SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 7 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Wahlpflichtfächergruppe I

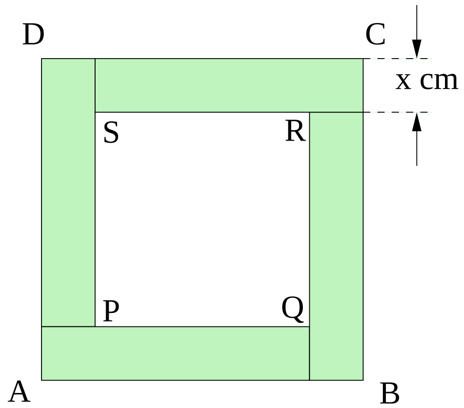
1. Die Menge der rationalen Zahlen

1. Berechne:
   (a) $(-1) \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) =$
   (b) $[(-1) : (-1)] : [(-2) : (+2)] =$
   (c) $5 - 2 \cdot [17 + (-4) \cdot 4] + [22 - 111 : (-37)] =$

2. Ergänze im Folgenden die Leerstellen.
   $3x^2 + 18x + \ldots = 0 \quad G = \mathbb{R}, L = \{-2; \ldots\}$.

3. Gegeben sind die Punkte $A(-2 \mid -1)$, $B(6 \mid 1)$, $C(3 \mid 4{,}5)$ und $D(-1 \mid 3{,}5)$
   (a) Zeichne das Viereck $ABCD$ in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $5 \leqq x \leqq 7$ und $2 \leqq y \leqq 6$
   (b) Kennzeichne alle Innenwinkel mit griechischen Buchstaben.
   (c) Schreibe die dazugehörigen Winkelmaße hin.
   (d) Begründe durch Rechnung, ob deine vier Messergebnisse im Rahmen der Messgenauigkeit stimmen.

4.



Das Quadrat $ABCD$ ist aus vier kongruenten Rechtecken und dem Quadrat $PQRS$ zusammengefügt worden. Die kürzere Seite jedes Rechtecks ist x cm lang.

(a)
- Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $x = 1$.
- Berechne den Anteil der Fläche des Quadrates $PQRS$ am Quadrat $ABCD$ in Prozent.

(b)
- Wie viel Prozent der Fläche des Quadrates $ABCD$ würde eines der vier Rechtecke einnehmen, wenn das Quadrat $PQRS$ 68% der Gesamtfläche einnehmen würde?
- Berechne x so, dass das Quadrat $PQRS$ 25% der Gesamtfläche einnimmt.

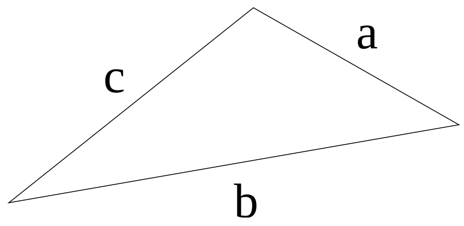
5.

$$-60\,; \qquad -1\,; \qquad 0\,; \qquad +2\,; \qquad +5$$

(a) Wähle aus den obigen fünf Zahlen zwei Zahlen so aus, dass deren Quotientenwert am größten wird.

(b) Wähle aus den obigen fünf Zahlen zwei Zahlen so aus, dass deren Quotientenwert am kleinsten wird.

6.



Das skizzierte Dreieck hat einen Umfang von $21,5\,\text{cm}$.
Die Seite b ist die längste Seite. Die Seite a ist um $5\,\text{cm}$ kürzer als die Seite b und die Seite c ist um $3\,\text{cm}$ länger als die Seite a. Berechne die Seitenlängen des Dreiecks.

7. Frau Zoprent kandidierte in Besselheim für das Bürgermeisteramt.
41200 Einwohnwer waren wahlberechtigt. Die Wahlbeteiligung betrug 70%. Frau Zoprent wurde mit 60% aller abgegebenen Stimmen zur Bürgermeisterin gewählt.

(a) Wie viele Stimmen hat Frau Zoprent auf sich vereinigt?

(b) Herr Zoprent meint nach der Wahl zu seiner Gattin: „Wenn die Wahlbeteiligung unter 60% gelegen hätte, wärest du nicht gewählt worden.“ Begründe, dass Herr Zoprent nicht Recht hat.

8. In Cantorhausen wurde Herr Roprentz zum Bürgermeister gewählt. 32900 Einwohner waren wahlberechtigt. Die Wahlbeteiligung betrug 70%. Herr Roprentz hatte mehr als 50% aller Stimmen auf sich vereinigt.
   Wie viele Wählerinnen und Wähler waren es mindestens, die ihre Stimme für ihn abgegeben haben?

9.

$$\{-7;\, -5;\, -3;\, 0; +1\}$$

   (a) Wähle aus der obigen Menge zwei Zahlen aus, so dass deren Produktwert maximal wird.
   (b) Wähle aus der obigen Menge zwei Zahlen aus, so dass deren Produktwert minimal wird.
   (c)

$$5 : \square \;=$$

   - Welche Zahl aus der obigen Menge muss in dem Kästchen stehen, damit der Wert des Quotienten maximal wird?
   - Welche Zahl aus der obigen Menge muss in dem Kästchen stehen, damit der Wert des Quotienten minimal wird?

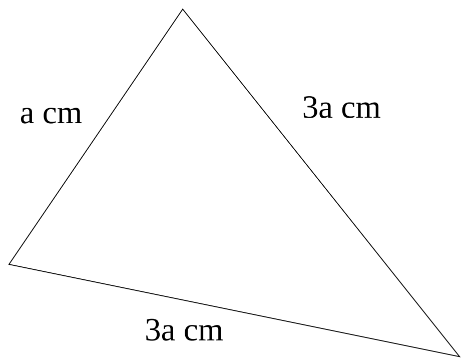
   (d) Wähle aus der obigen Menge zwei Zahlen aus, so dass deren Differenzwertwert maximal wird.

10. Gegeben ist der Term $T(x) = -2x + 3$ mit $G = \mathbb{N}$.
    Für diesen Term wurde die folgende unvollständige Tabelle erstellt:

x	$-2,5$	4	
$T(x) = -2x + 3$		-5	0

Berechne den Inhalt der leeren Zellen.

11.



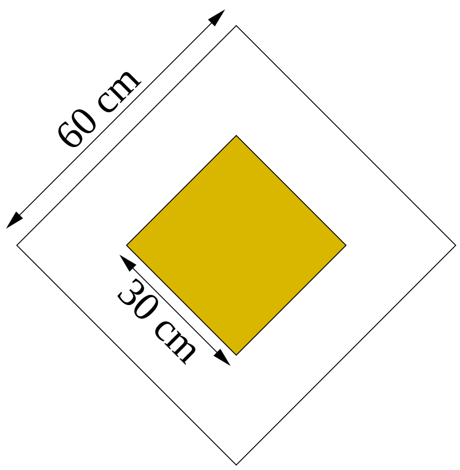
In der Skizze soll die Variable a nur mit natürlichen Zahlen belegt werden.

(a)
- Berechne den Umfang des Dreiecks für $a = 17$ und $a = 23$.
- Welchen gemeinsamen Teiler, der größer als 1 ist, besitzen die Maßzahlen der beiden Ergebnisse?

(b)
- Berechne den Umfang u des Dreiecks in Abhängigkeit von a.
- Begründe: Die Maßzahl des Umfangs ist - egal womit du den Platzhalter $a \in \mathbb{N}$ belegtst - stets durch 7 teilbar.

12. Untersuche, ob die beiden Gleichungen G_1 und G_2 die gleiche Lösungsmenge besitzen:
G_1: $4 - (5x^2 + 8) \cdot (-12) = 13$ G_2: $3 \cdot (8 + 5x^2) \cdot 4 = 9$

13.



Das Vorfahrtszeichen besteht aus zwei Quadraten.

(a) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Quadrate.

(b) Welche Seitenlänge müsste das große Quadrat besitzen, damit es neunmal größer als das innere Quadrat ist?

In Anlehnung an: Mathematiktest in der Jahrgangsstufe 8 für bayerische Realschulen vom 25. Sept. 2007

14. Eva und Franz vergleichen die beiden folgenden Terme in der Grundmenge $G = \mathbb{Z}$:
$$T_1(x) = 3(x + 80) \quad \text{und} \quad T_2(x) = 7(x + 80).$$
Eva notiert:

- In beiden Termen kommt der Faktor $(x + 80)$ vor
- $3 < 7$
- Also gilt stets $T_1(x) < T_2(x)$

Franz hat Zweifel, doch Eva begründet ihre Aussagen mit Hilfe einer Wertetabelle:

x	10	20	30	-10	-20	-30
$T_1(x)$	270	300	330	210	180	150
$T_2(x)$	630	700	770	490	420	350

Sie meint: „Also gilt immer $T_1(x) < T_2(x)$.“ Franz entgenet beim Anblick der Tabelle: „Du hast nicht Recht, denn wenn wir die Tabelle fortsetzen ...“

(a) Begründe, dass Franz Recht hat.

(b) Für welche Belegungen von x ergeben sich gleiche Termwerte?

15.

$$(36 - \underline{\qquad}) \cdot \underline{\qquad}$$
$$= 36 \cdot \underline{\qquad} - \underline{\qquad} \cdot \underline{\qquad}$$
$$= -180 + \underline{\qquad}$$
$$= 20$$

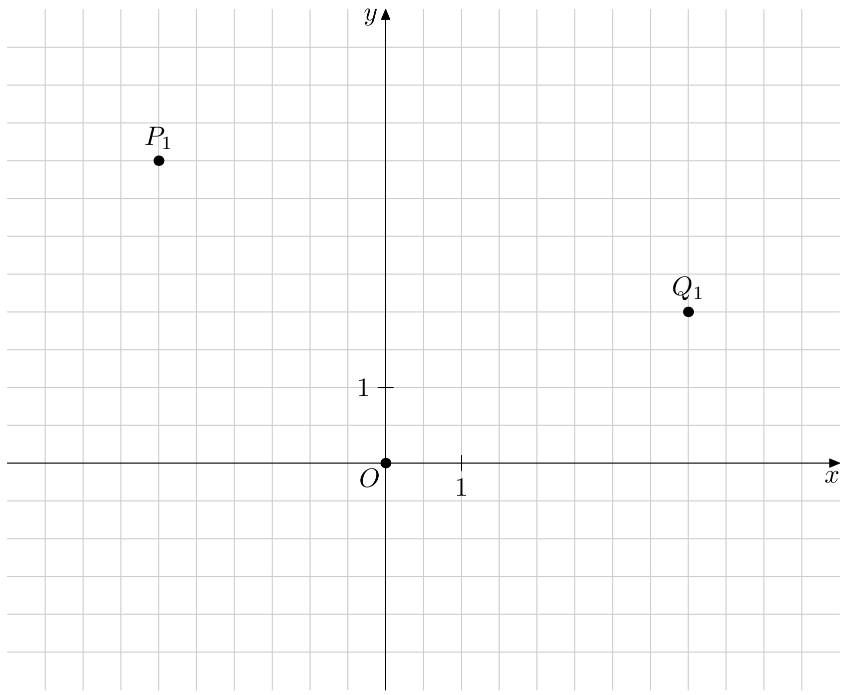
Fülle die leeren Plätze passend mit ganzen Zahlen aus.

16. Fritz rechnet die folgende Aufgabe:

$$-2^4 + (-2)^4 = 16 + 16 = 32.$$

Maria erkennt, dass Fritz dabei ein Fehler unterlaufen ist. Sie weist ihn darauf hin, doch Fritz will dies nicht einsehen: „Wir haben gelernt: Wenn der Exponent eine gerade Zahl ist, dann ist der Wert der betreffenden Potenz immer positiv. Also kommt 32 heraus.“ Maria entgegnet: „Das stimmt nur manchmal.“
Notiere die restlichen Sätze von Marias Antwort, so dass Fritz seinen Fehler erkennt und vollkommen einsieht.

17.



(a) Gib die Koordinaten der Punkte P_1 und Q_1 an.

(b)
- Zeichne drei weitere Punkte P_2, P_3 und P_4 ein, die alle den gleichen y-Wert wie der Punkt P_1 besitzen.
- Verbinde die vier Punkte $P_1 - P_2 - P_3 - P_4$ mit deinem Geodreieck, so dass eine Strecke entsteht.
  Beschreibe die Lage dieser Strecke zu einer der beiden Koordinatenachsen.

(c) Zeichne einen Punkt Q_2 ein, dessen y-Wert um 3 kleiner ist als der y-Wert des Punktes Q_1 und der gleichzeitig den gleichen x-Wert besitzt wie der Punkt P_1.

(d) Erich überlegt, ob es im II. Quadranten einen Punkt gibt, der den x-Wert $4,3$ besitzt. Was meinst du? Begründe.

18. Konstanze rechnet die folgende Aufgabe:

$$-(-3)^4 - (-3)^2 - (-3)^1 = 93.$$

Konstanzes Lehrer stellt fest: „$-(-3)^4$ ergibt aber -81." Konstanze widerspricht: „Sie haben uns doch beigebracht, dass Minus Minus Plus ergibt!". Der Lehrer entgegnet: „Du kannst diese Regel hier nicht so ohne weiteres anwenden, weil ..."

(a) Notiere die restlichen Sätze des Lehrers, so dass Konstanze ihren Fehler erkennt und vollkommen einsieht.

(b) Berechne das richtige Ergebnis.

19.

$$\square \cdot \bigcirc - \triangle = -12$$

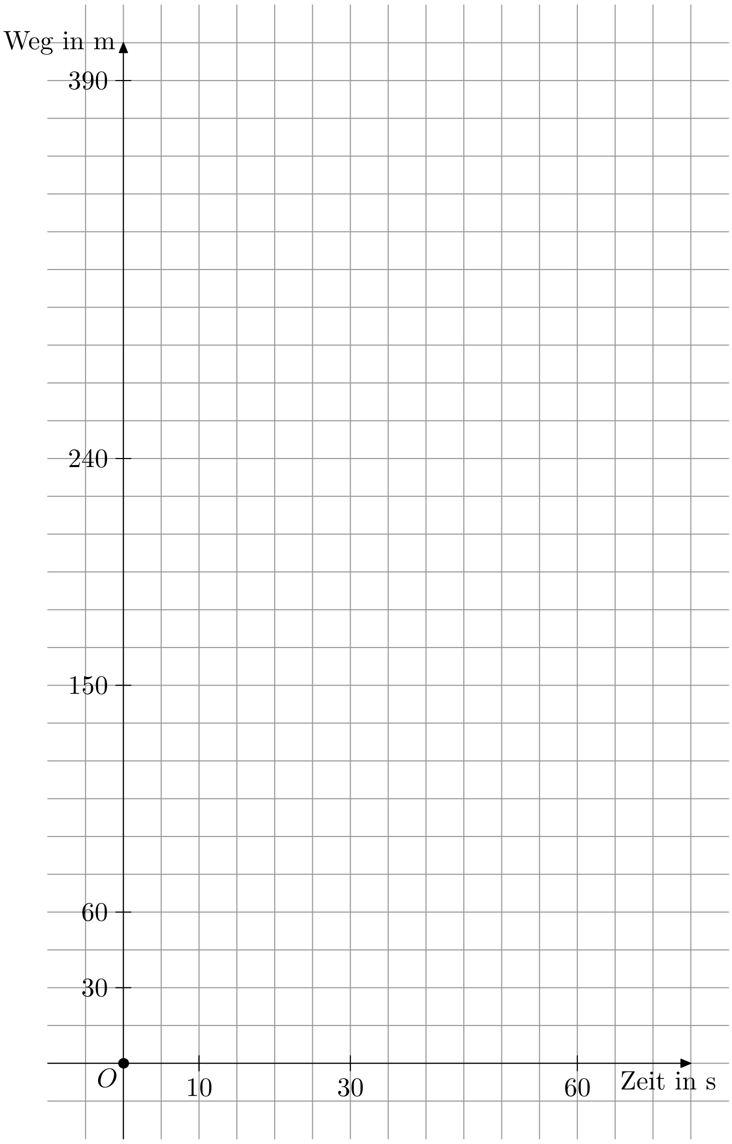
(a) Setze in jeden Platzhalter eine der Zahlen $\{-4; 0; 2; 4; 10\}$ so ein, dass die Rechnung stimmt.

(b) Franz will mit den Zahlen aus der oben angegebenen Menge und der gleichen Platzhalterkombination das Ergebnis -3 erzeilen. Geht das? Begründe.

20. Fritz und Franz fahren mit ihren Fahrrädern um die Wette. Der zurückgelegte Weg von jedem ist im Zehn-Sekunden-Abstand in der folgenden Tabelle festgehalten:

Zeit in s	0	10	20	30	40	50
Strecke von Fritz in m	0	60	120	180	240	300
Strecke von Franz in m	0	15	60	135	240	375

(a) Zeichne das Diagramm von Fritz und das Diagramm von Franz in das vorbereitete Koordinatensystem:



(b) Wessen Diagramm lässt auf eine direkte Proportionalität schließen? Begründe.

(c) Wer gewinnt das Rennen? Begründe.

21. Edwin rechnet die folgende Aufgabe:

$$-2^4 + (-2)^4 = 16 + 16 = 32.$$

Martha erkennt, dass Edwin dabei ein Fehler unterlaufen ist. Sie weist ihn darauf hin, doch Edwin will das nicht einsehen: „Wir haben gelernt: Wenn der Exponent eine gerade Zahl ist, dann ist der Wert der betreffenden Potenz immer positiv. Also kommt 32 heraus.“
Martha entgegnet: „Das stimmt nicht immer, denn … “

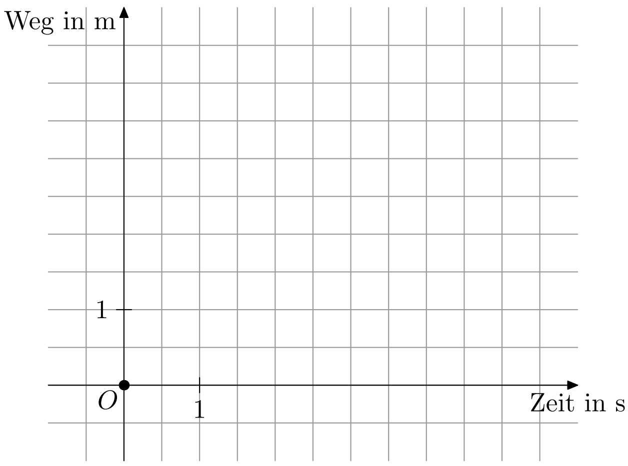
Wie hat Martha ihre Antwort begründet? Setze Marthas angefangene Begründung fort, sodass Edwin seinen Fehler erkennt und vollkommen einsieht. Berichtige Edwins Lösung.

22. Während einer Bewegung wurden die Zeit t und der Weg s in einer Tabelle festgehalten:

Zeit t in s	2	3	5
Wegstrecke s in m	2	$2,5$	$3,5$

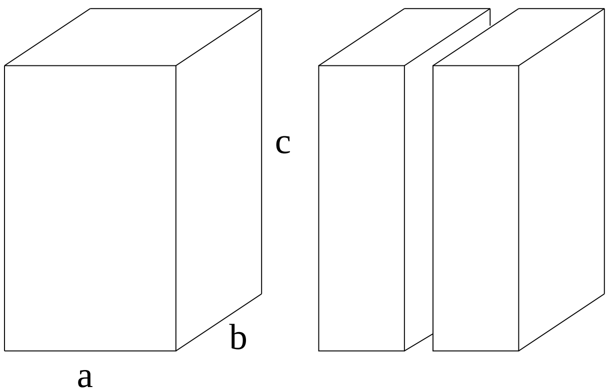
(a) Untersuche rechnerisch, ob die Zeit t und der Weg s zueinander direkt proportional sind. Begründe deine Antwort.

(b)



- Trage die drei Zahlenpaare der Tabelle als Punkte in das Koordinatensystem ein.
- Begründe nun anhand des Diagramms, dass deine Antwort in der Aufgabe (a) richtig war.

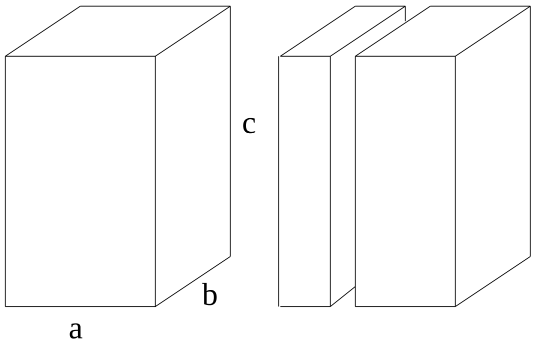
23.



Ein quaderförmiger Holzklotz mit $a = 2\,\text{dm}$, $b = 2{,}5\,\text{dm}$ und $c = 3\,\text{dm}$ wird mit einer Axt so halbiert, wie es die obige Darstellung zeigt.

(a) Um wie viel Prozent hat sich jetzt die Oberfläche der beiden Hälften im Vergleich zu der des massiven Holzklotzes vergrößert? Gib den Prozentsatz auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet an.

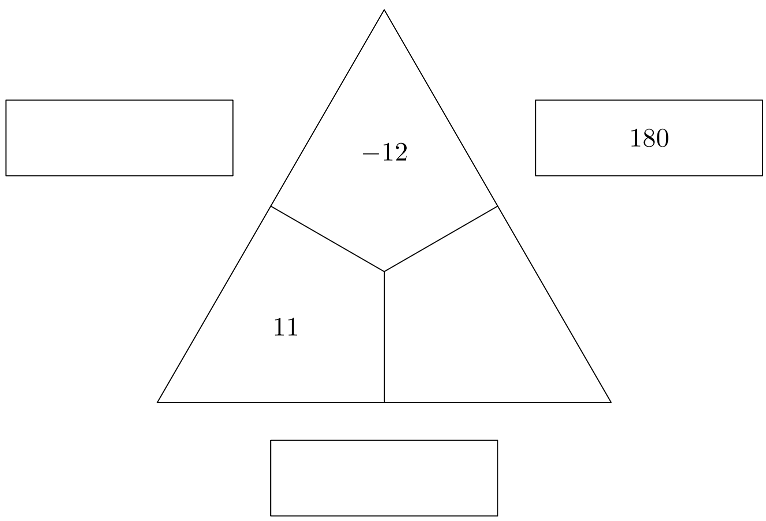
(b)



Hätte sich am Rechenergebnis der Aufgabe (a) etwas geändert, wenn die Axt nicht die Mitte getroffen hätte? Begründe deine Antwort.

24. Früher hatte eine Schachtel Lebkuchen der Firma „Timz“ 1500 g Inhalt.
Für das kommende Weihnachtsgeschäft kommen nur noch 1200 g in eine Schachtel, die aber das Gleiche kostet wie früher die mit 1500 g Inhalt.
Um wie viel Prozent hat die Firma „Timz“ ihre Lebkuchen verteuert?

25.



In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke der Wert des Produktes aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Zahlen.

26. Gegeben ist die Gleichung $x \cdot y \cdot x = 284$, wobei x und y ganze Zahlen sein sollen. Ermittle alle Lösungen für x und y.

27. Die Käsesorte „Bergglück“ besteht zu 40% aus Wasser. Die Trockenmasse besteht zu 40% aus Fett.
Wie viel Prozent Fett sind in der Käsesorte „Bergglück“ enthalten?

28. Es gilt: $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125$.
Die Zahl 1000 lässt sich also in zwei Faktoren zerlegen, wobei keiner der beiden durch 10 teilbar ist; d.h. keiner der beiden endet auf 0.
Zerlege 21 000 so in zwei Faktoren, dass keiner der beiden auf 0 endet. Gib alle Möglichkeiten an.

29. In einem Glas befinden sich 25 ml Fruchtsaft. Es werden 100 ml Mineralwasser dazugegeben. Dann wird umgerührt.
    (a) Berechne, wie viel Prozent Saft sich jetzt im Glas befindet.
    (b) Erkläre dein Rechenergebnis anhand einer Skizze.

30. Ein Discounter verkauft Fruchtnektar in Tetrapacks. Auf der Packung steht:

    „1 l Ananas-Maracuya - Fruchtgehalt mindestens 60%“

    Egon öffnet eine Packung und schenkt sich 300 ml in ein Glas ein.
    (a) Wie viele ml reiner Fruchtsaft befinden sich noch im Tetrapack?
    (b) Wie viele ml reiner Fruchtsaft befindet sich im Glas?

2. Gleichungen und Ungleichungen

1. Hans soll die folgende Ungleichung lösen:
$$3 \cdot (x-3) + 17 \leqq -13 \text{ auf } G=\mathbb{N}\,.$$
Die Einzelschritte seiner Rechnung sehen so aus:

1. Schritt:	$3x - 3$	$\leqq$	-30
2. Schritt:	$3x$	$\leqq$	-27
3. Schritt:	x	$\geqq$	-9
4. Schritt:	$L = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$		

In manchen dieser Schritte hat Hans Fehler gemacht. Schreibe auf, in welchem Schritt ein Fehler passiert ist und worin jeweils der Fehler besteht.
Berechne die richtige Lösungsmenge.

2. Gegeben ist die Lösungsmenge $L = \{-4;\ -3;\ -2;\ \cdots\}$.
Finde zu dieser Lösungsmenge drei passende Ungleichungen. Vergiss nicht, jeweils die Grundmenge anzugeben.

3. In einem Freigehege sind ebenso viele Fasanen wie Kaninchen. Zusammen haben sie 204 Füße.

4. Der Umfang eines Fünfecks beträgt $32{,}8\,\text{cm}$. Die erste Seite ist $4\,\text{cm}$ lang, die zweite ist $1{,}8\,\text{cm}$ länger als die erste. Die Summe der Längen dieser beiden Seiten ist gleich der Länge der dritten Seite. Die letzte und vorletzte Seite sind gleich lang.

5. Aus einem rechteckigen Blatt Papier (16 cm x 12 cm) soll das Würfelnetz eines möglichst großen Würfels ausgeschnitten werden. Berechne die Abfallfläche.

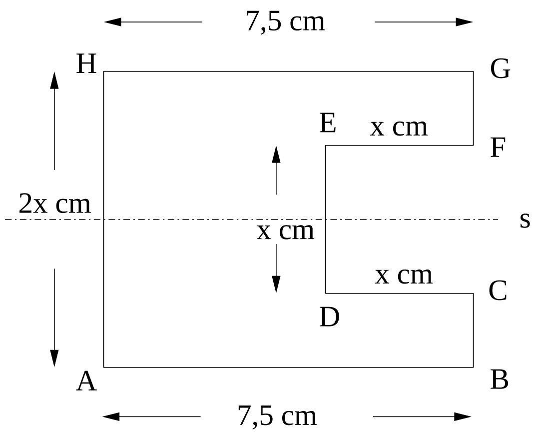
6. Die Zahl $356{,}25$ ergibt sich als Differenz aus dem Dreifachen einer rationalen Zahl und 582.

7. Die Seiten eines Vierecks werden wie folgt gebildet: Die vierte Seite ist 1 cm länger als die dritte. Die dritte Seite ist 1 cm länger als die zweite. Die zwete Seite ist 1 cm länger als die erste. Der Umfang des Vierecks beträgt 24 cm.

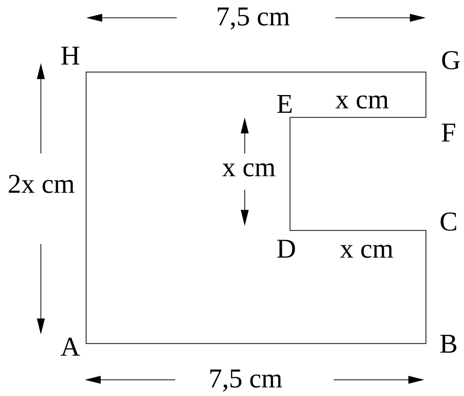
8. Eine $2,1\,\text{m}$ lange Holzlatte wird wie folgt zersägt. Das erste Teilstück ist doppelt so lang wie das zweite. Das dritte Teilstück ist halb so lang wie das zweite.

9. Gegeben ist die Gleichung $ax = 36$ auf $G = \mathbb{Q}$ und $a \in \mathbb{Q}$.
   (a) Berechne jeweils die Lösung für $a = -4$ und $a = 0,\overline{3}$.
   (b) Für welche Belegung von a gibt es keine Lösung? Begründe.
   (c) Die Variablen a und x können so mit gleichen Zahlen belegt werden, dass eine wahre Aussage entsteht. Gib sämtliche Möglichkeiten an.

10.



Die dargestellte Figur $ABCDEFGH$ besitzt die Symmetrieachse s. Es gilt $x \in \mathbb{Q}^+$.
   (a) Zeichne die Figur für $x = 3$.
   (b) Berechne den Umfang der Figur für $x = 3$.
   (c) Zeige: Für den Umfang u der Figur gilt in Abhängigkeit von x:
   $$u(x) = (6x + 15)\,\text{cm}$$
   .
   (d) Berechne x so, dass der Umfang der Figur $28,5\,\text{cm}$ lang wird.
   (e) Gibt es eine Belegung von x, die einen $14,3\,\text{cm}$ langen Umfang erzeugt? Begründe.
   (f)

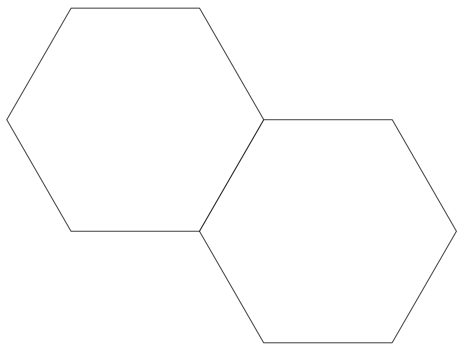


(g) Hier ist die Figur im Gegensatz zur urspründlichen nicht mehr symmetrisch. Gilt auch hier $u(x) = (6x + 15)\,\text{cm}$? Begründe.

11. Gib zehn Belegungen für $x \in \mathbb{Q}$ an, so dass $\frac{x}{4} < 2$ gilt.

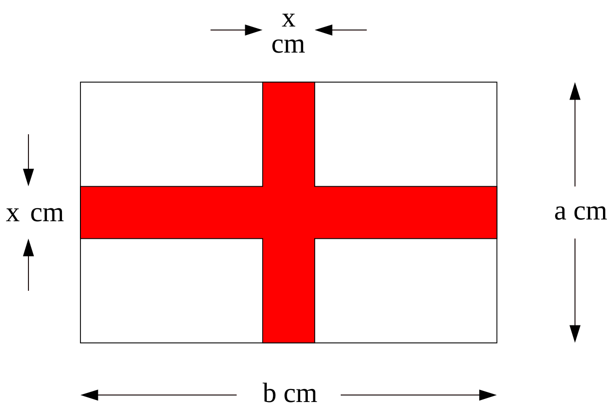
3. Parallelverschiebung

1. Zeichne die rechts skizzierte Figur aus zwei regelmäßigen Sechsecken mit der Seitenlänge $a = 4\,\text{cm}$.



Füge weitere regelmäßige Sechsecke von der gleichen Größe an.

2. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



(a) Zeichne die Figur für $b = 8$, $a = 5$ und $x = 1$.

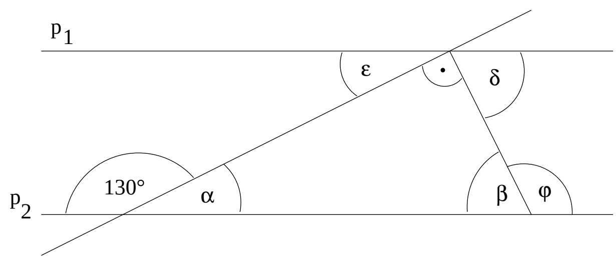
(b) Das weiße Rechteck oben links lässt sich auf das weiße Rechteck rechts unten verschieben.

- Zeichne die vier Stellvertreter des Verschiebungsvektors $\overrightarrow{v}$ zwischen den entsprechenden Eckpunkten der beiden Rechtecke ein.
- Gib die Komponenten des Verschiebungsvektors $\overrightarrow{v}$ an.

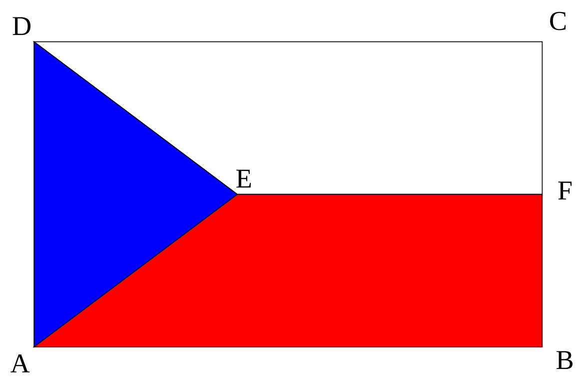
(c) Das weiße Rechteck rechts oben lässt sich so drehen, dass es mit dem Rechteck links unten zur Deckung kommt.

- Zeichne das Drehzentrum ein und gib den Drehwinkel an.
- Um welche besondere Drehung handelt es sich?

3. Bestimme die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Die nicht maßstabsgetreue Zeichnung brauchst du nicht auf dein Blatt zu übertragen. Die Geraden p_1 und p_2 sind parallel.
Begründe jeweils durch eine kurze Rechnung oder ein passendes Stichwort.



4. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AD} = \overline{EF} = 4\,\text{cm}$ und $\sphericalangle DEA = 52{,}8°$.

(a) Berechne auf verschiedenen Weise das Maß des Winkels BAE auf eine Stelle nach dem Komma.

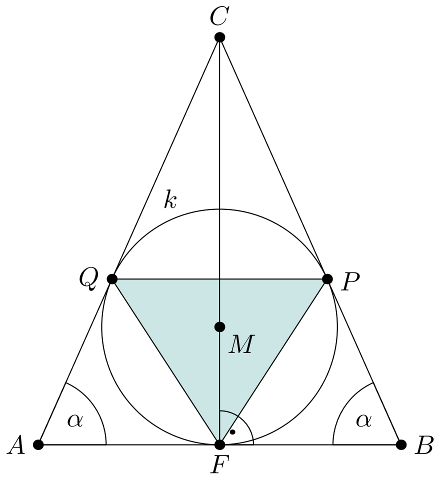
[Ergebnis: $\sphericalangle BAE = 26{,}4°$]

(b) Zeichne die Figur auch mit dem Ergebnis der Aufgabe (a).

(c) Welche besondere Eigenschaft hätte das Dreieck DAE, wenn $\sphericalangle AED = 300°$ wäre?

4. Winkel

1.



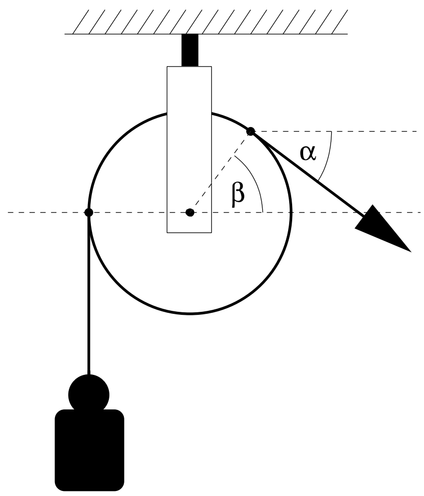
Die Kreislinie k mit dem Mittelpunkt M berührt die Seiten des Dreiecks ABC in den Punkten F, P und Q.

(a) Zeichne die Figur mit $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\alpha = 66°$. Zeichne die zwei Kreisradien ein, die zu den Punkten P und Q führen.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks FPQ.

[Teilergbnis: $\sphericalangle PFQ = 66°$]

2.



Ein Seil, das am linken Ende mit einem Gewicht belastet ist, wird über eine feste Rolle geführt. Am rechten Seilstück, das mit der Waagrechten den Winkel α einschließt, wird das Gleichgewicht gehalten.

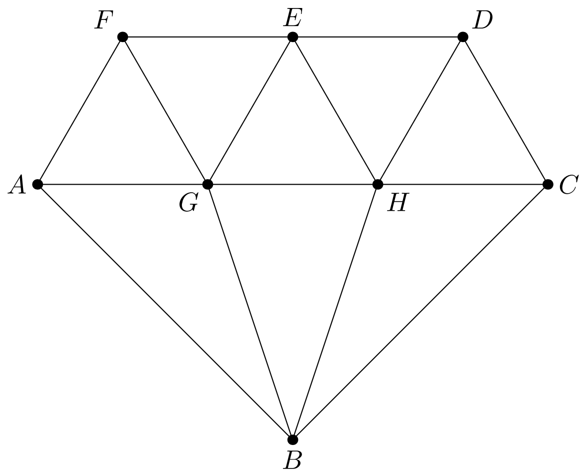
(a) Begründe: $\beta = 90° - \alpha$.

(b) Zeichne die Rolle mit dem Seil für den Radius $r = 3\,\text{cm}$ und $\alpha = 37°$.

(c) Berechne den Bruchteil des Umfangs der festen Rolle, der für $\alpha = 30°$ vom Seil berührt wird.

(d) Wie groß müsste man den Winkel α wählen, damit die Länge des Seilstückes, das die Rolle berührt, 40% des Rollenumfangs beträgt?

3.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Trapez $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 9\,\text{cm}$, wobei über der Strecke $[DF]$ 6 cm Platz bleiben sollen.

(b) Benenne die Innenwinkel des Trapezes $ACDF$ mit griechischen Buchstaben. Berechne diese Innenwinkel.

(c) Verlängere die Strecken $[AF]$ über F und $[CD]$ über C hinaus so weit, bis sie sich im Punkt S schneiden. Begründe: Das Dreieck FDS ist gleichseitig.

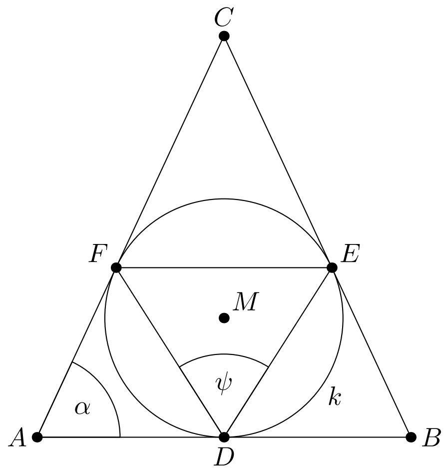
(d) Verschiebe die Raute $AGEF$ mit dem Vektor $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$.

(e) Wie viele Dreiecke vom Typ AGF passen lückenlos in das Dreieck FDS? Begründe.

(f) Der Winkel HBG hat das Maß $36,87°$ (gerundet).

- Berechne die Maße der Innenwinkel des Drachenvierecks $BHEG$.
- Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks ABG.

4.



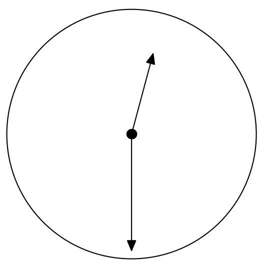
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit der Basis $[AB]$. Der Inkreis k mit dem Mittelpunkt M berührt die Dreiecksseiten in den Punkten D, E und F.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 9\,\text{cm}$ und $\alpha = 65°$.

(b)
- Zeichne das Viereck $ADMF$ ein.
- Um welches besondere Viereck handelt es sich? Begründe.

(c) Zeige: $\psi = \alpha$.

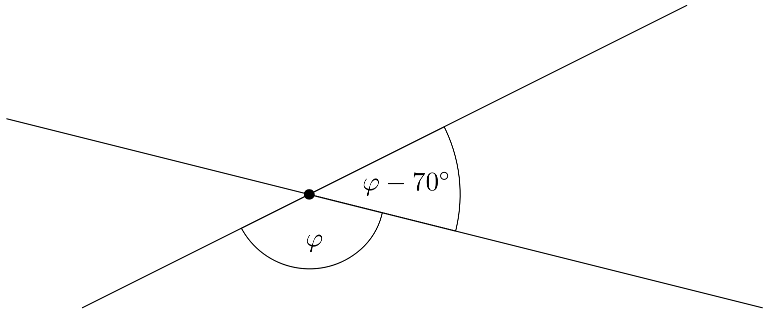
5.



(a) Welchen Winkel schließen die beiden Uhrzeiger um 12 : 30 Uhr ein?

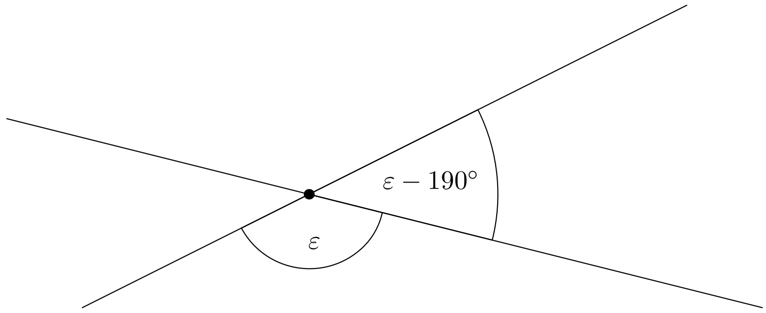
(b) Um welchen Winkel haben sich der Minuten- und der Stundenzeiger von 12 : 30 Uhr bis 13 : 10 Uhr weitergedreht?

6.



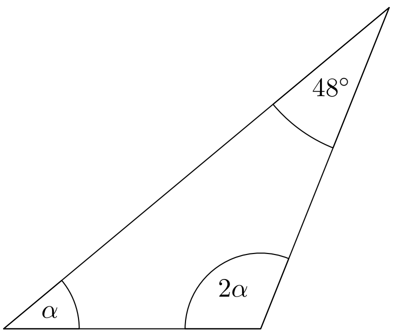
Bestimme das Winkelmaß φ an der Geradenkreuzung. Beachte: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu.

7.



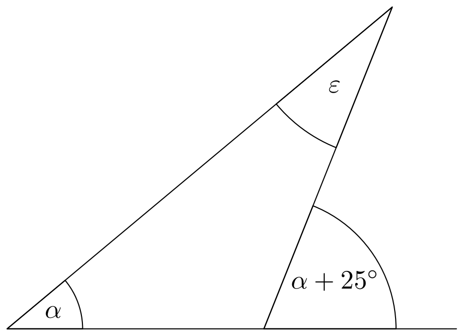
Begründe: Den Winkel ε gibt es in Wirklichkeit nicht.

8.



Berechne α. Beachte: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

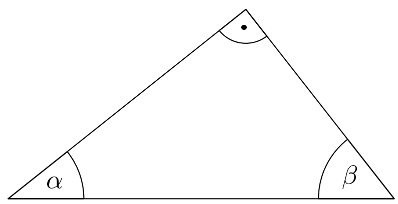
9.



Berechne ε. Beachte: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

10. In einem Dreieck ist der erste Winkel doppelt so groß wie der zweite Winkel. Der dritte Winkel ist um 36° kleiner als der zweite Winkel. Berechne die Winkelmaße.

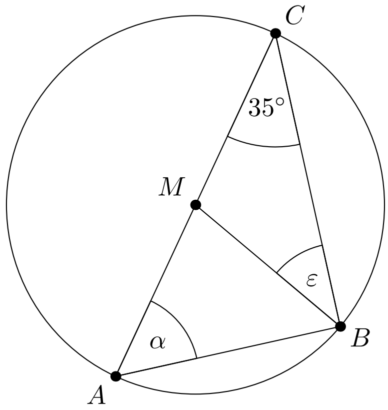
11.



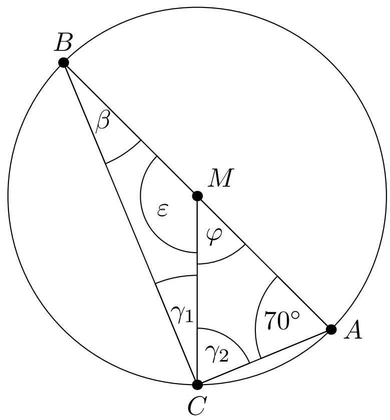
In einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Winkel fünf Mal so groß wie ein anderer Winkel. Wie groß sind die Winkel?
Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten.

12. Berechne jeweils die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Zuweilen musst du erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

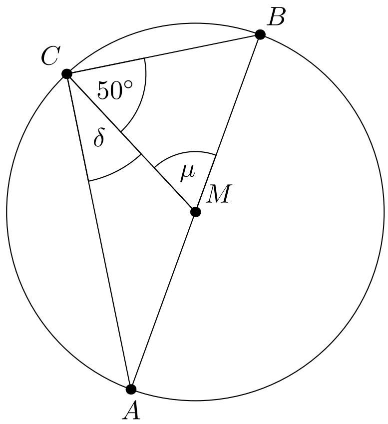
Figur a)



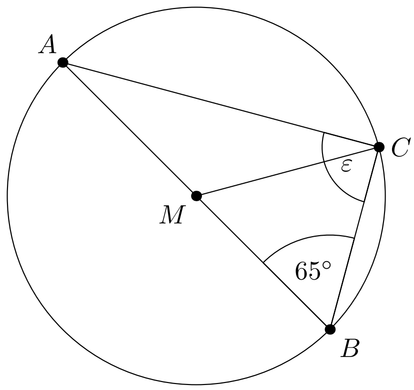
Figur b)



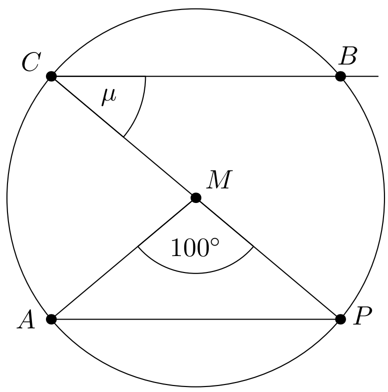
Figur c)



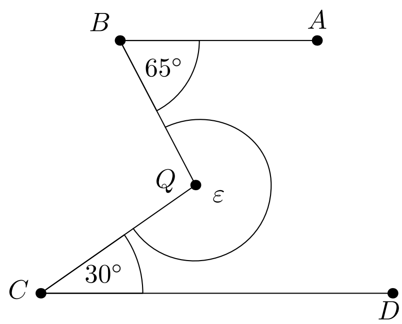
Figur d)



Figur e) $CB \parallel AP$



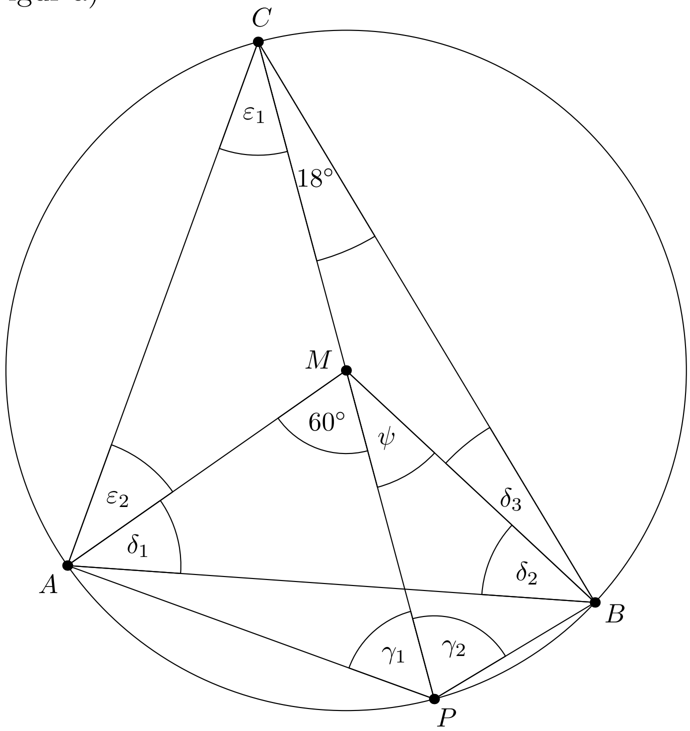
Figur f) $AB \parallel CD$



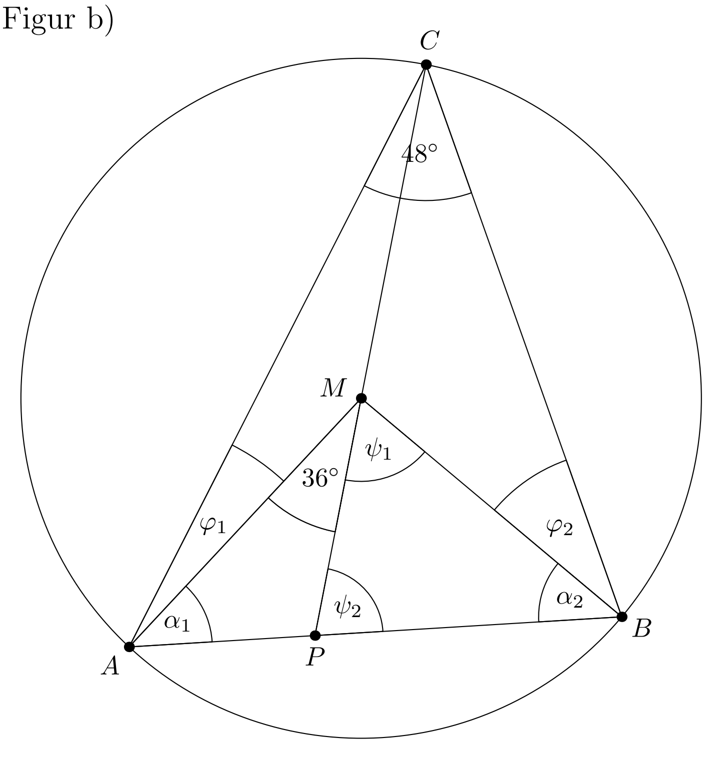
Tipp zur Figur f): Zeichne eine Hilfslinie durch den Punkt Q ein.

13. Berechne jeweils die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Zuweilen musst du erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

Figur a)



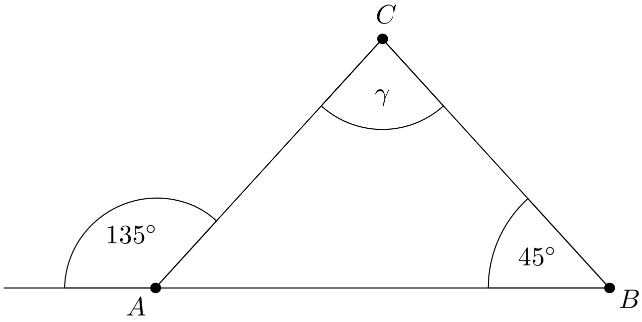
Figur b)



14. Zur Berechnung der mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße musst du zuweilen erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

    (a)

    Figur a)

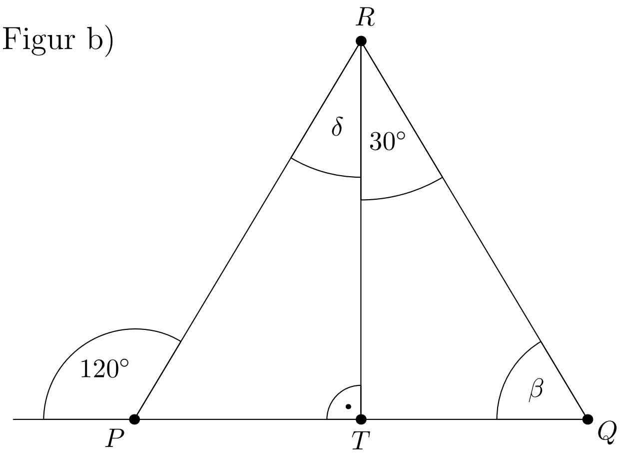
    

    In der Figur a) gilt: $\overline{AC} = 4\,\text{cm}$.

    - Berechne γ.
    - Begründe: $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

    (b)

    Figur b)

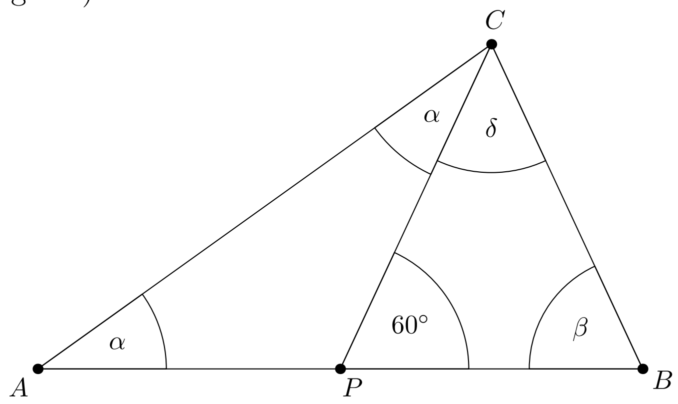
    In der Figur b) gilt: $\overline{RQ} = 7,64\,\text{cm}$.

    - Berechne β und δ.
    - Begründe: $\overline{PR} = 7,64\,\text{cm}$ und $\overline{PT} = 3,82\,\text{cm}$.

15. Zur Berechnung der mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße musst du zuweilen erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

(a)

Figur a)

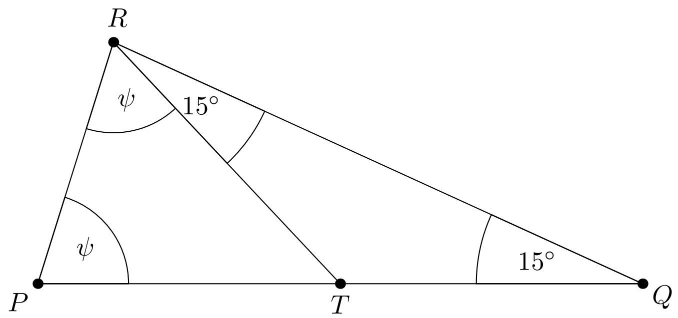


In der Figur a) gilt: $\overline{AP} = 5\,\text{cm}$ und $\alpha + \delta = 90°$.

- Berechne die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße.
- Begründe: $\overline{AB} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$.

(b)

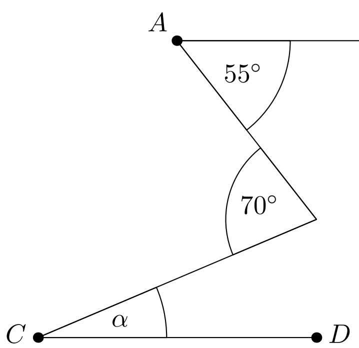
Figur b)



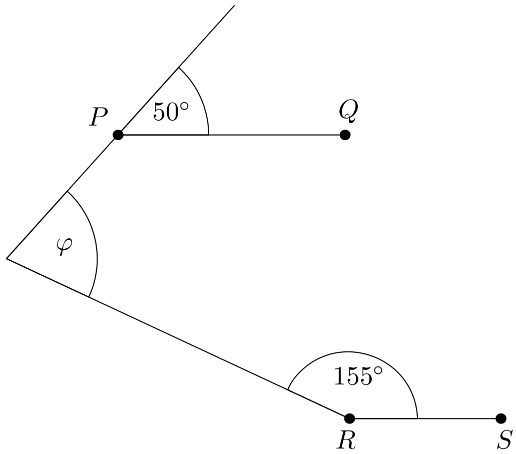
In der Figur b) gilt: $\overline{PQ} = 9,38\,\text{cm}$.

- Berechne die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße.
- Begründe: $\overline{RT} = 4,69\,\text{cm}$.

16.



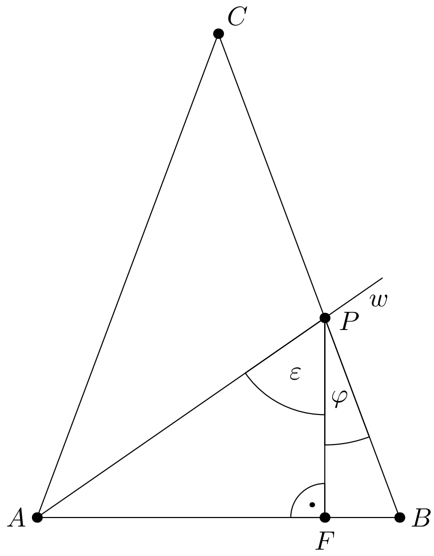
Figur a): $AB \parallel CD$



Figur b): $PQ \parallel RS$

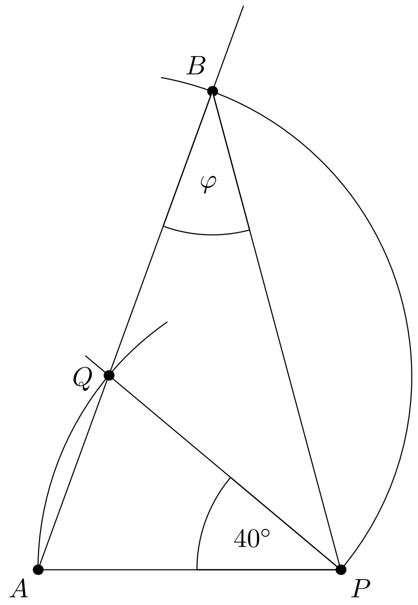
Berechne die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Zeichne dazu geeignete Hilfslinien ein. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

17.



Im Dreieck ABC gilt: $\overline{CA} = \overline{CB}$ und $\varepsilon = 56,81°$. Die Halbgerade $w = [AP$ halbiert den Winkel BAC. Die Skizze ist nicht maßstabgerecht. Berechne φ.

18.



Die Punkte P und Q sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AP} = 4\,\text{cm}$.

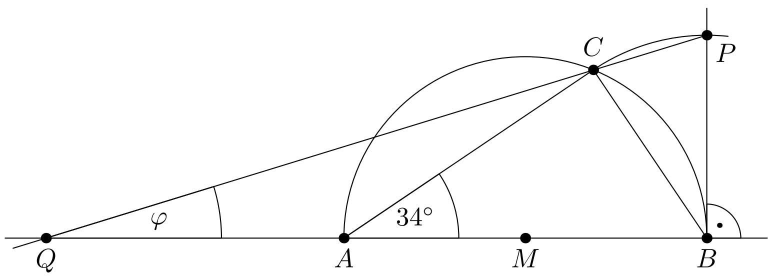
(b) Berechne φ.

(c) Begründe, dass das Dreieck APB nicht gleichschenklig ist.

(d) Wie groß müsste der Winkel QPA werden, damit das Dreieck APB bei sonst unveränderlichen Bedingungen gleichschenklig wird?

(e) Könnte das Dreieck APB bei geeigneter Wahl des Winkels QPA vielleicht sogar gleichseitig werden?

19.



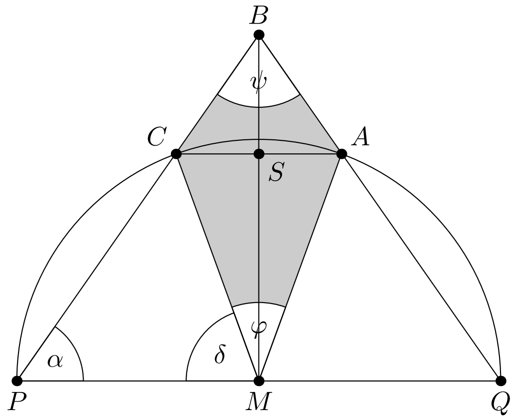
Die Punkte M und B sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Zeige: $\varphi = 17°$.

(c) Untersuche, ob das Dreieck ACQ gleichschenklig ist.

20.



Die achsensymmetrische Darstellung zeigt einen Halbkreis und das Viereck $MABC$.

(a) Um welches besondere Viereck handelt es sich beim Viereck $MABC$? Begründe deine Antwort.

(b) Zeichne die Figur für $\overline{PQ} = 8\,\text{cm}$ und $\alpha = 55°$.

(c) Trage überall dort, wo es möglich ist, das Winkelmaß „α“ ein.

(d) Zeige: $\delta = 180° - 2\alpha$ und $\varphi = 4\alpha - 180°$.

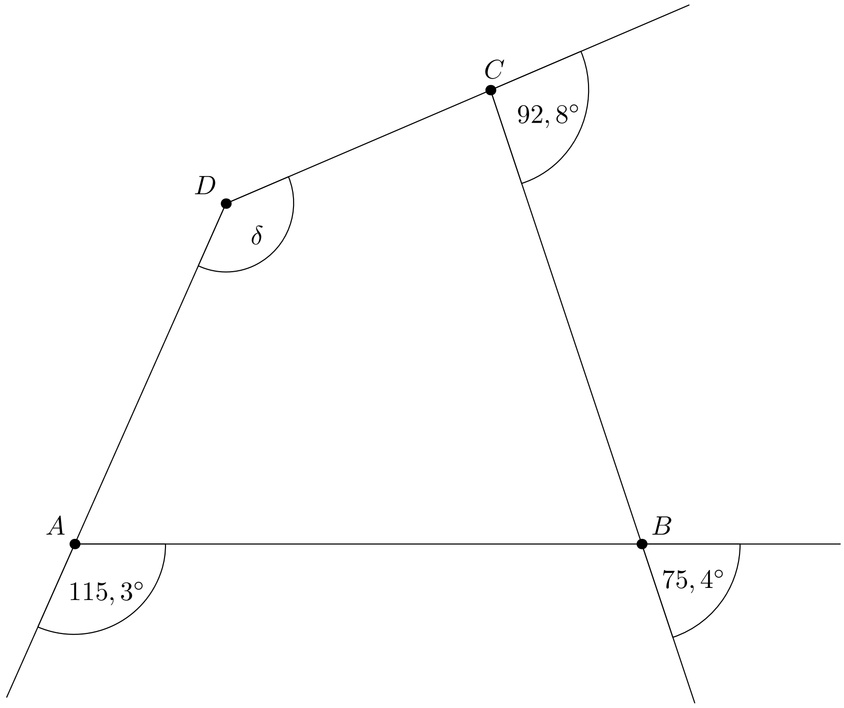
(e) Für welche Belegungen von α gibt es überhaupt solche Vierecke $MABC$?

(f) Zeige: $\psi = 180° - 2\alpha$.

(g) Berechne α so, dass das Viereck $MABC$ eine Raute wird.

21. Sechs Punkte A, B, C, D, E und F liegen getrennt auf einer Kreisline.
Wie viele Dreiecke kannst du aus jeweils drei dieser sechs Punkte einzeichnen?

22.

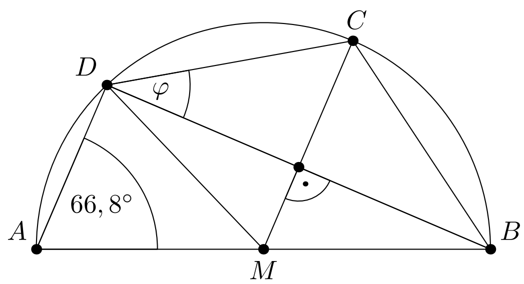


Uwe und Emil wollen aus den gegebenen Winkeln den Winkel δ bestimmen. Die Zeichnung ist aber nicht maßstabgerecht.
Emil behauptet: „Das ist ganz einfach: Der $115,3°$-Winkel und δ sind F-Winkel. Also ist δ auch $115,3°$“.
Uwe widerspricht: „Das können keine F-Winkel sein, weil ...“

(a) Notiere, wie Uwe seine Antwort begündet.

(b) Berechne δ.

23.

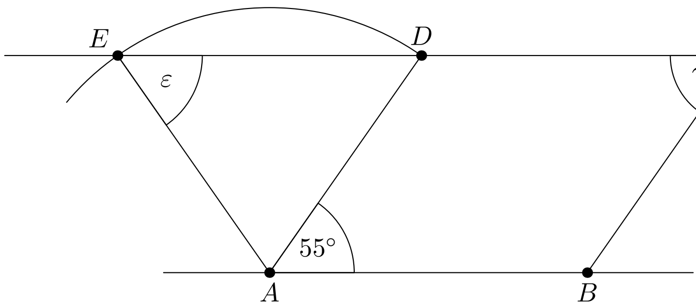


Der Mittelpunkt M der Strecke $[A, B]$ ist gleichzeitig der Mittelpunkt des Halbkreises durch die vier Punkte A, B, C und D.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$.

(b) Berechne φ.

24.



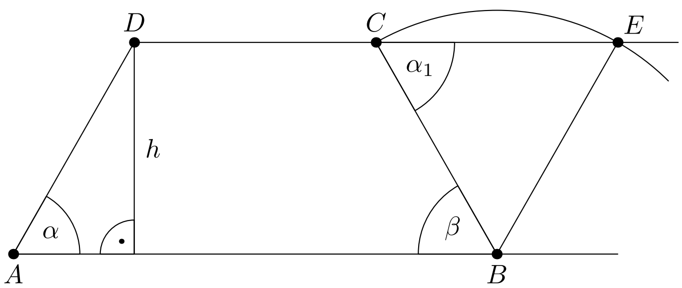
Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm. Es gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$. Der Punkt A ist der Mittelpunkt des Kreisbogens durch den Punkt D.

(a) Zeichne die Figur in folgenden Schritten:
- Zeichne zunächst die Strecke $[AB]$.
- Trage am Punkt A den 55°-Winkel an.
- Zeichne den Punkt D ein.
- Zeichne den Punkt C ein.
- Konstruiere mit Hilfe des Kreisbogens den Punkt E.

(b) Begründe: Das Dreieck ADE ist gleichschenklig.

(c) Begründe:
- Es gilt $\gamma = \varepsilon = 55°$
- Das Viereck $ABCE$ ist ein achsensymmetrisches Trapez.

25.



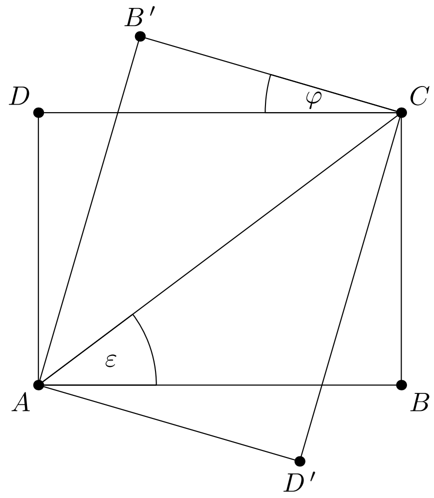
Das Viereck $ABCD$ ist ein achsensymmetrisches Trapez.
Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{DC} = 4\,\text{cm}$ und $h = 3{,}5\,\text{cm}$.
Der Punkt B ist der Mittelpunkt des Kreisbogens durch den Punkt C.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe:

- Das Dreieck BEC ist gleichschenklig.
- $\alpha_1 = \alpha$.
- Das Viereck $ABED$ ist ein Parallelogramm.

26.



Das Rechteck $ABCD$ wurde an seiner Diagonalen $[AC]$ gespiegelt. Dadurch ist das Viereck $AD'CB'$ entstanden.

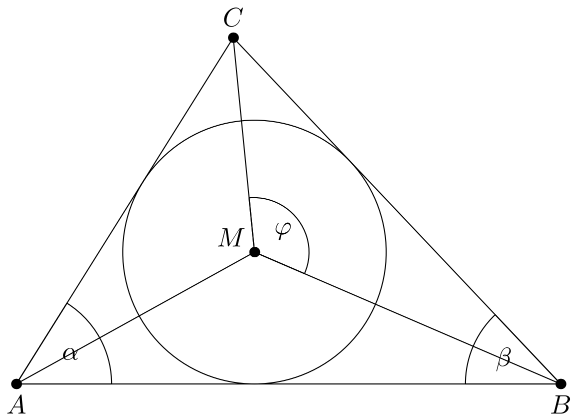
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne φ für $\varepsilon = 36,87°$.

27. In einem Viereck sind drei Winkel gleich groß. Der vierte Winkel ist ein rechter Winkel. Um welches besondere Viereck handelt es sich?

28. In einem gleichschenkligen Dreieck hat ein Winkel das Maß $42,68°$.

29.



Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist der Punkt M.

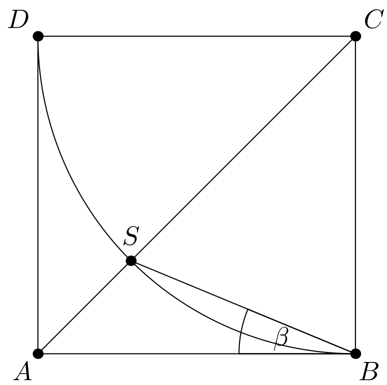
(a) Zeichne die Figur für $\alpha = 70°$, $\overline{AB} = 8\,\mathrm{cm}$ und $\beta = 44°$.

(b) Berechne das Maß φ des Winkels BMC.

(c)
- Berechne für $\beta = 60°$ erneut das Winkelmaß φ.
  Was fällt dir auf?
- Zeige: $\varphi = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$.

(d) Berechne α für $\varphi = 135{,}68°$.

30.

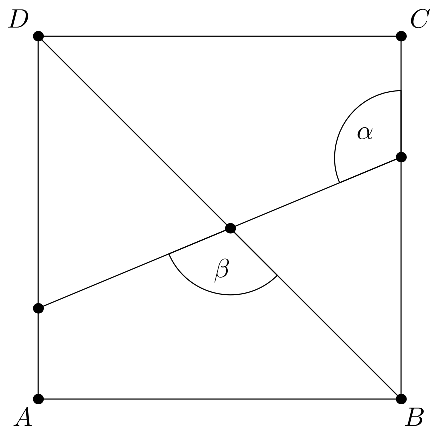


Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\mathrm{cm}$.

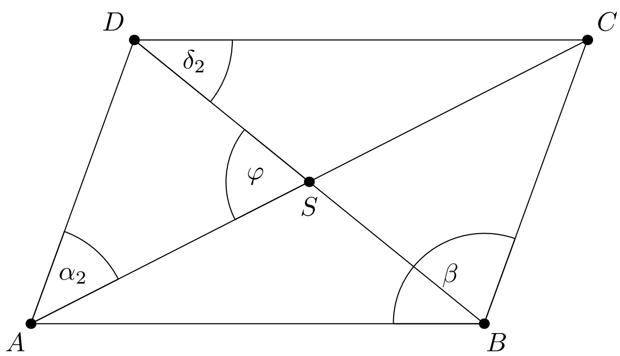
(b) Berechne das Maß β des Winkels SBA.

31.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Es gilt $\alpha = 123,4°$. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.
Berechne β auf zwei verschiedene Arten.

32.

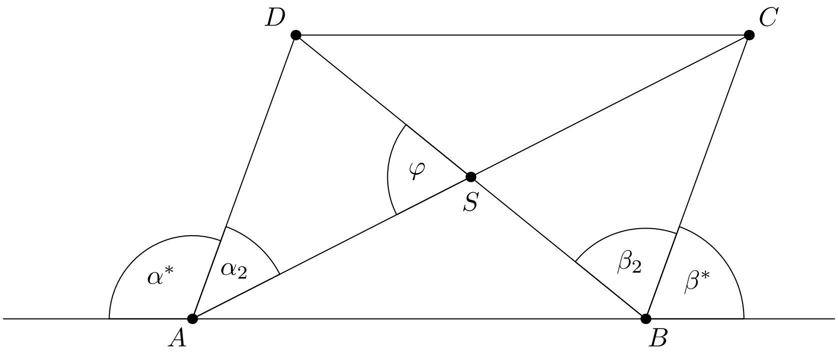


Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
Es soll gelten: $\alpha_2 = 42,1°$, $\delta_2 = 38,7°$ und $\varphi = 65,3°$. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.

(a) Skizziere das Parallelogramm.

(b) Berechne β.

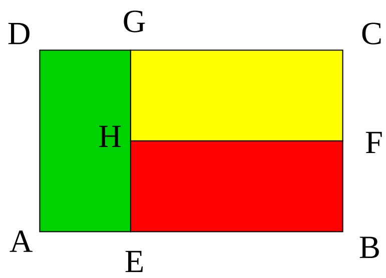
33.



Die Klasse 7a bekommt vom Mathematiklehrer die folgende Aufgabe gestellt:
„Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
Es soll gelten: $\alpha_2 = 38,9°$, $\alpha^* = 109,2°$, $\varphi = 67,5°$ und $\beta^* = 77,6°$.
Berechne β_2 . Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht."
Erwin meint nach mehreren Rechenversuchen: „In der Angabe kann etwas nicht stimmen." Wo liegt der Fehler?

5. Drehung

1.



Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.
Die drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Ihre Seitenlängen stehen jeweils im Verhältnis 1:2. Weiter gilt: $\overline{HF} = 2x\,\text{cm}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

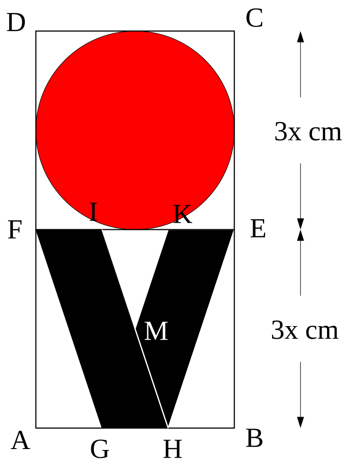
(a) Zeichne die Figur für $x = 4$.
In welchem Verhältnis stehen hier die Seitenlängen des Rechtecks $ABCD$? Ist das immer so, egal, womit man x belegt?

(b) Berechne den Umfang u des Rechtecks $ABCD$ in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $u(x) = 10x\,\text{cm}$.]

(c) Berechne x so, dass der Saum der Fahne 4 m 30 cm lang ist.

(d) Das Rechteck $HFCG$ lässt sich so drehen, dass es sich mit dem Rechteck $AEGD$ deckt.
Zeichne die Figur für $x = 6$ und konstruiere das Drehzentrum Z.
Begründe: Der Drehwinkel hat das Maß 90°.

2. Das ist ein Bild des Logos der Firma MARABU, die Farben herstellt.



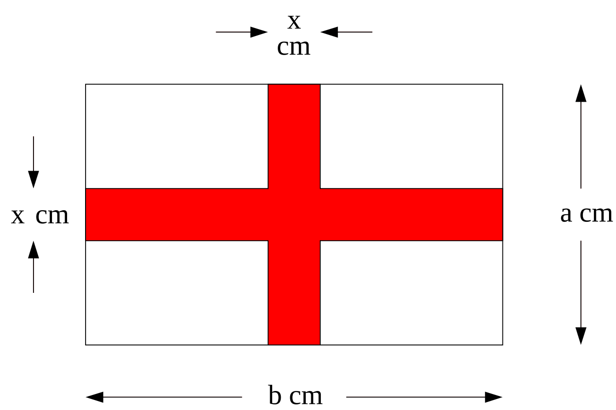
Die Figur setzt sich aus zwei Quadraten zusammen.
Die Strecken $[AG], [GH], [HB], [FI], [IK]$ und $[KE]$ sind alle gleich lang.

(a) Zeichne die Figur für $x = 2$. Platzbedarf nach links: 7 cm

(b) Die Figur $FECD$ soll so gedreht werden, dass sie dann lückenlos neben das Quadrat $ABEF$ passt.

- Begründe: Das Drehzentrum muss im Punkt M liegen.
- Führe die Drehung durch.
- Begründe: Der Drehwinkel hat das Maß $90°$.

3. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



(a) Zeichne die Figur für $b = 8$, $a = 5$ und $x = 1$.

(b) Das weiße Rechteck oben links lässt sich auf das weiße Rechteck rechts unten verschieben.

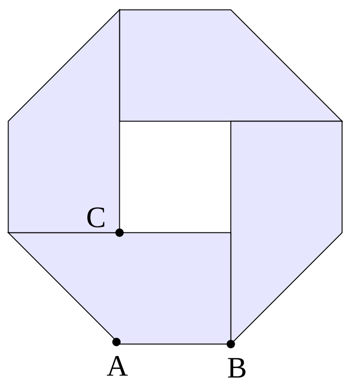
- Zeichne die vier Stellvertreter des Verschiebungsvektors $\overrightarrow{v}$ zwischen den entsprechenden Eckpunkten der beiden Rechtecke ein.

- Gib die Komponenten des Verschiebungsvektors $\overrightarrow{v}$ an.

(c) Das weiße Rechteck rechts oben lässt sich so drehen, dass es mit dem Rechteck links unten zur Deckung kommt.

- Zeichne das Drehzentrum ein und gib den Drehwinkel an.
- Um welche besondere Drehung handelt es sich?

4. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das weiße Viereck im Inneren ist ein Quadrat. Es gilt: $\overline{AB} = \overline{AC} = 2,5\,\text{cm}$

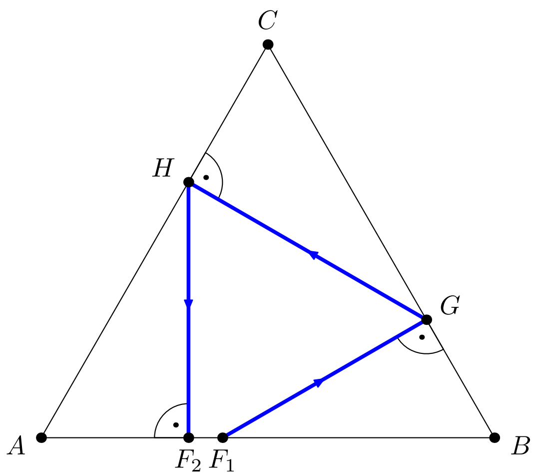


(a) Zeichne die Figur.

(b) Gib alle Winkelmaße φ an, um die man die Figur drehen kann, sodass sie sich wieder mit der Ausgangsfigur deckt. Zeichne dazu das Drehzentrum und weitere Hilfslinien ein.

(c) Begründe: Die Figur ist punktsymmetrisch.

5.

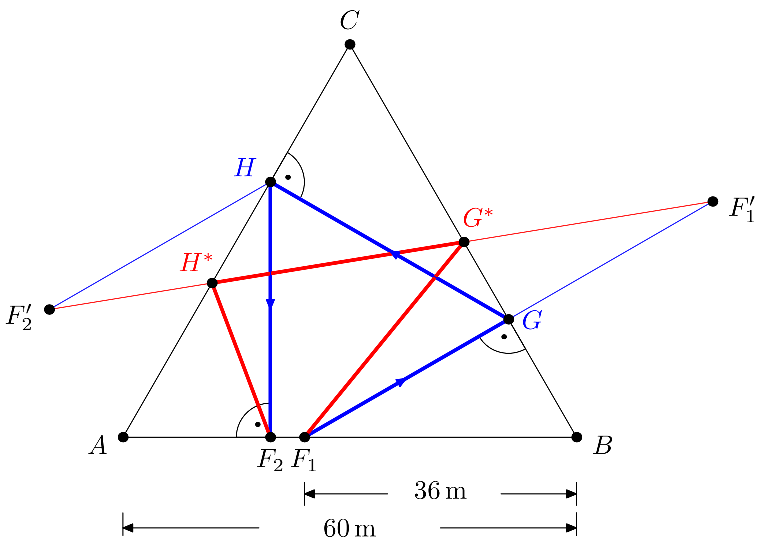


Herr Theo Lith ist als Platzwart für ein Spielfeld ABC verantwortlich, das die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 60 m hat. Der Fahnenmast F_1 ist 36 m vom Punkt B entfernt.
Wie in der Skizze dargestellt, läuft er während eines Kontrollgangs zu den seitlichen Begrenzungen dieses Spielfeldes von F_1 nach G, dann nach H und schließlich gelangt er zum Fahnenmast F_2.

(a) Zeichne die Figur mit dem Weg von Herrn Lith. Dabei sollen 10 m einem cm in deinem Heft entsprechen.

(b) Berechne den Abstand der beiden Fahnenmasten.

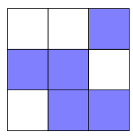
(c)



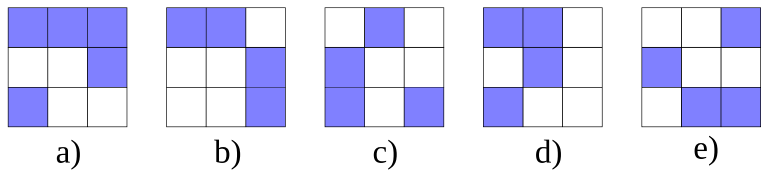
Es wurden die Punkte F_1 an $[BC]$ und F_2 an $[AC]$ gespiegelt. Dadurch entstehen die Spiegelbilder F_1' und F_2'.

- Begründe anhand der Zeichnung: Es gilt z.B. $\overline{F_1G} = \overline{GF_1'}$ und $\overline{HF_2'} = \overline{HF_2}$.
- Begründe: Der Streckenzug $F_1' - G - H - F_2'$ ist genauso lang wie der Weg von Herrn Lith, der ihn vom Mast F_1 über G und H nach F_2 führte.
- Begründe: Wäre Herr Lith auf seinem Komtrollweg vom Masten F_1 über G^* nach H^* zum Masten F_2 gegangen, dann wäre das der kürzeste Kontrollweg gewesen.

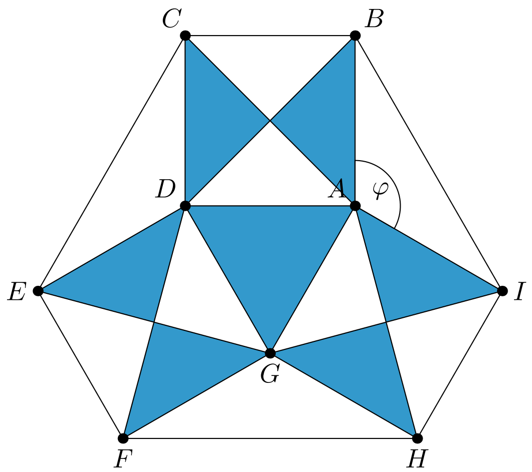
6.



Stelle dir vor, dass die quadratisch gemusterte Figur auf eine durchsichtige Folie aufgedruckt ist.
Welche der unten abgebildeten gemusterten Quadrate lassen sich mit dem obigen Quadrat so zur Deckung bringen, dass dann alles dunkel erscheint?



7.



Die Figur ist drehsymmetrisch.

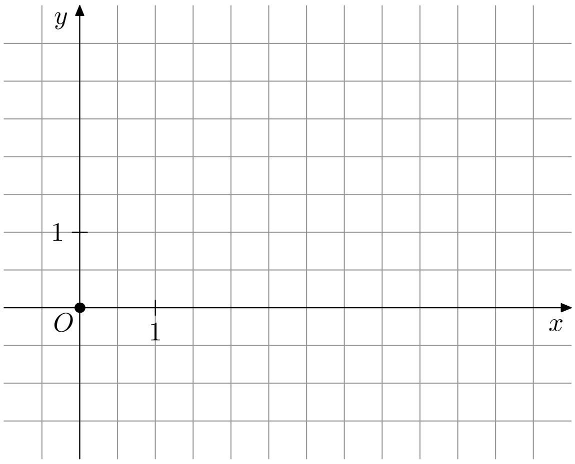
(a) Gib drei verschiedene Möglichkeiten an, wie du das Drehzentrum Z konstruieren könntest. Zeichne das Drehzentrum ein.

(b) Die Figur lässt sich um verschiedene Winkel α so drehen, dass die gedrehte Figur mit der ursprünglichen Figur wieder zur Deckung kommt.
Gib für $\alpha \in \,]\,0°; 360°\,[$ die betreffenden Drehwinkel an.

(c) Berechne φ.

6. Punktspiegelung

1.



Gegeben sind ein Kreis k mit dem Mittelpunkt $M(3 \mid 1)$ und dem Radius $r = 2.5\,\text{cm}$ sowie der Punkt $A(4,5 \mid -1) \in k$.

(a) Zeichne den Kreis k und den Punkt A in das Koordinatensystem ein.

(b) Auf der Kreislinie k wandern Punkte B_n, so dass laufend Kreissehnen $[AB_n]$ erzeugt werden.
Zeichne für $B_1(4 \mid y_1)$ mit $y_1 > 0$ und $B_2(x_2 \mid -0,5)$ mit $x_2 < 3$ die beiden Kreissehnen $[AB_1]$ und $[AB_2]$ ein.

(c) Unter allen Kreissehnen $[AB_n]$ gibt es eine längste: die Sehne $[AB_0]$. Zeichne sie ein. Berechne die Koordinaten des Punktes B_0.

2. Gegeben sind die Punkte $A(-4 \mid -2)$, $B(0 \mid -4)$, $C(-2 \mid 0)$ und $E(5 \mid 1)$, $F(1 \mid 4)$ und $G(-2 \mid 3)$.

(a) Zeichne die beiden Dreiecke ABC und EFG in ein Koordinatensystem.
Platzbedarf: $-7 \leqq x \leqq 6$ und $-5 \leqq y \leqq 5$

(b)
- Spiegle das Dreieck ABC am Mittelpunkt der Seite $[AC]$. Dadurch entsteht das Viereck $ABCB'$.
- Notiere einen Namen, der dieses Viereck möglichst genau beschreibt.
- Gib eine der charakteristischen Eigenschaften dieses Vierecks an.

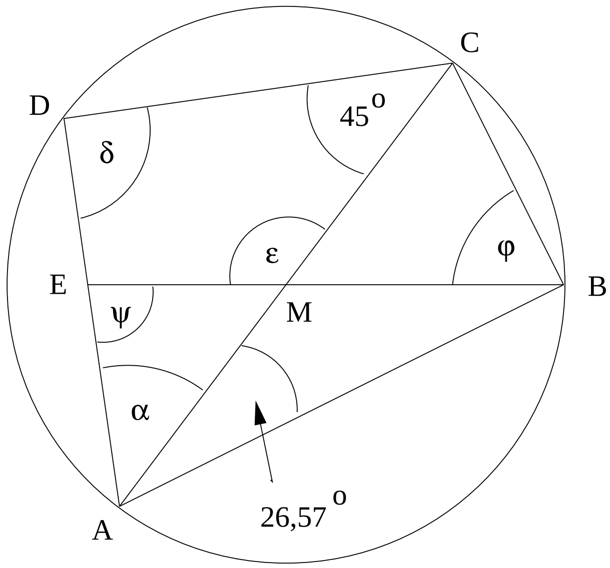
(c)
- Spiegle das Dreieck EFG am Mittelpunkt der Seite $[EG]$. Dadurch entsteht das Viereck $EFGF'$.
- Notiere einen Namen, der dieses Viereck möglichst genau beschreibt.
- Gib eine der charakteristischen Eigenschaften dieses Vierecks an.

(d) Berechne die Komponenten des Pfeiles $\overrightarrow{BC}$.

(e) Berechne die Koordinaten des des Bildpunktes F'.

7. Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche

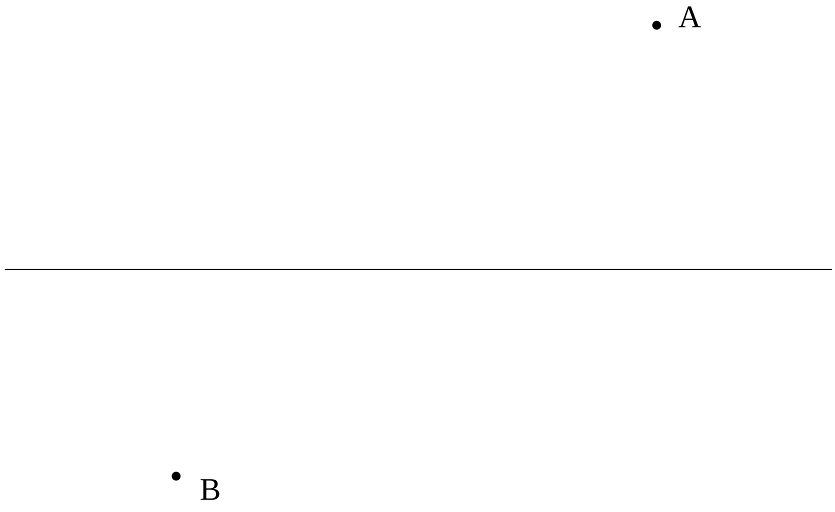
1. Ermittle alle mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße.



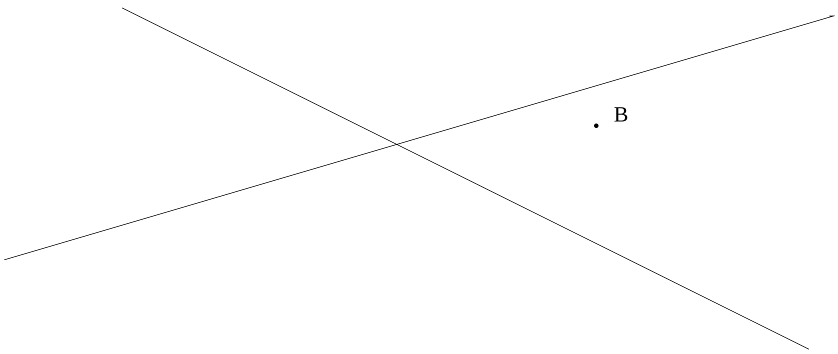
2. Gegeben ist ein Kreis k mit Radius $r = 5\,\text{cm}$ und dem Mittelpunkt $M(1 \mid 2)$.
   Durch die Punkte $A(-5 \mid 4)$ und $B(7 \mid 3)$ verläuft eine Gerade g.
   (a) Fertige gemäß den Angaben eine Zeichnung an.
   Platzbedarf: $-7 \leqq x \leqq 8$ und $-4 \leqq y \leqq 8$
   (b) Kennzeichne farbig eindeutig die Menge aller Punkte auf der Kreislinie k, die von der Geraden g mindestens $2\,\text{cm}$ Abstand haben.
   (c) Fritz behauptet: „Auf der ganzen Kreislinie k gibt es keinen Punkt, der vom Punkt A weniger als $1\,\text{cm}$ entfernt ist.“ Hat Fritz Recht? Die Begründung für eine Antwort sollst du in deiner Zeichnung deutlich machen.

3. Im Zuge des sechsspurigen Ausbaus der Autobahn A3 werden Lärmschutzmaßnahmen notwendig. Der Lärmschutzwall muss vom unten eingezeichneten Mittelstreifen der Autobahn einen Abstand von $50\,\text{m}$ haben. Er wird aber nur in dem Bereich

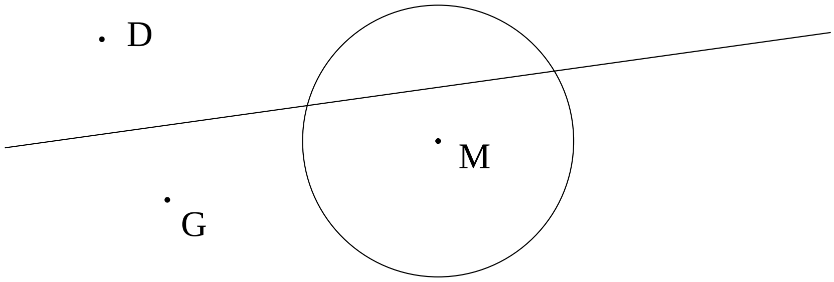
eingerichtet, wo die Entfernung zwischen Ortschaft und Lärmschutzwall weniger als 200 m beträgt. Markiere den möglichen Verlauf des Walls für die Ortschaften A und B! (Maßstab: 100 m $\widehat{=}$ 2 cm)



4. In der Nähe einer Landstraßenkreuzung wird ein Familienerholungsheim errrichtet. Es soll von beiden Straßen den gleichen Abstand haben und außerdem von einem Bauernhof B 40 m entfernt liegen. Kennzeichne den möglichen Standort S! (Maßstab: 20 m $\widehat{=}$ 1 cm)

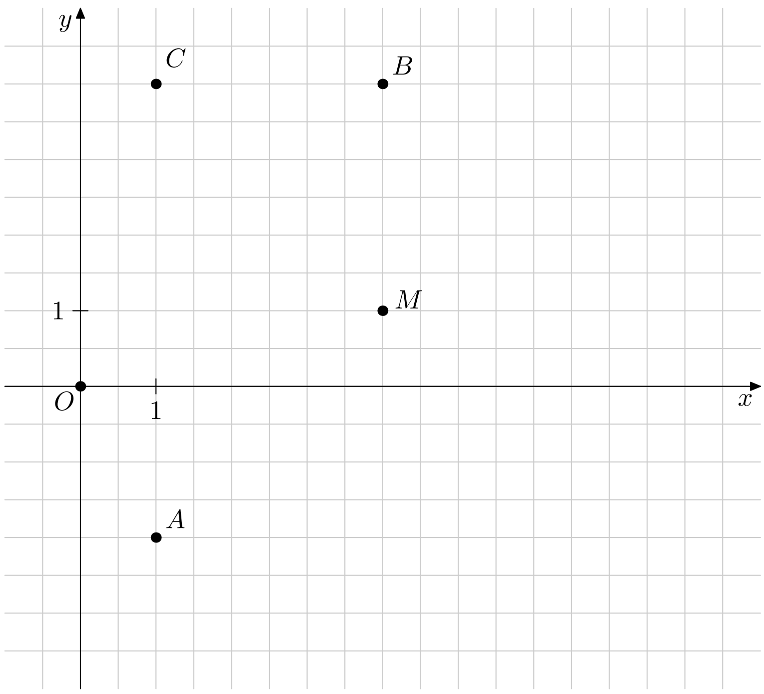


5. Formuliere zur abgebildeten Ortslinienverknüpfung eine mögliche praxisorientierte Aufgabenstellung!



6. Gegeben sind die Punkte $A(4 \mid 4,5), B(3 \mid -1)$ und $C(7 \mid 3)$.
   (a) Zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-1 \leqq x \leqq 10$ und $-3 \leqq y \leqq 8$
   (b) Kennzeichne farbig die Menge aller Punkte P, die jeweils von den Punkten B und C gleich weit entfernt sind und die gleichzeitig vom Punkt A mindestens $2,5\,\text{cm}$ entfernt sind.
   (c) Mache in deiner Zeichnung deutlich, ob es unter allen Punkten P, welche die in Aufgabe (b) genannten Eigenschaften besitzen, solche gibt, die vom Punkt C höchstens $2\,\text{cm}$ entfernt sind. Notiere eine Begründung.

7.



   (a) Zeichne in das obige Koordinatensystem folgende Objekte ein:
   $[AC$ $\quad BC$ $\quad [MB$ $\quad$ und $\quad k(M;\, r = 3\,\text{cm})$.

(b) Zeichne im IV. Quadranten einen Punkt E ein, so dass $\overline{ME} = 5\,\text{cm}$ gilt.

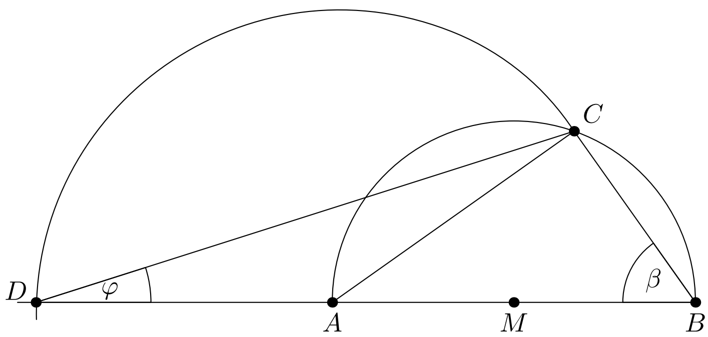
(c) Zeichne durch den Punkt A eine Gerade g ein, sodass $CB \cap g = \emptyset$ gilt.

(d) Die Halbgerade $[MA$ schneidet die y-Achse im Punkt P. Gib die Koordinaten des Punktes P an.

(e) Wie viele Kreise mit dem Mittelpunkt M gibt es, die durch alle vier Quadranten verlaufen?
Gib zwei Kreisradien an.

8. Sechs Punkte A, B, C, D, E und F liegen getrennt auf einer Kreisline.
Wie viele Dreiecke kannst du aus jeweils drei dieser sechs Punkte einzeichnen?

9.



Die Punkte M und A sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\beta = 54{,}68°$.

(b) Berechne φ auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

Teil II.

Wahlpflichtfächergruppe II/III

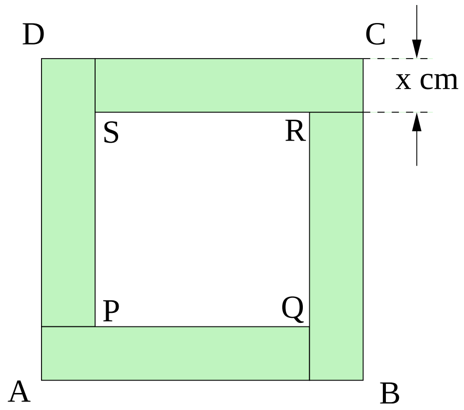
8. Die Menge der rationalen Zahlen

1. Berechne:
   (a) $(-1) \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) =$
   (b) $[(-1) : (-1)] : [(-2) : (+2)] =$
   (c) $5 - 2 \cdot [17 + (-4) \cdot 4] + [22 - 111 : (-37)] =$

2. Ergänze im Folgenden die Leerstellen.
   $3x^2 + 18x + \ldots = 0 \quad G = \mathbb{R}, L = \{-2; \ldots\}$.

3. Gegeben sind die Punkte $A(-2 \mid -1)$, $B(6 \mid 1)$, $C(3 \mid 4{,}5)$ und $D(-1 \mid 3{,}5)$
   (a) Zeichne das Viereck $ABCD$ in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $5 \leqq x \leqq 7$ und $2 \leqq y \leqq 6$
   (b) Kennzeichne alle Innenwinkel mit griechischen Buchstaben.
   (c) Schreibe die dazugehörigen Winkelmaße hin.
   (d) Begründe durch Rechnung, ob deine vier Messergebnisse im Rahmen der Messgenauigkeit stimmen.

4.



Das Quadrat $ABCD$ ist aus vier kongruenten Rechtecken und dem Quadrat $PQRS$ zusammengefügt worden. Die kürzere Seite jedes Rechtecks ist x cm lang.

(a) • Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $x = 1$.

- Berechne den Anteil der Fläche des Quadrates $PQRS$ am Quadrat $ABCD$ in Prozent.

(b) • Wie viel Prozent der Fläche des Quadrates $ABCD$ würde eines der vier Rechtecke einnehmen, wenn das Quadrat $PQRS$ 68% der Gesamtfläche einnehmen würde?

- Berechne x so, dass das Quadrat $PQRS$ 25% der Gesamtfläche einnimmt.

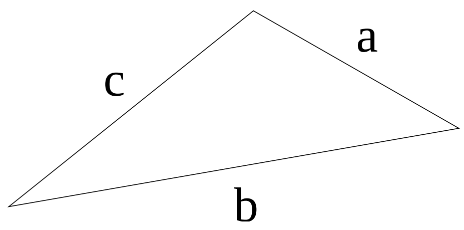
5.

$$-60\,; \qquad -1\,; \qquad 0\,; \qquad +2\,; \qquad +5$$

(a) Wähle aus den obigen fünf Zahlen zwei Zahlen so aus, dass deren Quotientenwert am größten wird.

(b) Wähle aus den obigen fünf Zahlen zwei Zahlen so aus, dass deren Quotientenwert am kleinsten wird.

6.



Das skizzierte Dreieck hat einen Umfang von $21,5\,\text{cm}$.
Die Seite b ist die längste Seite. Die Seite a ist um $5\,\text{cm}$ kürzer als die Seite b und die Seite c ist um $3\,\text{cm}$ länger als die Seite a. Berechne die Seitenlängen des Dreiecks.

7. Frau Zoprent kandidierte in Besselheim für das Bürgermeisteramt.
41200 Einwohnwer waren wahlberechtigt. Die Wahlbeteiligung betrug 70%. Frau Zoprent wurde mit 60% aller abgegebenen Stimmen zur Bürgermeisterin gewählt.

(a) Wie viele Stimmen hat Frau Zoprent auf sich vereinigt?

(b) Herr Zoprent meint nach der Wahl zu seiner Gattin: „Wenn die Wahlbeteiligung unter 60% gelegen hätte, wärest du nicht gewählt worden.“ Begründe, dass Herr Zoprent nicht Recht hat.

8. In Cantorhausen wurde Herr Roprentz zum Bürgermeister gewählt. 32900 Einwohner waren wahlberechtigt. Die Wahlbeteiligung betrug 70%. Herr Roprentz hatte mehr als 50% aller Stimmen auf sich vereinigt.
   Wie viele Wählerinnen und Wähler waren es mindestens, die ihre Stimme für ihn abgegeben haben?

9.

$$\{-7; -5; -3; 0; +1\}$$

   (a) Wähle aus der obigen Menge zwei Zahlen aus, so dass deren Produktwert maximal wird.
   (b) Wähle aus der obigen Menge zwei Zahlen aus, so dass deren Produktwert minimal wird.
   (c)

$$5 : \square \; =$$

   - Welche Zahl aus der obigen Menge muss in dem Kästchen stehen, damit der Wert des Quotienten maximal wird?
   - Welche Zahl aus der obigen Menge muss in dem Kästchen stehen, damit der Wert des Quotienten minimal wird?

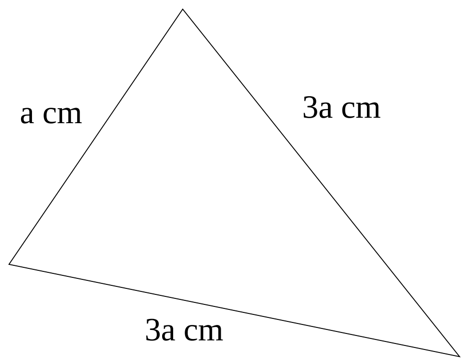
   (d) Wähle aus der obigen Menge zwei Zahlen aus, so dass deren Differenzwertwert maximal wird.

10. Gegeben ist der Term $T(x) = -2x + 3$ mit $G = \mathbb{N}$.
    Für diesen Term wurde die folgende unvollständige Tabelle erstellt:

x	$-2,5$	4	
$T(x) = -2x + 3$		-5	0

Berechne den Inhalt der leeren Zellen.

11.



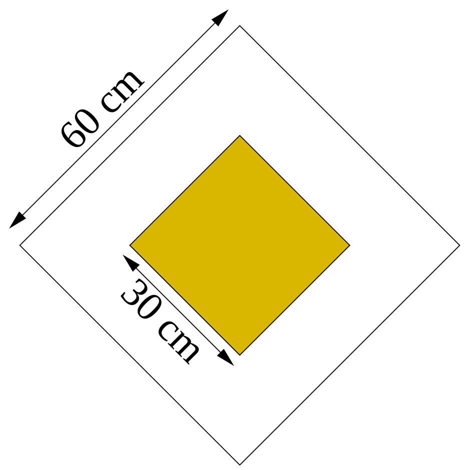
In der Skizze soll die Variable a nur mit natürlichen Zahlen belegt werden.

(a) • Berechne den Umfang des Dreiecks für $a = 17$ und $a = 23$.
  • Welchen gemeinsamen Teiler, der größer als 1 ist, besitzen die Maßzahlen der beiden Ergebnisse?

(b) • Berechne den Umfang u des Dreiecks in Abhängigkeit von a.
  • Begründe: Die Maßzahl des Umfangs ist - egal womit du den Platzhalter $a \in \mathbb{N}$ belegtst - stets durch 7 teilbar.

12. Untersuche, ob die beiden Gleichungen G_1 und G_2 die gleiche Lösungsmenge besitzen:
G_1: $4 - (5x^2 + 8) \cdot (-12) = 13$ G_2: $3 \cdot (8 + 5x^2) \cdot 4 = 9$

13.



Das Vorfahrtszeichen besteht aus zwei Quadraten.

(a) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Quadrate.

(b) Welche Seitenlänge müsste das große Quadrat besitzen, damit es neunmal größer als das innere Quadrat ist?

In Anlehnung an: Mathematiktest in der Jahrgangsstufe 8 für bayerische Realschulen vom 25. Sept. 2007

14. Eva und Franz vergleichen die beiden folgenden Terme in der Grundmenge $G = \mathbb{Z}$:

$$T_1(x) = 3(x + 80) \quad \text{und} \quad T_2(x) = 7(x + 80).$$

Eva notiert:

- In beiden Termen kommt der Faktor $(x + 80)$ vor
- $3 < 7$
- Also gilt stets $T_1(x) < T_2(x)$

Franz hat Zweifel, doch Eva begründet ihre Aussagen mit Hilfe einer Wertetabelle:

x	10	20	30	-10	-20	-30
$T_1(x)$	270	300	330	210	180	150
$T_2(x)$	630	700	770	490	420	350

Sie meint: „Also gilt immer $T_1(x) < T_2(x)$." Franz entgenet beim Anblick der Tabelle: „Du hast nicht Recht, denn wenn wir die Tabelle fortsetzen ..."

(a) Begründe, dass Franz Recht hat.

(b) Für welche Belegungen von x ergeben sich gleiche Termwerte?

15.

$$(36 - \underline{\qquad}) \cdot \underline{\qquad}$$

$$= \quad 36 \cdot \underline{\qquad} - \underline{\qquad} \cdot \underline{\qquad}$$

$$= \quad -180 \quad + \quad \underline{\qquad}$$

$$= \quad 20$$

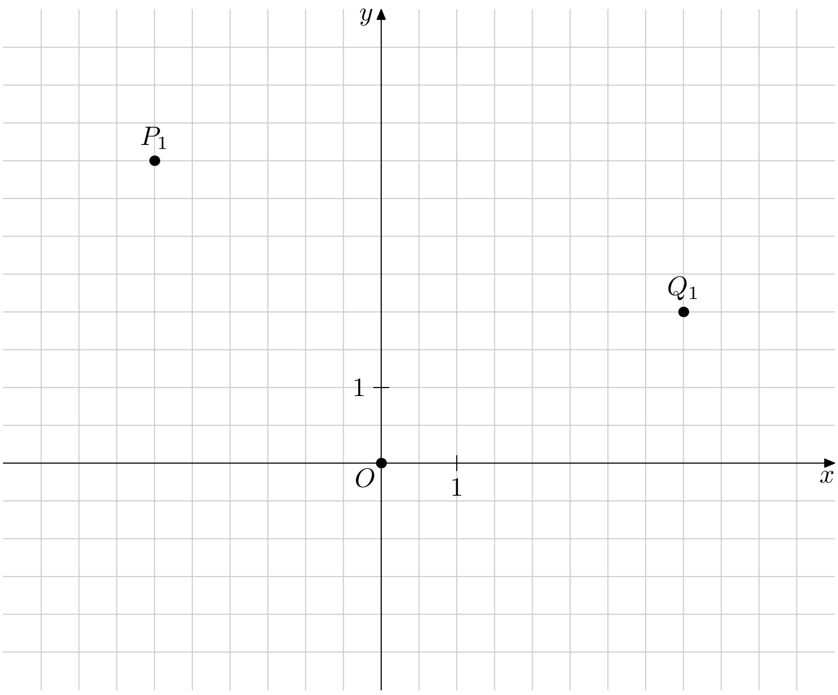
Fülle die leeren Plätze passend mit ganzen Zahlen aus.

16. Fritz rechnet die folgende Aufgabe:

$$-2^4 + (-2)^4 = 16 + 16 = 32.$$

Maria erkennt, dass Fritz dabei ein Fehler unterlaufen ist. Sie weist ihn darauf hin, doch Fritz will dies nicht einsehen: „Wir haben gelernt: Wenn der Exponent eine gerade Zahl ist, dann ist der Wert der betreffenden Potenz immer positiv. Also kommt 32 heraus.“ Maria entgegnet: „Das stimmt nur manchmal.“
Notiere die restlichen Sätze von Marias Antwort, so dass Fritz seinen Fehler erkennt und vollkommen einsieht.

17.



(a) Gib die Koordinaten der Punkte P_1 und Q_1 an.

(b)
- Zeichne drei weitere Punkte P_2, P_3 und P_4 ein, die alle den gleichen y-Wert wie der Punkt P_1 besitzen.
- Verbinde die vier Punkte $P_1 - P_2 - P_3 - P_4$ mit deinem Geodreieck, so dass eine Strecke entsteht.
  Beschreibe die Lage dieser Strecke zu einer der beiden Koordinatenachsen.

(c) Zeichne einen Punkt Q_2 ein, dessen y-Wert um 3 kleiner ist als der y-Wert des Punktes Q_1 und der gleichzeitig den gleichen x-Wert besitzt wie der Punkt P_1.

(d) Erich überlegt, ob es im II. Quadranten einen Punkt gibt, der den x-Wert $4,3$ besitzt. Was meinst du? Begründe.

18. Konstanze rechnet die folgende Aufgabe:

$$-(-3)^4 - (-3)^2 - (-3)^1 = 93.$$

Konstanzes Lehrer stellt fest: „$-(-3)^4$ ergibt aber -81." Konstanze widerspricht: „Sie haben uns doch beigebracht, dass Minus Minus Plus ergibt!". Der Lehrer entgegnet: „Du kannst diese Regel hier nicht so ohne weiteres anwenden, weil ..."

(a) Notiere die restlichen Sätze des Lehrers, so dass Konstanze ihren Fehler erkennt und vollkommen einsieht.

(b) Berechne das richtige Ergebnis.

19.

$$\square \cdot \bigcirc - \triangle = -12$$

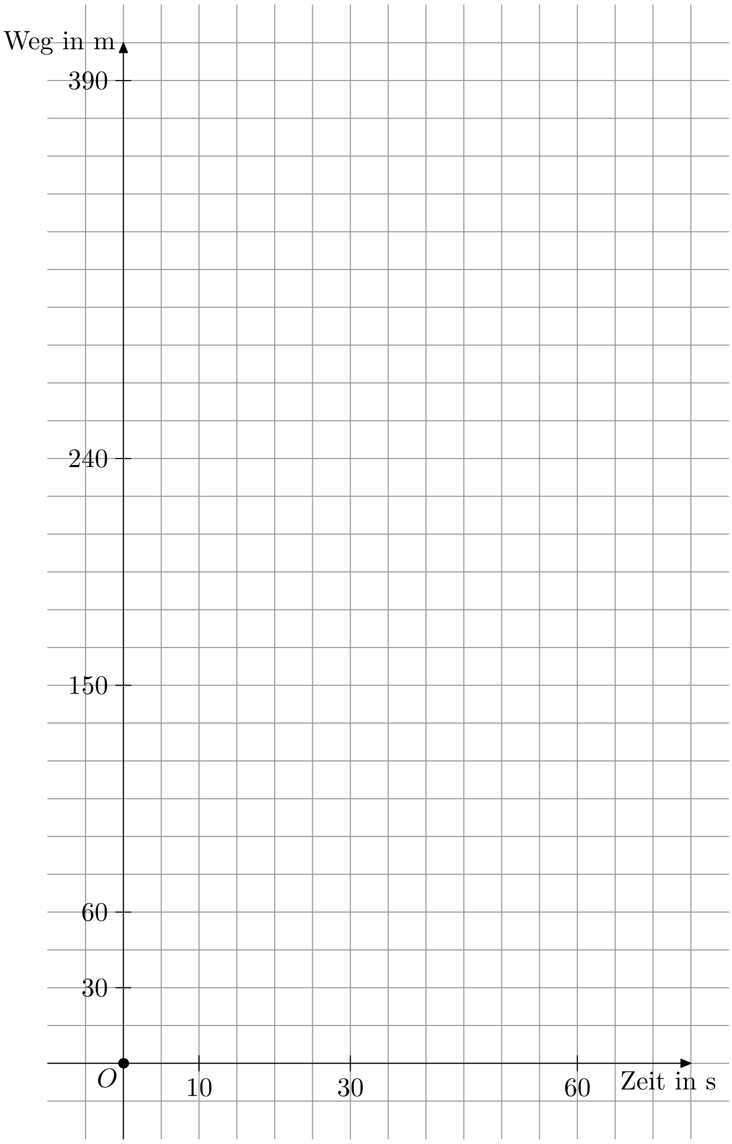
(a) Setze in jeden Platzhalter eine der Zahlen $\{-4; 0; 2; 4; 10\}$ so ein, dass die Rechnung stimmt.

(b) Franz will mit den Zahlen aus der oben angegebenen Menge und der gleichen Platzhalterkombination das Ergebnis -3 erzeilen. Geht das? Begründe.

20. Fritz und Franz fahren mit ihren Fahrrädern um die Wette. Der zurückgelegte Weg von jedem ist im Zehn-Sekunden-Abstand in der folgenden Tabelle festgehalten:

Zeit in s	0	10	20	30	40	50
Strecke von Fritz in m	0	60	120	180	240	300
Strecke von Franz in m	0	15	60	135	240	375

(a) Zeichne das Diagramm von Fritz und das Diagramm von Franz in das vorbereitete Koordinatensystem:



(b) Wessen Diagramm lässt auf eine direkte Proportionalität schließen? Begründe.

(c) Wer gewinnt das Rennen? Begründe.

21. Edwin rechnet die folgende Aufgabe:

$$-2^4 + (-2)^4 = 16 + 16 = 32.$$

Martha erkennt, dass Edwin dabei ein Fehler unterlaufen ist. Sie weist ihn darauf hin, doch Edwin will das nicht einsehen: „Wir haben gelernt: Wenn der Exponent eine gerade Zahl ist, dann ist der Wert der betreffenden Potenz immer positiv. Also kommt 32 heraus."
Martha entgegnet: „Das stimmt nicht immer, denn … "

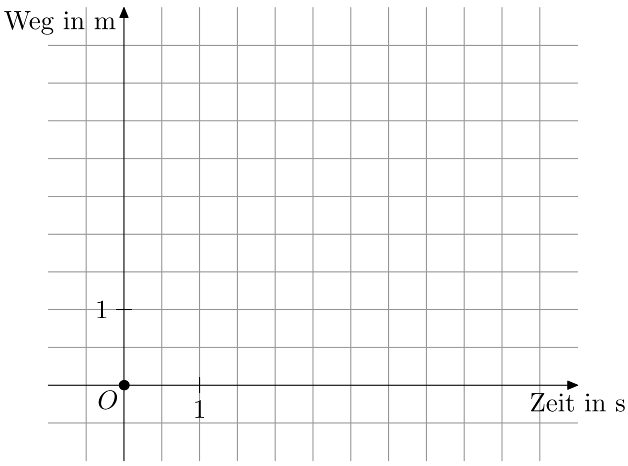
Wie hat Martha ihre Antwort begründet? Setze Marthas angefangene Begründung fort, sodass Edwin seinen Fehler erkennt und vollkommen einsieht. Berichtige Edwins Lösung.

22. Während einer Bewegung wurden die Zeit t und der Weg s in einer Tabelle festgehalten:

Zeit t in s	2	3	5
Wegstrecke s in m	2	$2,5$	$3,5$

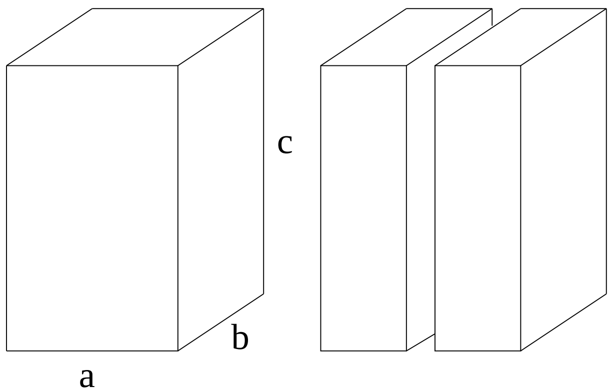
(a) Untersuche rechnerisch, ob die Zeit t und der Weg s zueinander direkt proportional sind. Begründe deine Antwort.

(b)



- Trage die drei Zahlenpaare der Tabelle als Punkte in das Koordinatensystem ein.
- Begründe nun anhand des Diagramms, dass deine Antwort in der Aufgabe (a) richtig war.

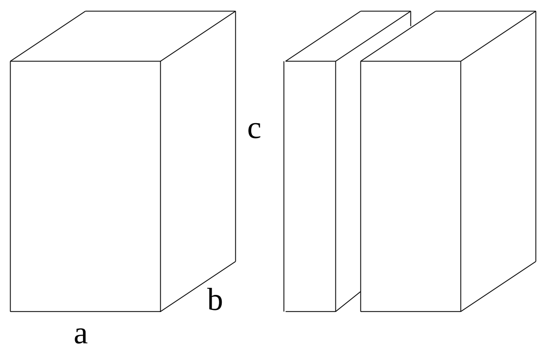
23.



Ein quaderförmiger Holzklotz mit $a = 2\,\mathrm{dm}$, $b = 2,5\,\mathrm{dm}$ und $c = 3\,\mathrm{dm}$ wird mit einer Axt so halbiert, wie es die obige Darstellung zeigt.

(a) Um wie viel Prozent hat sich jetzt die Oberfläche der beiden Hälften im Vergleich zu der des massiven Holzklotzes vergrößert? Gib den Prozentsatz auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet an.

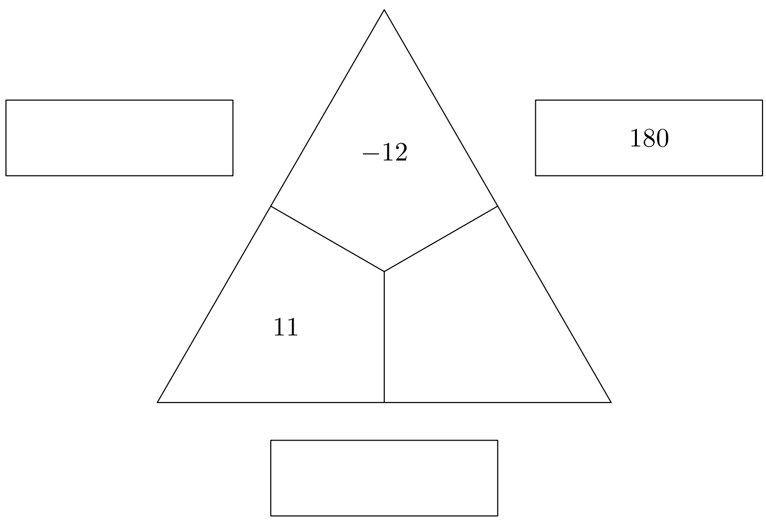
(b)



Hätte sich am Rechenergebnis der Aufgabe (a) etwas geändert, wenn die Axt nicht die Mitte getroffen hätte? Begründe deine Antwort.

24. Früher hatte eine Schachtel Lebkuchen der Firma „Timz“ 1500 g Inhalt.
Für das kommende Weihnachtsgeschäft kommen nur noch 1200 g in eine Schachtel, die aber das Gleiche kostet wie früher die mit 1500 g Inhalt.
Um wie viel Prozent hat die Firma „Timz“ ihre Lebkuchen verteuert?

25.



In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke der Wert des Produktes aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Zahlen.

26. Gegeben ist die Gleichung $x \cdot y \cdot x = 284$, wobei x und y ganze Zahlen sein sollen. Ermittle alle Lösungen für x und y.

27. Die Käsesorte „Bergglück“ besteht zu 40% aus Wasser. Die Trockenmasse besteht zu 40% aus Fett.
Wie viel Prozent Fett sind in der Käsesorte „Bergglück“ enthalten?

28. Es gilt: $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125$.
Die Zahl 1000 lässt sich also in zwei Faktoren zerlegen, wobei keiner der beiden durch 10 teilbar ist; d.h. keiner der beiden endet auf 0.
Zerlege 21 000 so in zwei Faktoren, dass keiner der beiden auf 0 endet. Gib alle Möglichkeiten an.

29. In einem Glas befinden sich 25 ml Fruchtsaft. Es werden 100 ml Mineralwasser dazugegeben. Dann wird umgerührt.
   (a) Berechne, wie viel Prozent Saft sich jetzt im Glas befindet.
   (b) Erkläre dein Rechenergebnis anhand einer Skizze.

30. Ein Discounter verkauft Fruchtnektar in Tetrapacks. Auf der Packung steht:

   „1 l Ananas-Maracuya - Fruchtgehalt mindestens 60%“

   Egon öffnet eine Packung und schenkt sich 300 ml in ein Glas ein.
   (a) Wie viele ml reiner Fruchtsaft befinden sich noch im Tetrapack?
   (b) Wie viele ml reiner Fruchtsaft befindet sich im Glas?

9. Gleichungen und Ungleichungen

1. Hans soll die folgende Ungleichung lösen:
   $$3 \cdot (x-3) + 17 \leqq -13 \text{ auf } G=\mathbb{N}\,.$$
   Die Einzelschritte seiner Rechnung sehen so aus:

1. Schritt:	$3x - 3$	$\leqq$	-30
2. Schritt:	$3x$	$\leqq$	-27
3. Schritt:	x	$\geqq$	-9
4. Schritt:	$L = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$		

   In manchen dieser Schritte hat Hans Fehler gemacht. Schreibe auf, in welchem Schritt ein Fehler passiert ist und worin jeweils der Fehler besteht.
   Berechne die richtige Lösungsmenge.

2. Gegeben ist die Lösungsmenge $L = \{-4;\ -3;\ -2;\ \cdots\}$.
   Finde zu dieser Lösungsmenge drei passende Ungleichungen. Vergiss nicht, jeweils die Grundmenge anzugeben.

3. In einem Freigehege sind ebenso viele Fasanen wie Kaninchen. Zusammen haben sie 204 Füße.

4. Der Umfang eines Fünfecks beträgt $32{,}8$ cm. Die erste Seite ist 4 cm lang, die zweite ist $1{,}8$ cm länger als die erste. Die Summe der Längen dieser beiden Seiten ist gleich der Länge der dritten Seite. Die letzte und vorletzte Seite sind gleich lang.

5. Aus einem rechteckigen Blatt Papier (16 cm x 12 cm) soll das Würfelnetz eines möglichst großen Würfels ausgeschnitten werden. Berechne die Abfallfläche.

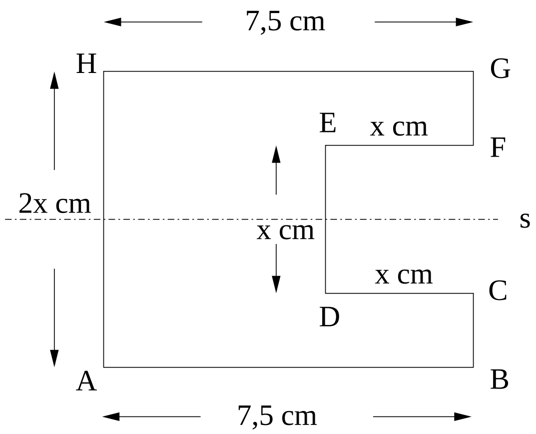
6. Die Zahl $356{,}25$ ergibt sich als Differenz aus dem Dreifachen einer rationalen Zahl und 582.

7. Die Seiten eines Vierecks werden wie folgt gebildet: Die vierte Seite ist 1 cm länger als die dritte. Die dritte Seite ist 1 cm länger als die zweite. Die zwete Seite ist 1 cm länger als die erste. Der Umfang des Vierecks beträgt 24 cm.

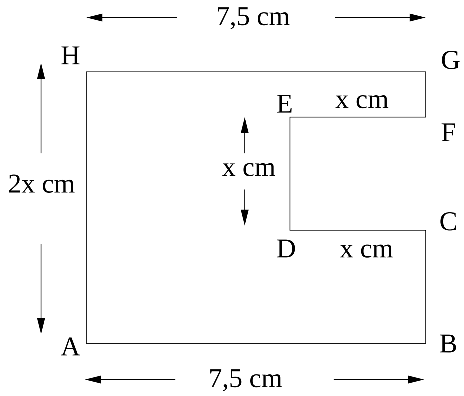
8. Eine 2, 1 m lange Holzlatte wird wie folgt zersägt. Das erste Teilstück ist doppelt so lang wie das zweite. Das dritte Teilstück ist halb so lang wie das zweite.

9. Gegeben ist die Gleichung $ax = 36$ auf $G = \mathbb{Q}$ und $a \in \mathbb{Q}$.
   (a) Berechne jeweils die Lösung für $a = -4$ und $a = 0,\overline{3}$.
   (b) Für welche Belegung von a gibt es keine Lösung? Begründe.
   (c) Die Variablen a und x können so mit gleichen Zahlen belegt werden, dass eine wahre Aussage entsteht. Gib sämtliche Möglichkeiten an.

10.



Die dargestellte Figur $ABCDEFGH$ besitzt die Symmetrieachse s. Es gilt $x \in \mathbb{Q}^+$.
   (a) Zeichne die Figur für $x = 3$.
   (b) Berechne den Umfang der Figur für $x = 3$.
   (c) Zeige: Für den Umfang u der Figur gilt in Abhängigkeit von x:
   $$u(x) = (6x + 15)\,\text{cm}$$
   .
   (d) Berechne x so, dass der Umfang der Figur $28,5$ cm lang wird.
   (e) Gibt es eine Belegung von x, die einen $14,3$ cm langen Umfang erzeugt? Begründe.
   (f)

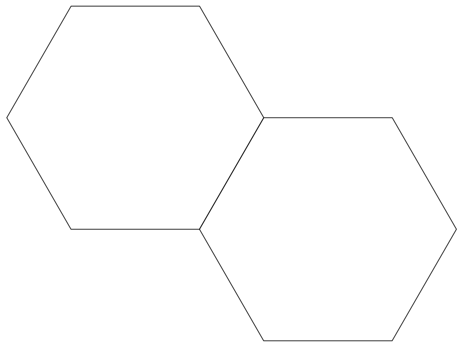


(g) Hier ist die Figur im Gegensatz zur urspründlichen nicht mehr symmetrisch. Gilt auch hier $u(x) = (6x + 15)\,\text{cm}$? Begründe.

11. Gib zehn Belegungen für $x \in \mathbb{Q}$ an, so dass $\frac{x}{4} < 2$ gilt.

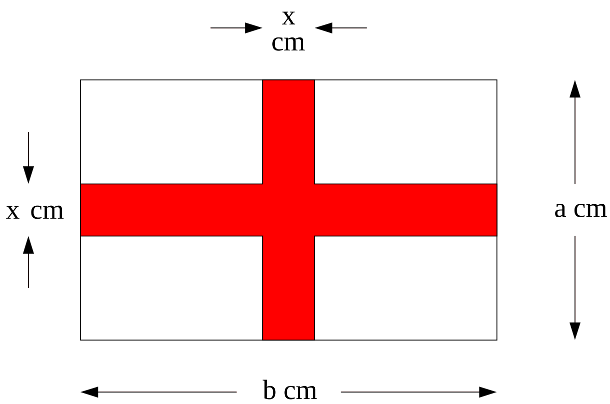
10. Parallelverschiebung

1. Zeichne die rechts skizzierte Figur aus zwei regelmäßigen Sechsecken mit der Seitenlänge $a = 4\,\text{cm}$.

   Füge weitere regelmäßige Sechsecke von der gleichen Größe an.

2. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.

   (a) Zeichne die Figur für $b = 8$, $a = 5$ und $x = 1$.

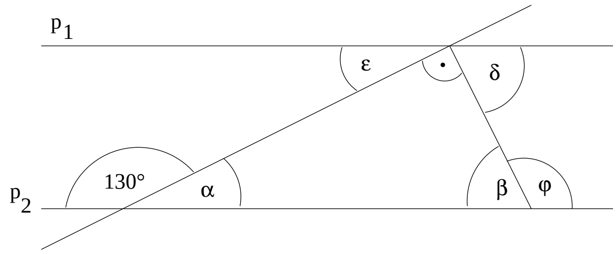
   (b) Das weiße Rechteck oben links lässt sich auf das weiße Rechteck rechts unten verschieben.

   - Zeichne die vier Stellvertreter des Verschiebungsvektors $\overrightarrow{v}$ zwischen den entsprechenden Eckpunkten der beiden Rechtecke ein.
   - Gib die Komponenten des Verschiebungsvektors $\overrightarrow{v}$ an.

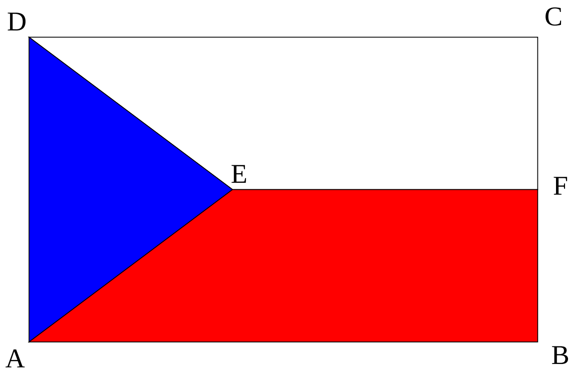
(c) Das weiße Rechteck rechts oben lässt sich so drehen, dass es mit dem Rechteck links unten zur Deckung kommt.

- Zeichne das Drehzentrum ein und gib den Drehwinkel an.
- Um welche besondere Drehung handelt es sich?

3. Bestimme die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Die nicht maßstabsgetreue Zeichnung brauchst du nicht auf dein Blatt zu übertragen. Die Geraden p_1 und p_2 sind parallel.
Begründe jeweils durch eine kurze Rechnung oder ein passendes Stichwort.



4. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AD} = \overline{EF} = 4\,\text{cm}$ und $\sphericalangle DEA = 52{,}8°$.

(a) Berechne auf verschiedenen Weise das Maß des Winkels BAE auf eine Stelle nach dem Komma.

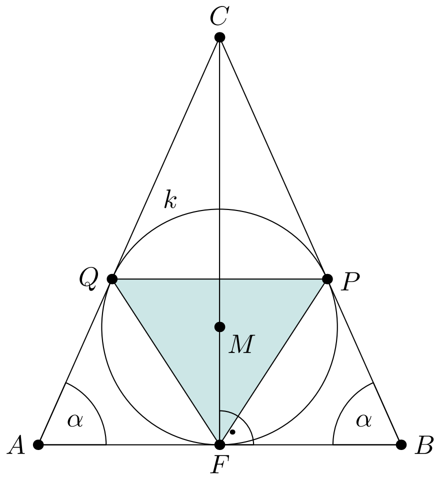
[Ergebnis: $\sphericalangle BAE = 26{,}4°$]

(b) Zeichne die Figur auch mit dem Ergebnis der Aufgabe (a).

(c) Welche besondere Eigenschaft hätte das Dreieck DAE, wenn $\sphericalangle AED = 300°$ wäre?

11. Winkel

1.



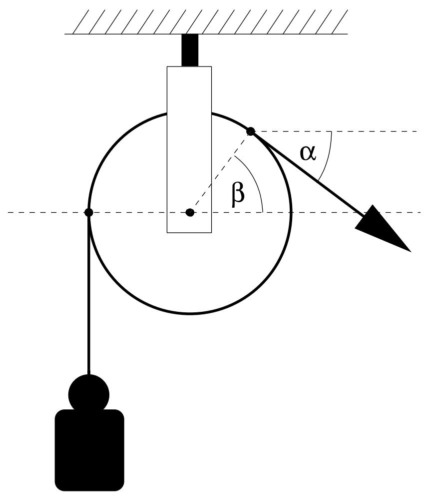
Die Kreislinie k mit dem Mittelpunkt M berührt die Seiten des Dreiecks ABC in den Punkten F, P und Q.

(a) Zeichne die Figur mit $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\alpha = 66°$. Zeichne die zwei Kreisradien ein, die zu den Punkten P und Q führen.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks FPQ.

[Teilergbnis: $\sphericalangle PFQ = 66°$]

2.



Ein Seil, das am linken Ende mit einem Gewicht belastet ist, wird über eine feste Rolle geführt. Am rechten Seilstück, das mit der Waagrechten den Winkel α einschließt, wird das Gleichgewicht gehalten.

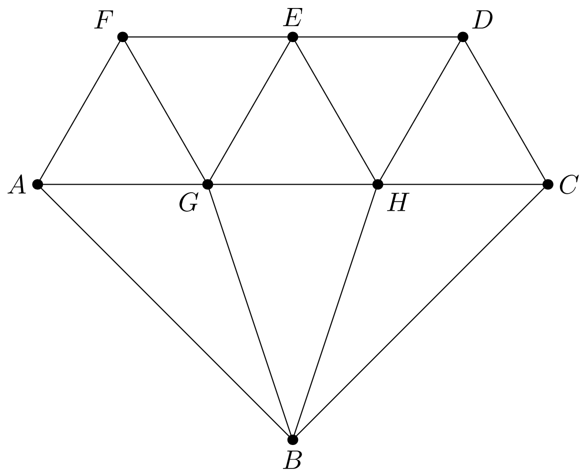
(a) Begründe: $\beta = 90° - \alpha$.

(b) Zeichne die Rolle mit dem Seil für den Radius $r = 3\,\text{cm}$ und $\alpha = 37°$.

(c) Berechne den Bruchteil des Umfangs der festen Rolle, der für $\alpha = 30°$ vom Seil berührt wird.

(d) Wie groß müsste man den Winkel α wählen, damit die Länge des Seilstückes, das die Rolle berührt, 40% des Rollenumfangs beträgt?

3.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Trapez $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 9\,\text{cm}$, wobei über der Strecke $[DF]$ 6 cm Platz bleiben sollen.

(b) Benenne die Innenwinkel des Trapezes $ACDF$ mit griechischen Buchstaben. Berechne diese Innenwinkel.

(c) Verlängere die Strecken $[AF]$ über F und $[CD]$ über C hinaus so weit, bis sie sich im Punkt S schneiden. Begründe: Das Dreieck FDS ist gleichseitig.

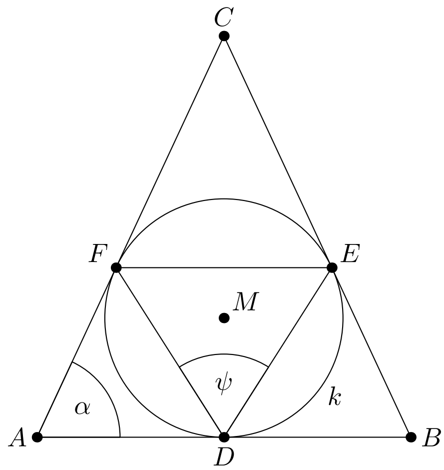
(d) Verschiebe die Raute $AGEF$ mit dem Vektor $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$.

(e) Wie viele Dreiecke vom Typ AGF passen lückenlos in das Dreieck FDS? Begründe.

(f) Der Winkel HBG hat das Maß $36,87°$ (gerundet).

- Berechne die Maße der Innenwinkel des Drachenvierecks $BHEG$.
- Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks ABG.

4.



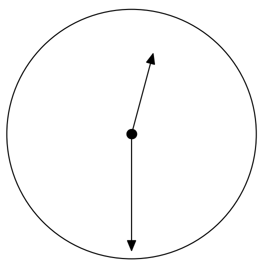
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit der Basis $[AB]$. Der Inkreis k mit dem Mittelpunkt M berührt die Dreiecksseiten in den Punkten D, E und F.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 9\,\text{cm}$ und $\alpha = 65°$.

(b) • Zeichne das Viereck $ADMF$ ein.
  • Um welches besondere Viereck handelt es sich? Begründe.

(c) Zeige: $\psi = \alpha$.

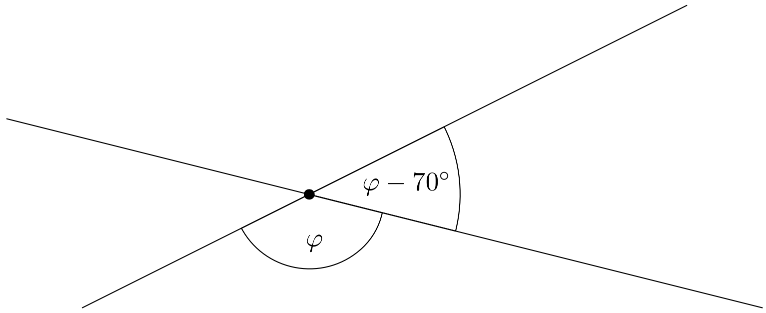
5.



(a) Welchen Winkel schließen die beiden Uhrzeiger um 12 : 30 Uhr ein?

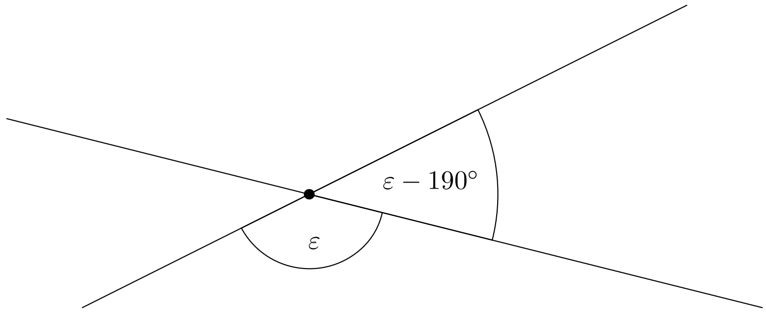
(b) Um welchen Winkel haben sich der Minuten- und der Stundenzeiger von 12 : 30 Uhr bis 13 : 10 Uhr weitergedreht?

6.



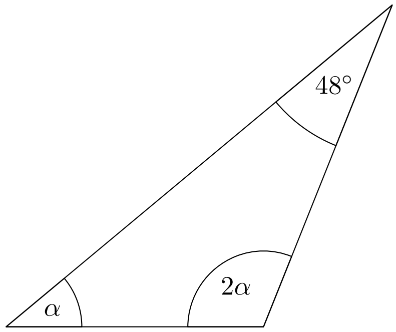
Bestimme das Winkelmaß φ an der Geradenkreuzung. Beachte: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu.

7.



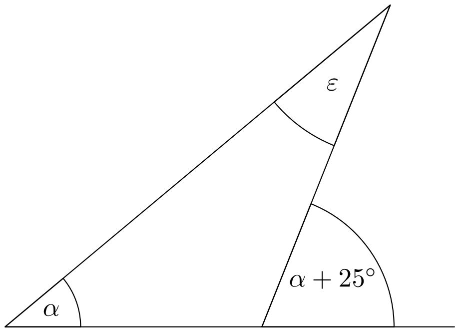
Begründe: Den Winkel ε gibt es in Wirklichkeit nicht.

8.



Berechne α. Beachte: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

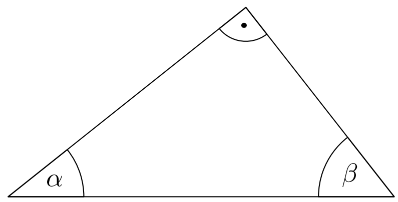
9.



Berechne ε. Beachte: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

10. In einem Dreieck ist der erste Winkel doppelt so groß wie der zweite Winkel. Der dritte Winkel ist um 36° kleiner als der zweite Winkel. Berechne die Winkelmaße.

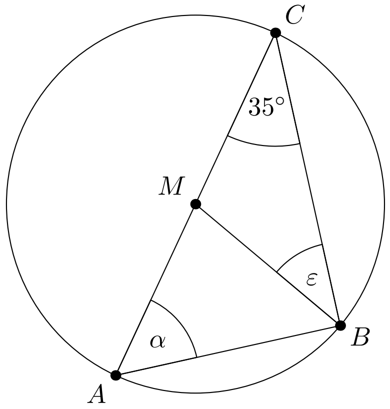
11.



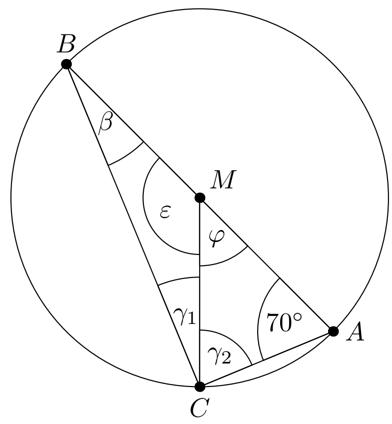
In einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Winkel fünf Mal so groß wie ein anderer Winkel. Wie groß sind die Winkel?
Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten.

12. Berechne jeweils die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Zuweilen musst du erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

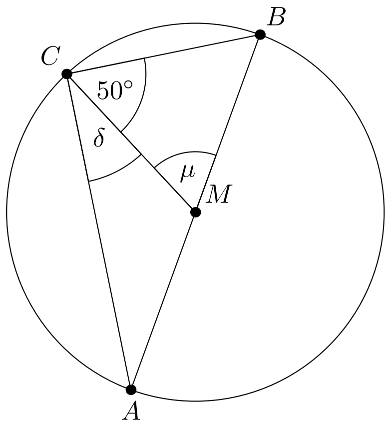
Figur a)



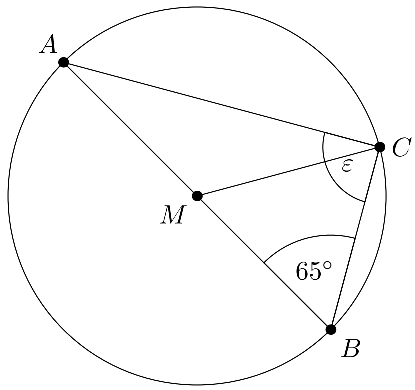
Figur b)



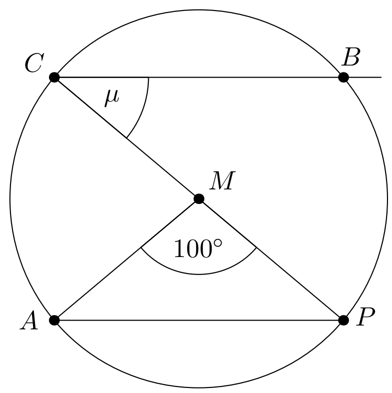
Figur c)



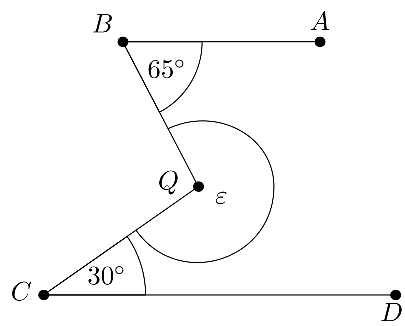
Figur d)



Figur e) $CB \parallel AP$



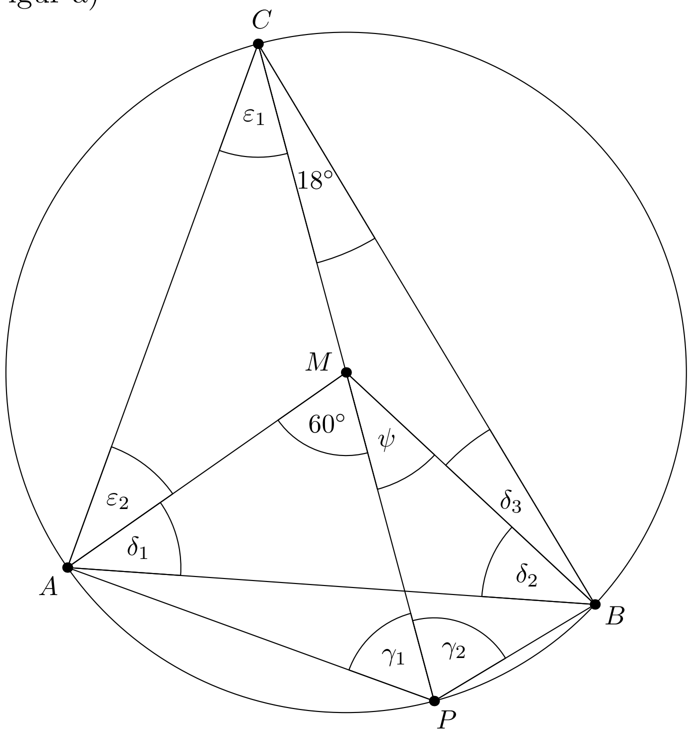
Figur f) $AB \parallel CD$



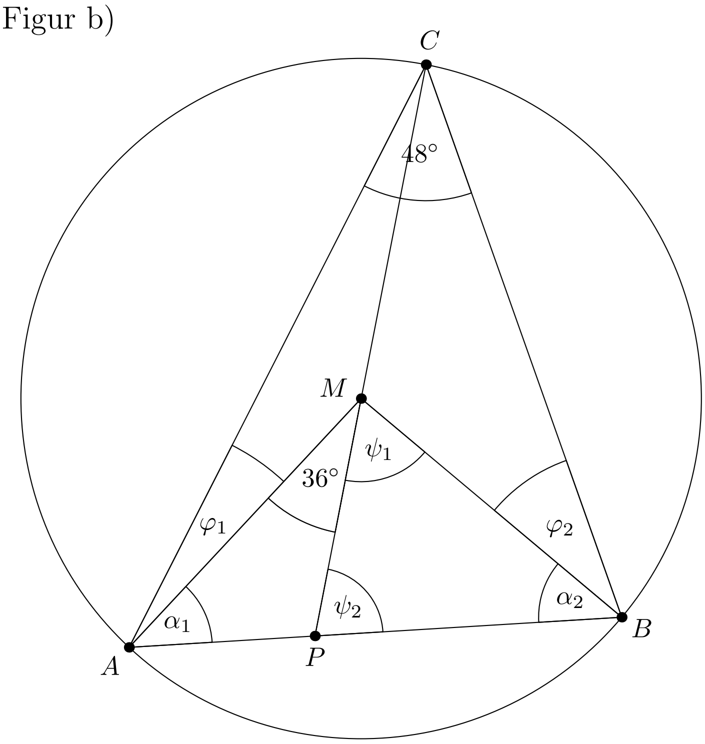
Tipp zur Figur f): Zeichne eine Hilfslinie durch den Punkt Q ein.

13. Berechne jeweils die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Zuweilen musst du erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

Figur a)



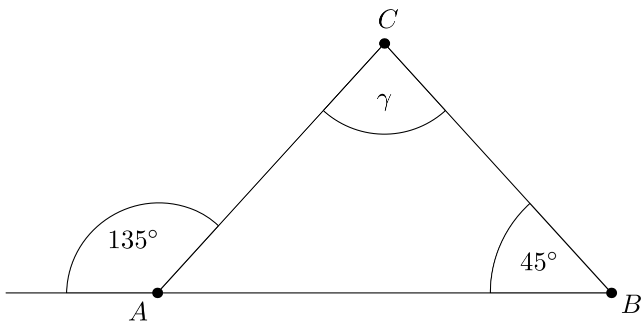
Figur b)



14. Zur Berechnung der mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße musst du zuweilen erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

(a)

Figur a)

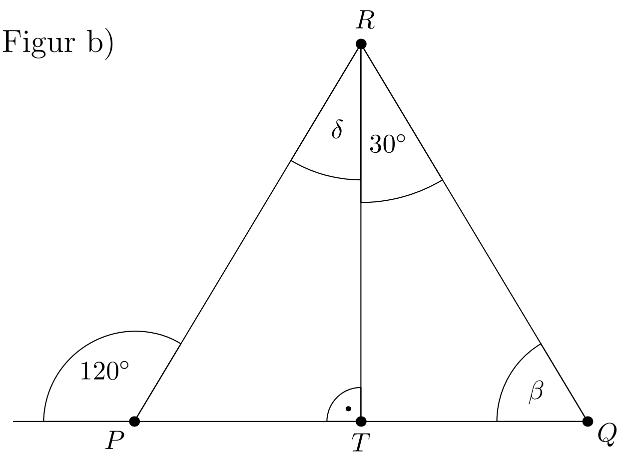


In der Figur a) gilt: $\overline{AC} = 4\,\text{cm}$.

- Berechne γ.
- Begründe: $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

(b)

Figur b)



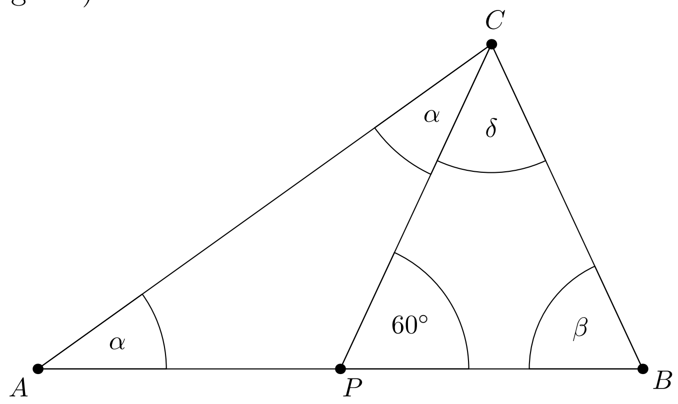
In der Figur b) gilt: $\overline{RQ} = 7,64\,\text{cm}$.

- Berechne β und δ.
- Begründe: $\overline{PR} = 7,64\,\text{cm}$ und $\overline{PT} = 3,82\,\text{cm}$.

15. Zur Berechnung der mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße musst du zuweilen erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

(a)

Figur a)

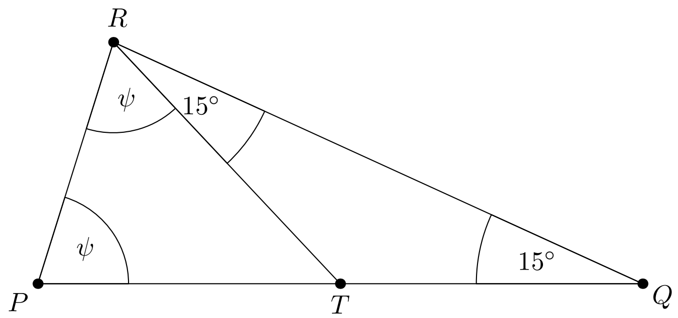


In der Figur a) gilt: $\overline{AP} = 5\,\text{cm}$ und $\alpha + \delta = 90°$.

- Berechne die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße.
- Begründe: $\overline{AB} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$.

(b)

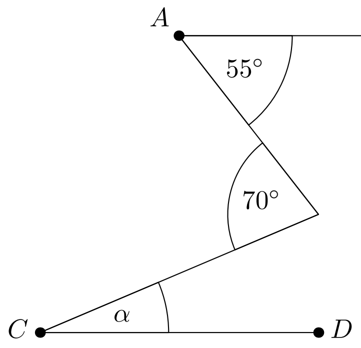
Figur b)



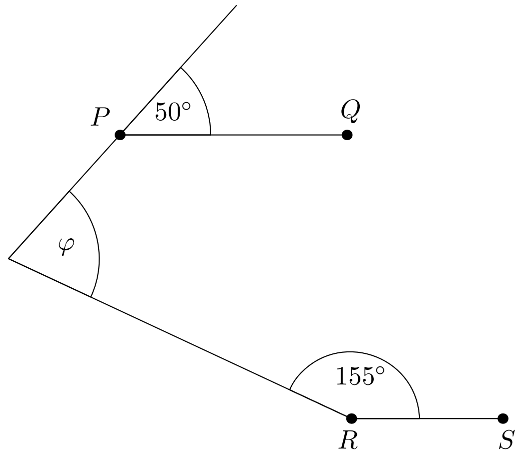
In der Figur b) gilt: $\overline{PQ} = 9,38\,\text{cm}$.

- Berechne die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße.
- Begründe: $\overline{RT} = 4,69\,\text{cm}$.

16.



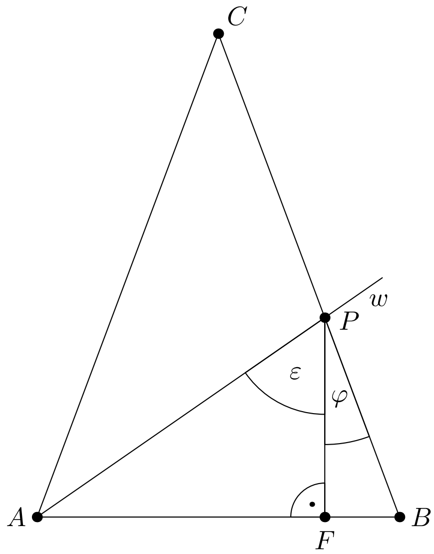
Figur a): $AB \parallel CD$



Figur b): $PQ \parallel RS$

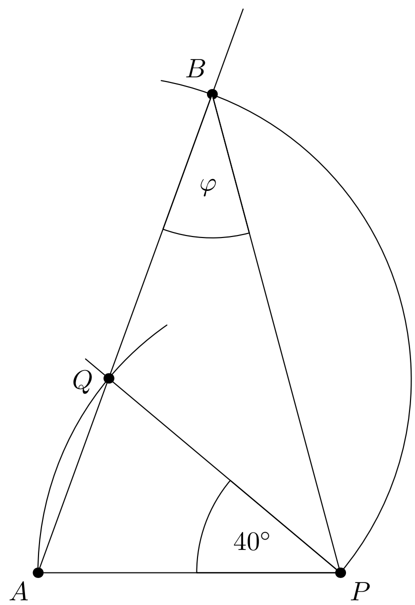
Berechne die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Zeichne dazu geeignete Hilfslinien ein. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

17.



Im Dreieck ABC gilt: $\overline{CA} = \overline{CB}$ und $\varepsilon = 56,81°$. Die Halbgerade $w = [AP$ halbiert den Winkel BAC. Die Skizze ist nicht maßstabgerecht. Berechne φ.

18.



Die Punkte P und Q sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AP} = 4\,\text{cm}$.

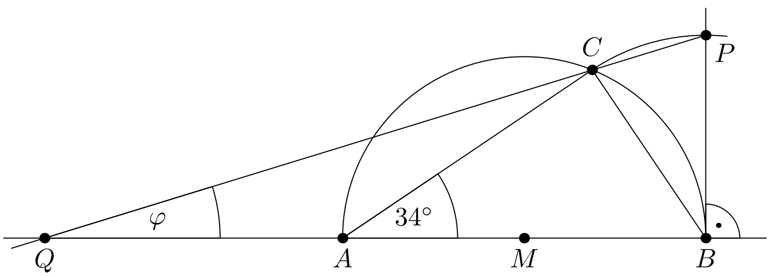
(b) Berechne φ.

(c) Begründe, dass das Dreieck APB nicht gleichschenklig ist.

(d) Wie groß müsste der Winkel QPA werden, damit das Dreieck APB bei sonst unveränderlichen Bedingungen gleichschenklig wird?

(e) Könnte das Dreieck APB bei geeigneter Wahl des Winkels QPA vielleicht sogar gleichseitig werden?

19.



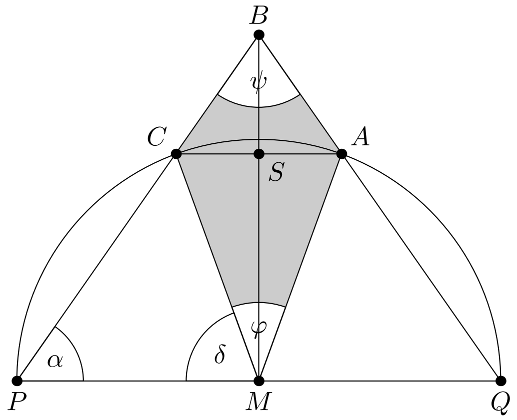
Die Punkte M und B sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Zeige: $\varphi = 17°$.

(c) Untersuche, ob das Dreieck ACQ gleichschenklig ist.

20.



Die achsensymmetrische Darstellung zeigt einen Halbkreis und das Viereck $MABC$.

(a) Um welches besondere Viereck handelt es sich beim Viereck $MABC$? Begründe deine Antwort.

(b) Zeichne die Figur für $\overline{PQ} = 8\,\text{cm}$ und $\alpha = 55°$.

(c) Trage überall dort, wo es möglich ist, das Winkelmaß „α“ ein.

(d) Zeige: $\delta = 180° - 2\alpha$ und $\varphi = 4\alpha - 180°$.

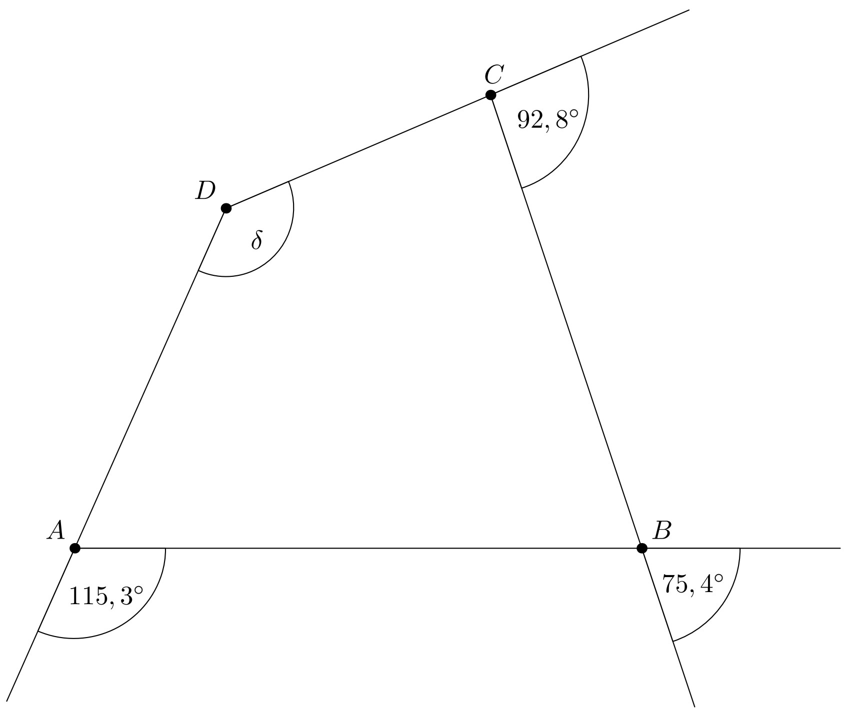
(e) Für welche Belegungen von α gibt es überhaupt solche Vierecke $MABC$?

(f) Zeige: $\psi = 180° - 2\alpha$.

(g) Berechne α so, dass das Viereck $MABC$ eine Raute wird.

21. Sechs Punkte A, B, C, D, E und F liegen getrennt auf einer Kreisline.
Wie viele Dreiecke kannst du aus jeweils drei dieser sechs Punkte einzeichnen?

22.

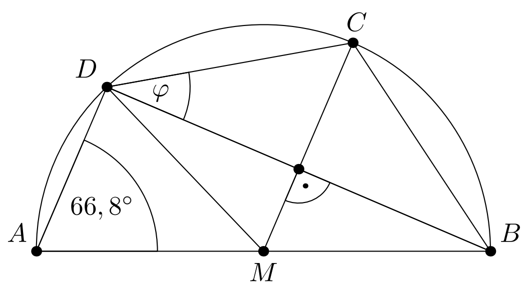


Uwe und Emil wollen aus den gegebenen Winkeln den Winkel δ bestimmen. Die Zeichnung ist aber nicht maßstabgerecht.
Emil behauptet: „Das ist ganz einfach: Der $115,3°$-Winkel und δ sind F-Winkel. Also ist δ auch $115,3°$“.
Uwe widerspricht: „Das können keine F-Winkel sein, weil ... “

(a) Notiere, wie Uwe seine Antwort begündet.

(b) Berechne δ.

23.

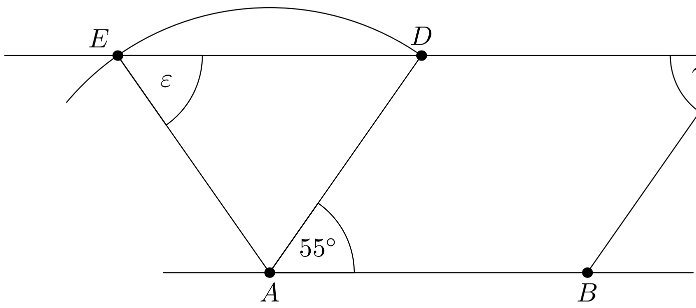


Der Mittelpunkt M der Strecke $[A, B]$ ist gleichzeitig der Mittelpunkt des Halbkreises durch die vier Punkte A, B, C und D.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$.

(b) Berechne φ.

24.



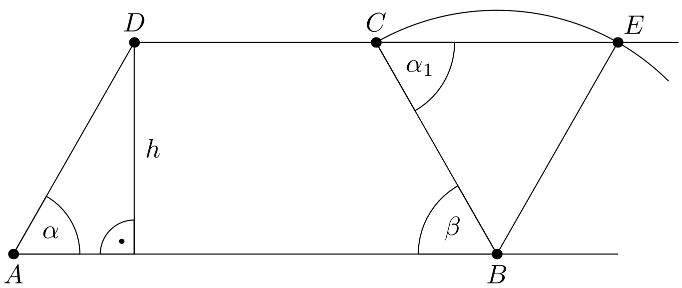
Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm. Es gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$. Der Punkt A ist der Mittelpunkt des Kreisbogens durch den Punkt D.

(a) Zeichne die Figur in folgenden Schritten:
- Zeichne zunächst die Strecke $[AB]$.
- Trage am Punkt A den 55°-Winkel an.
- Zeichne den Punkt D ein.
- Zeichne den Punkt C ein.
- Konstruiere mit Hilfe des Kreisbogens den Punkt E.

(b) Begründe: Das Dreieck ADE ist gleichschenklig.

(c) Begründe:
- Es gilt $\gamma = \varepsilon = 55°$
- Das Viereck $ABCE$ ist ein achsensymmetrisches Trapez.

25.



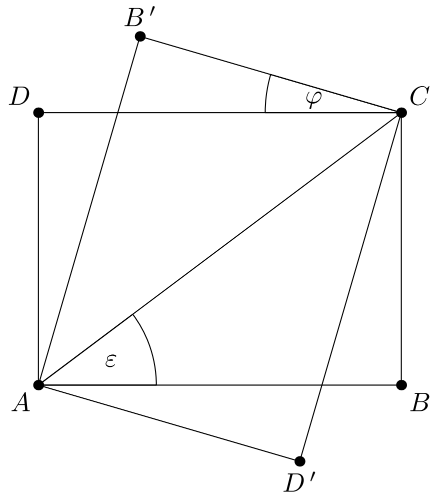
Das Viereck $ABCD$ ist ein achsensymmetrisches Trapez.
Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{DC} = 4\,\text{cm}$ und $h = 3{,}5\,\text{cm}$.
Der Punkt B ist der Mittelpunkt des Kreisbogens durch den Punkt C.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe:

- Das Dreieck BEC ist gleichschenklig.
- $\alpha_1 = \alpha$.
- Das Viereck $ABED$ ist ein Parallelogramm.

26.



Das Rechteck $ABCD$ wurde an seiner Diagonalen $[AC]$ gespiegelt. Dadurch ist das Viereck $AD'CB'$ entstanden.

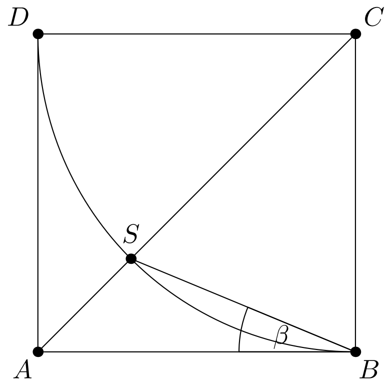
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne φ für $\varepsilon = 36,87°$.

27. In einem Viereck sind drei Winkel gleich groß. Der vierte Winkel ist ein rechter Winkel. Um welches besondere Viereck handelt es sich?

28. In einem gleichschenkligen Dreieck hat ein Winkel das Maß $42,68°$.

29.

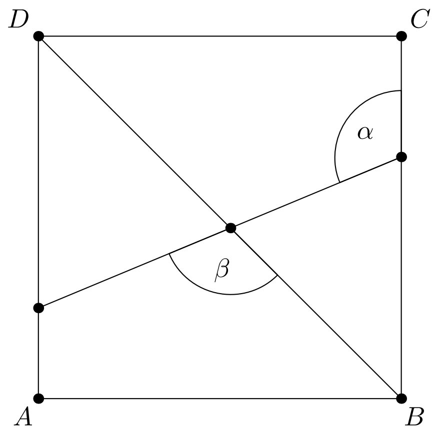


Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

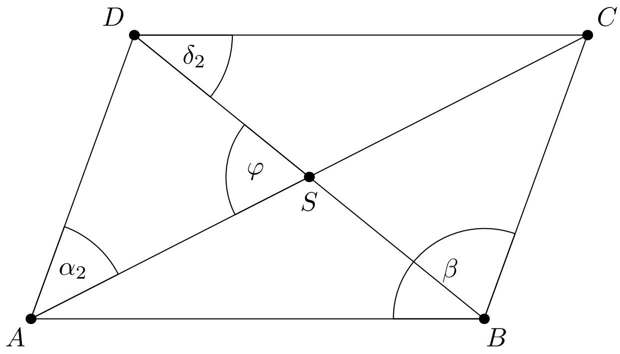
(b) Berechne das Maß β des Winkels SBA.

30.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Es gilt $\alpha = 123{,}4°$. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.
Berechne β auf zwei verschiedene Arten.

31.

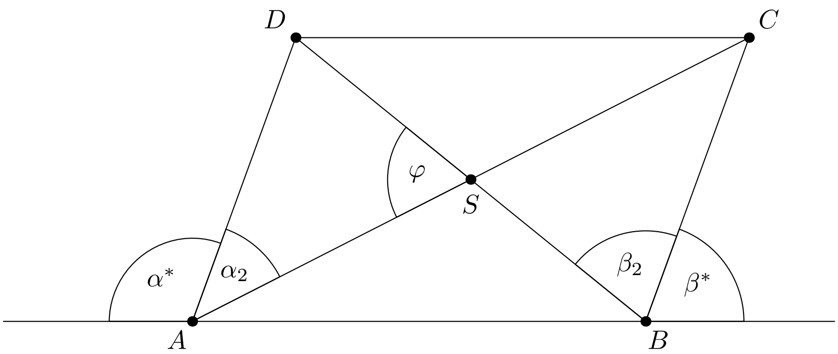


Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
Es soll gelten: $\alpha_2 = 42,1^\circ$, $\delta_2 = 38,7^\circ$ und $\varphi = 65,3^\circ$. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.

(a) Skizziere das Parallelogramm.

(b) Berechne β.

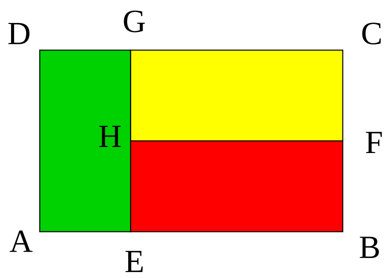
32.



Die Klasse 7a bekommt vom Mathematiklehrer die folgende Aufgabe gestellt:
„Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
Es soll gelten: $\alpha_2 = 38,9^\circ$, $\alpha^* = 109,2^\circ$, $\varphi = 67,5^\circ$ und $\beta^* = 77,6^\circ$.
Berechne β_2. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.“
Erwin meint nach mehreren Rechenversuchen: „In der Angabe kann etwas nicht stimmen.“ Wo liegt der Fehler?

12. Drehung

1.



Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.
Die drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Ihre Seitenlängen stehen jeweils im Verhältnis 1:2. Weiter gilt: $\overline{HF} = 2x\,\text{cm}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

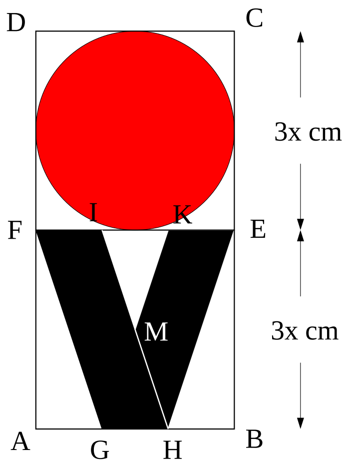
(a) Zeichne die Figur für $x = 4$.
In welchem Verhältnis stehen hier die Seitenlängen des Rechtecks $ABCD$? Ist das immer so, egal, womit man x belegt?

(b) Berechne den Umfang u des Rechtecks $ABCD$ in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $u(x) = 10x\,\text{cm}$.]

(c) Berechne x so, dass der Saum der Fahne $4\,\text{m}\,30\,\text{cm}$ lang ist.

(d) Das Rechteck $HFCG$ lässt sich so drehen, dass es sich mit dem Rechteck $AEGD$ deckt.
Zeichne die Figur für $x = 6$ und konstruiere das Drehzentrum Z.
Begründe: Der Drehwinkel hat das Maß 90°.

2. Das ist ein Bild des Logos der Firma MARABU, die Farben herstellt.



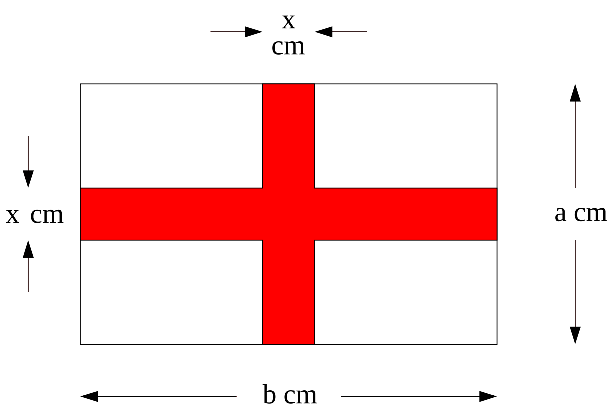
Die Figur setzt sich aus zwei Quadraten zusammen.
Die Strecken $[AG], [GH], [HB], [FI], [IK]$ und $[KE]$ sind alle gleich lang.

(a) Zeichne die Figur für $x = 2$. Platzbedarf nach links: 7 cm

(b) Die Figur $FECD$ soll so gedreht werden, dass sie dann lückenlos neben das Quadrat $ABEF$ passt.

- Begründe: Das Drehzentrum muss im Punkt M liegen.
- Führe die Drehung durch.
- Begründe: Der Drehwinkel hat das Maß $90°$.

3. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



(a) Zeichne die Figur für $b = 8$, $a = 5$ und $x = 1$.

(b) Das weiße Rechteck oben links lässt sich auf das weiße Rechteck rechts unten verschieben.

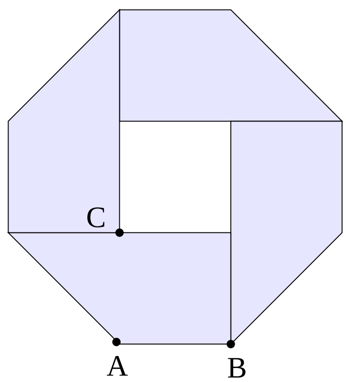
- Zeichne die vier Stellvertreter des Verschiebungsvektors $\overrightarrow{v}$ zwischen den entsprechenden Eckpunkten der beiden Rechtecke ein.

- Gib die Komponenten des Verschiebungsvektors $\overrightarrow{v}$ an.

(c) Das weiße Rechteck rechts oben lässt sich so drehen, dass es mit dem Rechteck links unten zur Deckung kommt.

- Zeichne das Drehzentrum ein und gib den Drehwinkel an.
- Um welche besondere Drehung handelt es sich?

4. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das weiße Viereck im Inneren ist ein Quadrat. Es gilt: $\overline{AB} = \overline{AC} = 2,5\,\text{cm}$

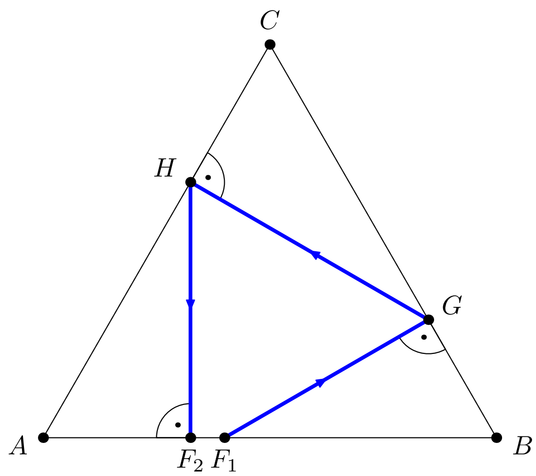


(a) Zeichne die Figur.

(b) Gib alle Winkelmaße φ an, um die man die Figur drehen kann, sodass sie sich wieder mit der Ausgangsfigur deckt. Zeichne dazu das Drehzentrum und weitere Hilfslinien ein.

(c) Begründe: Die Figur ist punktsymmetrisch.

5.

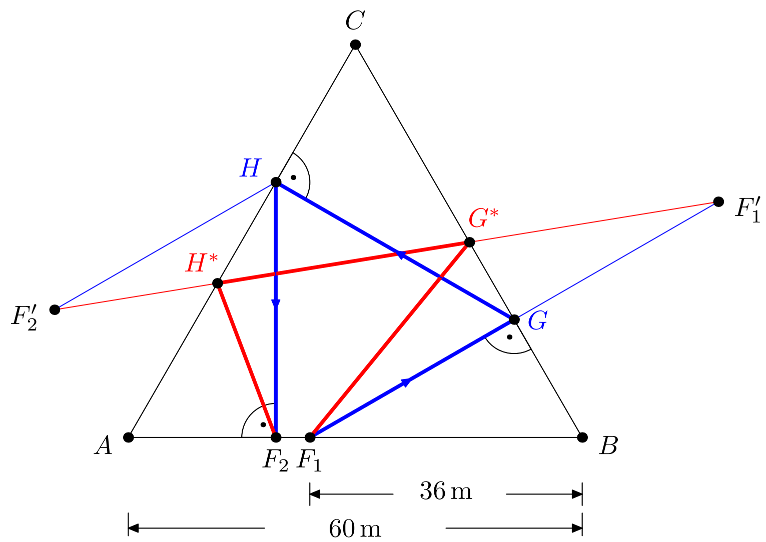


Herr Theo Lith ist als Platzwart für ein Spielfeld ABC verantwortlich, das die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 60 m hat. Der Fahnenmast F_1 ist 36 m vom Punkt B entfernt.
Wie in der Skizze dargestellt, läuft er während eines Kontrollgangs zu den seitlichen Begrenzungen dieses Spielfeldes von F_1 nach G, dann nach H und schließlich gelangt er zum Fahnenmast F_2.

(a) Zeichne die Figur mit dem Weg von Herrn Lith. Dabei sollen 10 m einem cm in deinem Heft entsprechen.

(b) Berechne den Abstand der beiden Fahnenmasten.

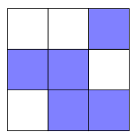
(c)



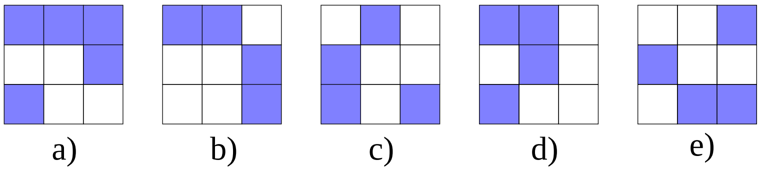
Es wurden die Punkte F_1 an $[BC]$ und F_2 an $[AC]$ gespiegelt. Dadurch entstehen die Spiegelbilder F_1' und F_2'.

- Begründe anhand der Zeichnung: Es gilt z.B. $\overline{F_1G} = \overline{GF_1'}$ und $\overline{HF_2'} = \overline{HF_2}$.
- Begründe: Der Streckenzug $F_1' - G - H - F_2'$ ist genauso lang wie der Weg von Herrn Lith, der ihn vom Mast F_1 über G und H nach F_2 führte.
- Begründe: Wäre Herr Lith auf seinem Komtrollweg vom Masten F_1 über G^* nach H^* zum Masten F_2 gegangen, dann wäre das der kürzeste Kontrollweg gewesen.

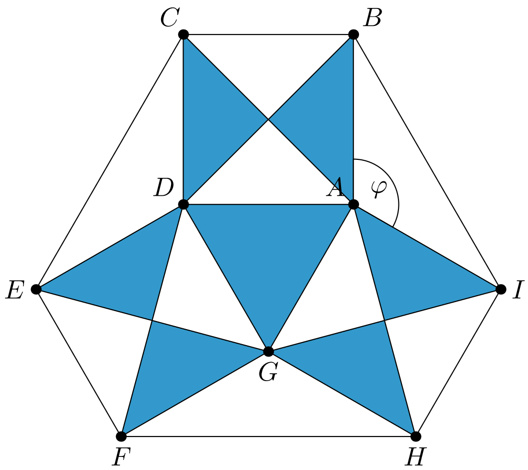
6.



Stelle dir vor, dass die quadratisch gemusterte Figur auf eine durchsichtige Folie aufgedruckt ist.
Welche der unten abgebildeten gemusterten Quadrate lassen sich mit dem obigen Quadrat so zur Deckung bringen, dass dann alles dunkel erscheint?



7.



Die Figur ist drehsymmetrisch.

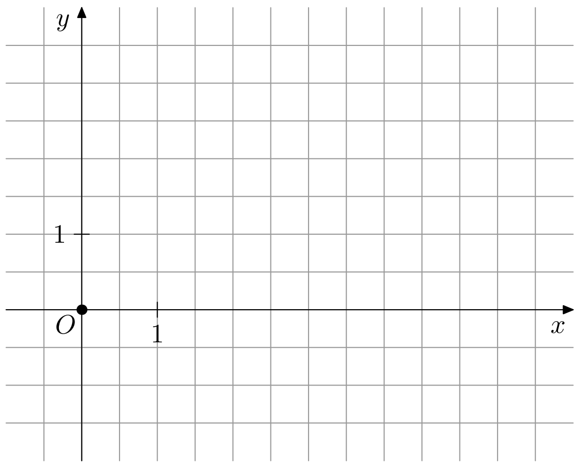
(a) Gib drei verschiedene Möglichkeiten an, wie du das Drehzentrum Z konstruieren könntest. Zeichne das Drehzentrum ein.

(b) Die Figur lässt sich um verschiedene Winkel α so drehen, dass die gedrehte Figur mit der ursprünglichen Figur wieder zur Deckung kommt.
Gib für $\alpha \in \,]\,0°; 360°\,[$ die betreffenden Drehwinkel an.

(c) Berechne φ.

13. Punktspiegelung

1.



Gegeben sind ein Kreis k mit dem Mittelpunkt $M(3 \mid 1)$ und dem Radius $r = 2.5\,\text{cm}$ sowie der Punkt $A(4,5 \mid -1) \in k$.

(a) Zeichne den Kreis k und den Punkt A in das Koordinatensystem ein.

(b) Auf der Kreislinie k wandern Punkte B_n, so dass laufend Kreissehnen $[AB_n]$ erzeugt werden.
Zeichne für $B_1(4 \mid y_1)$ mit $y_1 > 0$ und $B_2(x_2 \mid -0,5)$ mit $x_2 < 3$ die beiden Kreissehnen $[AB_1]$ und $[AB_2]$ ein.

(c) Unter allen Kreissehnen $[AB_n]$ gibt es eine längste: die Sehne $[AB_0]$. Zeichne sie ein. Berechne die Koordinaten des Punktes B_0.

2. Gegeben sind die Punkte $A(-4 \mid -2)$, $B(0 \mid -4)$, $C(-2 \mid 0)$ und $E(5 \mid 1)$, $F(1 \mid 4)$ und $G(-2 \mid 3)$.

(a) Zeichne die beiden Dreiecke ABC und EFG in ein Koordinatensystem.
Platzbedarf: $-7 \leqq x \leqq 6$ und $-5 \leqq y \leqq 5$

(b)
- Spiegle das Dreieck ABC am Mittelpunkt der Seite $[AC]$. Dadurch entsteht das Viereck $ABCB'$.
- Notiere einen Namen, der dieses Viereck möglichst genau beschreibt.
- Gib eine der charakteristischen Eigenschaften dieses Vierecks an.

(c)
- Spiegle das Dreieck EFG am Mittelpunkt der Seite $[EG]$. Dadurch entsteht das Viereck $EFGF'$.
- Notiere einen Namen, der dieses Viereck möglichst genau beschreibt.
- Gib eine der charakteristischen Eigenschaften dieses Vierecks an.

(d) Berechne die Komponenten des Pfeiles $\overrightarrow{BC}$.

(e) Berechne die Koordinaten des des Bildpunktes F'.