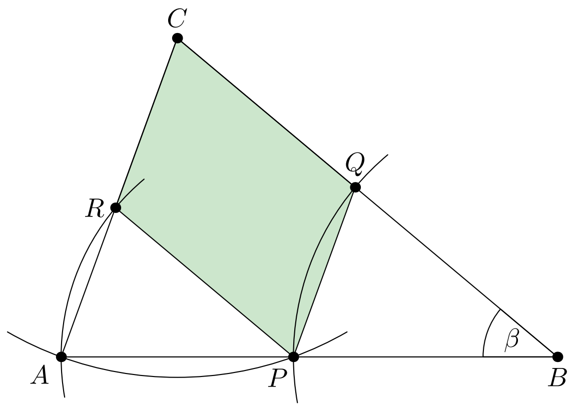
Die Figur ist nicht maßstabgerecht.
Untersuche, ob es ein Dreieck mit den oben angegebenen Bestimmungsstücken gibt.

Lösung:



Das Dreieck ist gleichschenklig mit der Basis $[PQ]$, denn es gilt $\overline{PR} = \overline{QR} = 4,5\,\text{cm}$. Dann folgt $\varphi = 70°$. Wegen $70° + 70° + 60° = 200°$ wäre die Innenwinkelsumme von 180° überschritten. Das Dreieck existiert nicht.

18.

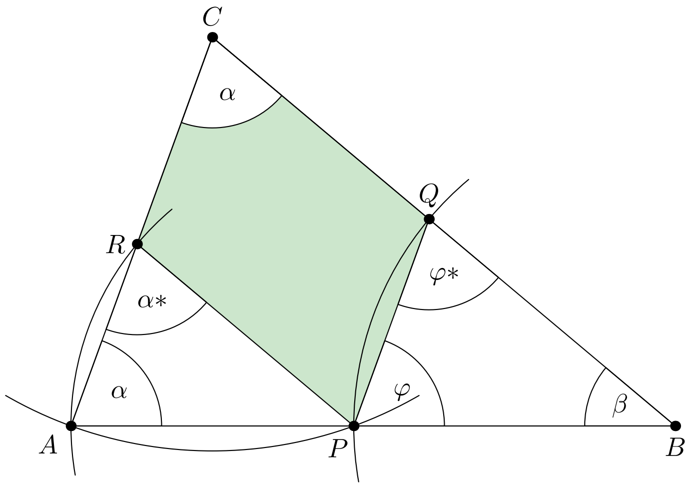


In der obigen Figur gilt: $\overline{AB} = \overline{BC}$. Die Punkte C, P und B sind jeweils die Mittelpunkte der betreffenden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 40°$.

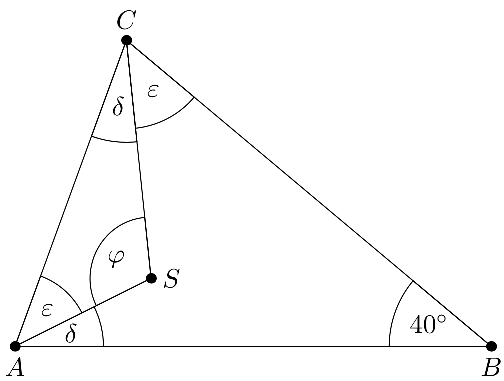
(b) Begründe: das Viereck $PCQR$ ist ein Parallelogramm.

Lösung: (a)



(b) Wegen $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt $\sphericalangle ACB = \alpha$.
Das Dreieck APR ist gleichschenklig mit der Basis $[AR]$
$\Rightarrow \quad \alpha = \alpha*$ und damit auch $\alpha* = \sphericalangle ACB$.
Damit sind α und $\sphericalangle ACB$ F-Winkel. $\Rightarrow \quad [PR] \parallel [CQ] \quad (1)$.
Im gleichschenkligen Dreieck ABC glt: $\alpha = (180° - \beta) : 2$.
Im gleichschenkligen Dreieck PBQ glt: $\varphi = (180° - \beta) : 2 = \alpha$.
Damit sind α und $\sphericalangle BPQ$ F-Winkel. $\Rightarrow \quad [PQ] \parallel [RC] \quad (2)$.
Also sind im Viereck $PQCR$ wegen (1) und (2) jeweils die beiden gegenüber liegenden Seiten parallel. Also handelt es sich um ein Parallelogramm.

19.



(a) Begründe: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

(b) Zeichne das Dreieck ABC für $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$.

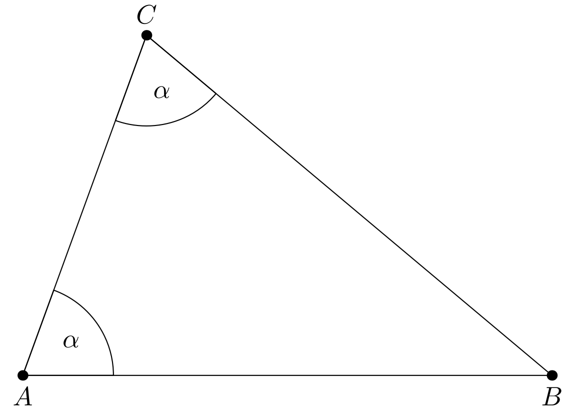
(c) Berechne das Maß φ des Winkels CSA im Dreieck ABC.

Lösung: (a) Im Dreieck ABC gilt: $\alpha = \sphericalangle BAC = \delta + \varepsilon = \sphericalangle ACB = \gamma$.
Also haben zwei Innenwinkel des Dreiecks ABC gleiches Maß; damit ist das Dreieck ABC gleichschenklig. Es besitzt die Basis $[AC]$.

(b) Um das Dreieck zeichnen zu können, brauchst du neben der Streckenlänge $\overline{AB}$ und dem 40°-Winkel noch ein weiteres Bestimmungsstück:
Du kannst entweder $\overline{BC} = 7\,\text{cm}$ verwenden oder das Winkelmaß

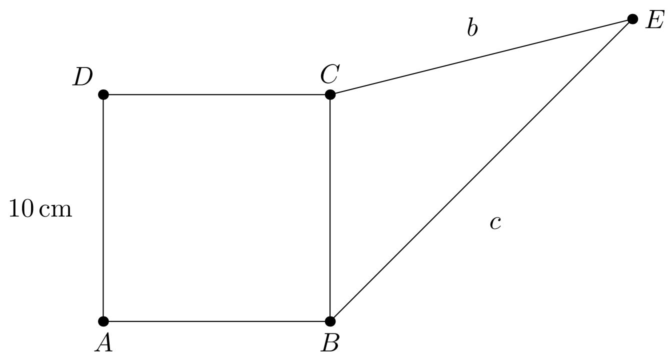
$$\alpha = (180° - 40°) : 2 = 70°$$

berechnen.



(c) Es gilt $\alpha = \delta + \varepsilon = 70°$.
Dann folgt im Dreieck ASC: $\underbrace{\delta + \varepsilon}_{=70°} + \varphi = 180° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 110°$.

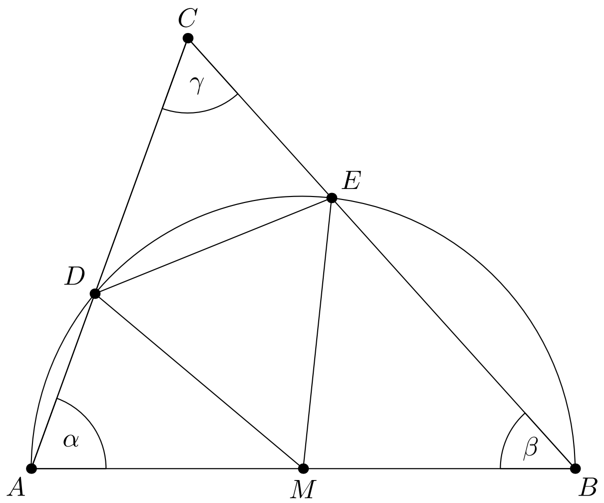
20.



Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Der Umfang des Dreiecks BEC ist doppelt so groß wie der Umfang des Quadrates $ABCD$.
Berechne den Umfang der Gesamtfigur.

Lösung: $u_{\Delta BEC} = 10\,\text{cm} + b + c \quad u_{ABCD} = 4 \cdot 10\,\text{cm} = 40\,\text{cm}$
$u_{\Delta BEC} = 2 \cdot u_{ABCD}$. Also: $10\,\text{cm} + b + c = 2 \cdot 40\,\text{cm} = 80\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad b + c = 70\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad u_{ABECD} = 3 \cdot 10\,\text{cm} + 70\,\text{cm} = 100\,\text{cm}$.

21.

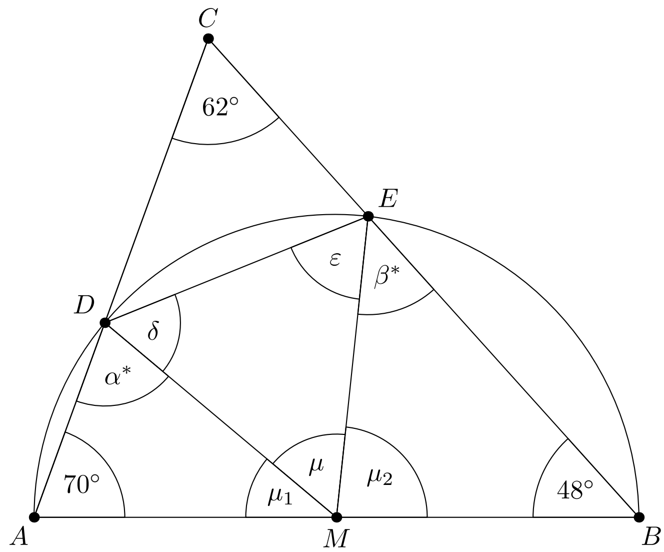


Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 70°$ und $\gamma = 62°$.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks MED.

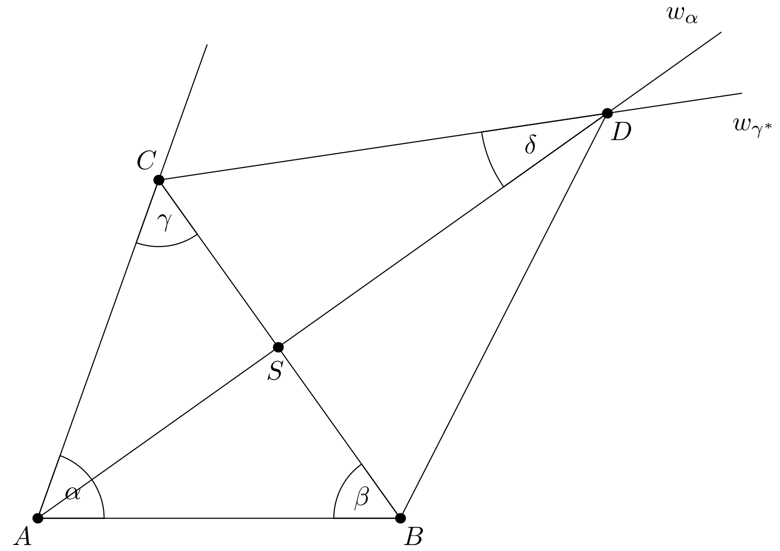
Lösung: (a)



Berechne zunächst das Winkelmaß $\beta = 180° - 70° - 62° = 48°$ und zeichne dann das Dreieck ABC (w,s,w), dann den Halbkreis . . . .

(b) Für den Kreiradius r gilt: $r = \overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MD} = \overline{ME}$.
Das Dreieck AMD ist daher gleichschenklig.
Also gilt: $\alpha^* = \alpha$ und damit $\mu_1 = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$.
Das Dreieck MBE ist ebenfalls gleichschenklig.
Also gilt: $\beta^* = \beta$ und damit $\mu_2 = 180° - 2 \cdot 48° = 84°$.
$\Rightarrow \quad \mu = 180° - 40° - 84° = 56°$.
Auch das Dreieck MED ist gleichschenklig.
Also gilt: $\delta = \varepsilon = (180° - 56°) : 2 = 62°$.

22.



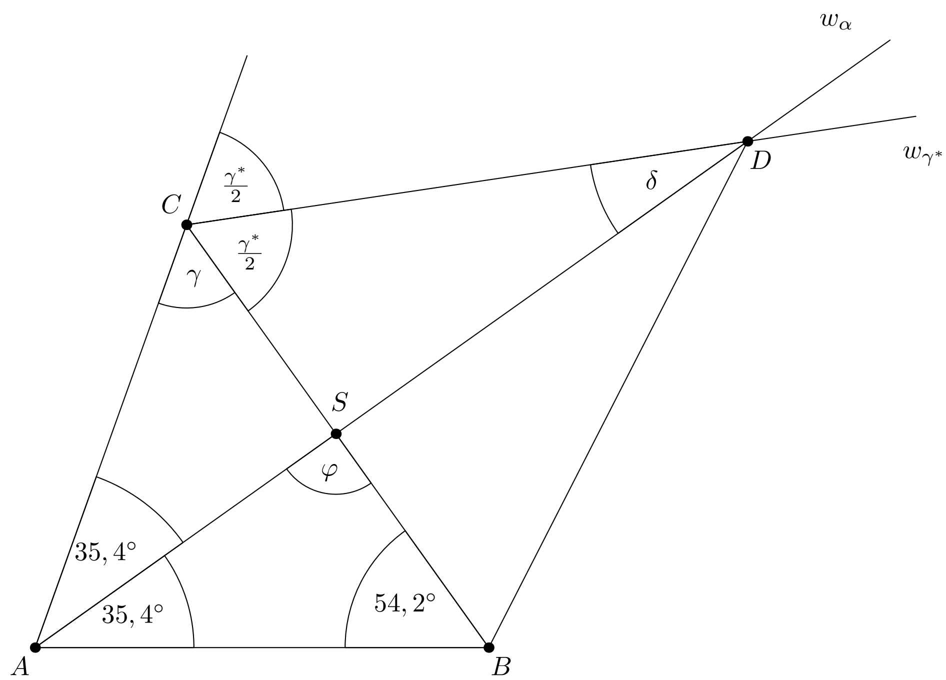
Die Halbgerade w_α halbiert den Winkel α und die Halbgerade w_{γ^*} halbiert den Nebenwinkel von γ .

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 70,8^\circ$ und $\beta = 54,2^\circ$.

(b) Berechne das Winkelmaß δ .

(c) Untersuche, ob es sich bei dem Viereck $ABDC$ um ein achsensymmetrisches Drachenviereck handelt.

Lösung: (a)



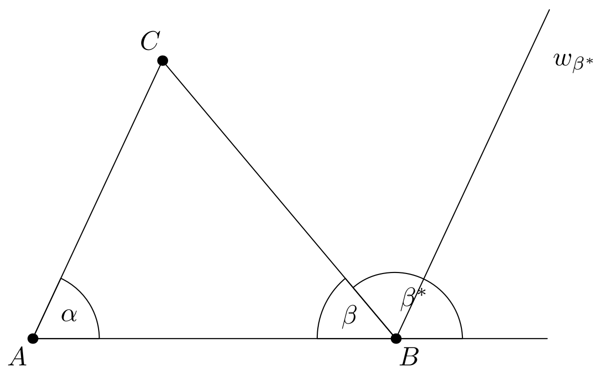
(b) Es gilt: $\gamma = 180° - 70,8° - 54,2° = 55°$.

$$\Rightarrow \quad \gamma^* = 180° - 55° = 125° \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma^*}{2} = 62,5° .$$

Im Dreieck ADC gilt dann $\delta = 180° - 35,4° - 55° - 62,5° = 27,2°$.

(c) In jedem (achsensymmetrischen) Drachenviereck müssen die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck ABS gilt: $\varphi = 180° - 35,4° - 54,2° = 90,4° \neq 90°$.
Das Viereck $ABDC$ ist also kein (achsensymmetrisches) Drachenviereck.

23.

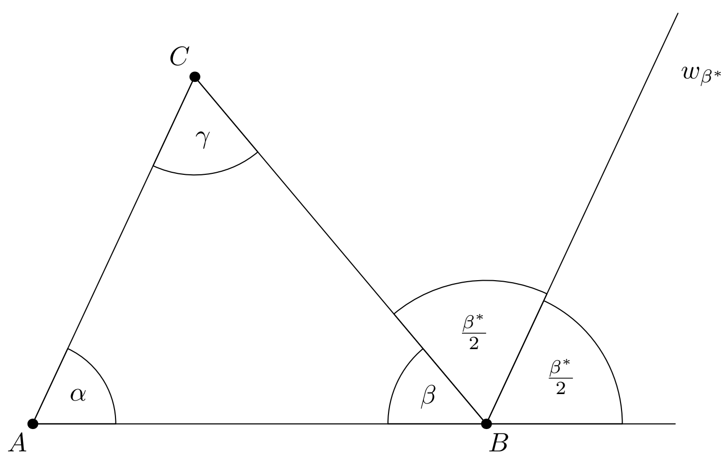


In der Figur halbiert die Halbgerade w_{β^*} den Außenwinkel von β . Gleichzeitig gilt: $w_{\beta^*} \parallel [AC]$.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\beta = 50°$.

(b) Begründe: Das Dreieck ABC muss gleichschenklig sein.

Lösung: (a)

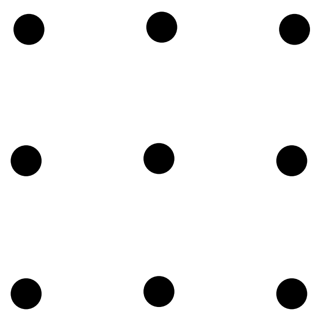


(b) In der Figur gilt: $\gamma = \dfrac{\beta^*}{2}$ (Z-Winkel).

Ebenso gilt: $\alpha = \dfrac{\beta^*}{2}$ (F-Winkel).

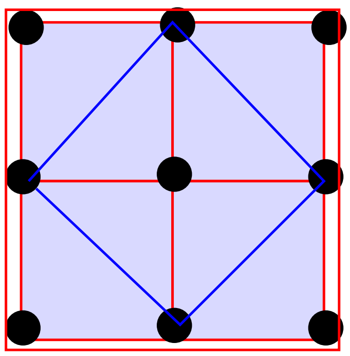
$\Rightarrow \quad \alpha = \gamma$; also ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

24. Idee: Toni Chehlarova



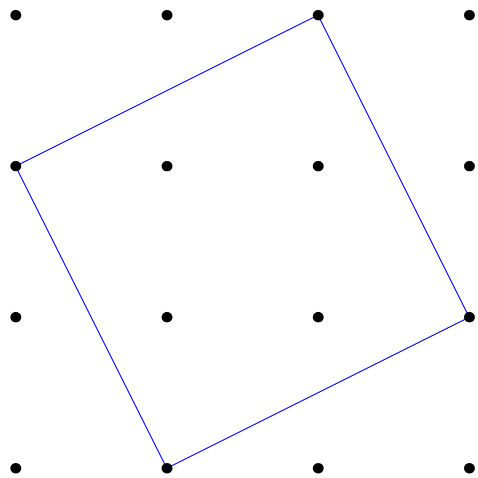
Die Schüler/-innen sollen möglichst viele Quadrate finden, deren Eckpunkte auf den schwarzen Punkten liegen.
Martha meint: „In dieser Figur sehe ich sofort vier Quadrate.“ Sie zeichnet diese ein.
Edwin meint: „In dieser Figur entdecke ich sogar fünf Quadrate.“ Er zeichnet das fünfte hinzu.
Claudia meint: „Ich habe sogar noch ein Quadrat mehr entdeckt als Edwin.“
Was meinst du? Zeichne und begründe.

Lösung:



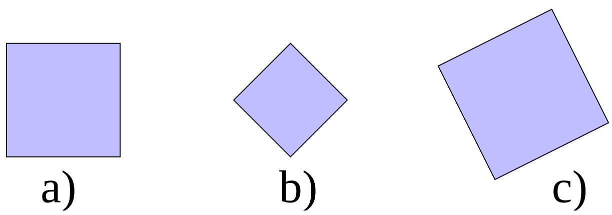
Martha hat die vier gleich großen Quadrate im Inneren (blau) entdeckt.
Edwin könnte das große Quadrat außen herum gesehen haben.
Claudia hat genauer hingeschaut und zeichnet das blaue Quadrat noch ein.

25. Idee: Toni Chehlarova



In das Punktraster ist ein Quadrat eingezeichnet worden.
Finde möglichst viele weitere Quadrate, deren Eckpunkte auf den schwarzen Punkten liegen.

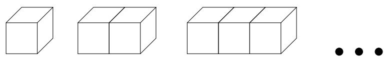
Lösung:



Die obiger Figur zeigt die verschiedenen (nicht maßstabsgerecht gezeichneten) Quadrattypen a), b) und c), die du im Punkteraster entdecken kannst.
Vom Typ a) gibt es zunächst 9 kleine Quadrate.
Hinzu kommen noch 4 Quadrate, deren Seite doppelt so lang ist wie die von einem kleinen Quadrat.
Dazu kommt noch 1 Quadrat, dessen Seite dreimal so lang ist wie die von einem kleinen Quadrat.
Vom Typ b) gibt es 4 Quadrate.
Vom Typ c) tauchen nur 2 verschiedene Quadrate auf (eines davon ist eingezeichnet).
Insgesamt enthält die Figur also maximal 20 Quadrate.

5. Raumgeometrie

1.



Gleiche Würfel werden immer wieder zu neuen Quadern auf die oben dargestellte Weise aneinander gefügt. Die Kantenlänge eines Würfels soll x cm betragen.

(a) Zeige: Für die Oberfläche O_3 des Quaders, der so aus drei Würfeln zusammengefügt ist, gilt $O_3(x) = 14x^2\,\text{cm}^2$.

(b) Zeige: Für die Oberfläche O_4 eines aus vier Würfeln zusammengesetzten Quaders gilt $O_4(x) = 18x^2\,\text{cm}^2$.

(c) Die Oberfläche O_4 eines aus vier Würfeln zusammengesetzten Quaders soll $21,78\,\text{dm}^2$ betragen. Berechne x.

(d) Beschreibe, wie du O_{100} in Abhängigkeit von x berechnest. Gib dein Ergebnis in möglichst einfacher Form an.

(e) Aus wie vielen Würfeln mit der Kantenlänge x cm setzt sich ein Quader mit der Oberfläche $78x^2\,\text{cm}^2$ zusammen?

(f) Untersuche, ob man mit solchen Würfeln auf dieses Weise einen Quader mit einer Oberfläche von $10x^2\,\text{dm}^2$ zusammenbauen kann.

Lösung: (a) Die Oberfläche der beiden Endstücke links und rechts beträgt zusammen $2\cdot 5\cdot(x\,\text{cm})^2 = 10x^2\,\text{cm}^2$.
Hinzu kommt ein Mittelstück, das sich aus vier Quadraten zusammensetzt: $4\cdot(x\,\text{cm})^2 = 4\,\text{cm}^2$. Also sind es zusammen $14x^2\,\text{cm}^2$.

(b) Zu dem vorigen Quader aus drei Würfeln kommt noch ein Mittelstück hinzu:
$O_4 = 14x^2\,\text{cm}^2 + 4x^2\,\text{cm}^2 = 14x^2\,\text{cm}^2$.

(c) $21,78\,\text{dm}^2 = 2178\,\text{cm}^2$
$2178 = 18x^2 \;|: 18 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 121 \quad \Leftrightarrow \quad x = 11$
Die Kantenlänge eines Würfels beträgt also 11 cm.

(d) Die Reihe aus 100 Würfeln besteht aus zwei Endstücken und 98 Mittelstücken.
Die Oberfläche eines Endstückes beträgt $5\cdot x^2\,\text{cm}^2$, die eines Mittelstückes beträgt $4\cdot x^2\,\text{cm}^2$. Also folgt: $O_{100} = 2\cdot 5\cdot x^2\,\text{cm}^2 + 98\cdot 4\cdot x^2\,\text{cm}^2 = 402x^2\,\text{cm}^2$.

(e) Subtrahiere zunächst die beiden Endstücke zu je $5\cdot x^2\,\text{cm}^2$:
$78x^2\,\text{cm}^2 - 10\cdot x^2\,\text{cm}^2 = 68x^2\,\text{cm}^2$
Auf jedes Mittelstück entfallen $4\cdot x^2\,\text{cm}^2$.
$68x^2\,\text{cm}^2 : 4\cdot x^2\,\text{cm}^2 = 17$ Mittelstücke. Also besteht der Quader aus 19 Würfeln.

(f) $10x^2\,\text{dm}^2 = 1000x^2\,\text{cm}^2$.
Subtrahiere wieder die beiden Endstücke. Dann bleiben $990x^2\,\text{cm}^2$. Auf jedes Mittelstück entfallen wieder $4 \cdot x^2\,\text{cm}^2$. Weil aber $990x^2\,\text{cm}^2 : 4x^2\,\text{cm}^2$ keine ganze Zahl ergibt, kann es diesen Quader nicht geben.

2. Claudia probiert mit ihrer Freundin Susi eine Zahlenzauberei mit einem Würfel aus: „Würfle einmal und lies die Augenzahl ab, ohne dass ich sie sehen kann. Verdopple diese Augenzahl und addiere fünf. Multipliziere dann diesen Summenwert mit fünf. Merke dir dieses Ergebnis.“ Susi hat gewürfelt und gerechnet.
Claudia gibt die nächste Anweisung: „Würfle verdeckt nochmals. Addiere diese Augenzahl zu deinem vorherigen Ergebnis und addiere noch 10. Multipliziere diesen Summenwert mit 10. Würfle ein drittes Mal und addiere diese Augenzahl zum vorherigen Produktwert.“ Das hat Susi gemacht.
Nun fordert Claudia ihre Freundin auf, von dem Ergebnis noch 350 zu subtrahieren und ihr den Wert der Differenz zu nennen.
Susi: „Ich habe 632 herausbekommen.“ „Dann hast du zunächst die Sechs, dann die Drei und am Ende die Zwei gewürfelt.“, antwortet Claudia. „Stimmt!“, ruft Susi überrascht.

(a) Verfolge Susis Rechnungen in allen Einzelheiten.

(b) Rechne mit Buchstaben nach: Der erste Wurf ergibt die Augenzahl a, der zweite die Zahl b und der dritte c.
Weshalb kann Claudia die Augenzahlen dann korrekt wiedergeben?

(c) Es gibt auch Spielwürfel mit 8 statt mit 6 Seitenflächen. Hätte Claudias Zahlenzauberei auch mit einem solchen Achterwürfel funktioniert? Begründe.

Lösung: (a) Der erste Wurf war eine Sechs: $(6 \cdot 2 + 5) \cdot 5 = 85$.
Der zweite Wurf war eine Drei: $[(85 + 3) + 10] \cdot 10 = 980$.
Der dritte Wurf war eine Zwei: $980 + 2 = 982 \quad 982 - 350 = 632$.
Erster Wurf: 6. Zweiter Wurf: 3. dritter Wurf: 2.

(b) Der erste Wurf war eine a: $(a \cdot 2 + 5) \cdot 5 = 10a + 25$.
Der zweite Wurf war eine b: $[(10a + 25) + b + 10] \cdot 10 = 100a + 10b + 350$.
Der dritte Wurf war eine c: $100a + 10b + 350 + c$.
350 werden dann subtrahiert. Das Ergebnis lautet zum Schluss $100a + 10b + c$. Das ist aber gerade die Zahl abc in der Ziffernschreibweise. Diese gibt die gewürfelten Augenzahlen in der richtigen Reihenfolge wieder.

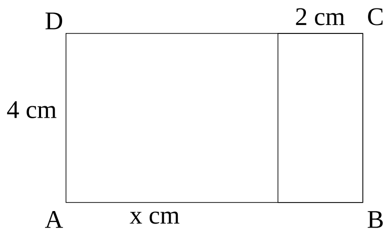
(c) Weil die Augenzahlen auch bei einem Würfel aus acht Seitenflächen Ziffern sind, funktioniert Claudias Zahlenzauberei ebenso in diesem Fall.

Teil II.

Wahlpflichtfächergruppe II/III

6. Terme

1. Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ auf zwei verschiedene Arten mit dem Platzhalter x.



Lösung: Maßzahlen: $A_{ABCD} = 4 \cdot x + 4 \cdot 2 = 4 \cdot (x + 2)$

2. Maria hat Fehler beim Auflösen von Klammern in binomischen Formeln gemacht:
   (a) $(3a + 10b)^2 = 9a^2 - 60ab + 10b^2$
   (b) $(x + 2)(2 - x) = 4 - x^2$
   (c) $(0{,}5x - 6)^2 = 2{,}5x^2 - 3x + 36$

   Streiche mit einem Farbstift (nicht Rot) alle Fehler einzeln an und verbessere Marias Lösungen auf diesem Blatt. (Nicht jede Lösung muss falsch sein.)

Lösung: (a) Es muss $100b^2$ heißen.
(b) richtig
(c) Es muss $0{,}25x^2 - 6x + 36$ heißen.

3. Gib mindestens zwei verschiedene Terme an, für die gilt:
   $x = 1,5$ liefert $T(\max) = -6$

Lösung: $T(x) = -(x - 1,5)^2 - 6$ oder $T(x) = -0,87654321(x - 1,5)^2 - 6$

4. Beweise: Die Zahl $2^{50} - 1$ lässt sich in zwei Faktoren zerlegen.
   Zeige sodann, dass die Zahl $2^{50} - 1$ die Teiler 4051 und 601 besitzt.

Lösung: $2^{50} - 1 = (2^{25} + 1) \cdot (2^{25} - 1) = 33\,554\,433 \cdot 33\,554\,431 = (3 \cdot 11 \cdot 251 \cdot 4051) \cdot (1801 \cdot 601 \cdot 31)$

5. Fritz hat bei den folgenden Termumformungen Fehler gemacht. Berichtige sie farbig (nicht mit roter Farbe):
   (a) $4x - 6y + 1{,}6z = 2 \cdot (x + 3y + 3{,}2z)$
   (b) $x^2 \cdot x^5 + 3 : \frac{1}{2} = 6 + x^{10}$
   (c) $-(3x - 2x^2 + 7a) = -3x - 2x^2 - 7x$

Lösung: (a) $4x - 6y + 1{,}6z = 2 \cdot (2x - 3y + 0{,}8z)$
(b) $x^2 \cdot x^5 + 3 : \frac{1}{2} = 6 + x^7$
(c) $-(3x - 2x^2 + 7a) = -3x + 2x^2 - 7a$

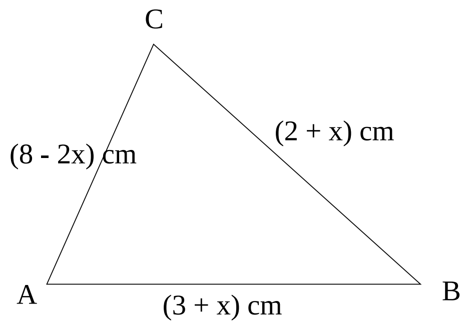
6. (a) Begründe rechnerisch: Der Term

$$T_1(x) = \frac{-12}{x^2 + 1{,}5x - 1}$$

besitzt die Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\,; 0{,}5\}$
   (b) Gib zwei weitere von $T_1(x)$ verschiedene Terme an, welche die gleiche Definitionsmenge wie der Term $T_1(x)$ besitzen.

Lösung: (a) Die Belegungen $x = -2$ und $x = 0{,}5$ sind zwei Nullstellen des Nenners. Mehr Nullstellen gibt es nicht.
(b) Z.B.: $T_2(x) = \frac{1}{(x+2)(x-0{,}5)}$ und $T_3(x) = \frac{1+x^4}{(x+2)(x-0{,}5)\cdot(-387)}$

7. Es gilt $x \in \mathbb{Q}^+$.
   (a) Zeichne das Dreieck ABC für $x = 1$.
   (b) Berechne jeweils den Umfang des Dreiecks ABC für $x \in \{1,5;\ 1,\overline{6};\ 2\frac{1}{8}\}$.
   Was stellst du fest?
   Ist das immer so? Begründe deine Antwort.
   (c) Unter allen möglichen Dreiecken ABC gibt es zwei gleichschenklige. Berechne jeweils alle Seitenlängen.
   (d) Was ergibt sich für $x = 4$? Bestimme alle Belegungen von x, für die es überhaupt solch ein Dreieck ABC gibt.



Lösung:

Wir rechnen nur mit Maßzahlen.

(a) Die Dreiecksseiten sind $3\,\text{cm}, 6\,\text{cm}$ und $4\,\text{cm}$ lang.

(b) Wegen $(8-2x)+(2+x)+(3+x)=13$ ist der Umfang konstant $13\,\text{cm}$ lang.

(c) 1. Fall:
$8-2x=2+x \quad \Leftrightarrow \quad x=3$
$a=5\,\text{cm}$, $b=2\,\text{cm}$ und $c=5\,\text{cm}$
2. Fall:
$8-2x=3+x \quad \Leftrightarrow \quad x=1,\overline{6}\,\text{cm}$
$a=3,\overline{6}\,\text{cm}$; $b=4,\overline{6}\,\text{cm}$ und $c=4,\overline{6}\,\text{cm}$.
3. Fall:
$2+x=3+x$ ist nicht erfüllbar, weil stets $2+x<3+x$ gilt.

(d) Für $x=4$ wird $\overline{AC}=0\,\text{cm}$; d.h. das Dreieck entartet zur Strecke.
Es muss $\overline{AC}>0$ gelten; d.h. es muss $0<x<4$ (*)sein.
Gleichzeitig müssen alle Dreiecksungleichungen erfüllt sein:

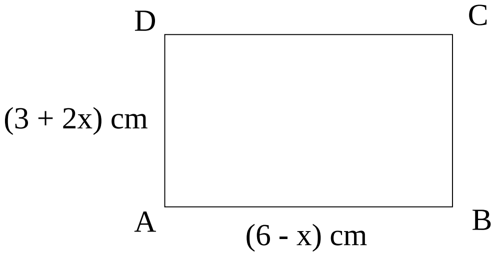
1. Bedingung: $(8-2x)+(3+x)>2+x \quad \Leftrightarrow \quad x<4,5$; ist wegen (*) ohnehin erfüllt.
2. Bedingung: $(8-2x)+(2+x)>3+x \quad \Leftrightarrow \quad x<3,5$ (**)
3. Bedingung: $(2+x)+(3+x)>8-2x \quad \Leftrightarrow \quad x>0,75$
Mit (**) gibt es nur für $0,75<x<3,5$ solche Dreiecke.

8. (a) Berechne den Umfang des Rechtecks $ABCD$ für $x=2{,}5$.

(b) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ für $x=3{,}5$.

(c) Wie ändert sich die Form des Rechtecks, wenn $x \in \mathbb{Q}^+$ immer kleiner wird?

(d) Gib zwei verschiedene Belegungen von x an, so dass es jeweils dafür kein Rechteck gibt. Begründe deine Wahl.



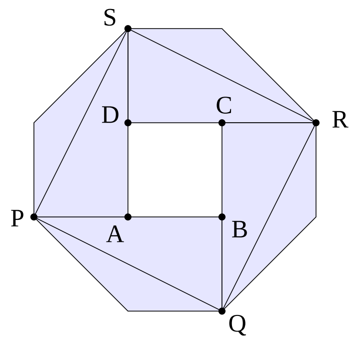
Lösung: (a) $u=23\,\text{cm}$

(b) $A=25\,\text{cm}^2$

(c) Das Rechteck wird breiter und niedriger.

(d) Z.B. $x=6$: Das Rechteck entartet zur Strecke.
Oder $x=7$, dann hätte die Strecke $[AB]$ eine negative Länge.
Hinweis: Manche Schüler/innen sind der Ansicht, dass der Fall $x=1$ eine richtige Antwort sei, denn ein Quadrat ist eben nach ihrer Ansicht kein Rechteck.

9. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das Viereck $PQRS$ wurde zusätzlich eingezeichnet.
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat und es gilt: $\overline{AB}=\overline{CR}=x\,\text{cm}$.



(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A des Achtecks in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A(x) = (7x^2)\,\text{cm}^2$]

(c) Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Achtecks $43,75\,\text{cm}^2$ beträgt.

(d) Das Achteck lässt sich so in ein Quadrat einbeschreiben, dass zwei Quadratseiten parallel zur Strecke $[DC]$ sind.

- Zeichne dieses Quadrat ein.
- Berechne für $x = 3,25$ seinen Umfang.

(e) Welche besonderen Eigenschaften besitzt das Viereck $PQRS$? Begründe deine Ansicht.

Lösung: (a) –

(b) Im Achteck sind sieben Quadrate mit der Seitenlänge x enthalten.
Also gilt: $A(x) = 7 \cdot x^2\,\text{cm}^2$.

(c) $x = 2,5$

(d)
- –
- Die Seitenlänge des umbeschriebenen Quadrates beträgt in diesem Fall $3 \cdot 3,25\,\text{cm}$. Also ist sein Umfang $4 \cdot 3 \cdot 3,25\,\text{cm} = 39\,\text{cm}$ lang.

(e) Es gilt: $\Delta PQB \cong \Delta CQR \cong \Delta SDR \cong \Delta PAS$ (s,w,s). Also ist $PQRS$ eine Raute.
In rechtwinkligen Dreiecken ergeben die beiden spitzen Innenwinkel einen rechten. In jedem Eckpunkt des Quadrates $PQRS$ liegt ein Paar solcher Winkel. Also handelt es sich sogar um ein Quadrat.

10. Fritz Zweistein sagt: Ich habe da was rausgefunden:

$3^2 = 2^2 + 2 + 3$
$4^2 = 3^2 + 3 + 4$
$5^2 = 4^2 + 4 + 5$

(a) Schreibe die nächste Zeile hin.

(b) Schreibe auf, welchen Zusammenhang du entdeckt hast.

(c) Finde einem Term, der für jede Gleichung passt.

Bearbeite die obigen Aufträge auch für folgende Gleichungen:

$3^2 = 2 \cdot 4 + 1$
$4^2 = 3 \cdot 5 + 1$
$5^2 = 4 \cdot 6 + 1$

Lösung: (a) - -

(b) - -

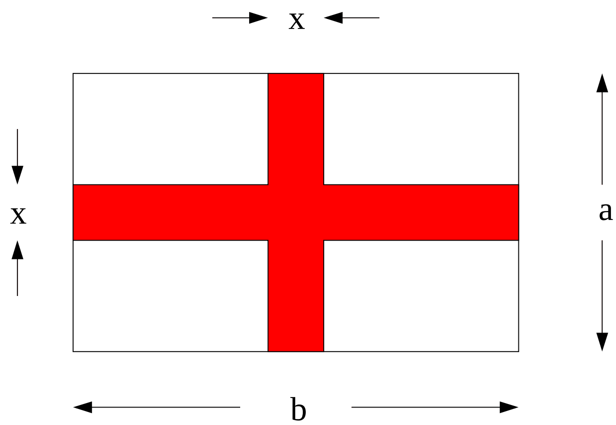
(c) $a^2 = (a-1)^2 + (a-1) + a$

(a) - -

(b) - -

(c) $a^2 = (a-1) \cdot (a+1) + 1$

11. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



(a) Zeichne die Figur für $b = 10\,\text{cm}$, $a = 5\,\text{cm}$ und $x = 1\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A des Kreuzes in der Figur in Abhängigkeit von a, b und x.

(c) Die folgenden Terme sollen den Flächeninhalt des weißen Anteils der Flagge darstellen. Kreuze die Terme an, deren Darstellung korrekt ist:

[ ] $ab - ax - bx + x^2$	[ ] $ab - ax + bx - x^2$
[ ] $4[(0{,}5a - 0{,}5x)(0{,}5b - 0{,}5x)]$	[ ] $\frac{3}{4}ab$
[ ] $(a-x)(b-x)$	[ ] $ab - (ax + bx - x^2)$

(d) Gib für $a = 8\,\text{cm}$ und $b = 12\,\text{cm}$ die Menge aller sinnvollen Belegungen von x an.

Lösung:

(a) –

(b) $A = ax + bx - x^2$

(c) [**X**] [ ]
[**X**] [ ]
[**X**] [**X**]

(d) $x \in]0\,\text{cm}; 8\,\text{cm}[_{\mathbb{Q}}$

12. Maria hat bei den folgenden Termumformungen Fehler gemacht. Berichtige sie farbig (nicht mit roter Farbe):
    (a) $(a - 0{,}5)^2 = a^2 + a + 2{,}5$
    (b) $(2x + 3)^2 = 2x^2 + 12x + 6$
    (c) $(4 - x)(x + 4) = x^2 - 16$

Lösung: (a) $(a - 0{,}5)^2 = a^2 - a + 0{,}25$
(b) $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$
(c) $(4 - x)(x + 4) = 16 - x^2$

13. Löse für $G = \mathbb{Q}$ die folgende Gleichung nach x auf:
    $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = (3 + x)(x - 3) - 4x^2 - 13$

Lösung: $x = -3$

14. Berechne den Extremwert des folgenden Terms:
    $T(x) = 2(3 - x)^2 + 12x$
    Von welcher Art ist dieser Extremwert?

Lösung: Wegen $T(x) = 2x^2 + 18$ ergibt sich das Minimum 18 .

15. Besitzt der folgende Term einen Extremwert? $T(x) = 3(2 - x^2) - 6x^2$
    Wenn du mit „Ja“ antwortest: Von welcher Art ist der Extremwert? Begründung.
    Wenn du mit „Nein“ antwortest: Begründung.

Lösung: Der Term besitzt keinen Extremwert, sondern nur den konstanten Wert 6.

16. Daniel stellt sich im Kaufhaus auf eine Rolltreppe. Nach 20 s ist er im oberen Stockwerk angelangt.
    Ein anderes Mal ist die Rolltreppe ausgeschaltet. Jetzt braucht er 30 s um auf der Rolltreppe hinaufzulaufen.
    Berechne, wie lange Daniel brauchen würde, wenn er auf der eingeschalteten Rolltreppe hinaufliefe.

Lösung: Daniel braucht 12 s.

17. Gegeben sind die beiden Brüche

$$B_1 : \frac{10^{679}}{10^{678}} \quad \text{und} \quad B_2 : \frac{10^{679}+1}{10^{678}+1}.$$

(a)
- Notiere drei Besonderheiten des Bruches B_1.
- Welchen Wert hat B_1?

(b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Brüchen B_1 und B_2?

(c) Welcher der beiden Brüche hat den größeren Wert? Begründe.

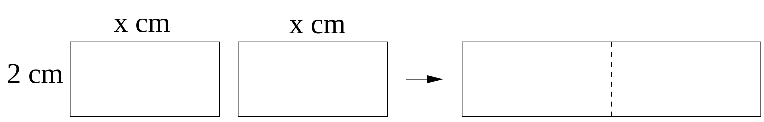
Lösung: (a)
- Z.B.:
  - Zähler und Nenner sind Zehnerpotenzen
  - Der Exponent im Zähler ist um 1 größer als der des Nenners
  - Der Zähler ist größer als der Nenner
- $\frac{10^{679}}{10^{678}} = 10^{679-678} = 10$

(b) Addiert man im Bruch B_1 jeweils 1 zum Zähler und zum Nenner, dann erhält man den Bruch B_2.

(c) $B_1 = \frac{10^{679}}{10^{678}} = \frac{10}{1} = \frac{10 \cdot (10^{678}+1)}{1 \cdot (10^{678}+1)} = \frac{10^{679}+10}{10^{678}+1} > \frac{10^{679}+1}{10^{678}+1} = B_2$

Also hat der Bruch B_1 den größeren Wert.

18.



Zwei kongruente Rechtecke mit der Länge x cm und der Breite 2 cm sollen so lückenlos zu einem größeren Rechteck aneinander gefügt werden, wie es die Abbildung zeigt. Der Lehrer, Herr Ganfum, stellt dazu die Aufgabe: „Berechne den Umfang u des so entstandenen großen Rechtecks in Abhängigkeit von x.“
Das Ergebnis von Sophia ist: $u(x) = (4x + 4)$ cm.
Das Ergebnis von Wolfgang ist: $u(x) = [2 \cdot (4 + 2x) - 4]$ cm.
Herr Ganfum meint dazu: „Ihr habt beide recht.“

(a) Wie hat Sophia gerechnet?

(b) Wie hat Wolfgang gerechnet?

(c) Zeige: Die Terme von Wolfgang und Sophia sind äquivalent.

(d) Berechne die Länge x eines der beiden kleinen Rechtecke, wenn der Umfang des zusammengefügten Rechtecks dann $0,5\,\text{m}$ beträgt.

Lösung: (a) Sophia hat erkannt, dass im großen Rechteck die Länge $x\,\text{cm}$ 4 Mal und die Breite $2\,\text{cm}$ doppelt vorkommt. Daher gilt $u(x) = (4x + 4)\,\text{cm}$.

(b) Wolfgang verdoppelt zunächst einfach den Umfang eines Rechtecks. Dann subtrahiert er noch zwei Mal diejenige Breite eines kleinen Rechtecks, die im Inneren des großen Rechtecks verschwindet (siehe gestrichelte Linie):
$u(x) = [2 \cdot (2 \cdot 2 + 2 \cdot x) - 4]\,\text{cm} = [2 \cdot (4 + 2x) - 4]\,\text{cm}$.

(c) Wolfgang: $2 \cdot (4 + 2x) - 4] = 8 + 4x - 4 = 4x + 4$. Das ist der Term von Sophia.

(d) $0,5\,\text{m} = 50\,\text{cm}$.
Es muss dann z.B. mit Sophias Ergebnis $4x + 4 = 50$ gelten. $\Leftrightarrow x = 11,5$

19. Viele Schülerinnen und Schüler kennen die Werte der Quadrate zweiziffriger Zahlen auswendig:
Z.B.: $12^2 = 144$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$ oder $19^2 = 361$. Karin und Heinz wollen nun eine Möglichkeit finden, wie sie die Quadrate **aller** zweistelligen Zahlen leicht berechnen können.
Heinz versucht es mit 65:
$65 = 60 + 5 \quad \Rightarrow \quad 65^2 = 60^2 + 5^2 = 3600 + 25 = 3625.$
Karin probiert es mit 65 auf eine andere Weise:
$65 = 70 - 5 \quad \Rightarrow \quad 65^2 = 70^2 - 5^2 = 4900 - 25 = 4875.$
Sie meint dazu: „Hier stimmt doch etwas nicht.“ Auch Heinz geht ein Licht auf: „Klar, wir hätten Klammern setzen müssen!“

(a) Erkläre, was nicht stimmen kann.

(b)
- Notiere, wie Heinz die Klammern setzen müsste.
- Löse die Klammern auf und berechne damit den Wert von 65^2, sowohl wie es Karin als auch wie es Heinz vorhatte.

(c) Anja hat zugeschaut. Sie möchte 99^2 berechnen. Für welche Zerlegung entscheidet sie sich wohl? Für die von Heinz oder die von Karin? Begründe deine Antwort und berechne das Ergebnis im Kopf.

(d) Formuliere die Regel, wie du die Quadrate zweistelliger Zahlen auf diese Weise berechnest.

Lösung: (a) Für den Wert von 65^2 können nicht zwei verschiedene Ergebnisse herauskommen. Außerdem ist $65^2 = 4225$.

(b)
- $65^2 = (60 + 5)^2$
- Heinz: $(60 + 5)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 5 + 5^2 = 3600 + 600 + 25 = 4225$
  Karin: $(70 - 5)^2 = 70^2 - 2 \cdot 70 \cdot 5 + 5^2 = 4900 - 700 + 25 = 4225$

(c) Anja entscheidet sich für die Methode von Karin, denn 99 liegt näher an 100 (mit dieser Zahl lässt sich bequem rechnen).
Also: $99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$.

(d) Z.B.:

- Stelle die zweiziffrige Zahl als Summe oder Differenz zum nächst größeren oder kleineren Zehnervielfachen dar.
- Quadriere das Zehnfache der ersten Ziffer.
- Addiere (oder subtrahiere) das doppelte Produkt aus dem Zehnfachen der ersten Ziffer und der zweiten Ziffer.
- Addiere das Quadrat der zweiten Ziffer. Dann bist du fertig.

20. Die Klasse 8a der Abel-Schule hat von ihrem Lehrer, Herrn Korfat, die folgende Aufgabe bekommen:
„Berechne den Produktwert aus zwei gleichen natürlichen Zahlen. Subtrahiere nun vom ersten Faktor eine natürliche Zahl und addiere zum zweiten Faktor die gleiche natürliche Zahl. Multipliziere jetzt den Wert der Differenz mit dem der Summe. Vergleiche diesen Produktwert mit jenem, den du anfangs erhalten hast.“
Edwin rechnet: $100 \cdot 100 = 10000$ und $(100-99) \cdot (100+99) = 199 < 10000$
Egon rechnet: $7 \cdot 7 = 49$ und $(7-2) \cdot (7+2) = 45 < 49$
Martha rechnet: $1000 \cdot 1000 = 1000000$ und $(1000-1000) \cdot (1000+1000) = 0 < 1000000$
Helga rechnet: $11 \cdot 11 = 121$ und $(11-21) \cdot (11+21) = -320 < 121$
Sie melden sich und meinen übereinstimmend: „Der zweite Produktwert ist immer kleiner als der erste.“
Herr Korfat gibt zu bedenken: „Wirklich immer?“
Martha muss zugeben: „Nein, weil … “

(a) Wie hat Martha ihre Antwort begründet?

(b) Es sei a eine solche natürliche Zahl und k eine zweite natürliche Zahl, die einmal von a subtrahiert und andererseits zu a addiert wird. Löse damit die von Herrn Korfat gestellte Aufgabe.

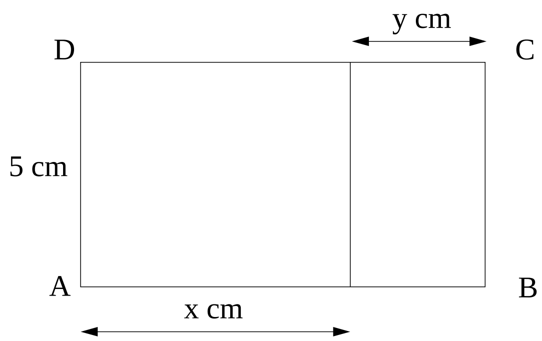
Lösung: (a) „Nein, weil dies nur von ein paar Beispielen gestützt wird. Die Gültigkeit in allen Fällen ist nicht sichergestellt.“

(b) $(a-k) \cdot (a+k) = a^2 - k^2 < a^2$. Damit ist klar: Der zweite Produktwert ist **stets** kleiner als der erste.

21. Sind die beiden Terme
$T_1(x) = (123456x - 654321)^2$ und $T_2(x) = (654321 - 123456x)^2$ äquivalent?
Begründe deine Antwort.

Lösung: Der Term T_1 hat die Form $(A - B)^2$, der Term T_2 vertauscht den Klammerinhalt von T_1 am Minuszeichen. T_2 hat also die Form $(B - A)^2$.
Nun ist z.B. $(7 - 3)^2 = 4^2 = 16$ und $(3 - 7)^2 = (-4)^2 = 16$
Wenn du also den Klammerinhalt der 2. binomischen Formel am Minuszeichen vertauchst, dann wechselt der Klammerinhalt (wenn er nicht gerade null ist) das Vorzeichen. Beim Quadrieren ist das Ergebnis dasselbe, wie du im Zahlenbeispiel $(7 - 3)^2 = (3 - 7)^2 = 16$ sehen kannst.
In den Klammern der eigentlichen Aufgabe steht zwar noch der Platzhalter x, aber x ist ja auch nur der Stellvertreter für jeweils eine Zahl. Somit gilt das, was im Zahlenbeispiel gezeigt worden ist, ebenso für die beiden Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$: Die beiden Terme sind äquivalent.

22.



(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ für $x = 7$ und $y = 2$.

(b) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ mit den Variablen x und y auf zwei verschiedene Arten.

(c) Das Rechteck $ABCD$ kann für die passende Wahl der Varaibalen x und y zum Quadrat werden. Gib zwei Möglichkeiten an.

(d) Unter allen möglichen Rechtecken $ABCD$ gibt es beliebig viele, die einen Flächeninhalt von $65\,\text{cm}^2$ aufweisen. Gib für diesen Fall drei Belegungen für x und die jeweils dazu passende Belegung für y an. Mache jeweils die Probe.

Lösung: (a) Klar: Dein Rechteck $ABCD$ muss 9 cm breit und 5 cm hoch werden.

(b) **1. Möglichkeit:** $A_{ABCD} = 5 \cdot (x + y)\,\text{cm}^2$
2. Möglichkeit: $A_{ABCD} = (5 \cdot x + 5 \cdot y)\ \text{cm}^2$

(c) Beim Quadrat muss hier $5 = (x + y)$ gelten. Wenn x und $y \in \mathbb{N}$ gelten würde, dann folgt in diesem Fall:

x	1	2	3	4
y	4	3	2	1

(d) In diesem Fall muss gelten: $5 \cdot (x + y) = 65 \ |: 5 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 13$.
Für x und $y \in \mathbb{N}$ ergibt sich:

x	1	2	3	4	...	12
y	12	11	10	9	...	1
$5 \cdot (x+y) =$	65	65	65	65	...	65

23. Gegeben ist der Poduktterm $T(x) = (4-x)(4+x)$.
   (a) • Tabellarisiere den Term für $x \in [-4; 4]_{\mathbb{Z}}$
   • Was fällt dir bei der Betrachtung der Termwerte in der Tabelle alles auf?
   (b) Zeige, dass die beiden Terme $T(x) = (4-x)(4+x)$ und $T^*(x) = 16 - x^2$ auf $G = \mathbb{Q}$ äquivalent sind.
   (c) • Begründe: Der Term x^2 wird für alle $x \in \mathbb{Q}$ nie negativ.
   • Was folgt daraus für den Term $-x^2$?
   • Begründe: Der Term $T(x) = (4-x)(4+x)$ kann für alle $x \in \mathbb{Q}$ höchstens den Wert 16 annehmen.

Lösung: (a) •

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$T(x)$	0	7	12	15	16	15	12	7	0

• Zunächst nehmen die Termwerte von links nach rechts zu bis zum Wert 16.
Dann nehmen die Termwerte bis zum Wert 0 wieder ab.
Der Termwert 16 ist der größte.
Die Termwerte scharen sich symmetrisch um diesen Maximalwert.

(b) Es ist $T(x) = (4-x)(4+x) = 16 + 4x - 4x - x^2 = 16 - x^2 = T^*(x)$.

(c) • Es ist $x^2 = x \cdot x$; d.h. x wird für alle $x \in \mathbb{Q}$ mit sich selbst multipliziert.
Ist x positiv, dann ist $x \cdot x$ auch positiv.
Ist x negativ, dann ist $x \cdot x$ trotzdem positiv.
Ist $x = 0$, dann ist $x \cdot x = 0$.
Also kann x^2 nie negativ werden.
• Dann kann $-x^2$ nie positiv werden, weil das Minuszeichen nicht mitquadriert wird.
• Weil $-x^2$ höchstens den Wert 0 annehmen kann, nimmt $T^*(x) = 16 - x^2$ höchstens den Wert 16 an.

24. Sabine und Helmut untersuchen die Extremwerteigenschaften der drei folgenden Terme auf $G = \mathbb{Q}$:

$$T_1(x) = (x-3)(x+3)$$
$$T_2(x) = (x-4)(4+x)$$
$$T_3(x) = -(5+x)(5-x)$$

Helmut hat Folgendes herausgefunden:

- „Nachdem ich eine binomische Formel angewendet habe, ist klar, dass jeder Term ein Minimum besitzt“
- „Die Belegung von x, die das jeweilige Minimum liefert, ist immer die gleiche.“

Sabine hat Zweifel: „Der Term $T_3(x)$ beginnt mit einem Minuszeichen. Also müsste $T_3(x)$ doch ein Maximum enthalten.“

(a) Hat Sabine Recht? Begründe.

(b) Welche Belegung von x liefert jeweils den Extremwert? Begründe.

Lösung: (a) Es gilt:
$T_1(x) = (x-3)(x+3) = x^2 - 9$
$T_2(x) = (x-4)(4+x) = (x-4)(x+4) = x^2 - 16$
$T_3(x) = -(5+x)(5-x) = -(25-x^2) = -25 + x^2 = x^2 - 25$
Der (heimliche) Faktor vor x^2 ist stets $1 > 0$, Also besitzen alle drei Terme ein Minimum.

(b) $T_1(x) = x^2 - 9 = (x-0)^2 - 9$
$T_2(x) = x^2 - 16 = (x-0)^2 - 16$
$T_1(x) = x^2 - 25 = (x-0)^2 - 25$
Also liefert stets $x = 0$ das jeweilige Minimum. Sabine hat nicht Recht.

25. Vereinfache so weit wie möglich:

(a) $1,5ab - (0,5 \cdot a \cdot 2)^2 - \frac{3}{2}ab + a^2 =$

(b) $(3c)^2 - 3c^2 - (-3c)^2 =$

Lösung: (a) $1,5ab - (0,5 \cdot a \cdot 2)^2 - \frac{3}{2}ab + a^2 = 1,5ab - (1a)^2 - 1,5ab + a^2 = -a^2 + a^2 = 0$

(b) $(3c)^2 - 3c^2 - (-3c)^2 = 9c^2 - 3c^2 - 9c^2 = -3c^2$

26. Gegeben sind die folgenden Terme auf $G = \mathbb{Q}$:
$T_1(x) = x^3 - x^2 - x - 1$
$T_2(x) = x^2 - 2x + 1$
$T_3(x) = -x \cdot (x+1) - 1$
$T_4(x) = x^2 - 1 - 2 \cdot (x-1)$

(a) Fritz stellt zwei Behauptungen auf:

- „Wenn man für alle Terme den Termwert für $x = -1$ berechnet, dann ist der Wert des ersten Terms größer als der des dritten.“
- „Wenn man für alle Terme den Termwert für $x = -1$ berechnet, dann ist der Wert des zweiten Terms genauso groß wie der des vierten.“

Überprüfe diese beiden Behauptungen durch Einsetzen.

(b) Überprüfe durch Umformung, dass die Terme $T_2(x)$ und $T_4(x)$ äquivalent sind.

(c) Sind die beiden Terme
auf $G = \mathbb{Q}$ über der Grundmenge $G = \{0;\ 1;\ 2\}$ äquivalent? Fertige dazu eine numerische Wertetabelle an.

[Die Idee zu dieser Aufgabe stammt aus: „Thema Mathematik“ im BUCHNER-Verlag, Lehrerband 2008]

Lösung: (a) $T_1(-1) = -1 - 1 + 1 - 1 = -2$
$T_2(-1) = 1 + 2 + 1 = 4$
$T_3(-1) = 1 \cdot 0 - 1 = -1$
$T_4(-1) = 1 - 1 + 2 \cdot 1 + 2 = 4$
Die erste Behauptung stimmt, die zweite ist falsch

(b) $T_4(x) = x^2 - 1 - 2 \cdot (x - 1) = x^2 - 1 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 = T_4(x)$. Die beiden Terme sind äquivalent.

(c)

x	0	1	2
$T_5(x) = (x+5)^2$	25	36	49
$T_6(x) = x^2 + 25$	25	26	29

Die letzten beiden Spalten der Tabelle zeigen keine Übereinstimmung; also sind die beiden Terme nicht äquivalent.

27. Egon bildet die Spiegelzahlen von zweiziffrigen Zahlen, indem er deren Ziffern jeweils vertauscht. Dann errechnet er vom jeweilgen Zahlenpaar die Summe, z.B. so:
$13 + 34 = 44$ oder $81 + 18 = 99$ oder $25 + 52 = 77$.
„Komisch, der Summenwert besteht stets aus zwei gleichen Ziffern. Ist das immer so?“, fragt er seinen Vater. Der antwortet: „Nein, finde selbst ein Gegenbeispiel.“
Egon rechnet und entdeckt sogar mehrere Gegenbeispiele.

(a) Finde zwei Beispiele dafür, dass der Summenwert nicht aus lauter gleichen Ziffern bestehen muss.

(b)
- Egon betrachtet die Summenwerte seiner Beispiele in der Aufgabe (a) genauer und entdeckt einen Zusammenhang zwischen den Ziffern. Welcher ist das?
- Jede zweiziffrige Zahl lässt sich als Term in der Form $10a + b$ darstellen, wobei $a \in \{1;\ 2;\ \ldots\ 9\}$ und $b \in \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots\ 9\}$ gilt.
  - Zeige mit Hilfe des obigen Terms, dass jeder Summenwert aus einer zweiziffrigen Zahl und ihrer Spiegelzahl stets durch 11 teilbar ist.
  - Wenn du die beiden Ziffern der ursprünglichen zweiziffrigen Zahl auf geeignete Weise kombiniertst, dann erhältst du neben der 11 einen weiteren Teiler des Summenwertes.

(c) Ermittle alle Paare aus einer zweistelligen Zahl und ihrer Spiegelzahl, deren Summenwert 143 beträgt.

Lösung: (a) Z.B.: $97 + 79 = 176$ oder $56 + 65 = 121$ oder ...

(b)
- Die Summe aus der ersten und der letzen Ziffer des Sumenwertes ergibt jeweils die mittlere Ziffer.
-
  - $(10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11 \cdot (a + b)$.
    Der Summenwert enthält also stets den Faktor 11.
  - Der zweite Teiler entsteht aus dem Summenwert der beiden Ziffern der zweistelligen Zahl. Begründung siehe Lösung oben.

(c) Es gilt $11(a + b) = 143 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 13$. Gesucht sind also Ziffernpaare $(a \mid b)$, so dass $a + b = 13$ wird. Das ergibt folgende Zahlenpaare:
$\{(9 \mid 4)\,; (8 \mid 5)\,; (7 \mid 6)\, (6 \mid 7)\,; (5 \mid 8)\,; (4 \mid 9)\,.$

28. Jede zweistellige natürliche Zahl lässt sich durch den Term $10a + b$ darstellen, wobei a und b die Ziffern sind.
Beispiel: $75 = 10 \cdot 7 + 5$; also gilt $a = 7$ und $b = 5$.
Unter der Quersumme q einer natürlichen Zahl versteht man die Summe aus ihren einzelnen Ziffern. In unserem Beispiel ist $q = 7 + 5 = 12$.

(a)
- Subrahiere von der Zahl 75 deren Quersumme.
- Notiere die Menge aller Teiler des Differenzwertes.

(b)
- Wiederhole die vorigen Schritte mit der Zahl 59.
- Bestimme den ggT aus beiden Teilermengen.

(c)
- Wiederhole die Rechenschritte mit einemr selbst gewählten zweistelligen Zahl.
- Was stellst du fest?
- Gilt deine Feststellung für alle zweistelligen Zahlen? Begründe deine Antwort.

(d)
- Experimentiere mit dreistelligen Zahlen.
- Begründe: Subtrahiert man von einer dreistelligen deren Quersumme, so ist der Differnzwert stets durch 9 teilbar.

(e) Gilt das für jede beliebige natürliche Zahl? Begründe.

Lösung: (a)
- $75 - 12 = 63$.
- $T_{63} = 1; 3; 7; 9; 21; 63$.

(b)
- $59 - 14 = 45._{45} = 1; 3; 5; 9; 15; 45$.
- $ggT(45; 63) = 9$

(c) •
- Der Wert der Differenz aus der Zahl und ihrer Quersume ist wieder durch 9 teilbar.
- Zweistellige Zahl $10a + b$; $q = a + b$.
  Differenzwert: $10a+b-(a+b) = 9a$; also ist der Differenzwert stets durch 9 teilbar.

(d) •
- Dreistellige Zahl: $100a + 10b + c$; $q = a + b + c$.
  Differenzwert: $100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9 \cdot (11a + b)$; also ist auch dieser Differenzwert stets durch 9 teilbar.

(e) Ja, denn $10^n \cdot a - a$ liefert ausschließlich Neuner als Ziffern.

29. Franz soll die Anzahl n von natürlichen Zahlen bestimmen, die zwischen zwei natürlichen zahlen x und y mit $y > x$ liegen.
Nach einigen Rechenbeispielen findet er eine Formel: $n = y - x - 1$. **(*)**

(a)
- Bestimme mit Hilfe von **(*)** alle natürlichen Zahlen, die zwischen 69 und 83 liegen.
- Bestätige dein Ergebnis, indem du die in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst.

(b) Berechne die Anzahl der natürlichen Zahlen, die größer als 513 799 und gleichzeitig kleiner als 803 102 sind.

(c) Franz überprüft die Formel **(*)** jetzt an folgenden Sonderfällen:
- x und y sind unmittelbare Nachbarn.
  Gilt die Formel **(*)** auch hierfür?
- x und y sind ganze Zahlen.
  Berechne n für $x = -11$ und $y = 3$ sowie für $x = -39$ und $y = -23$.
  Stimmt die Formel auch in diesen beiden Fällen?

Lösung: (a)
- $n = 83 - 69 - 1 = 13$.
- $\{70; 71; 72; 73; 74; 75; 76; 77; 78; 79; 80; 81; 82\}$.
  Die Lösungsmenge enthält 13 Zahlen.

(b) $n = 803\,102 - 513\,799 - 1 = 289\,302$.

(c)
- Für x und y gilt dann $y = x + 1$.
  $n = (x + 1) - x - 1 = 0$. In der Tat gibt es keine natürlichen Zahlen zwischen zwei Zahlennachbarn. Die Formel **(*)** gilt auch in diesem Fall.
- $n_1 = 3 - (-11) - 1 = 3 + 11 - 1 = 13$.
  Wenn du alle in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst, bestätigt sich die Formel.
  $n_2 = -23 - (-39) - 1 = -23 + 39 - 1 = 15$.
  Wenn du auch in diesem Fall alle in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst, bestätigt sich die Formel erneut.

30. Edwin entdeckt in einem Rechenbuch ein Zahlenrätsel:
„Denke dir eine dreistellige Zahl, die durch 10 teilbar ist. Streiche deren letzte Ziffer. Subtrahiere diese neue Zahl von der ursprünglichen dreistelligen Zahl. Dann ist der Differenzwert stets durch die neue Zahl teilbar.“

(a) Bestätige die obige Behauptung an einem selbst gewählten Beispiel.

(b) Untersuche an einem weiteren Beispiel, ob die Behauptung auch für vierstellige Zahlen gilt.

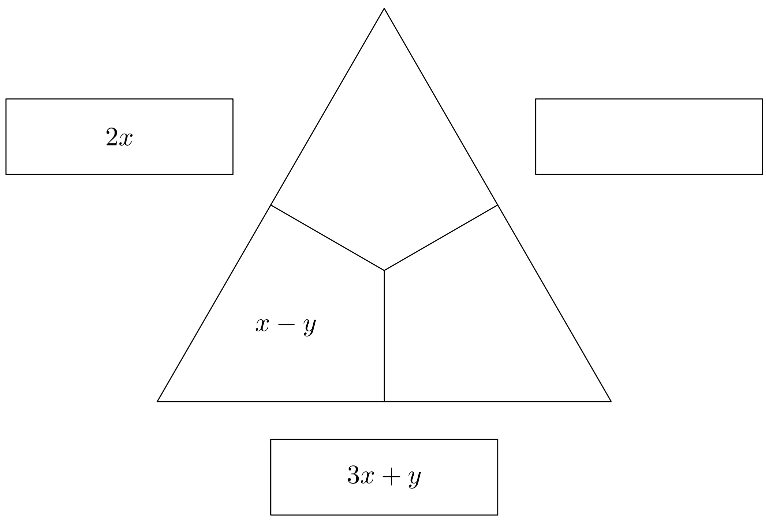
(c) Edwin hat vieles durchprobiert. Alle seine Rechnungen haben die obige Behauptung bestätigt. Schließlich setzt er für die neue Zahl den Platzhalter x und probiert es allgemein mit x. Er kommt zu dem Schluss „Die Behauptung gilt sogar für alle natürlichen durch 10 teilbaren Zahlen!“ Begründe, dass Edwin Recht hat.

Lösung: (a) Z.B. 470: Die neue (zweistellige) natürliche Zahl heißt dann 47.
$470 - 47 = 423$. $423 : 47 = 9$: Stimmt.

(b) Z.B. 5730: Die neue (dreistellige) natürliche Zahl heißt dann 573.
$5730 - 573 = 5157$. $5157 : 573 = 9$: Stimmt auch.

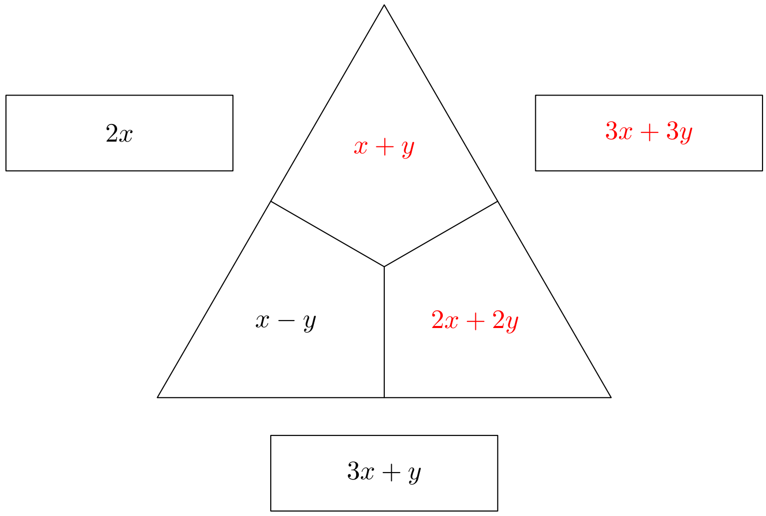
(c) Die neue Zahl ist x. Wenn deren zugehörige ursprüngliche Zahl durch 10 teilbar sein soll muss diese auf 0 enden. Dann ist diese aber zehnmal so groß wie die neue Zahl. Also kannst du für die alte Zahl $10x$ schreiben. Somit ergibt sich:
$10x - x = 9x$. Der Wert der Differnz ist also $9x$ und damit sowohl durch 9 als auch durch x, also die neue Zahl, teilbar.

31.

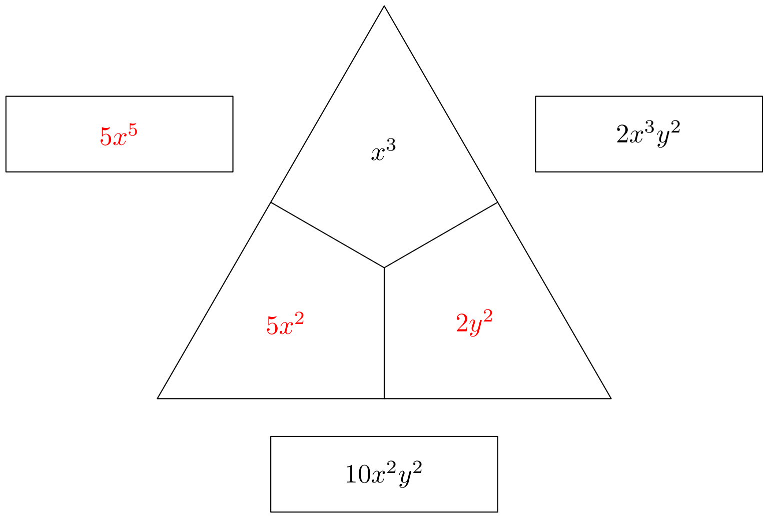


In die drei Felder im Dreieck gehören Terme, wobei in jedem der Rechtecke die Summe aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Termen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Terme.

Lösung:

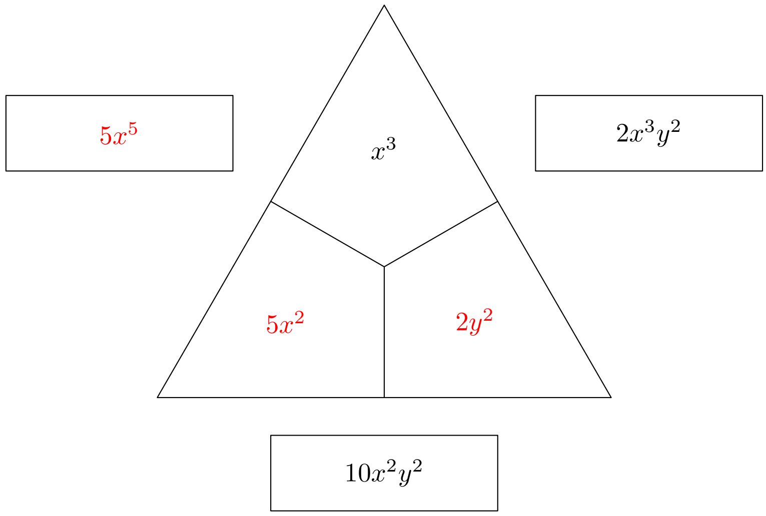


32.



In die drei Felder im Dreieck gehören Terme, wobei in jedem der Rechtecke das Produkt aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Termen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Terme.

Lösung:



33. Lisa weiß, dass eine natürliche Zahl n dann durch 9 teilbar ist, wenn ihre Quersumme QS durch 9 teilbar ist.
Sie stellt sich nun folgende Fragen:

(1) „Ist der Wert der Summe aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme auch durch 9 teilbar?“

(2) „Ist der Wert des Produktes aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme durch 27 teilbar?“

(3) „Ist der Wert des Quotienten aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme durch 9 teilbar?“

Was meinst du? Begründe jeweils deine Ansicht.

Lösung: In jedem all gilt: $n = 9 \cdot x$ und $QS = 9 \cdot y$.

Zu Frage (1):
$n + QS = 9x + 9y = 9 \cdot (x + y)$. Die Antwort heißt „Ja“.

Zu Frage (2):
$n \cdot QS = 9x \cdot 9y = 81 \cdot (xy) = 27 \cdot 3 \cdot (x \cdot y)$. Die Antwort heißt wieder „Ja“.

Zu Frage (3):

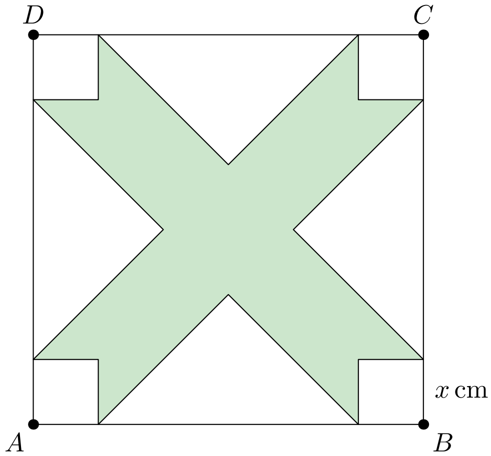
$\frac{n}{QS} = \frac{9x}{9y} = \frac{x}{y}$. Nun müsste y ein Teiler von x sein. Aber ist das immer so?

1. Beispiel:
$n = 648 \quad \Rightarrow \quad QS = 18 \quad 648 : 18 = 36$. Dieses Beispiel liefert eine Bestätigung.

2. Beispiel:
$n = 927 \quad \Rightarrow \quad QS = 18 \quad 917 : 18 = 50$ Rest 17. Dieses Beispiel verneint die Frage (3).

Also ist der Wert des Quotienten aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme nicht immer ganz.

34.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat.
An seinen Eckpunkten befinden sich vier kleine Quadrate, deren Seitenlänge jeweils x m beträgt.
Die vier Dreiecke an den Quadratseiten sind jeweils gleichschenklig-rechtwinkig.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $x = 1$.

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A des eingefärbten Kreuzes gilt in Anhängigkeit von x:

$$A(x) = (-8x^2 + 24x)\,\text{cm}^2\,.$$

(c) Berechne $A(0)$ und $A(3)$. Deute dein Ergebnis mit Hilfe deiner Zeichnung.

(d) Unter allen Kreuzen gibt es eines, dessen Flächeninhalt maximal ist.

- Berechne dieses Maximum sowie die zugehörige Belegung von x.
- Zeichne erneut das Quadrat $ABCD$ mit dem einbeschriebenen größten Kreuz.
- Wie viel Prozent der Fläche des Quadrates $ABCD$ nimmt das größte Kreuz ein? Löse das Problem auf zwei verschiedene Arten.

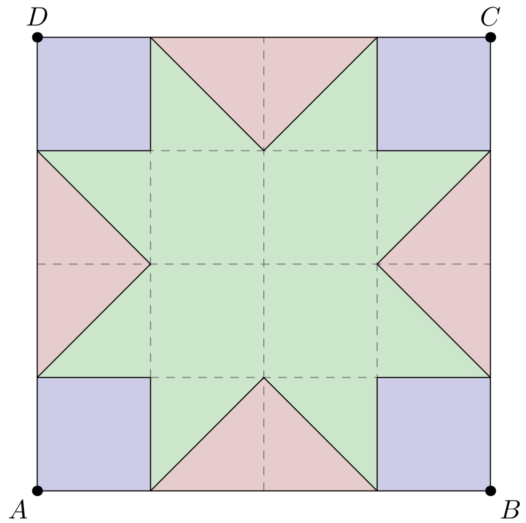
Lösung: (a) Klar.

(b)

$$\begin{aligned} A(x) &= [6^2 - 4 \cdot x^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (6-2x) \cdot (3-x)]\,\text{cm}^2 \\ &= [36 - 4x^2 - 2 \cdot (18 - 6x - 6x + 2x^2)]\,\text{cm}^2 \\ &= [36 - 4x^2 - 36 + 12x + 12x - 4x^2]\,\text{cm}^2 \\ A(x) &= (-8x^2 + 24x)\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

(c) $A(0) = 0\,\text{cm}^2$. Das zugehörige Kreuz entartet zu den beiden Diagonalen des Quadrates $ABCD$.
$A(3) = 0\,\text{cm}^2$. Es entsteht ein Kreuz das aus den Seitenmittelpunkten des Quadrates $ABCD$ erzeugt worden ist.

(d)
- $$\begin{aligned} A(x) &= (-8x^2 + 24x)\,\text{cm}^2 \\ &= -8 \cdot (x^2 - 3x + 1,5^2 - 2,25)\,\text{cm}^2 \\ &= -8 \cdot [(x - 1,5)^2 - 2,25)\,\text{cm}^2 \\ A(x) &= [(-8(x-1,5)^2 + 18]\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

  $x = 1,5$ liefert $A_{\text{max}} = 18\,\text{cm}^2$.
- 

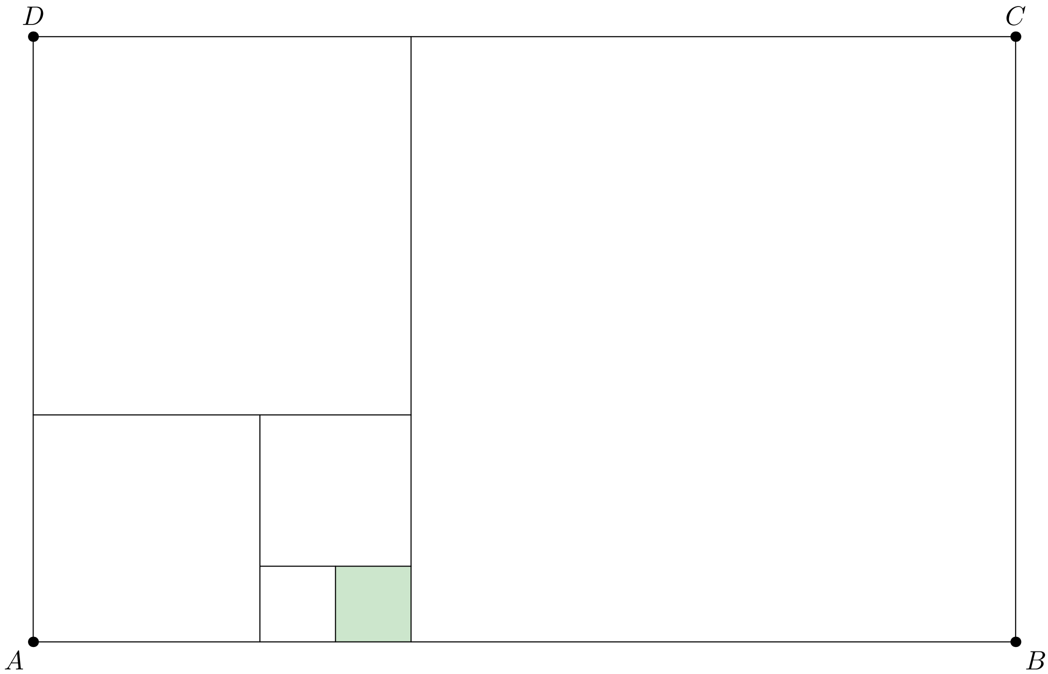
  Zeichne das Quadrat $ABCD$ erneut mit dem größten Kreuz.
- 1. Möglichkeit: mit Hilfe der Lösung oben

  $$\frac{A_{\text{Kreuz}}}{A_{\text{ABCD}}} = \frac{18\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = 0,5 = 50\%.$$

  2. Möglichkeit: Die gestrichelten Hilfslinien zerlegen das Quadrat $ABCD$ in 16 kongruente kleine Quadrate.
  Im Zentrum des Kreuzes befinden sich 4 gleich große Quadrate. Der Rest des

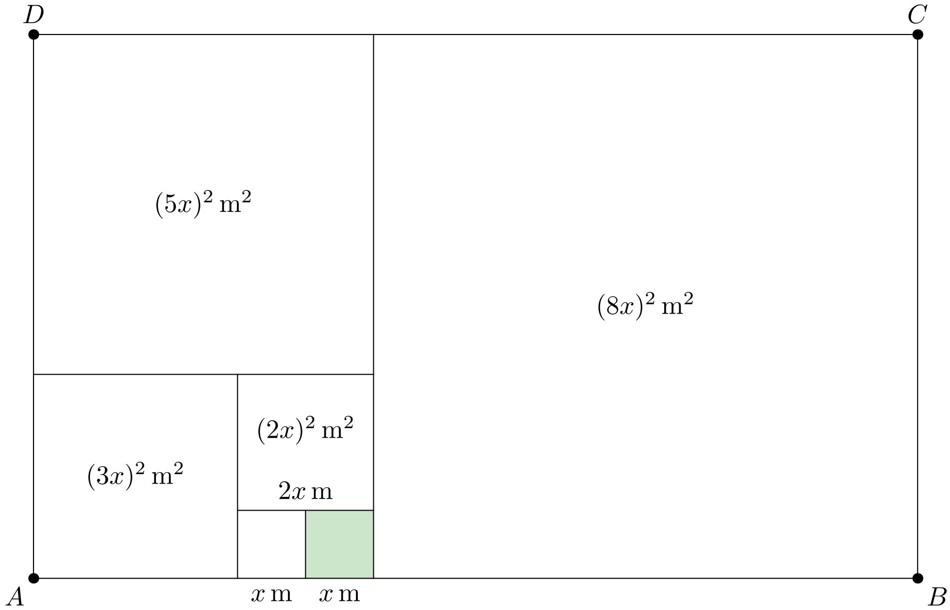
Kreuzes setzt sich aus 8 kongruenten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken zusammen, wobei jedes halb so groß wie ein Quadrat im Zenrtrum ist. Diese 8 Dreiecke ergeben wiederum 4 Quadrate. Also nimmt das Kreuz insgesamt den gleichen Flächeninhalt ein, wie die 8 Quadrate.
Das sind aber zusammen 50% der Fläche des Quadrates $ABCD$.

35.



Ein rechteckiges Grundstück $ABCD$, dessen Flächeninhalt $2,34\,\text{ha}$ beträgt, ist in lauter quadratische Parzellen eingeteilt. Eine der beiden kleinsten Parzellen, die im Plan farbig gekennzeichent ist, wird eingezäunt.
Berechne die Länge des Zaunes.

Lösung:



$2,34\,\mathrm{ha} = 23\,400\,\mathrm{m}^2$.
Die beiden kleinsten Parzellen haben eine Breite von $(x + x)\,\mathrm{m} = 2x\,\mathrm{m}$.
Diese Seitenlänge geht dann auf das nächst größere Quadrat über.
Dessen Flächeninhalt beträgt dann $(2x)^2\,\mathrm{m}^2$.
Auf diese Weise ermittelst du die Flächeninhalte der nächsten Quadrate (siehe Lösungsskizze).
Am Ende ergibt sich für die Maßzahlen:

$$\begin{aligned}
x^2 + x^2 + (2x)^2 + (3x)^2 + (5x)^2 + (8x)^2 &= 23\,400 \\
2x^2 + 4x^2 + 9x^2 + 25x^2 + 64x^2 &= 23\,400 \\
104x^2 &= 23\,400 \qquad |:104 \\
x^2 &= 225 \\
x &= 15
\end{aligned}$$

Der Umfang eines dieser kleinsten Quadrate beträgt $4 \cdot 15\,\mathrm{m} = 60\,\mathrm{m}$. Das ist dann die gesuchte Zaunlänge.

36. Gegeben ist die Gleichung $2x+3 = 11$ für $G = \mathbb{N}$. Welche der folgenden Gleichungen haben die gleiche Lösung? Begründe Deine Antwort, ohne die Lösung jeder Gleichung zu berechen.

    (a) $3 + 2x = 11$

    (b) $(3 + x) + x = 11$

    (c) $x + (3 + x) = 11$

    (d) $3 + x = -x + 11$

    (e) $2 + 3 \cdot x = 11$

(f) $x^2 + 3 = 11$

(g) $2000x + 3000 = 11000$

Lösung: (a) Ja, weil $3 + 2x = 2x + 3$ gilt (Kommutativgesetz der Addition und Punkt-vor-Strich-Regel)

(b) Ja, weil $(3 + x) + x = 3 + (x + x) = 3 + 2 \cdot x$ gilt; dann erhältst du die Gleichung (a) in der Angabe.

(c) Ja, weil $x + (3 + x) = x + 3 + x = x + x + 3 = 2x + 3$ gilt. Du erhältst dann die Gleichung oben in der Angabe.

(d) Ja. Begründung: Mit der Umformung $3+x = -x+11 \mid +x$ erhältst du die Gleichung (a) in der Angabe.

(e) Nein, weil nach der Regel „Punkt vor Strich" $2 + 3 \cdot x \neq 2 + 3 \cdot x$ gilt. (Mache es Dir an Beispielen mit Zahlen deutlich.)

(f) Nein, weil $x^2 = x \cdot x$ ist und $2 \cdot x = x + x$ gilt. (Mache es Dir an Beispielen mit Zahlen deutlich.)

(g) $2000x + 3000 = 11000 \mid : 1000$ ergibt die Gleichung oben in der Angabe.

7. Lineare Gleichungen und Ungleichungen

1. Gegeben ist die Gleichung

$$13 - 2x = x + 10, \quad G = \mathbb{Z}\,.$$

   (a) Zeige, dass $x = 2$ keine Lösung dieser Gleichung ist.

   (b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass $x = 2$ die Lösung der abgeänderten Gleichung ist, und führe den Nachweis.

Lösung: (a) Einsetzen (b) z.B.: $13 - 2x = x + 7$

2. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung $4 - 6x = 3(11 - 2x)$ ist für $G = \mathbb{Q}$ leer.

Lösung: Es ergibt sich $4 - 0 \cdot x = 33$. Das ist für keine Belegung von x erfüllbar.

3. Gegeben ist die Gleichung

$$7 - x = 3x + 11, \quad G = \mathbb{Z}$$

   (a) Zeige, dass $x = -1$ die Lösung dieser Gleichung ist.

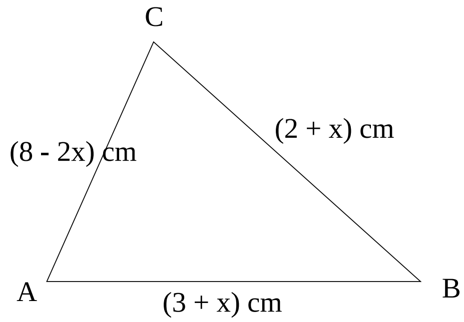
   (b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass die Lösungsmenge der abgeänderten Gleichung leer ist, und führe den Nachweis.

Lösung: (a) Entweder $x = -1$ einsetzen oder die Gleichung nach x auflösen.
(b) z.B. $G = \mathbb{N}$ wählen oder $7 - x = 3x + 12$ usw.

4. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + 8 = 6$ ist für $G = \mathbb{Q}$ leer.

Lösung: Es ergibt sich $x^2 = -2$. Es gibt keine Zahl, die mit sich selbst multipliziert einen negativen Produktwert ergibt.

5. Es gilt $x \in \mathbb{Q}^+$.
   (a) Zeichne das Dreieck ABC für $x = 1$.
   (b) Berechne jeweils den Umfang des Dreiecks ABC für $x \in \{1,5;\ 1,\overline{6};\ 2\frac{1}{8}\}$.
   Was stellst du fest?
   Ist das immer so? Begründe deine Antwort.
   (c) Unter allen möglichen Dreiecken ABC gibt es zwei gleichschenklige. Berechne jeweils alle Seitenlängen.
   (d) Was ergibt sich für $x = 4$? Bestimme alle Belegungen von x, für die es überhaupt solch ein Dreieck ABC gibt.



Lösung:

Wir rechnen nur mit Maßzahlen.

(a) Die Dreiecksseiten sind 3 cm, 6 cm und 4 cm lang.

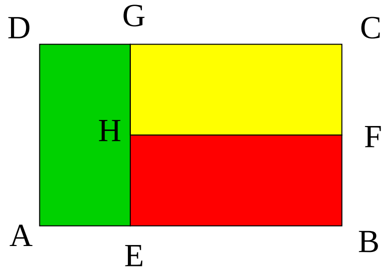
(b) Wegen $(8 - 2x) + (2 + x) + (3 + x) = 13$ ist der Umfang konstant 13 cm lang.

(c) 1. Fall:
$8 - 2x = 2 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$
$a = 5\,\text{cm}$, $b = 2\,\text{cm}$ und $c = 5\,\text{cm}$
2. Fall:
$8 - 2x = 3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\overline{6}\,\text{cm}$
$a = 3,\overline{6}\,\text{cm}$; $b = 4,\overline{6}\,\text{cm}$ und $c = 4,\overline{6}\,\text{cm}$.
3. Fall:
$2 + x = 3 + x$ ist nicht erfüllbar, weil stets $2 + x < 3 + x$ gilt.

(d) Für $x = 4$ wird $\overline{AC} = 0\,\text{cm}$; d.h. das Dreieck entartet zur Strecke.
Es muss $\overline{AC} > 0$ gelten; d.h. es muss $0 < x < 4$ (*)sein.
Gleichzeitig müssen alle Dreiecksungleichungen erfüllt sein:

1. Bedingung: $(8 - 2x) + (3 + x) > 2 + x \quad \Leftrightarrow \quad x < 4,5$; ist wegen (*) ohnehin erfüllt.
2. Bedingung: $(8 - 2x) + (2 + x) > 3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x < 3,5$ (**)
3. Bedingung: $(2 + x) + (3 + x) > 8 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad x > 0,75$
Mit (**) gibt es nur für $0,75 < x < 3,5$ solche Dreiecke.

6.



Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.
Die drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Ihre Seitenlängen stehen jeweils im Verhältnis 2:3. Weiter gilt: $\overline{HF} = 3x\,\text{cm}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

(b) Welchen Flächeninhalt besitzt eines der inneren Rechtecke, wenn der Saum der Fahne 1 m 8 cm lang ist?

Lösung:

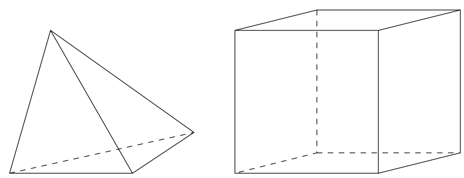
(a) –

(b) Es gilt: $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{HG} = 4x\,\text{cm}$ und $\overline{AB} = 5x\,\text{cm}$.
Dann folgt für den Umfang u: $u(x) = 18x\,\text{cm}$.
$18x = 108 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad \text{und} \quad 2x = 12 \quad \text{sowie} \quad 3x = 18.$
Damit folgt für den Flächeninhalt A eines dieser Rechtecke im Inneren: $A = 12\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} = 216\,\text{cm}^2$

7. Die eine Seite eines Rechtecks ist 2 cm länger als die andere. Der Rechteckumfang liegt zwischen 60 cm und 62 cm.
Welche Seitenlängen sind dann für die kürzere Seite möglich?

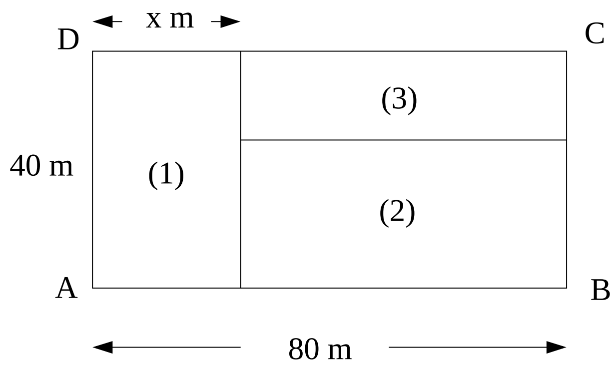
Lösung: Die kürzere Seite liegt zwischen 14 cm und 14,5 cm.

8. In einer Spielzeugkiste befinden sich Würfel und Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche. Es werden 30 Körper mit 300 Kanten gezählt. Wie viele Würfel und wie viele Pyramiden befinden sich in der Kiste?



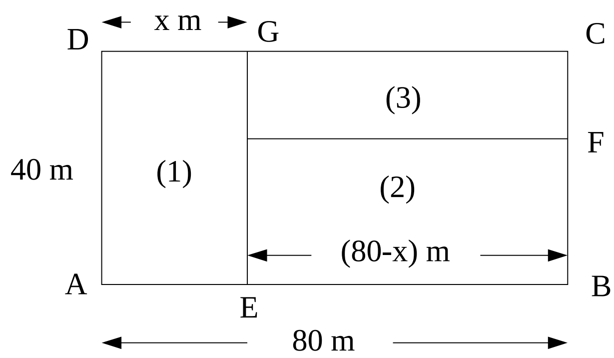
Lösung: Es sind 20 Würfel und 10 Pyramiden.

9.



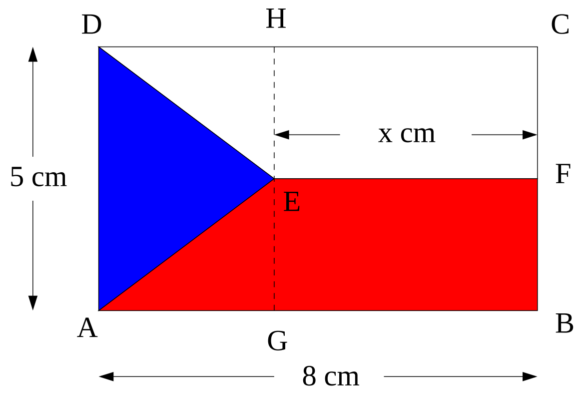
Ein rechteckiges Wiesengrundstück $ABCD$, das zur Gemeinde Besselbach gehört, soll in drei rechteckige Baugrundstücke (1), (2) und (3) aufgeteilt werden. Es gilt stets $x \in \mathbb{Q}^+$. Der dortige Bürgermeister Pickelschau beauftragte seinen Baureferenten Schaufelpick, zu prüfen, ob sich für einen bestimmten x-Wert gleich große Parzellen ergäben.

Lösung:



Es muss einerseits $\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{DG} = x\,\mathrm{m}$ gelten.
Wegen $\overline{BC} = 40\,\mathrm{m}$ folgt: $x = 20$. *)
Andererseits muss gleichzeitig $\overline{EB} = \overline{AD}$ gelten:
$\Rightarrow \quad 80 - x = x \qquad \Leftrightarrow \quad x = 40$ **)
Die Ergebnisse *) und **) stehen im Widerspruch. Also gibt es keine Belegung von x, die drei flächengleiche Rechtecke erzeugt.

10. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 5\,\text{cm}$ und $\overline{EF} = x\,\text{cm}$.
Zusätzlich wurde die Hilfslinie $[HG]$ gestrichelt eingezeichnet.
Hinweis: Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne die Figur für $x = 4,5$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABFE$ in Abhängigkeit von x.
Hinweis: Verwende für deine Überlegungen die Strecke $[HG]$.
[Ergebnis: $A_T(x) = (1,25x + 10)\,\text{cm}^2$]

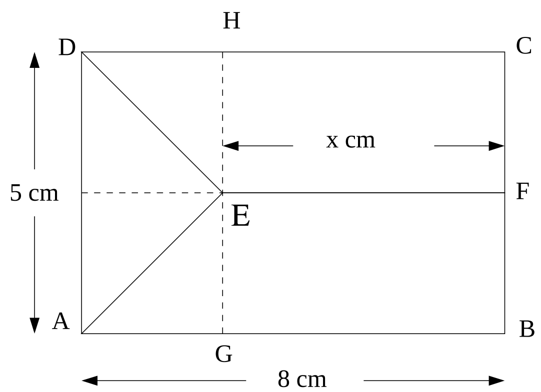
(c) Berechne x so, dass alle drei Teilflächen im Inneren des Rechtecks $ABCD$ gleich groß sind.

(d) Berechne den Flächeninhalt A_D des Dreiecks AED in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A_D(x) = (20 - 2,5x)\,\text{cm}^2$]

(e) Bestätige das Ergebnis der Aufgabe (c) mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgaben (b) und (d).

Lösung: (a) –

(b)



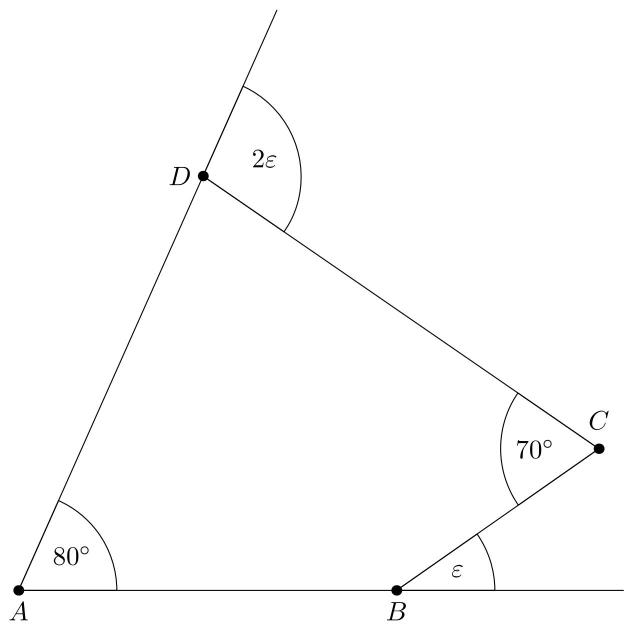
$A(ABFE) = [A(ABCD) - A(AED)] : 2 = [40\,\text{cm}^2 - 0,5 \cdot 5 \cdot (8 - x)\,\text{cm}^2] : 2$
$A_T = 20\,\text{cm}^2 - (10 - 1,25x)\,\text{cm}^2 = (1,25x + 10)\,\text{cm}^2$

(c) Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ muss dreimal so groß sein wie der Flächeninhalt des Trapezes $ABFE$:
$3 \cdot (1,25x + 10) = 40 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{3} \approx 2,67$

(d) $A(AED) = A(ABCD) - 2 \cdot A(ABFE) = 40\,\mathrm{cm}^2 - 2 \cdot (1,25x + 10)\,\mathrm{cm}^2$
$A_D(x) = (20 - 2,5x)\,\mathrm{cm}^2$

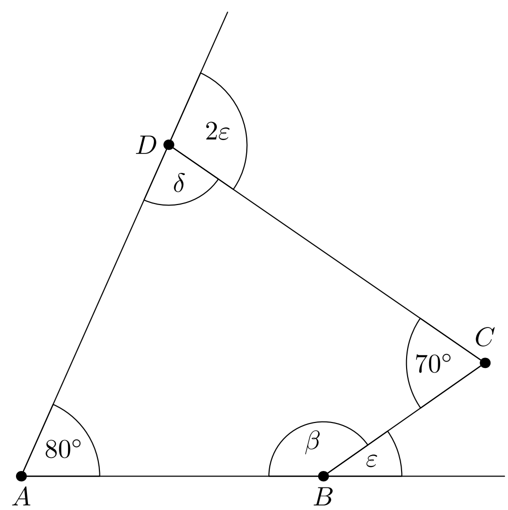
(e) Es muss gelten $A_T = A_D$: $\quad 1,25x + 10 = 20 - 2,5x \quad \Rightarrow \quad x \approx 2,67$

11.



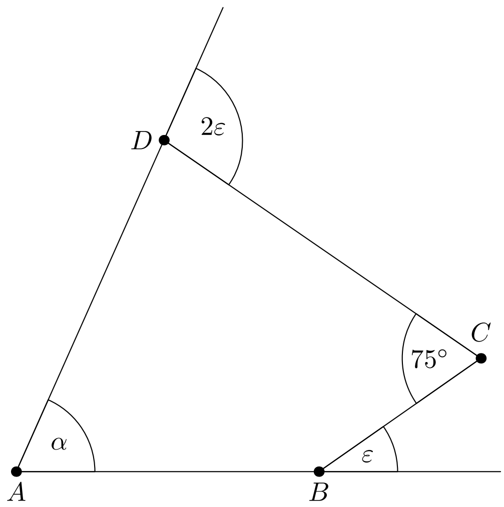
Berechne ε.

Lösung:



Im Viereck $ABCD$ gilt: $80° + \beta + 70° + \delta = 360°$. (*)
β ist der Nebenwinkel von ε: $\beta = 180° - \varepsilon$. (1)
δ ist der Nebenwinkel von 2ε: $\delta = 180° - 2\varepsilon$. (2)
Wir ersetzen in der Gleichung (*) β durch $180° - \varepsilon$ und δ durch $180° - 2\varepsilon$.
Dann ergibt sich: $80° + 180° - \varepsilon + 70° + 180° - 2\varepsilon = 360°$.
$\Leftrightarrow \quad -3\varepsilon = -150° \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 50°$.

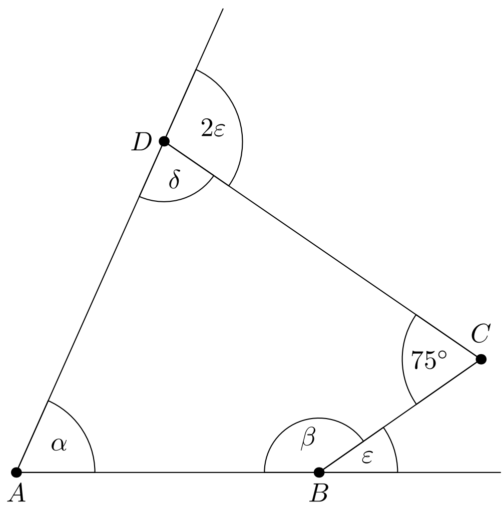
12.



(a) Berechne α für $\varepsilon = 48°$.

(b) Für welche Werte von ε existiert das Viereck $ABCD$?

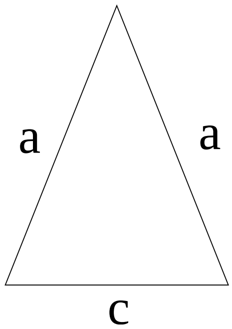
Lösung:



(a) Aus $\varepsilon = 48°$ folgt: $\beta = 180° - 48° = 132°$ und $\delta = 180° - 96° = 84°$.
In jedem Viereck beträgt die Innenwinkelsumme 360°:
$\alpha + 132° + 75° + 84° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 69°$.

(b) Im Viereck $ABCD$ gilt: $\alpha + \beta + 75° + \delta = 360°$. (*)
β ist der Nebenwinkel von ε: $\beta = 180° - \varepsilon$. (1)
δ ist der Nebenwinkel von 2ε: $\delta = 180° - 2\varepsilon$. (2)
Wir ersetzen in der Gleichung (*) β durch $180° - \varepsilon$ und δ durch $180° - 2\varepsilon$.
Dann ergibt sich: $\alpha + 180° - \varepsilon + 75° + 180° - 2\varepsilon = 360°$.
$\Leftrightarrow \quad \alpha - 3\varepsilon = -75° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 3\varepsilon - 75°$.
Damit das Viereck $ABCD$ existiert, muss $\alpha > 0$ gelten:
$\Leftrightarrow \quad 3\varepsilon - 75° > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon > 25°$.
Wenn du andererseits am Punkt D das Winkelmaß 2ε betrachtest, dann muss $2\varepsilon < 180°$ und damit $\varepsilon < 90°$ gelten.
Insgesamt muss also $25° < \varepsilon < 90°$ gelten.

13.



(a) Um welches besondere Dreieck handelt es sich? Begründe deine Antwort.

(b) Fritz soll für $a = 4,8\,\text{cm}$ und $c = 10\,\text{cm}$ ein solches Dreieck konstruieren. Nach einer Weile meint er: „Aber das geht doch gar nicht!"
Begründe, dass Fritz Recht hat.

(c) Zeichne zwei verschiedene gleichschenklige Dreiecke, die jeweils einen Umfang $u = 12\,\text{cm}$ besitzen.

Lösung: (a) Das Dreieck ist gleichschenklig, denn zwei Seiten haben die gleiche Länge a.

(b) In jedem Dreieck müssen zwei Seiten länger als die dritte Seite sein:
Es müsste z.B. $4,8\,\text{cm} + 4,8\,\text{cm} > 10\,\text{cm}$ werden. Diese Bedingung ist nicht erfüllt, also gibt es kein solches Dreieck; Fritz hat Recht.

(c) Zum Beispiel:

a	$4,5\,\text{cm}$	$3\,\text{cm}$
c	$3,7\,\text{cm}$	$3\,\text{cm}$
u	$2 \cdot 4,5\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$	$2 \cdot 3\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$

Es gibt beliebig viele Lösungen.

14. Für alle Ungleichungen gilt: $G = \mathbb{Q}$.

(a) Berechne die Lösungsmenge von $2x - 4 > 0$.

(b) Beründe ohne nach x aufzulösen: Die Ungleichung $6x - 12 > 0$ hat die gleiche Lösungsmenge wie die Ungleichung in der Aufgabe (a).

(c) Bestimme die Lösungsmenge von $1387 \cdot (2x - 4) > 0$.

(d) Bestimme die Lösungsmenge von $(x^2 + 1) \cdot (2x - 4) > 0$.

(e) Bestimme die Lösungsmenge von $(x - 11)^2 \cdot (2x - 4) > 0$.

Lösung: (a) $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}}$.

(b) Wenn du die Ungleichung in Aufgabe (a) auf beiden Seiten mit 3 multiplizerst, dann erhältst du die Ungleichung (b). Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

(c) Wenn du Ungleichung (a) auf beiden Seiten mit 1387 multiplizerst, dann erhältst du die Ungleichung (c). Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

(d) Weil $x^2 + 1$ stets positiv ist, muss $2x - 4$ auch positiv (also > 0) bleiben. An der Lösungsmenge ändert sich nichts.

(e) Weil $x^2 + 1$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ positiv ist, folgt aus den gleichen Gründen wie oben $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}}$.

(f) Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob die Lösungsmenge zu den vorigen unverändert bleibt. Doch du musst hier vorsichtiger sein: Der Faktor $(x - 11)^2$ ist nicht für alle Belegungen von x positiv, denn $x = 11$ ist eine Nullstelle dieses Terms; d.h. für $x = 11$ ergibt sich $(11 - 11)^2 \cdot (2 \cdot 11 - 4) = 0$ und nicht > 0 .Das bedeutet: $x = 11$ gehört nicht zur Lösungsmenge.
Damit gilt hier $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}} \setminus \{11\}$.

15. Im September 2011 orderte das Kaufhaus X&Y 200 T-Shirts. Davon wurden im gleichen Monat 76 Stück verkauft.
Einen Monat später verteuerte sich dieser Artikel um je einen EURO. In diesem Zeitraum wurden jedoch nur 72 Exemplare verkauft. Es stellte sich heraus, dass die Einnahmen aus dem Verkauf von diesen T-Shirts im Oktober die gleichen waren wie die im September 2011 .
Berechne den Verkaufpreis eines T-Shirts im September 2011 .

Lösung: Preis pro T-Shirt im September 2011: x EURO .
Preis pro T-Shirt im Oktober 2011: $(x + 1)$ EURO .
Wir rechnen im Folgenden nur mit Maßzahlen.
$76 \cdot x = 72 \cdot (x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 72 \quad \Leftrightarrow \quad x = 18\,.$
Im September 2011 kostete eines dieser T-Shirts 18 EURO.

16. Carsten rechnet eine Gleichung aus, die er aus dem Buch übertragen hat. Der Lehrer betrachtet seinen Hefteintrag: „Deine Schrift ist wie schon so oft zum Teil unleserlich, aber dein Ergebnis ist richtig.“
In seinem Heft steht (der unleserliche Teil ist durch ein Kästchen ersetzt):

$$\begin{array}{lcr} 2x - \square & = & -2 \\ 2x & = & 14 \\ x & = & 7 \end{array}$$

Ermittle auf zwei verschiedene Arten, was im Buch anstelle des Kästchens stand.

Lösung: **1. Möglichkeit:**
Um von der ersten zur zweiten Zeile zu kommen, hat Carsten offenbar auf beiden Seiten der Gleichung im Buch die Zahl 16 addiert. Dadurch fällt das Kästchen in der zweiten Zeile weg. Also stand die unleserliche Zahl 16 anstelle des Kästchens da.
2. Möglichkeit:
Der Lehrer hat $x = 7$ als richtige Lösung bestätigt. Setze diese Lösung in die erste Zeile ein:
$2 \cdot 7 - \square = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 14 - \square = -2 \mid -14 \quad \Leftrightarrow \quad -\square = -16 \mid \cdot (-1)$
$\Leftrightarrow \quad \square = 16\,.$

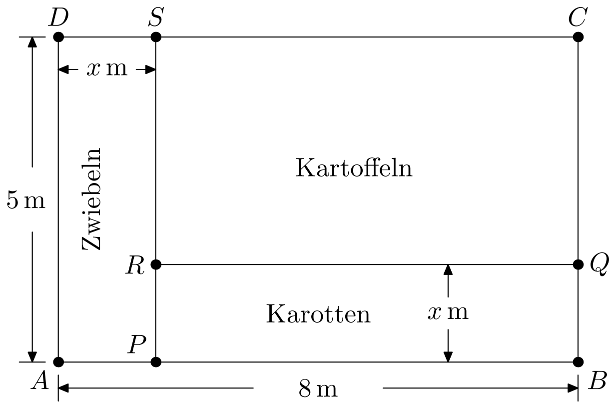
17. Carsten rechnet eine Gleichung aus, die er aus dem Buch übertragen hat. Der Lehrer betrachtet seinen Hefteintrag: „Deine Schrift ist wie schon so oft zum Teil unleserlich, aber dein Ergebnis ist richtig.“
In seinem Heft steht (der unleserliche Teil ist durch ein Kästchen ersetzt):

$$\begin{array}{lcr} 2x - \square & = & -2 \\ 2x & = & 14 \\ x & = & 7 \end{array}$$

Ermittle auf zwei verschiedene Arten, was im Buch anstelle des Kästchens stand.

Lösung: **1. Möglichkeit:**
Um von der ersten zur zweiten Zeile zu kommen, hat Carsten offenbar auf beiden Seiten der Gleichung im Buch die Zahl 16 addiert. Dadurch fällt das Kästchen in der zweiten Zeile weg. Also stand die unleserliche Zahl 16 anstelle des Kästchens da.
2. Möglichkeit:
Der Lehrer hat $x = 7$ als richtige Lösung bestätigt. Setze diese Lösung in die erste Zeile ein:
$2 \cdot 7 - \square = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 14 - \square = -2 \mid -14 \quad \Leftrightarrow \quad -\square = -16 \mid \cdot (-1)$
$\Leftrightarrow \quad \square = 16\,.$

18.



Das rechteckige Feld $ABCD$ ist $8\,\mathrm{m}$ lang und $5\,\mathrm{m}$ breit.
Auf den drei rechteckigen Parzellen werden Karotten, Zwiebeln und Kartoffeln angebaut. Die beiden Streifen für Karotten und Zwiebeln sind jeweils $x\,\mathrm{m}$ breit. Sie besitzen den gleichen Flächeninhalt. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

(a) Berechne x. [Ergebnis: x=3]

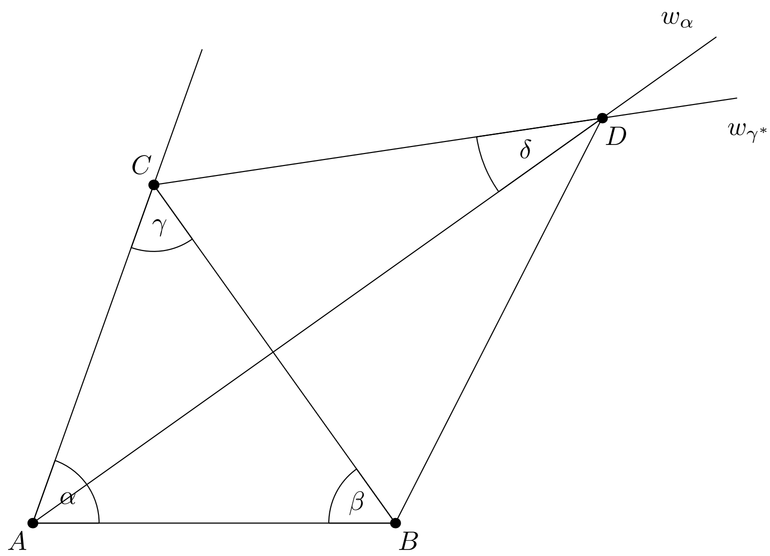
(b) Wie viel Prozent der Gesamtfläche nimmt dann das Kartoffelfeld ein?

Lösung: (a) Es gilt: $\overline{RQ} = (8-x)\,\mathrm{m}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.
Dann folgt: $x \cdot (8-x)\,\mathrm{m}^2 = 5 \cdot x\,\mathrm{m}^2 \;|:\; (x\,\mathrm{m}^2)$ mit $x > 0$
$\Leftrightarrow \quad 8 - x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3\,.$

(b) $A_{\text{Kartoffelfeld}} = \overline{RQ} \cdot \overline{RS} = 5\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{m}^2\,.$

$$\frac{A_{\text{Kartoffelfeld}}}{A_{ABCD}} = \frac{10\,\mathrm{m}^2}{40\,\mathrm{m}^2} = 0{,}25 = 25\%\,.$$

19.

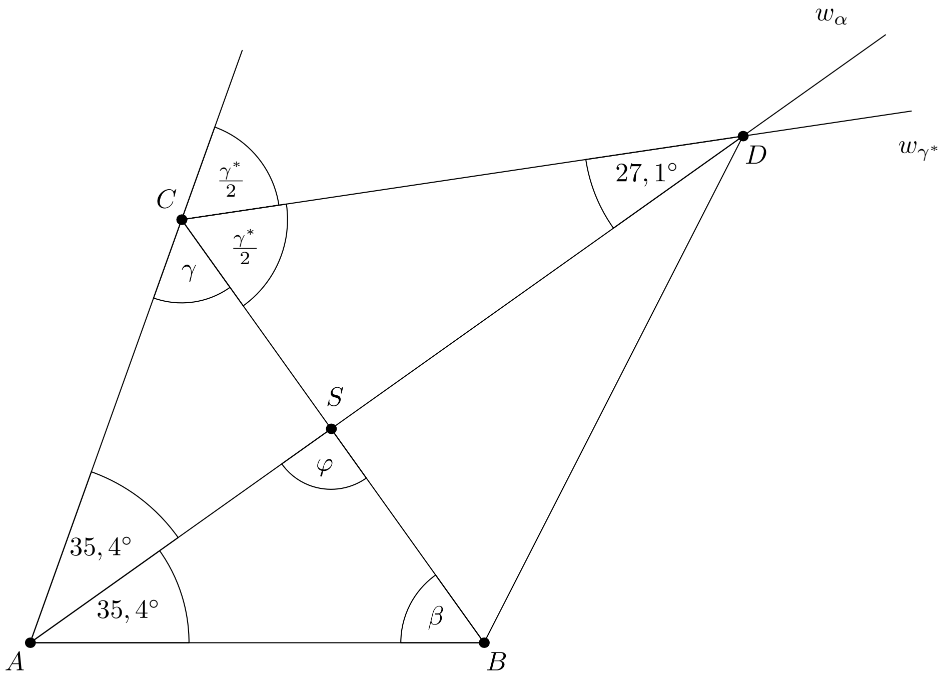


Die Halbgerade w_α halbiert den Winkel α und die Halbgerade w_{γ^*} halbiert den Nebenwinkel von γ. Weiter gilt: $\alpha = 70{,}8°$ und $\delta = 27{,}1°$.
Das Viereck $ABDC$ ist nicht achsensymmetrisch.

(a) Berechne die Winkelmaße γ und β. [Teilergebnis: $\beta = 54{,}2°$]

(b) Begründe, dass es sich bei dem Viereck $ABDC$ nicht um ein achsensymmetrisches Drachenviereck handelt.

Lösung: (a)



Im Dreieck ADC gilt: $35{,}4° + 27{,}1° + \dfrac{\gamma^*}{2} + \gamma = 180° \quad (1)$.
Weiter gilt: $\gamma^* = 180° - \gamma$.
In (1): $35{,}4° + 27{,}1° + (180° - \gamma) : 2 + \gamma = 180°$.
$\Leftrightarrow \quad 62{,}5° + 90° - 0{,}5\gamma + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 62{,}5° + 0{,}5\gamma = 90°$
$\Leftrightarrow \quad \gamma = 55°$.
Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck ABC ergibt sich:
$70{,}8° + 55° + \beta = 180° \Rightarrow \quad \beta = 54{,}2°$.

Eine andere Möglichkeit:

$\frac{\gamma^*}{2}$ ist ein Außenwinkel am Dreieck ADC. Jeder Außenwinkel an einem Dreieck ist genau so groß wie die Summe der Maße der beiden nicht anliegenden Innenwinkel. Das bedeutet hier:

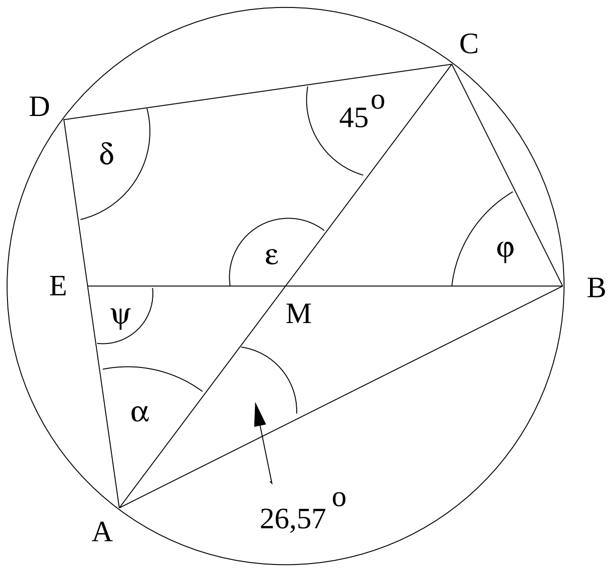
$$\frac{\gamma^*}{2} = 35{,}4° + 27{,}1° = 62{,}5° \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^* = 125°.$$

$\gamma = 180° - 125° = 55° \quad \ldots \quad \beta = 54{,}2°$.

(b) In jedem (achsensymmetrischen) Drachenviereck müssen die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck ABS gilt: $\varphi = 180° - 35,4° - 54,2° = 90,4° \neq 90°$.
Das Viereck $ABDC$ ist also kein (achsensymmetrisches) Drachenviereck.

8. Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche

1. Ermittle alle mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße.

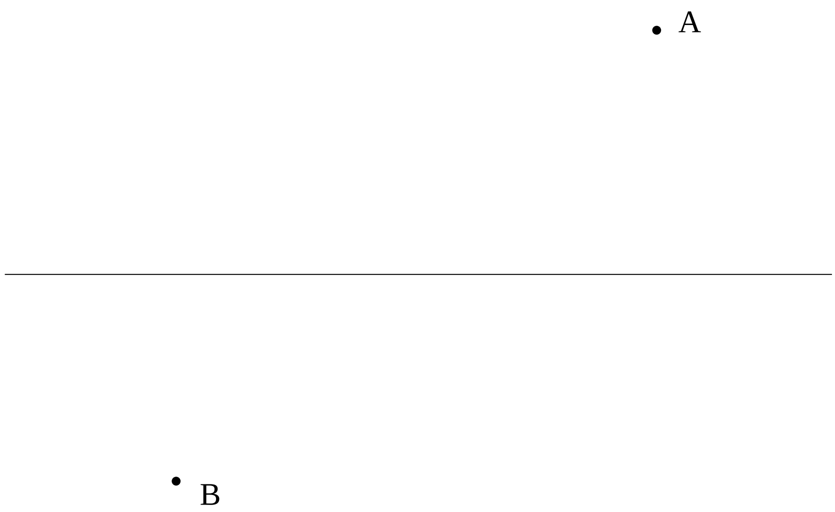


Lösung: $\delta = 90°$ $\alpha = 45°$ $\varepsilon = 126{,}86°$ $\varphi = 63{,}43°$ $\psi = 81{,}86°$

2. Gegeben ist ein Kreis k mit Radius $r = 5\,\text{cm}$ und dem Mittelpunkt $M(1 \mid 2)$.
Durch die Punkte $A(-5 \mid 4)$ und $B(7 \mid 3)$ verläuft eine Gerade g.
   (a) Fertige gemäß den Angaben eine Zeichnung an.
   Platzbedarf: $-7 \leqq x \leqq 8$ und $-4 \leqq y \leqq 8$
   (b) Kennzeichne farbig eindeutig die Menge aller Punkte auf der Kreislinie k, die von der Geraden g mindestens $2\,\text{cm}$ Abstand haben.
   (c) Fritz behauptet: „Auf der ganzen Kreislinie k gibt es keinen Punkt, der vom Punkt A weniger als $1\,\text{cm}$ entfernt ist.“ Hat Fritz Recht? Die Begründung für eine Antwort sollst du in deiner Zeichnung deutlich machen.

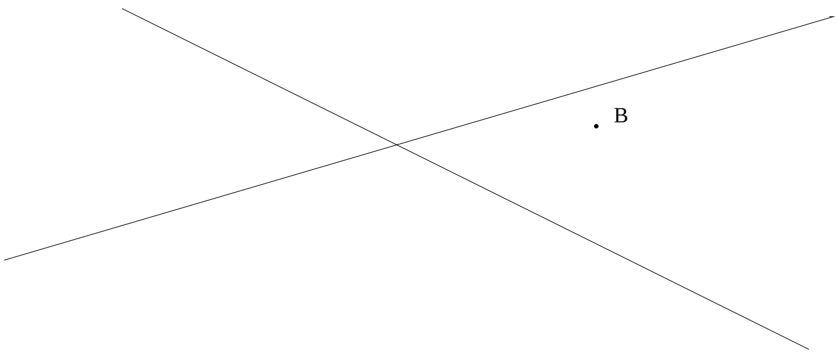
Lösung: (a) –
(b) –
(c) Fritz hat Recht, denn der Kreis um A mit Radius $1\,\text{cm}$ meidet die Kreislinie k.

3. Im Zuge des sechsspurigen Ausbaus der Autobahn A3 werden Lärmschutzmaßnahmen notwendig. Der Lärmschutzwall muss vom unten eingezeichneten Mittelstreifen der Autobahn einen Abstand von 50 m haben. Er wird aber nur in dem Bereich eingerichtet, wo die Entfernung zwischen Ortschaft und Lärmschutzwall weniger als 200 m beträgt. Markiere den möglichen Verlauf des Walls für die Ortschaften A und B! (Maßstab: 100 m $\widehat{=}$ 2 cm)



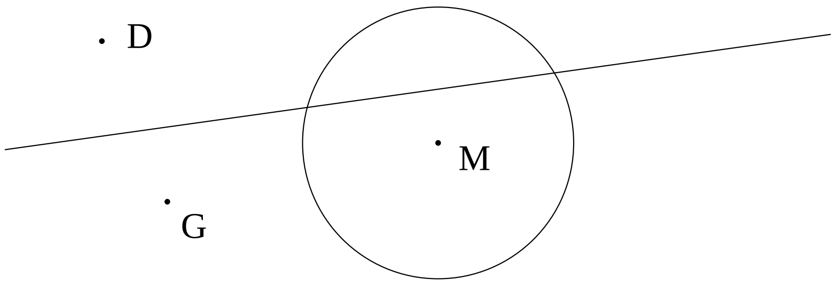
Lösung: - -

4. In der Nähe einer Landstraßenkreuzung wird ein Familienerholungsheim errrichtet. Es soll von beiden Straßen den gleichen Abstand haben und außerdem von einem Bauernhof B 40 m entfernt liegen. Kennzeichne den möglichen Standort S! (Maßstab: 20 m $\widehat{=}$ 1 cm)



Lösung: - -

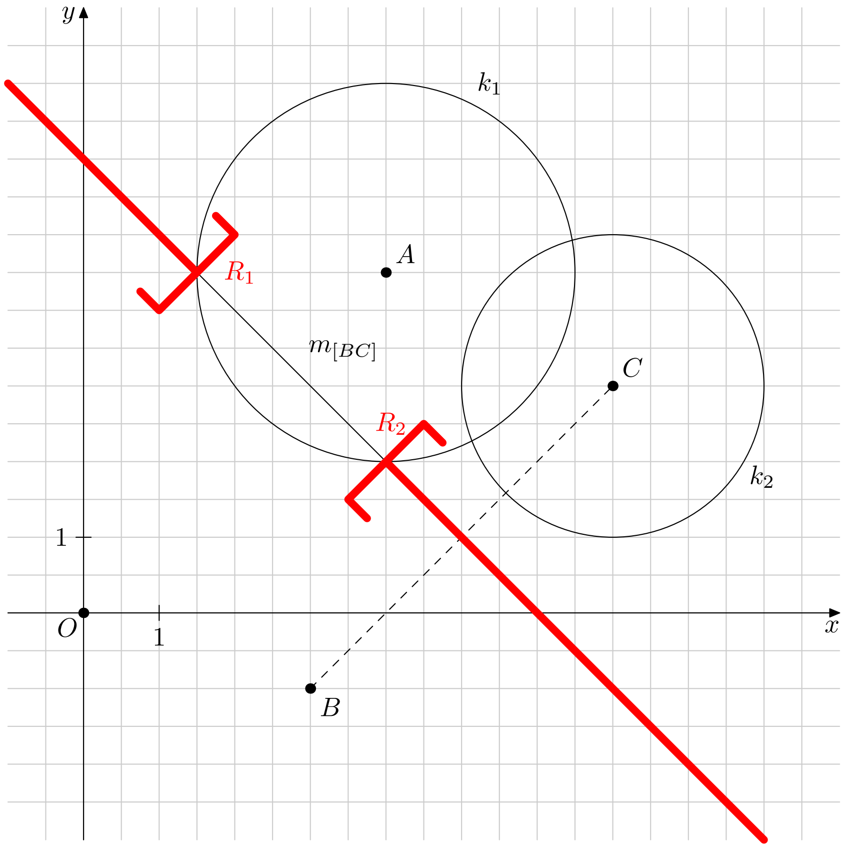
5. Formuliere zur abgebildeten Ortslinienverknüpfung eine mögliche praxisorientierte Aufgabenstellung!



Lösung: - -

6. Gegeben sind die Punkte $A(4 \mid 4,5), B(3 \mid -1)$ und $C(7 \mid 3)$.
   (a) Zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-1 \leqq x \leqq 10$ und $-3 \leqq y \leqq 8$
   (b) Kennzeichne farbig die Menge aller Punkte P, die jeweils von den Punkten B und C gleich weit entfernt sind und die gleichzeitig vom Punkt A mindestens $2,5\,\text{cm}$ entfernt sind.
   (c) Mache in deiner Zeichnung deutlich, ob es unter allen Punkten P, welche die in Aufgabe (b) genannten Eigenschaften besitzen, solche gibt, die vom Punkt C höchstens $2\,\text{cm}$ entfernt sind. Notiere eine Begründung.

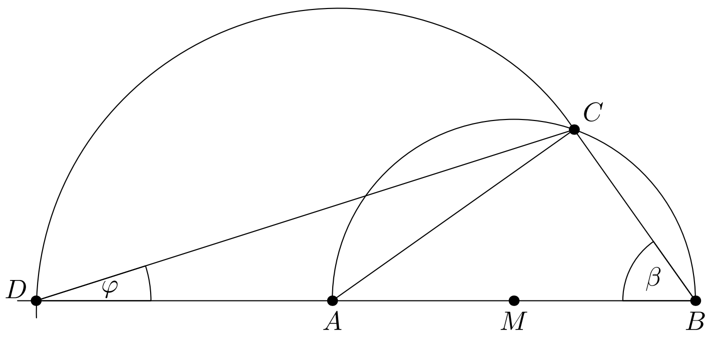
Lösung: (a)



Kommentar:
Alle Punkte P, die gleichweit von B und C entfernt sind, liegen auf der **Mittelsenkrechten** $m_{[BC]}$.
Gleichzeitig dürfen die Punkte P **nicht innerhalb des Kreises** k_1 um den Punkt A mit dem Radius $2,5\,\text{cm}$ liegen. Damit ergibt sich die farbig dargestellte Lösungsmenge. Die Randpunkte R_1 und R_2 der beiden Halbgeraden gehören zur Lösungsmenge dazu, weil beide sowohl auf der Mittelsenkrechten als auch nicht im Inneren von k_1 liegen.

(b) Alle Punkte, die vom Punkt C höchstens $2\,\text{cm}$ entfernt sind, dürfen sich **nicht außerhalb** der Kreislinie k_2 aufhalten. Weil aber die Kreislinie k_2 die Mittelsenkrechte $m_{[AB]}$ und damit auch die farbig gekennzeichnete Lösungsmenge meidet, gibt es die fraglichen Punkte nicht.

7.

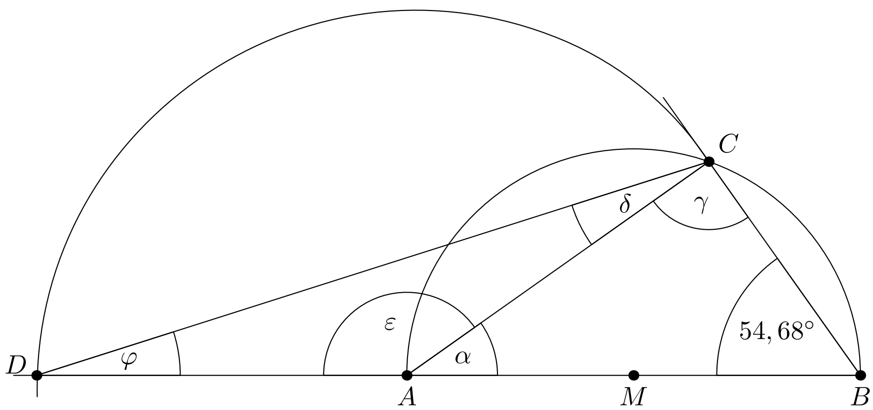


Die Punkte M und A sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\beta = 54,68°$.

(b) Berechne φ auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

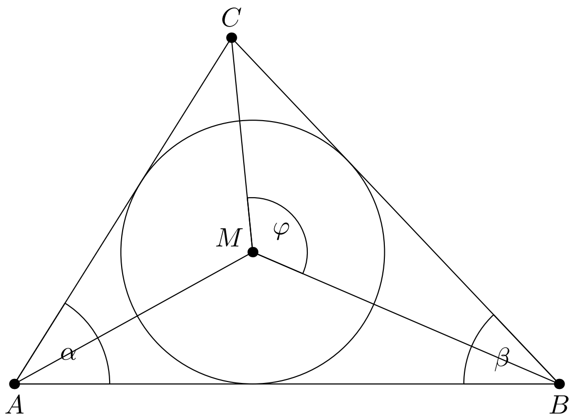
Lösung: (a)



- Zeichne den Halbkreis mit dem Durchmesser $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.
- Trage im Punkt B den Winkel mit dem Maß $54,68° \approx 55°$ an.
- Der freie Schenkel des $55°$-Winkels schneidet den Halbkreis im Punkt C.
- Zeichne den Kreisbogen mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{AC}$ vom Punkt C aus so weit, bis er die Halbgerade $[BA$ schneidet. Der Schnittpunkt ist der Punkt D.

(b) Der Kreisbogen über dem Durchmesser $[AB]$ ist der THALES-Kreis.
$\Rightarrow \quad \gamma = 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° - 54,68° = 35,32°$.
ε ist der Nebenwinkel von α: $\quad \varepsilon = 180° - 35,32° = 144,68°$.
Das Dreieck DAC ist gleichschenklig: $\overline{AD} = \overline{AC}$.
$\Rightarrow \quad \delta = \varphi = (180° - 144,68°) : 2 = 17,66°$.

8.



Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist der Punkt M.

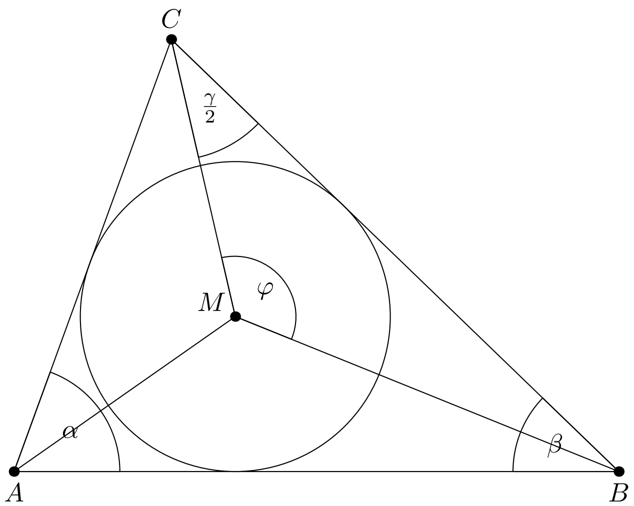
(a) Zeichne die Figur für $\alpha = 70°$, $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 44°$.

(b) Berechne das Maß φ des Winkels BMC.

(c)
- Berechne für $\beta = 60°$ erneut das Winkelmaß φ.
  Was fällt dir auf?
- Zeige: $\varphi = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$.

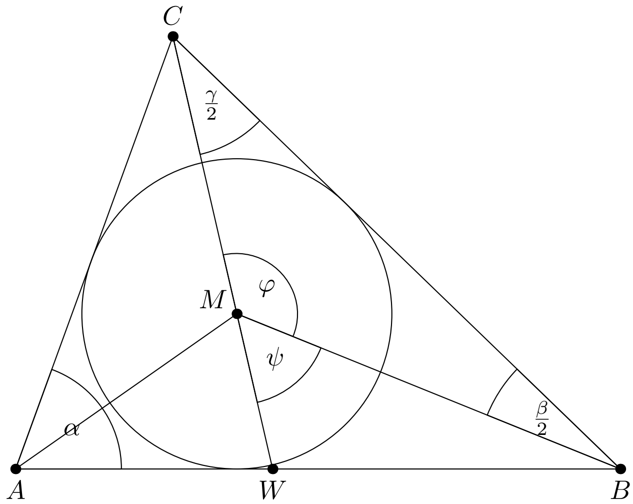
(d) Berechne α für $\varphi = 135,68°$.

Lösung: (a)



(b) $\gamma = 180° - 70° - 44° = 66°$.
Die drei Winkelhabierenden des Dreiecks ABC schneiden sich im Inkreismittelpunkt M.
Also folgt: $\varphi = 180° - 0,5 \cdot 44° - 0.5 \cdot 66° = 125°$.

(c)
- $\gamma = 180° - 70° - 60° = 50°$.
  $\varphi = 180° - 0,5 \cdot 60° - 0.5 \cdot 50° = 125°$.
  Das Winkelmaß φ hängt gar nicht vom Winkelmaß β ab.
-



Der Winkel mit dem Maß ψ ist ein Außenwinkel am Dreieck MBC: $\Rightarrow \quad \psi = \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2}$.

Gleichzeitig gilt $\varphi = 180° - \psi$.

Wegen $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ folgt $\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$.

Also ergibt sich: $\varphi = 180° - \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Und damit $\varphi = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$.

(d) $90° + \dfrac{\alpha}{2} = 135{,}68° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 91{,}36°$.

9. Dreiecke und Vierecke

1. Von einem Dreieck ABC weiß man:

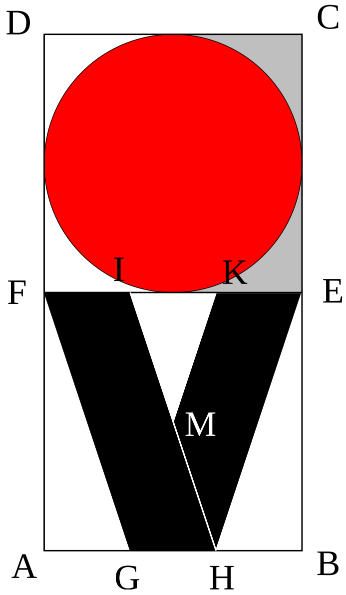
   (a) $a = 5\,\text{cm}$, $\alpha = 65^\circ$ und $\gamma = 50^\circ$

   (b) $a = b$ und $\beta = 60^\circ$

   Fertige jeweils für den Fall (a) und für den Fall (b) eine Planfigur an. Begründe damit die besonderen Eigenschaften dieser Dreiecke.

Lösung: (a) Es ist ein gleichschenkliges Dreieck.
(b) Es ist ein gleichseitiges Dreieck.

2. Das ist ein Bild des Logos der Firma MARABU, die Farben herstellt.



   Diese Figur ist aus zwei Quadraten aufgebaut und es gilt:
   $\overline{AG} = \overline{GH} = \overline{GH} = \overline{HB} = \overline{FI} = \overline{IK} = \overline{KE} = x\,\text{cm}$.

   (a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

   (b) Berechne den Flächeninhalt A des Rechtecks $ABCD$ in Abhängigkeit von x.
   [Ergebnis: $A(x) = 18x^2\,\text{cm}^2$]

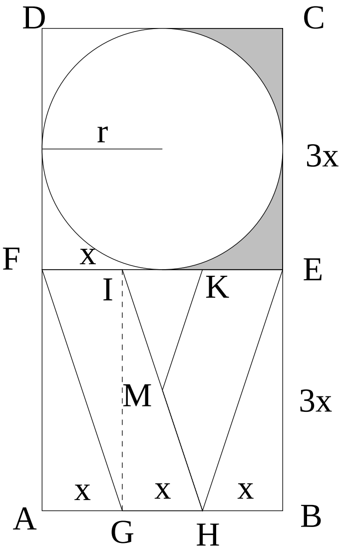
   (c) Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ $1{,}125\,\text{dm}^2$ groß ist.

(d) Vergleiche den Flächeninhalt des Dreiecks HBE mit dem des Parallelogramms $GHIF$.

(e) Untersuche rechnerisch, ob die dunkel getönte Restfläche zwischen dem Kreis und dem Quadrat $FECD$ größer oder kleiner ist als die des Dreiecks HBE.

Lösung: (a) –

(b)



Es gilt: $\overline{AB} = 3x\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6x\,\text{cm}$. $\Rightarrow \quad A(x) = 18x^2\,\text{cm}^2$

(c) $18x^2\,\text{cm}^2 = 112{,}5\,\text{cm}^2$ für $x \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow \; x = 2{,}5$

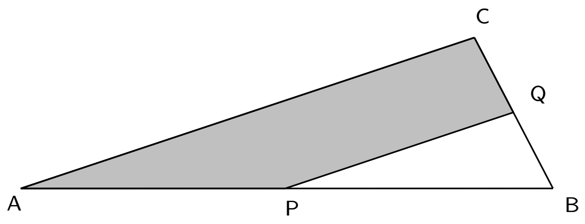
(d) Durch die Strecke $[IG]$ wird das Parallelogramm $GHIF$ in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt, die jeweils zu dem rechtwinkligen Dreieck HBE kongruent sind.
$\Rightarrow \quad A(GHIF) = 2 \cdot A(HBE)$

(e) Für den Kreisradius gilt: $r = 1{,}5x$
$A(\text{dunkel}) = [(3x)^2 - (1{,}5x)^2 \cdot \pi] : 2\,\text{cm}^2 = 0{,}5 \cdot (9 - 2{,}25\pi)x^2\,\text{cm}^2$
Die Dreiecke HBE und AGF sind kongruent:
$A(HBE) = 0{,}5 \cdot x \cdot 3x\,\text{cm}^2 = 1{,}5x^2\,\text{cm}^2$

$$\frac{A(\text{dunkel})}{A(HBE)} = \frac{0{,}5 \cdot (9 - 2{,}25\pi)x^2\,\text{cm}^2}{1{,}5x^2\,\text{cm}^2} \approx \frac{1{,}93}{3} < 1$$

Die dunkel getönte Fläche ist also kleiner als die Fläche des Dreiecks HBE.

3.



Das Dreieck ABC hat einen Flächeninhalt von $10\,\text{cm}^2$. Zusätzlich gilt: $\overline{AP} = \overline{BP}$ und $\overline{BQ} = \overline{CQ}$.
Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $APQC$.
Hinweis: Zeichne geeignete Hilfslinien ein.

Lösung: Der Flächeninhalt des Vierecks $APQC$ beträgt $7{,}5\,\text{cm}^2$.

4. Es gibt zwei Möglichkeiten, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Basis $5\,\text{cm}$ lang ist und das Maß irgendeines Innenwinkels $70°$ beträgt.
   Konstruiere diese beiden Dreiecke.

Lösung: 1. Fall: Beide Basiswinkel haben das Maß $70°$. Dann hat der dritte Winkel das Maß $40°$.
2. Fall: Der Winkel an der Spitze hat das Maß $70°$. Dann hat jeder Basiswinkel das Maß $55°$.

5. Es gibt zwei Möglichkeiten, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, in dem ein Innenwinkel $120°$ beträgt und eine Seite $6\,\text{cm}$ lang ist.
   Konstruiere diese beiden Dreiecke.

Lösung: - -

6. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 35°$ und $\gamma = 95°$.
   (b) Ändere die Angaben für das Dreieck ABC an einer Stelle so ab, dass mit der abgeänderten Angabe die Konstruktion eines Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Wahl.

Lösung: (b) z.B. $a = 7\,\text{cm}$ statt $\alpha = 35°$

7. (a) Von einem Dreieck ABC weiß man: $a = 11{,}3\,\text{cm}$ und $\gamma = 60°$. Außerdem besitzt das Dreieck ABC eine Symmetrieachse.
   Konstruiere das Dreieck. Was fällt dir auf?

(b) Von einem weiteren Dreieck ABC weiß man: $\alpha = 47°$, $a = 4{,}5\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = \overline{AB}$. Berechne die restlichen Innenwinkel dieses Dreiecks.

Lösung: (a) Das Dreieck ist gleichseitig.
(b) Das Dreieck ist gleichschenklig: $\beta = \gamma = 66{,}5°$

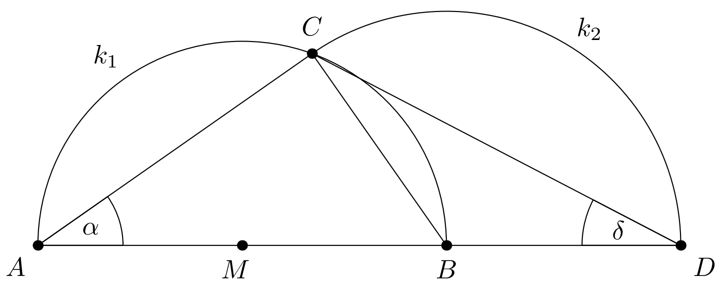
8. Konstruiere ein Dreieck ABC mit $a = 6\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ und $c = 7\,\text{cm}$ auf zweifache Weise:
   (a) Lege die Strecke $[BC]$ waagrecht.
   (b) Lege die Seite $[AC]$ waagrecht.
   (c) Ändere die Angaben für das Dreieck so ab, dass mit der abgeänderten Angabe die Konstruktion eines Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Abänderung ohne neue Konstruktion.

Lösung: (c) z.B. $c = 10{,}5\,\text{cm}$ oder $\alpha = 90{,}01°$

9. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 92°$ und $a = 8\,\text{cm}$.
   (b) Ändere eine der Angaben für das Dreieck ABC so ab, dass dann die Konstruktion des Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Abänderung.

Lösung: (b) z.B. statt $a = 8\,\text{cm}$: $\beta = 90°$
oder $c = 9\,\text{cm}$ statt $c = 6\,\text{cm}$.

10.



In der obigen Figur sind die Punkte M und B Mittelpunkte der Kreisbögen k_1 und k_2.

(a)
- Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\alpha = 35°$.
- Wie groß ist δ?

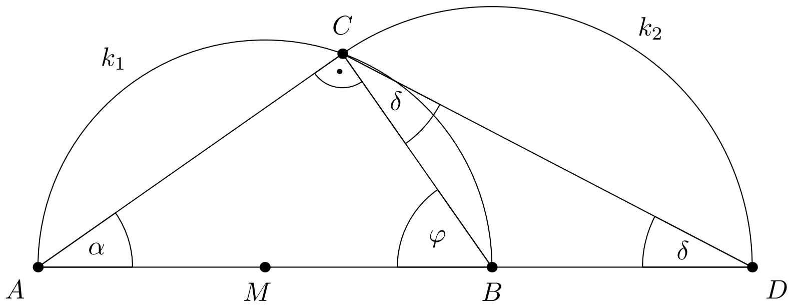
(b) Wie groß ist α für $\delta = 40°$?

(c) Begründe: Für $\delta = 59°$ gäbe es das Dreieck ABC nicht.

(d) Für welche Werte von δ gäbe es überhaupt noch das Dreieck ABC? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a)

- Zeichne den Halbkreis k_1 über der Strecke $[AB]$, die 6 cm lang ist.
  Trage im Punkt A den Winkel $\alpha = 35°$ an.
  Der freie Schenkel von α schneidet k_1 im Punkt C.
  Der Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ schneidet die Halbgerade $[AB$ im Punkt D. Der Rest ist Formsache.



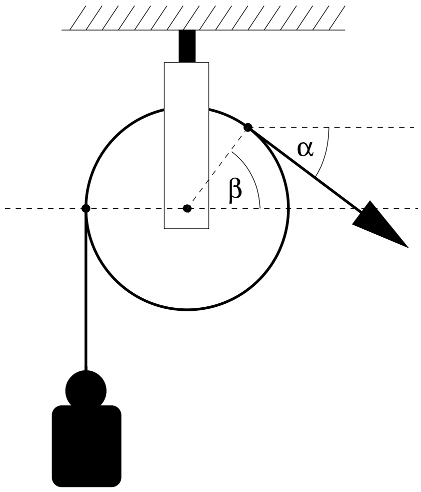
- Der Punkt C liegt auf dem THALES-Kreis über $[AB]$.
  $\Rightarrow \quad \sphericalangle ACB = 90° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 90° - 35° = 55°$.
  Weiter gilt: $\overline{BD} = \overline{BC} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle BCD = \delta$
  φ ist Außenwinkel am Dreieck $BDC \quad \Rightarrow \quad 55° = 2 \cdot \delta \quad \Rightarrow \quad \delta = 27{,}5°$

(b) Nun kannst du rückwärts schließen:
Wenn $\delta = 40°$ ist, dann muss $\varphi = 2 \cdot 40° = 80°$ sein.
$\Rightarrow \quad \alpha = 90° - 80° = 10°$

(c) Wäre $\delta = 59°$, dann wäre nach dem Satz vom Außenwinkel
$\varphi = 59° + 59° = 118°$. Weil das Dreieck ABC aber rechtwinklig ist, wäre in ihm die Innenwinkelsumme von 180° überschritten.

(d) Der Winkel mit dem Maß φ muss stets ein spitzer Winkel bleiben, denn sonst bliebe das Dreieck ABC nicht rechtwinklig.
Also: $\varphi = 2 \cdot \delta < 90° \quad \Rightarrow \quad \delta < 45°$
Wenn $\delta = 0°$ wäre, dann würde $\varphi = 0°$ folgen. Dann läge der Punkt C auf dem Punkt A, und das Dreieck ABC wäre zusammen mit der ganzen Figur zur Strecke entartet.
Also gibt es das Dreieck ABC nur für $0° < \delta < 45°$.
Anmerkung: Es gibt dazu eine mit GEONExT erstellte dynamische Konstruktion: 08eh100.gxt

11.



Ein Seil, das am linken Ende mit einem Gewicht belastet ist, wird über eine feste Rolle geführt. Am rechten Seilstück, das mit der Waagrechten den Winkel α einschließt, wird das Gleichgewicht gehalten.

(a) Begründe: $\beta = 90° - \alpha$.

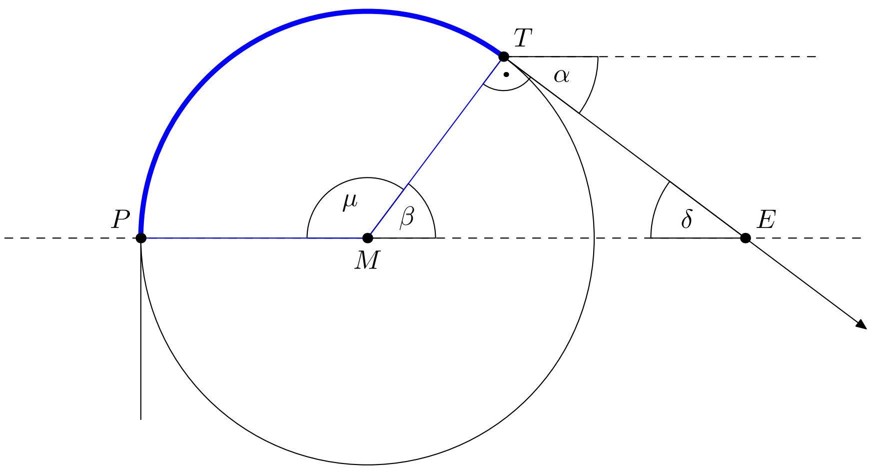
(b) Zeichne die Rolle mit dem Seil für den Radius $r = 3\,\text{cm}$ und $\alpha = 37°$.

(c) Berechne den Bruchteil des Umfangs der festen Rolle, der für $\alpha = 30°$ vom Seil berührt wird.

(d) Wie groß müsste man den Winkel α wählen, damit die Länge des Seilstückes, das die Rolle berührt, 40% des Rollenumfangs beträgt?

Lösung: (a) Siehe Zeichnung zu (b):
Die Halbgerade $[TE$ liegt auf der Kreistangente mit dem Berührpunkt T. Der Berührradius $[MT]$ steht auf dieser Tangente senkrecht. Weiter gilt: $\delta = \alpha$ (Z-Winkel).
$\Rightarrow \quad \beta = 90° - \delta = 90° - \alpha$.

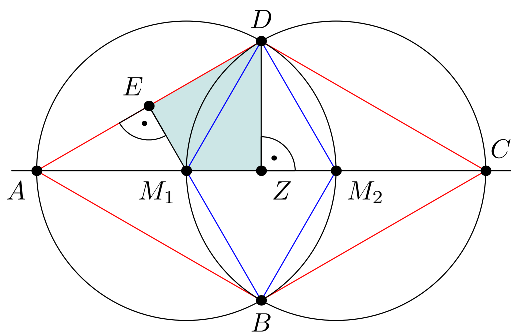
(b) Wenn also $\alpha = 37°$ ist, dann folgt $\beta = 90° - 37° = 53°$.
Damit kannst du den Berührradius mit dem Punkt T und seine Kreistangente konstruieren. Das linke Seilende führt senrecht nach unten.



(c) Aus $\alpha = 30°$ folgt $\beta = 60° \quad \Rightarrow \quad \mu = 180° - 60° = 120°$.
Der Mittelpunktswinkel μ nimmt also ein Drittel des Vollwinkels (360°) ein. Damit bedeckt das Seil ein Drittel des Rollenumfangs.

(d) Berechne α aus dem Mittelpunktswinkel μ:
$\mu = 40\%$ von $360° = 0,4 \cdot 360° = 144°$.
$\beta = 180° - 144° = 36° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° - 36° = 54°$.

12.



Die Punkte M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der beiden Kreise.

(a) Zeichne die Figur mit dem Kreisradius 3 cm.

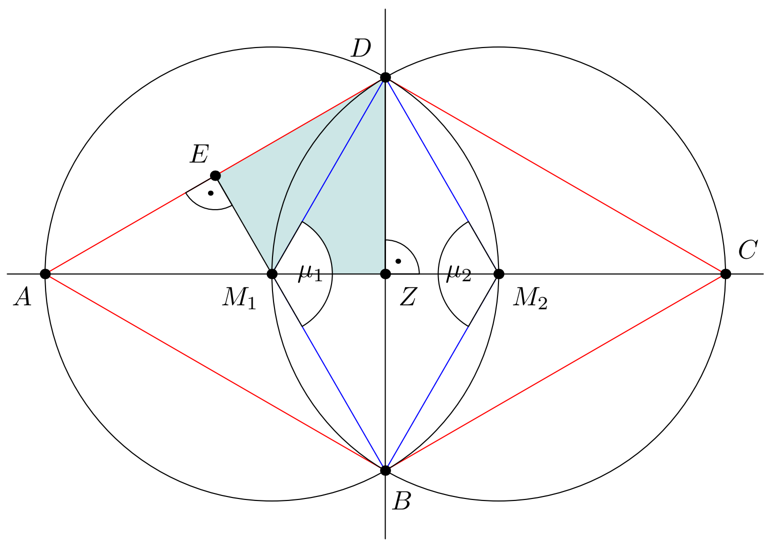
(b) Begründe: Im Viereck BM_2DM_1 gibt es zwei Innenwinkel mit dem Maß 120°.

(c) Wie groß ist der Umfang des Vierecks BM_2DM_1? Um welches besondere Viereck handelt es sich also?

(d) Begründe: Die beiden Dreiecke M_1ZD und EM_1D sind kongruent.

(e) Vergleiche den Flächeninhalt des Vierecks BM_2DM_1 mit dem des Vierecks $ABCD$.

Lösung: (a)

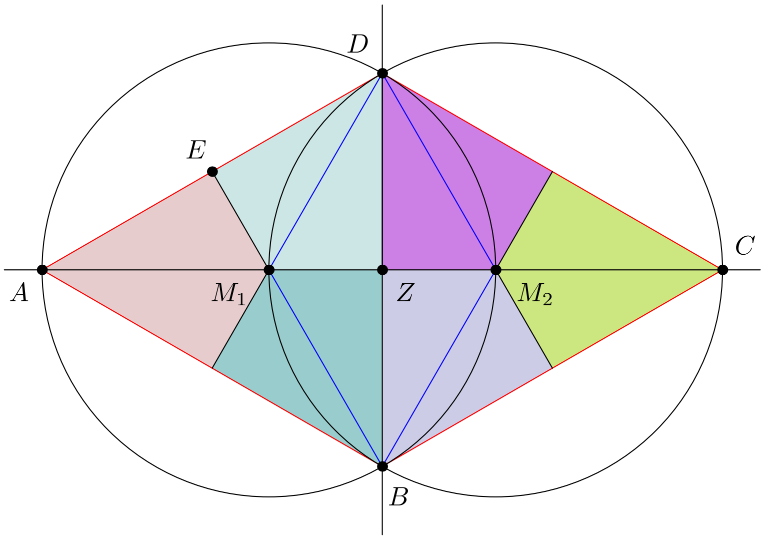


(b) Die Dreiecke M_1M_2D und M_1BM_2 sind gleichseitig; ihre Seitenlänge beträgt jeweils 3 cm (Kreisradius).
$\Rightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

(c) Der Umfang des Vierecks BM_2DM_1 ist $4 \cdot 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$ lang. Es handelt sich um ein gleichseitiges Viereck, also um eine Raute.

(d) Das Dreieck AM_1D ist gleichschenklig: $\overline{M_1A} = \overline{M_1D} = 3\,\text{cm}$.
$\sphericalangle DM_1A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle M_1AD = \sphericalangle ADM_1 = 30^\circ$
$\sphericalangle EDM_1 = \sphericalangle M_1DZ = 30^\circ$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle M_1ED = \sphericalangle DZM_1 = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle DM_1E = \sphericalangle ZM_1D = 60^\circ$
Die beiden Dreiecke M_1ZD und EM_1D stimmen damit in allen drei Innenwinkelmaßen überein und sie haben die Seite $[M_1D]$ gemeinsam. Also sind diese beiden Dreiecke kongruent.

(e)

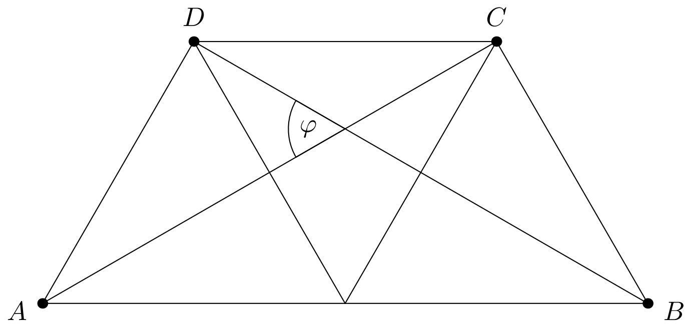


Die Raute $ABCD$ lässt sich mit sechs kongruenten Drachenvierecken parkettieren. Die Raute BM_2DM_1 ist nach (d) so groß wie zwei dieser Drachenvierecke.
Also ist die Raute $ABCD$ dreimal so groß wie die Raute BM_2DM_1.

Anregung: Setze diese Parkettierung auf deinem Zeichenblatt fort. Du kannst dabei viele andere Flächen und deren Zusammenhänge entdecken.

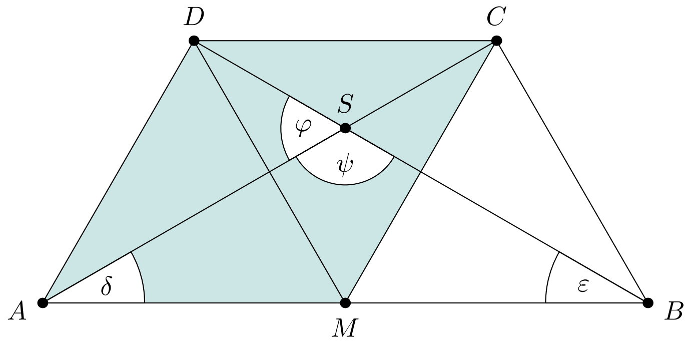
Anmerkung: Viele (z.T. weltberühmte) Werke des holländischen Graphikers **M.C. Escher** (1898 - 1972) sind Parkettierungen von ebenen Flächen oder Flächen im Raum.
Literaturhinweis: „*Die Welten des M.C. Escher*“, Manfred Pawlak Verlagsgesellschaft MbH, Herrsching

13.



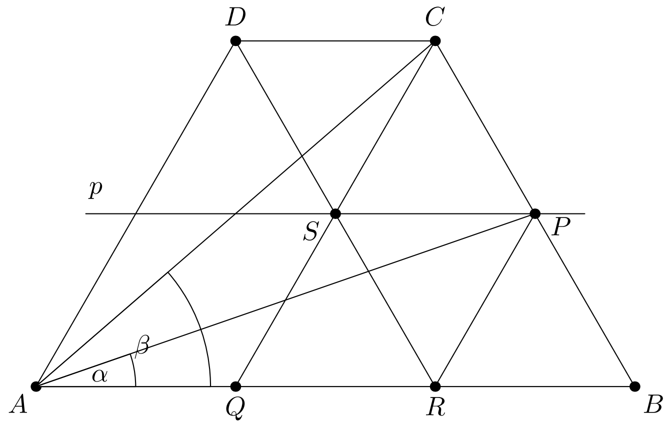
Das Trapez $ABCD$ ist aus drei kongruenten gleichseitigen Dreiecken zusammengefügt.
Berechne das Maß φ des Schnittwinkels der beiden Diagonalen.

Lösung:



Das Viereck $AMCD$ ist eine Raute, deren Diagonalen die Innenwinkel halbieren.
Z.B.: Das Dreieck ABS ist gleichschenklig. $\quad \Rightarrow \quad \delta = \varepsilon = 30°$
$\Rightarrow \quad \psi = 180° - 2 \cdot 30° = 120° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 180° - 120° = 60°$.

14.



Im Trapez $ABCD$ liegen die beiden gleichseitigen Dreiecke ARD und QBC, wobei $\overline{AQ} = \overline{QR} = \overline{RB}$ gilt. Weiter gilt: $\sphericalangle BAP = \alpha$ und $\sphericalangle BAC = \beta$. Die Gerade p verläuft parallel zur Strecke $[AB]$ durch den Punkt S.

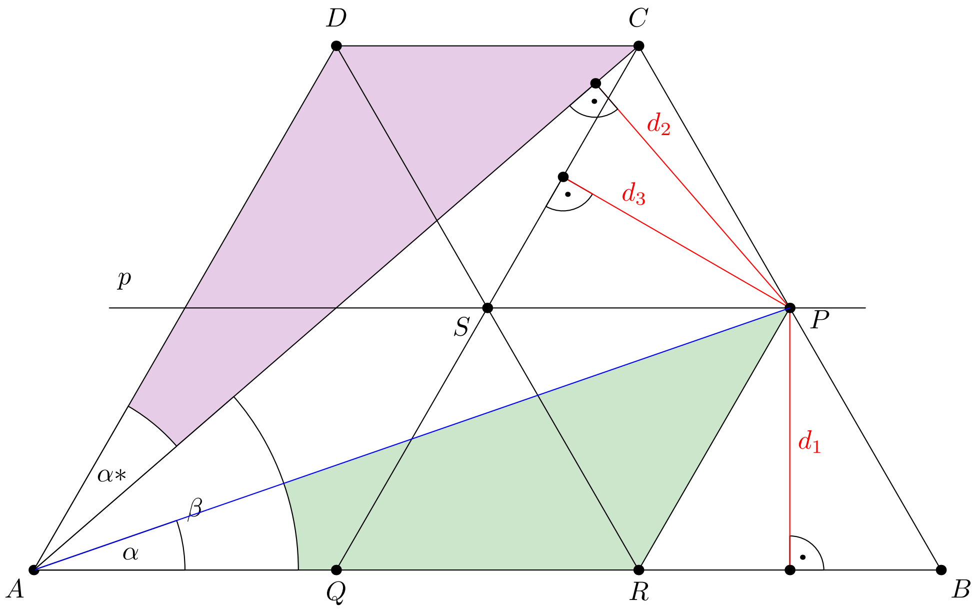
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AQ} = 4\,\text{cm}$.

(b) Zeige: Die Strecke $[AP]$ halbiert den Winkel BAC nicht.

(c) Zeige: Die Dreiecke ARP und ACD sind kongruent.

(d) Begründe: $\alpha + \beta = 60°$.

Lösung: (a)

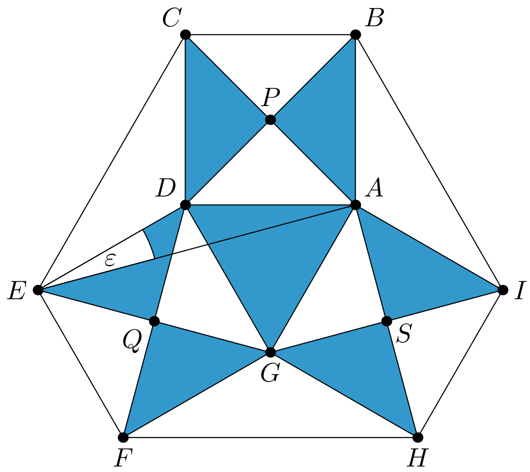


(b) Wenn der Punkt P auf der Winkelhalbierenden läge, dann müssten die Abstände d_1 und d_2 zu den Schenkeln $[AB]$ bzw. $[AC]$ gleich lang sein.
Nun sind aber die Höhen d_1 und d_3 in den gleichseitigen Dreiecken RBP und SPC gleich lang, weil diese Dreiecke kongruent sind. Offensichtlich gilt nun: $d_2 > d_3 = d_1$.
Also liegt der Punkt P nicht auf der Halbierenden des Winkels BAC.

(c) Es gilt:
$\overline{AR} = \overline{AD} \quad \wedge \quad \overline{RP} = \overline{DC} \quad \wedge \quad \sphericalangle PRA = \sphericalangle ADC = 120°$
$\Rightarrow \quad \Delta ARP \cong \Delta ABP$ (sws)-Kongruenz.

(d) Weil $\Delta ARP \cong \Delta ABP$ gilt, folgt $\alpha = \alpha*$.
$\Rightarrow \quad \beta + \alpha = \beta + \alpha* = 60°$

15.



Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt. Der Winkel mit dem Maß ε wurde zusätzlich eingezeichnet.

(a) Beschreibe den geometrischen Aufbau des Logos. Verwende die Buchstaben dazu.

(b) In der Figur kannst du achsensymmetrische Drachen und Trapeze entdecken. Zähle sie jeweils mit Hilfe ihrer Eckpunkte auf.

(c) Berechne die Maße sämtlicher Innenwinkel des Sechsecks $BCEFHI$.

(d) Berechne das Winkelmaß ε.

(e) In der Figur ist ein gleichseitiges Dreieck mit dem Eckpunkt S verborgen. Zeichne es farbig ein.

Lösung: (a)
- Die Figur stellt ein Sechseck dar, das zwar achsensymmetrisch, aber nicht regelmäßig ist.
- Im Zentrum der Figur steht das gleichseitige Dreieck ADG.
- Über den Seiten dieses Dreiecks sind die drei kongruenten Quadrate $ABCD$, $DEFG$ und $GHIA$ errichtet.
- Jedes Quadrat wird durch die beiden Diagonalen in vier kongruente gleichschenkligrechtwinklige Dreiecke zerlegt, wobei jeweils zwei gegenüber liegende eingefärbt sind.
- Die beiden benachbarten äußeren Eckpunkte von je zwei Quadraten sind durch Strecken miteinander verbunden.

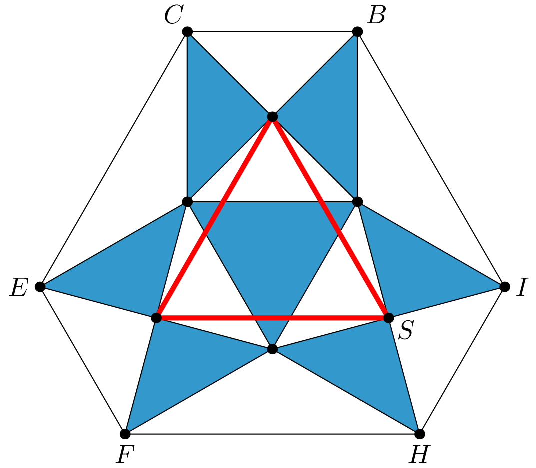
(b) Es gibt **drei** solche Trapeze: $FHAD$, $IBDG$ und $CEGA$.
Es gibt **drei** solche Drachenvierecke: $GAPD$, $ADQG$ und $DGSA$.

(c) Das Dreieck DCE ist gleichschenklig, denn die beiden Quadratseiten $\overline{DC}$ und $\overline{DE}$ sind gleich lang.
$\sphericalangle EDC = \sphericalangle EDG + \sphericalangle GDA + \sphericalangle ADC = 90° + 60° + 90° = 240°$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle CDE = 360° - 240° = 120°$
$\Rightarrow \quad \sphericalangle ECD = (180° - 120°) : 2 = 30° \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle ECB = 30° + 90° = 120°$

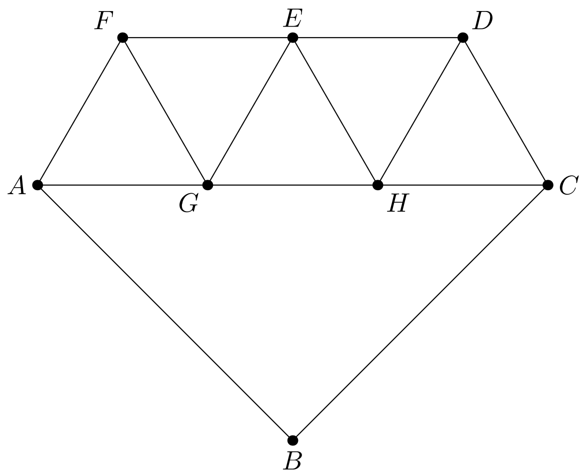
Die Figur ist achsen- und drehsymmetrisch mit den Drehwinkeln 120° und 240°. Also haben alle Innenwinkel dieses Logos das Maß 120°.

(d) Wie in der Lösung (c) schon gezeigt, gilt: $\sphericalangle EDA = 90° + 60° = 150°$ und $\overline{ED} = \overline{DA} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = (180° - 150°) : 2 = 15°$.

(e)



16.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Viereck $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

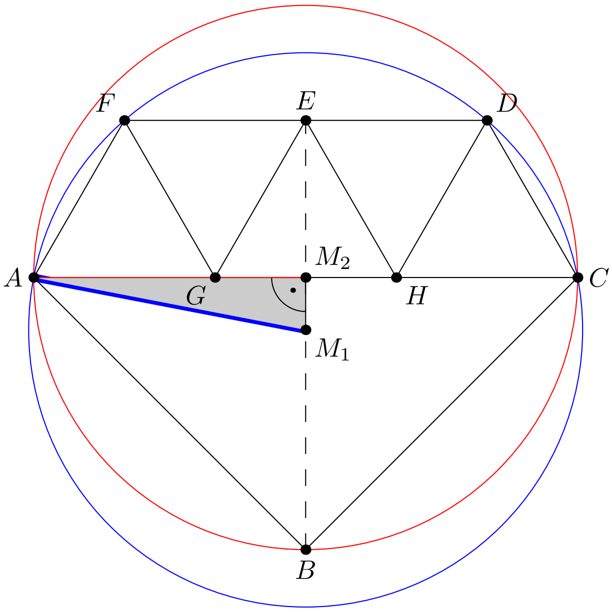
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 9\,\text{cm}$.

(b)
- Begründe: Das Viereck $ACDF$ besitzt einen Umkreis.
- Zeichne den Umkreis k_1 des Vierecks $ACDF$ mit seinem Mittelpunkt M_1 ein.

(c) Zeichne den Umkreis k_2 des Dreiecks ABC mit seinem Mittelpunkt M_2 ein.

(d) Untersuche anhand des Dreiecks AM_1M_2, welcher der beiden Kreise den größeren Durchmesser besitzt.

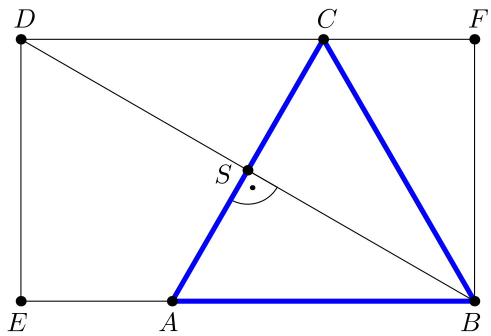
Lösung: (a) Die Figur ist etwas verkleinert gezeichnet.



(b)
- Bei dem Viereck $ACDF$ handelt es sich um ein achsensymmetrisches Trapez mit der Symmetrieachse BE. Alle achsensymmetrischen Trapeze besitzen einen Umkreis.
- Siehe Zeichnung.

(c) Der Umkreis des Dreiecks ABC hat den Radius $\overline{M_2A}$. Das ist eine Kathete im rechtwinkligen Dreieck AM_1M_2.
Der Umkreis des achsensymmetrischen Trapezes hat den Radius $\overline{M_1A}$. Das ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck AM_1M_2.
Weil die Hypotenuse in **jedem** rechtwinkligen Dreieck die längste Seite darstellt, ist der Radius und damit auch der Durchmesser des Kreises k_1 länger als der des Kreises k_2.

17.



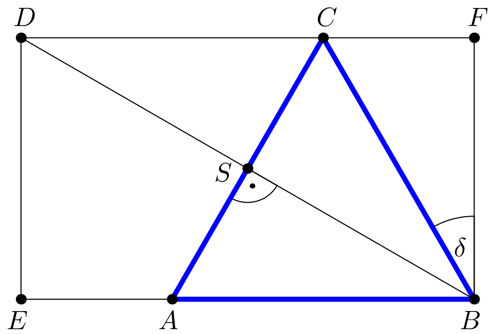
Das gleichseitige Dreieck ABC liegt im Rechteck $EBFD$.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke ABS, SBC und BFC sind kongruent.

(c) Welchen Anteil der Fläche des Rechtecks $EBFD$ nimmt das Dreieck ABC ein? Begründe.

Lösung: (a)



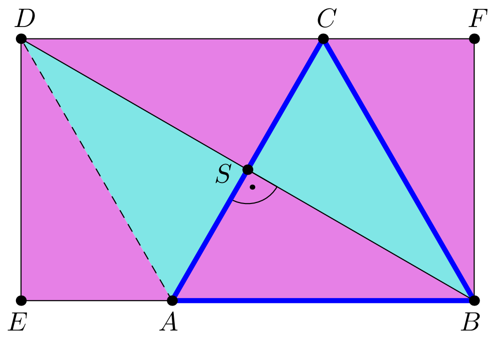
- Beginne mit dem Dreieck ABC und dem Mittelpunkt S der Seite $[AC]$.
- Zeichne die Halbgerade $[BS$ ein.
- Die Parallele zu $[AB]$ durch den Punkt C schneidet diese Parallele im Punkt D. Der Rest ist klar.

(b) $\Delta ABS \cong \Delta SBC$, weil BS eine Symmetrieachse ist.
Die beiden rechtwinkligen Dreicke SBC und BFC besitzen die Seite $[BS]$ als gemeinsame Hypotenuse. Außerdem gilt $\delta = 90° - 60° = 30° = \sphericalangle CBS$.
Also sind alle drei fraglichen Dreiecke kongruent.

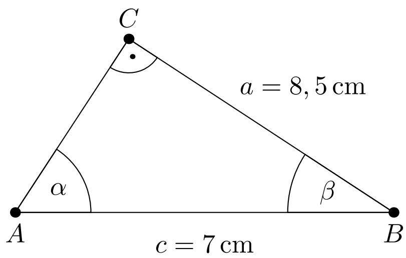
(c) Es gilt: $\Delta DSC \cong \Delta ABS$.
Begründung: Die beiden rechtwinkligen Dreiecke besitzen je einen 30°- und einen 60°-Winkel (Z-Winkel). Neben den drei Innenwinkeln stimmen diese beiden Dreiecke noch in den Kathetenlängen $\overline{AS}$ und $\overline{SC}$ überein.
Also: $\Delta DSC \cong \Delta ABS$.
Das Dreieck ABC ist in zwei kongruente Teildreiecke zerlegt.
Das rechtwinklige Dreieck DBF besteht aus drei kongruenten Teildreiecken. Alle fünf Teildreiecke sind kongruent.
Weil $\Delta DBF \cong \Delta EBD$ gilt, ist das Rechteck $EBFD$ ist damit in sechs dieser kongruenten Teildreieck zerlegbar.

Damit gilt: $\dfrac{A_{\Delta ABC}}{A_{EBFD}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Oder:
Die Hilfsline $[DA]$ veranschaulicht diesen Sachverhalt ohne weiteres:



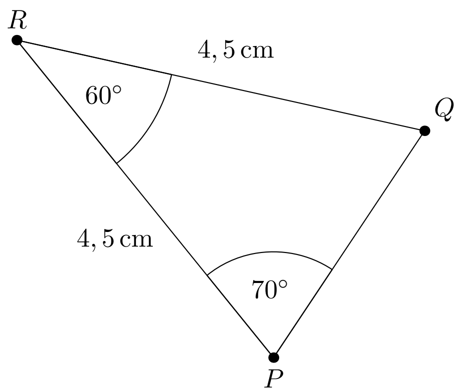
18.



Die Figur ist nicht maßstabgerecht.
Untersuche, ob es ein Dreieck mit den oben angegebenen Bestimmungsstücken gibt.

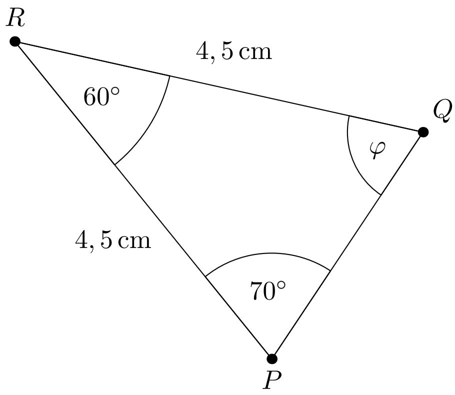
Lösung: Das Dreieck ist rechtwinklig, denn es gilt $\gamma = 90°$.
Wegen $a > c$ folgt dann $\alpha > \gamma = 90°$. Also folgt $\alpha > 90°$.
Damit würde $\alpha + \gamma > 180°$ werden, was in Dreiecken nicht geht.
Das Dreieck gibt es also nicht.

19.



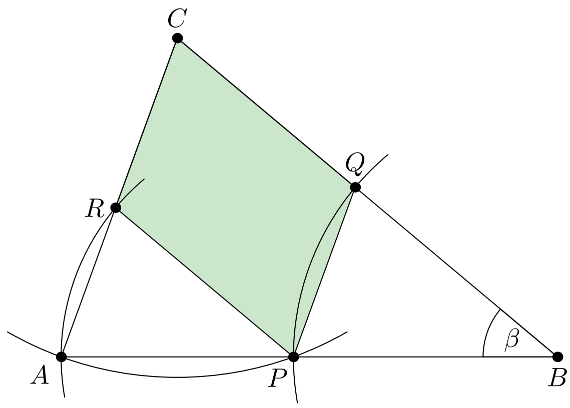
Die Figur ist nicht maßstabgerecht.
Untersuche, ob es ein Dreieck mit den oben angegebenen Bestimmungsstücken gibt.

Lösung:



Das Dreieck ist gleichschenklig mit der Basis $[PQ]$, denn es gilt $\overline{PR} = \overline{QR} = 4,5\,\text{cm}$. Dann folgt $\varphi = 70°$. Wegen $70° + 70° + 60° = 200°$ wäre die Innenwinkelsumme von $180°$ überschritten. Das Dreieck existiert nicht.

20.

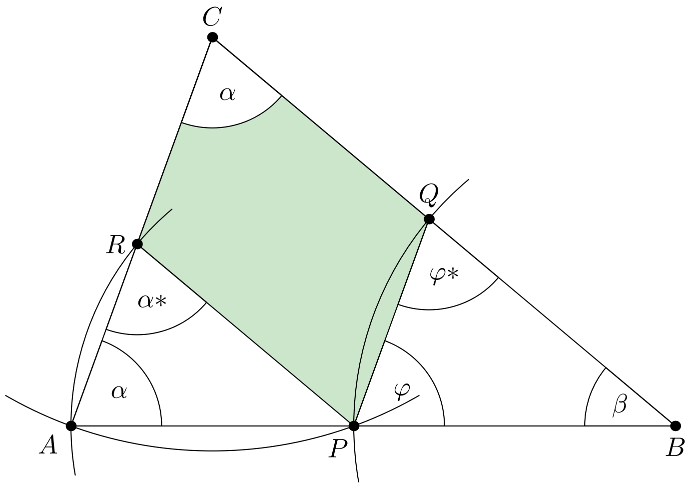


In der obigen Figur gilt: $\overline{AB} = \overline{BC}$. Die Punkte C, P und B sind jeweils die Mittelpunkte der betreffenden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 40°$.

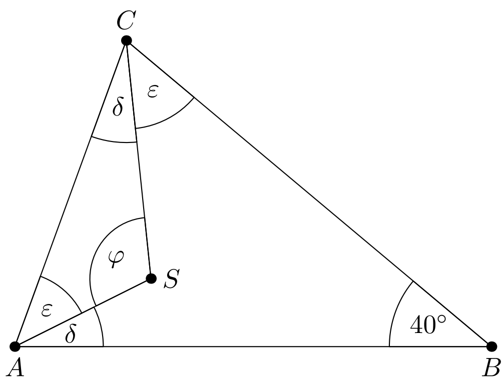
(b) Begründe: das Viereck $PCQR$ ist ein Parallelogramm.

Lösung: (a)



(b) Wegen $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt $\sphericalangle ACB = \alpha$.
Das Dreieck APR ist gleichschenklig mit der Basis $[AR]$
$\Rightarrow \quad \alpha = \alpha*$ und damit auch $\alpha* = \sphericalangle ACB$.
Damit sind α und $\sphericalangle ACB$ F-Winkel. $\quad \Rightarrow \quad [PR] \parallel [CQ] \quad (1)$.
Im gleichschenkligen Dreieck ABC glt: $\alpha = (180° - \beta) : 2$.
Im gleichschenkligen Dreieck PBQ glt: $\varphi = (180° - \beta) : 2 = \alpha$.
Damit sind α und $\sphericalangle BPQ$ F-Winkel. $\quad \Rightarrow \quad [PQ] \parallel [RC] \quad (2)$.
Also sind im Viereck $PQCR$ wegen (1) und (2) jeweils die beiden gegenüber liegenden Seiten parallel. Also handelt es sich um ein Parallelogramm.

21.



(a) Begründe: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

(b) Zeichne das Dreieck ABC für $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$.

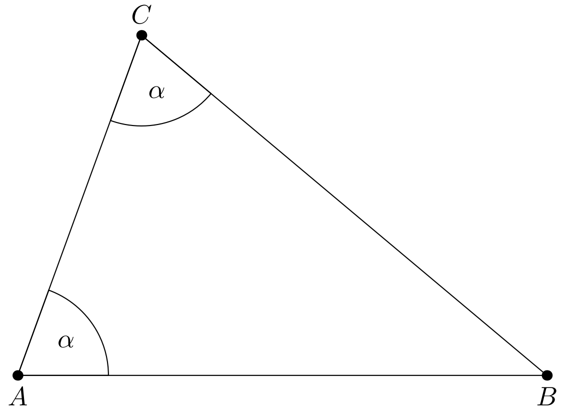
(c) Berechne das Maß φ des Winkels CSA im Dreieck ABC.

Lösung: (a) Im Dreieck ABC gilt: $\alpha = \sphericalangle BAC = \delta + \varepsilon = \sphericalangle ACB = \gamma$.
Also haben zwei Innenwinkel des Dreiecks ABC gleiches Maß; damit ist das Dreieck ABC gleichschenklig. Es besitzt die Basis $[AC]$.

(b) Um das Dreieck zeichnen zu können, brauchst du neben der Streckenlänge $\overline{AB}$ und dem 40°-Winkel noch ein weiteres Bestimmungsstück:
Du kannst entweder $\overline{BC} = 7\,\text{cm}$ verwenden oder das Winkelmaß

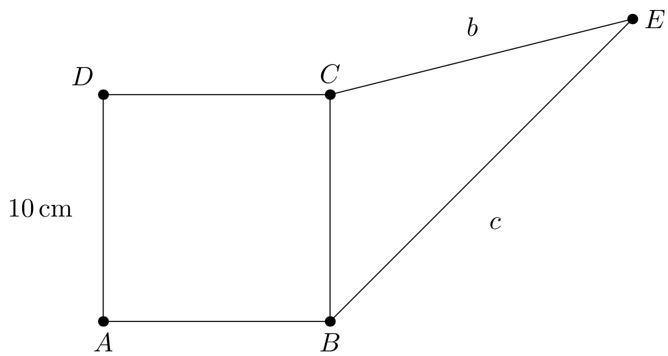
$$\alpha = (180° - 40°) : 2 = 70°$$

berechnen.



(c) Es gilt $\alpha = \delta + \varepsilon = 70°$.
Dann folgt im Dreieck ASC: $\underbrace{\delta + \varepsilon}_{=70°} + \varphi = 180° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 110°$.

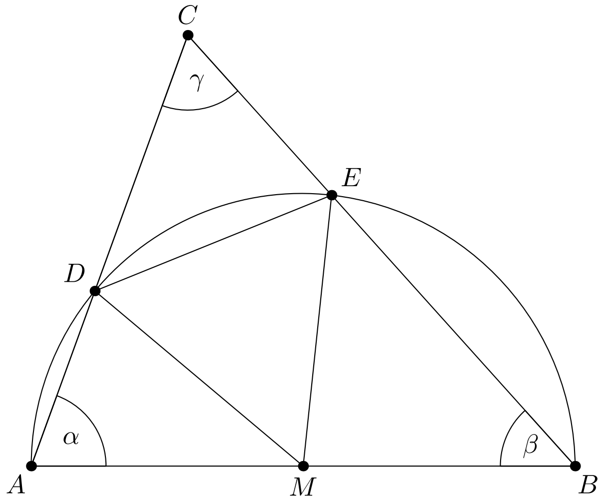
22.



Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Der Umfang des Dreiecks BEC ist doppelt so groß wie der Umfang des Quadrates $ABCD$.
Berechne den Umfang der Gesamtfigur.

Lösung: $u_{\Delta BEC} = 10\,\text{cm} + b + c \quad u_{ABCD} = 4 \cdot 10\,\text{cm} = 40\,\text{cm}$
$u_{\Delta BEC} = 2 \cdot u_{ABCD}\,. \quad \text{Also}: 10\,\text{cm} + b + c = 2 \cdot 40\,\text{cm} = 80\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad b + c = 70\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad u_{ABECD} = 3 \cdot 10\,\text{cm} + 70\,\text{cm} = 100\,\text{cm}\,.$

23.

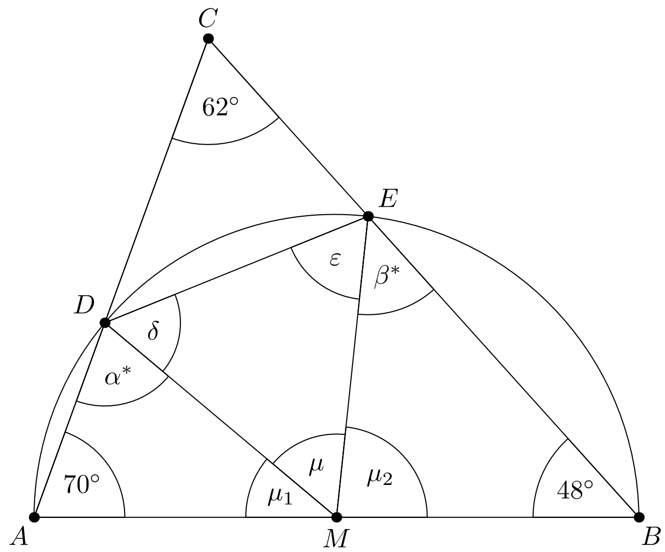


Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 70^\circ$ und $\gamma = 62^\circ$.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks MED.

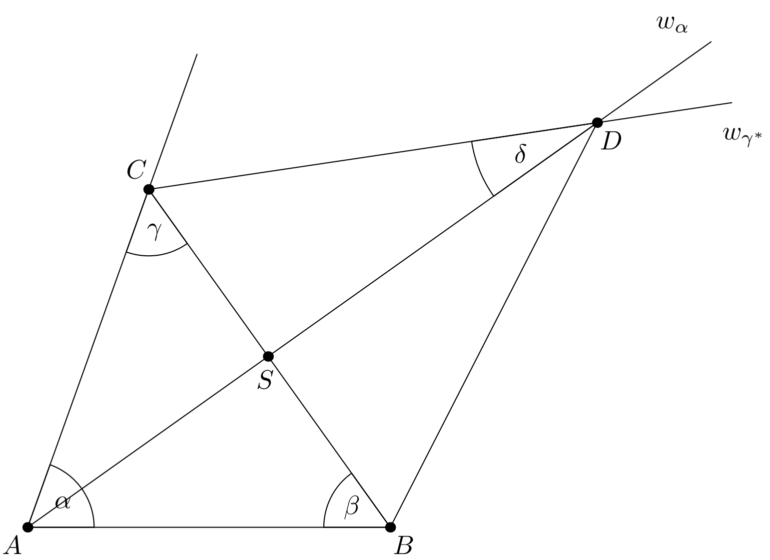
Lösung: (a)



Berechne zunächst das Winkelmaß $\beta = 180^\circ - 70^\circ - 62^\circ = 48^\circ$ und zeichne dann das Dreieck ABC (w,s,w), dann den Halbkreis . . . .

(b) Für den Kreiradius r gilt: $r = \overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MD} = \overline{ME}$.
Das Dreieck AMD ist daher gleichschenklig.
Also gilt: $\alpha^* = \alpha$ und damit $\mu_1 = 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ$.
Das Dreieck MBE ist ebenfalls gleichschenklig.
Also gilt: $\beta^* = \beta$ und damit $\mu_2 = 180^\circ - 2 \cdot 48^\circ = 84^\circ$.
$\Rightarrow \quad \mu = 180^\circ - 40^\circ - 84^\circ = 56^\circ$.
Auch das Dreieck MED ist gleichschenklig.
Also gilt: $\delta = \varepsilon = (180^\circ - 56^\circ) : 2 = 62^\circ$.

24.



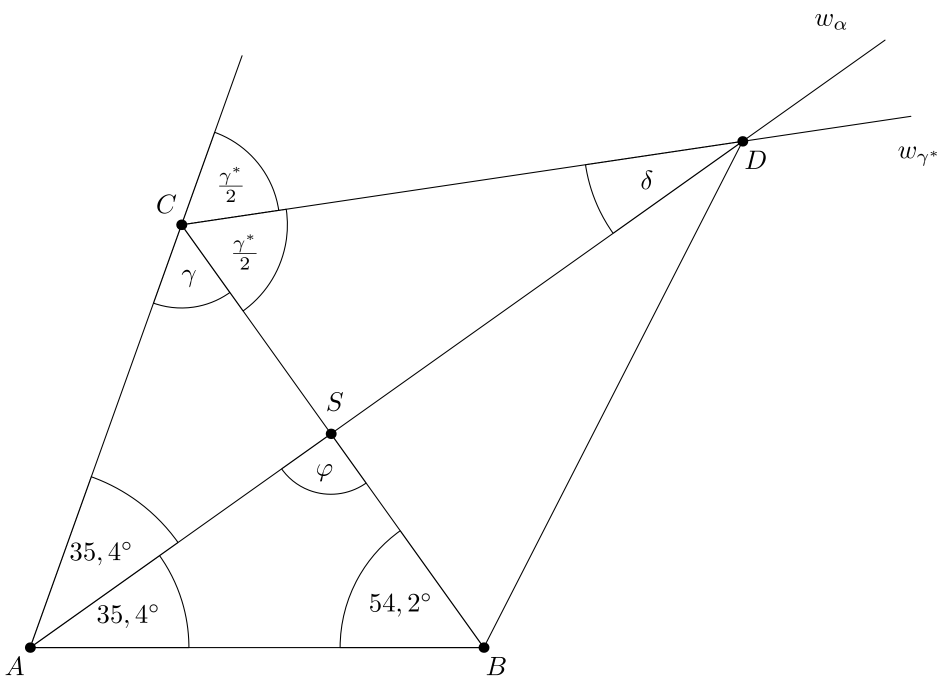
Die Halbgerade w_α halbiert den Winkel α und die Halbgerade w_{γ^*} halbiert den Nebenwinkel von γ .

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 70,8^\circ$ und $\beta = 54,2^\circ$.

(b) Berechne das Winkelmaß δ .

(c) Untersuche, ob es sich bei dem Viereck $ABDC$ um ein achsensymmetrisches Drachenviereck handelt.

Lösung: (a)



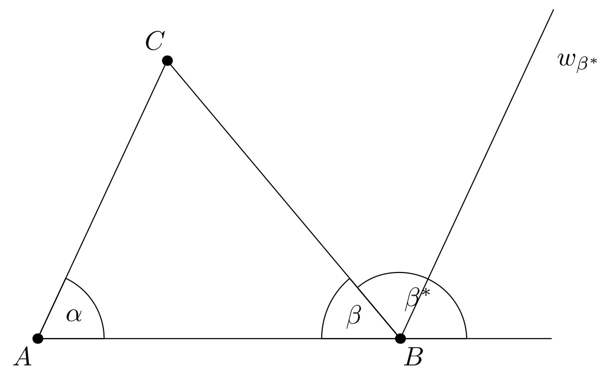
(b) Es gilt: $\gamma = 180° - 70{,}8° - 54{,}2° = 55°$.

$$\Rightarrow \quad \gamma^* = 180° - 55° = 125° \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma^*}{2} = 62{,}5° \,.$$

Im Dreieck ADC gilt dann $\delta = 180° - 35{,}4° - 55° - 62{,}5° = 27{,}2°$.

(c) In jedem (achsensymmetrischen) Drachenviereck müssen die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck ABS gilt: $\varphi = 180° - 35{,}4° - 54{,}2° = 90{,}4° \neq 90°$.
Das Viereck $ABDC$ ist also kein (achsensymmetrisches) Drachenviereck.

25.

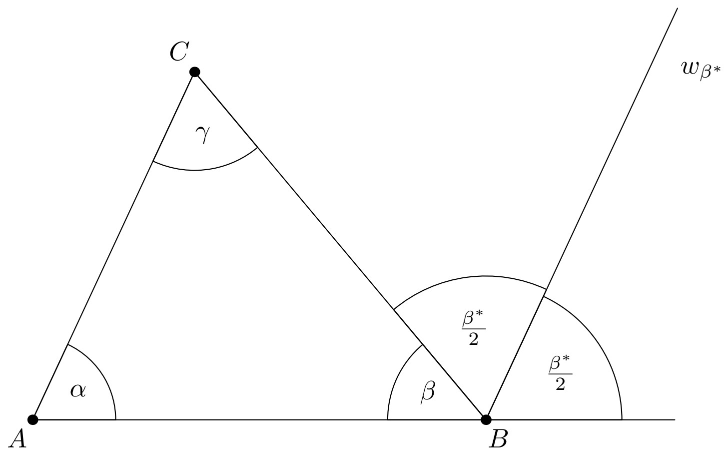


In der Figur halbiert die Halbgerade w_{β^*} den Außenwinkel von β . Gleichzeitig gilt: $w_{\beta^*} \parallel [AC]$.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\beta = 50°$.

(b) Begründe: Das Dreieck ABC muss gleichschenklig sein.

Lösung: (a)

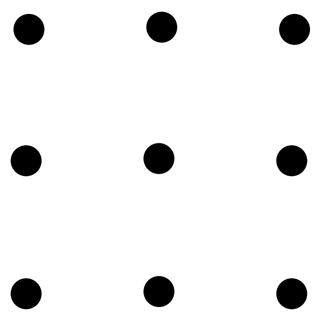


(b) In der Figur gilt: $\gamma = \dfrac{\beta^*}{2}$ (Z-Winkel).

Ebenso gilt: $\alpha = \dfrac{\beta^*}{2}$ (F-Winkel).

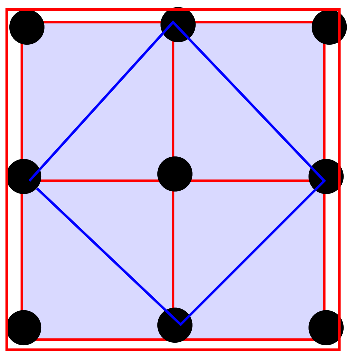
$\Rightarrow \quad \alpha = \gamma$; also ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

26. Idee: Toni Chehlarova



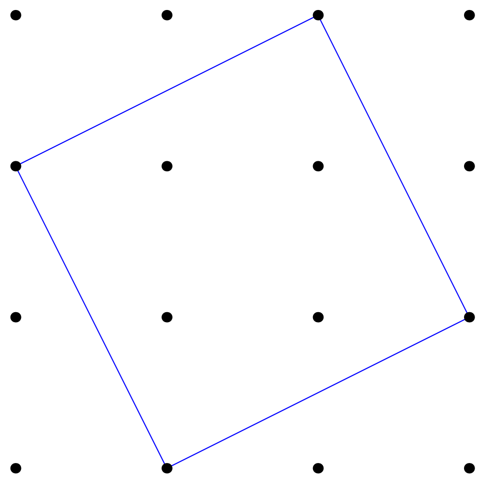
Die Schüler/-innen sollen möglichst viele Quadrate finden, deren Eckpunkte auf den schwarzen Punkten liegen.
Martha meint: „In dieser Figur sehe ich sofort vier Quadrate.“ Sie zeichnet diese ein.
Edwin meint: „In dieser Figur entdecke ich sogar fünf Quadrate.“ Er zeichnet das fünfte hinzu.
Claudia meint: „Ich habe sogar noch ein Quadrat mehr entdeckt als Edwin.“
Was meinst du? Zeichne und begründe.

Lösung:



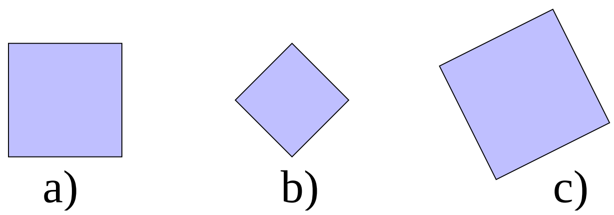
Martha hat die vier gleich großen Quadrate im Inneren (blau) entdeckt.
Edwin könnte das große Quadrat außen herum gesehen haben.
Claudia hat genauer hingeschaut und zeichnet das blaue Quadrat noch ein.

27. Idee: Toni Chehlarova



In das Punktraster ist ein Quadrat eingezeichnet worden.
Finde möglichst viele weitere Quadrate, deren Eckpunkte auf den schwarzen Punkten liegen.

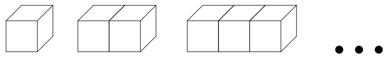
Lösung:



Die obiger Figur zeigt die verschiedenen (nicht maßstabsgerecht gezeichneten) Quadrattypen a), b) und c), die du im Punkteraster entdecken kannst.
Vom Typ a) gibt es zunächst 9 kleine Quadrate.
Hinzu kommen noch 4 Quadrate, deren Seite doppelt so lang ist wie die von einem kleinen Quadrat.
Dazu kommt noch 1 Quadrat, dessen Seite dreimal so lang ist wie die von einem kleinen Quadrat.
Vom Typ b) gibt es 4 Quadrate.
Vom Typ c) tauchen nur 2 verschiedene Quadrate auf (eines davon ist eingezeichnet).
Insgesamt enthält die Figur also maximal 20 Quadrate.

10. Raumgeometrie

1.



Gleiche Würfel werden immer wieder zu neuen Quadern auf die oben dargestellte Weise aneinander gefügt. Die Kantenlänge eines Würfels soll x cm betragen.

(a) Zeige: Für die Oberfläche O_3 des Quaders, der so aus drei Würfeln zusammengefügt ist, gilt $O_3(x) = 14x^2\,\mathrm{cm}^2$.

(b) Zeige: Für die Oberfläche O_4 eines aus vier Würfeln zusammengesetzten Quaders gilt $O_4(x) = 18x^2\,\mathrm{cm}^2$.

(c) Die Oberfläche O_4 eines aus vier Würfeln zusammengesetzten Quaders soll $21,78\,\mathrm{dm}^2$ betragen. Berechne x.

(d) Beschreibe, wie du O_{100} in Abhängigkeit von x berechnest. Gib dein Ergebnis in möglichst einfacher Form an.

(e) Aus wie vielen Würfeln mit der Kantenlänge x cm setzt sich ein Quader mit der Oberfläche $78x^2\,\mathrm{cm}^2$ zusammen?

(f) Untersuche, ob man mit solchen Würfeln auf dieses Weise einen Quader mit einer Oberfläche von $10x^2\,\mathrm{dm}^2$ zusammenbauen kann.

Lösung: (a) Die Oberfläche der beiden Endstücke links und rechts beträgt zusammen $2\cdot 5\cdot (x\,\mathrm{cm})^2 = 10x^2\,\mathrm{cm}^2$.
Hinzu kommt ein Mittelstück, das sich aus vier Quadraten zusammensetzt: $4\cdot(x\,\mathrm{cm})^2 = 4\,\mathrm{cm}^2$. Also sind es zusammen $14x^2\,\mathrm{cm}^2$.

(b) Zu dem vorigen Quader aus drei Würfeln kommt noch ein Mittelstück hinzu:
$O_4 = 14x^2\,\mathrm{cm}^2 + 4x^2\,\mathrm{cm}^2 = 14x^2\,\mathrm{cm}^2$.

(c) $21,78\,\mathrm{dm}^2 = 2178\,\mathrm{cm}^2$
$2178 = 18x^2 \;\; |:18 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 121 \quad \Leftrightarrow \quad x = 11$
Die Kantenlänge eines Würfels beträgt also 11 cm.

(d) Die Reihe aus 100 Würfeln besteht aus zwei Endstücken und 98 Mittelstücken.
Die Oberfläche eines Endstückes beträgt $5\cdot x^2\,\mathrm{cm}^2$, die eines Mittelstückes beträgt $4\cdot x^2\,\mathrm{cm}^2$. Also folgt: $O_{100} = 2\cdot 5\cdot x^2\,\mathrm{cm}^2 + 98\cdot 4\cdot x^2\,\mathrm{cm}^2 = 402x^2\,\mathrm{cm}^2$.

(e) Subtrahiere zunächst die beiden Endstücke zu je $5\cdot x^2\,\mathrm{cm}^2$:
$78x^2\,\mathrm{cm}^2 - 10\cdot x^2\,\mathrm{cm}^2 = 68x^2\,\mathrm{cm}^2$
Auf jedes Mittelstück entfallen $4\cdot x^2\,\mathrm{cm}^2$.
$68x^2\,\mathrm{cm}^2 : 4\cdot x^2\,\mathrm{cm}^2 = 17$ Mittelstücke. Also besteht der Quader aus 19 Würfeln.

(f) $10x^2\,\mathrm{dm}^2 = 1000x^2\,\mathrm{cm}^2$.
Subtrahiere wieder die beiden Endstücke. Dann bleiben $990x^2\,\mathrm{cm}^2$. Auf jedes Mittelstück entfallen wieder $4 \cdot x^2\,\mathrm{cm}^2$. Weil aber $990x^2\,\mathrm{cm}^2 : 4x^2\,\mathrm{cm}^2$ keine ganze Zahl ergibt, kann es diesen Quader nicht geben.

2. Claudia probiert mit ihrer Freundin Susi eine Zahlenzauberei mit einem Würfel aus: „Würfle einmal und lies die Augenzahl ab, ohne dass ich sie sehen kann. Verdopple diese Augenzahl und addiere fünf. Multipliziere dann diesen Summenwert mit fünf. Merke dir dieses Ergebnis.“ Susi hat gewürfelt und gerechnet.
Claudia gibt die nächste Anweisung: „Würfle verdeckt nochmals. Addiere diese Augenzahl zu deinem vorherigen Ergebnis und addiere noch 10. Multipliziere diesen Summenwert mit 10. Würfle ein drittes Mal und addiere diese Augenzahl zum vorherigen Produktwert.“ Das hat Susi gemacht.
Nun fordert Claudia ihre Freundin auf, von dem Ergebnis noch 350 zu subtrahieren und ihr den Wert der Differenz zu nennen.
Susi: „Ich habe 632 herausbekommen.“ „Dann hast du zunächst die Sechs, dann die Drei und am Ende die Zwei gewürfelt.“, antwortet Claudia. „Stimmt!“, ruft Susi überrascht.

   (a) Verfolge Susis Rechnungen in allen Einzelheiten.

   (b) Rechne mit Buchstaben nach: Der erste Wurf ergibt die Augenzahl a, der zweite die Zahl b und der dritte c.
   Weshalb kann Claudia die Augenzahlen dann korrekt wiedergeben?

   (c) Es gibt auch Spielwürfel mit 8 statt mit 6 Seitenflächen. Hätte Claudias Zahlenzauberei auch mit einem solchen Achterwürfel funktioniert? Begründe.

Lösung: (a) Der erste Wurf war eine Sechs: $(6 \cdot 2 + 5) \cdot 5 = 85$.
Der zweite Wurf war eine Drei: $[(85 + 3) + 10] \cdot 10 = 980$.
Der dritte Wurf war eine Zwei: $980 + 2 = 982 \quad 982 - 350 = 632$.
Erster Wurf: 6. Zweiter Wurf: 3. dritter Wurf: 2.

(b) Der erste Wurf war eine a: $(a \cdot 2 + 5) \cdot 5 = 10a + 25$.
Der zweite Wurf war eine b: $[(10a + 25) + b + 10] \cdot 10 = 100a + 10b + 350$.
Der dritte Wurf war eine c: $100a + 10b + 350 + c$.
350 werden dann subtrahiert. Das Ergebnis lautet zum Schluss $100a + 10b + c$. Das ist aber gerade die Zahl abc in der Ziffernschreibweise. Diese gibt die gewürfelten Augenzahlen in der richtigen Reihenfolge wieder.

(c) Weil die Augenzahlen auch bei einem Würfel aus acht Seitenflächen Ziffern sind, funktioniert Claudias Zahlenzauberei ebenso in diesem Fall.