SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 7 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

I. Wahlpflichtfächergruppe I 3

1. Die Menge der rationalen Zahlen 4
2. Gleichungen und Ungleichungen 13
3. Parallelverschiebung 15
4. Winkel 17
5. Drehung 38
6. Punktspiegelung 43
7. Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche 45

II. Wahlpflichtfächergruppe II/III 49

8. Die Menge der rationalen Zahlen 50
9. Gleichungen und Ungleichungen 59
10. Parallelverschiebung 61
11. Winkel 63
12. Drehung 83
13. Punktspiegelung 88

Teil I.

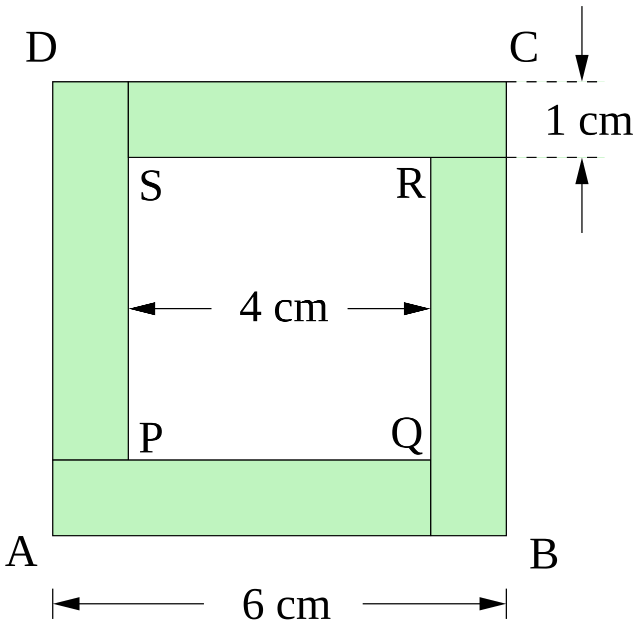
Wahlpflichtfächergruppe I

1. Die Menge der rationalen Zahlen

1. (a) 0 (b) -1 (c) 28

2. $3x^2 + 18x + 24 = 0 \quad L = \{-2; -4\}$

3. Es handelt sich um ein achsensymmetrisches Trapez, in dem zwei Innenwinkel das Maß 63,43° und zwei das Maß 116,57° besitzen.

4. (a)
   - 

   - $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{16\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = 0,\overline{4} = 44,\overline{4}\%$, also die knappe Hälfte.

   (b)
   - Wenn das Quadrat $PQRS$ 68% der Gesamtfläche einnimmt, dann müssen die vier Rechtecke zusammen $100\% - 68\% = 32\%$ der Gesamtfläche einnehmen. Weil aber alle vier Rechtecke kongruent sind, beträgt der Anteil eines dieser Rechtecke 8%.
   - 25% von $36\,\text{cm}^2$ sind $9\,\text{cm}^2$. Die Seitenlänge des Quadrates $PQRS$ beträgt also in diesem Fall 3 cm.
     $3 + 2 \cdot x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,5.$

5. (a) $(-60) : (-1) = 60$
   (b) $(-60) : (+2) = -30$

6. Für die Seite a gilt: $a = b - 5\,\mathrm{cm}$.
   Für die Seite c gilt: $c = a + 3\,\mathrm{cm} = b - 5\,\mathrm{cm} + 3\,\mathrm{cm} = b - 2\,\mathrm{cm}$.
   Für den Umfang u gilt: $u = 21{,}5\,\mathrm{cm} = a + b + c$
   Also folgt: $21{,}5\,\mathrm{cm} = b - 5\,\mathrm{cm} + b + b - 2\,\mathrm{cm}$.
   $21{,}5\,\mathrm{cm} + 7\,\mathrm{cm} = 3b \quad \Leftrightarrow \quad b = 9{,}5\,\mathrm{cm}$.
   Dann ist die Seite a $4{,}5\,\mathrm{cm}$ und die Seite c $7{,}5\,\mathrm{cm}$ lang.
   Probe: $4{,}5\,\mathrm{cm} + 9{,}5\,\mathrm{cm} + 7{,}5\,\mathrm{cm} = 21{,}5\,\mathrm{cm}$

7. (a) Abgegebene Stimmen: $41200 \cdot 0{,}7 = 28840$
   Davon 60%: $28800 \cdot 0{,}6 = 17304$.
   Für Frau Zoprent haben 17304 Wählerinnen und Wähler in Besselheim gestimmt.
   (b) Fau Zoprent ist mit 60%, also mehr als der Hälfte aller abgegebenen Stimmen gewählt worden, egal, wie viele Stimmen insgesamt abgegeben worden sind. Die Wahlbeteiligung spielt rechnerisch keine Rolle.

8. Abgegebene Stimmen: $32900 \cdot 0{,}7 = 23030$.
   Davon 50% (also die Hälfte): 11515.
   Also haben mindestens $11515 + 1 = 11516$ Wählerinnen und Wähler in Cantorhausen für Herrn Roprentz gestimmt.

9. (a) $(-5) \cdot (-7) = 35$
   (b) $(-7) \cdot (+1) = -7$
   (c)
   - $$5 : \boxed{+1} = +5$$
   - $$5 : \boxed{-3} = -1{,}666\ \ldots$$

   (d)
   $$+3 - (-7) = +10$$

10.

x	$-2,5$	4	B
$T(x) = -2x + 3$	A	-5	0

Die Zelle A: $T(-2,5) = -2 \cdot (-2,5) + 3 = 8$, also kommt 8 in Zelle A.
Die Zelle B: $0 = -2x + 3 \mid -3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 = 2x \mid : 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1,5$
Also kommt $-1,5$ in Zelle B.

11. (a)
    - $a = 17$: $u = (17 + 3 \cdot 17 + 3 \cdot 17)\,\text{cm} = 119\,\text{cm}$
      $a = 23$: $u = (23 + 3 \cdot 23 + 3 \cdot 23)\,\text{cm} = 161\,\text{cm}$
    - $119 = 17 \cdot 7$ und $161 = 23 \cdot 7$
      Also besitzen beide Maßzahlen den gemeinsamen Teiler 7.

    (b)
    - $u(a) = (a + 3a + 3a)\,\text{cm}$
    - $u(a) = (a + 3a + 3a)\,\text{cm} = 7 \cdot a\,\text{cm}$
      Also gilt für alle $a \in \mathbb{N}$: $7a \in V_7$.

12.

$$\begin{array}{rrcll} & 4 - (5x^2 + 8) \cdot (-12) & = & 13 & \\ \Leftrightarrow & 4 - (-12) \cdot (5x^2 + 8) & = & 13 & \mid -4 \\ \Leftrightarrow & 12 \cdot (5x^2 + 8) & = & 9 & \\ \Leftrightarrow & 3 \cdot (8 + 5x^2) \cdot 4 & = & 9 & \end{array}$$

Die Gleichung G_1 lässt sich also in die Gleichung G_2 umformen. Daher besitzen beide Gleichungen dieselbe Lösungsmenge.

13. (a) Fläche des großen Quadrates: $A_g = 60\,\text{cm} \cdot 60\,\text{cm} = 3600\,\text{cm}^2$
    Fläche des kleinen Quadrates: $A_k = 30\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} = 900\,\text{cm}^2$
    $3600\,\text{cm}^2 : 900\,\text{cm}^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad A_k : A_g = 1 : 4$

    (b) $A_g = 30\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} \cdot 9 = 8100\,\text{cm}^2$
    Weil $90\,\text{cm} \cdot 90\,\text{cm} = 8100\,\text{cm}^2$ ergibt, müsste die Seitenlänge des großen Quadrates $90\,\text{cm}$ betragen.

14. (a) Wenn du in der von Franz vorgeschlagenen Fortsetzung der Tabelle z.B. auf $x = -90$ stößt, dann ergibt sich:
    $T_1(-90) = -30$ und $T_2(-90) = -70$.
    Also gilt hier $T_1(-90) > T_2(-90)$.

    (b) $3(x + 80) = 7(x + 80) \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 240 = 7x + 560 \quad \Leftrightarrow \quad -4x = 320 \quad \Leftrightarrow \quad x = -80$

15.

$$(36 - \underline{\;40\;}) \bullet \underline{(-5)}$$

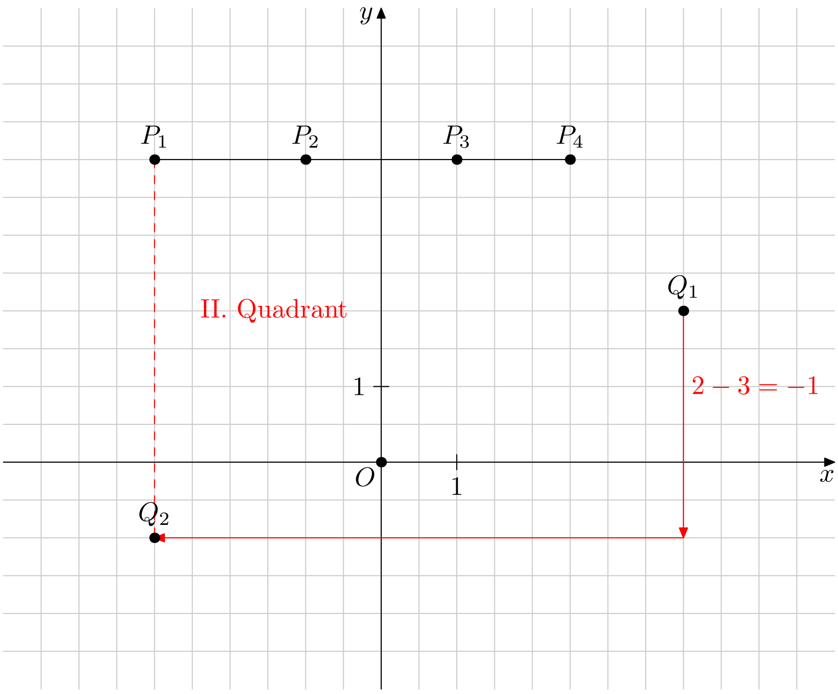
$$= 36 \bullet \underline{(-5)} - \underline{\;40\;} \bullet \underline{(-5)}$$

$$= -180 + \underline{\;200\;}$$

$$= 20$$

16. „Um -2^4 steht keine Klammer. Also darfst du das Minuszeichen nur einmal berücksichtigen; d.h. $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$."

17.



(a) $P_1(-3 \mid 4)$ und $Q_1(4 \mid 2)$.

(b)
- Beispiel: Siehe Zeichnung oben.
- Siehe Zeichnung oben.
  Z.B.: „Diese Strecke liegt parallel zur x-Achse".

(c) Siehe Zeichnung oben.

(d) Das kann nicht sein, denn im II. Quadranten gibt es nur negative x-Werte.

18. (a) „$\cdots$ weil $-(-3)^4 = -(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)$. Also musst du das Minuszeichen 5-mal berücksichtigen. 5 Minuszeichen lassen sich dann zu einem Minuszeichen zusammenfassen.“

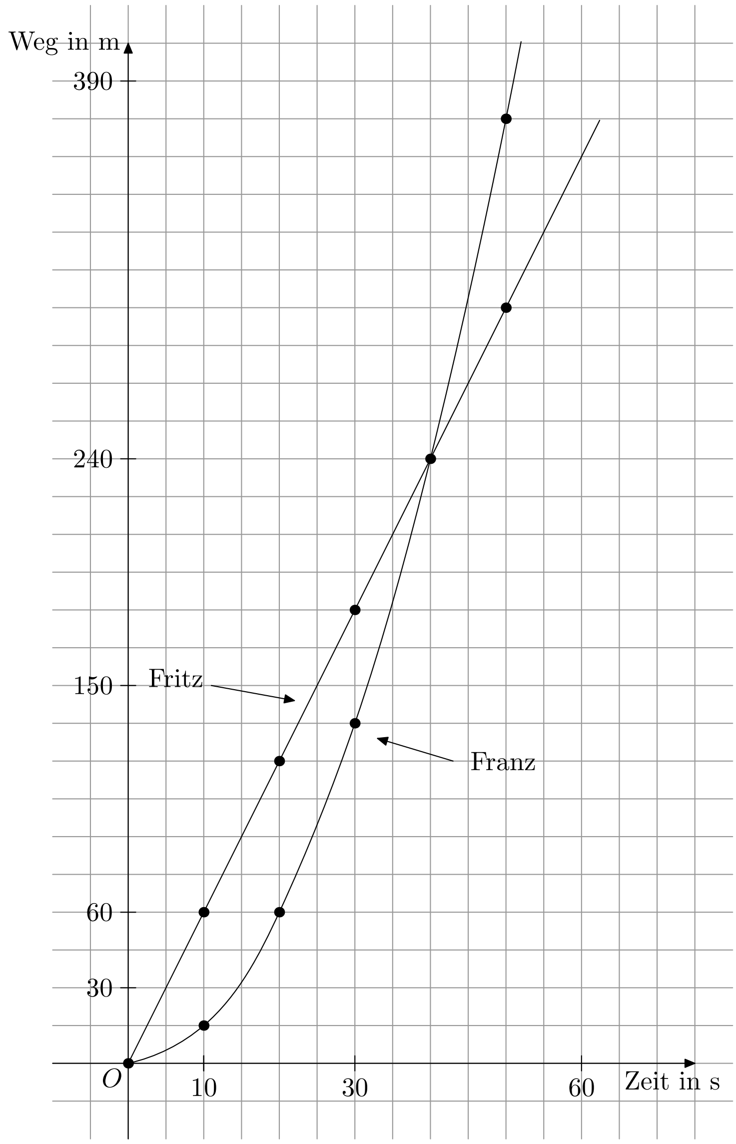
(b) $-(-3)^4 - (-3)^2 - (-3)^1 = -81 - 9 + 3 = -87$.

19. (a)

$$\boxed{-4} \cdot 2 - 4 = -12$$

(b) Das geht nicht, weil in der oben angegebenen Zahlenmenge mit der Null nur gerade Zahlen stehen. Die Subtraktion und die Multiplikation können aber aus geraden Zahlen keine ungeraden machen.

20. (a)



(b) Es ist das Diagramm von Fritz, denn es stellt eine Ursprungs-Halbgerade dar.

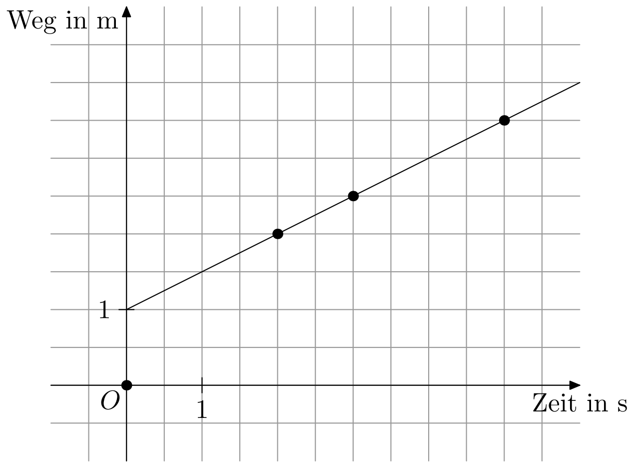
(c) Franz gewinnt das Rennen, denn nach 40 s überholt er Fritz. Dann baut er seinen Vorsprung immer weiter aus.

21. „... es kommt darauf an, ob das Minuszeichen eingeklammert ist oder nicht.
Bei -2^4 ist es nicht eingeklammert, somit wird es nur einmal berücksichtigt.
Bei $(-2)^4$ dagegen wird -2 viermal mit sich selbst multipliziert, also auch mit dem Minuszeichen.
Somit gilt: $-2^4 + (-2)^4 = -16 + 16 = 0$".

22. (a) Es gilt $2 : 2 = 1$ und $3 : 2,5 = 1,2$. Also sind schon diese beiden Zahlenpaare nicht quotientgleich.

Deshalb sind für diese Bewegung die Zeit t und der Weg s nicht direkt proportional zueinander.

(b) •



- Das Diagramm ergibt zwar eine Gerade, aber keine Ursprungsgerade. Damit ist bestätigt, dass für diese Bewegung die Zeit t und der Weg s nicht direkt proportional zueinander sind.

23. (a)

$$\begin{aligned} O_{ganz} &= 2\cdot(ab+ac+bc) = 2\cdot(5\,\mathrm{dm}^2+6\,\mathrm{dm}^2+7,5\,\mathrm{dm}^2) \\ O_{ganz} &= 37\,\mathrm{dm}^2 \\ 2\cdot O_{Hälfte} &= 2\cdot 2\cdot(2,5\,\mathrm{dm}^2+3\,\mathrm{dm}^2+7,5\,\mathrm{dm}^2) \\ O_{Teile} &= 52\,\mathrm{dm}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{52\,\mathrm{dm}^2-37\,\mathrm{dm}^2}{37\,\mathrm{dm}^2} = \frac{15}{37} = 0,40540\ldots \approx 40,54\%$$

(b) Die Oberfläche der beiden Teile wäre auch hier nur um den doppelten Betrag einer rechteckigen Seitenfläche mit den Längen b und c angewachsen. Das ändert am Ergebnis nichts.

24. **1. Möglichkeit:** Rechne mit einem Zahlenbeispiel.

Früher:	1500 g kosteten z.B. 12 EURO .	$\Rightarrow$	100 g kosteten dann 80 Cent .
Jetzt :	1200 g kosten auch 12 EURO .	$\Rightarrow$	100 g kosten dann 1 EURO .

100 g Lebkuchen sind also um 20 Cent teurer geworden.

$$\frac{20\,\text{Cent}}{80\,\text{Cent}} = 0,25 = 25\%$$

Die Lebkuchen sind also um 25% teurer geworden.

2. Möglichkeit: Die Lebkuchen kosten x EURO.

Früher: 1500 g kosteten x EURO. $\Rightarrow$ 100 g kosteten dann $\frac{x}{15}$ EURO.

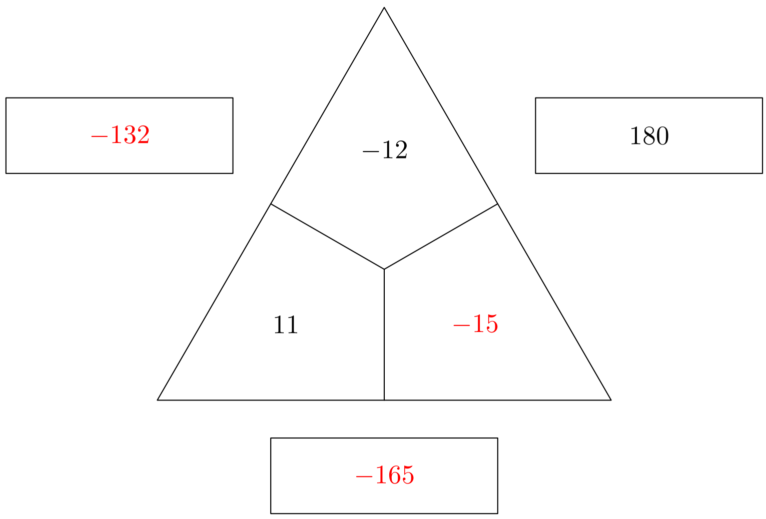
Jetzt : 1200 g kosten auch x EURO. $\Rightarrow$ 100 g kosten dann $\frac{x}{12}$ EURO.

100 g Lebkuchen sind also um $\frac{x}{12}$ EURO $-$ $\frac{x}{15}$ EURO teurer geworden.

$$\left(\frac{x}{12} - \frac{x}{15}\right) \text{ EURO} = \frac{x}{60} \text{ EURO}$$
$$\frac{x}{60} \text{ EURO} : \frac{x}{15} \text{ EURO} = \frac{15}{60} = 0,25 = 25\%$$

Das Ergebnis ist das gleiche wie oben.

25.



26. $x \cdot y \cdot x = x^2 \cdot y = 284\,.$
Die Zahl 284 muss also einen quadratischen Teiler besitzen. Nun ist $284 = 1 \cdot 4 \cdot 71\,.$
1. Fall:
$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \vee x = -1$ zusammen mit $b = 284\,.$
2. Fall:
$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \vee x = -2$ zusammen mit $b = 71\,.$
Weil $71 \in \mathbb{P}$ gilt, gibt es nur die Lösungen
$\{(-1 \mid 284); (1 \mid 284); (-2 \mid 71); (2 \mid 71)\}\,.$

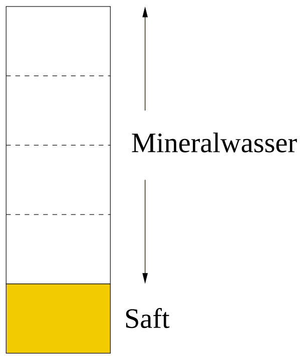
27. Angenommen, der Käse wird in 100 g-Stücken angeboten.
Dann sind davon 40 g Wasser.
Die Trockenmasse beträgt 60 g . 40% davon sind Fett, das sind 24 g .
Also sind 24 g Fett in 100 g Käse enthalten. Der Fettgehalt dieser Käsesorte beträgt somit 24%.
Dieser Prozentsatz ist für jede Käsemenge dieser Sorte die gleiche.

28.

$$\begin{aligned} 21\,000 &= 3\cdot 7\cdot 2^3\cdot 5^3 \\ 21\,000 &= (21\cdot 8)\cdot 125 &&= 168\cdot 125 \\ &= (21\cdot 125)\cdot 8 &&= 2625\cdot 8 \\ &= (3\cdot 8)\cdot(7\cdot 125) &&= 24\cdot 875 \\ &= (7\cdot 8)\cdot(3\cdot 125) &&= 56\cdot 375 \end{aligned}$$

29. (a) Gesamtmenge G im Glas: $25\,\text{ml} + 100\,\text{ml} = 125\,\text{ml}$.
Der Prozentwert P an Saft beträgt: $P = 25\,\text{ml}$.
Der Prozentsatz p beträgt dann $p = \dfrac{25\,\text{ml}}{125\,\text{ml}} = 0,2 = 20\%$

(b)



Der Saft nimmt offenbar $\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$ der Flüssigkeitsmenge ein, die sich nach dem Auffüllen im Glas befindet.

30. (a) Im Tetrapack befinden sich $1\,\text{l} = 1000\,\text{ml}$ Nektar.
Egon entnimmt 300 ml. Dann befindet sich im Rest, nämlich in
$1000\,\text{ml} - 300\,\text{ml} = 700\,\text{ml}$, auch wieder 60% reiner Fruchtsaft.
60% von $700\,\text{ml} = 0.6\cdot 700\,\text{ml} = 420\,\text{ml}$.

(b) Eine Möglichkeit:
In der ungeöffenten Tetra-Packung befanden sich
60% von $1000\,\text{ml} = 0.6\cdot 1000\,\text{ml} = 600\,\text{ml}$ Fruchtsaft.
Nach dem Ausgießen befinden sich jetzt $600\,\text{ml} - 420\,\text{ml} = 180\,\text{ml}$ reiner Fruchtsaft in Egons Glas.

2. Gleichungen und Ungleichungen

1. Schritt 1: Distributivgesetz nicht beachtet
   Schritt 2: richtig
   Schritt 3: Inversionsgesetz falsch angewendet
   Schritt 4: $0 \notin \mathbb{N}$
   Die richtige Lösungsmenge ist leer.

2. Z.B. für $G = \mathbb{Z}$: $x \geqq -4$ oder $-4 \leqq x$ oder $12 - 4x \leqq 28$

3. 34 Fasane und 34 Kaninchen

4. Die letzte und vorletzte Seite sind jeweils $6,6\,\mathrm{cm}$ lang.

5. $96\,\mathrm{cm}^2$

6. $312,75$

7. Die Seiten sind $4,5\,\mathrm{cm}$, $5,5\,\mathrm{cm}$, $6,5\,\mathrm{cm}$ und $7,5\,\mathrm{cm}$ lang.

8. Die Stücke sind $1,2\,\mathrm{m}$, $0,6\,\mathrm{m}$ und $0,3\,\mathrm{m}$ lang.

9. (a) $a = -4$ ergibt $-4x = 36 \mid : (-4) \quad \Leftrightarrow \quad x = -9$

   $a = 0,\overline{3} = \frac{1}{3}$ ergibt $\frac{1}{3}x = 36 \mid \cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 108$

   (b) Für $a = 0$ gibt es keine Lösung, denn $0 \cdot x = 0$ und nicht $= 36$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.

   (c) $x = a = 6: \quad 6 \cdot 6 = 36$ und $x = a = -6: \quad (-6) \cdot (-6) = 36$

10. (a) Klar.

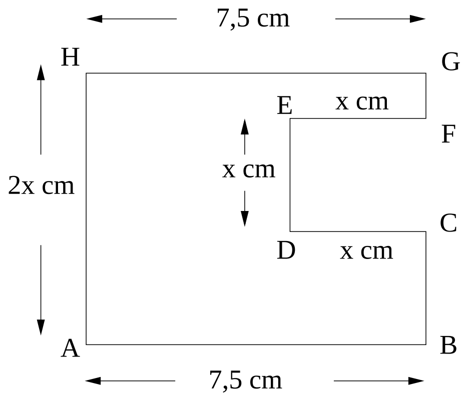
(b) Es gilt $u = 2 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 7,5\,\text{cm} + 3 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 1,5\,\text{cm} = 33\,\text{cm}$.

(c) $u(x) = 2x\,\text{cm} + 15\,\text{cm} + 3x\,\text{cm} + \overline{BC} + \overline{FG}$
Nun gilt $\overline{GF} = \overline{CB} = (2x\,\text{cm} - x\,\text{cm}) : 2 = 0,5x\,\text{cm}$.
Also: $u(x) = 2x\,\text{cm} + 15\,\text{cm} + 3x\,\text{cm} + 2 \cdot 0,5x\,\text{cm} = (6x + 15)\,\text{cm}$.

(d) $6x + 15 = 28,5 \Leftrightarrow x = 4,5$

(e) Weil für die Belegungen von x nur positive Zahlen in Betracht kommen, ist der Term $6x+15$ größer als 15. Also gibt es keine dieser Figuren mit einem Umfang von $14,3\,\text{cm}$.

(f)



Hier gilt wie schon in der ursprünglichen Figur:
$\overline{AH} = \overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FG} \Leftrightarrow 2x\,\text{cm} = \overline{BC} + x\,\text{cm} + \overline{FG}$
$\Leftrightarrow x\,\text{cm} = \overline{BC} + \overline{FG}$
Also gilt unverändert $u(x) = (6x + 15)\,\text{cm}$, auch wenn die Symmetrie zerstört worden ist.

11. Es gilt z.B. $\dfrac{7}{4} = 1,75 < 2\,.$

Dann ist aber auch $\dfrac{6}{4} = 1,5 < 2\,,\quad \dfrac{5}{4} = 1,25 < 2\,,\quad \ldots\quad ,\quad \dfrac{1}{4} < 2\ .$

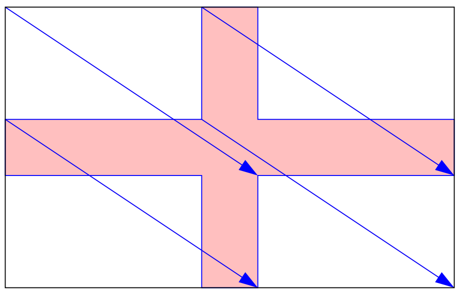
Wenn dann $x < 1$ ist, stimmt die Ungleichung immer.
Also gilt insgesamt z.B. $x \in \{6;\ 5;\ 4;\ 3;\ 2;\ 1;\ 0,98;\ 0,97;\ 0,96;\ 0,95\}$
oder $x \in \{0,25;\ 0,15;\ 0,05;\ 0,03;\ 0,02;\ 0,01;\ 0,098;\ 0,097;\ 0,096;\ 0,095\}$
oder $x \in \{-17;\ -20;\ -30;\ -300;\ -5678;\ -10^6;\ -10^8;\ -10^7;\ -3,146;\ 0\}\ .$

3. Parallelverschiebung

1. - -

2.

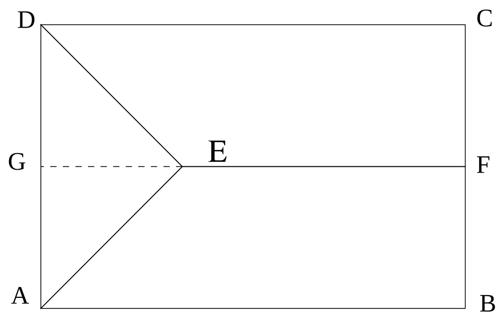
   (a) –

   (b)
   - 
   - $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ -3 \end{pmatrix}$

   (c)
   - Das Drehzentrum liegt im Schnittpunkt der Diagonalen des großen Rechtecks. Dieser Schnittpunkt deckt sich mit dem Symmetriezentrum des Kreuzes. Der Drehwinkel beträgt 180°.
   - Es handelt sich um eine Punktspiegelung.

3. $\alpha = 50°$ $\quad \beta = 40°$ $\quad \varphi = 140°$ $\quad \varepsilon = 50°$ $\quad \delta = 40°$

4. (a)



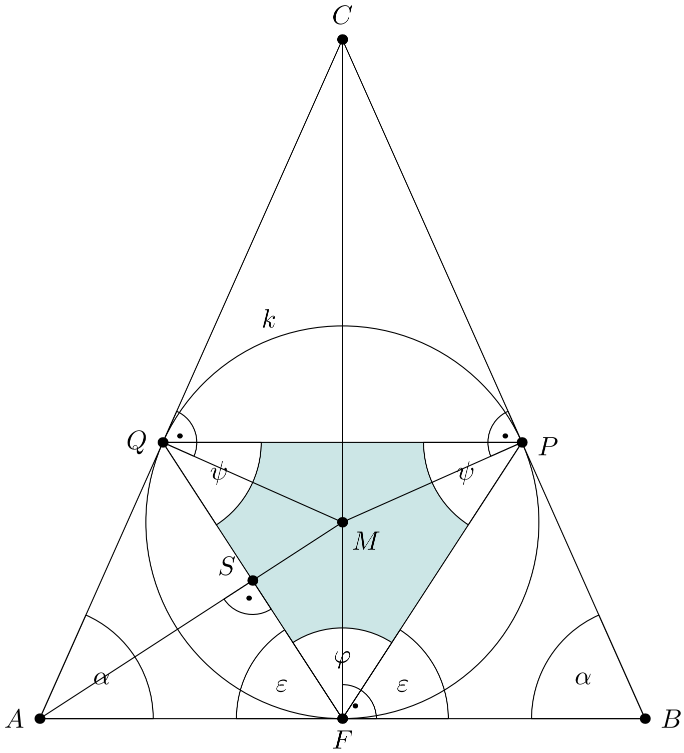
1. Möglichkeit:
Die Strecke GE liegt auf der Halbierenden des Winkels DEA. $\Rightarrow$ $\sphericalangle GEA = \sphericalangle BAE$ (Wechselwinkel) $= 52{,}8° : 2 = 26{,}4°$.
2. Möglichkeit: Das Dreieck AED ist gleichschenklig mit der Basis $[AD]$.
$\Rightarrow$ $\sphericalangle EAD = (180° - 52{,}8°) : 2 = 63{,}6°$ und $\sphericalangle BAE = 90° - 63{,}6° = 26{,}4°$.

(b) –

(c) Es würde gelten: $\sphericalangle DEA = 60°$. Weil aber das Dreieck AED schon gleichschenklig ist, muss jetzt es sogar gleichseitig sein.

4. Winkel

1. (a)

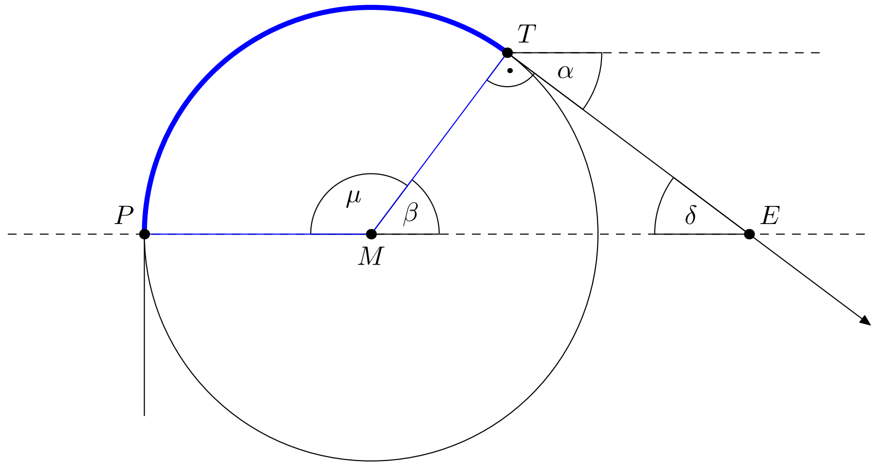


Die Kreislinie k ist der Inkreis dieses Dreiecks ABC. Im Mittelpunkt M schneiden sich die drei Winkelhalbierenden. Die Winkelhalbierende $[CF]$ ist bereits vorhanden. Für die Konstruktion von M genügt es z.B., die Halbierende des Winkels BAC noch einzuzeichnen.

(b) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, denn die beiden Basiswinkel haben das Maß α. Aus Symmetriegründen taucht daher das Winkelmaß ε zweimal auf.
Jeder der drei Berührradien $\overline{MF}$, $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ steht auf seiner betreffenden Dreiecksseite senkecht.
Das Viereck $AFMQ$ ist ein achsensymmetrischer Drachen mit der Symmetrieachse $[AM]$, die den Winkel α halbiert.
Weiter gilt dann: $\quad [QF] \perp [AM] \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle ASF = 90°$.
Aus der Winkelsumme im Dreieck AFS ergibt sich dann: $\varepsilon = 90° - 33° = 57°$.
$\Rightarrow \quad \varphi = 180° - 2 \cdot 57° = 66° = \alpha$.
Das Dreieck FPQ ist aus Symmetriegründen gleichschenklig mit der Basis $[PQ]$.
$\Rightarrow \quad \psi = \varepsilon = 57°$, da es Z-Winkel sind.

2. (a) Siehe Zeichnung zu (b):
   Die Halbgerade $[TE$ liegt auf der Kreistangente mit dem Berührpunkt T. Der Berührradius $[MT]$ steht auf dieser Tangente senkrecht. Weiter gilt: $\delta = \alpha$ (Z-Winkel).
   $\Rightarrow \quad \beta = 90° - \delta = 90° - \alpha$.

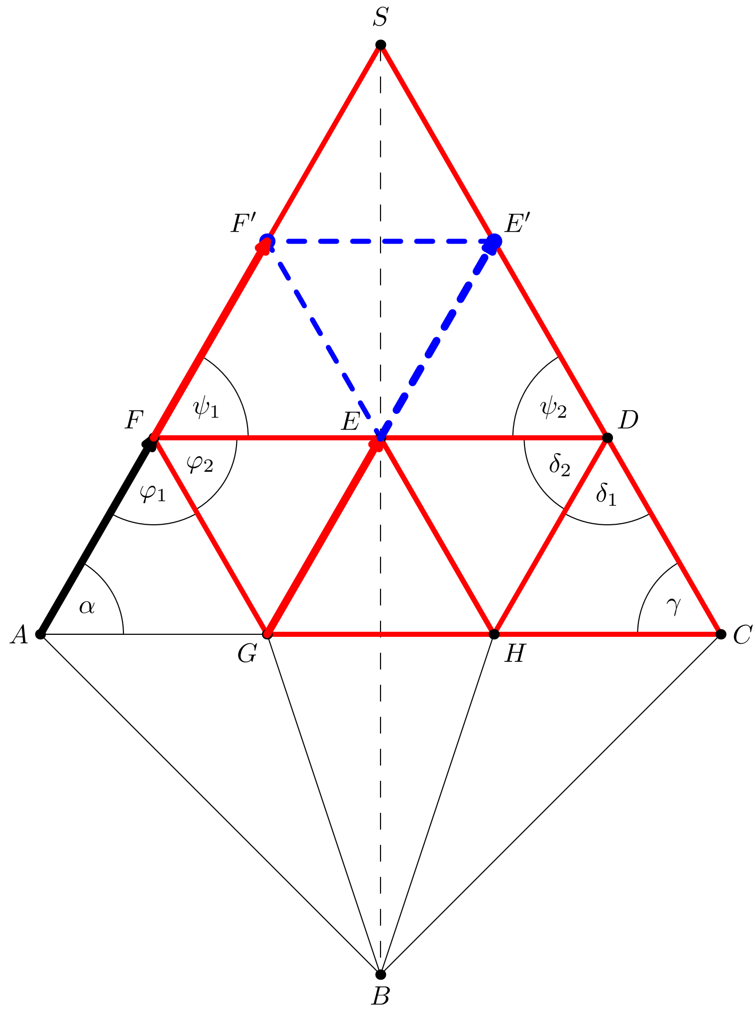
   (b) Wenn also $\alpha = 37°$ ist, dann folgt $\beta = 90° - 37° = 53°$.
   Damit kannst du den Berührradius mit dem Punkt T und seine Kreistangente konstruieren. Das linke Seilende führt senrecht nach unten.



   (c) Aus $\alpha = 30°$ folgt $\beta = 60° \quad \Rightarrow \quad \mu = 180° - 60° = 120°$.
   Der Mittelpunktswinkel μ nimmt also ein Drittel des Vollwinkels $(360°)$ ein. Damit bedeckt das Seil ein Drittel des Rollenumfangs.

   (d) Berechne α aus dem Mittelpunktswinkel μ:
   $\mu = 40\%$ von $360° = 0{,}4 \cdot 360° = 144°$.
   $\beta = 180° - 144° = 36° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° - 36° = 54°$.

3. (a)



(b) Die Gerade SB ist die Symmetrieachse der Figur. Da sich das Trapez $ACDF$ nur aus gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt, gilt: $\alpha = \gamma = 60°$.
Aus dem gleichen Grund gilt: $\delta_1 = \varphi_1 = \delta_2 = \varphi_2 = 60°$.
Also gilt: $\sphericalangle AFD = \sphericalangle FDC = 120°$.

(c) Der Winkel ψ_1 ist der Nebenwinkel des Winkels AFD:
$\psi_1 = 180° - 120° = 60° = \psi_2$.
Im Dreieck FDC haben also zwei Innenwinkel das Maß 60°. Also muss wegen der Innenwinkelsumme von 180° auch der dritte Innenwinkel das Maß 60° haben. Damit ist das Dreieck FDS gleichseitig.

(d) Es entsteht das Viereck $FEE'F'$: siehe Zeichnung.

(e) Es sind **vier** solche Dreiecke, wie du an den dicken gestrichelten Linien erkennen kannst.

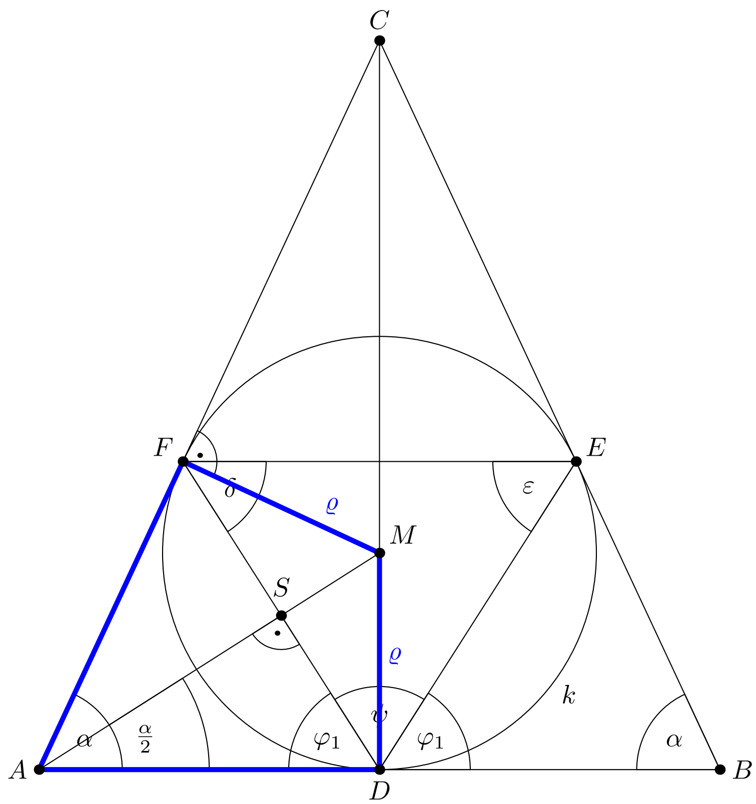
(f) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Alle Winkelmaße sind auf zwei Kommastellen gerundet.

- Das Dreieck BHG ist aus Symmetriegründen gleichschenklig.
  $\Rightarrow \quad \sphericalangle GHB = \sphericalangle BGH = (180° - 36{,}87°) : 2 = 71{,}57°$.
  Das Dreieck GHE ist gleichseitig.

Also gilt: $\sphericalangle HGE = 60° = \sphericalangle EHG = \sphericalangle GEH$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle EHB = 60° + 71,57° = 131,57° = \sphericalangle BGE$

- $\sphericalangle GBA = (90° - \sphericalangle HBG) : 2 = 26,57°$.
  Weiter gilt: $\sphericalangle BAC = 45°$
  $\Rightarrow \quad \sphericalangle AGB = 180° - 45° - 26,57° = 108,43°$
  Anmerkung: Es gibt noch andere Lösüngsmöglichkeiten.

4. (a)



Der Inkreismittelpunkt M ist der Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden, die z.B. auf $[AM]$ und $[CD]$ liegen.
Der Inkreisradius ϱ steht als Berührradius auf $[AB]$ bzw. $[AC]$ senkrecht.

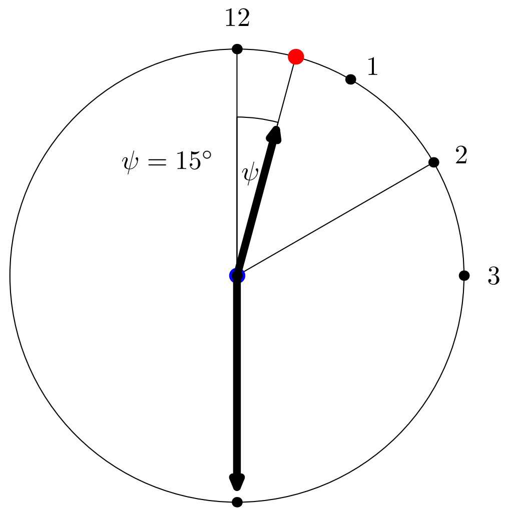
(b)
- Siehe obige Zeichnung.
- Das Viereck $ADMF$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, denn die Diagonale $[AM]$ ist die Halbierende des Winkels mit dem Maß α und damit die Symmetrieachse dieses Vierecks.

(c) Das Dreieck ADS ist rechtwinklig, weil die beiden Diagonalen in jedem Drachenviereck senkrecht aufeinander stehen:
$\varphi_1 = 90° - \dfrac{\alpha}{2} = \varphi_2$. Weiter muss gelten: $\varphi_1 + \varphi_2 + \psi = 180°$
$\Rightarrow \quad \psi = 180° - 2 \cdot \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \psi = \alpha$.

Oder: Die Winkel mit den Maßen δ und ε bilden mit den Winkeln φ_1 bzw. φ_2 Z-Winkel.
Also gilt: $\delta = \varepsilon = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$.

Dann gilt im Dreieck DEF: $\delta + \varepsilon + \psi = 180°$. $\quad \Rightarrow \psi = 180° - 2 \cdot \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ usw.

5. (a)



Der Winkel beträgt $180° - 15° = 165°$.

(b) Der Minutenzeiger hat sich um $180° + 60° = 240°$ weitergedreht.
Bis 13 : 00 Uhr hat sich der Stundenzeiger um $15°$ weitergedreht. 10 Minuten sind der sechste Teil einer Stunde, die einem Winkel von $30°$ entspricht. Dann entsprechen 10 Minuten einem Winkel von $30° : 6 = 5°$. Also hat der Stundenzeiger während dieser Zeit einen Winkel von $30° + 5° = 35°$ überstrichen.

6. Es muss gelten:
$\varphi + (\varphi - 70°) = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2\varphi = 180° + 70° \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 125°$

7. Du siehst in der Zeichnung zwei Nebenwinkel:
$\varepsilon + (\varepsilon - 190°) = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2\varepsilon = 370° \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 185°$.
ε ist somit überstumpf. Das geht bei Nebenwinkeln nicht. Beide Nebenwinkel dürfen nicht größer als $180°$ werden.

8. Es gilt $\alpha + 2\alpha + 48° = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 3\alpha = 180° - 48° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 44°$.

9. Nach dem Satz vom Außenwinkel muss $\alpha + 25° = \alpha + \varepsilon$ ergeben.
   Also gilt: $\varepsilon = 25°$.

10. 1. Winkel: α 2. Winkel: β 3. Winkel: γ
    $\alpha = 2\beta \quad \wedge \quad \gamma = \beta - 36°$.
    Innenwinkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$: $2\beta + \beta + (\beta - 36°) = 180°$
    $\Leftrightarrow \quad 4\beta = 180° + 36° \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 54° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 108° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 18°$.

11. In jedem Dreieck gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$:
    In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: $\alpha + \beta = 90°$

    1. Möglichkeit:
    $\alpha = 5\beta \quad \Rightarrow \quad 5\beta + \beta = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 15° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 75°$
    Die Variante $\beta = 5\alpha$ liefert ein spiegelbildliches Ergebnis.

    2. Möglichkeit:
    $5\alpha = 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18° \quad \Rightarrow \quad \beta = 72°$.
    Die Variante $5\beta = 90°$ liefert ein spiegelbildliches Ergebnis.

12. In allen Zeichnungen findest du gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel so lang wie der jeweilige Kreisradius sind.

    Figur a)

    Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \varepsilon = 35°$. Wegen der Innenwinkelsumme von $180°$ folgt $\sphericalangle BMC = 110°$
    Der Winkel AMB ist der Nebenwinkel dazu: $\sphericalangle AMB = 180° - 110° = 70°$. Im Dreieck ABM gilt dann: $\alpha = (180° - 70°) : 2 = 55°$.

    Figur b)

    Das Dreieck CAM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \gamma_2 = 70°$. Wegen der Innenwinkelsumme von $180°$ folgt $\varphi = 40°$
    Der Winkel ε ist der Nebenwinkel dazu: $\varepsilon = 180° - 40° = 140°$. Im gleichschenkligen Dreieck CMB gilt dann: $\beta = \gamma_1 = (180° - 140°) : 2 = 20°$.

    Figur c)

    Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \sphericalangle CBM = 50°$. Wegen der Innenwinkelsumme von $180°$ folgt $\mu = 80°$.
    Der Winkel $\sphericalangle CMA$ ist der Nebenwinkel dazu: $\sphericalangle CMA = 180° - 80° = 100°$.
    Im gleichschenkligen Dreieck AMC gilt dann:
    $\sphericalangle MAC = \delta = (180° - 100°) : 2 = 40°$

Figur d)

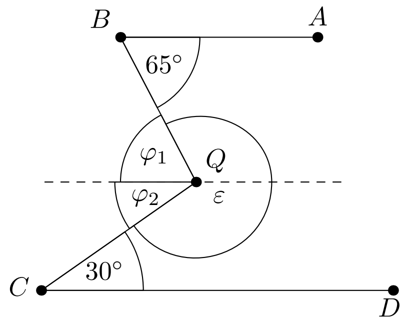
Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \sphericalangle MCB = 65°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\sphericalangle BMC = 50°$.
Der Winkel $\sphericalangle CMA$ ist der Nebenwinkel dazu: $\sphericalangle CMA = 180° - 50° = 130°$
Im gleichschenkligen Dreieck CMB gilt dann:
$\sphericalangle MAC = \sphericalangle ACM = (180° - 130°) : 2 = 25°$
$\varepsilon = \sphericalangle ACM + \sphericalangle MCB = 25° + 65° = 90°$.

Figur e)

Das Dreieck APM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \sphericalangle MPA = \sphericalangle PAM$.
Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt
$\sphericalangle MPA = \sphericalangle PAM = (180° - 100°) : 2 = 40°$
Die Winkel MPA und μ sind maßgleich, weil sie „Z-Winkel" sind. $\Rightarrow \mu = 40°$.

Figur f)

Figur f) $AB \parallel CD$



Die gesuchte Hilfslinie ist die **Parallele** zu den Geraden BA bzw. CD durch den Punkt Q.
Nun gilt: $\varphi_1 = 65°$ (Z-Winkel) und $\varphi_2 = 30°$ (Z-Winkel).
$\varepsilon = 360° - (65° + 30°) = 265°$.

13. In allen Zeichnungen findest du gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel so lang wie der jeweilige Kreisradius sind. In jedem gleichschenkligen Dreieck gibt es zwei maßgleiche Winkel.

Figur a)

Das Dreieck APM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \gamma_1 = 60°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\sphericalangle PAM = 60°$; d.h. das Dreieck APM ist sogar gleichseitig.

Der Winkel CMA ist der Nebenwinkel zu dem 60°-Winkel:
$\sphericalangle CMA = 180° - 60° = 120°$. Im Dreieck AMC gilt dann:

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = (180° - 120°) : 2 = 30°$.
Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \delta_3 = 18°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\sphericalangle BMC = 144°$.
Der Winkel ψ ist der Nebenwinkel zu dem 144°-Winkel: $\psi = 180° - 144° = 36°$.
Das Dreieck PBM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \gamma_2 = (180° - 36°) : 2 = 72°$.

Im gleichschenkligen Dreieck ABM ist $\sphericalangle AMB = 60° + 36° = 96°$.
$\Rightarrow \delta_1 = \delta_2 = (180° - 96°) : 2 = 42°$

Figur b)

Der Winkel CMA ist der Nebenwinkel zu dem 36°-Winkel:
$\sphericalangle CMA = 180° - 36° = 144°$. Das Dreieck AMC ist gleichschenklig:
$\Rightarrow \varphi_1 = \sphericalangle ACM = (180° - 144°) : 2 = 18°$.

Weiter gilt: $\sphericalangle MCB = 48° - 18° = 30°$. Weil das Dreieck MBC gleichschenklig ist, folgt $\varphi_2 = 30°$. $\sphericalangle BMC = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$.
Der Winkel ψ_1 ist der Nebenwinkel zu dem 120°-Winkel:
$\psi_1 = 180° - 120° = 60°$.

Im Dreieck ABM gilt: $\sphericalangle AMB = 36° + 60° = 96°$. Das Dreieck MBC ist gleichschenklig:
$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = (180° - 96°) : 2 = 42°$.

Im Dreieck PBM findest du über die Innenwinkelsumme:
$\psi_2 = 180° - (60° + 42°) = 78°$.

14. (a)
    - Der Winkel BAC ist der Nebenwinkel des 135° -Winkels:
      $\sphericalangle BAC = 180° - 135° = 45° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 180° - 45° - 45° = 90°$.
    - Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, weil es zwei maßgleiche Innenwinkel besitzt: $\Rightarrow \quad \overline{AC} = \overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

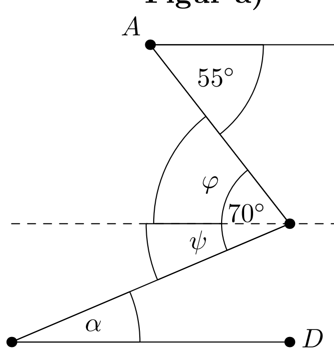
    (b)
    - Das Dreieck TQR ist rechtwinklig. $\Rightarrow \quad \beta = 90° - 30° = 60°$. Der Winkel TPR ist der Nebenwinkel des 120° -Winkels:
      $\sphericalangle TPR = 180° - 120° = 60° \quad \Rightarrow \quad \delta = 180° - 90° - 60° = 30°$.
    - Das Dreieck PQR ist wegen seiner drei 60° -Innenwinkel **gleichseitig**:
      $\Rightarrow \quad \overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{QR} = 7{,}64\,\text{cm}$.
      Die Strecke $[RT]$ ist in diesem Dreieck PQR eine Winkelhalbierende, also gleichzeitig die Mitttelsenkrechte auf die Basis $[PQ]$.
      $\Rightarrow \quad \overline{PT} = 0.5 \cdot \overline{PQ} = 3{,}82\,\text{cm}$.

15. (a)
- Der Winkel CPA ist der Nebenwinkel des $60°$-Winkels:
  $\sphericalangle CPA = 180° - 60° = 120°$.
  $\Rightarrow \quad \alpha = (180° - 120°) : 2 = 30°$.
  Wegen $\alpha + \delta = 90°$ folgt: $\delta = 60°$.
  Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck PBC ergibt sich $\beta = 60°$.
- Das Dreieck APC enthält zwei maßgleiche Innenwinkel, also ist es **gleichschenklig**.
  $\Rightarrow \quad \overline{AP} = \overline{PC} = 5\,\text{cm}$.
  Das Dreieck PBC enthält drei maßgleiche Innenwinkel, also ist es **gleichseitig**.
  Damit gilt: $\overline{AP} = 5\,\text{cm} = \overline{PC} = \overline{CB} = \overline{PB}$
  $\Rightarrow \quad \overline{AB} = 5\,\text{cm} + 5\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$.

(b) In der Figur b) gilt: $\overline{PQ} = 9{,}38\,\text{cm}$.
- Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck TQR ergibt sich:
  $\sphericalangle QTR = 180° - 2 \cdot 15° = 150°$.
  Der Winkel RTP ist der Nebenwinkel des $150°$-Winkels:
  $\sphericalangle RTP = 180° - 150° = 30°$.
  Im Dreieck PTR folgt $\psi = (180° - 30°) : 2 = 75°$.
  Anmerkung: Wegen $\psi + 15° = 90°$ ist das Dreieck PQR rechtwinklig.
- Das Dreieck TQR ist gleichschenklig, weil es zwei maßgleiche Innenwinkel besitzt:
  $\Rightarrow \quad \overline{TQ} = \overline{TR}$.
  Das Dreieck PTR ist ebenfalls gleichschenklig, weil es zwei maßgleiche Innenwinkel besitzt:
  $\Rightarrow \quad \overline{TP} = \overline{TR}$.
  Also gilt: $\overline{TQ} = \overline{TR} = \overline{TP}$. Also ist der Punkt T der Mittelpunkt der Seite $[PQ]$ und es gilt: $\overline{PT} = 0.5 \cdot \overline{PQ} = 4{,}69\,\text{cm}$.
  Anmerkung: Wegen $\overline{TQ} = \overline{TR} = \overline{TP}$ liegen die Punkte P, Q und R auf einer Kreislinie mit dem Mittelpunkt T.

16.

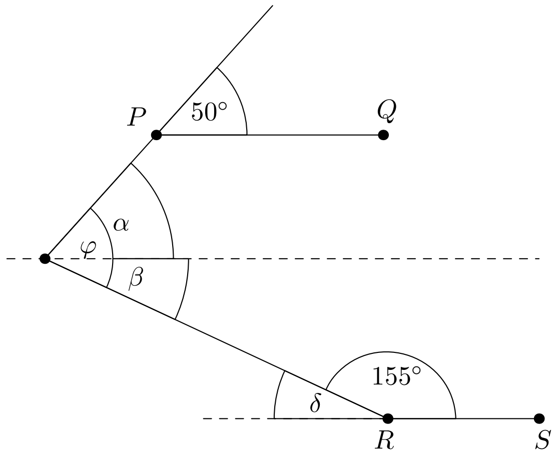
Figur a)



Eine Hilfslinie ist z.B. die Parallele zu AB bzw. CD, die durch den Scheitel des $70°$-Winkels verläuft (hier: die gestrichelte Linie).

Du erkennst nun: $\varphi = 55°$ (Z-Winkel) und $\psi = \alpha$ (Z−Winkel).
Wegen $\varphi + \psi = 70°$ ist nun $\psi = 70° - 55° = 15° = \alpha$.
Anmerkung: Es gibt auch eine andere Hilfslinie, die zur Lösung führt, nämlich die Senkrechte zu CD durch den Scheitel des 70°-Winkels. Probiere es aus.

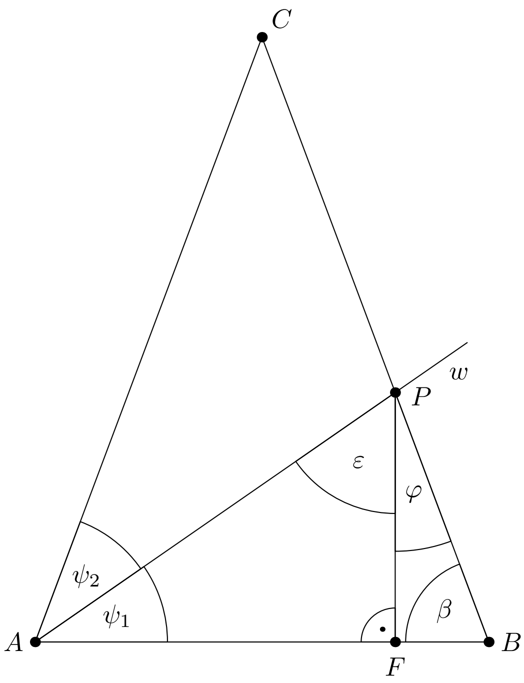
Figur b)



Wieder ist eine Hilfslinie ist z.B. die Parallele zu PQ bzw. RS, die durch den Scheitel des Winkels mit dem Maß φ verläuft (hier: die gestrichelte Linie in der Mitte). Du erkennst nun: $\alpha = 50°$ (F-Winkel).

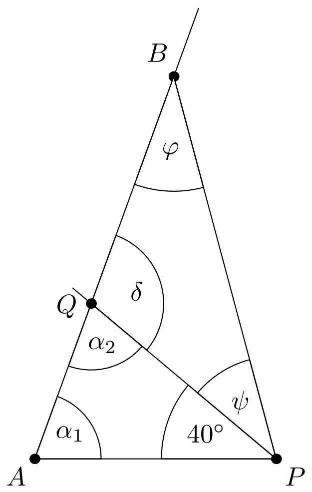
Wenn du die Strecke $[SR]$ ein wenig über den Punkt R hinaus verlängerst, entsteht ein weiterer Winkel - hier mit dem Maß δ.
Du siehst einerseits : $\delta = 180° - 155° = 25°$ (Nebenwinkel).
Andererseits sind die Winkel β und δ maßgleiche Z−Winkel. $\Rightarrow \quad \beta = \delta = 25°$.
Also ergibt sich $\varphi = \alpha + \beta = 50° + 25° = 75°$

17.



Im Dreieck AFP gilt: $\psi_1 = 90° - \varepsilon = 90° - 56,81° = 33,19°$.
Weil w die Winkelhalbierende ist, gilt: $\psi_2 = \psi_1 = 33,19°$.
Weil das Dreieck ABC gleichschenklig ist, gilt $\beta = 2 \cdot 33,19° = 66,38°$.
Im rechtwinkligen Dreieck FBP gilt dann: $\varphi = 90° - \beta = 90° - 66,38°$
$\Rightarrow \quad \varphi = 23,62°$.

18. (a)

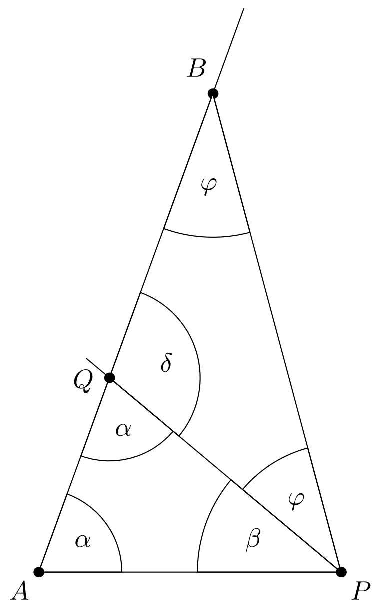


(b) Die beiden Dreiecke APQ und QPB sind gleichschenklig: $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$.
Also gilt: $\alpha_1 = \alpha_2 = (180° - 40°) : 2 = 70°$.
Der Winkel mit dem Maß δ ist der Nebenwinkel von α_2:
$\delta = 180° - \alpha_2 = 180° - 70° = 110°$.

Im Dreieck QPB gilt: $\varphi = \psi$.
$\Rightarrow \quad \varphi = \psi = (180° - 110°) : 2 = 35°$.

(c) Es müsste $\alpha_1 = 40° + \psi$ gelten, aber: $40° + 35° = 75° \neq 70° \quad (\dagger)$.

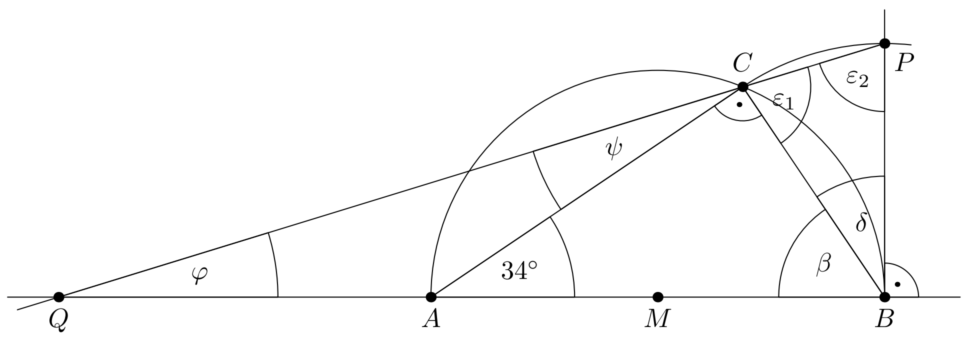
(d)



Es muss gelten:
$\beta = 180° - 2 \cdot \alpha, \quad \delta = 180° - \alpha$ und
$\varphi = 180° - \delta = [180° - (180° - \alpha)] : 2 = \frac{1}{2}\alpha$.
Soll das Dreeick APB gleichschenklig werden, dann muss $\alpha = \beta + \varphi$ sein:
$\alpha = 180° - 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 2,5\alpha = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 72°$.

(e) In der Lösung der Aufgabe (d) wurde gezeigt, dass es nur ein einziges gleichschenkliges Dreieck APB gibt. Dessen Basiswinkel hat aber das Maß 72°. Im Falle des gleichseitigen Dreiecks müsste der Basiswinkel (wie alle Inneninkel dort) 60° betragen. Also ist ein gleichseitiges Dreeick auf diese Weise nicht zu konstruieren.

19. (a)



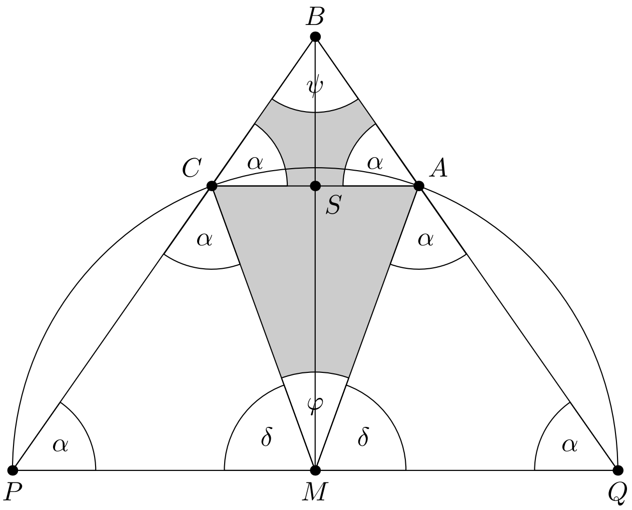
(b) Der Halbkreis mit dem Durchmesser $[AB]$ ist der THALES-Kreis über $[AB]$.
Also folgt: $\sphericalangle ACB = 90°$.

$\Rightarrow \quad \beta = 90° - 34° = 56° \quad \Rightarrow \quad \delta = 90° - \beta = 90° - 56° = 34°.$
Im Dreieck BPC gilt: $\overline{BC} = \overline{BP}$, also ist das Dreieck BPC gleichschenklig.
$\Rightarrow \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = (180° - 34°) : 2 = 73°.$
Das Dreieck QBP ist rechtwinklig: $\varphi + 90° + \varepsilon_2 = 180°$.
$\Rightarrow \quad \varphi + \varepsilon_2 = 90° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 17°.$

(c) Im Dreieck QBC gilt:
$\varphi + \beta + 90° + \psi = 180°$. Also: $17° + 56° + 90° + \psi = 180°$.
$\Rightarrow \quad \psi = 17°.$
Damit haben zwei Innenwinkel des Dreiecks ACQ gleiches Maß. Also ist das Dreieck ACQ gleichschenklig.

20. (a) Das Viereck $MABC$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, denn die beiden Diagonalen stehen aufeinander senkrecht.

(b)



(c) Siehe Zeichnung.

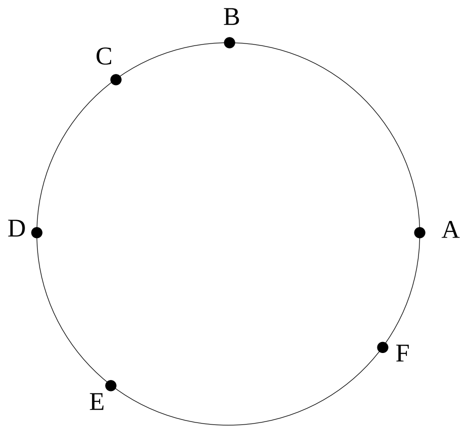
(d) Im Dreieck PMC gilt: $2\alpha + \delta = 180° \quad \Rightarrow \quad \delta = 180° - 2\alpha.$
Am Punkt M gilt: $\delta + \varphi + \delta = 180°$.
Also: $180° - 2\alpha + \varphi + 180° - 2\alpha = 180° \quad \Rightarrow \quad 360° + \varphi - 4\alpha = 180°$
$\Rightarrow \quad \varphi = 4\alpha - 180°.$

(e) Es muss $\varphi = 4\alpha - 180° > 0$ sein: $\Leftrightarrow \quad 4\alpha - 180° > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 45°$. Außerdem muss $\alpha < 90°$ sein. Insgesamt muss gelten $45° < \alpha < 90°$.

(f) Im Dreieck CAB gilt: $2\alpha + \psi = 180° \quad \Rightarrow \quad \psi = 180° - 2\alpha.$

(g) Damit das Viereck $MABC$ eine Raute wird, muss $\varphi = \psi$ gelten:
Also: $4\alpha - 180° = 180° - 2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 6\alpha = 360° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 60°.$

21.



Eckpunkt A als erster:

ABC, ABD, ABE, ABF
ACD, ACE, ACF
ADE, ADF
AEF.

Eckpunkt B als erster:

BCD, BCE, BCF
BDE, BDF
BEF.

Eckpunkt C als erster:

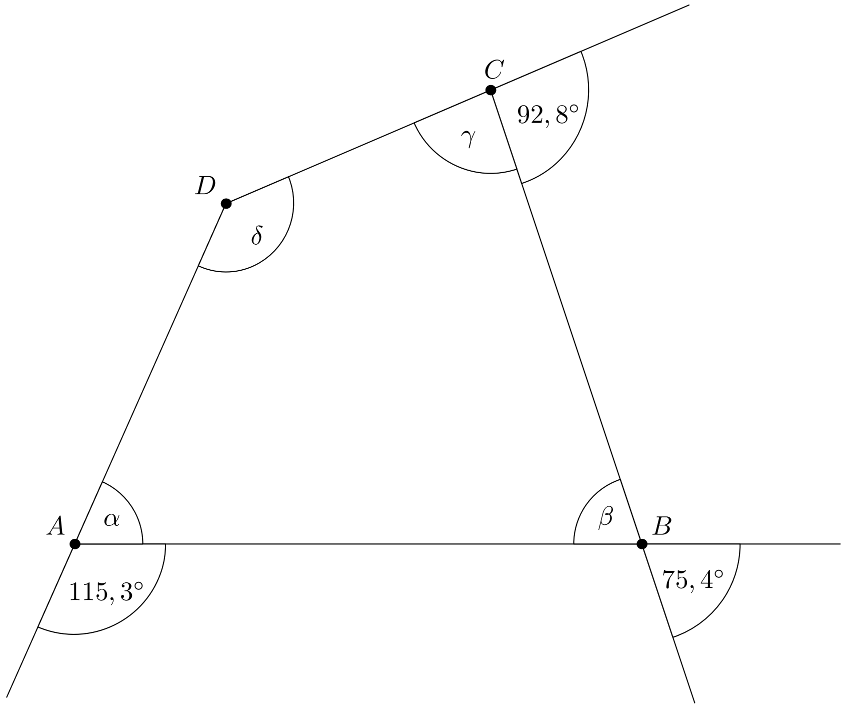
CDE, CDF
CEF.

Eckpunkt D als erster:

DEF.

Es gibt nicht mehr und nicht weniger als 20 solche Dreiecke.

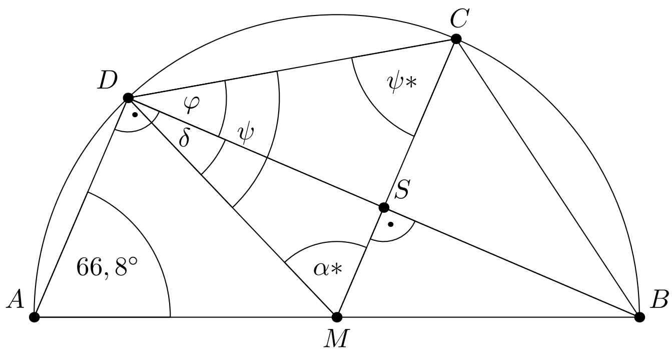
22.



(a) „... die Halbgeraden $[AB$ und $[DC$ nicht parallel sind."

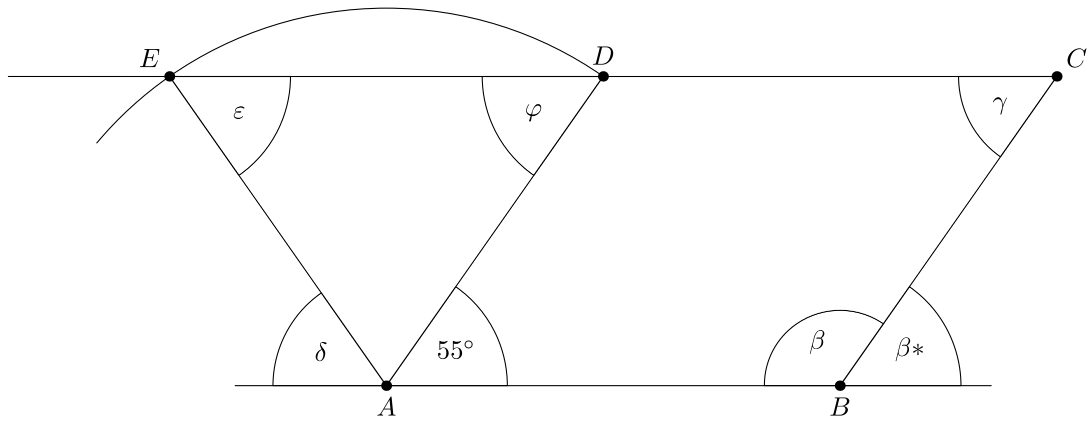
(b) $\beta = 75,4^\circ$ (Scheitelwinkel)
$\gamma = 180^\circ - 92,8^\circ = 87,2^\circ$ und
$\alpha = 180^\circ - 115,3^\circ = 64,7^\circ$ (jeweils Nebenwinkel)
Die Innenwinkelsumme in jedem Viereck beträgt 360°.
$\Rightarrow \quad \delta = 360^\circ - 75,4^\circ - 87,2^\circ - 64,7^\circ = 132,7^\circ$.

23. (a)



(b) Der Halbkreis ist gleichzeitig der THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$. Also gilt: $\sphericalangle ADB = 90^\circ$.
$\Rightarrow \quad [AD] \parallel [MC] \quad \Rightarrow \quad \alpha* = 66,8^\circ$.
Das Dreieck MCD ist gleichschenklig; es gilt: $\overline{MC} = \overline{MD} = 4\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad \psi* = \psi = (180^\circ - 66,8^\circ) : 2 = 56,6^\circ$.
Im Dreieck MSD gilt: $\delta = 90^\circ - \alpha* = 90^\circ - 66,8^\circ = 23,2^\circ$.
Also ist $\varphi = \psi - \delta = 56,6^\circ - 23,2^\circ = 33,4^\circ$.

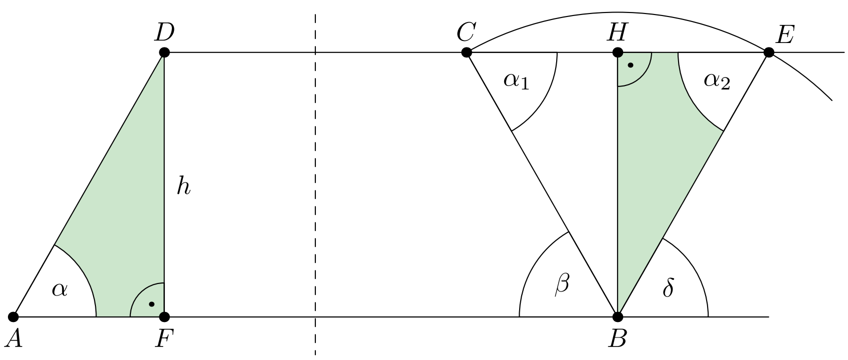
24. (a)



(b) Es gilt $\overline{AD} = \overline{AE} = 5\,\text{cm}$; also ist das Dreieck ADE gleichschenklig.

(c)
- Im Parallelogramm $ABCD$ gilt: $\gamma = 55°$.
  $\Rightarrow \quad \varphi = 55°$ (F-Winkel zu γ).
  Weil das Dreieck ADE gleichschenklig ist, folgt $\varphi = \varepsilon = 55°$.
- Dann gilt aber auch $\delta = \varepsilon = 55°$ (Z-Winkel zu ε).
  $\Rightarrow \quad \beta{*} = 55°$ (Z-Winkel zu γ).
  $\Rightarrow \quad \beta = 180° - 55° = 125°$ (Nebenwinkel von $\beta{*}$).
  Andererseits ist $\sphericalangle BAE$ der Nebenwinkel von δ:
  $\sphericalangle BAE = 180° - 55° = 125° = \beta$.
  Im Viereck $ABCE$ gilt: $[AB] \parallel [CE]$.
  Die beiden spitzen und die beiden stumpfen Innenwinkel haben jeweils gleiches Maß. Also ist das Viereck $ABCE$ ein achsensymmetrisches Trapez.

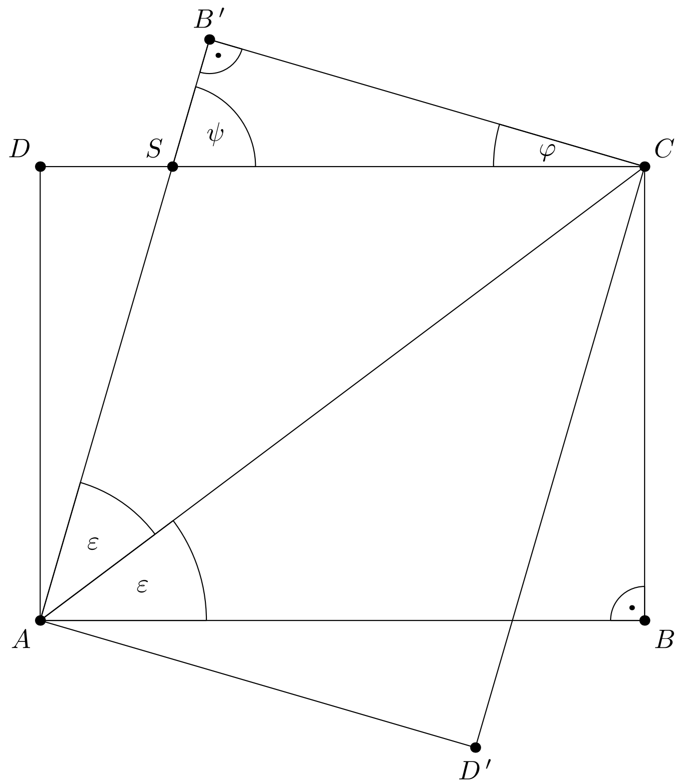
25. (a)



(b)
- Es gilt: $\overline{BC} = \overline{BE}$, weil die beiden Punkte C und E auf derselben Kreislinie mit B als Mittelpunkt liegen.
- Weil das Trapez achsensymmetrisch ist, folgt $\beta = \alpha$.
  Weiter gilt: $\beta = \alpha_1$ (Z-Winkel). Also folgt $\alpha_1 = \alpha$.

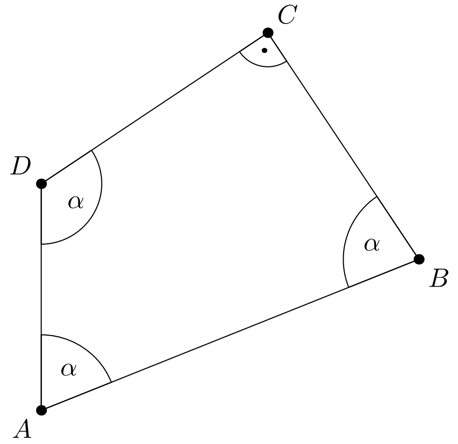
- Das Dreieck BEC ist gleichschenklig. $\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.
  Weiter folgt $\delta = \alpha_2$ (Z-Winkel) $\Rightarrow \quad \delta = \alpha$, d.h. es gilt: $[AD] \parallel [BE]$ weil damit δ und α F-Winkel sind.
  Beim Trapez $ABCD$ gilt $[AB] \parallel [CD]$ und damit auch $[AB] \parallel [ED]$.
  Daher sind im Viereck $ABED$ jeweils zwei gegenüberliegende Seiten parallel, also ist das Viereck $ABED$ ein Parallelogramm.

26. (a)



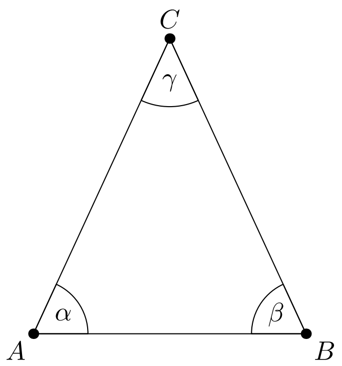
(b) Jede Achsenspiegelung ist längen- und winkeltreu. Daher sind das Viereck $AD'CB'$ und das Rechteck $ABCD$ kongruent. $\Rightarrow \quad \sphericalangle SB'C = 90°$.
Der Winkel CSB' ist ein Stufenwinkel zum Winkel BAS:
$\Rightarrow \quad \psi = 2 \cdot \varepsilon = 73,74°$.
$\Rightarrow \quad \varphi = 90° - \psi = 90° - 73,74° = 16,26°$.

27.



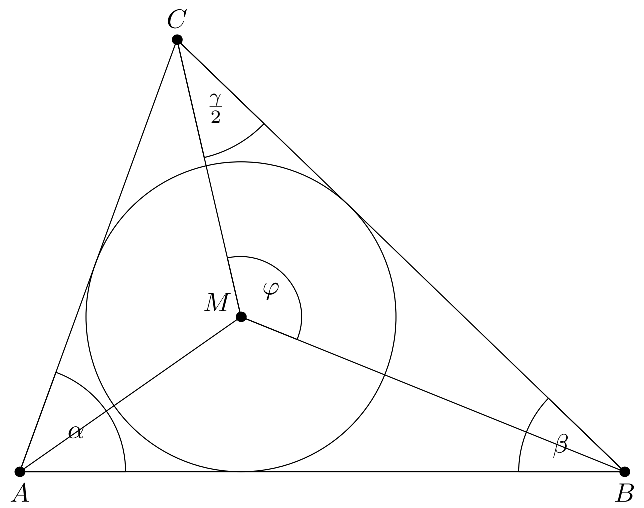
Es gilt: $\alpha + \alpha + \alpha + 90° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot \alpha + 90° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 90°$.
Die drei restlichen Innenwinkel des Vierecks sind damit ebenfalls rechte Winkel. Bei diesem Viereck muss es sich also um ein Rechteck handeln.

28.

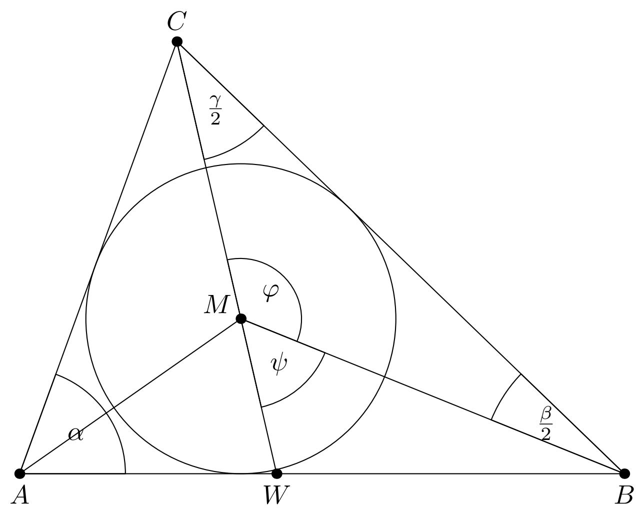


In einem gleichschenkligen Dreieck haben die beiden Basiswinkel gleiches Maß. In der Figur gilt also: $\alpha = \beta$.
1. Möglichkeit: $\alpha = \beta = 42{,}68° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 180° - 2 \cdot 42{,}68° = 94{,}64°$.
2. Möglichkeit: $\gamma = 42{,}68° \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = (180° - 42{,}68°) : 2 = 68{,}66°$.

29. (a)



(b) $\gamma = 180° - 70° - 44° = 66°$.
Die drei Winkelhabierenden des Dreiecks ABC schneiden sich im Inkreismittelpunkt M.
Also folgt: $\varphi = 180° - 0,5 \cdot 44° - 0.5 \cdot 66° = 125°$.

(c)
- $\gamma = 180° - 70° - 60° = 50°$.
  $\varphi = 180° - 0,5 \cdot 60° - 0.5 \cdot 50° = 125°$.
  Das Winkelmaß φ hängt gar nicht vom Winkelmaß β ab.
- 

  Der Winkel mit dem Maß ψ ist ein Außenwinkel am Dreieck MBC: $\Rightarrow \quad \psi = \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2}$.

  Gleichzeitig gilt $\varphi = 180° - \psi$.

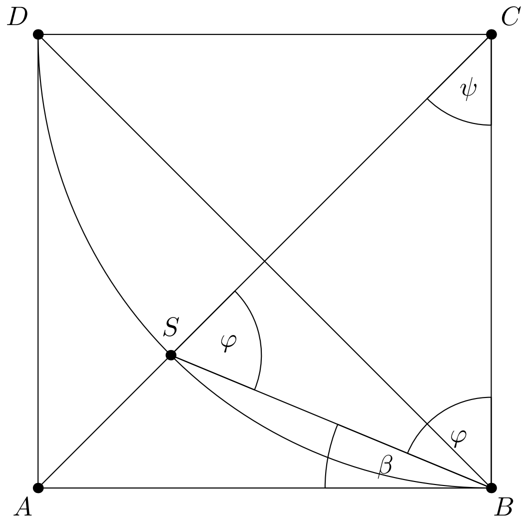
  Wegen $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ folgt $\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$.

Also ergibt sich: $\varphi = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Und damit $\varphi = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

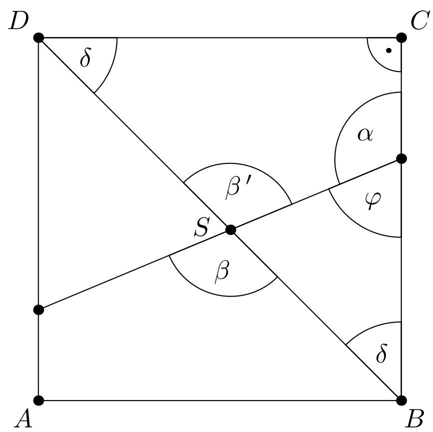
(d) $90° + \frac{\alpha}{2} = 135,68° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 91,36°$.

30. (a)



(b) Im Quadrat $ABCD$ halbiert die Diagonale $[AC]$ den rechten Winkel DCB. Also gilt: $\psi = 45°$.
Das Dreieck SBC ist gleichschenklig. $\quad \Rightarrow \quad \varphi = (180° - 45°) : 2 = 67,5°$.
$\Rightarrow \quad \beta = 90° - \varphi = 22,5°$.

31.

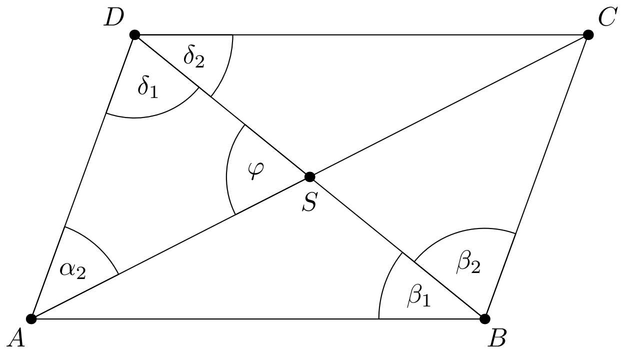


1. Möglichkeit: Über die Innenwinkelsumme im Viereck $SQCD$
Weil jede Quadratdiagonale Winkelhalbierende von zwei rechten Winkeln ist, folgt $\delta = 45°$.

Dann gilt im Viereck $SQCD$: $45° + \beta' + 123,4° + 90° = 360°$
$\Rightarrow \quad \beta' = 101,6°$.
Weil β' und β Scheitelwinkel sind, folgt $\beta' = \beta = 101,6°$.

2. Möglichkeit: Über den Satz vom Außenwinkel
φ ist der Nebenwinkel von α. Also gilt: $\varphi = 180° - 123,4° = 56,6°$.
β ist ein Außenwinkel am Dreieck BQS: $\beta = \delta + \varphi = 45° + 56,6° = 101,6°$.

32. (a)



(b) Es gibt mehrere Möglichkeiten, z.B.:
$\Delta\, ASD$: $\delta_1 = 180° - 42,1° - 65,3° = 72,6° = \beta_2$ (Z-Winkel) .
$\beta_1 = \delta_2 = 38,7°$ (Z-Winkel) $\quad \Rightarrow \quad \beta = \delta_1 + \delta_2 = 111,3°$.

33. Es müsste gelten: $\beta = \sphericalangle CBA = 180° - \beta^* = 180° - 77,6° = 102,4°$.
Weil aber α^* und β zwei zugehörige F-Winkel sind, müssten beide Winkel gleiches Maß besitzen.
Aber in der Angabe steht: „$\alpha^* = 109,2° \neq 102,4°$.“ Das geht nicht.

5. Drehung

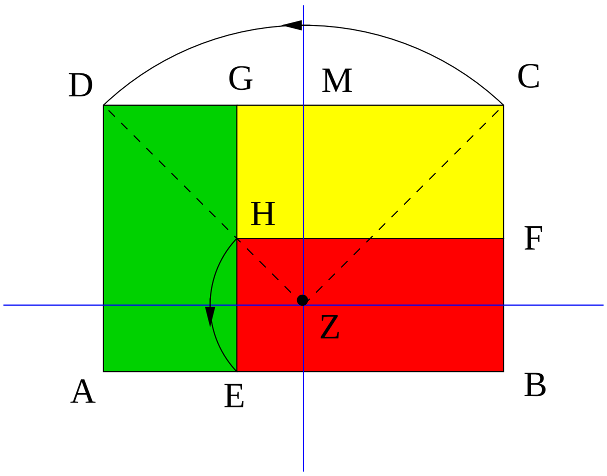
1.

(a) Das Rechteck $ABCD$ ist 12 cm breit und 8 cm hoch.
Die Seitenlängen stehen im Verhältnis 2:3.
Breite jedes Rechtecks im Inneren: $3x$ cm
Höhe jedes Rechtecks im Inneren: $2x$ cm
Breite : Höhe = 2x : 3x = 2 : 3. Das gilt für alle $x \in \mathbb{Q}^+$.

(b) $u(x) = 2 \cdot [(2x + x) + (x + x)]\,\text{cm} = 10x\,\text{cm}$

(c) $10x = 430 \quad \Rightarrow \quad x = 43$

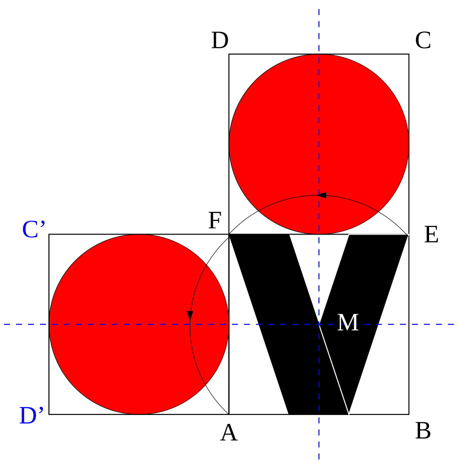
(d)



Für diese Drehung gilt z.B.: $C \to D$ und $H \to E$. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecken $[CD]$ und $[HE]$ ergibt den Drehpunkt Z.
Die Dreiecke DZM und ZCM sind gleichschenklig-rechtwinklig. Also hat der Drehwinkel CZD das Maß 90°.

2. (a) –

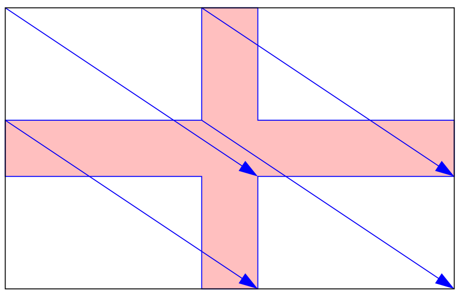
(b)
- Der Punkt E muss so gedreht werden, dass er auf F zu liegen kommt. Also muss das Drehzentrum auf der Mittelsenkrechten der Strecke $[EF]$ liegen.
Gleichzeitig wird der Punkt F auf den Punkt A gedreht. Also muss das Drehzentrum auch auf der Mittelsenkrechten der Strecke $[AF]$ liegen.
Also liegt das Drehzentrum im Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten, nämlich im Punkt M, dem Quadratmittelpunkt.
-



- 1. Möglichkeit:
  Das Dreieck MEF ist gleichschenklig-rechtwinklig mit der Hypotenuse $[FE]$.
  2. Möglichkeit:
  Die Mittelenkrechte der Strecke $[FE]$ deckt sich nach der Drehung mit der Mittelsenkrechten zu $[AF]$. Weil beide Mittelsenkrechten aufeinander senkrecht stehen, hat der Drehwinkel das Maß 90°.

3.

(a) –

(b)
- 
- $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ -3 \end{pmatrix}$

(c)
- Das Drehzentrum liegt im Schnittpunkt der Diagonalen des großen Rechtecks. Dieser Schnittpunkt deckt sich mit dem Symmetriezentrum des Kreuzes. Der Drehwinkel beträgt 180°.
- Es handelt sich um eine Punktspiegelung.

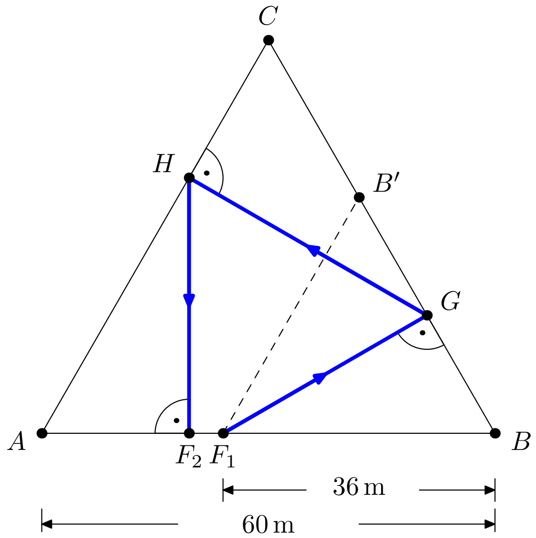
4. (a) –

(b) $\varphi \in \{k \cdot 90°\}$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Das Drehzentrum ist der Quadratmittelpunkt. Die geforderten Hilfslinien verlaufen

vom Drehzentrum zu Urbildpunkten und den zugehörigen durch Drehung entstandenen Bildpunkten.

(c) Wegen $2 \cdot 90° = 180°$ kann auch um $180°$ gedreht werden. Jede Drehung um $180°$ ist eine Punktspiegelung.

5. (a)



(b) **In einem gleichseitigen Dreieck hat jeder Innenwinkel das Maß** $60°$**.**
Wenn du den Punkt B am Punkt G spiegelst, dadurch erhältst du den Punkt B'. Weil jede Achsen- oder Punktspiegelung winkeltreu ist, muss das Dreieck F_1BB' gleichseitig sein, denn alle Innenwinkel haben das Maß $60°$.
Dann ist das Dreieck F_1BG ein halbes gleichseitiges Dreieck und es gilt:
$\overline{BG} = 0,5 \cdot 36\,\text{m} = 18\,\text{m}$.
$\Rightarrow \quad \overline{GC} = 60\,\text{m} - 18\,\text{m} = 42\,\text{m}$.
Das Dreieck HGC ist wieder ein halbes gleichseitiges Dreieck und es gilt:
$\overline{HC} = 0,5 \cdot 42\,\text{m} = 21\,\text{m}$.
$\Rightarrow \quad \overline{AH} = 60\,\text{m} - 21\,\text{m} = 39\,\text{m}$.
Weil das Dreieck AF_2H wiederum ein halbes gleichseitiges Dreieck ist, folgt:
$\overline{AF_2} = 0,5 \cdot 39\,\text{m} = 19,5\,\text{m}$.
$\Rightarrow \quad \overline{F_1F_2} = 60\,\text{m} - 36\,\text{m} - 19,5\,\text{m} = 4,5\,\text{m}$.
Die beiden Fahnenmasten sind $4,5\,\text{m}$ voneinander entfernt.

(c)
- Dieser Sachverhalt ergibt sich sofort aus der Längentreue de Achsenspiegelung.
- Wie schon vorher gezeigt sind die Längen der Strecken $[GF_1]$ und $[GF_1']$ sowie $[HF_2]$ und $[HF_2']$ gleich. Hinzu kommt lediglich die mittlere Strecke $[GH]$, die ja den Rest beiden Streckenzüge ausmacht. Also sind beide Wege gleich lang.
- Die kürzeste Verbindung zwischen F_1' und F_2' liegt ist die gerade Linie zwischen diesen beiden Punkten.
  Aus der Längentreue der Achsenspiegelung folgt nun, dass $\overline{F_1G^*} = \overline{F_1'G^*}$ und $\overline{F_2H^*} = \overline{F_2'H^*}$ sein muss.

Weil $[G^*H^*]$ in beiden Streckenzügen den Rest bildet, ist der Streckenzug $F_1 - G^* - H^* - F_2$ genauso lang wie die minimale Strecke $[F_1'F_2']$, also ebenfalls minimal.

Anmerkungen

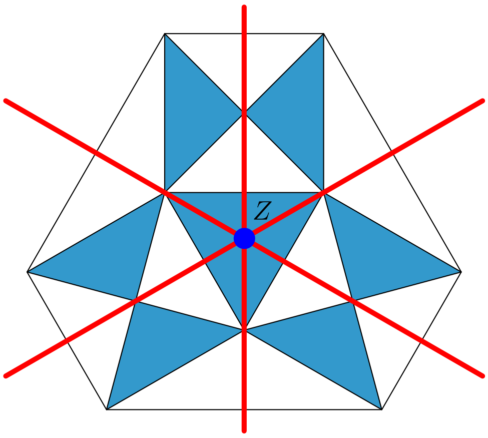
- Obwohl die drei Lote jeweils die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes zur gegenüber liegenden Seite des Grundstücks darstellen, ergibt die Summe dieser drei Entfernungen nicht den kürzesten Weg von F_1 zu den zwei Seiten $[BC]$ und $[CA]$ nach F_2.
- Mit Hilfe der GEONExT-Datei „07eh011.gxt“, kannst du den Kontrollgang von Herrn Lith variieren.

6. Zur besseren Veranschaulichung sind die Felder der ursprünglichen Figur durchnummeriert:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figur a): Wenn du dieses Muster auf die obige Figur schiebst, dann werden alle Felder überdeckt (das Feld Nr. 3 sogar doppelt).
Figur b): Ein Feld bleibt weiß: z.B. Nr. 6 oder Nr. 7.
Figur c): Wenn du diese Figur um $-90°$ oder $270°$ drehst, lässt sie sich so auf die ursprüngliche Figur schieben, dass alle Felder dunkel erscheinen.
Figur d): Eines der Felder 3, 6 oder 9 bleibt in jedem Fall weiß.
Figur e): Wenn du diese Figur an ihrem Mittelpunkt spiegelst oder um $180°$ drehst, lässt sie sich so auf die ursprüngliche Figur schieben, dass alle Felder dunkel erscheinen.

7. (a)
- Die drei Mittelsenkrechten auf die Seiten $[EC]$, $[BI]$ und $[HF]$ schneiden sich in Z.
- Die drei Mittelsenkrechten auf die Seiten $[DA]$, $[AG]$ und $[GD]$ schneiden sich in Z.
- Die drei Mittelsenkrechten auf die Seiten $[CB]$, $[IH]$ und $[FE]$ schneiden sich in Z.

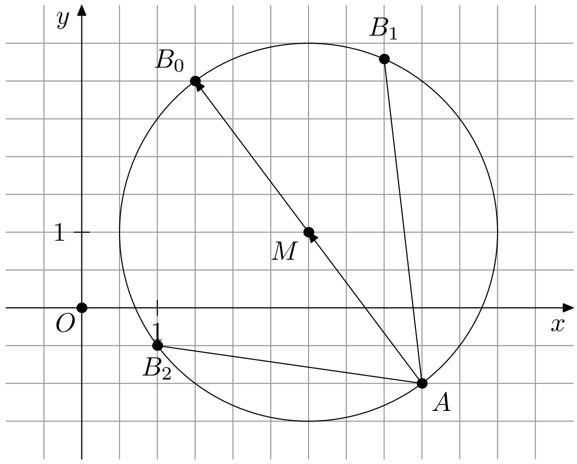


(b) $\alpha \in \{120°; 240°\}$

(c) Der Winkel φ wird von den beiden Quadraten $ABCD$ und $GHIA$ eingeschlossen. Hinter dem Scheitel liegt das gleichseitige Dreieck ADG. Mit dem betreffenden Vollwinkel ergibt sich:
$2 \cdot 90° + 60° + \varphi = 360° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 120°$

6. Punktspiegelung

1.



(a) Siehe Zeichnung.

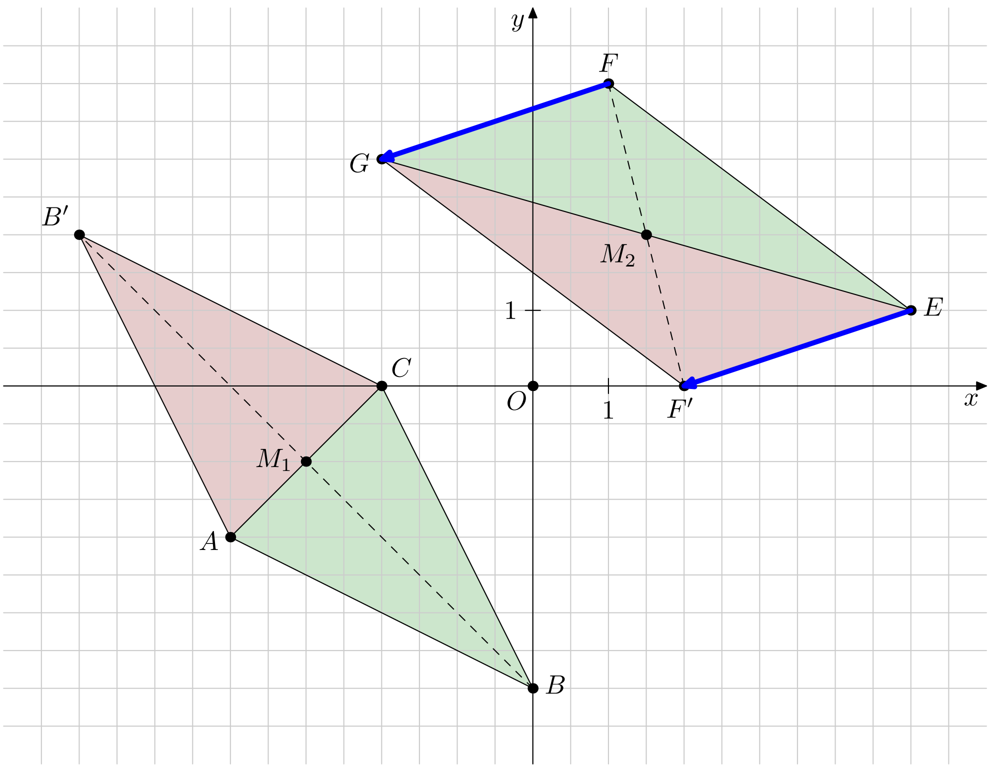
(b) Siehe Zeichnung.

(c) Siehe Zeichnung. Die längste Kreissehne muss durch den Kreismittelpunkt verlaufen. Es gilt z.B.: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB_0}$ mit $B_0(x \mid y)$.

$$\begin{pmatrix} 3-4,5 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -1,5 = x-3 \text{ und } 2 = y-1$$

$$\Rightarrow \quad B_0(1,5 \mid 3)$$

2. (a)



(b)
- Siehe Zeichnung.
  Hier gilt: $A \xrightarrow{M_1} C \quad C \xrightarrow{M_1} A$ und $B \xrightarrow{M_1} B'$
- Dieses Viereck ist eine **Raute**.
  Anmerkung: Auf jeden Fall ist das Viereck ein Parallelogramm, weil jede Punktspiegelung winkeltreu ist. Weil das Dreieck ABC aber gleichschenklig ist, sind alle vier Seiten gleich lang, also ist dieses Parallelogramm sogar eine Raute.
- Alle vier Seiten sind gleich lang.

(c)
- Siehe Zeichnung. Hier gilt: $E \xrightarrow{M_2} G \quad G \xrightarrow{M_2} E$ und $F \xrightarrow{M_2} F'$
- Es ist ein **Parallelogramm**.
- Je zwei gegenüber liegende Seiten sind parallel.

(d)

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(e) Es sei $F'(x' \mid y')$. Im Parallelogramm $EFGF'$ gilt z.B.: $\overrightarrow{EF'} = \overrightarrow{FG}$:

$$\begin{pmatrix} x'-5 \\ y'-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lllll} \Leftrightarrow & x'-5 = -3 & \Leftrightarrow & x' = -2 & \\ \wedge & y'-1 = -1 & \Leftrightarrow & y' = 0 & \Rightarrow \quad F'(2 \mid 0) \end{array}$$

7. Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche

1. $\delta = 90°$ $\alpha = 45°$ $\varepsilon = 126{,}86°$ $\varphi = 63{,}43°$ $\psi = 81{,}86°$

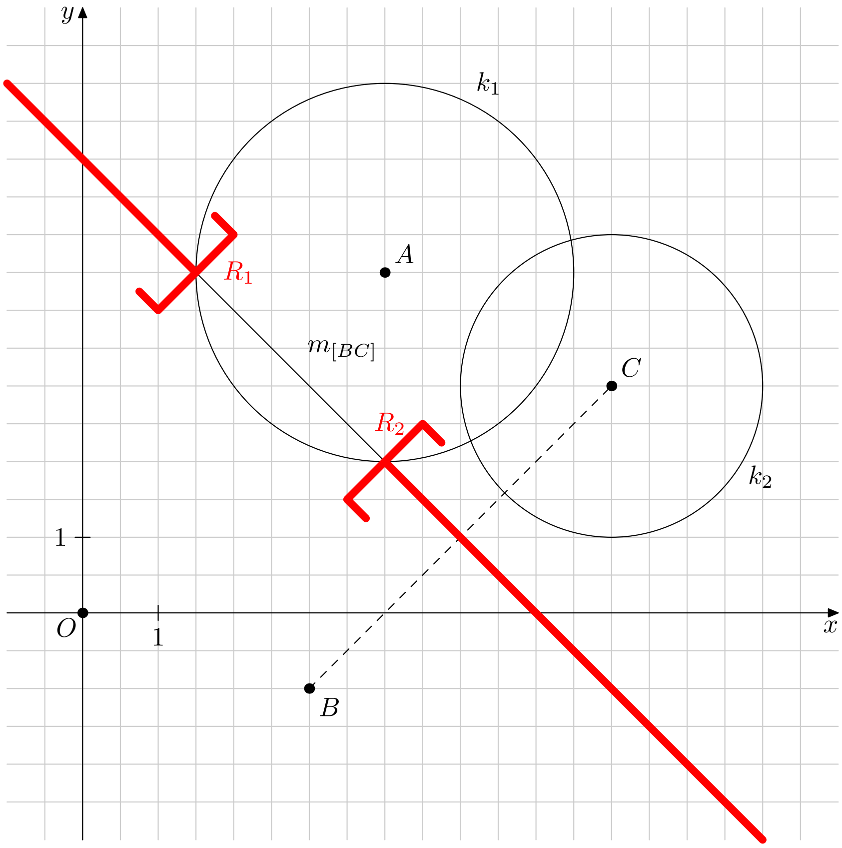
2. (a) –
   (b) –
   (c) Fritz hat Recht, denn der Kreis um A mit Radius 1 cm meidet die Kreislinie k.

3. - -

4. - -

5. - -

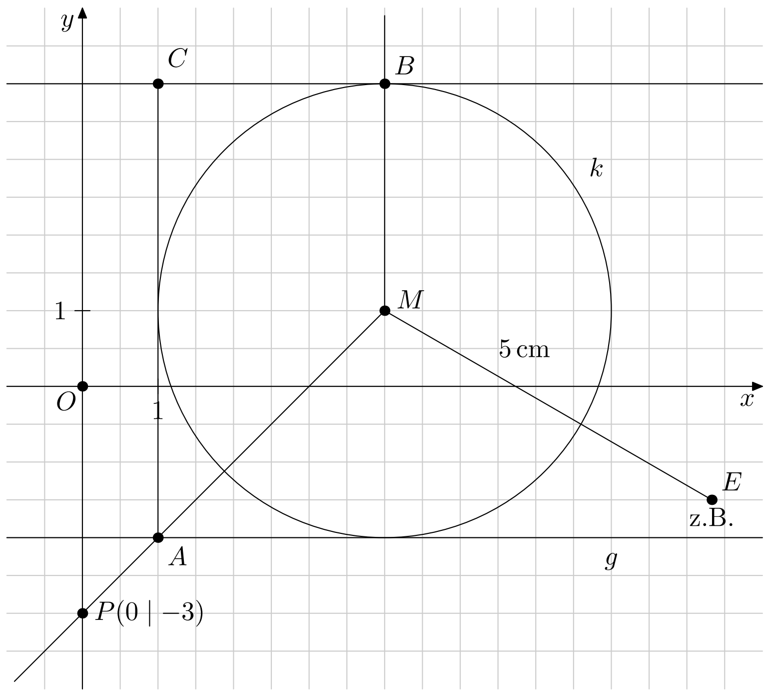
6. (a)



Kommentar:
Alle Punkte P, die gleichweit von B und C entfernt sind, liegen auf der **Mittelsenkrechten** $m_{[BC]}$.
Gleichzeitig dürfen die Punkte P **nicht innerhalb des Kreises** k_1 um den Punkt A mit dem Radius $2,5\,\text{cm}$ liegen. Damit ergibt sich die farbig dargestellte Lösungsmenge. Die Randpunkte R_1 und R_2 der beiden Halbgeraden gehören zur Lösungsmenge dazu, weil beide sowohl auf der Mittelsenkrechten als auch nicht im Inneren von k_1 liegen.

(b) Alle Punkte, die vom Punkt C höchstens $2\,\text{cm}$ entfernt sind, dürfen sich **nicht außerhalb** der Kreislinie k_2 aufhalten. Weil aber die Kreislinie k_2 die Mittelsenkrechte $m_{[AB]}$ und damit auch die farbig gekennzeichnete Lösungsmenge meidet, gibt es die fraglichen Punkte nicht.

7.



(a) Siehe Zeichnung.

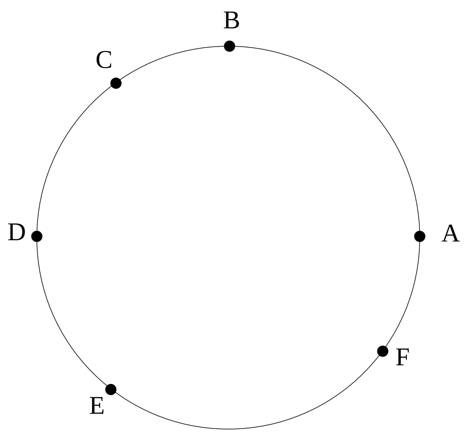
(b) Siehe Zeichnung; es gibt beliebig viele Lösungen: Der Punkt E muss sich im IV. Quadranten auf einer Kreislinie um den Punkt M mit dem Radius 5 cm aufhalten

(c) Die Gerade g muss zur Geraden CB parallel verlaufen.

(d) $P(0 \mid -3)$

(e) Es gibt beliebig viele Kreise, z.B. für $r_1 = 4,5\,\text{cm}$ oder $r_2 = 10\,\text{km}$.

8.



Eckpunkt A als erster:

ABC, ABD, ABE, ABF
ACD, ACE, ACF
ADE, ADF
AEF.

Eckpunkt B als erster:

BCD, BCE, BCF
BDE, BDF
BEF.

Eckpunkt C als erster:

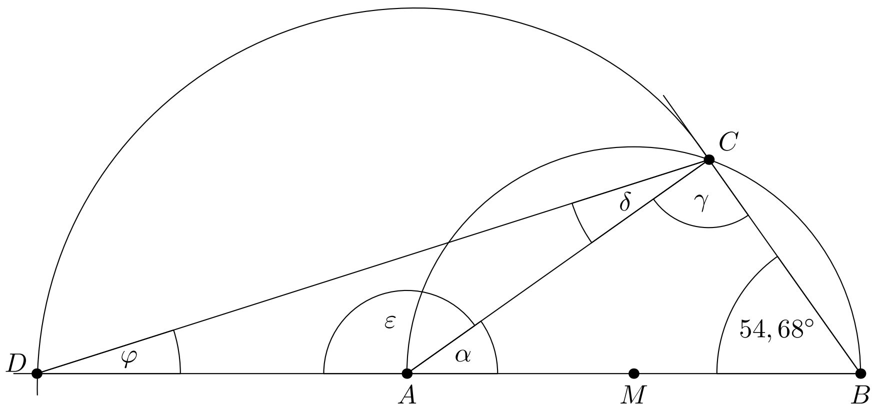
CDE, CDF
CEF.

Eckpunkt D als erster:

DEF.

Es gibt nicht mehr und nicht weniger als 20 solche Dreiecke.

9. (a)



- Zeichne den Halbkreis mit dem Durchmesser $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.
- Trage im Punkt B den Winkel mit dem Maß $54{,}68^\circ \approx 55^\circ$ an.
- Der freie Schenkel des 55°-Winkels schneidet den Halbkreis im Punkt C.
- Zeichne den Kreisbogen mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{AC}$ vom Punkt C aus so weit, bis er die Halbgerade $[BA$ schneidet. Der Schnittpunkt ist der Punkt D.

(b) Der Kreisbogen über dem Durchmesser $[AB]$ ist der THALES-Kreis.
$\Rightarrow \quad \gamma = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ - 54{,}68^\circ = 35{,}32^\circ$.
ε ist der Nebenwinkel von α: $\quad \varepsilon = 180^\circ - 35{,}32^\circ = 144{,}68^\circ$.
Das Dreieck DAC ist gleichschenklig: $\overline{AD} = \overline{AC}$.
$\Rightarrow \quad \delta = \varphi = (180^\circ - 144{,}68^\circ) : 2 = 17{,}66^\circ$.

Teil II.

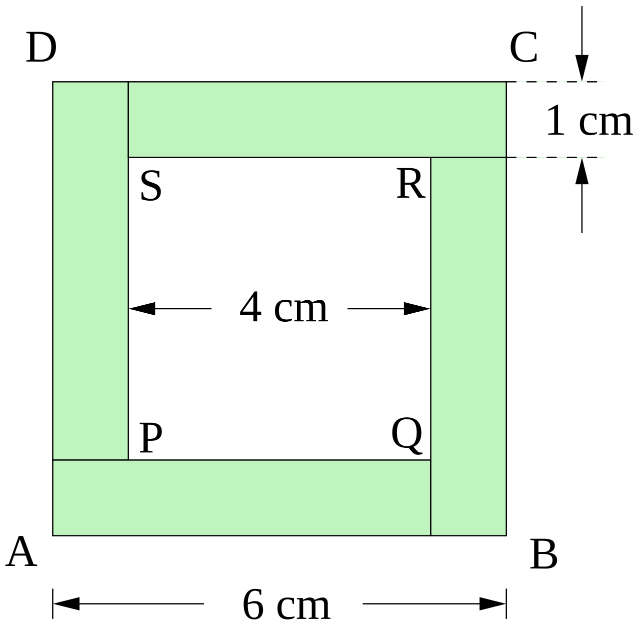
Wahlpflichtfächergruppe II/III

8. Die Menge der rationalen Zahlen

1. (a) 0 (b) -1 (c) 28

2. $3x^2 + 18x + 24 = 0 \quad L = \{-2;\, -4\}$

3. Es handelt sich um ein achsensymmetrisches Trapez, in dem zwei Innenwinkel das Maß 63,43° und zwei das Maß 116,57° besitzen.

4. (a)
   - 

   - $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{16\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = 0,\overline{4} = 44,\overline{4}\%$, also die knappe Hälfte.

   (b)
   - Wenn das Quadrat $PQRS$ 68% der Gesamtfläche einnimmt, dann müssen die vier Rechtecke zusammen $100\% - 68\% = 32\%$ der Gesamtfläche einnehmen. Weil aber alle vier Rechtecke kongruent sind, beträgt der Anteil eines dieser Rechtecke 8%.
   - 25% von $36\,\text{cm}^2$ sind $9\,\text{cm}^2$. Die Seitenlänge des Quadrates $PQRS$ beträgt also in diesem Fall 3 cm.
     $3 + 2 \cdot x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,5.$

5. (a) $(-60) : (-1) = 60$
   (b) $(-60) : (+2) = -30$

6. Für die Seite a gilt: $a = b - 5\,\mathrm{cm}$.
   Für die Seite c gilt: $c = a + 3\,\mathrm{cm} = b - 5\,\mathrm{cm} + 3\,\mathrm{cm} = b - 2\,\mathrm{cm}$.
   Für den Umfang u gilt: $u = 21{,}5\,\mathrm{cm} = a + b + c$
   Also folgt: $21{,}5\,\mathrm{cm} = b - 5\,\mathrm{cm} + b + b - 2\,\mathrm{cm}$.
   $21{,}5\,\mathrm{cm} + 7\,\mathrm{cm} = 3b \quad \Leftrightarrow \quad b = 9{,}5\,\mathrm{cm}$.
   Dann ist die Seite a $4{,}5\,\mathrm{cm}$ und die Seite c $7{,}5\,\mathrm{cm}$ lang.
   Probe: $4{,}5\,\mathrm{cm} + 9{,}5\,\mathrm{cm} + 7{,}5\,\mathrm{cm} = 21{,}5\,\mathrm{cm}$

7. (a) Abgegebene Stimmen: $41200 \cdot 0{,}7 = 28840$
   Davon 60%: $28800 \cdot 0{,}6 = 17304$.
   Für Frau Zoprent haben 17304 Wählerinnen und Wähler in Besselheim gestimmt.
   (b) Fau Zoprent ist mit 60%, also mehr als der Hälfte aller abgegebenen Stimmen gewählt worden, egal, wie viele Stimmen insgesamt abgegeben worden sind. Die Wahlbeteiligung spielt rechnerisch keine Rolle.

8. Abgegebene Stimmen: $32900 \cdot 0{,}7 = 23030$.
   Davon 50% (also die Hälfte): 11515.
   Also haben mindestens $11515 + 1 = 11516$ Wählerinnen und Wähler in Cantorhausen für Herrn Roprentz gestimmt.

9. (a) $(-5) \cdot (-7) = 35$
   (b) $(-7) \cdot (+1) = -7$
   (c)
   - $$5 : \boxed{+1} = +5$$
   - $$5 : \boxed{-3} = -1{,}666\ \ldots$$

   (d)
   $$+3 - (-7) = +10$$

10.

x	$-2,5$	4	B
$T(x) = -2x+3$	A	-5	0

Die Zelle A: $T(-2,5) = -2\cdot(-2,5)+3 = 8$, also kommt 8 in Zelle A.
Die Zelle B: $0 = -2x+3 \mid -3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 = 2x \mid: 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1,5$
Also kommt $-1,5$ in Zelle B.

11. (a)
    - $a = 17$: $u = (17+3\cdot 17+3\cdot 17)\,\text{cm} = 119\,\text{cm}$
      $a = 23$: $u = (23+3\cdot 23+3\cdot 23)\,\text{cm} = 161\,\text{cm}$
    - $119 = 17\cdot 7$ und $161 = 23\cdot 7$
      Also besitzen beide Maßzahlen den gemeinsamen Teiler 7.

    (b)
    - $u(a) = (a+3a+3a)\,\text{cm}$
    - $u(a) = (a+3a+3a)\,\text{cm} = 7\cdot a\,\text{cm}$
      Also gilt für alle $a \in \mathbb{N}$: $7a \in V_7$.

12.

$$\begin{array}{rrcll} & 4-(5x^2+8)\cdot(-12) & = & 13 & \\ \Leftrightarrow & 4-(-12)\cdot(5x^2+8) & = & 13 & \mid -4 \\ \Leftrightarrow & 12\cdot(5x^2+8) & = & 9 & \\ \Leftrightarrow & 3\cdot(8+5x^2)\cdot 4 & = & 9 & \end{array}$$

Die Gleichung G_1 lässt sich also in die Gleichung G_2 umformen. Daher besitzen beide Gleichungen dieselbe Lösungsmenge.

13. (a) Fläche des großen Quadrates: $A_g = 60\,\text{cm}\cdot 60\,\text{cm} = 3600\,\text{cm}^2$
    Fläche des kleinen Quadrates: $A_k = 30\,\text{cm}\cdot 30\,\text{cm} = 900\,\text{cm}^2$
    $3600\,\text{cm}^2 : 900\,\text{cm}^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad A_k : A_g = 1:4$

    (b) $A_g = 30\,\text{cm}\cdot 30\,\text{cm}\cdot 9 = 8100\,\text{cm}^2$
    Weil $90\,\text{cm}\cdot 90\,\text{cm} = 8100\,\text{cm}^2$ ergibt, müsste die Seitenlänge des großen Quadrates $90\,\text{cm}$ betragen.

14. (a) Wenn du in der von Franz vorgeschlagenen Fortsetzung der Tabelle z.B. auf $x = -90$ stößt, dann ergibt sich:
    $T_1(-90) = -30$ und $T_2(-90) = -70$.
    Also gilt hier $T_1(-90) > T_2(-90)$.

    (b) $3(x+80) = 7(x+80) \quad \Leftrightarrow \quad 3x+240 = 7x+560 \quad \Leftrightarrow \quad -4x = 320 \quad \Leftrightarrow \quad x = -80$

15.

$$(36 - \underline{40}) \cdot \underline{(-5)}$$

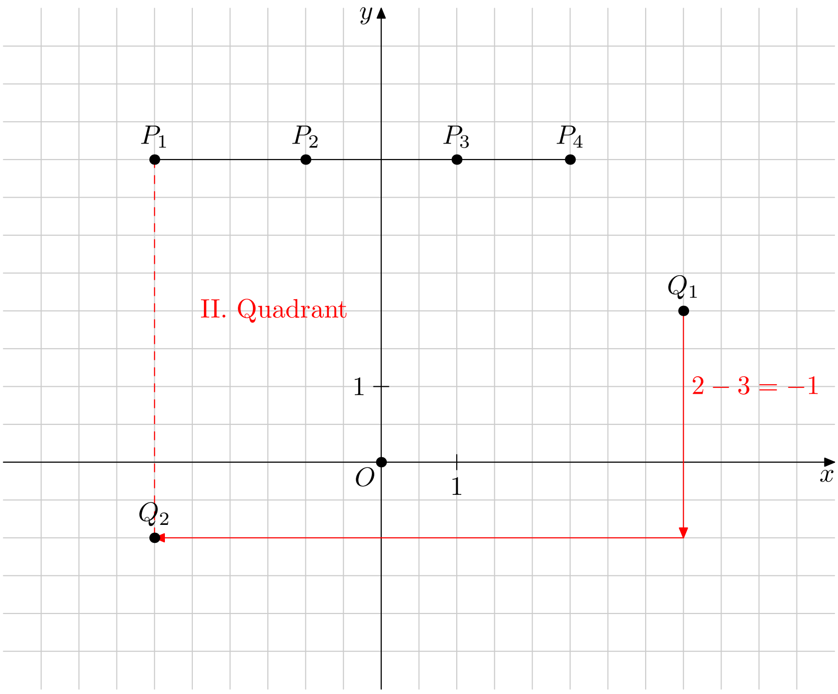
$$= 36 \cdot \underline{(-5)} - \underline{40} \cdot \underline{(-5)}$$

$$= -180 + \underline{200}$$

$$= 20$$

16. „Um -2^4 steht keine Klammer. Also darfst du das Minuszeichen nur einmal berücksichtigen; d.h. $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$."

17.



(a) $P_1(-3 \mid 4)$ und $Q_1(4 \mid 2)$.

(b)
- Beispiel: Siehe Zeichnung oben.
- Siehe Zeichnung oben.
  Z.B.: „Diese Strecke liegt parallel zur x-Achse".

(c) Siehe Zeichnung oben.

(d) Das kann nicht sein, denn im II. Quadranten gibt es nur negative x-Werte.

18. (a) „$\cdots$ weil $-(-3)^4 = -(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$. Also musst du das Minuszeichen 5-mal berücksichtigen. 5 Minuszeichen lassen sich dann zu einem Minuszeichen zusammenfassen.“

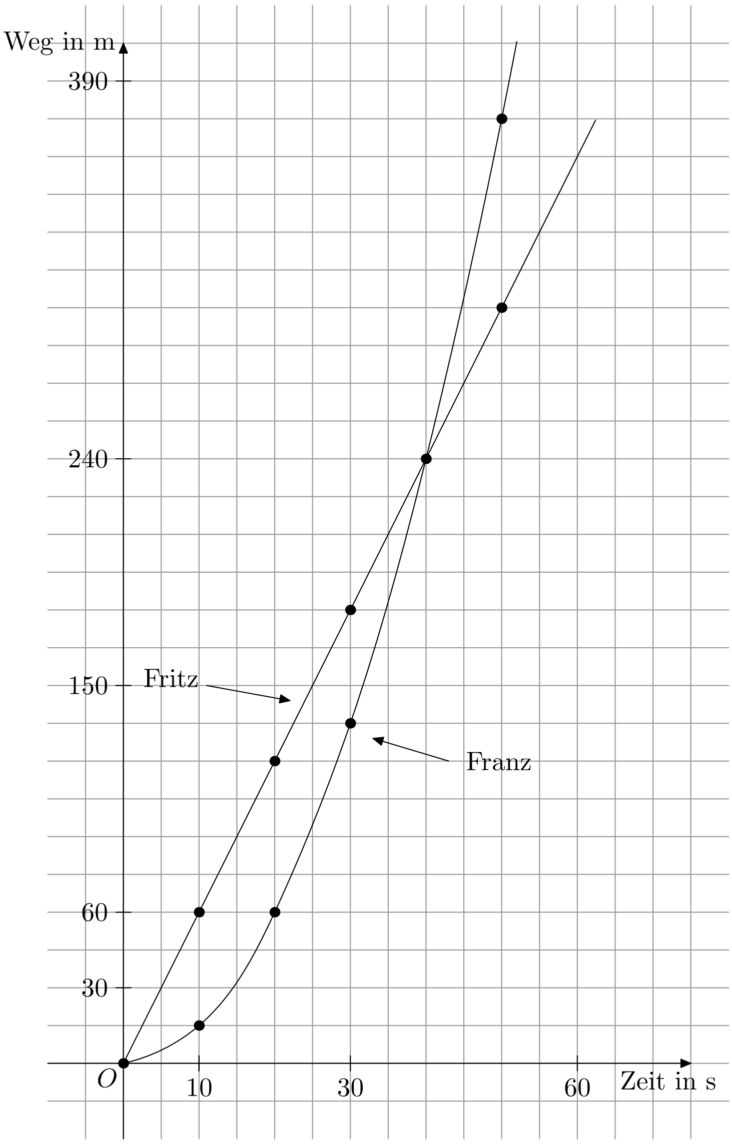
(b) $-(-3)^4 - (-3)^2 - (-3)^1 = -81 - 9 + 3 = -87$.

19. (a)

$$\boxed{-4} \cdot 2 - 4 = -12$$

(b) Das geht nicht, weil in der oben angegebenen Zahlenmenge mit der Null nur gerade Zahlen stehen. Die Subtraktion und die Multiplikation können aber aus geraden Zahlen keine ungeraden machen.

20. (a)



(b) Es ist das Diagramm von Fritz, denn es stellt eine Ursprungs-Halbgerade dar.

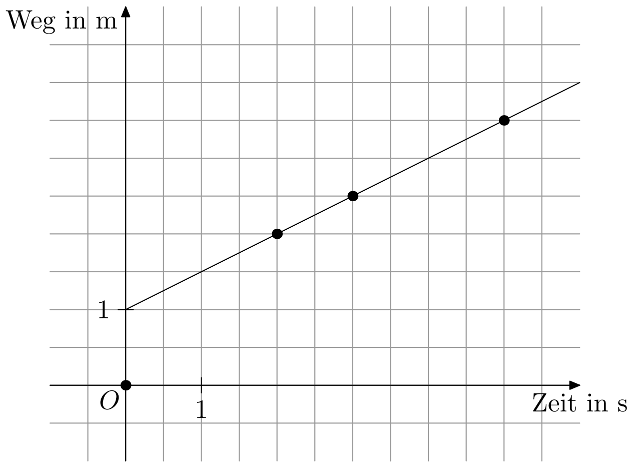
(c) Franz gewinnt das Rennen, denn nach 40 s überholt er Fritz. Dann baut er seinen Vorsprung immer weiter aus.

21. „... es kommt darauf an, ob das Minuszeichen eingeklammert ist oder nicht.
Bei -2^4 ist es nicht eingeklammert, somit wird es nur einmal berücksichtigt.
Bei $(-2)^4$ dagegen wird -2 viermal mit sich selbst multipliziert, also auch mit dem Minuszeichen.
Somit gilt: $-2^4 + (-2)^4 = -16 + 16 = 0$“.

22. (a) Es gilt $2 : 2 = 1$ und $3 : 2{,}5 = 1{,}2$. Also sind schon diese beiden Zahlenpaare nicht quotientgleich.

Deshalb sind für diese Bewegung die Zeit t und der Weg s nicht direkt proportional zueinander.

(b) •



- Das Diagramm ergibt zwar eine Gerade, aber keine Ursprungsgerade. Damit ist bestätigt, dass für diese Bewegung die Zeit t und der Weg s nicht direkt proportional zueinander sind.

23. (a)

$$\begin{aligned} O_{ganz} &= 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2 \cdot (5\,\text{dm}^2 + 6\,\text{dm}^2 + 7,5\,\text{dm}^2) \\ O_{ganz} &= 37\,\text{dm}^2 \\ 2 \cdot O_{Hälfte} &= 2 \cdot 2 \cdot (2,5\,\text{dm}^2 + 3\,\text{dm}^2 + 7,5\,\text{dm}^2) \\ O_{Teile} &= 52\,\text{dm}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{52\,\text{dm}^2 - 37\,\text{dm}^2}{37\,\text{dm}^2} = \frac{15}{37} = 0,40540\ldots \approx 40,54\%$$

(b) Die Oberfläche der beiden Teile wäre auch hier nur um den doppelten Betrag einer rechteckigen Seitenfläche mit den Längen b und c angewachsen. Das ändert am Ergebnis nichts.

24. **1. Möglichkeit:** Rechne mit einem Zahlenbeispiel.

Früher:	1500 g kosteten z.B. 12 EURO .	⇒	100 g kosteten dann 80 Cent .
Jetzt :	1200 g kosten auch 12 EURO .	⇒	100 g kosten dann 1 EURO .

100 g Lebkuchen sind also um 20 Cent teurer geworden.

$$\frac{20\,\text{Cent}}{80\,\text{Cent}} = 0,25 = 25\%$$

Die Lebkuchen sind also um 25% teurer geworden.

2. Möglichkeit: Die Lebkuchen kosten x EURO.

Früher: 1500 g kosteten x EURO. $\Rightarrow$ 100 g kosteten dann $\frac{x}{15}$ EURO.

Jetzt : 1200 g kosten auch x EURO. $\Rightarrow$ 100 g kosten dann $\frac{x}{12}$ EURO.

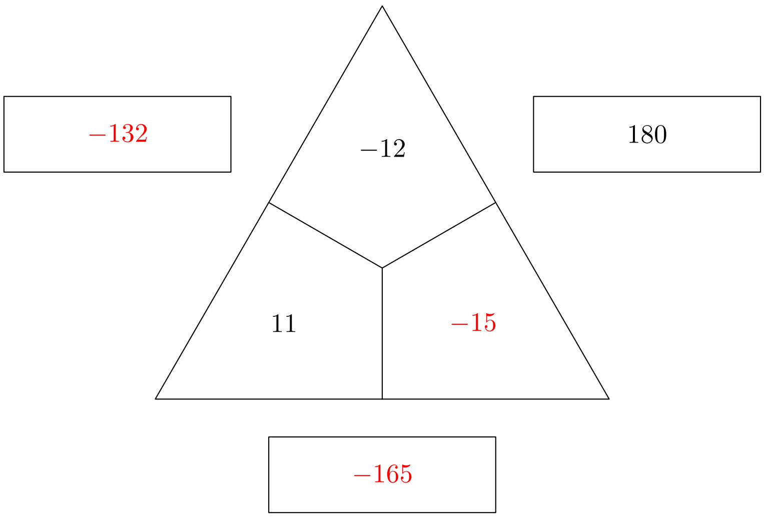
100 g Lebkuchen sind also um $\frac{x}{12}$ EURO $-$ $\frac{x}{15}$ EURO teurer geworden.

$$\left(\frac{x}{12}-\frac{x}{15}\right)\text{ EURO} = \frac{x}{60}\text{ EURO}$$

$$\frac{x}{60}\text{ EURO} : \frac{x}{15}\text{ EURO} = \frac{15}{60} = 0,25 = 25\%$$

Das Ergebnis ist das gleiche wie oben.

25.



26. $x \cdot y \cdot x = x^2 \cdot y = 284$.
Die Zahl 284 muss also einen quadratischen Teiler besitzen. Nun ist $284 = 1 \cdot 4 \cdot 71$.
1. Fall:
$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \vee x = -1$ zusammen mit $b = 284$.
2. Fall:
$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \vee x = -2$ zusammen mit $b = 71$.
Weil $71 \in \mathbb{P}$ gilt, gibt es nur die Lösungen
$\{(-1 \mid 284); (1 \mid 284); (-2 \mid 71); (2 \mid 71)\}$.

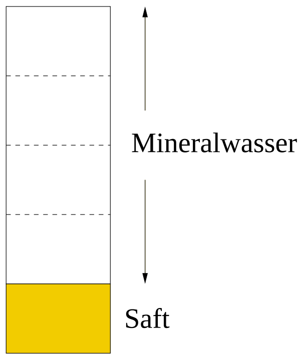
27. Angenommen, der Käse wird in 100 g-Stücken angeboten.
Dann sind davon 40 g Wasser.
Die Trockenmasse beträgt 60 g . 40% davon sind Fett, das sind 24 g .
Also sind 24 g Fett in 100 g Käse enthalten. Der Fettgehalt dieser Käsesorte beträgt somit 24%.
Dieser Prozentsatz ist für jede Käsemenge dieser Sorte die gleiche.

28.

$$\begin{aligned} 21\,000 &= 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \\ 21\,000 &= (21 \cdot 8) \cdot 125 &&= 168 \cdot 125 \\ &= (21 \cdot 125) \cdot 8 &&= 2625 \cdot 8 \\ &= (3 \cdot 8) \cdot (7 \cdot 125) &&= 24 \cdot 875 \\ &= (7 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 125) &&= 56 \cdot 375 \end{aligned}$$

29. (a) Gesamtmenge G im Glas: $25\,\text{ml} + 100\,\text{ml} = 125\,\text{ml}$.
Der Prozentwert P an Saft beträgt: $P = 25\,\text{ml}$.
Der Prozentsatz p beträgt dann $p = \dfrac{25\,\text{ml}}{125\,\text{ml}} = 0,2 = 20\%$

(b)



Der Saft nimmt offenbar $\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$ der Flüssigkeitsmenge ein, die sich nach dem Auffüllen im Glas befindet.

30. (a) Im Tetrapack befinden sich $1\,\text{l} = 1000\,\text{ml}$ Nektar.
Egon entnimmt 300 ml. Dann befindet sich im Rest, nämlich in $1000\,\text{ml} - 300\,\text{ml} = 700\,\text{ml}$, auch wieder 60% reiner Fruchtsaft.
60% von $700\,\text{ml} = 0.6 \cdot 700\,\text{ml} = 420\,\text{ml}$.

(b) Eine Möglichkeit:
In der ungeöffenten Tetra-Packung befanden sich
60% von $1000\,\text{ml} = 0.6 \cdot 1000\,\text{ml} = 600\,\text{ml}$ Fruchtsaft.
Nach dem Ausgießen befinden sich jetzt $600\,\text{ml} - 420\,\text{ml} = 180\,\text{ml}$ reiner Fruchtsaft in Egons Glas.

9. Gleichungen und Ungleichungen

1. Schritt 1: Distributivgesetz nicht beachtet
   Schritt 2: richtig
   Schritt 3: Inversionsgesetz falsch angewendet
   Schritt 4: $0 \notin \mathbb{N}$
   Die richtige Lösungsmenge ist leer.

2. Z.B. für $G = \mathbb{Z}$: $x \geqq -4$ oder $-4 \leqq x$ oder $12 - 4x \leqq 28$

3. 34 Fasane und 34 Kaninchen

4. Die letzte und vorletzte Seite sind jeweils $6,6\,\mathrm{cm}$ lang.

5. $96\,\mathrm{cm}^2$

6. $312,75$

7. Die Seiten sind $4,5\,\mathrm{cm}$, $5,5\,\mathrm{cm}$, $6,5\,\mathrm{cm}$ und $7,5\,\mathrm{cm}$ lang.

8. Die Stücke sind $1,2\,\mathrm{m}$, $0,6\,\mathrm{m}$ und $0,3\,\mathrm{m}$ lang.

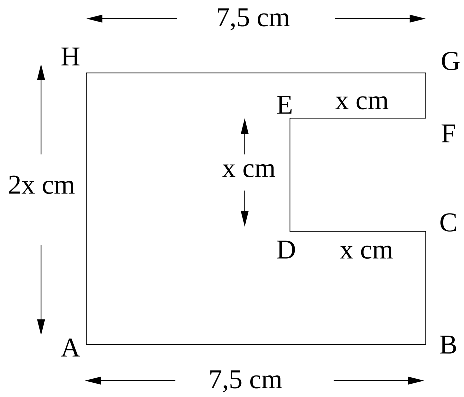
9. (a) $a = -4$ ergibt $-4x = 36 \mid : (-4) \quad \Leftrightarrow \quad x = -9$

   $$a = 0,\overline{3} = \frac{1}{3} \text{ ergibt } \frac{1}{3}x = 36 \mid \cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 108$$

   (b) Für $a = 0$ gibt es keine Lösung, denn $0 \cdot x = 0$ und nicht $= 36$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.

   (c) $x = a = 6: \quad 6 \cdot 6 = 36$ und $x = a = -6: \quad (-6) \cdot (-6) = 36$

10. (a) Klar.
(b) Es gilt $u = 2 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 7,5\,\text{cm} + 3 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 1,5\,\text{cm} = 33\,\text{cm}$.
(c) $u(x) = 2x\,\text{cm} + 15\,\text{cm} + 3x\,\text{cm} + \overline{BC} + \overline{FG}$
Nun gilt $\overline{GF} = \overline{CB} = (2x\,\text{cm} - x\,\text{cm}) : 2 = 0,5x\,\text{cm}$.
Also: $u(x) = 2x\,\text{cm} + 15\,\text{cm} + 3x\,\text{cm} + 2 \cdot 0,5x\,\text{cm} = (6x + 15)\,\text{cm}$.
(d) $6x + 15 = 28,5 \Leftrightarrow x = 4,5$
(e) Weil für die Belegungen von x nur positive Zahlen in Betracht kommen, ist der Term $6x+15$ größer als 15. Also gibt es keine dieser Figuren mit einem Umfang von $14,3\,\text{cm}$.
(f)



Hier gilt wie schon in der ursprünglichen Figur:
$\overline{AH} = \overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FG} \Leftrightarrow 2x\,\text{cm} = \overline{BC} + x\,\text{cm} + \overline{FG}$
$\Leftrightarrow x\,\text{cm} = \overline{BC} + \overline{FG}$
Also gilt unverändert $u(x) = (6x + 15)\,\text{cm}$, auch wenn die Symmetrie zerstört worden ist.

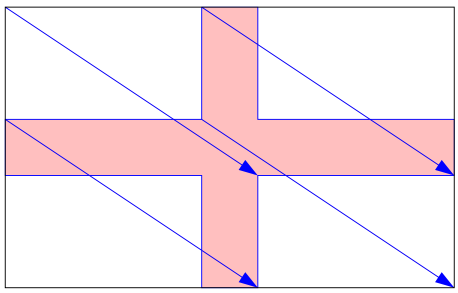
11. Es gilt z.B. $\frac{7}{4} = 1,75 < 2$.

Dann ist aber auch $\frac{6}{4} = 1,5 < 2, \quad \frac{5}{4} = 1,25 < 2, \quad \ldots \quad , \quad \frac{1}{4} < 2$.

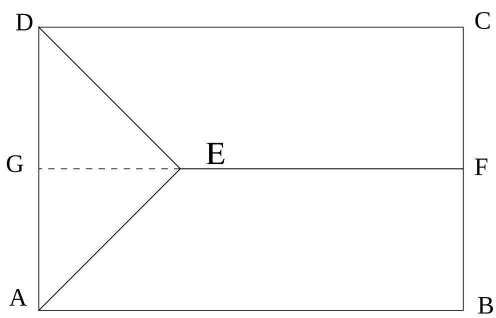
Wenn dann $x < 1$ ist, stimmt die Ungleichung immer.
Also gilt insgesamt z.B. $x \in \{6;\ 5;\ 4;\ 3;\ 2;\ 1;\ 0,98;\ 0,97;\ 0,96;\ 0,95\}$
oder $x \in \{0,25;\ 0,15;\ 0,05;\ 0,03;\ 0,02;\ 0,01;\ 0,098;\ 0,097;\ 0,096;\ 0,095\}$
oder $x \in \{-17;\ -20;\ -30;\ -300;\ -5678;\ -10^6;\ -10^8;\ -10^7;\ -3,146;\ 0\}$.

10. Parallelverschiebung

1. - -

2.
   (a) –
   (b)
      - 
      - $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ -3 \end{pmatrix}$
   (c)
      - Das Drehzentrum liegt im Schnittpunkt der Diagonalen des großen Rechtecks. Dieser Schnittpunkt deckt sich mit dem Symmetriezentrum des Kreuzes. Der Drehwinkel beträgt 180°.
      - Es handelt sich um eine Punktspiegelung.

3. $\alpha = 50°$ $\beta = 40°$ $\varphi = 140°$ $\varepsilon = 50°$ $\delta = 40°$

4. (a)


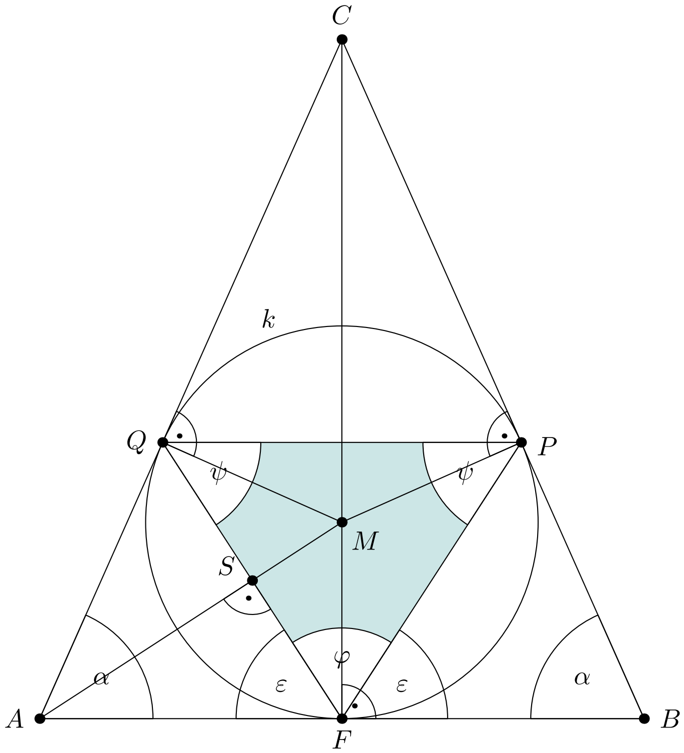
1. Möglichkeit:
Die Strecke GE liegt auf der Halbierenden des Winkels DEA. $\Rightarrow$ $\sphericalangle GEA = \sphericalangle BAE$ (Wechselwinkel) $= 52{,}8^\circ : 2 = 26{,}4^\circ$.
2. Möglichkeit: Das Dreieck AED ist gleichschenklig mit der Basis $[AD]$.
$\Rightarrow$ $\sphericalangle EAD = (180^\circ - 52{,}8^\circ) : 2 = 63{,}6^\circ$ und $\sphericalangle BAE = 90^\circ - 63{,}6^\circ = 26{,}4^\circ$.

(b) –

(c) Es würde gelten: $\sphericalangle DEA = 60^\circ$. Weil aber das Dreieck AED schon gleichschenklig ist, muss jetzt es sogar gleichseitig sein.

11. Winkel

1. (a)

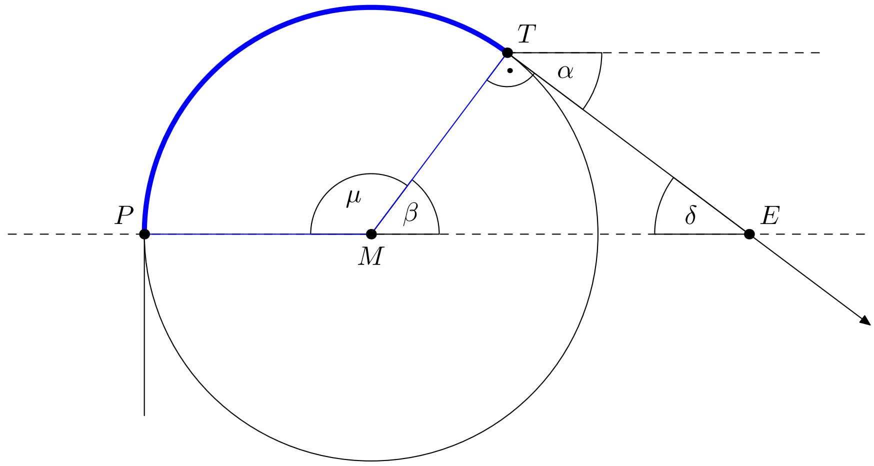


Die Kreislinie k ist der Inkreis dieses Dreiecks ABC. Im Mittelpunkt M schneiden sich die drei Winkelhalbierenden. Die Winkelhalbierende $[CF]$ ist bereits vorhanden. Für die Konstruktion von M genügt es z.B., die Halbierende des Winkels BAC noch einzuzeichnen.

(b) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, denn die beiden Basiswinkel haben das Maß α. Aus Symmetriegründen taucht daher das Winkelmaß ε zweimal auf.
Jeder der drei Berührradien $\overline{MF}$, $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ steht auf seiner betreffenden Dreiecksseite senkecht.
Das Viereck $AFMQ$ ist ein achsensymmetrischer Drachen mit der Symmetrieachse $[AM]$, die den Winkel α halbiert.
Weiter gilt dann: $\quad [QF] \perp [AM] \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle ASF = 90°$.
Aus der Winkelsumme im Dreieck AFS ergibt sich dann: $\varepsilon = 90° - 33° = 57°$.
$\Rightarrow \quad \varphi = 180° - 2 \cdot 57° = 66° = \alpha$.
Das Dreieck FPQ ist aus Symmetriegründen gleichschenklig mit der Basis $[PQ]$.
$\Rightarrow \quad \psi = \varepsilon = 57°$, da es Z-Winkel sind.

2. (a) Siehe Zeichnung zu (b):
   Die Halbgerade $[TE$ liegt auf der Kreistangente mit dem Berührpunkt T. Der Berührradius $[MT]$ steht auf dieser Tangente senkrecht. Weiter gilt: $\delta = \alpha$ (Z-Winkel).
   $\Rightarrow \quad \beta = 90° - \delta = 90° - \alpha$.

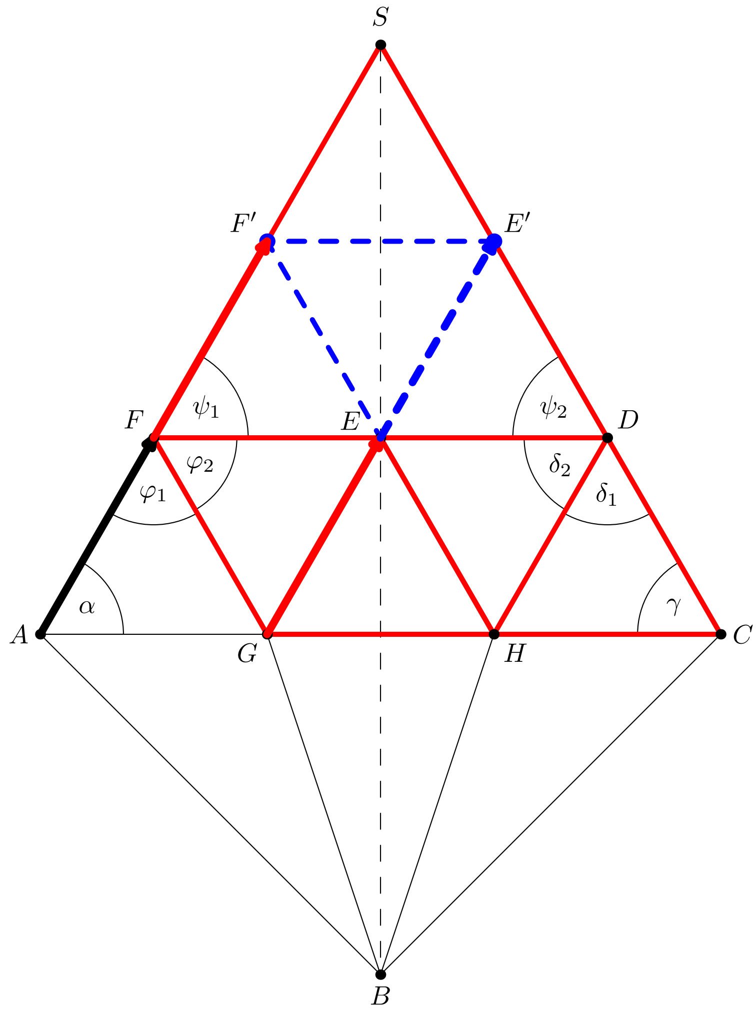
   (b) Wenn also $\alpha = 37°$ ist, dann folgt $\beta = 90° - 37° = 53°$.
   Damit kannst du den Berührradius mit dem Punkt T und seine Kreistangente konstruieren. Das linke Seilende führt senrecht nach unten.



   (c) Aus $\alpha = 30°$ folgt $\beta = 60° \quad \Rightarrow \quad \mu = 180° - 60° = 120°$.
   Der Mittelpunktswinkel μ nimmt also ein Drittel des Vollwinkels $(360°)$ ein. Damit bedeckt das Seil ein Drittel des Rollenumfangs.

   (d) Berechne α aus dem Mittelpunktswinkel μ:
   $\mu = 40\%$ von $360° = 0,4 \cdot 360° = 144°$.
   $\beta = 180° - 144° = 36° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° - 36° = 54°$.

3. (a)



(b) Die Gerade SB ist die Symmetrieachse der Figur. Da sich das Trapez $ACDF$ nur aus gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt, gilt: $\alpha = \gamma = 60°$.
Aus dem gleichen Grund gilt: $\delta_1 = \varphi_1 = \delta_2 = \varphi_2 = 60°$.
Also gilt: $\sphericalangle AFD = \sphericalangle FDC = 120°$.

(c) Der Winkel ψ_1 ist der Nebenwinkel des Winkels AFD:
$\psi_1 = 180° - 120° = 60° = \psi_2$.
Im Dreieck FDC haben also zwei Innenwinkel das Maß 60°. Also muss wegen der Innenwinkelsumme von 180° auch der dritte Innenwinkel das Maß 60° haben. Damit ist das Dreieck FDS gleichseitig.

(d) Es entsteht das Viereck $FEE'F'$: siehe Zeichnung.

(e) Es sind **vier** solche Dreiecke, wie du an den dicken gestrichelten Linien erkennen kannst.

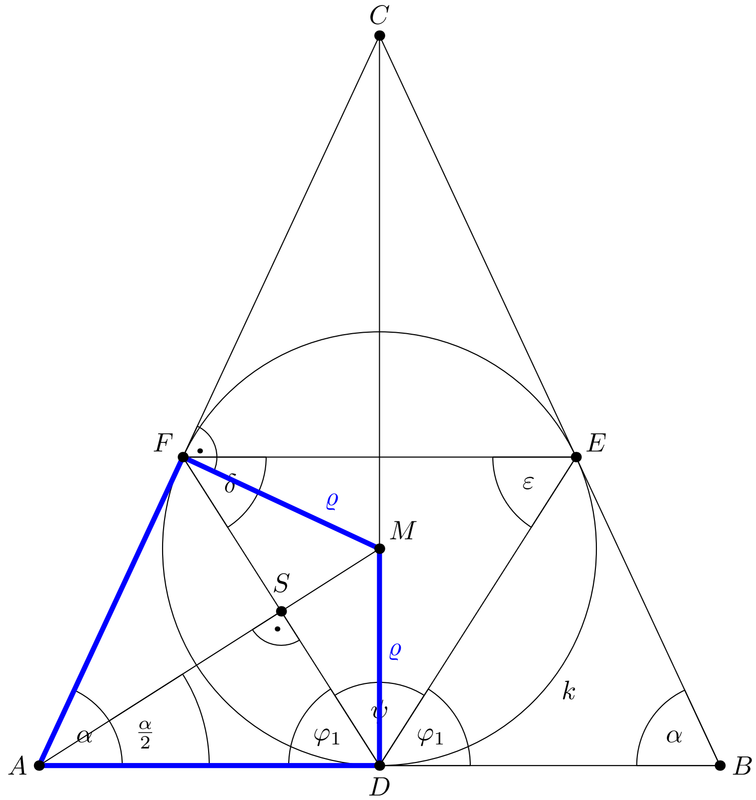
(f) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Alle Winkelmaße sind auf zwei Kommastellen gerundet.

- Das Dreieck BHG ist aus Symmetriegründen gleichschenklig.
  $\Rightarrow \quad \sphericalangle GHB = \sphericalangle BGH = (180° - 36{,}87°) : 2 = 71{,}57°$.
  Das Dreieck GHE ist gleichseitig.

Also gilt: $\sphericalangle HGE = 60° = \sphericalangle EHG = \sphericalangle GEH$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle EHB = 60° + 71,57° = 131,57° = \sphericalangle BGE$

- $\sphericalangle GBA = (90° - \sphericalangle HBG) : 2 = 26,57°$.
  Weiter gilt: $\sphericalangle BAC = 45°$
  $\Rightarrow \quad \sphericalangle AGB = 180° - 45° - 26,57° = 108,43°$
  Anmerkung: Es gibt noch andere Lösüngsmöglichkeiten.

4. (a)



Der Inkreismittelpunkt M ist der Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden, die z.B. auf $[AM]$ und $[CD]$ liegen.
Der Inkreisradius ϱ steht als Berührradius auf $[AB]$ bzw. $[AC]$ senkrecht.

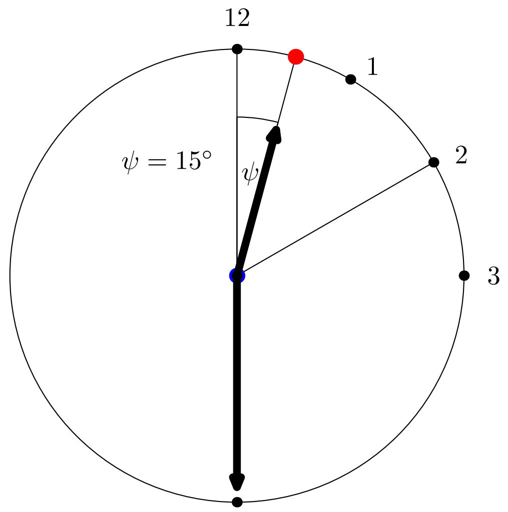
(b)
- Siehe obige Zeichnung.
- Das Viereck $ADMF$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, denn die Diagonale $[AM]$ ist die Halbierende des Winkels mit dem Maß α und damit die Symmetrieachse dieses Vierecks.

(c) Das Dreieck ADS ist rechtwinklig, weil die beiden Diagonalen in jedem Drachenviereck senkrecht aufeinander stehen:
$\varphi_1 = 90° - \dfrac{\alpha}{2} = \varphi_2$. Weiter muss gelten: $\varphi_1 + \varphi_2 + \psi = 180°$
$\Rightarrow \quad \psi = 180° - 2 \cdot \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \psi = \alpha.$

Oder: Die Winkel mit den Maßen δ und ε bilden mit den Winkeln φ_1 bzw. φ_2 Z-Winkel.
Also gilt: $\delta = \varepsilon = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$.

Dann gilt im Dreieck DEF: $\delta + \varepsilon + \psi = 180°$. $\quad \Rightarrow \psi = 180° - 2 \cdot \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ usw.

5. (a)



Der Winkel beträgt $180° - 15° = 165°$.

(b) Der Minutenzeiger hat sich um $180° + 60° = 240°$ weitergedreht.
Bis 13 : 00 Uhr hat sich der Stundenzeiger um $15°$ weitergedreht. 10 Minuten sind der sechste Teil einer Stunde, die einem Winkel von $30°$ entspricht. Dann entsprechen 10 Minuten einem Winkel von $30° : 6 = 5°$. Also hat der Stundenzeiger während dieser Zeit einen Winkel von $30° + 5° = 35°$ überstrichen.

6. Es muss gelten:
$\varphi + (\varphi - 70°) = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2\varphi = 180° + 70° \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 125°$

7. Du siehst in der Zeichnung zwei Nebenwinkel:
$\varepsilon + (\varepsilon - 190°) = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2\varepsilon = 370° \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 185°$.
ε ist somit überstumpf. Das geht bei Nebenwinkeln nicht. Beide Nebenwinkel dürfen nicht größer als $180°$ werden.

8. Es gilt $\alpha + 2\alpha + 48° = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 3\alpha = 180° - 48° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 44°$.

9. Nach dem Satz vom Außenwinkel muss $\alpha + 25° = \alpha + \varepsilon$ ergeben.
   Also gilt: $\varepsilon = 25°$.

10. 1. Winkel: α 2. Winkel: β 3. Winkel: γ
    $\alpha = 2\beta \quad \wedge \quad \gamma = \beta - 36°$.
    Innenwinkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$: $2\beta + \beta + (\beta - 36°) = 180°$
    $\Leftrightarrow \quad 4\beta = 180° + 36° \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 54° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 108° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 18°$.

11. In jedem Dreieck gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$:
    In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: $\alpha + \beta = 90°$

    1. Möglichkeit:
    $\alpha = 5\beta \quad \Rightarrow \quad 5\beta + \beta = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 15° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 75°$
    Die Variante $\beta = 5\alpha$ liefert ein spiegelbildliches Ergebnis.

    2. Möglichkeit:
    $5\alpha = 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18° \quad \Rightarrow \quad \beta = 72°$.
    Die Variante $5\beta = 90°$ liefert ein spiegelbildliches Ergebnis.

12. In allen Zeichnungen findest du gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel so lang wie der jeweilige Kreisradius sind.

Figur a)

Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \varepsilon = 35°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\sphericalangle BMC = 110°$
Der Winkel AMB ist der Nebenwinkel dazu: $\sphericalangle AMB = 180° - 110° = 70°$. Im Dreieck ABM gilt dann: $\alpha = (180° - 70°) : 2 = 55°$.

Figur b)

Das Dreieck CAM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \gamma_2 = 70°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\varphi = 40°$
Der Winkel ε ist der Nebenwinkel dazu: $\varepsilon = 180° - 40° = 140°$. Im gleichschenkligen Dreieck CMB gilt dann: $\beta = \gamma_1 = (180° - 140°) : 2 = 20°$.

Figur c)

Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \sphericalangle CBM = 50°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\mu = 80°$.
Der Winkel $\sphericalangle CMA$ ist der Nebenwinkel dazu: $\sphericalangle CMA = 180° - 80° = 100°$.
Im gleichschenkligen Dreieck AMC gilt dann:
$\sphericalangle MAC = \delta = (180° - 100°) : 2 = 40°$

Figur d)

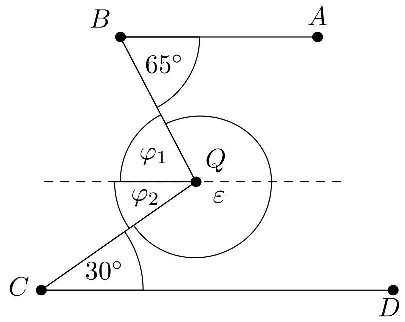
Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \sphericalangle MCB = 65°$. Wegen der Innenwinkelsumme von $180°$ folgt $\sphericalangle BMC = 50°$.
Der Winkel $\sphericalangle CMA$ ist der Nebenwinkel dazu: $\sphericalangle CMA = 180° - 50° = 130°$
Im gleichschenkligen Dreieck CMB gilt dann:
$\sphericalangle MAC = \sphericalangle ACM = (180° - 130°) : 2 = 25°$
$\varepsilon = \sphericalangle ACM + \sphericalangle MCB = 25° + 65° = 90°$.

Figur e)

Das Dreieck APM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \sphericalangle MPA = \sphericalangle PAM$.
Wegen der Innenwinkelsumme von $180°$ folgt
$\sphericalangle MPA = \sphericalangle PAM = (180° - 100°) : 2 = 40°$
Die Winkel MPA und μ sind maßgleich, weil sie „Z-Winkel" sind. $\Rightarrow \mu = 40°$.

Figur f)

Figur f) $AB \parallel CD$



Die gesuchte Hilfslinie ist die **Parallele** zu den Geraden BA bzw. CD durch den Punkt Q.
Nun gilt: $\varphi_1 = 65°$ (Z-Winkel) und $\varphi_2 = 30°$ (Z-Winkel).
$\varepsilon = 360° - (65° + 30°) = 265°$.

13. In allen Zeichnungen findest du gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel so lang wie der jeweilige Kreisradius sind. In jedem gleichschenkligen Dreieck gibt es zwei maßgleiche Winkel.

Figur a)

Das Dreieck APM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \gamma_1 = 60°$. Wegen der Innenwinkelsumme von $180°$ folgt $\sphericalangle PAM = 60°$; d.h. das Dreieck APM ist sogar gleichseitig.

Der Winkel CMA ist der Nebenwinkel zu dem $60°$-Winkel:
$\sphericalangle CMA = 180° - 60° = 120°$. Im Dreieck AMC gilt dann:

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = (180° - 120°) : 2 = 30°$.
Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \delta_3 = 18°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\sphericalangle BMC = 144°$.
Der Winkel ψ ist der Nebenwinkel zu dem 144°-Winkel: $\psi = 180° - 144° = 36°$.
Das Dreieck PBM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \gamma_2 = (180° - 36°) : 2 = 72°$.

Im gleichschenkligen Dreieck ABM ist $\sphericalangle AMB = 60° + 36° = 96°$.
$\Rightarrow \delta_1 = \delta_2 = (180° - 96°) : 2 = 42°$

Figur b)

Der Winkel CMA ist der Nebenwinkel zu dem 36°-Winkel:
$\sphericalangle CMA = 180° - 36° = 144°$. Das Dreieck AMC ist gleichschenklig:
$\Rightarrow \varphi_1 = \sphericalangle ACM = (180° - 144°) : 2 = 18°$.

Weiter gilt: $\sphericalangle MCB = 48° - 18° = 30°$. Weil das Dreieck MBC gleichschenklig ist, folgt $\varphi_2 = 30°$. $\sphericalangle BMC = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$.
Der Winkel ψ_1 ist der Nebenwinkel zu dem 120°-Winkel:
$\psi_1 = 180° - 120° = 60°$.

Im Dreieck ABM gilt: $\sphericalangle AMB = 36° + 60° = 96°$. Das Dreieck MBC ist gleichschenklig:
$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = (180° - 96°) : 2 = 42°$.

Im Dreieck PBM findest du über die Innenwinkelsumme:
$\psi_2 = 180° - (60° + 42°) = 78°$.

14. (a)
   - Der Winkel BAC ist der Nebenwinkel des 135° -Winkels:
     $\sphericalangle BAC = 180° - 135° = 45° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 180° - 45° - 45° = 90°$.
   - Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, weil es zwei maßgleiche Innenwinkel besitzt: $\Rightarrow \quad \overline{AC} = \overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

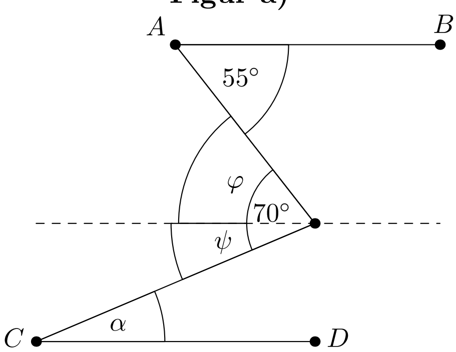
    (b)
   - Das Dreieck TQR ist rechtwinklig. $\Rightarrow \quad \beta = 90° - 30° = 60°$. Der Winkel TPR ist der Nebenwinkel des 120° -Winkels:
     $\sphericalangle TPR = 180° - 120° = 60° \quad \Rightarrow \quad \delta = 180° - 90° - 60° = 30°$.
   - Das Dreieck PQR ist wegen seiner drei 60° -Innenwinkel **gleichseitig**:
     $\Rightarrow \quad \overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{QR} = 7,64\,\text{cm}$.
     Die Strecke $[RT]$ ist in diesem Dreieck PQR eine Winkelhalbierende, also gleichzeitig die Mitttelsenkrechte auf die Basis $[PQ]$.
     $\Rightarrow \quad \overline{PT} = 0.5 \cdot \overline{PQ} = 3,82\,\text{cm}$.

15. (a)
- Der Winkel CPA ist der Nebenwinkel des $60°$-Winkels:
  $\sphericalangle CPA = 180° - 60° = 120°$.
  $\Rightarrow \quad \alpha = (180° - 120°) : 2 = 30°$.
  Wegen $\alpha + \delta = 90°$ folgt: $\delta = 60°$.
  Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck PBC ergibt sich $\beta = 60°$.
- Das Dreieck APC enthält zwei maßgleiche Innenwinkel, also ist es **gleichschenklig**.
  $\Rightarrow \quad \overline{AP} = \overline{PC} = 5\,\text{cm}$.
  Das Dreieck PBC enthält drei maßgleiche Innenwinkel, also ist es **gleichseitig**.
  Damit gilt: $\overline{AP} = 5\,\text{cm} = \overline{PC} = \overline{CB} = \overline{PB}$
  $\Rightarrow \quad \overline{AB} = 5\,\text{cm} + 5\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$.

(b) In der Figur b) gilt: $\overline{PQ} = 9,38\,\text{cm}$.
- Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck TQR ergibt sich:
  $\sphericalangle QTR = 180° - 2 \cdot 15° = 150°$.
  Der Winkel RTP ist der Nebenwinkel des $150°$-Winkels:
  $\sphericalangle RTP = 180° - 150° = 30°$.
  Im Dreieck PTR folgt $\psi = (180° - 30°) : 2 = 75°$.
  Anmerkung: Wegen $\psi + 15° = 90°$ ist das Dreieck PQR rechtwinklig.
- Das Dreieck TQR ist gleichschenklig, weil es zwei maßgleiche Innenwinkel besitzt:
  $\Rightarrow \quad \overline{TQ} = \overline{TR}$.
  Das Dreieck PTR ist ebenfalls gleichschenklig, weil es zwei maßgleiche Innenwinkel besitzt:
  $\Rightarrow \quad \overline{TP} = \overline{TR}$.
  Also gilt: $\overline{TQ} = \overline{TR} = \overline{TP}$. Also ist der Punkt T der Mittelpunkt der Seite $[PQ]$ und es gilt: $\overline{PT} = 0.5 \cdot \overline{PQ} = 4,69\,\text{cm}$.
  Anmerkung: Wegen $\overline{TQ} = \overline{TR} = \overline{TP}$ liegen die Punkte P, Q und R auf einer Kreislinie mit dem Mittelpunkt T.

16.

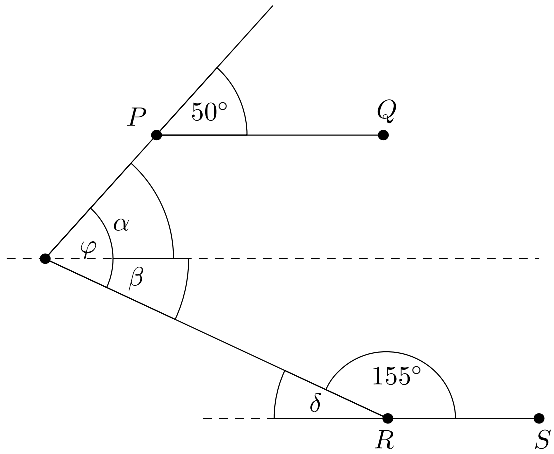
Figur a)



Eine Hilfslinie ist z.B. die Parallele zu AB bzw. CD, die durch den Scheitel des $70°$-Winkels verläuft (hier: die gestrichelte Linie).

Du erkennst nun: $\varphi = 55°$ (Z-Winkel) und $\psi = \alpha$ (Z−Winkel).
Wegen $\varphi + \psi = 70°$ ist nun $\psi = 70° - 55° = 15° = \alpha$.
Anmerkung: Es gibt auch eine andere Hilfslinie, die zur Lösung führt, nämlich die Senkrechte zu CD durch den Scheitel des 70°-Winkels. Probiere es aus.

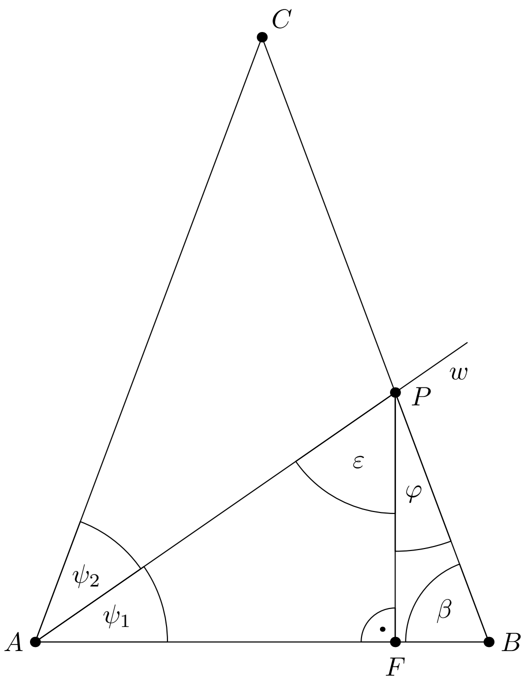
Figur b)



Wieder ist eine Hilfslinie ist z.B. die Parallele zu PQ bzw. RS, die durch den Scheitel des Winkels mit dem Maß φ verläuft (hier: die gestrichelte Linie in der Mitte). Du erkennst nun: $\alpha = 50°$ (F-Winkel).

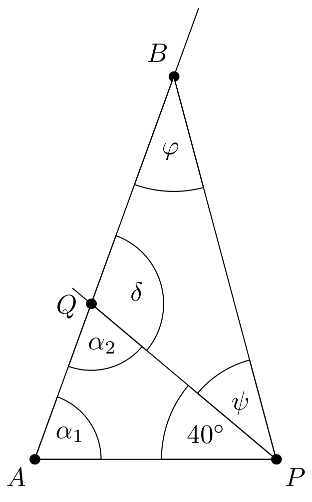
Wenn du die Strecke $[SR]$ ein wenig über den Punkt R hinaus verlängerst, entsteht ein weiterer Winkel - hier mit dem Maß δ.
Du siehst einerseits : $\delta = 180° - 155° = 25°$ (Nebenwinkel).
Andererseits sind die Winkel β und δ maßgleiche Z−Winkel. $\Rightarrow \quad \beta = \delta = 25°$.
Also ergibt sich $\varphi = \alpha + \beta = 50° + 25° = 75°$

17.



Im Dreieck AFP gilt: $\psi_1 = 90^\circ - \varepsilon = 90^\circ - 56,81^\circ = 33,19^\circ$.
Weil w die Winkelhalbierende ist, gilt: $\psi_2 = \psi_1 = 33,19^\circ$.
Weil das Dreieck ABC gleichschenklig ist, gilt $\beta = 2 \cdot 33,19^\circ = 66,38^\circ$.
Im rechtwinkligen Dreieck FBP gilt dann: $\varphi = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 66,38^\circ$
$\Rightarrow \quad \varphi = 23,62^\circ$.

18. (a)

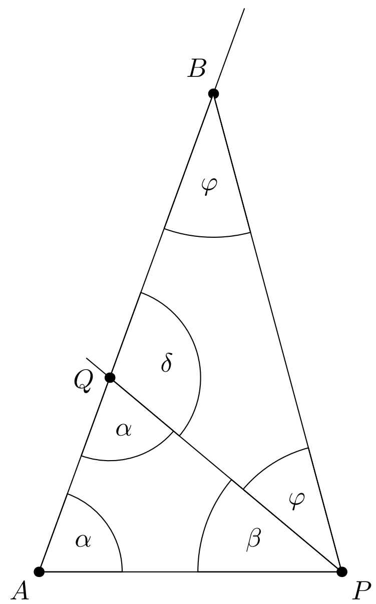


(b) Die beiden Dreiecke APQ und QPB sind gleichschenklig: $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$.
Also gilt: $\alpha_1 = \alpha_2 = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$.
Der Winkel mit dem Maß δ ist der Nebenwinkel von α_2:
$\delta = 180^\circ - \alpha_2 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Im Dreieck QPB gilt: $\varphi = \psi$.
$\Rightarrow \quad \varphi = \psi = (180° - 110°) : 2 = 35°$.

(c) Es müsste $\alpha_1 = 40° + \psi$ gelten, aber: $40° + 35° = 75° \neq 70° \quad (\dagger)$.

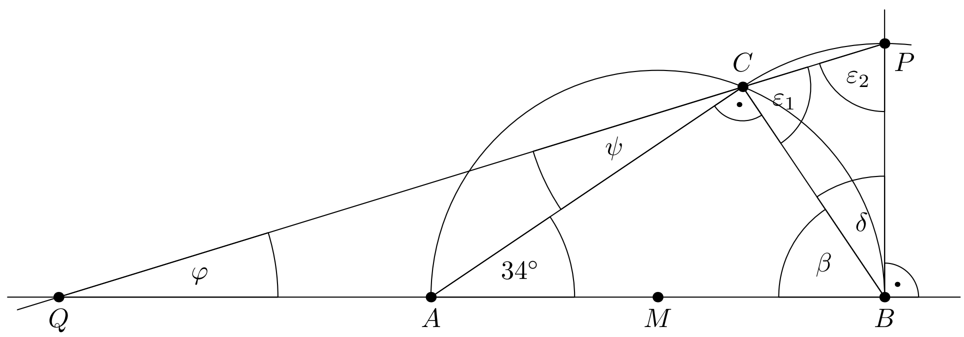
(d)



Es muss gelten:
$\beta = 180° - 2 \cdot \alpha, \quad \delta = 180° - \alpha$ und
$\varphi = 180° - \delta = [180° - (180° - \alpha)] : 2 = \frac{1}{2}\alpha$.
Soll das Dreeick APB gleichschenklig werden, dann muss $\alpha = \beta + \varphi$ sein:
$\alpha = 180° - 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 2{,}5\alpha = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 72°$.

(e) In der Lösung der Aufgabe (d) wurde gezeigt, dass es nur ein einziges gleichschenkliges Dreieck APB gibt. Dessen Basiswinkel hat aber das Maß 72°. Im Falle des gleichseitigen Dreiecks müsste der Basiswinkel (wie alle Inneninkel dort) 60° betragen. Also ist ein gleichseitiges Dreeick auf diese Weise nicht zu konstruieren.

19. (a)



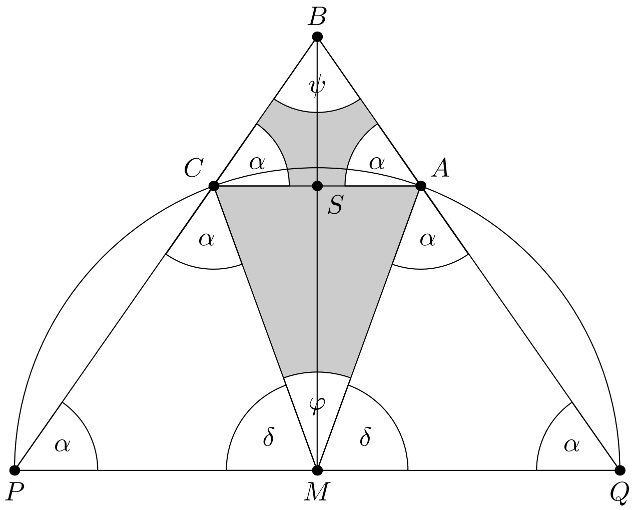
(b) Der Halbkreis mit dem Durchmesser $[AB]$ ist der THALES-Kreis über $[AB]$.
Also folgt: $\sphericalangle ACB = 90°$.

$\Rightarrow \quad \beta = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ \quad \Rightarrow \quad \delta = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$.
Im Dreieck BPC gilt: $\overline{BC} = \overline{BP}$, also ist das Dreieck BPC gleichschenklig.
$\Rightarrow \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = (180^\circ - 34^\circ) : 2 = 73^\circ$.
Das Dreieck QBP ist rechtwinklig: $\varphi + 90^\circ + \varepsilon_2 = 180^\circ$.
$\Rightarrow \quad \varphi + \varepsilon_2 = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \varphi = 17^\circ$.

(c) Im Dreieck QBC gilt:
$\varphi + \beta + 90^\circ + \psi = 180^\circ$. Also: $17^\circ + 56^\circ + 90^\circ + \psi = 180^\circ$.
$\Rightarrow \quad \psi = 17^\circ$.
Damit haben zwei Innenwinkel des Dreiecks ACQ gleiches Maß. Also ist das Dreieck ACQ gleichschenklig.

20. (a) Das Viereck $MABC$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, denn die beiden Diagonalen stehen aufeinander senkrecht.

(b)



(c) Siehe Zeichnung.

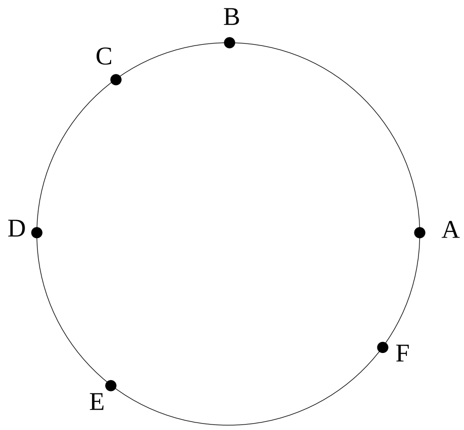
(d) Im Dreieck PMC gilt: $2\alpha + \delta = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \delta = 180^\circ - 2\alpha$.
Am Punkt M gilt: $\delta + \varphi + \delta = 180^\circ$.
Also: $180^\circ - 2\alpha + \varphi + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad 360^\circ + \varphi - 4\alpha = 180^\circ$
$\Rightarrow \quad \varphi = 4\alpha - 180^\circ$.

(e) Es muss $\varphi = 4\alpha - 180^\circ > 0$ sein: $\Leftrightarrow \quad 4\alpha - 180^\circ > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 45^\circ$. Außerdem muss $\alpha < 90^\circ$ sein. Insgesamt muss gelten $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.

(f) Im Dreieck CAB gilt: $2\alpha + \psi = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \psi = 180^\circ - 2\alpha$.

(g) Damit das Viereck $MABC$ eine Raute wird, muss $\varphi = \psi$ gelten:
Also: $4\alpha - 180^\circ = 180^\circ - 2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 6\alpha = 360^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 60^\circ$.

21.



Eckpunkt A als erster:

ABC, ABD, ABE, ABF
ACD, ACE, ACF
ADE, ADF
AEF.

Eckpunkt B als erster:

BCD, BCE, BCF
BDE, BDF
BEF.

Eckpunkt C als erster:

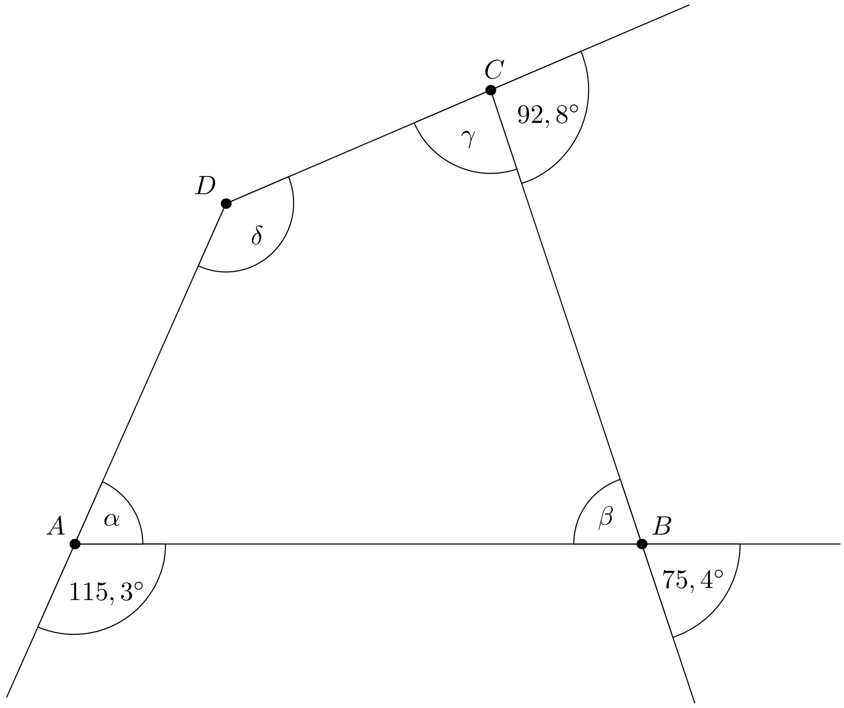
CDE, CDF
CEF.

Eckpunkt D als erster:

DEF.

Es gibt nicht mehr und nicht weniger als 20 solche Dreiecke.

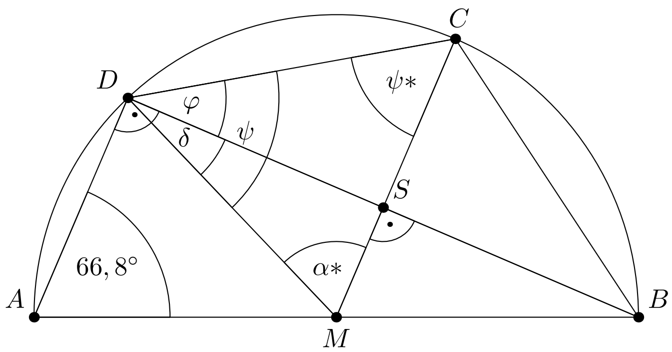
22.



(a) „... die Halbgeraden $[AB$ und $[DC$ nicht parallel sind.“

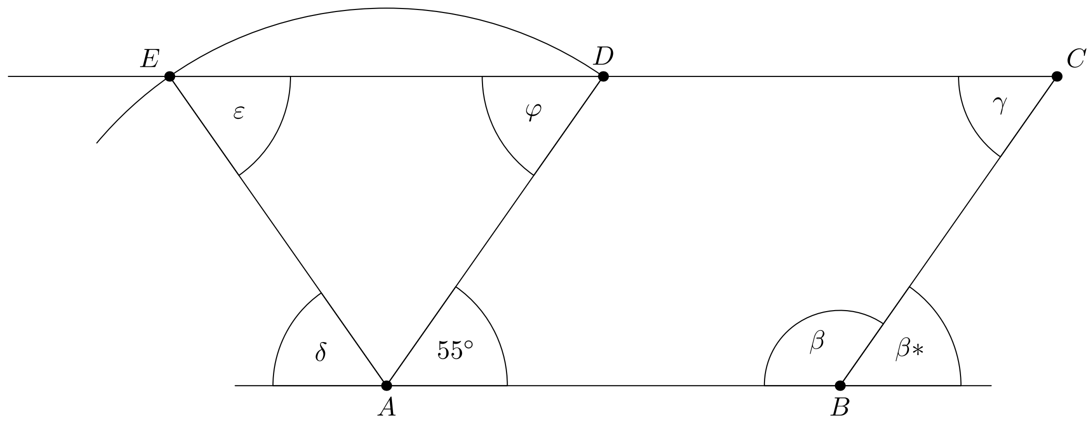
(b) $\beta = 75,4°$ (Scheitelwinkel)
$\gamma = 180° - 92,8° = 87,2°$ und
$\alpha = 180° - 115,3° = 64,7°$ (jeweils Nebenwinkel)
Die Innenwinkelsumme in jedem Viereck beträgt 360°.
$\Rightarrow \quad \delta = 360° - 75,4° - 87,2° - 64,7° = 132,7°$.

23. (a)



(b) Der Halbkreis ist gleichzeitig der THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$. Also gilt: $\sphericalangle ADB = 90°$.
$\Rightarrow \quad [AD] \parallel [MC] \quad \Rightarrow \quad \alpha* = 66,8°$.
Das Dreieck MCD ist gleichschenklig; es gilt: $\overline{MC} = \overline{MD} = 4\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad \psi* = \psi = (180° - 66,8°) : 2 = 56,6°$.
Im Dreieck MSD gilt: $\delta = 90° - \alpha* = 90° - 66,8° = 23,2°$.
Also ist $\varphi = \psi - \delta = 56,6° - 23,2° = 33,4°$.

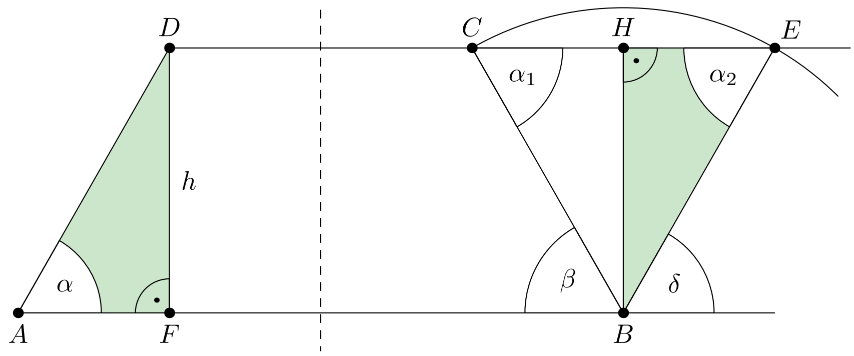
24. (a)



(b) Es gilt $\overline{AD} = \overline{AE} = 5\,\text{cm}$; also ist das Dreieck ADE gleichschenklig.

(c)
- Im Parallelogramm $ABCD$ gilt: $\gamma = 55°$.
  $\Rightarrow \quad \varphi = 55°$ (F-Winkel zu γ).
  Weil das Dreieck ADE gleichschenklig ist, folgt $\varphi = \varepsilon = 55°$.
- Dann gilt aber auch $\delta = \varepsilon = 55°$ (Z-Winkel zu ε).
  $\Rightarrow \quad \beta* = 55°$ (Z-Winkel zu γ).
  $\Rightarrow \quad \beta = 180° - 55° = 125°$ (Nebenwinkel von $\beta*$).
  Andererseits ist $\sphericalangle BAE$ der Nebenwinkel von δ:
  $\sphericalangle BAE = 180° - 55° = 125° = \beta$.
  Im Viereck $ABCE$ gilt: $[AB] \parallel [CE]$.
  Die beiden spitzen und die beiden stumpfen Innenwinkel haben jeweils gleiches Maß. Also ist das Viereck $ABCE$ ein achsensymmetrisches Trapez.

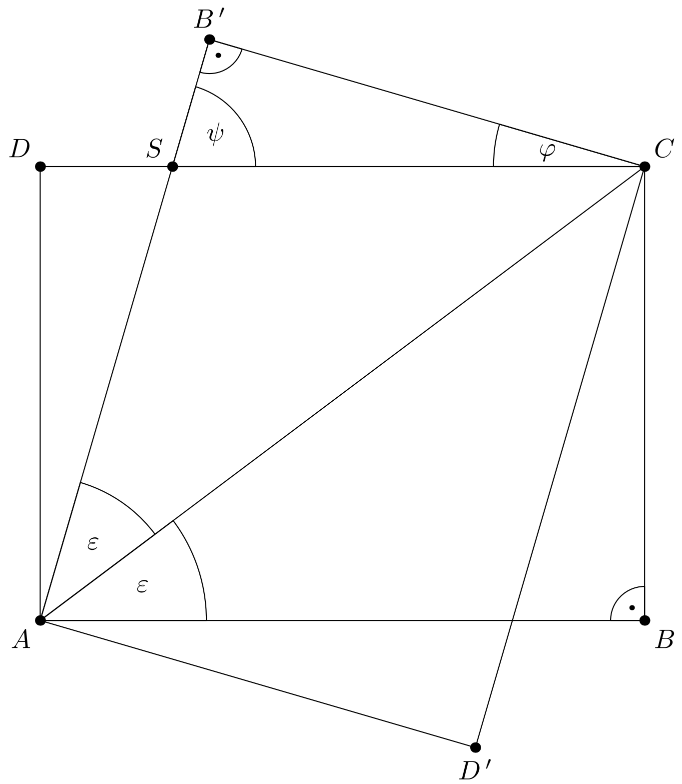
25. (a)



(b)
- Es gilt: $\overline{BC} = \overline{BE}$, weil die beiden Punkte C und E auf derselben Kreislinie mit B als Mittelpunkt liegen.
- Weil das Trapez achsensymmetrisch ist, folgt $\beta = \alpha$.
  Weiter gilt: $\beta = \alpha_1$ (Z-Winkel). Also folgt $\alpha_1 = \alpha$.

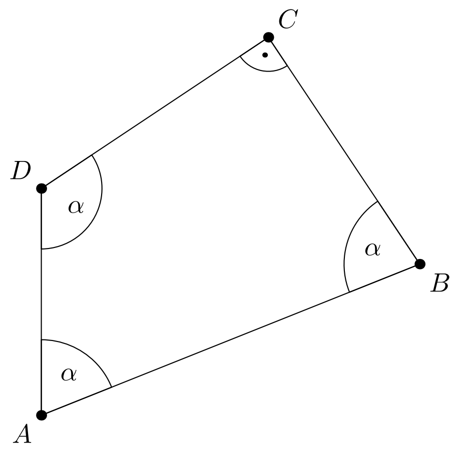
- Das Dreieck BEC ist gleichschenklig. $\quad\Rightarrow\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.
  Weiter folgt $\delta = \alpha_2$ (Z-Winkel) $\Rightarrow\quad \delta = \alpha$, d.h. es gilt: $[AD] \parallel [BE]$ weil damit δ und α F-Winkel sind.
  Beim Trapez $ABCD$ gilt $[AB] \parallel [CD]$ und damit auch $[AB] \parallel [ED]$.
  Daher sind im Viereck $ABED$ jeweils zwei gegenüberliegende Seiten parallel, also ist das Viereck $ABED$ ein Parallelogramm.

26. (a)



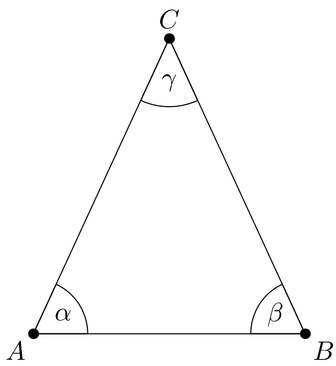
(b) Jede Achsenspiegelung ist längen- und winkeltreu. Daher sind das Viereck $AD'CB'$ und das Rechteck $ABCD$ kongruent. $\quad\Rightarrow\quad \sphericalangle SB'C = 90°$.
Der Winkel CSB' ist ein Stufenwinkel zum Winkel BAS:
$\Rightarrow\quad \psi = 2 \cdot \varepsilon = 73{,}74°$.
$\Rightarrow\quad \varphi = 90° - \psi = 90° - 73{,}74° = 16{,}26°$.

27.



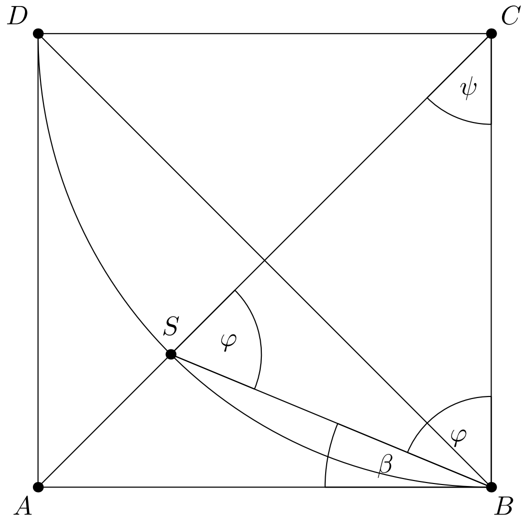
Es gilt: $\alpha + \alpha + \alpha + 90° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot \alpha + 90° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 90°$.
Die drei restlichen Innenwinkel des Vierecks sind damit ebenfalls rechte Winkel. Bei diesem Viereck muss es sich also um ein Rechteck handeln.

28.



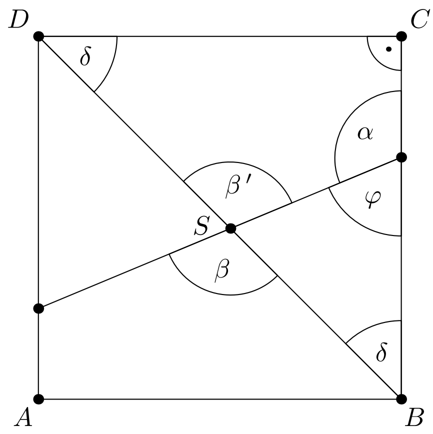
In einem gleichschenkligen Dreieck haben die beiden Basiswinkel gleiches Maß. In der Figur gilt also: $\alpha = \beta$.
1. Möglichkeit: $\alpha = \beta = 42,68° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 180° - 2 \cdot 42,68° = 94,64°$.
2. Möglichkeit: $\gamma = 42,68° \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = (180° - 42,68°) : 2 = 68,66°$.

29. (a)



(b) Im Quadrat $ABCD$ halbiert die Diagonale $[AC]$ den rechten Winkel DCB. Also gilt: $\psi = 45°$.
Das Dreieck SBC ist gleichschenklig. $\Rightarrow \quad \varphi = (180° - 45°) : 2 = 67,5°$.
$\Rightarrow \quad \beta = 90° - \varphi = 22,5°$.

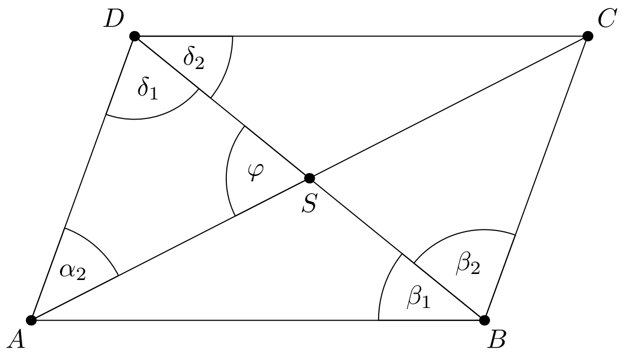
30.



1. Möglichkeit: Über die Innenwinkelsumme im Viereck $SQCD$
Weil jede Quadratdiagonale Winkelhalbierende von zwei rechten Winkeln ist, folgt $\delta = 45°$.
Dann gilt im Viereck $SQCD$: $45° + \beta' + 123,4° + 90° = 360°$
$\Rightarrow \quad \beta' = 101,6°$.
Weil β' und β Scheitelwinkel sind, folgt $\beta' = \beta = 101,6°$.

2. Möglichkeit: Über den Satz vom Außenwinkel
φ ist der Nebenwinkel von α. Also gilt: $\varphi = 180° - 123,4° = 56,6°$.
β ist ein Außenwinkel am Dreieck BQS: $\beta = \delta + \varphi = 45° + 56,6° = 101,6°$.

31. (a)



(b) Es gibt mehrere Möglichkeiten, z.B.:
$\Delta\,ASD$: $\delta_1 = 180^\circ - 42,1^\circ - 65,3^\circ = 72,6^\circ = \beta_2$ (Z-Winkel) .
$\beta_1 = \delta_2 = 38,7^\circ$ (Z-Winkel) $\quad\Rightarrow\quad \beta = \delta_1 + \delta_2 = 111,3^\circ$.

32. Es müsste gelten: $\beta = \sphericalangle CBA = 180^\circ - \beta^* = 180^\circ - 77,6^\circ = 102,4^\circ$.
Weil aber α^* und β zwei zugehörige F-Winkel sind, müssten beide Winkel gleiches Maß besitzen.
Aber in der Angabe steht: „$\alpha^* = 109,2^\circ \neq 102,4^\circ$.“ Das geht nicht.

12. Drehung

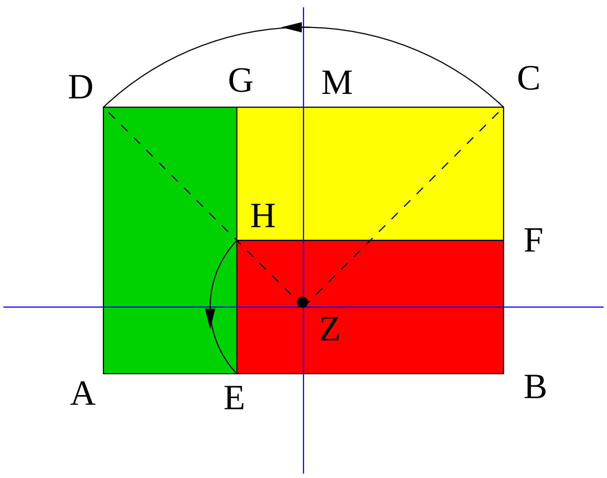
1.

(a) Das Rechteck $ABCD$ ist 12 cm breit und 8 cm hoch.
Die Seitenlängen stehen im Verhältnis 2:3.
Breite jedes Rechtecks im Inneren: $3x$ cm
Höhe jedes Rechtecks im Inneren: $2x$ cm
Breite : Höhe = 2x : 3x = 2 : 3. Das gilt für alle $x \in \mathbb{Q}^+$.

(b) $u(x) = 2 \cdot [(2x + x) + (x + x)]\,\text{cm} = 10x\,\text{cm}$

(c) $10x = 430 \quad \Rightarrow \quad x = 43$

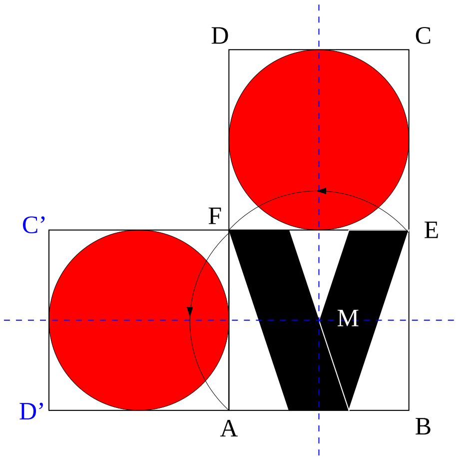
(d)



Für diese Drehung gilt z.B.: $C \to D$ und $H \to E$. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecken $[CD]$ und $[HE]$ ergibt den Drehpunkt Z.
Die Dreiecke DZM und ZCM sind gleichschenklig-rechtwinklig. Also hat der Drehwinkel CZD das Maß 90°.

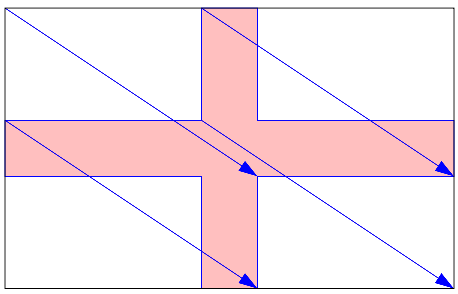
2. (a) –

(b)
- Der Punkt E muss so gedreht werden, dass er auf F zu liegen kommt. Also muss das Drehzentrum auf der Mittelsenkrechten der Strecke $[EF]$ liegen.
  Gleichzeitig wird der Punkt F auf den Punkt A gedreht. Also muss das Drehzentrum auch auf der Mittelsenkrechten der Strecke $[AF]$ liegen.
  Also liegt das Drehzentrum im Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten, nämlich im Punkt M, dem Quadratmittelpunkt.
-



- 1. Möglichkeit:
  Das Dreieck MEF ist gleichschenklig-rechtwinklig mit der Hypotenuse $[FE]$.
  2. Möglichkeit:
  Die Mittelenkrechte der Strecke $[FE]$ deckt sich nach der Drehung mit der Mittelsenkrechten zu $[AF]$. Weil beide Mittelsenkrechten aufeinander senkrecht stehen, hat der Drehwinkel das Maß 90°.

3.
   (a) –
   (b) •



   - $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ -3 \end{pmatrix}$

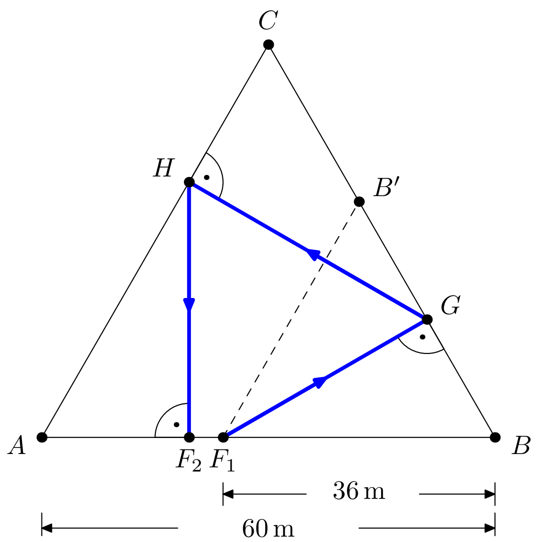
   (c)
   - Das Drehzentrum liegt im Schnittpunkt der Diagonalen des großen Rechtecks. Dieser Schnittpunkt deckt sich mit dem Symmetriezentrum des Kreuzes. Der Drehwinkel beträgt 180°.
   - Es handelt sich um eine Punktspiegelung.

4. (a) –
   (b) $\varphi \in \{k \cdot 90°\}$ mit $k \in \mathbb{Z}$
   Das Drehzentrum ist der Quadratmittelpunkt. Die geforderten Hilfslinien verlaufen

vom Drehzentrum zu Urbildpunkten und den zugehörigen durch Drehung entstandenen Bildpunkten.

(c) Wegen $2 \cdot 90° = 180°$ kann auch um 180° gedreht werden. Jede Drehung um 180° ist eine Punktspiegelung.

5. (a)



(b) **In einem gleichseitigen Dreieck hat jeder Innenwinkel das Maß** $60°$.
Wenn du den Punkt B am Punkt G spiegelst, dadurch erhältst du den Punkt B'. Weil jede Achsen- oder Punktspiegelung winkeltreu ist, muss das Dreieck F_1BB' gleichseitig sein, denn alle Innenwinkel haben das Maß 60°.
Dann ist das Dreieck F_1BG ein halbes gleichseitiges Dreieck und es gilt:
$\overline{BG} = 0,5 \cdot 36\,\text{m} = 18\,\text{m}$.
$\Rightarrow \quad \overline{GC} = 60\,\text{m} - 18\,\text{m} = 42\,\text{m}$.
Das Dreieck HGC ist wieder ein halbes gleichseitiges Dreieck und es gilt:
$\overline{HC} = 0,5 \cdot 42\,\text{m} = 21\,\text{m}$.
$\Rightarrow \quad \overline{AH} = 60\,\text{m} - 21\,\text{m} = 39\,\text{m}$.
Weil das Dreieck AF_2H wiederum ein halbes gleichseitiges Dreieck ist, folgt:
$\overline{AF_2} = 0,5 \cdot 39\,\text{m} = 19,5\,\text{m}$.
$\Rightarrow \quad \overline{F_1F_2} = 60\,\text{m} - 36\,\text{m} - 19,5\,\text{m} = 4,5\,\text{m}$.
Die beiden Fahnenmasten sind 4,5 m voneinander entfernt.

(c)
- Dieser Sachverhalt ergibt sich sofort aus der Längentreue de Achsenspiegelung.
- Wie schon vorher gezeigt sind die Längen der Strecken $[GF_1]$ und $[GF_1']$ sowie $[HF_2]$ und $[HF_2']$ gleich. Hinzu kommt lediglich die mittlere Strecke $[GH]$, die ja den Rest beiden Streckenzüge ausmacht. Also sind beide Wege gleich lang.
- Die kürzeste Verbindung zwischen F_1' und F_2' liegt ist die gerade Linie zwischen diesen beiden Punkten.
  Aus der Längentreue der Achsenspiegelung folgt nun, dass $\overline{F_1G^*} = \overline{F_1'G^*}$ und $\overline{F_2H^*} = \overline{F_2'H^*}$ sein muss.

Weil $[G^*H^*]$ in beiden Streckenzügen den Rest bildet, ist der Streckenzug $F_1 - G^* - H^* - F_2$ genauso lang wie die minimale Strecke $[F_1'F_2']$, also ebenfalls minimal.

Anmerkungen

- Obwohl die drei Lote jeweils die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes zur gegenüber liegenden Seite des Grundstücks darstellen, ergibt die Summe dieser drei Entfernungen nicht den kürzesten Weg von F_1 zu den zwei Seiten $[BC]$ und $[CA]$ nach F_2.
- Mit Hilfe der GEONExT-Datei „07eh011.gxt“, kannst du den Kontrollgang von Herrn Lith variieren.

6. Zur besseren Veranschaulichung sind die Felder der ursprünglichen Figur durchnummeriert:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figur a): Wenn du dieses Muster auf die obige Figur schiebst, dann werden alle Felder überdeckt (das Feld Nr. 3 sogar doppelt).

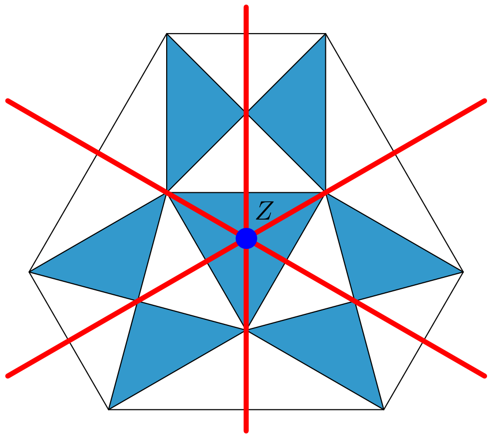
Figur b): Ein Feld bleibt weiß: z.B. Nr. 6 oder Nr. 7.

Figur c): Wenn du diese Figur um $-90°$ oder $270°$ drehst, lässt sie sich so auf die ursprüngliche Figur schieben, dass alle Felder dunkel erscheinen.

Figur d): Eines der Felder 3, 6 oder 9 bleibt in jedem Fall weiß.

Figur e): Wenn du diese Figur an ihrem Mittelpunkt spiegelst oder um $180°$ drehst, lässt sie sich so auf die ursprüngliche Figur schieben, dass alle Felder dunkel erscheinen.

7. (a)
   - Die drei Mittelsenkrechten auf die Seiten $[EC]$, $[BI]$ und $[HF]$ schneiden sich in Z.
   - Die drei Mittelsenkrechten auf die Seiten $[DA]$, $[AG]$ und $[GD]$ schneiden sich in Z.
   - Die drei Mittelsenkrechten auf die Seiten $[CB]$, $[IH]$ und $[FE]$ schneiden sich in Z.

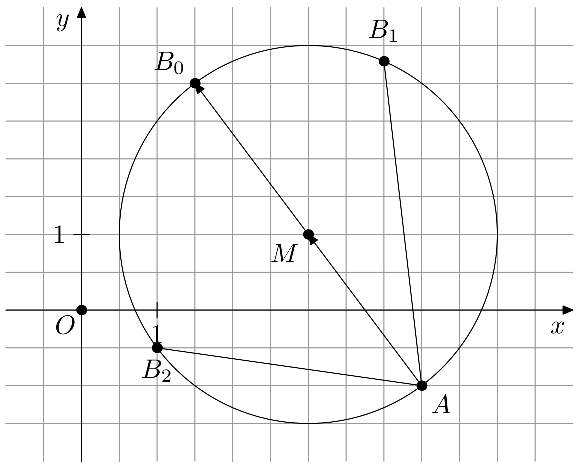


(b) $\alpha \in \{120°; 240°\}$

(c) Der Winkel φ wird von den beiden Quadraten $ABCD$ und $GHIA$ eingeschlossen. Hinter dem Scheitel liegt das gleichseitige Dreieck ADG. Mit dem betreffenden Vollwinkel ergibt sich:
$2 \cdot 90° + 60° + \varphi = 360° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 120°$

13. Punktspiegelung

1.



(a) Siehe Zeichnung.

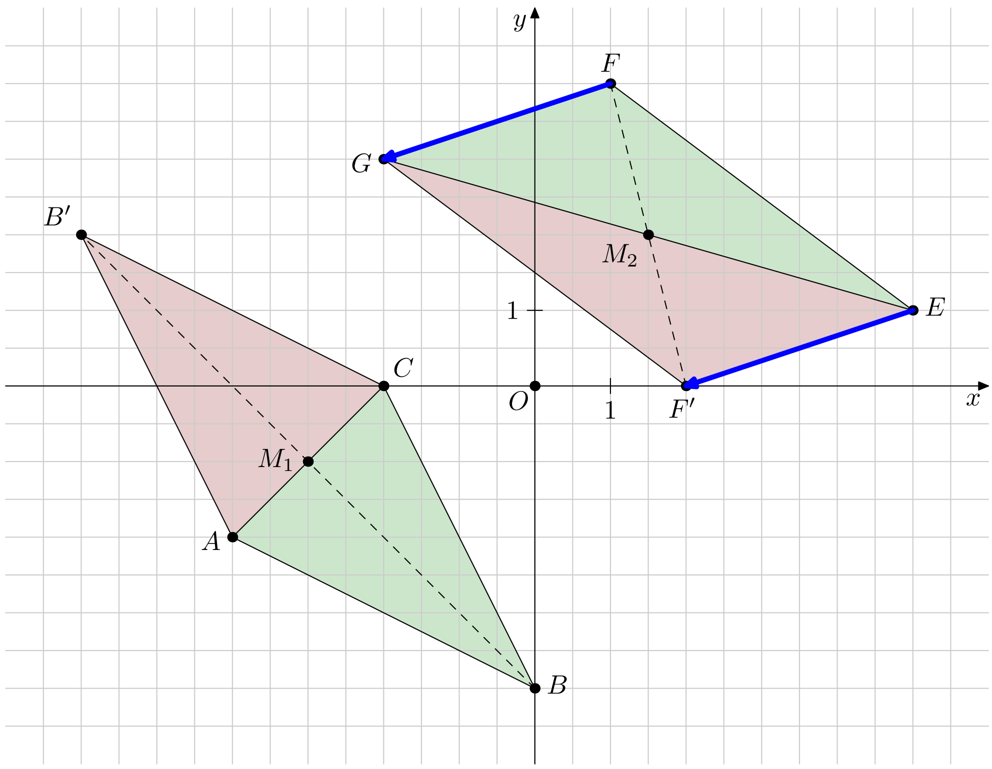
(b) Siehe Zeichnung.

(c) Siehe Zeichnung. Die längste Kreissehne muss durch den Kreismittelpunkt verlaufen. Es gilt z.B.: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB_0}$ mit $B_0(x \mid y)$.

$$\begin{pmatrix} 3 - 4,5 \\ 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -1,5 = x - 3 \text{ und } 2 = y - 1$$

$$\Rightarrow \quad B_0(1,5 \mid 3)$$

2. (a)



(b)
- Siehe Zeichnung.
  Hier gilt: $A \xrightarrow{M_1} C \quad C \xrightarrow{M_1} A \quad$ und $\quad B \xrightarrow{M_1} B'$
- Dieses Viereck ist eine **Raute**.
  Anmerkung: Auf jeden Fall ist das Viereck ein Parallelogramm, weil jede Punktspiegelung winkeltreu ist. Weil das Dreieck ABC aber gleichschenklig ist, sind alle vier Seiten gleich lang, also ist dieses Parallelogramm sogar eine Raute.
- Alle vier Seiten sind gleich lang.

(c)
- Siehe Zeichnung. Hier gilt: $E \xrightarrow{M_2} G \quad G \xrightarrow{M_2} E \quad$ und $\quad F \xrightarrow{M_2} F'$
- Es ist ein **Parallelogramm**.
- Je zwei gegenüber liegende Seiten sind parallel.

(d)

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(e) Es sei $F'(x' \mid y')$. Im Parallelogramm $EFGF'$ gilt z.B.: $\overrightarrow{EF'} = \overrightarrow{FG}$:

$$\begin{pmatrix} x'-5 \\ y'-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} \Leftrightarrow & x'-5 = -3 & \Leftrightarrow & x' = -2 \\ \wedge & y'-1 = -1 & \Leftrightarrow & y' = 0 \qquad \Rightarrow \quad F'(2 \mid 0) \end{array}$$