SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 7 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Wahlpflichtfächergruppe I

1. Die Menge der rationalen Zahlen

1. Berechne:
   (a) $(-1) \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) =$
   (b) $[(-1) : (-1)] : [(-2) : (+2)] =$
   (c) $5 - 2 \cdot [17 + (-4) \cdot 4] + [22 - 111 : (-37)] =$

Lösung: (a) 0 (b) -1 (c) 28

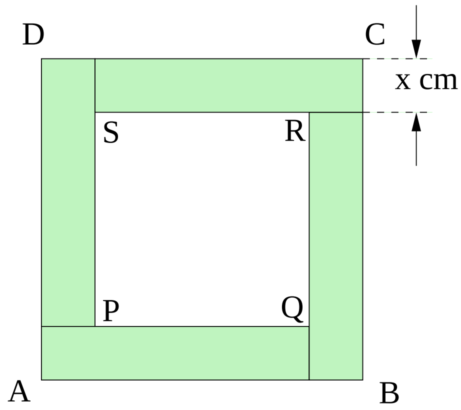
2. Ergänze im Folgenden die Leerstellen.
   $3x^2 + 18x + \ldots = 0 \quad G = \mathbb{R}, L = \{-2; \ldots\}$.

Lösung: $3x^2 + 18x + 24 = 0 \quad L = \{-2; -4\}$

3. Gegeben sind die Punkte $A(-2 \mid -1)$, $B(6 \mid 1)$, $C(3 \mid 4{,}5)$ und $D(-1 \mid 3{,}5)$
   (a) Zeichne das Viereck $ABCD$ in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $5 \leqq x \leqq 7$ und $2 \leqq y \leqq 6$
   (b) Kennzeichne alle Innenwinkel mit griechischen Buchstaben.
   (c) Schreibe die dazugehörigen Winkelmaße hin.
   (d) Begründe durch Rechnung, ob deine vier Messergebnisse im Rahmen der Messgenauigkeit stimmen.

Lösung: Es handelt sich um ein achsensymmetrisches Trapez, in dem zwei Innenwinkel das Maß 63,43° und zwei das Maß 116,57° besitzen.

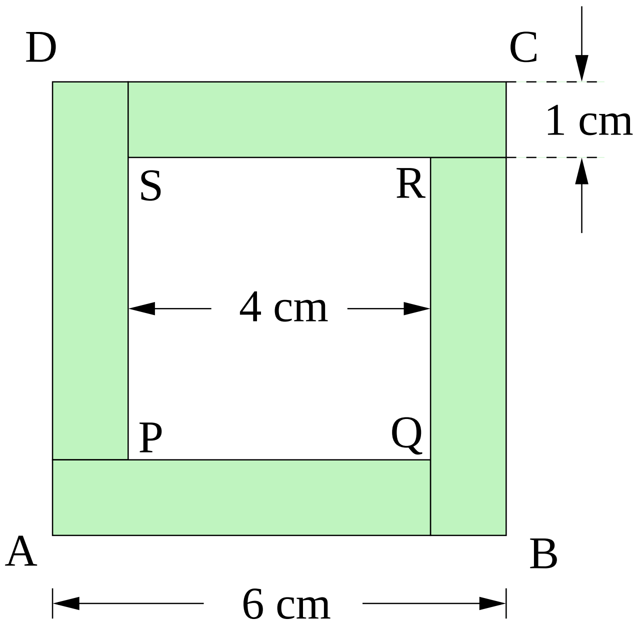
4.



Das Quadrat $ABCD$ ist aus vier kongruenten Rechtecken und dem Quadrat $PQRS$ zusammengefügt worden. Die kürzere Seite jedes Rechtecks ist x cm lang.

(a)
- Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $x = 1$.
- Berechne den Anteil der Fläche des Quadrates $PQRS$ am Quadrat $ABCD$ in Prozent.

(b)
- Wie viel Prozent der Fläche des Quadrates $ABCD$ würde eines der vier Rechtecke einnehmen, wenn das Quadrat $PQRS$ 68% der Gesamtfläche einnehmen würde?
- Berechne x so, dass das Quadrat $PQRS$ 25% der Gesamtfläche einnimmt.

Lösung: (a)
- 

- $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{16\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = 0{,}\overline{4} = 44{,}\overline{4}\%$, also die knappe Hälfte.

(b)
- Wenn das Quadrat $PQRS$ 68% der Gesamtfläche einnimmt, dann müssen die vier Rechtecke zusammen $100\% - 68\% = 32\%$ der Gesamtfläche einnehmen.
  Weil aber alle vier Rechtecke kongruent sind, beträgt der Anteil eines dieser Rechtecke 8%.
- 25% von $36\,\text{cm}^2$ sind $9\,\text{cm}^2$. Die Seitenlänge des Quadrates $PQRS$ beträgt also in diesem Fall 3 cm.
  $3 + 2 \cdot x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,5.$

5.

$$-60\,; \qquad -1\,; \qquad 0\,; \qquad +2\,; \qquad +5$$

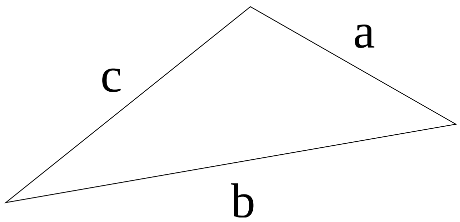
(a) Wähle aus den obigen fünf Zahlen zwei Zahlen so aus, dass deren Quotientenwert am größten wird.

(b) Wähle aus den obigen fünf Zahlen zwei Zahlen so aus, dass deren Quotientenwert am kleinsten wird.

Lösung: (a) $(-60) : (-1) = 60$

(b) $(-60) : (+2) = -30$

6.



Das skizzierte Dreieck hat einen Umfang von $21,5\,\text{cm}$.
Die Seite b ist die längste Seite. Die Seite a ist um 5 cm kürzer als die Seite b und die Seite c ist um 3 cm länger als die Seite a. Berechne die Seitenlängen des Dreiecks.

Lösung: Für die Seite a gilt: $a = b - 5\,\text{cm}$.
Für die Seite c gilt: $c = a + 3\,\text{cm} = b - 5\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = b - 2\,\text{cm}$.
Für den Umfang u gilt: $u = 21,5\,\text{cm} = a + b + c$
Also folgt: $21,5\,\text{cm} = b - 5\,\text{cm} + b + b - 2\,\text{cm}$.
$21,5\,\text{cm} + 7\,\text{cm} = 3b \quad \Leftrightarrow \quad b = 9,5\,\text{cm}$.
Dann ist die Seite a $4,5\,\text{cm}$ und die Seite c $7,5\,\text{cm}$ lang.
Probe: $4,5\,\text{cm} + 9,5\,\text{cm} + 7,5\,\text{cm} = 21,5\,\text{cm}$

7. Frau Zoprent kandidierte in Besselheim für das Bürgermeisteramt.
41200 Einwohnwer waren wahlberechtigt. Die Wahlbeteiligung betrug 70%. Frau Zoprent wurde mit 60% aller abgegebenen Stimmen zur Bürgermeisterin gewählt.

   (a) Wie viele Stimmen hat Frau Zoprent auf sich vereinigt?

   (b) Herr Zoprent meint nach der Wahl zu seiner Gattin: „Wenn die Wahlbeteiligung unter 60% gelegen hätte, wärest du nicht gewählt worden.“ Begründe, dass Herr Zoprent nicht Recht hat.

Lösung: (a) Abgegebene Stimmen: $41200 \cdot 0,7 = 28840$
Davon 60%: $28800 \cdot 0,6 = 17304$.
Für Frau Zoprent haben 17304 Wählerinnen und Wähler in Besselheim gestimmt.

(b) Fau Zoprent ist mit 60%, also mehr als der Hälfte aller abgegebenen Stimmen gewählt worden, egal, wie viele Stimmen insgesamt abgegeben worden sind. Die Wahlbeteiligung spielt rechnerisch keine Rolle.

8. In Cantorhausen wurde Herr Roprentz zum Bürgermeister gewählt. 32900 Einwohner waren wahlberechtigt. Die Wahlbeteiligung betrug 70%. Herr Roprentz hatte mehr als 50% aller Stimmen auf sich vereinigt.
Wie viele Wählerinnen und Wähler waren es mindestens, die ihre Stimme für ihn abgegeben haben?

Lösung: Abgegebene Stimmen: $32900 \cdot 0,7 = 23030$.
Davon 50% (also die Hälfte): 11515.
Also haben mindestens $11515 + 1 = 11516$ Wählerinnen und Wähler in Cantorhausen für Herrn Roprentz gestimmt.

9.

$$\{-7;\ -5;\ -3;\ 0;\ +1\}$$

   (a) Wähle aus der obigen Menge zwei Zahlen aus, so dass deren Produktwert maximal wird.

   (b) Wähle aus der obigen Menge zwei Zahlen aus, so dass deren Produktwert minimal wird.

   (c)

$$5 : \square =$$

   - Welche Zahl aus der obigen Menge muss in dem Kästchen stehen, damit der Wert des Quotienten maximal wird?
   - Welche Zahl aus der obigen Menge muss in dem Kästchen stehen, damit der Wert des Quotienten minimal wird?

(d) Wähle aus der obigen Menge zwei Zahlen aus, so dass deren Differenzwertwert maximal wird.

Lösung: (a) $(-5) \cdot (-7) = 35$

(b) $(-7) \cdot (+1) = -7$

(c)
- $$5 : \boxed{+1} = +5$$
- $$5 : \boxed{-3} = -1{,}666\ldots$$

(d)

$$+3 - (-7) = +10$$

10. Gegeben ist der Term $T(x) = -2x + 3$ mit $G = \mathbb{N}$.
Für diesen Term wurde die folgende unvollständige Tabelle erstellt:

x	$-2,5$	4	
$T(x) = -2x + 3$		-5	0

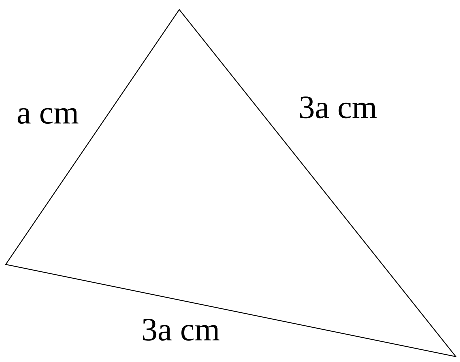
Berechne den Inhalt der leeren Zellen.

Lösung:

x	$-2,5$	4	B
$T(x) = -2x + 3$	A	-5	0

Die Zelle A: $T(-2,5) = -2 \cdot (-2,5) + 3 = 8$, also kommt 8 in Zelle A.
Die Zelle B: $0 = -2x + 3 \mid -3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 = 2x \mid : 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1,5$
Also kommt $-1,5$ in Zelle B.

11.



In der Skizze soll die Variable a nur mit natürlichen Zahlen belegt werden.

(a)
- Berechne den Umfang des Dreiecks für $a = 17$ und $a = 23$.
- Welchen gemeinsamen Teiler, der größer als 1 ist, besitzen die Maßzahlen der beiden Ergebnisse?

(b)
- Berechne den Umfang u des Dreiecks in Abhängigkeit von a.
- Begründe: Die Maßzahl des Umfangs ist - egal womit du den Platzhalter $a \in \mathbb{N}$ belegtst - stets durch 7 teilbar.

Lösung: (a)
- $a = 17$: $u = (17 + 3 \cdot 17 + 3 \cdot 17)\,\text{cm} = 119\,\text{cm}$
  $a = 23$: $u = (23 + 3 \cdot 23 + 3 \cdot 23)\,\text{cm} = 161\,\text{cm}$
- $119 = 17 \cdot 7$ und $161 = 23 \cdot 7$
  Also besitzen beide Maßzahlen den gemeinsamen Teiler 7.

(b)
- $u(a) = (a + 3a + 3a)\,\text{cm}$
- $u(a) = (a + 3a + 3a)\,\text{cm} = 7 \cdot a\,\text{cm}$
  Also gilt für alle $a \in \mathbb{N}$: $7a \in V_7$.

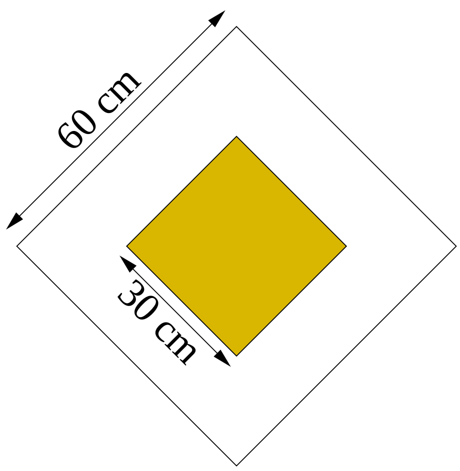
12. Untersuche, ob die beiden Gleichungen G_1 und G_2 die gleiche Lösungsmenge besitzen:
G_1: $4 - (5x^2 + 8) \cdot (-12) = 13$ G_2: $3 \cdot (8 + 5x^2) \cdot 4 = 9$

Lösung:

$$\begin{array}{rrcll} & 4 - (5x^2 + 8) \cdot (-12) & = & 13 & \\ \Leftrightarrow & 4 - (-12) \cdot (5x^2 + 8) & = & 13 & \mid -4 \\ \Leftrightarrow & 12 \cdot (5x^2 + 8) & = & 9 & \\ \Leftrightarrow & 3 \cdot (8 + 5x^2) \cdot 4 & = & 9 & \end{array}$$

Die Gleichung G_1 lässt sich also in die Gleichung G_2 umformen. Daher besitzen beide Gleichungen dieselbe Lösungsmenge.

13.



Das Vorfahrtszeichen besteht aus zwei Quadraten.

(a) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Quadrate.

(b) Welche Seitenlänge müsste das große Quadrat besitzen, damit es neunmal größer als das innere Quadrat ist?

In Anlehnung an: Mathematiktest in der Jahrgangsstufe 8 für bayerische Realschulen vom 25. Sept. 2007

Lösung: (a) Fläche des großen Quadrates: $A_g = 60\,\text{cm} \cdot 60\,\text{cm} = 3600\,\text{cm}^2$
Fläche des kleinen Quadrates: $A_k = 30\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} = 900\,\text{cm}^2$
$3600\,\text{cm}^2 : 900\,\text{cm}^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad A_k : A_g = 1 : 4$

(b) $A_g = 30\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} \cdot 9 = 8100\,\text{cm}^2$
Weil $90\,\text{cm} \cdot 90\,\text{cm} = 8100\,\text{cm}^2$ ergibt, müsste die Seitenlänge des großen Quadrates 90 cm betragen.

14. Eva und Franz vergleichen die beiden folgenden Terme in der Grundmenge $G = \mathbb{Z}$:

$$T_1(x) = 3(x+80) \quad \text{und} \quad T_2(x) = 7(x+80).$$

Eva notiert:

- In beiden Termen kommt der Faktor $(x+80)$ vor
- $3 < 7$
- Also gilt stets $T_1(x) < T_2(x)$

Franz hat Zweifel, doch Eva begründet ihre Aussagen mit Hilfe einer Wertetabelle:

x	10	20	30	-10	-20	-30
$T_1(x)$	270	300	330	210	180	150
$T_2(x)$	630	700	770	490	420	350

Sie meint: „Also gilt immer $T_1(x) < T_2(x)$.“ Franz entgenet beim Anblick der Tabelle: „Du hast nicht Recht, denn wenn wir die Tabelle fortsetzen ...“

(a) Begründe, dass Franz Recht hat.

(b) Für welche Belegungen von x ergeben sich gleiche Termwerte?

Lösung: (a) Wenn du in der von Franz vorgeschlagenen Fortsetzung der Tabelle z.B. auf $x = -90$ stößt, dann ergibt sich:
$T_1(-90) = -30$ und $T_2(-90) = -70$.
Also gilt hier $T_1(-90) > T_2(-90)$.

(b) $3(x+80) = 7(x+80) \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 240 = 7x + 560 \quad \Leftrightarrow \quad -4x = 320 \quad \Leftrightarrow \quad x = -80$

15.

$$(36 - \underline{\qquad}) \cdot \underline{\qquad}$$

$$= 36 \cdot \underline{\qquad} - \underline{\qquad} \cdot \underline{\qquad}$$

$$= -180 + \underline{\qquad}$$

$$= 20$$

Fülle die leeren Plätze passend mit ganzen Zahlen aus.

Lösung:

$$(36 - \underline{40}) \cdot \underline{(-5)}$$

$$= 36 \cdot \underline{(-5)} - \underline{40} \cdot \underline{(-5)}$$

$$= -180 + \underline{200}$$

$$= 20$$

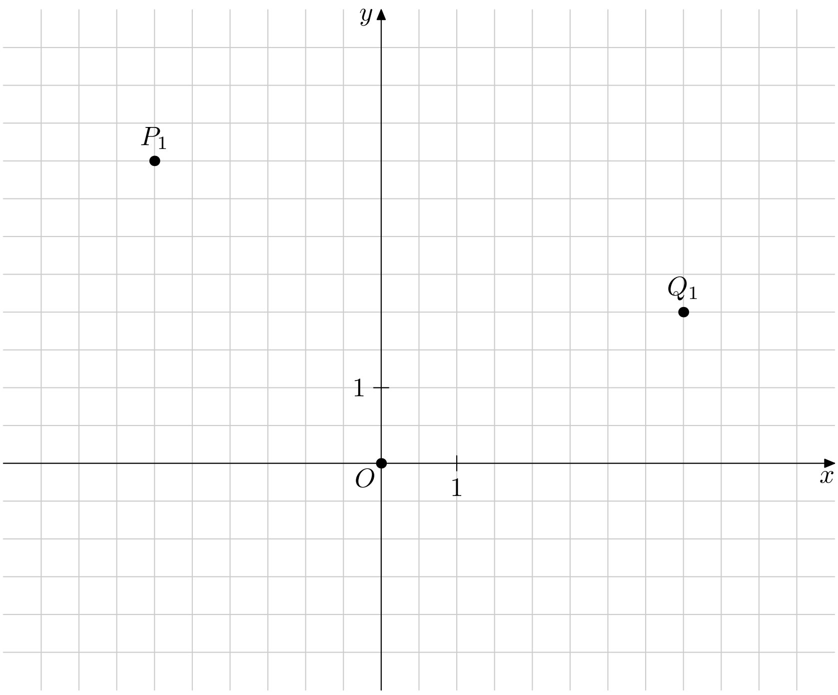
16. Fritz rechnet die folgende Aufgabe:

$$-2^4 + (-2)^4 = 16 + 16 = 32.$$

Maria erkennt, dass Fritz dabei ein Fehler unterlaufen ist. Sie weist ihn darauf hin, doch Fritz will dies nicht einsehen: „Wir haben gelernt: Wenn der Exponent eine gerade Zahl ist, dann ist der Wert der betreffenden Potenz immer positiv. Also kommt 32 heraus.“ Maria entgegnet: „Das stimmt nur manchmal.“
Notiere die restlichen Sätze von Marias Antwort, so dass Fritz seinen Fehler erkennt und vollkommen einsieht.

Lösung: „Um -2^4 steht keine Klammer. Also darfst du das Minuszeichen nur einmal berücksichtigen; d.h. $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$.“

17.



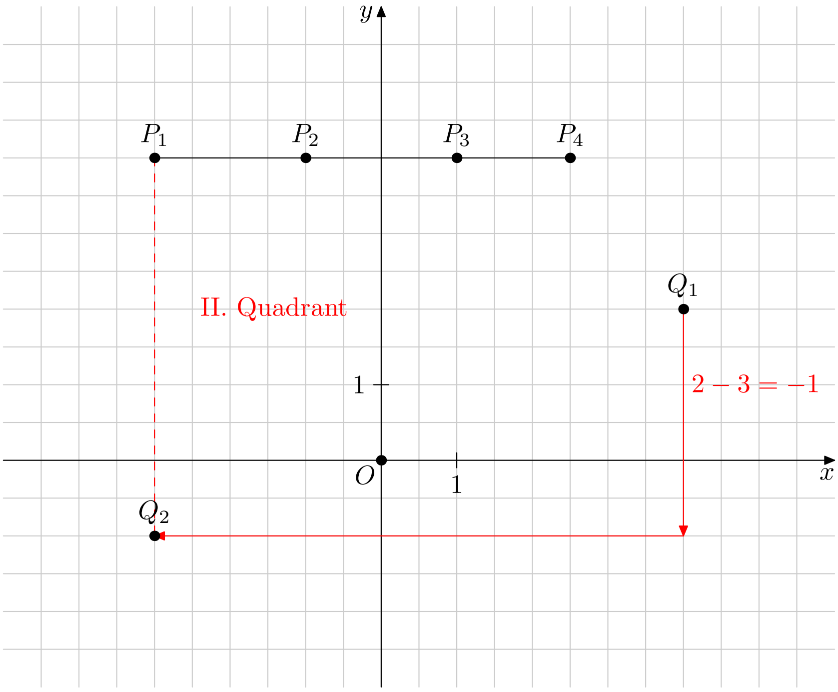
(a) Gib die Koordinaten der Punkte P_1 und Q_1 an.

(b)
- Zeichne drei weitere Punkte P_2, P_3 und P_4 ein, die alle den gleichen y-Wert wie der Punkt P_1 besitzen.
- Verbinde die vier Punkte $P_1 - P_2 - P_3 - P_4$ mit deinem Geodreieck, so dass eine Strecke entsteht.
  Beschreibe die Lage dieser Strecke zu einer der beiden Koordinatenachsen.

(c) Zeichne einen Punkt Q_2 ein, dessen y-Wert um 3 kleiner ist als der y-Wert des Punktes Q_1 und der gleichzeitig den gleichen x-Wert besitzt wie der Punkt P_1.

(d) Erich überlegt, ob es im II. Quadranten einen Punkt gibt, der den x-Wert $4,3$ besitzt. Was meinst du? Begründe.

Lösung:



(a) $P_1(-3 \mid 4)$ und $Q_1(4 \mid 2)$.

(b) • Beispiel: Siehe Zeichnung oben.

• Siehe Zeichnung oben.
Z.B.: „Diese Strecke liegt parallel zur x-Achse“.

(c) Siehe Zeichnung oben.

(d) Das kann nicht sein, denn im II. Quadranten gibt es nur negative x-Werte.

18. Konstanze rechnet die folgende Aufgabe:

$$-(-3)^4-(-3)^2-(-3)^1=93.$$

Konstanzes Lehrer stellt fest: „$-(-3)^4$ ergibt aber -81.“ Konstanze widerspricht: „Sie haben uns doch beigebracht, dass Minus Minus Plus ergibt!“. Der Lehrer entgegnet: „Du kannst diese Regel hier nicht so ohne weiteres anwenden, weil ...“

(a) Notiere die restlichen Sätze des Lehrers, so dass Konstanze ihren Fehler erkennt und vollkommen einsieht.

(b) Berechne das richtige Ergebnis.

Lösung: (a) „$\cdots$ weil $-(-3)^4=-(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)$. Also musst du das Minuszeichen 5-mal berücksichtigen. 5 Minuszeichen lassen sich dann zu einem Minuszeichen zusammenfassen.“

(b) $-(-3)^4-(-3)^2-(-3)^1=-81-9+3=-87$.

19.

$$\square \cdot \bigcirc - \triangle = -12$$

(a) Setze in jeden Platzhalter eine der Zahlen $\{-4;\ 0;\ 2;\ 4;\ 10\}$ so ein, dass die Rechnung stimmt.

(b) Franz will mit den Zahlen aus der oben angegebenen Menge und der gleichen Platzhalterkombination das Ergebnis -3 erzeilen. Geht das? Begründe.

Lösung: (a)

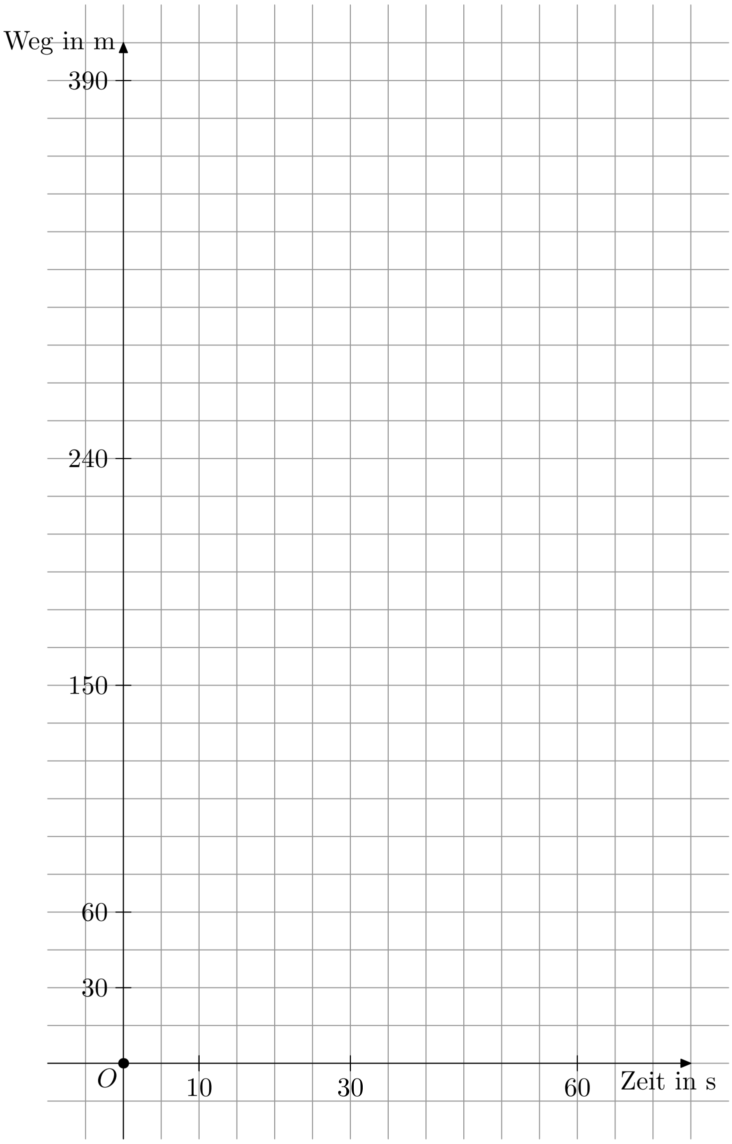
$$\boxed{-4} \cdot 2 - 4 = -12$$

(b) Das geht nicht, weil in der oben angegebenen Zahlenmenge mit der Null nur gerade Zahlen stehen. Die Subtraktion und die Multiplikation können aber aus geraden Zahlen keine ungeraden machen.

20. Fritz und Franz fahren mit ihren Fahrrädern um die Wette. Der zurückgelegte Weg von jedem ist im Zehn-Sekunden-Abstand in der folgenden Tabelle festgehalten:

Zeit in s	0	10	20	30	40	50
Strecke von Fritz in m	0	60	120	180	240	300
Strecke von Franz in m	0	15	60	135	240	375

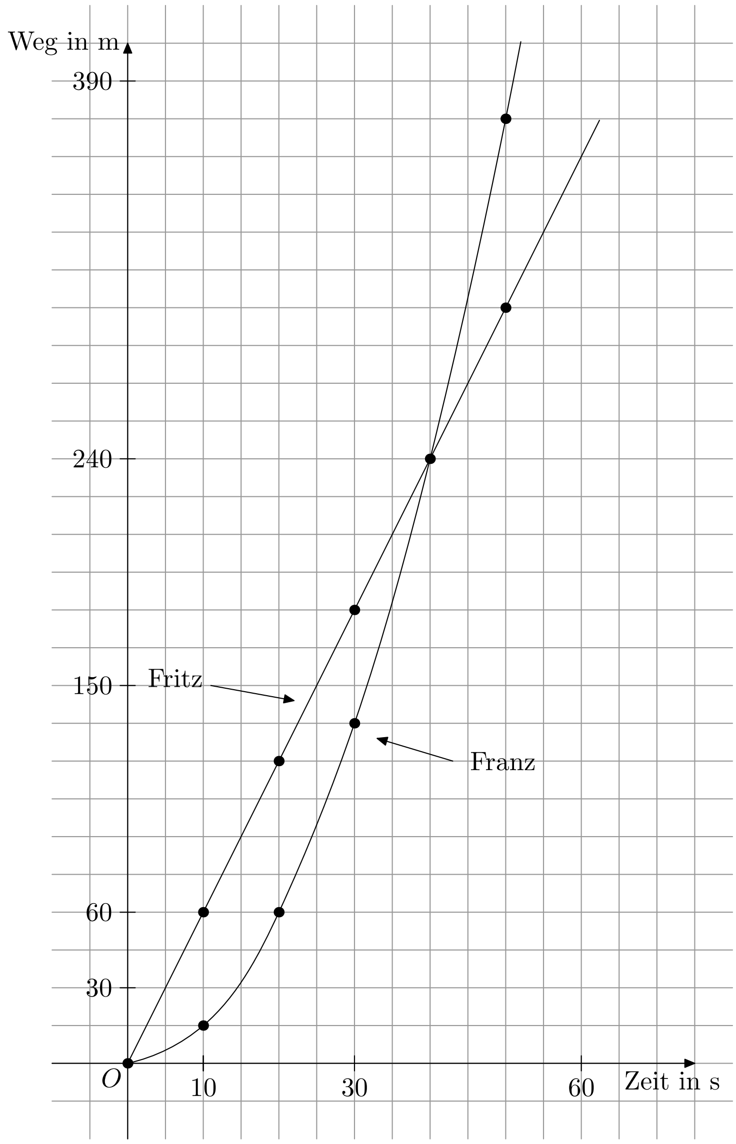
(a) Zeichne das Diagramm von Fritz und das Diagramm von Franz in das vorbereitete Koordinatensystem:



(b) Wessen Diagramm lässt auf eine direkte Proportionalität schließen? Begründe.

(c) Wer gewinnt das Rennen? Begründe.

Lösung: (a)



(b) Es ist das Diagramm von Fritz, denn es stellt eine Ursprungs-Halbgerade dar.

(c) Franz gewinnt das Rennen, denn nach 40 s überholt er Fritz. Dann baut er seinen Vorsprung immer weiter aus.

21. Edwin rechnet die folgende Aufgabe:

$$-2^4 + (-2)^4 = 16 + 16 = 32.$$

Martha erkennt, dass Edwin dabei ein Fehler unterlaufen ist. Sie weist ihn darauf hin, doch Edwin will das nicht einsehen: „Wir haben gelernt: Wenn der Exponent eine gerade Zahl ist, dann ist der Wert der betreffenden Potenz immer positiv. Also kommt 32 heraus.“

Martha entgegnet: „Das stimmt nicht immer, denn ... “
Wie hat Martha ihre Antwort begründet? Setze Marthas angefangene Begründung fort, sodass Edwin seinen Fehler erkennt und vollkommen einsieht. Berichtige Edwins Lösung.

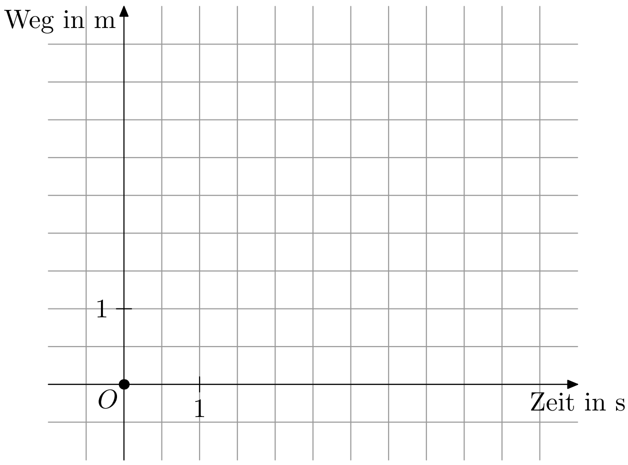
Lösung: „... es kommt darauf an, ob das Minuszeichen eingeklammert ist oder nicht.
Bei -2^4 ist es nicht eingeklammert, somit wird es nur einmal berücksichtigt.
Bei $(-2)^4$ dagegen wird -2 viermal mit sich selbst multipliziert, also auch mit dem Minuszeichen.
Somit gilt: $-2^4 + (-2)^4 = -16 + 16 = 0$“.

22. Während einer Bewegung wurden die Zeit t und der Weg s in einer Tabelle festgehalten:

Zeit t in s	2	3	5
Wegstrecke s in m	2	2,5	3,5

(a) Untersuche rechnerisch, ob die Zeit t und der Weg s zueinander direkt proportional sind. Begründe deine Antwort.

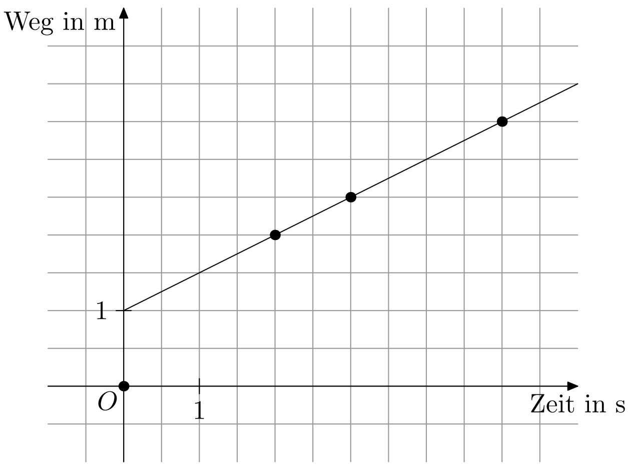
(b)



- Trage die drei Zahlenpaare der Tabelle als Punkte in das Koordinatensystem ein.
- Begründe nun anhand des Diagramms, dass deine Antwort in der Aufgabe (a) richtig war.

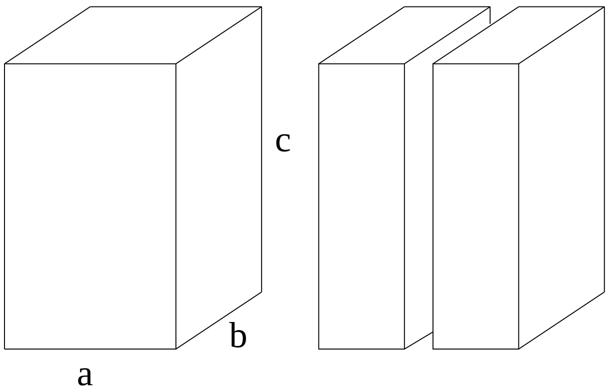
Lösung: (a) Es gilt $2 : 2 = 1$ und $3 : 2,5 = 1,2$. Also sind schon diese beiden Zahlenpaare nicht quotientgleich.
Deshalb sind für diese Bewegung die Zeit t und der Weg s nicht direkt proportional zueinander.

(b) •



- Das Diagramm ergibt zwar eine Gerade, aber keine Ursprungsgerade. Damit ist bestätigt, dass für diese Bewegung die Zeit t und der Weg s nicht direkt proportional zueinander sind.

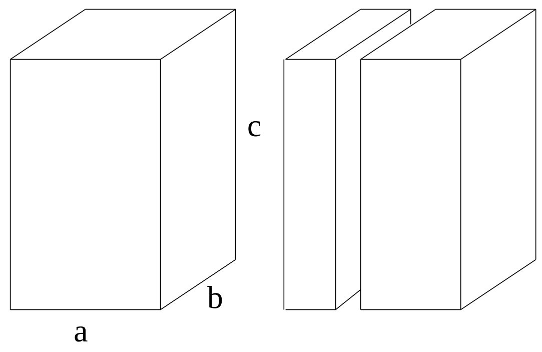
23.



Ein quaderförmiger Holzklotz mit $a = 2\,\text{dm}$, $b = 2,5\,\text{dm}$ und $c = 3\,\text{dm}$ wird mit einer Axt so halbiert, wie es die obige Darstellung zeigt.

(a) Um wie viel Prozent hat sich jetzt die Oberfläche der beiden Hälften im Vergleich zu der des massiven Holzklotzes vergrößert? Gib den Prozentsatz auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet an.

(b)



Hätte sich am Rechenergebnis der Aufgabe (a) etwas geändert, wenn die Axt nicht die Mitte getroffen hätte? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a)

$$\begin{aligned} O_{ganz} &= 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2 \cdot (5\,\mathrm{dm}^2 + 6\,\mathrm{dm}^2 + 7,5\,\mathrm{dm}^2) \\ O_{ganz} &= 37\,\mathrm{dm}^2 \\ 2 \cdot O_{Hälfte} &= 2 \cdot 2 \cdot (2,5\,\mathrm{dm}^2 + 3\,\mathrm{dm}^2 + 7,5\,\mathrm{dm}^2) \\ O_{Teile} &= 52\,\mathrm{dm}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{52\,\mathrm{dm}^2 - 37\,\mathrm{dm}^2}{37\,\mathrm{dm}^2} = \frac{15}{37} = 0,40540\ldots \approx 40,54\%$$

(b) Die Oberfläche der beiden Teile wäre auch hier nur um den doppelten Betrag einer rechteckigen Seitenfläche mit den Längen b und c angewachsen. Das ändert am Ergebnis nichts.

24. Früher hatte eine Schachtel Lebkuchen der Firma „Timz“ 1500 g Inhalt.
Für das kommende Weihnachtsgeschäft kommen nur noch 1200 g in eine Schachtel, die aber das Gleiche kostet wie früher die mit 1500 g Inhalt.
Um wie viel Prozent hat die Firma „Timz“ ihre Lebkuchen verteuert?

Lösung: **1. Möglichkeit:** Rechne mit einem Zahlenbeispiel.

Früher:	1500 g kosteten z.B. 12 EURO .	$\Rightarrow$	100 g kosteten dann 80 Cent .
Jetzt :	1200 g kosten auch 12 EURO .	$\Rightarrow$	100 g kosten dann 1 EURO .

100 g Lebkuchen sind also um 20 Cent teurer geworden.

$$\frac{20\,\mathrm{Cent}}{80\,\mathrm{Cent}} = 0,25 = 25\%$$

Die Lebkuchen sind also um 25% teurer geworden.

2. Möglichkeit: Die Lebkuchen kosten x EURO.

Früher: 1500 g kosteten x EURO. $\Rightarrow$ 100 g kosteten dann $\dfrac{x}{15}$ EURO.

Jetzt : 1200 g kosten auch x EURO. $\Rightarrow$ 100 g kosten dann $\dfrac{x}{12}$ EURO.

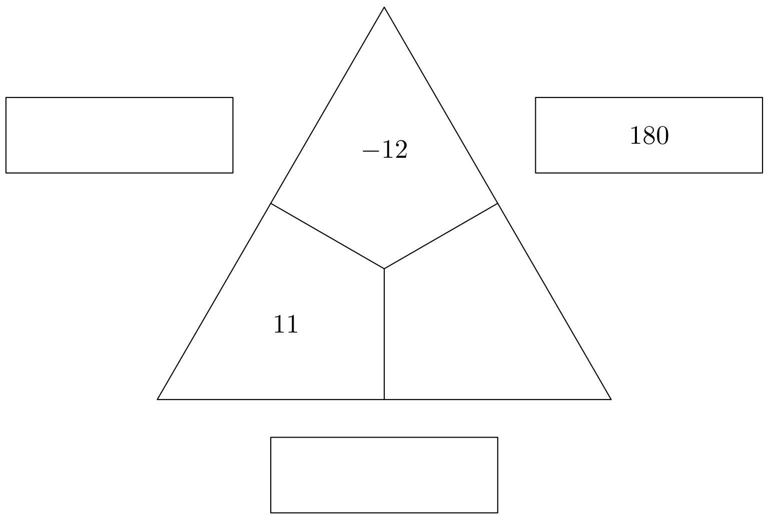
100 g Lebkuchen sind also um $\dfrac{x}{12}$ EURO $-$ $\dfrac{x}{15}$ EURO teurer geworden.

$$\left(\frac{x}{12} - \frac{x}{15}\right) \text{ EURO} = \frac{x}{60} \text{ EURO}$$

$$\frac{x}{60} \text{ EURO} : \frac{x}{15} \text{ EURO} = \frac{15}{60} = 0,25 = 25\%$$

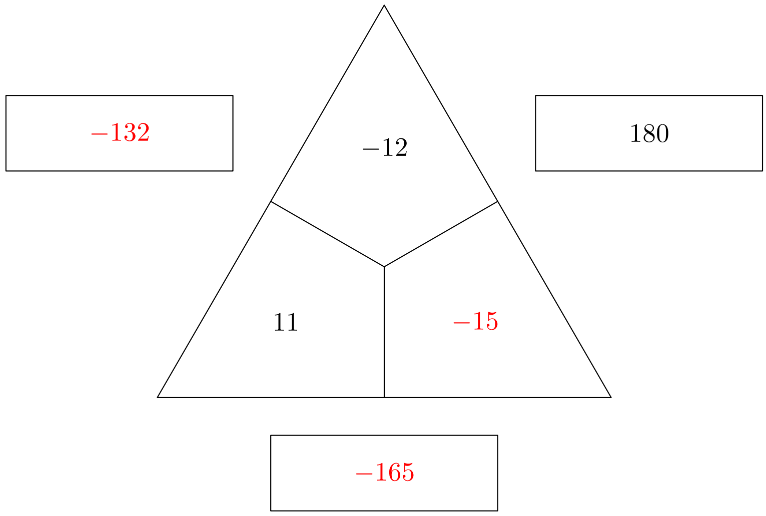
Das Ergebnis ist das gleiche wie oben.

25.



In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke der Wert des Produktes aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Zahlen.

Lösung:



26. Gegeben ist die Gleichung $x \cdot y \cdot x = 284$, wobei x und y ganze Zahlen sein sollen. Ermittle alle Lösungen für x und y.

Lösung: $x \cdot y \cdot x = x^2 \cdot y = 284$.
Die Zahl 284 muss also einen quadratischen Teiler besitzen. Nun ist $284 = 1 \cdot 4 \cdot 71$.
1. Fall:
$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \vee x = -1 \quad$ zusammen mit $b = 284$.
2. Fall:
$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \vee x = -2 \quad$ zusammen mit $b = 71$.
Weil $71 \in \mathbb{P}$ gilt, gibt es nur die Lösungen
$\{(-1 \mid 284); (1 \mid 284); (-2 \mid 71); (2 \mid 71)\}$.

27. Die Käsesorte „Bergglück“ besteht zu 40% aus Wasser. Die Trockenmasse besteht zu 40% aus Fett.
Wie viel Prozent Fett sind in der Käsesorte „Bergglück“ enthalten?

Lösung: Angenommen, der Käse wird in 100 g-Stücken angeboten.
Dann sind davon 40 g Wasser.
Die Trockenmasse beträgt 60 g. 40% davon sind Fett, das sind 24 g.
Also sind 24 g Fett in 100 g Käse enthalten. Der Fettgehalt dieser Käsesorte beträgt somit 24%.
Dieser Prozentsatz ist für jede Käsemenge dieser Sorte die gleiche.

28. Es gilt: $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125$.
Die Zahl 1000 lässt sich also in zwei Faktoren zerlegen, wobei keiner der beiden durch 10 teilbar ist; d.h. keiner der beiden endet auf 0.
Zerlege 21 000 so in zwei Faktoren, dass keiner der beiden auf 0 endet. Gib alle Möglichkeiten an.

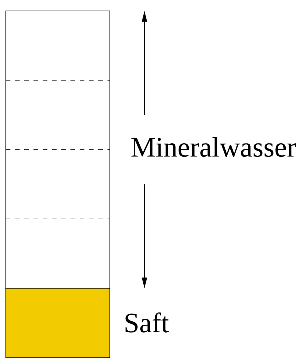
Lösung:

$$\begin{array}{rcllcl}
21\,000 & = & 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3 & & & \\
21\,000 & = & (21 \cdot 8) \cdot 125 & = & 168 \cdot 125 \\
 & = & (21 \cdot 125) \cdot 8 & = & 2625 \cdot 8 \\
 & = & (3 \cdot 8) \cdot (7 \cdot 125) & = & 24 \cdot 875 \\
 & = & (7 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 125) & = & 56 \cdot 375
\end{array}$$

29. In einem Glas befinden sich 25 ml Fruchtsaft. Es werden 100 ml Mineralwasser dazugegeben. Dann wird umgerührt.
    (a) Berechne, wie viel Prozent Saft sich jetzt im Glas befindet.
    (b) Erkläre dein Rechenergebnis anhand einer Skizze.

Lösung: (a) Gesamtmenge G im Glas: $25\,\text{ml} + 100\,\text{ml} = 125\,\text{ml}$.
Der Prozentwert P an Saft beträgt: $P = 25\,\text{ml}$.
Der Prozentsatz p beträgt dann $p = \dfrac{25\,\text{ml}}{125\,\text{ml}} = 0,2 = 20\%$

(b)



Der Saft nimmt offenbar $\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$ der Flüssigkeitsmenge ein, die sich nach dem Auffüllen im Glas befindet.

30. Ein Discounter verkauft Fruchtnektar in Tetrapacks. Auf der Packung steht:

„1 l Ananas-Maracuya - Fruchtgehalt mindestens 60%“

Egon öffnet eine Packung und schenkt sich 300 ml in ein Glas ein.
    (a) Wie viele ml reiner Fruchtsaft befinden sich noch im Tetrapack?
    (b) Wie viele ml reiner Fruchtsaft befindet sich im Glas?

Lösung: (a) Im Tetrapack befinden sich $1\,\text{l} = 1000\,\text{ml}$ Nektar.
Egon entnimmt 300 ml. Dann befindet sich im Rest, nämlich in
$1000\,\text{ml} - 300\,\text{ml} = 700\,\text{ml}$, auch wieder 60% reiner Fruchtsaft.
60% von $700\,\text{ml} = 0.6 \cdot 700\,\text{ml} = 420\,\text{ml}$.

(b) Eine Möglichkeit:
In der ungeöffenten Tetra-Packung befanden sich
60% von $1000\,\mathrm{ml} = 0.6 \cdot 1000\,\mathrm{ml} = 600\,\mathrm{ml}$ Fruchtsaft.
Nach dem Ausgießen befinden sich jetzt $600\,\mathrm{ml} - 420\,\mathrm{ml} = 180\,\mathrm{ml}$ reiner Fruchtsaft in Egons Glas.

2. Gleichungen und Ungleichungen

1. Hans soll die folgende Ungleichung lösen:
   $$3 \cdot (x-3) + 17 \leqq -13 \text{ auf } G{=}\mathbb{N}\,.$$
   Die Einzelschritte seiner Rechnung sehen so aus:

   $$\begin{array}{lll} \text{1. Schritt:} & 3x - 3 & \leqq \ -30 \\ \text{2. Schritt:} & 3x & \leqq \ -27 \\ \text{3. Schritt:} & x & \geqq \ \ -9 \\ \text{4. Schritt:} & L = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\} & \end{array}$$

   In manchen dieser Schritte hat Hans Fehler gemacht. Schreibe auf, in welchem Schritt ein Fehler passiert ist und worin jeweils der Fehler besteht.
   Berechne die richtige Lösungsmenge.

Lösung: Schritt 1: Distributivgesetz nicht beachtet
Schritt 2: richtig
Schritt 3: Inversionsgesetz falsch angewendet
Schritt 4: $0 \notin \mathbb{N}$
Die richtige Lösungsmenge ist leer.

2. Gegeben ist die Lösungsmenge $L = \{-4;\ -3;\ -2;\ \cdots\}$.
   Finde zu dieser Lösungsmenge drei passende Ungleichungen. Vergiss nicht, jeweils die Grundmenge anzugeben.

Lösung: Z.B. für $G = \mathbb{Z}$: $x \geqq -4$ oder $-4 \leqq x$ oder $12 - 4x \leqq 28$

3. In einem Freigehege sind ebenso viele Fasanen wie Kaninchen. Zusammen haben sie 204 Füße.

Lösung: 34 Fasane und 34 Kaninchen

4. Der Umfang eines Fünfecks beträgt $32{,}8\,\text{cm}$. Die erste Seite ist $4\,\text{cm}$ lang, die zweite ist $1{,}8\,\text{cm}$ länger als die erste. Die Summe der Längen dieser beiden Seiten ist gleich der Länge der dritten Seite. Die letzte und vorletzte Seite sind gleich lang.

Lösung: Die letzte und vorletzte Seite sind jeweils $6{,}6\,\text{cm}$ lang.

5. Aus einem rechteckigen Blatt Papier (16 cm x 12 cm) soll das Würfelnetz eines möglichst großen Würfels ausgeschnitten werden. Berechne die Abfallfläche.

Lösung: $96\,\text{cm}^2$

6. Die Zahl $356,25$ ergibt sich als Differenz aus dem Dreifachen einer rationalen Zahl und 582.

Lösung: $312,75$

7. Die Seiten eines Vierecks werden wie folgt gebildet: Die vierte Seite ist 1 cm länger als die dritte. Die dritte Seite ist 1 cm länger als die zweite. Die zwete Seite ist 1 cm länger als die erste. Der Umfang des Vierecks beträgt 24 cm.

Lösung: Die Seiten sind $4,5\,\text{cm}$, $5,5\,\text{cm}$, $6,5\,\text{cm}$ und $7,5\,\text{cm}$ lang.

8. Eine $2,1\,\text{m}$ lange Holzlatte wird wie folgt zersägt. Das erste Teilstück ist doppelt so lang wie das zweite. Das dritte Teilstück ist halb so lang wie das zweite.

Lösung: Die Stücke sind $1,2\,\text{m}$, $0,6\,\text{m}$ und $0,3\,\text{m}$ lang.

9. Gegeben ist die Gleichung $ax = 36$ auf $G = \mathbb{Q}$ und $a \in \mathbb{Q}$.
   (a) Berechne jeweils die Lösung für $a = -4$ und $a = 0,\overline{3}$.
   (b) Für welche Belegung von a gibt es keine Lösung? Begründe.
   (c) Die Variablen a und x können so mit gleichen Zahlen belegt werden, dass eine wahre Aussage entsteht. Gib sämtliche Möglichkeiten an.

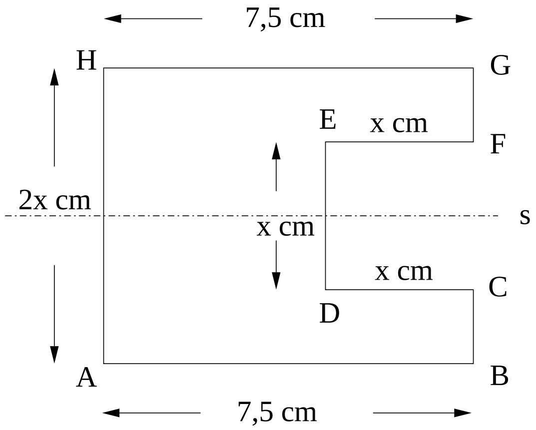
Lösung: (a) $a = -4$ ergibt $-4x = 36 \;|: (-4) \quad \Leftrightarrow \quad x = -9$

$$a = 0,\overline{3} = \frac{1}{3} \text{ ergibt } \frac{1}{3}x = 36 \mid \cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 108$$

(b) Für $a = 0$ gibt es keine Lösung, denn $0 \cdot x = 0$ und nicht $= 36$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.

(c) $x = a = 6: \quad 6 \cdot 6 = 36$ und $x = a = -6: \quad (-6) \cdot (-6) = 36$

10.



Die dargestellte Figur $ABCDEFGH$ besitzt die Symmetrieachse s. Es gilt $x \in \mathbb{Q}^+$.

(a) Zeichne die Figur für $x = 3$.

(b) Berechne den Umfang der Figur für $x = 3$.

(c) Zeige: Für den Umfang u der Figur gilt in Abhängigkeit von x:

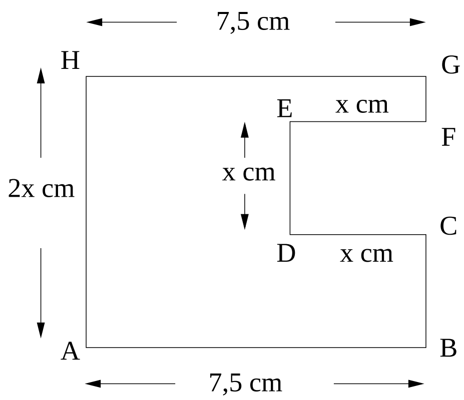
$$u(x) = (6x + 15)\,\text{cm}$$

.

(d) Berechne x so, dass der Umfang der Figur $28,5\,\text{cm}$ lang wird.

(e) Gibt es eine Belegung von x, die einen $14,3\,\text{cm}$ langen Umfang erzeugt? Begründe.

(f)



(g) Hier ist die Figur im Gegensatz zur urspründlichen nicht mehr symmetrisch. Gilt auch hier $u(x) = (6x + 15)\,\text{cm}$? Begründe.

Lösung: (a) Klar.

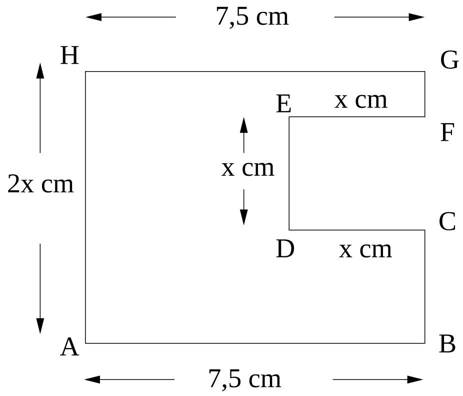
(b) Es gilt $u = 2 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 7,5\,\text{cm} + 3 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 1,5\,\text{cm} = 33\,\text{cm}$.

(c) $u(x) = 2x\,\text{cm} + 15\,\text{cm} + 3x\,\text{cm} + \overline{BC} + \overline{FG}$
Nun gilt $\overline{GF} = \overline{CB} = (2x\,\text{cm} - x\,\text{cm}) : 2 = 0,5x\,\text{cm}$.
Also: $u(x) = 2x\,\text{cm} + 15\,\text{cm} + 3x\,\text{cm} + 2 \cdot 0,5x\,\text{cm} = (6x + 15)\,\text{cm}$.

(d) $6x + 15 = 28,5 \Leftrightarrow x = 4,5$

(e) Weil für die Belegungen von x nur positive Zahlen in Betracht kommen, ist der Term $6x+15$ größer als 15. Also gibt es keine dieser Figuren mit einem Umfang von $14,3\,\text{cm}$.

(f)



Hier gilt wie schon in der ursprünglichen Figur:
$\overline{AH} = \overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FG} \Leftrightarrow 2x\,\text{cm} = \overline{BC} + x\,\text{cm} + \overline{FG}$
$\Leftrightarrow x\,\text{cm} = \overline{BC} + \overline{FG}$
Also gilt unverändert $u(x) = (6x + 15)\,\text{cm}$, auch wenn die Symmetrie zerstört worden ist.

11. Gib zehn Belegungen für $x \in \mathbb{Q}$ an, so dass $\dfrac{x}{4} < 2$ gilt.

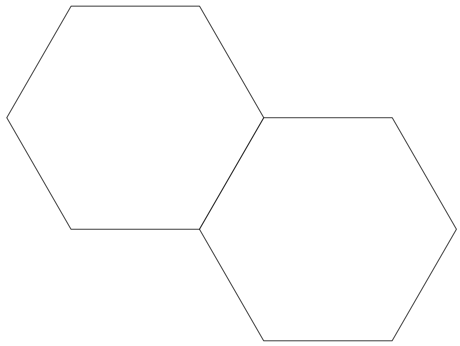
Lösung: Es gilt z.B. $\dfrac{7}{4} = 1,75 < 2\,.$

Dann ist aber auch $\dfrac{6}{4} = 1,5 < 2\,, \quad \dfrac{5}{4} = 1,25 < 2\,, \quad \ldots \quad , \quad \dfrac{1}{4} < 2\,.$

Wenn dann $x < 1$ ist, stimmt die Ungleichung immer.
Also gilt insgesamt z.B. $x \in \{6;\ 5;\ 4;\ 3;\ 2;\ 1;\ 0,98;\ 0,97;\ 0,96;\ 0,95\,\}$
oder $x \in \{0,25;\ 0,15;\ 0,05;\ 0,03;\ 0,02;\ 0,01;\ 0,098;\ 0,097;\ 0,096;\ 0,095\,\}$
oder $x \in \{-17;\ -20;\ -30;\ -300;\ -5678;\ -10^6;\ -10^8;\ -10^7;\ -3,146;\ 0\,\}$.

3. Parallelverschiebung

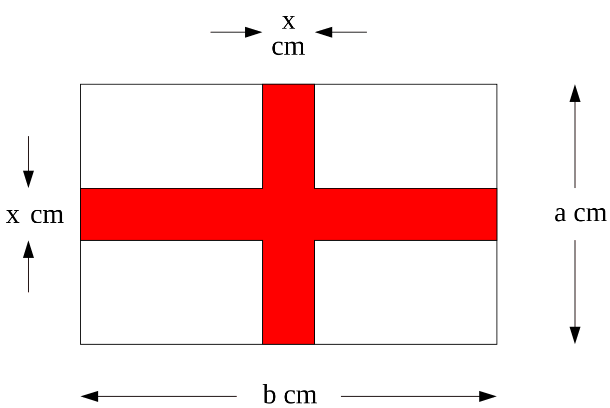
1. Zeichne die rechts skizzierte Figur aus zwei regelmäßigen Sechsecken mit der Seitenlänge $a = 4\,\text{cm}$.



Füge weitere regelmäßige Sechsecke von der gleichen Größe an.

Lösung: - -

2. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



(a) Zeichne die Figur für $b = 8$, $a = 5$ und $x = 1$.

(b) Das weiße Rechteck oben links lässt sich auf das weiße Rechteck rechts unten verschieben.

- Zeichne die vier Stellvertreter des Verschiebungsvektors $\overrightarrow{v}$ zwischen den entsprechenden Eckpunkten der beiden Rechtecke ein.

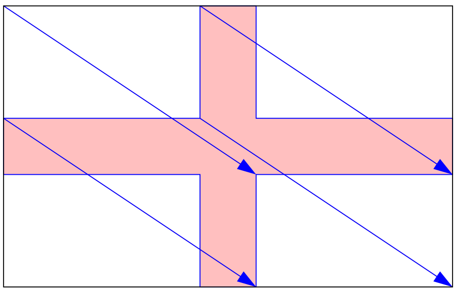
- Gib die Komponenten des Verschiebungsvektors $\vec{v}$ an.

(c) Das weiße Rechteck rechts oben lässt sich so drehen, dass es mit dem Rechteck links unten zur Deckung kommt.

- Zeichne das Drehzentrum ein und gib den Drehwinkel an.
- Um welche besondere Drehung handelt es sich?

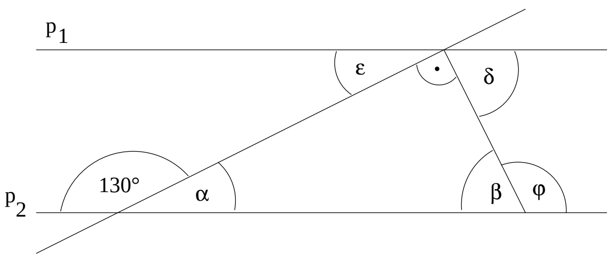
Lösung:

(a) –

(b)
- 
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ -3 \end{pmatrix}$

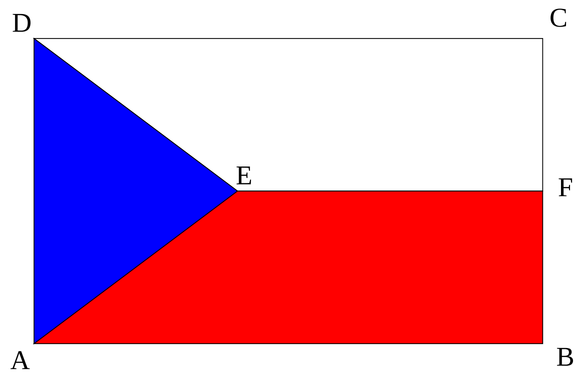
(c)
- Das Drehzentrum liegt im Schnittpunkt der Diagonalen des großen Rechtecks. Dieser Schnittpunkt deckt sich mit dem Symmetriezentrum des Kreuzes. Der Drehwinkel beträgt 180°.
- Es handelt sich um eine Punktspiegelung.

3. Bestimme die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Die nicht maßstabsgetreue Zeichnung brauchst du nicht auf dein Blatt zu übertragen. Die Geraden p_1 und p_2 sind parallel.
Begründe jeweils durch eine kurze Rechnung oder ein passendes Stichwort.



Lösung: $\alpha = 50°$ $\quad \beta = 40°$ $\quad \varphi = 140°$ $\quad \varepsilon = 50°$ $\quad \delta = 40°$

4. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AD} = \overline{EF} = 4\,\text{cm}$ und $\sphericalangle DEA = 52{,}8°$.

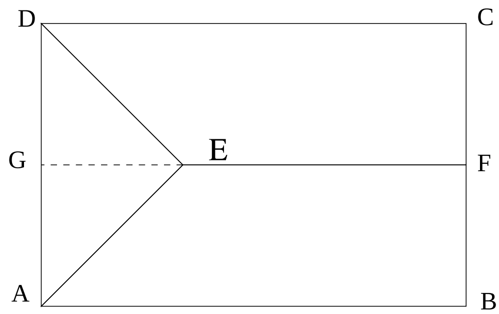
(a) Berechne auf verschiedenen Weise das Maß des Winkels BAE auf eine Stelle nach dem Komma.

[Ergebnis: $\sphericalangle BAE = 26{,}4°$]

(b) Zeichne die Figur auch mit dem Ergebnis der Aufgabe (a).

(c) Welche besondere Eigenschaft hätte das Dreieck DAE, wenn $\sphericalangle AED = 300°$ wäre?

Lösung: (a)



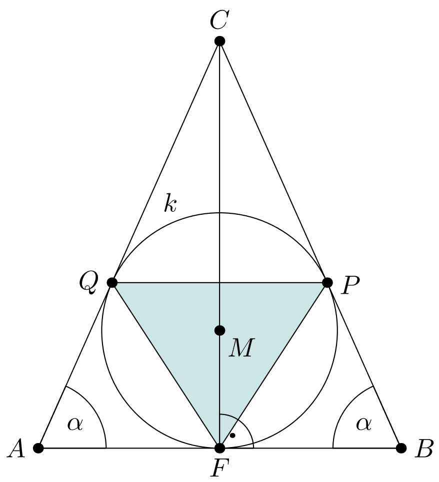
1. Möglichkeit:
Die Strecke GE liegt auf der Halbierenden des Winkels DEA. $\Rightarrow$ $\sphericalangle GEA = \sphericalangle BAE$ (Wechselwinkel) $= 52{,}8° : 2 = 26{,}4°$.
2. Möglichkeit: Das Dreieck AED ist gleichschenklig mit der Basis $[AD]$.
$\Rightarrow$ $\sphericalangle EAD = (180° - 52{,}8°) : 2 = 63{,}6°$ und $\sphericalangle BAE = 90° - 63{,}6° = 26{,}4°$.

(b) –

(c) Es würde gelten: $\sphericalangle DEA = 60°$. Weil aber das Dreieck AED schon gleichschenklig ist, muss jetzt es sogar gleichseitig sein.

4. Winkel

1.



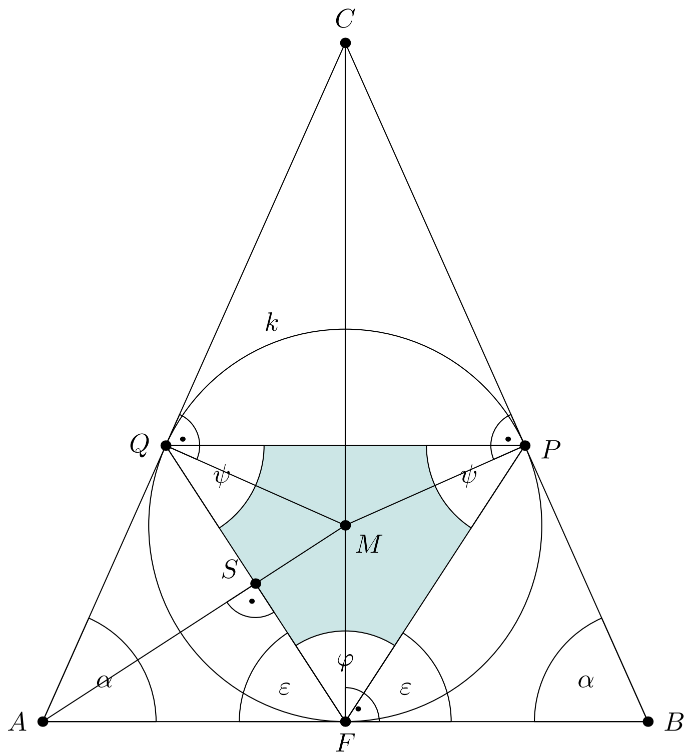
Die Kreislinie k mit dem Mittelpunkt M berührt die Seiten des Dreiecks ABC in den Punkten F, P und Q.

(a) Zeichne die Figur mit $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\alpha = 66°$. Zeichne die zwei Kreisradien ein, die zu den Punkten P und Q führen.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks FPQ.

[Teilergbnis: $\sphericalangle PFQ = 66°$]

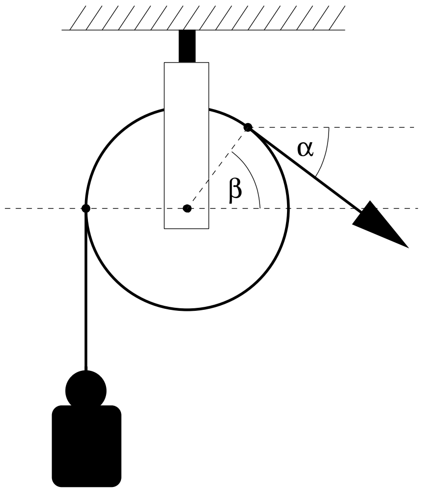
Lösung: (a)



Die Kreislinie k ist der Inkreis dieses Dreiecks ABC. Im Mittelpunkt M schneiden sich die drei Winkelhalbierenden. Die Winkelhalbierende $[CF]$ ist bereits vorhanden. Für die Konstruktion von M genügt es z.B., die Halbierende des Winkels BAC noch einzuzeichnen.

(b) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, denn die beiden Basiswinkel haben das Maß α.
Aus Symmetriegründen taucht daher das Winkelmaß ε zweimal auf.
Jeder der drei Berührradien $\overline{MF}$, $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ steht auf seiner betreffenden Dreiecksseite senkecht.
Das Viereck $AFMQ$ ist ein achsensymmetrischer Drachen mit der Symmetrieachse $[AM]$, die den Winkel α halbiert.
Weiter gilt dann: $\quad [QF] \perp [AM] \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle ASF = 90°$.
Aus der Winkelsumme im Dreieck AFS ergibt sich dann: $\varepsilon = 90° - 33° = 57°$.
$\Rightarrow \quad \varphi = 180° - 2 \cdot 57° = 66° = \alpha$.
Das Dreieck FPQ ist aus Symmetriegründen gleichschenklig mit der Basis $[PQ]$.
$\Rightarrow \quad \psi = \varepsilon = 57°$, da es Z-Winkel sind.

2.



Ein Seil, das am linken Ende mit einem Gewicht belastet ist, wird über eine feste Rolle geführt. Am rechten Seilstück, das mit der Waagrechten den Winkel α einschließt, wird das Gleichgewicht gehalten.

(a) Begründe: $\beta = 90° - \alpha$.

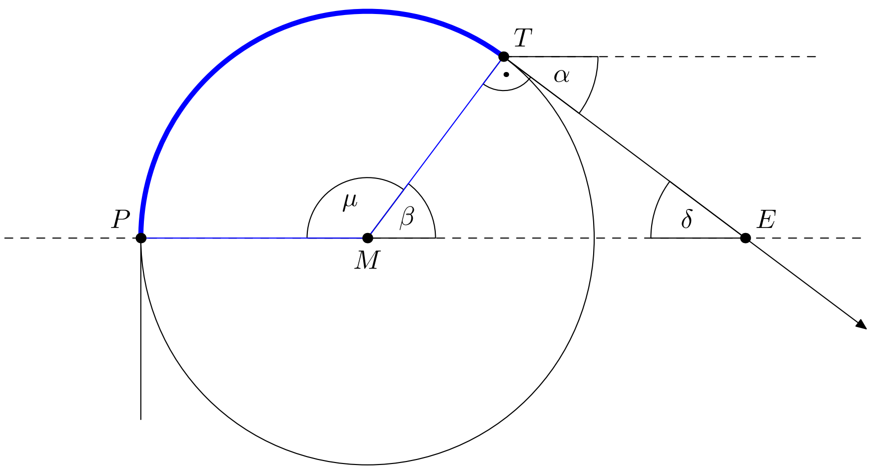
(b) Zeichne die Rolle mit dem Seil für den Radius $r = 3\,\text{cm}$ und $\alpha = 37°$.

(c) Berechne den Bruchteil des Umfangs der festen Rolle, der für $\alpha = 30°$ vom Seil berührt wird.

(d) Wie groß müsste man den Winkel α wählen, damit die Länge des Seilstückes, das die Rolle berührt, 40% des Rollenumfangs beträgt?

Lösung: (a) Siehe Zeichnung zu (b):
Die Halbgerade $[TE$ liegt auf der Kreistangente mit dem Berührpunkt T. Der Berührradius $[MT]$ steht auf dieser Tangente senkrecht. Weiter gilt: $\delta = \alpha$ (Z-Winkel).
$\Rightarrow \quad \beta = 90° - \delta = 90° - \alpha$.

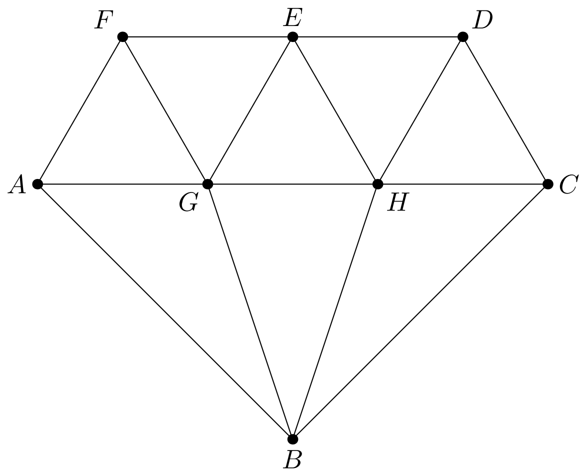
(b) Wenn also $\alpha = 37°$ ist, dann folgt $\beta = 90° - 37° = 53°$.
Damit kannst du den Berührradius mit dem Punkt T und seine Kreistangente konstruieren. Das linke Seilende führt senrecht nach unten.



(c) Aus $\alpha = 30°$ folgt $\beta = 60° \quad \Rightarrow \quad \mu = 180° - 60° = 120°$.
Der Mittelpunktswinkel μ nimmt also ein Drittel des Vollwinkels (360°) ein. Damit bedeckt das Seil ein Drittel des Rollenumfangs.

(d) Berechne α aus dem Mittelpunktswinkel μ:
$\mu = 40\%$ von $360° = 0,4 \cdot 360° = 144°$.
$\beta = 180° - 144° = 36° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° - 36° = 54°$.

3.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Trapez $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 9\,\text{cm}$, wobei über der Strecke $[DF]$ 6 cm Platz bleiben sollen.

(b) Benenne die Innenwinkel des Trapezes $ACDF$ mit griechischen Buchstaben. Berechne diese Innenwinkel.

(c) Verlängere die Strecken $[AF]$ über F und $[CD]$ über C hinaus so weit, bis sie sich im Punkt S schneiden. Begründe: Das Dreieck FDS ist gleichseitig.

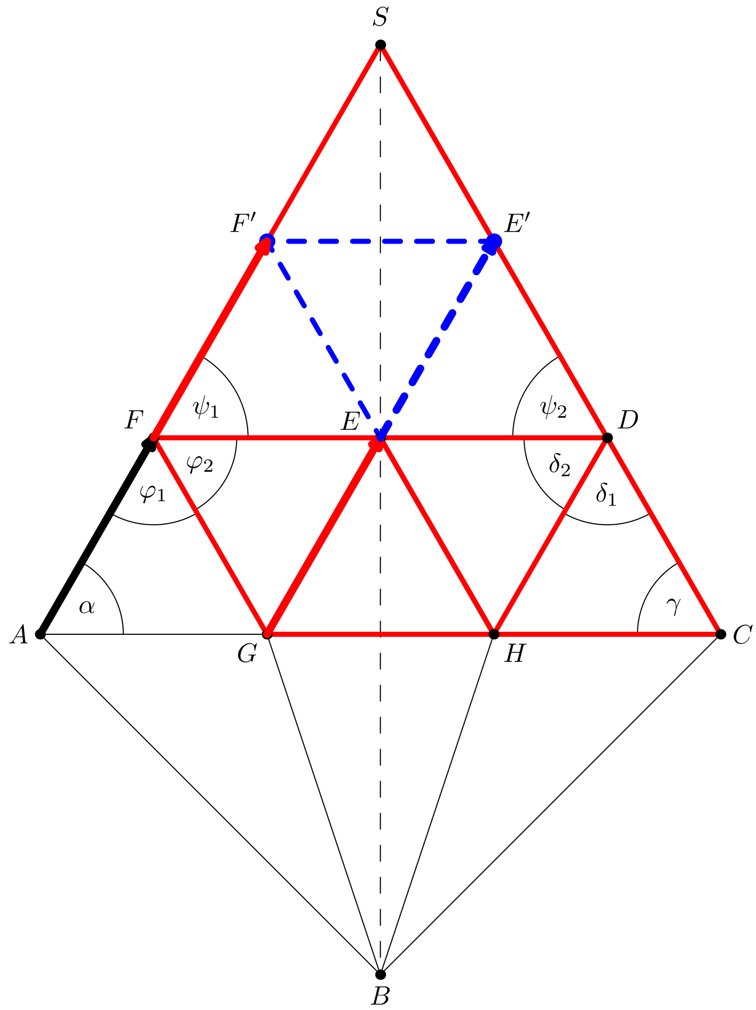
(d) Verschiebe die Raute $AGEF$ mit dem Vektor $\overrightarrow{\text{AF}}$.

(e) Wie viele Dreiecke vom Typ AGF passen lückenlos in das Dreieck FDS? Begründe.

(f) Der Winkel HBG hat das Maß $36,87°$ (gerundet).

- Berechne die Maße der Innenwinkel des Drachenvierecks $BHEG$.
- Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks ABG.

Lösung: (a)



(b) Die Gerade SB ist die Symmetrieachse der Figur. Da sich das Trapez $ACDF$ nur aus gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt, gilt: $\alpha = \gamma = 60°$.
Aus dem gleichen Grund gilt: $\delta_1 = \varphi_1 = \delta_2 = \varphi_2 = 60°$.
Also gilt: $\sphericalangle AFD = \sphericalangle FDC = 120°$.

(c) Der Winkel ψ_1 ist der Nebenwinkel des Winkels AFD:
$\psi_1 = 180° - 120° = 60° = \psi_2$.
Im Dreieck FDC haben also zwei Innenwinkel das Maß 60°. Also muss wegen der Innenwinkelsumme von 180° auch der dritte Innenwinkel das Maß 60° haben. Damit ist das Dreieck FDS gleichseitig.

(d) Es entsteht das Viereck $FEE'F'$: siehe Zeichnung.

(e) Es sind **vier** solche Dreiecke, wie du an den dicken gestrichelten Linien erkennen kannst.

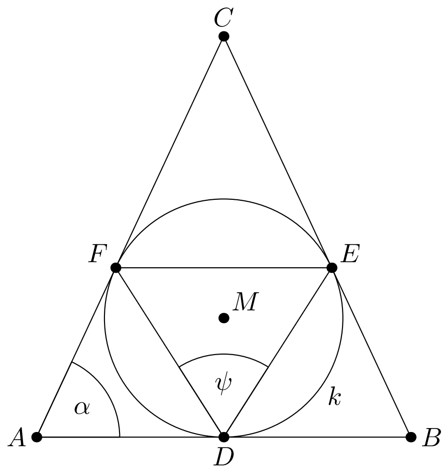
(f) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Alle Winkelmaße sind auf zwei Kommastellen gerundet.

- Das Dreieck BHG ist aus Symmetriegründen gleichschenklig.
  $\Rightarrow \quad \sphericalangle GHB = \sphericalangle BGH = (180° - 36{,}87°) : 2 = 71{,}57°$.
  Das Dreieck GHE ist gleichseitig.

Also gilt: $\sphericalangle HGE = 60° = \sphericalangle EHG = \sphericalangle GEH$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle EHB = 60° + 71,57° = 131,57° = \sphericalangle BGE$

- $\sphericalangle GBA = (90° - \sphericalangle HBG) : 2 = 26,57°$.
  Weiter gilt: $\sphericalangle BAC = 45°$
  $\Rightarrow \quad \sphericalangle AGB = 180° - 45° - 26,57° = 108,43°$
  Anmerkung: Es gibt noch andere Lösüngsmöglichkeiten.

4.



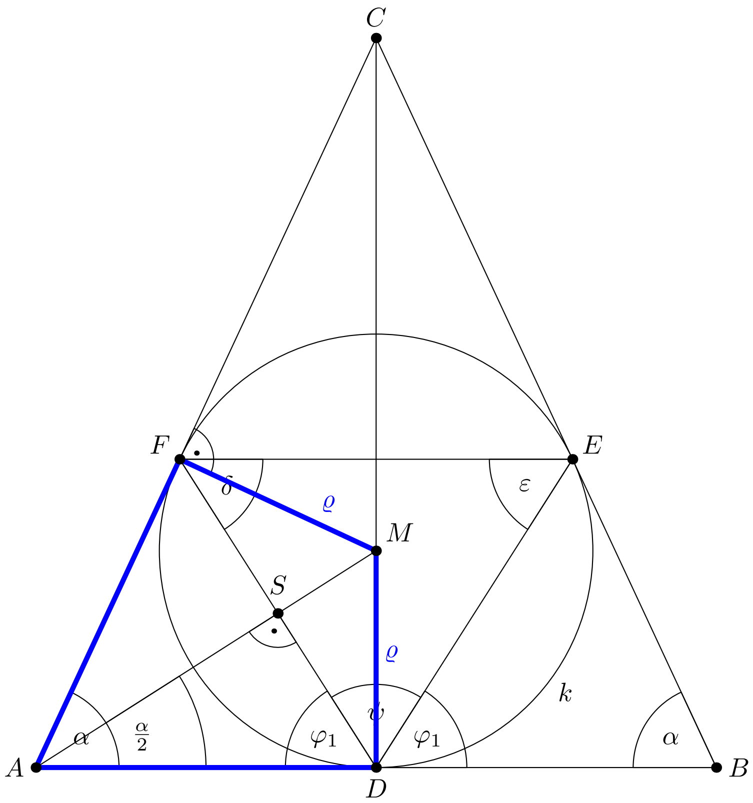
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit der Basis $[AB]$. Der Inkreis k mit dem Mittelpunkt M berührt die Dreiecksseiten in den Punkten D, E und F.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 9\,\text{cm}$ und $\alpha = 65°$.

(b) • Zeichne das Viereck $ADMF$ ein.
  • Um welches besondere Viereck handelt es sich? Begründe.

(c) Zeige: $\psi = \alpha$.

Lösung: (a)



Der Inkreismittelpunkt M ist der Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden, die z.B. auf $[AM]$ und $[CD]$ liegen.
Der Inkreisradius ϱ steht als Berührradius auf $[AB]$ bzw. $[AC]$ senkrecht.

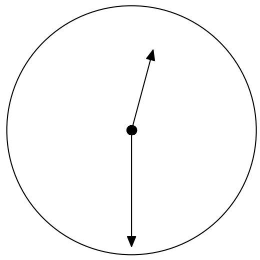
(b)
- Siehe obige Zeichnung.
- Das Viereck $ADMF$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, denn die Diagonale $[AM]$ ist die Halbierende des Winkels mit dem Maß α und damit die Symmetrieachse dieses Vierecks.

(c) Das Dreieck ADS ist rechtwinklig, weil die beiden Diagonalen in jedem Drachenviereck senkrecht aufeinander stehen:
$\varphi_1 = 90° - \dfrac{\alpha}{2} = \varphi_2$. Weiter muss gelten: $\varphi_1 + \varphi_2 + \psi = 180°$
$\Rightarrow \quad \psi = 180° - 2 \cdot \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \psi = \alpha.$

Oder: Die Winkel mit den Maßen δ und ε bilden mit den Winkeln φ_1 bzw. φ_2 Z-Winkel.
Also gilt: $\delta = \varepsilon = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$.

Dann gilt im Dreieck DEF: $\delta + \varepsilon + \psi = 180°$. $\quad \Rightarrow \psi = 180° - 2 \cdot \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ usw.

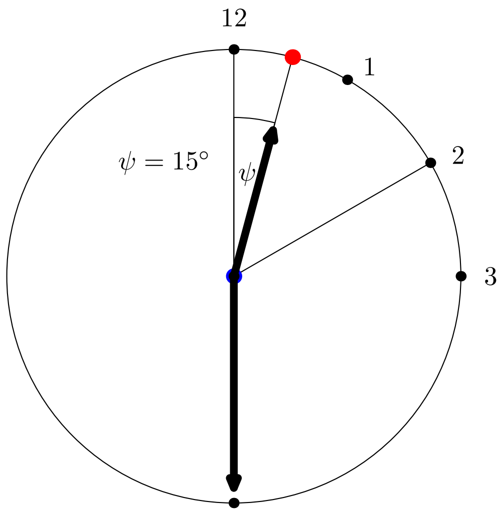
5.



(a) Welchen Winkel schließen die beiden Uhrzeiger um 12 : 30 Uhr ein?

(b) Um welchen Winkel haben sich der Minuten- und der Stundenzeiger von 12 : 30 Uhr bis 13 : 10 Uhr weitergedreht?

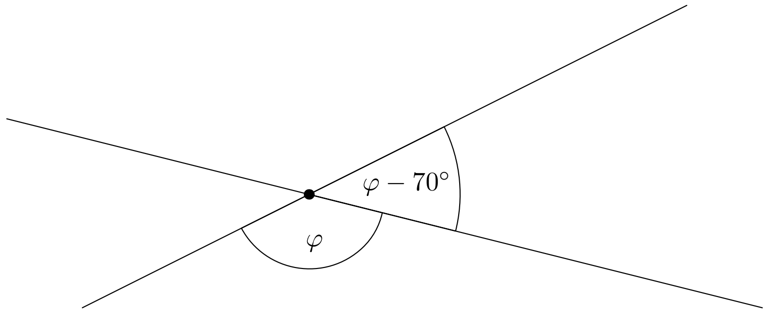
Lösung: (a)



Der Winkel beträgt $180° - 15° = 165°$.

(b) Der Minutenzeiger hat sich um $180° + 60° = 240°$ weitergedreht.
Bis 13 : 00 Uhr hat sich der Stundenzeiger um 15° weitergedreht. 10 Minuten sind der sechste Teil einer Stunde, die einem Winkel von 30° entspricht. Dann entsprechen 10 Minuten einem Winkel von $30° : 6 = 5°$. Also hat der Stundenzeiger während dieser Zeit einen Winkel von $30° + 5° = 35°$ überstrichen.

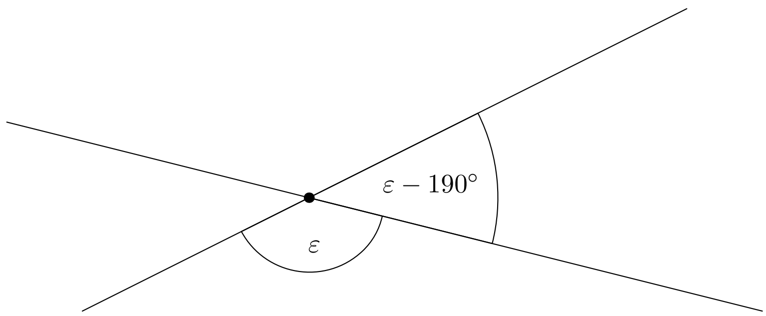
6.



Bestimme das Winkelmaß φ an der Geradenkreuzung. Beachte: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu.

Lösung: Es muss gelten:
$\varphi + (\varphi - 70°) = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2\varphi = 180° + 70° \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 125°$

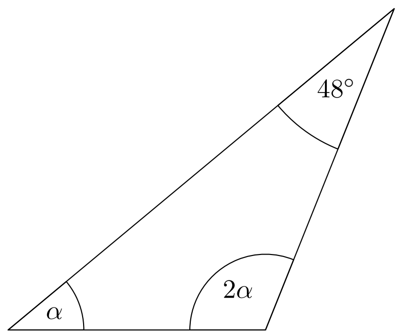
7.



Begründe: Den Winkel ε gibt es in Wirklichkeit nicht.

Lösung: Du siehst in der Zeichnung zwei Nebenwinkel:
$\varepsilon + (\varepsilon - 190°) = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2\varepsilon = 370° \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 185°$.
ε ist somit überstumpf. Das geht bei Nebenwinkeln nicht. Beide Nebenwinkel dürfen nicht größer als 180° werden.

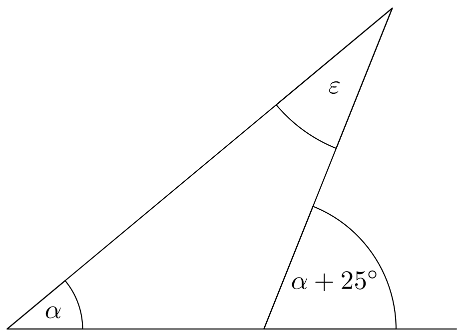
8.



Berechne α. Beachte: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

Lösung: Es gilt $\alpha + 2\alpha + 48° = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 3\alpha = 180° - 48° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 44°$.

9.



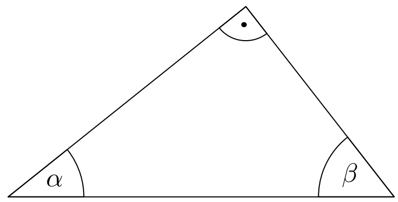
Berechne ε. Beachte: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

Lösung: Nach dem Satz vom Außenwinkel muss $\alpha + 25° = \alpha + \varepsilon$ ergeben.
Also gilt: $\varepsilon = 25°$.

10. In einem Dreieck ist der erste Winkel doppelt so groß wie der zweite Winkel. Der dritte Winkel ist um 36° kleiner als der zweite Winkel. Berechne die Winkelmaße.

Lösung: 1. Winkel: α 2. Winkel: β 3. Winkel: γ
$\alpha = 2\beta \quad \wedge \quad \gamma = \beta - 36°$.
Innenwinkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$: $2\beta + \beta + (\beta - 36°) = 180°$
$\Leftrightarrow \quad 4\beta = 180° + 36° \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 54° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 108° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 18°$.

11.



In einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Winkel fünf Mal so groß wie ein anderer Winkel. Wie groß sind die Winkel?
Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten.

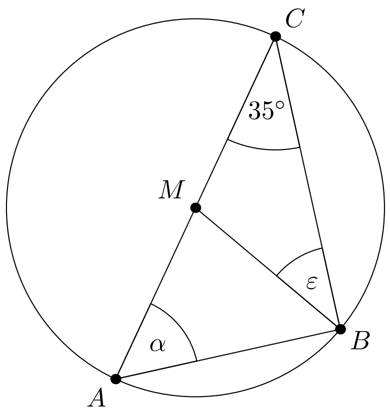
Lösung: In jedem Dreieck gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$:
In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: $\alpha + \beta = 90°$

1. Möglichkeit:
$\alpha = 5\beta \quad \Rightarrow \quad 5\beta + \beta = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 15° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 75°$
Die Variante $\beta = 5\alpha$ liefert ein spiegelbildliches Ergebnis.

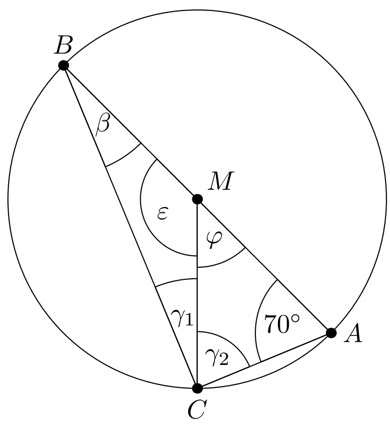
2. Möglichkeit:
$5\alpha = 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18° \quad \Rightarrow \quad \beta = 72°$.
Die Variante $5\beta = 90°$ liefert ein spiegelbildliches Ergebnis.

12. Berechne jeweils die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Zuweilen musst du erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

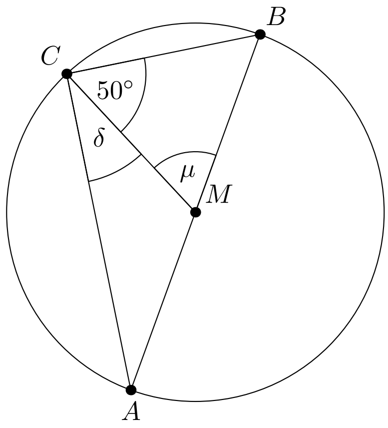
Figur a)



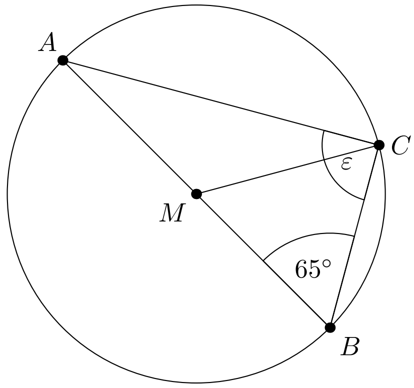
Figur b)



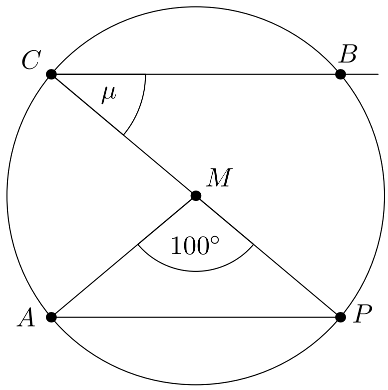
Figur c)



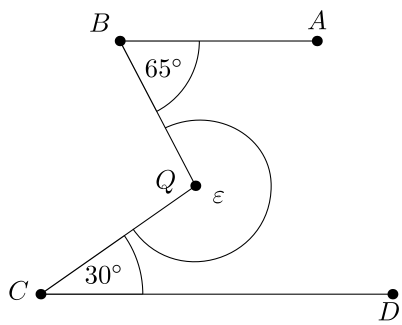
Figur d)



Figur e) $CB \parallel AP$



Figur f) $AB \parallel CD$



Tipp zur Figur f): Zeichne eine Hilfslinie durch den Punkt Q ein.

Lösung: In allen Zeichnungen findest du gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel so lang wie der jeweilige Kreisradius sind.

Figur a)

Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \varepsilon = 35°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\sphericalangle BMC = 110°$
Der Winkel AMB ist der Nebenwinkel dazu: $\sphericalangle AMB = 180° - 110° = 70°$. Im Dreieck ABM gilt dann: $\alpha = (180° - 70°) : 2 = 55°$.

Figur b)

Das Dreieck CAM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \gamma_2 = 70°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\varphi = 40°$
Der Winkel ε ist der Nebenwinkel dazu: $\varepsilon = 180° - 40° = 140°$. Im gleichschenkligen Dreieck CMB gilt dann: $\beta = \gamma_1 = (180° - 140°) : 2 = 20°$.

Figur c)

Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \sphericalangle CBM = 50°$. Wegen der Innenwinkelsumme von $180°$ folgt $\mu = 80°$.
Der Winkel $\sphericalangle CMA$ ist der Nebenwinkel dazu: $\sphericalangle CMA = 180° - 80° = 100°$.
Im gleichschenkligen Dreieck AMC gilt dann:
$\sphericalangle MAC = \delta = (180° - 100°) : 2 = 40°$

Figur d)

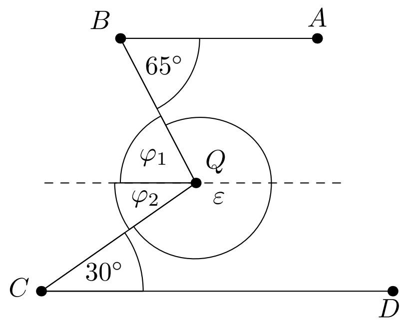
Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \sphericalangle MCB = 65°$. Wegen der Innenwinkelsumme von $180°$ folgt $\sphericalangle BMC = 50°$.
Der Winkel $\sphericalangle CMA$ ist der Nebenwinkel dazu: $\sphericalangle CMA = 180° - 50° = 130°$
Im gleichschenkligen Dreieck CMB gilt dann:
$\sphericalangle MAC = \sphericalangle ACM = (180° - 130°) : 2 = 25°$
$\varepsilon = \sphericalangle ACM + \sphericalangle MCB = 25° + 65° = 90°$.

Figur e)

Das Dreieck APM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \sphericalangle MPA = \sphericalangle PAM$.
Wegen der Innenwinkelsumme von $180°$ folgt
$\sphericalangle MPA = \sphericalangle PAM = (180° - 100°) : 2 = 40°$
Die Winkel MPA und μ sind maßgleich, weil sie „Z-Winkel“ sind. $\Rightarrow \mu = 40°$.

Figur f)

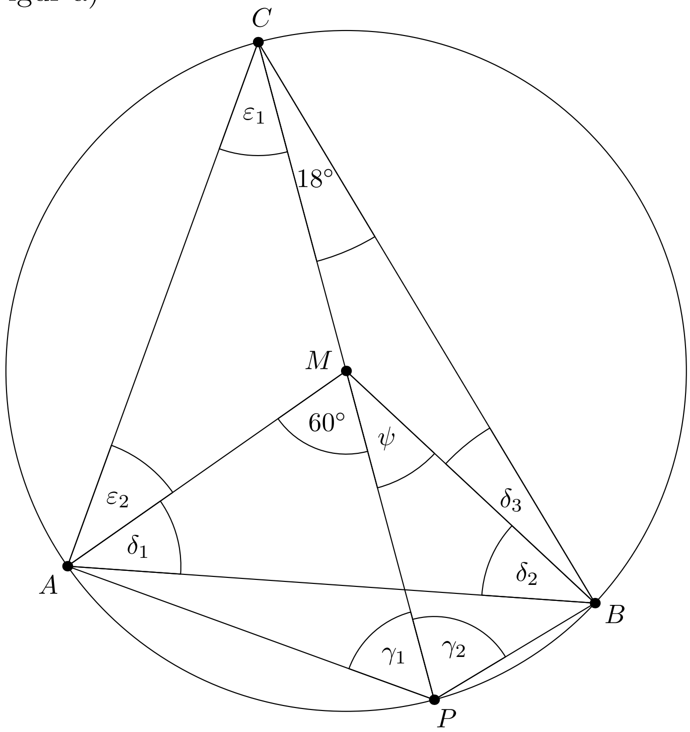
Figur f) $AB \parallel CD$



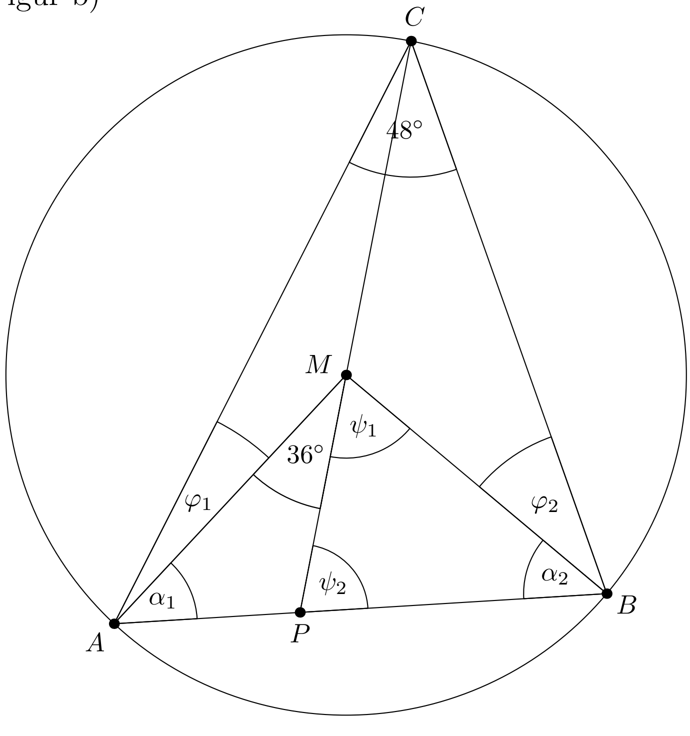
Die gesuchte Hilfslinie ist die **Parallele** zu den Geraden BA bzw. CD durch den Punkt Q.
Nun gilt: $\varphi_1 = 65°$ (Z-Winkel) und $\varphi_2 = 30°$ (Z-Winkel).
$\varepsilon = 360° - (65° + 30°) = 265°$.

13. Berechne jeweils die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Zuweilen musst du erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

Figur a)



Figur b)



Lösung: In allen Zeichnungen findest du gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel so lang wie der jeweilige Kreisradius sind. In jedem gleichschenkligen Dreieck gibt es zwei maßgleiche Winkel.

Figur a)

Das Dreieck APM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \gamma_1 = 60°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\sphericalangle PAM = 60°$; d.h. das Dreieck APM ist sogar gleichseitig.

Der Winkel CMA ist der Nebenwinkel zu dem 60°-Winkel:
$\sphericalangle CMA = 180° - 60° = 120°$. Im Dreieck AMC gilt dann:
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = (180° - 120°) : 2 = 30°$.
Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \delta_3 = 18°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\sphericalangle BMC = 144°$.
Der Winkel ψ ist der Nebenwinkel zu dem 144°-Winkel: $\psi = 180° - 144° = 36°$.
Das Dreieck PBM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \gamma_2 = (180° - 36°) : 2 = 72°$.

Im gleichschenkligen Dreieck ABM ist $\sphericalangle AMB = 60° + 36° = 96°$.
$\Rightarrow \delta_1 = \delta_2 = (180° - 96°) : 2 = 42°$

Figur b)

Der Winkel CMA ist der Nebenwinkel zu dem 36°-Winkel:
$\sphericalangle CMA = 180° - 36° = 144°$. Das Dreieck AMC ist gleichschenklig:
$\Rightarrow \varphi_1 = \sphericalangle ACM = (180° - 144°) : 2 = 18°$.

Weiter gilt: $\sphericalangle MCB = 48° - 18° = 30°$. Weil das Dreieck MBC gleichschenklig ist, folgt $\varphi_2 = 30°$. $\sphericalangle BMC = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$.
Der Winkel ψ_1 ist der Nebenwinkel zu dem 120°-Winkel:
$\psi_1 = 180° - 120° = 60°$.

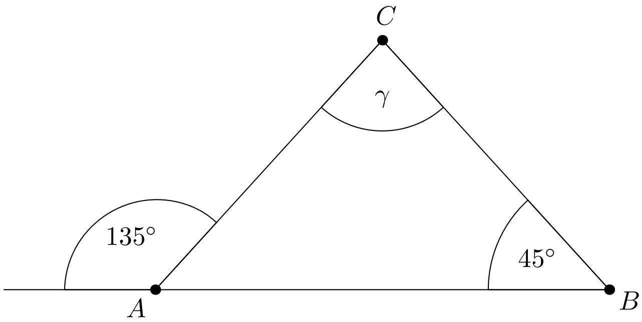
Im Dreieck ABM gilt: $\sphericalangle AMB = 36° + 60° = 96°$. Das Dreieck MBC ist gleichschenklig:
$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = (180° - 96°) : 2 = 42°$.

Im Dreieck PBM findest du über die Innenwinkelsumme:
$\psi_2 = 180° - (60° + 42°) = 78°$.

14. Zur Berechnung der mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße musst du zuweilen erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

    (a)

Figur a)

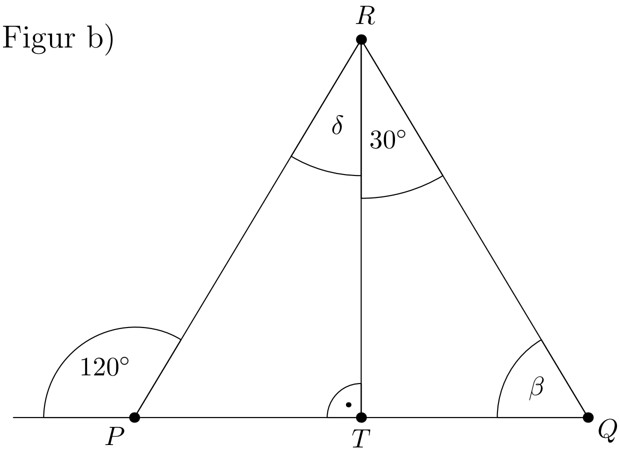


In der Figur a) gilt: $\overline{AC} = 4\,\text{cm}$.

- Berechne γ.
- Begründe: $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

(b)

Figur b)



In der Figur b) gilt: $\overline{RQ} = 7,64\,\text{cm}$.

- Berechne β und δ.
- Begründe: $\overline{PR} = 7,64\,\text{cm}$ und $\overline{PT} = 3,82\,\text{cm}$.

Lösung: (a)

- Der Winkel BAC ist der Nebenwinkel des $135°$ -Winkels:
  $\sphericalangle BAC = 180° - 135° = 45° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 180° - 45° - 45° = 90°$.

- Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, weil es zwei maßgleiche Innenwinkel besitzt:
  $\Rightarrow \quad \overline{AC} = \overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

(b)

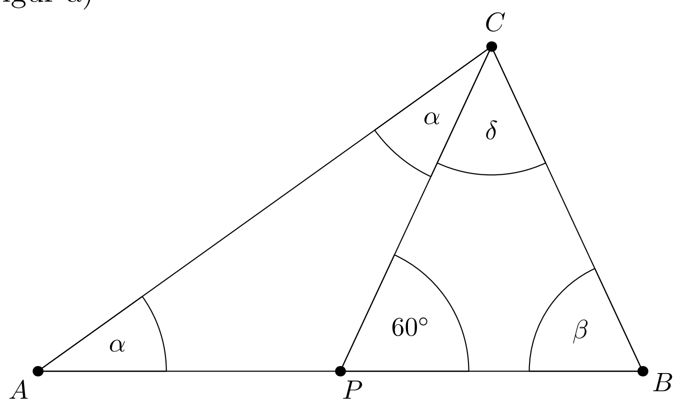
- Das Dreieck TQR ist rechtwinklig. $\Rightarrow \quad \beta = 90° - 30° = 60°$. Der Winkel TPR ist der Nebenwinkel des $120°$ -Winkels:
  $\sphericalangle TPR = 180° - 120° = 60° \quad \Rightarrow \quad \delta = 180° - 90° - 60° = 30°$.

- Das Dreieck PQR ist wegen seiner drei $60°$ -Innenwinkel **gleichseitig**:
  $\Rightarrow \quad \overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{QR} = 7,64\,\text{cm}$.
  Die Strecke $[RT]$ ist in diesem Dreieck PQR eine Winkelhalbierende, also gleichzeitig die Mitttelsenkrechte auf die Basis $[PQ]$.
  $\Rightarrow \quad \overline{PT} = 0.5 \cdot \overline{PQ} = 3,82\,\text{cm}$.

15. Zur Berechnung der mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße musst du zuweilen erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

(a)

Figur a)

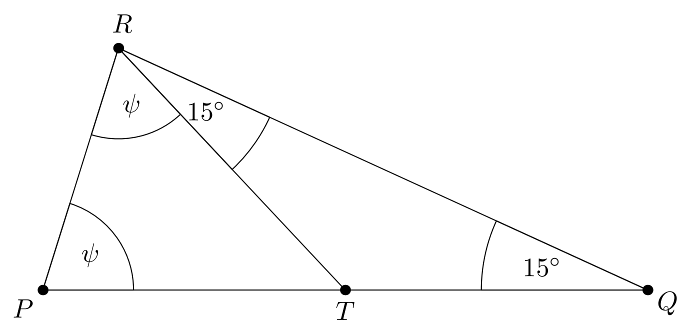


In der Figur a) gilt: $\overline{AP} = 5\,\text{cm}$ und $\alpha + \delta = 90°$.

- Berechne die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße.
- Begründe: $\overline{AB} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$.

(b)

Figur b)



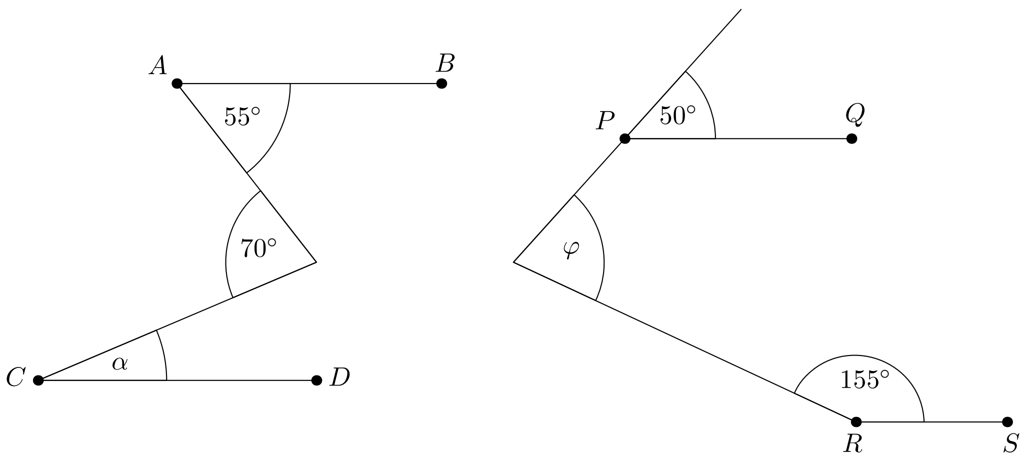
In der Figur b) gilt: $\overline{PQ} = 9,38\,\text{cm}$.

- Berechne die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße.
- Begründe: $\overline{RT} = 4,69\,\text{cm}$.

Lösung: (a)
- Der Winkel CPA ist der Nebenwinkel des $60°$-Winkels:
  $\sphericalangle CPA = 180° - 60° = 120°$.
  $\Rightarrow \quad \alpha = (180° - 120°) : 2 = 30°$.
  Wegen $\alpha + \delta = 90°$ folgt: $\delta = 60°$.
  Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck PBC ergibt sich $\beta = 60°$.
- Das Dreieck APC enthält zwei maßgleiche Innenwinkel, also ist es **gleichschenklig**.
  $\Rightarrow \quad \overline{AP} = \overline{PC} = 5\,\text{cm}$.
  Das Dreieck PBC enthält drei maßgleiche Innenwinkel, also ist es **gleichseitig**.
  Damit gilt: $\overline{AP} = 5\,\text{cm} = \overline{PC} = \overline{CB} = \overline{PB}$
  $\Rightarrow \quad \overline{AB} = 5\,\text{cm} + 5\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$.

(b) In der Figur b) gilt: $\overline{PQ} = 9,38\,\text{cm}$.
- Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck TQR ergibt sich:
  $\sphericalangle QTR = 180° - 2 \cdot 15° = 150°$.
  Der Winkel RTP ist der Nebenwinkel des $150°$-Winkels:
  $\sphericalangle RTP = 180° - 150° = 30°$.
  Im Dreieck PTR folgt $\psi = (180° - 30°) : 2 = 75°$.
  Anmerkung: Wegen $\psi + 15° = 90°$ ist das Dreieck PQR rechtwinklig.
- Das Dreieck TQR ist gleichschenklig, weil es zwei maßgleiche Innenwinkel besitzt:
  $\Rightarrow \quad \overline{TQ} = \overline{TR}$.
  Das Dreieck PTR ist ebenfalls gleichschenklig, weil es zwei maßgleiche Innenwinkel besitzt:
  $\Rightarrow \quad \overline{TP} = \overline{TR}$.
  Also gilt: $\overline{TQ} = \overline{TR} = \overline{TP}$. Also ist der Punkt T der Mittelpunkt der Seite $[PQ]$ und es gilt: $\overline{PT} = 0.5 \cdot \overline{PQ} = 4,69\,\text{cm}$.
  Anmerkung: Wegen $\overline{TQ} = \overline{TR} = \overline{TP}$ liegen die Punkte P, Q und R auf einer Kreislinie mit dem Mittelpunkt T.

16.

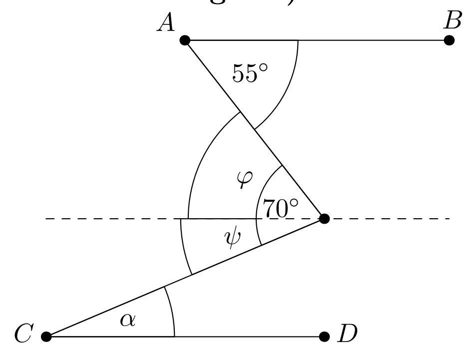


Figur a): $AB \parallel CD$ Figur b): $PQ \parallel RS$

Berechne die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Zeichne dazu geeignete Hilfslinien ein. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

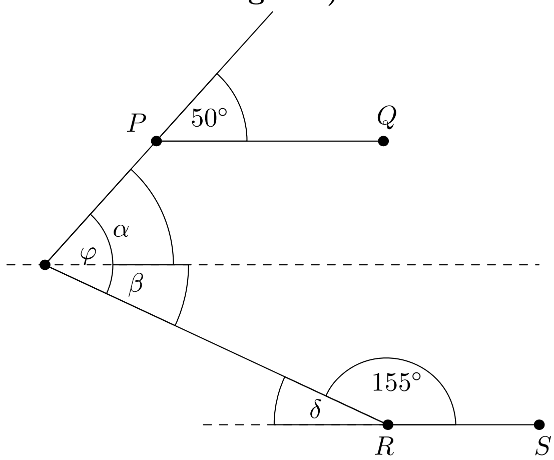
Lösung:

Figur a)



Eine Hilfslinie ist z.B. die Parallele zu AB bzw. CD, die durch den Scheitel des 70°-Winkels verläuft (hier: die gestrichelte Linie).
Du erkennst nun: $\varphi = 55°$ (Z-Winkel) und $\psi = \alpha$ (Z−Winkel).
Wegen $\varphi + \psi = 70°$ ist nun $\psi = 70° - 55° = 15° = \alpha$.
Anmerkung: Es gibt auch eine andere Hilfslinie, die zur Lösung führt, nämlich die Senkrechte zu CD durch den Scheitel des 70°-Winkels. Probiere es aus.

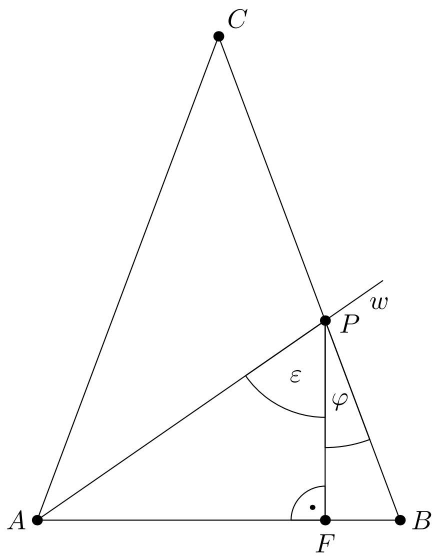
Figur b)



Wieder ist eine Hilfslinie ist z.B. die Parallele zu PQ bzw. RS, die durch den Scheitel des Winkels mit dem Maß φ verläuft (hier: die gestrichelte Linie in der Mitte). Du erkennst nun: $\alpha = 50°$ (F-Winkel).

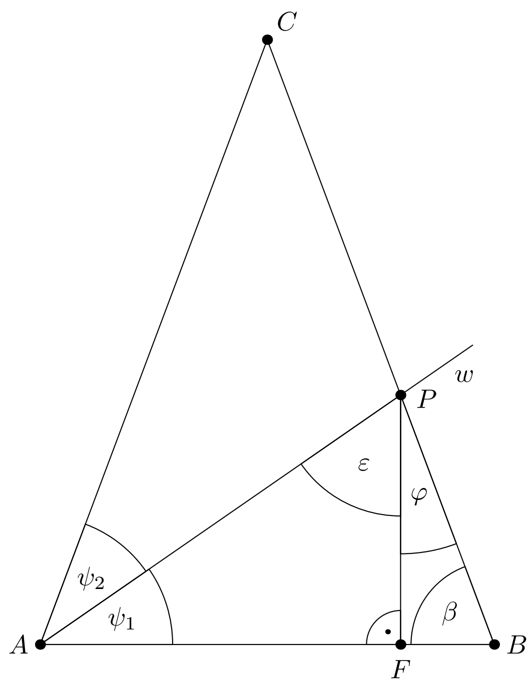
Wenn du die Strecke $[SR]$ ein wenig über den Punkt R hinaus verlängerst, entsteht ein weiterer Winkel - hier mit dem Maß δ.
Du siehst einerseits : $\delta = 180° - 155° = 25°$ (Nebenwinkel).
Andererseits sind die Winkel β und δ maßgleiche Z−Winkel. $\Rightarrow \quad \beta = \delta = 25°$.
Also ergibt sich $\varphi = \alpha + \beta = 50° + 25° = 75°$

17.



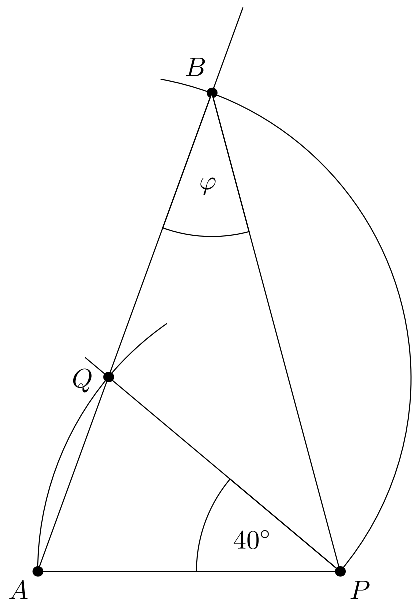
Im Dreieck ABC gilt: $\overline{CA} = \overline{CB}$ und $\varepsilon = 56,81°$. Die Halbgerade $w = [AP$ halbiert den Winkel BAC. Die Skizze ist nicht maßstabgerecht. Berechne φ.

Lösung:



Im Dreieck AFP gilt: $\psi_1 = 90° - \varepsilon = 90° - 56,81° = 33,19°$.
Weil w die Winkelhalbierende ist, gilt: $\psi_2 = \psi_1 = 33,19°$.
Weil das Dreieck ABC gleichschenklig ist, gilt $\beta = 2 \cdot 33,19° = 66,38°$.
Im rechtwinkligen Dreieck FBP gilt dann: $\varphi = 90° - \beta = 90° - 66,38°$
$\Rightarrow \quad \varphi = 23,62°$.

18.



Die Punkte P und Q sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AP} = 4\,\text{cm}$.

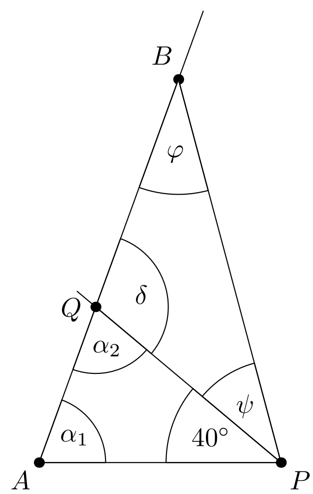
(b) Berechne φ.

(c) Begründe, dass das Dreieck APB nicht gleichschenklig ist.

(d) Wie groß müsste der Winkel QPA werden, damit das Dreieck APB bei sonst unveränderlichen Bedingungen gleichschenklig wird?

(e) Könnte das Dreieck APB bei geeigneter Wahl des Winkels QPA vielleicht sogar gleichseitig werden?

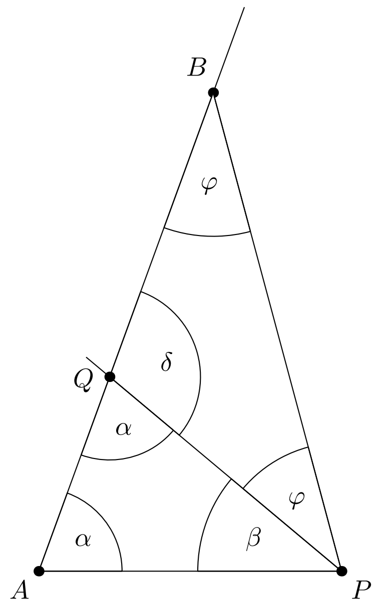
Lösung: (a)



(b) Die beiden Dreiecke APQ und QPB sind gleichschenklig: $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$.
Also gilt: $\alpha_1 = \alpha_2 = (180° - 40°) : 2 = 70°$.
Der Winkel mit dem Maß δ ist der Nebenwinkel von α_2:
$\delta = 180° - \alpha_2 = 180° - 70° = 110°$.
Im Dreieck QPB gilt: $\varphi = \psi$.
$\Rightarrow \quad \varphi = \psi = (180° - 110°) : 2 = 35°$.

(c) Es müsste $\alpha_1 = 40° + \psi$ gelten, aber: $40° + 35° = 75° \neq 70° \quad (\dagger)$.

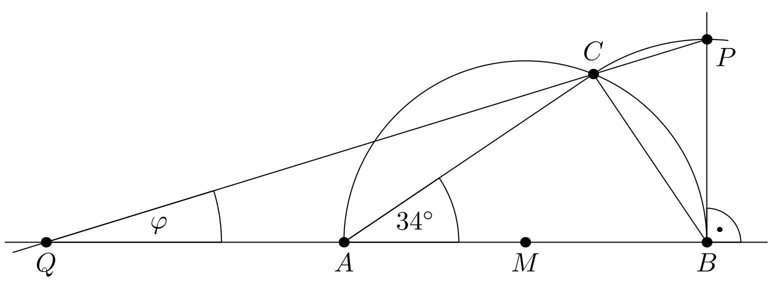
(d)



Es muss gelten:
$\beta = 180° - 2 \cdot \alpha, \quad \delta = 180° - \alpha$ und
$\varphi = 180° - \delta = [180° - (180° - \alpha)] : 2 = \frac{1}{2}\alpha$.
Soll das Dreieck APB gleichschenklig werden, dann muss $\alpha = \beta + \varphi$ sein:
$\alpha = 180° - 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 2,5\alpha = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 72°$.

(e) In der Lösung der Aufgabe (d) wurde gezeigt, dass es nur ein einziges gleichschenkliges Dreieck APB gibt. Dessen Basiswinkel hat aber das Maß 72°. Im Falle des gleichseitigen Dreiecks müsste der Basiswinkel (wie alle Inneninkel dort) 60° betragen. Also ist ein gleichseitiges Dreeick auf diese Weise nicht zu konstruieren.

19.



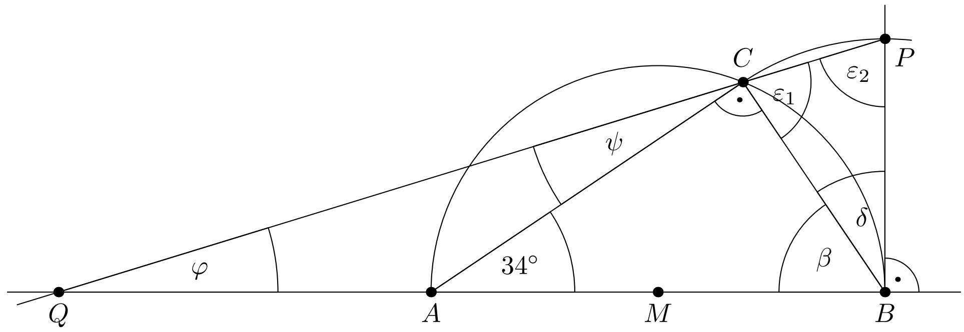
Die Punkte M und B sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\mathrm{cm}$.

(b) Zeige: $\varphi = 17°$.

(c) Untersuche, ob das Dreieck ACQ gleichschenklig ist.

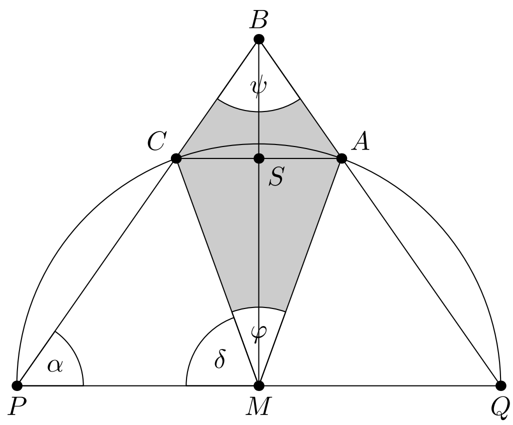
Lösung: (a)



(b) Der Halbkreis mit dem Durchmesser $[AB]$ ist der THALES-Kreis über $[AB]$.
Also folgt: $\sphericalangle ACB = 90°$.
$\Rightarrow \quad \beta = 90° - 34° = 56° \quad \Rightarrow \quad \delta = 90° - \beta = 90° - 56° = 34°$.
Im Dreieck BPC gilt: $\overline{BC} = \overline{BP}$, also ist das Dreieck BPC gleichschenklig.
$\Rightarrow \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = (180° - 34°) : 2 = 73°$.
Das Dreieck QBP ist rechtwinklig: $\varphi + 90° + \varepsilon_2 = 180°$.
$\Rightarrow \quad \varphi + \varepsilon_2 = 90° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 17°$.

(c) Im Dreieck QBC gilt:
$\varphi + \beta + 90° + \psi = 180°$. Also: $17° + 56° + 90° + \psi = 180°$.
$\Rightarrow \quad \psi = 17°$.
Damit haben zwei Innenwinkel des Dreiecks ACQ gleiches Maß. Also ist das Dreieck ACQ gleichschenklig.

20.



Die achsensymmetrische Darstellung zeigt einen Halbkreis und das Viereck $MABC$.

(a) Um welches besondere Viereck handelt es sich beim Viereck $MABC$? Begründe deine Antwort.

(b) Zeichne die Figur für $\overline{PQ} = 8\,\text{cm}$ und $\alpha = 55°$.

(c) Trage überall dort, wo es möglich ist, das Winkelmaß „α“ ein.

(d) Zeige: $\delta = 180° - 2\alpha$ und $\varphi = 4\alpha - 180°$.

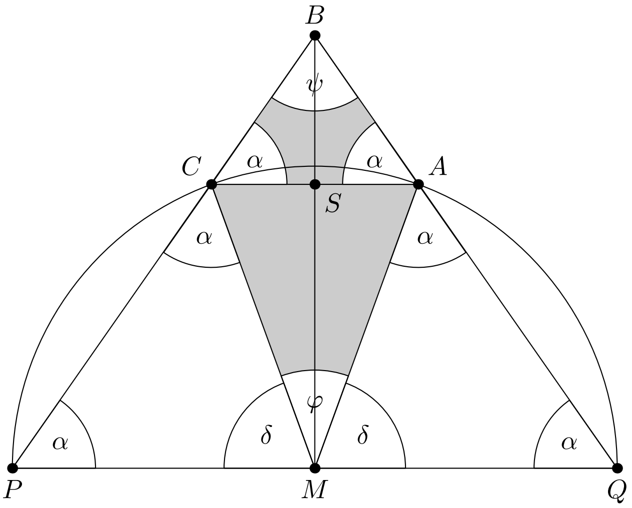
(e) Für welche Belegungen von α gibt es überhaupt solche Vierecke $MABC$?

(f) Zeige: $\psi = 180° - 2\alpha$.

(g) Berechne α so, dass das Viereck $MABC$ eine Raute wird.

Lösung: (a) Das Viereck $MABC$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, denn die beiden Diagonalen stehen aufeinander senkrecht.

(b)



(c) Siehe Zeichnung.

(d) Im Dreieck PMC gilt: $2\alpha + \delta = 180° \quad \Rightarrow \quad \delta = 180° - 2\alpha$.
Am Punkt M gilt: $\delta + \varphi + \delta = 180°$.
Also: $180° - 2\alpha + \varphi + 180° - 2\alpha = 180° \quad \Rightarrow \quad 360° + \varphi - 4\alpha = 180°$
$\Rightarrow \quad \varphi = 4\alpha - 180°$.

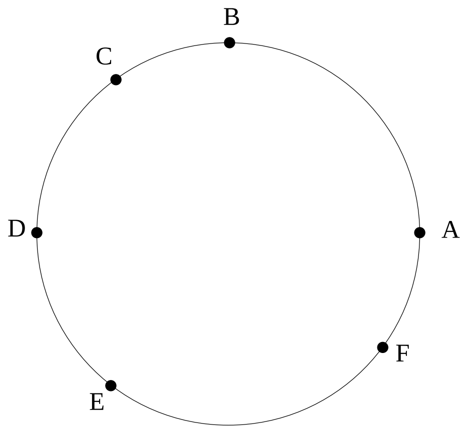
(e) Es muss $\varphi = 4\alpha - 180° > 0$ sein: $\Leftrightarrow \quad 4\alpha - 180° > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 45°$. Außerdem muss $\alpha < 90°$ sein. Insgesamt muss gelten $45° < \alpha < 90°$.

(f) Im Dreieck CAB gilt: $2\alpha + \psi = 180° \quad \Rightarrow \quad \psi = 180° - 2\alpha$.

(g) Damit das Viereck $MABC$ eine Raute wird, muss $\varphi = \psi$ gelten:
Also: $4\alpha - 180° = 180° - 2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 6\alpha = 360° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 60°$.

21. Sechs Punkte A, B, C, D, E und F liegen getrennt auf einer Kreisline.
Wie viele Dreiecke kannst du aus jeweils drei dieser sechs Punkte einzeichnen?

Lösung:



Eckpunkt A als erster:

ABC, ABD, ABE, ABF
ACD, ACE, ACF
ADE, ADF
AEF.

Eckpunkt B als erster:

BCD, BCE, BCF
BDE, BDF
BEF.

Eckpunkt C als erster:

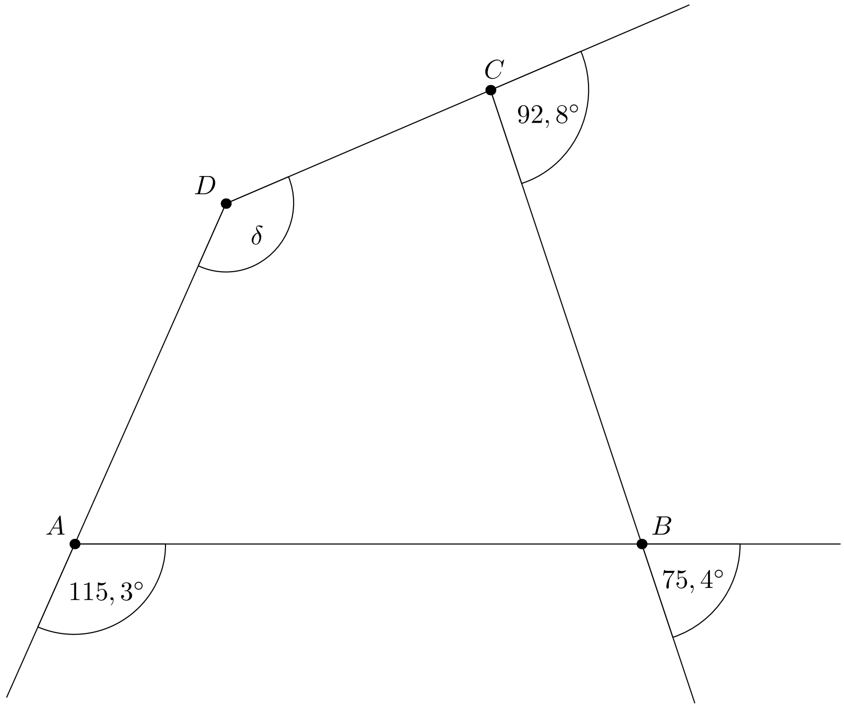
CDE, CDF
CEF.

Eckpunkt D als erster:

DEF.

Es gibt nicht mehr und nicht weniger als 20 solche Dreiecke.

22.

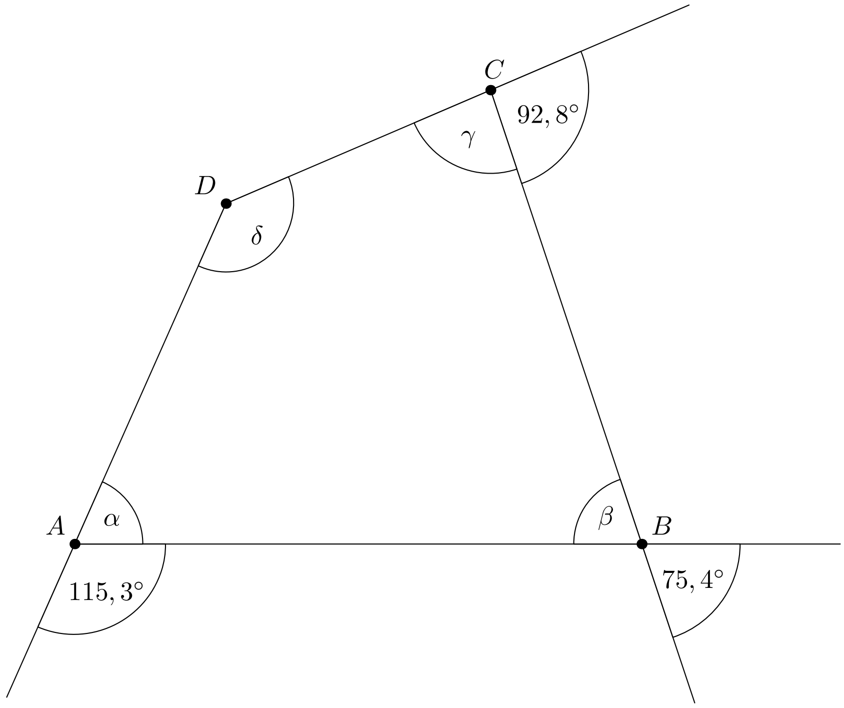


Uwe und Emil wollen aus den gegebenen Winkeln den Winkel δ bestimmen. Die Zeichnung ist aber nicht maßstabgerecht.
Emil behauptet: „Das ist ganz einfach: Der $115,3°$-Winkel und δ sind F-Winkel. Also ist δ auch $115,3°$“.
Uwe widerspricht: „Das können keine F-Winkel sein, weil ...“

(a) Notiere, wie Uwe seine Antwort begündet.

(b) Berechne δ.

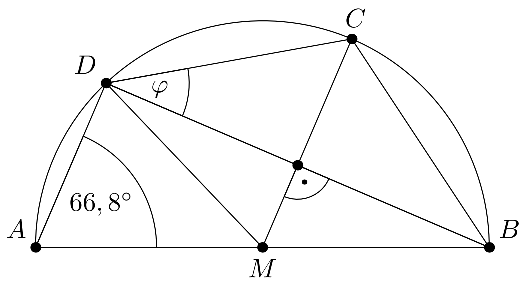
Lösung:



(a) „... die Halbgeraden $[AB$ und $[DC$ nicht parallel sind.“

(b) $\beta = 75,4°$ (Scheitelwinkel)
$\gamma = 180° - 92,8° = 87,2°$ und
$\alpha = 180° - 115,3° = 64,7°$ (jeweils Nebenwinkel)
Die Innenwinkelsumme in jedem Viereck beträgt 360°.
$\Rightarrow \quad \delta = 360° - 75,4° - 87,2° - 64,7° = 132,7°$.

23.

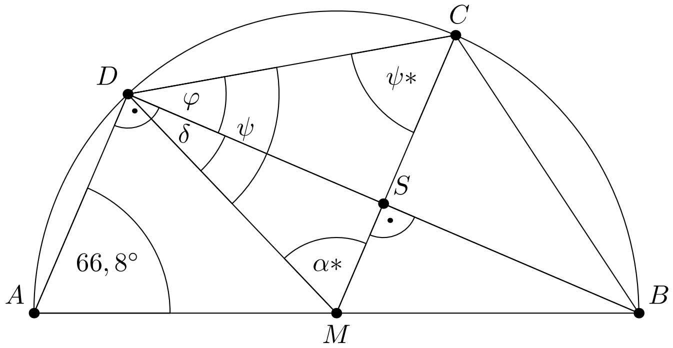


Der Mittelpunkt M der Strecke $[A, B]$ ist gleichzeitig der Mittelpunkt des Halbkreises durch die vier Punkte A, B, C und D.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$.

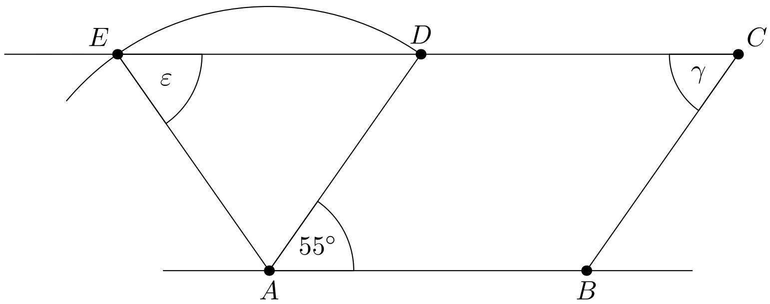
(b) Berechne φ.

Lösung: (a)



(b) Der Halbkreis ist gleichzeitig der THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$. Also gilt: $\sphericalangle ADB = 90°$.
$\Rightarrow \quad [AD] \parallel [MC] \quad \Rightarrow \quad \alpha* = 66,8°$.
Das Dreieck MCD ist gleichschenklig; es gilt: $\overline{MC} = \overline{MD} = 4\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad \psi* = \psi = (180° - 66,8°) : 2 = 56,6°$.
Im Dreieck MSD gilt: $\delta = 90° - \alpha* = 90° - 66,8° = 23,2°$.
Also ist $\varphi = \psi - \delta = 56,6° - 23,2° = 33,4°$.

24.



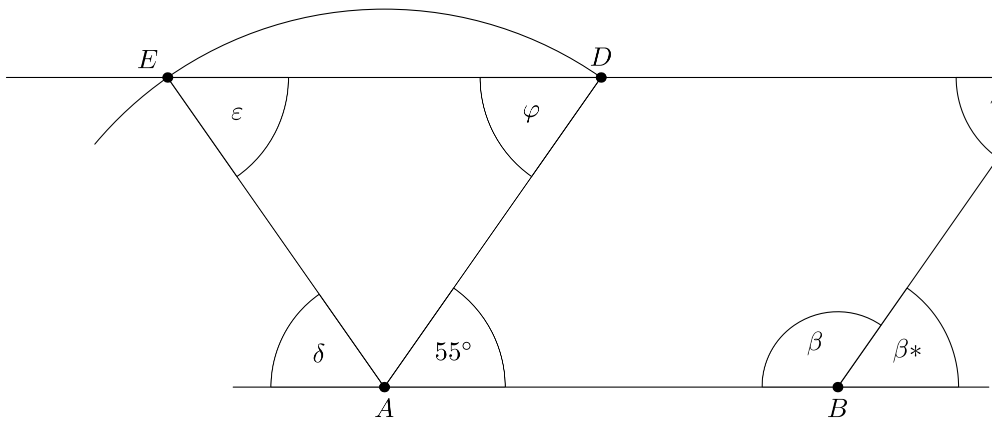
Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm. Es gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$. Der Punkt A ist der Mittelpunkt des Kreisbogens durch den Punkt D.

(a) Zeichne die Figur in folgenden Schritten:
- Zeichne zunächst die Strecke $[AB]$.
- Trage am Punkt A den 55°-Winkel an.
- Zeichne den Punkt D ein.
- Zeichne den Punkt C ein.
- Konstruiere mit Hilfe des Kreisbogens den Punkt E.

(b) Begründe: Das Dreieck ADE ist gleichschenklig.

(c) Begründe:
- Es gilt $\gamma = \varepsilon = 55°$
- Das Viereck $ABCE$ ist ein achsensymmetrisches Trapez.

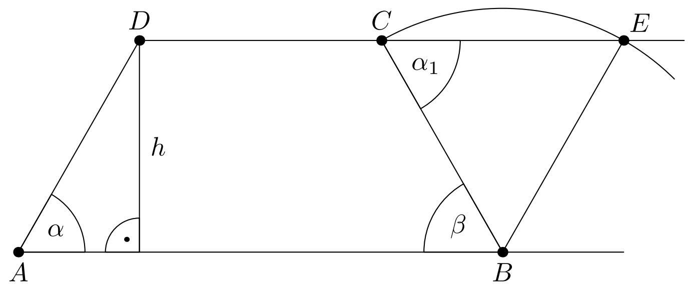
Lösung: (a)



(b) Es gilt $\overline{AD} = \overline{AE} = 5\,\mathrm{cm}$; also ist das Dreieck ADE gleichschenklig.

(c)
- Im Parallelogramm $ABCD$ gilt: $\gamma = 55°$.
  $\Rightarrow \quad \varphi = 55°$ (F-Winkel zu γ).
  Weil das Dreieck ADE gleichschenklig ist, folgt $\varphi = \varepsilon = 55°$.
- Dann gilt aber auch $\delta = \varepsilon = 55°$ (Z-Winkel zu ε).
  $\Rightarrow \quad \beta\ast = 55°$ (Z-Winkel zu γ).
  $\Rightarrow \quad \beta = 180° - 55° = 125°$ (Nebenwinkel von $\beta\ast$).
  Andererseits ist $\sphericalangle BAE$ der Nebenwinkel von δ:
  $\sphericalangle BAE = 180° - 55° = 125° = \beta$.
  Im Viereck $ABCE$ gilt: $[AB] \parallel [CE]$.
  Die beiden spitzen und die beiden stumpfen Innenwinkel haben jeweils gleiches Maß. Also ist das Viereck $ABCE$ ein achsensymmetrisches Trapez.

25.



Das Viereck $ABCD$ ist ein achsensymmetrisches Trapez.
Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\mathrm{cm}$, $\overline{DC} = 4\,\mathrm{cm}$ und $h = 3{,}5\,\mathrm{cm}$.
Der Punkt B ist der Mittelpunkt des Kreisbogens durch den Punkt C.

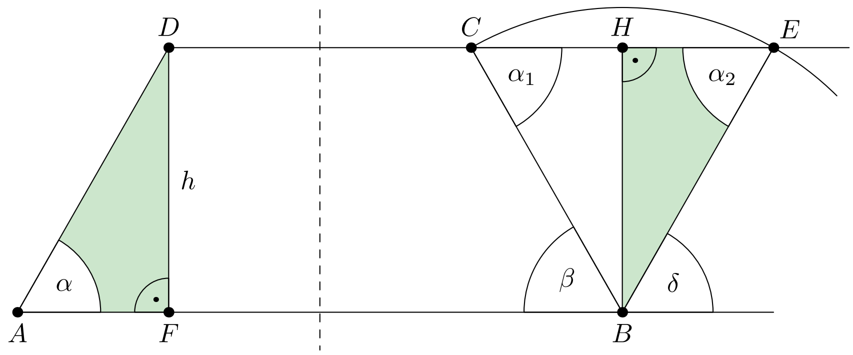
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe:

- Das Dreieck BEC ist gleichschenklig.

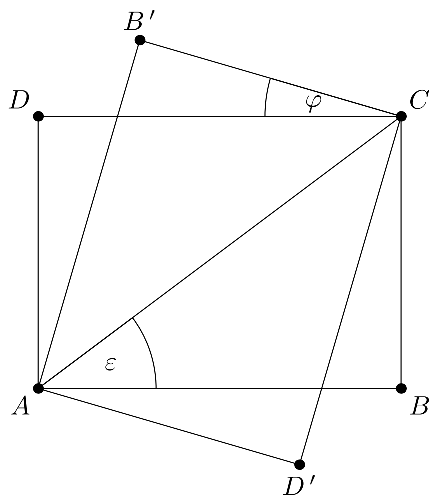
- $\alpha_1 = \alpha$.
- Das Viereck $ABED$ ist ein Parallelogramm.

Lösung: (a)



(b)
- Es gilt: $\overline{BC} = \overline{BE}$, weil die beiden Punkte C und E auf derselben Kreislinie mit B als Mittelpunkt liegen.
- Weil das Trapez achsensymmetrisch ist, folgt $\beta = \alpha$.
  Weiter gilt: $\beta = \alpha_1$ (Z-Winkel). Also folgt $\alpha_1 = \alpha$.
- Das Dreieck BEC ist gleichschenklig. $\Rightarrow$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.
  Weiter folgt $\delta = \alpha_2$ (Z-Winkel) $\Rightarrow$ $\delta = \alpha$, d.h. es gilt: $[AD] \parallel [BE]$ weil damit δ und α F-Winkel sind.
  Beim Trapez $ABCD$ gilt $[AB] \parallel [CD]$ und damit auch $[AB] \parallel [ED]$.
  Daher sind im Viereck $ABED$ jeweils zwei gegenüberliegende Seiten parallel, also ist das Viereck $ABED$ ein Parallelogramm.

26.

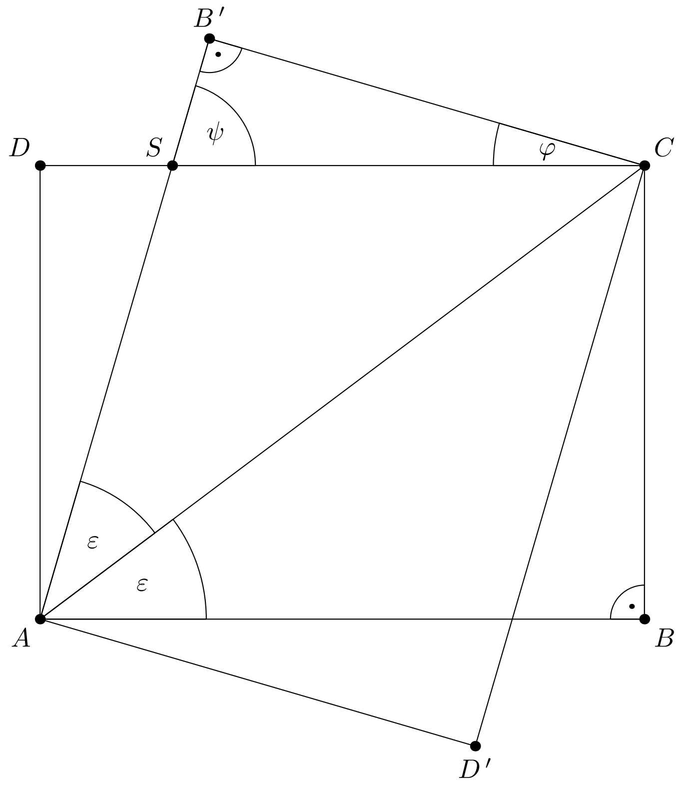


Das Rechteck $ABCD$ wurde an seiner Diagonalen $[AC]$ gespiegelt. Dadurch ist das Viereck $AD'CB'$ entstanden.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne φ für $\varepsilon = 36,87°$.

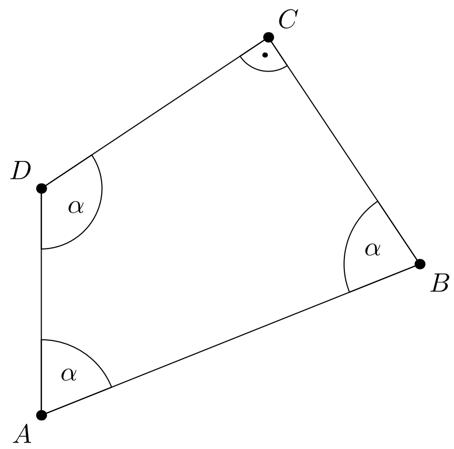
Lösung: (a)



(b) Jede Achsenspiegelung ist längen- und winkeltreu. Daher sind das Viereck $AD'CB'$ und das Rechteck $ABCD$ kongruent. $\Rightarrow \quad \sphericalangle SB'C = 90°$.
Der Winkel CSB' ist ein Stufenwinkel zum Winkel BAS:
$\Rightarrow \quad \psi = 2 \cdot \varepsilon = 73,74°$.
$\Rightarrow \quad \varphi = 90° - \psi = 90° - 73,74° = 16,26°$.

27. In einem Viereck sind drei Winkel gleich groß. Der vierte Winkel ist ein rechter Winkel. Um welches besondere Viereck handelt es sich?

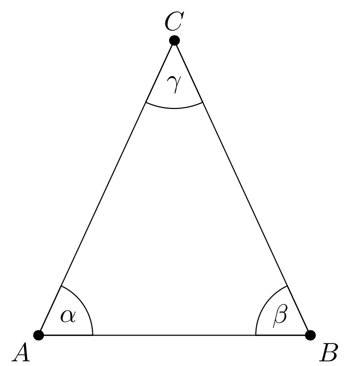
Lösung:



Es gilt: $\alpha + \alpha + \alpha + 90° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot \alpha + 90° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 90°$.
Die drei restlichen Innenwinkel des Vierecks sind damit ebenfalls rechte Winkel. Bei diesem Viereck muss es sich also um ein Rechteck handeln.

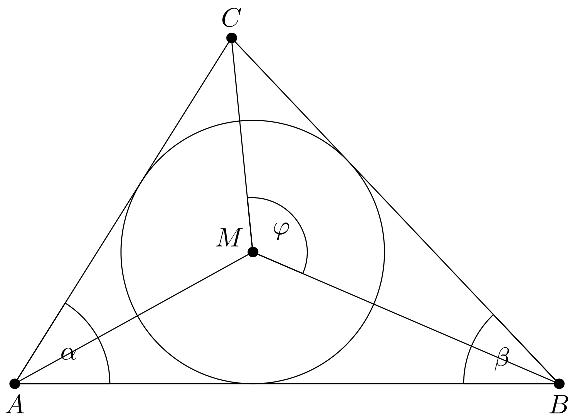
28. In einem gleichschenkligen Dreieck hat ein Winkel das Maß $42,68°$.

Lösung:



In einem gleichschenkligen Dreieck haben die beiden Basiswinkel gleiches Maß. In der Figur gilt also: $\alpha = \beta$.
1. Möglichkeit: $\alpha = \beta = 42,68° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 180° - 2 \cdot 42,68° = 94,64°$.
2. Möglichkeit: $\gamma = 42,68° \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = (180° - 42,68°) : 2 = 68,66°$.

29.



Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist der Punkt M.

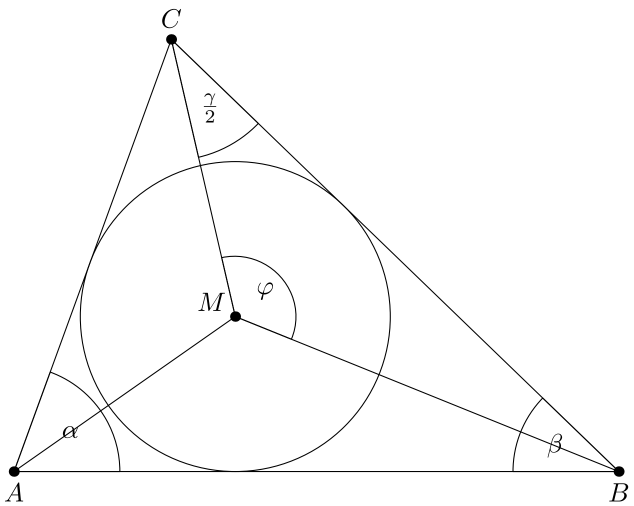
(a) Zeichne die Figur für $\alpha = 70°$, $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 44°$.

(b) Berechne das Maß φ des Winkels BMC.

(c)
- Berechne für $\beta = 60°$ erneut das Winkelmaß φ.
  Was fällt dir auf?
- Zeige: $\varphi = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$.

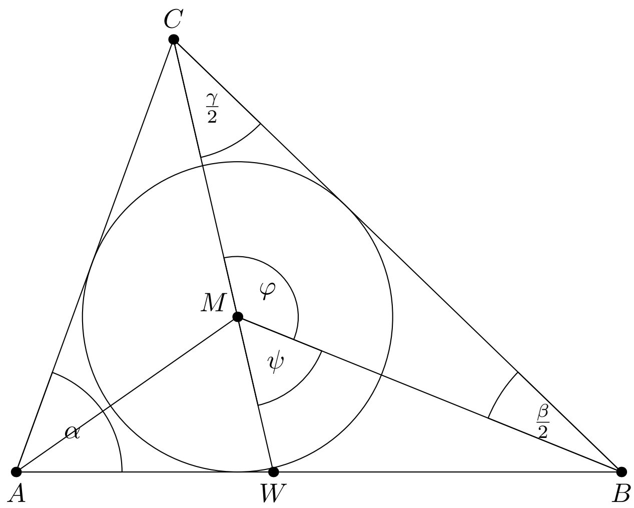
(d) Berechne α für $\varphi = 135,68°$.

Lösung: (a)



(b) $\gamma = 180° - 70° - 44° = 66°$.
Die drei Winkelhabierenden des Dreiecks ABC schneiden sich im Inkreismittelpunkt M.
Also folgt: $\varphi = 180° - 0,5 \cdot 44° - 0.5 \cdot 66° = 125°$.

(c)
- $\gamma = 180° - 70° - 60° = 50°$.
  $\varphi = 180° - 0,5 \cdot 60° - 0.5 \cdot 50° = 125°$.
  Das Winkelmaß φ hängt gar nicht vom Winkelmaß β ab.
-



Der Winkel mit dem Maß ψ ist ein Außenwinkel am Dreieck MBC: $\Rightarrow \quad \psi = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

Gleichzeitig gilt $\varphi = 180° - \psi$.

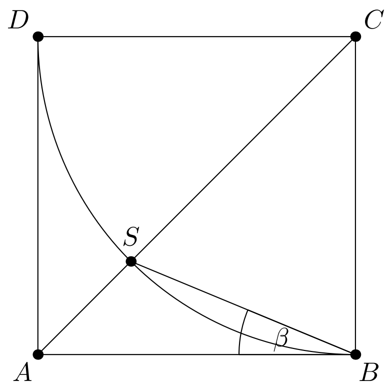
Wegen $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ folgt $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Also ergibt sich: $\varphi = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Und damit $\varphi = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

(d) $90° + \frac{\alpha}{2} = 135{,}68° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 91{,}36°$.

30.

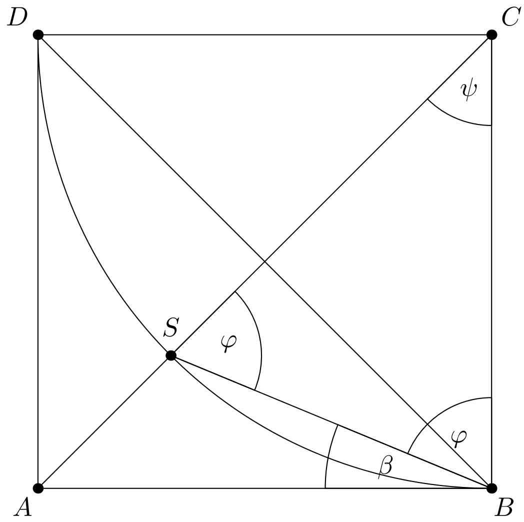


Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

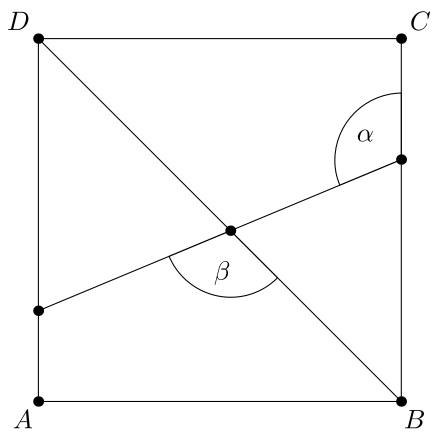
(b) Berechne das Maß β des Winkels SBA.

Lösung: (a)



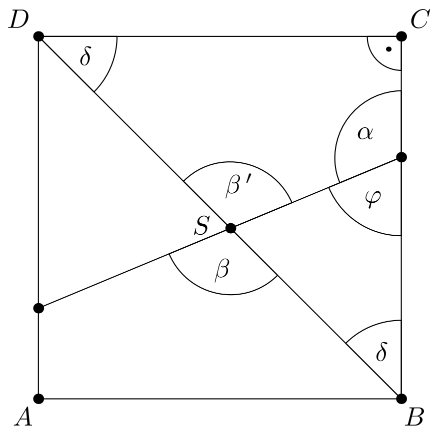
(b) Im Quadrat $ABCD$ halbiert die Diagonale $[AC]$ den rechten Winkel DCB. Also gilt: $\psi = 45°$.
Das Dreieck SBC ist gleichschenklig. $\Rightarrow$ $\varphi = (180° - 45°) : 2 = 67,5°$.
$\Rightarrow$ $\beta = 90° - \varphi = 22,5°$.

31.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Es gilt $\alpha = 123,4°$. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.
Berechne β auf zwei verschiedene Arten.

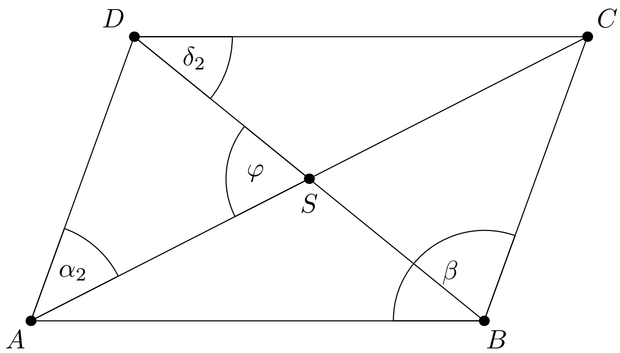
Lösung:



1. Möglichkeit: Über die Innenwinkelsumme im Viereck $SQCD$
Weil jede Quadratdiagonale Winkelhalbierende von zwei rechten Winkeln ist, folgt $\delta = 45°$.
Dann gilt im Viereck $SQCD$: $45° + \beta\,' + 123,4° + 90° = 360°$
$\Rightarrow \quad \beta\,' = 101,6°$.
Weil $\beta\,'$ und β Scheitelwinkel sind, folgt $\beta\,' = \beta = 101,6°$.

2. Möglichkeit: Über den Satz vom Außenwinkel
φ ist der Nebenwinkel von α. Also gilt: $\varphi = 180° - 123,4° = 56,6°$.
β ist ein Außenwinkel am Dreieck BQS: $\beta = \delta + \varphi = 45° + 56,6° = 101,6°$.

32.

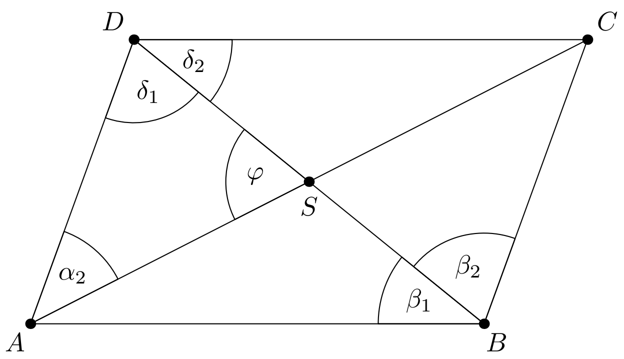


Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
Es soll gelten: $\alpha_2 = 42,1°$, $\delta_2 = 38,7°$ und $\varphi = 65,3°$. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.

(a) Skizziere das Parallelogramm.

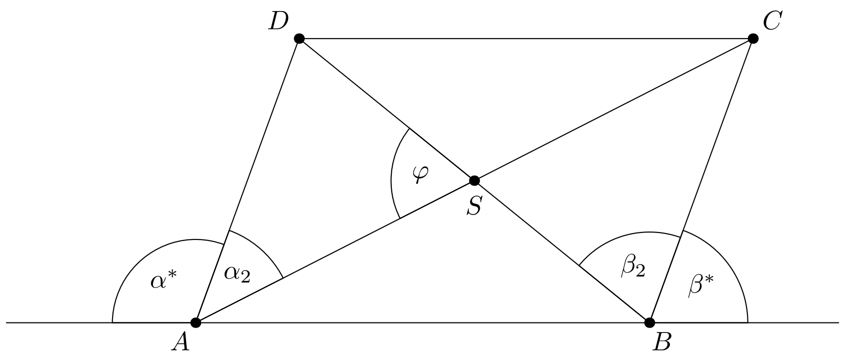
(b) Berechne β .

Lösung: (a)



(b) Es gibt mehrere Möglichkeiten, z.B.:
$\Delta\, ASD$: $\delta_1 = 180° - 42,1° - 65,3° = 72,6° = \beta_2$ (Z-Winkel) .
$\beta_1 = \delta_2 = 38,7°$ (Z-Winkel) $\quad \Rightarrow \quad \beta = \delta_1 + \delta_2 = 111,3°$.

33.

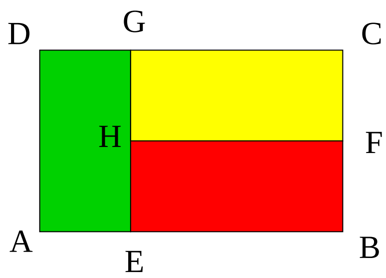


Die Klasse 7a bekommt vom Mathematiklehrer die folgende Aufgabe gestellt:
„Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
Es soll gelten: $\alpha_2 = 38,9°$, $\alpha^* = 109,2°$, $\varphi = 67,5°$ und $\beta^* = 77,6°$.
Berechne β_2 . Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.“
Erwin meint nach mehreren Rechenversuchen: „In der Angabe kann etwas nicht stimmen.“ Wo liegt der Fehler?

Lösung: Es müsste gelten: $\beta = \sphericalangle CBA = 180° - \beta^* = 180° - 77,6° = 102,4°$.
Weil aber α^* und β zwei zugehörige F-Winkel sind, müssten beide Winkel gleiches Maß besitzen.
Aber in der Angabe steht: „$\alpha^* = 109,2° \neq 102,4°$.“ Das geht nicht.

5. Drehung

1.



Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.
Die drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Ihre Seitenlängen stehen jeweils im Verhältnis 1:2. Weiter gilt: $\overline{HF} = 2x\,\text{cm}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

(a) Zeichne die Figur für $x = 4$.
In welchem Verhältnis stehen hier die Seitenlängen des Rechtecks $ABCD$? Ist das immer so, egal, womit man x belegt?

(b) Berechne den Umfang u des Rechtecks $ABCD$ in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $u(x) = 10x\,\text{cm}$.]

(c) Berechne x so, dass der Saum der Fahne $4\,\text{m}\,30\,\text{cm}$ lang ist.

(d) Das Rechteck $HFCG$ lässt sich so drehen, dass es sich mit dem Rechteck $AEGD$ deckt.
Zeichne die Figur für $x = 6$ und konstruiere das Drehzentrum Z.
Begründe: Der Drehwinkel hat das Maß 90°.

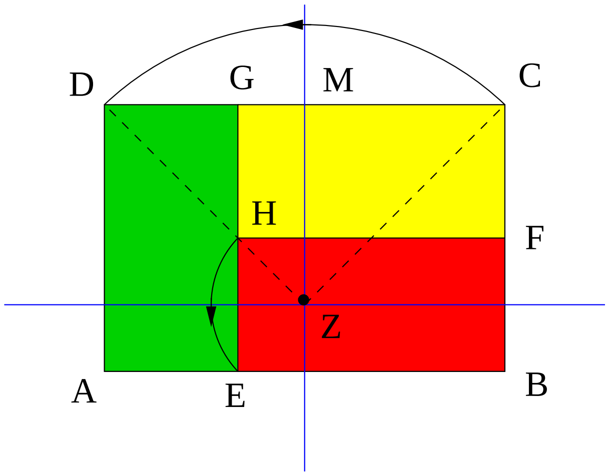
Lösung:

(a) Das Rechteck $ABCD$ ist $12\,\text{cm}$ breit und $8\,\text{cm}$ hoch.
Die Seitenlängen stehen im Verhältnis 2:3.
Breite jedes Rechtecks im Inneren: $3x\,\text{cm}$
Höhe jedes Rechtecks im Inneren: $2x\,\text{cm}$
Breite : Höhe = 2x : 3x = 2 : 3. Das gilt für alle $x \in \mathbb{Q}^+$.

(b) $u(x) = 2 \cdot [(2x + x) + (x + x)]\,\text{cm} = 10x\,\text{cm}$

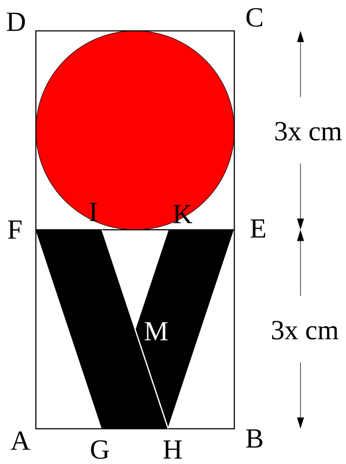
(c) $10x = 430 \quad \Rightarrow \quad x = 43$

(d)



Für diese Drehung gilt z.B.: $C \to D$ und $H \to E$. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecken $[CD]$ und $[HE]$ ergibt den Drehpunkt Z.
Die Dreiecke DZM und ZCM sind gleichschenklig-rechtwinklig. Also hat der Drehwinkel CZD das Maß 90°.

2. Das ist ein Bild des Logos der Firma MARABU, die Farben herstellt.



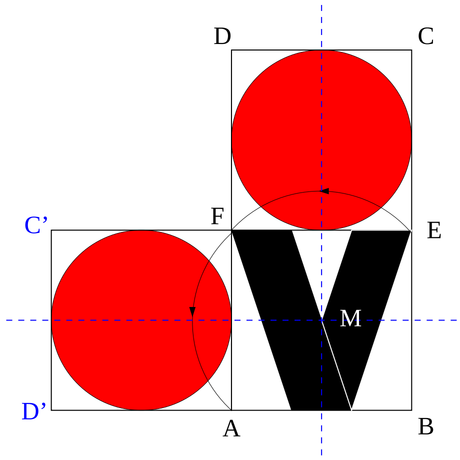
Die Figur setzt sich aus zwei Quadraten zusammen.
Die Strecken $[AG], [GH], [HB], [FI], [IK]$ und $[KE]$ sind alle gleich lang.

(a) Zeichne die Figur für $x = 2$. Platzbedarf nach links: 7 cm

(b) Die Figur $FECD$ soll so gedreht werden, dass sie dann lückenlos neben das Quadrat $ABEF$ passt.

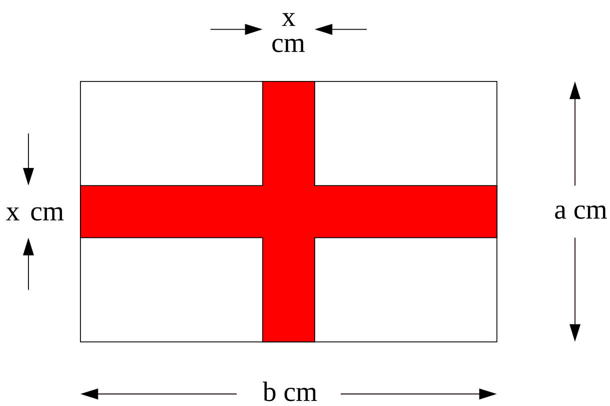
- Begründe: Das Drehzentrum muss im Punkt M liegen.
- Führe die Drehung durch.
- Begründe: Der Drehwinkel hat das Maß 90°.

Lösung: (a) –

(b)
- Der Punkt E muss so gedreht werden, dass er auf F zu liegen kommt. Also muss das Drehzentrum auf der Mittelsenkrechten der Strecke $[EF]$ liegen.
  Gleichzeitig wird der Punkt F auf den Punkt A gedreht. Also muss das Drehzentrum auch auf der Mittelsenkrechten der Strecke $[AF]$ liegen.
  Also liegt das Drehzentrum im Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten, nämlich im Punkt M, dem Quadratmittelpunkt.
- 

- 1. Möglichkeit:
  Das Dreieck MEF ist gleichschenklig-rechtwinklig mit der Hypotenuse $[FE]$.
  2. Möglichkeit:
  Die Mittelenkrechte der Strecke $[FE]$ deckt sich nach der Drehung mit der Mittelsenkrechten zu $[AF]$. Weil beide Mittelsenkrechten aufeinander senkrecht stehen, hat der Drehwinkel das Maß 90°.

3. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



(a) Zeichne die Figur für $b = 8$, $a = 5$ und $x = 1$.

(b) Das weiße Rechteck oben links lässt sich auf das weiße Rechteck rechts unten verschieben.

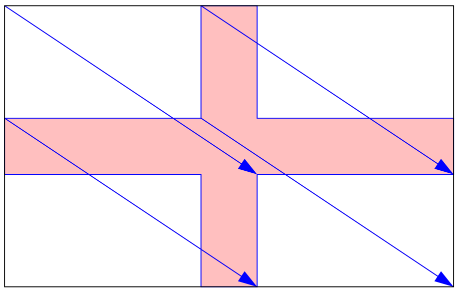
- Zeichne die vier Stellvertreter des Verschiebungsvektors $\vec{v}$ zwischen den entsprechenden Eckpunkten der beiden Rechtecke ein.
- Gib die Komponenten des Verschiebungsvektors $\vec{v}$ an.

(c) Das weiße Rechteck rechts oben lässt sich so drehen, dass es mit dem Rechteck links unten zur Deckung kommt.

- Zeichne das Drehzentrum ein und gib den Drehwinkel an.
- Um welche besondere Drehung handelt es sich?

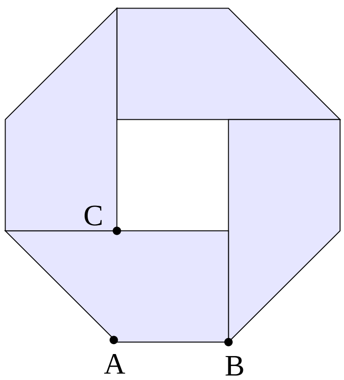
Lösung:

(a) –

(b)
- 
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}$

(c)
- Das Drehzentrum liegt im Schnittpunkt der Diagonalen des großen Rechtecks. Dieser Schnittpunkt deckt sich mit dem Symmetriezentrum des Kreuzes. Der Drehwinkel beträgt 180°.
- Es handelt sich um eine Punktspiegelung.

4. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das weiße Viereck im Inneren ist ein Quadrat. Es gilt: $\overline{AB} = \overline{AC} = 2{,}5\,\text{cm}$



(a) Zeichne die Figur.

(b) Gib alle Winkelmaße φ an, um die man die Figur drehen kann, sodass sie sich wieder mit der Ausgangsfigur deckt. Zeichne dazu das Drehzentrum und weitere Hilfslinien ein.

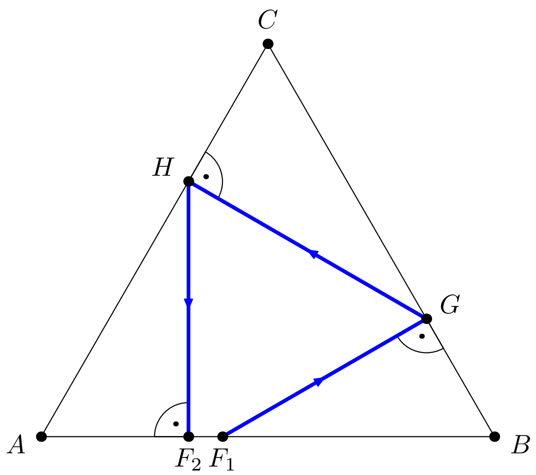
(c) Begründe: Die Figur ist punktsymmetrisch.

Lösung: (a) –

(b) $\varphi \in \{k \cdot 90°\}$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Das Drehzentrum ist der Quadratmittelpunkt. Die geforderten Hilfslinien verlaufen vom Drehzentrum zu Urbildpunkten und den zugehörigen durch Drehung entstandenen Bildpunkten.

(c) Wegen $2 \cdot 90° = 180°$ kann auch um $180°$ gedreht werden. Jede Drehung um $180°$ ist eine Punktspiegelung.

5.

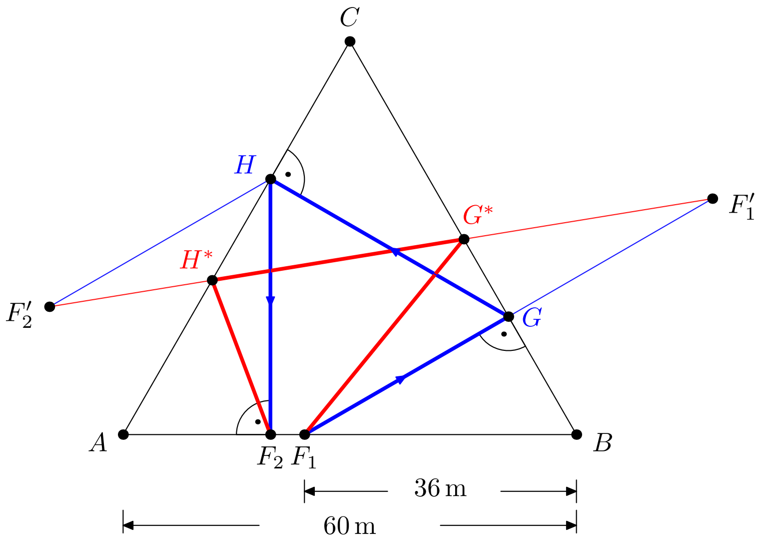


Herr Theo Lith ist als Platzwart für ein Spielfeld ABC verantwortlich, das die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 60 m hat. Der Fahnenmast F_1 ist 36 m vom Punkt B entfernt.
Wie in der Skizze dargestellt, läuft er während eines Kontrollgangs zu den seitlichen Begrenzungen dieses Spielfeldes von F_1 nach G, dann nach H und schließlich gelangt er zum Fahnenmast F_2.

(a) Zeichne die Figur mit dem Weg von Herrn Lith. Dabei sollen 10 m einem cm in deinem Heft entsprechen.

(b) Berechne den Abstand der beiden Fahnenmasten.

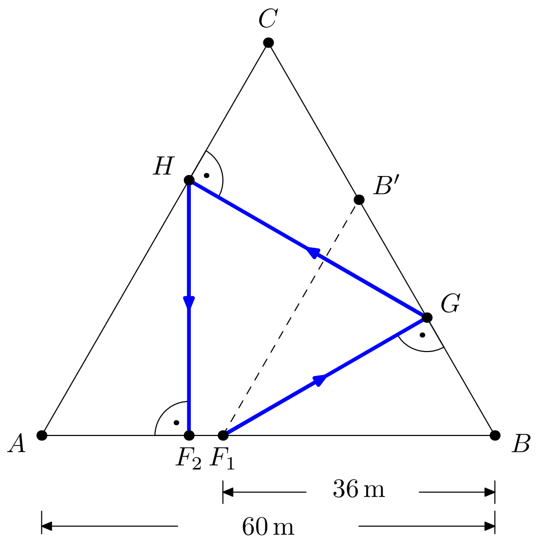
(c)



Es wurden die Punkte F_1 an $[BC]$ und F_2 an $[AC]$ gespiegelt. Dadurch entstehen die Spiegelbilder F_1' und F_2'.

- Begründe anhand der Zeichnung: Es gilt z.B. $\overline{F_1G} = \overline{GF_1'}$ und $\overline{HF_2'} = \overline{HF_2}$.
- Begründe: Der Streckenzug $F_1' - G - H - F_2'$ ist genauso lang wie der Weg von Herrn Lith, der ihn vom Mast F_1 über G und H nach F_2 führte.
- Begründe: Wäre Herr Lith auf seinem Komtrollweg vom Masten F_1 über G^* nach H^* zum Masten F_2 gegangen, dann wäre das der kürzeste Kontrollweg gewesen.

Lösung: (a)



(b) **In einem gleichseitigen Dreieck hat jeder Innenwinkel das Maß $60°$.**
Wenn du den Punkt B am Punkt G spiegelst, dadurch erhältst du den Punkt B'. Weil jede Achsen- oder Punktspiegelung winkeltreu ist, muss das Dreieck F_1BB' gleichseitig sein, denn alle Innenwinkel haben das Maß $60°$.
Dann ist das Dreieck F_1BG ein halbes gleichseitiges Dreieck und es gilt:

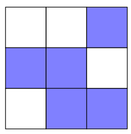
$\overline{BG} = 0,5 \cdot 36\,\mathrm{m} = 18\,\mathrm{m}.$
$\Rightarrow \quad \overline{GC} = 60\,\mathrm{m} - 18\,\mathrm{m} = 42\,\mathrm{m}.$
Das Dreieck HGC ist wieder ein halbes gleichseitiges Dreieck und es gilt:
$\overline{HC} = 0,5 \cdot 42\,\mathrm{m} = 21\,\mathrm{m}.$
$\Rightarrow \quad \overline{AH} = 60\,\mathrm{m} - 21\,\mathrm{m} = 39\,\mathrm{m}.$
Weil das Dreieck AF_2H wiederum ein halbes gleichseitiges Dreieck ist, folgt:
$\overline{AF_2} = 0,5 \cdot 39\,\mathrm{m} = 19,5\,\mathrm{m}.$
$\Rightarrow \quad \overline{F_1F_2} = 60\,\mathrm{m} - 36\,\mathrm{m} - 19,5\,\mathrm{m} = 4,5\,\mathrm{m}.$
Die beiden Fahnenmasten sind $4,5\,\mathrm{m}$ voneinander entfernt.

(c)
- Dieser Sachverhalt ergibt sich sofort aus der Längentreue de Achsenspiegelung.
- Wie schon vorher gezeigt sind die Längen der Strecken $[GF_1]$ und $[GF_1']$ sowie $[HF_2]$ und $[HF_2']$ gleich. Hinzu kommt lediglich die mittlere Strecke $[GH]$, die ja den Rest beiden Streckenzüge ausmacht. Also sind beide Wege gleich lang.
- Die kürzeste Verbindung zwischen F_1' und F_2' liegt ist die gerade Linie zwischen diesen beiden Punkten.
  Aus der Längentreue der Achsenspiegelung folgt nun, dass $\overline{F_1G^*} = \overline{F_1'G^*}$ und $\overline{F_2H^*} = \overline{F_2'H^*}$ sein muss.
  Weil $[G^*H^*]$ in beiden Streckenzügen den Rest bildet, ist der Streckenzug $F_1 - G^* - H^* - F_2$ genauso lang wie die minimale Strecke $[F_1'F_2']$, also ebenfalls minimal.

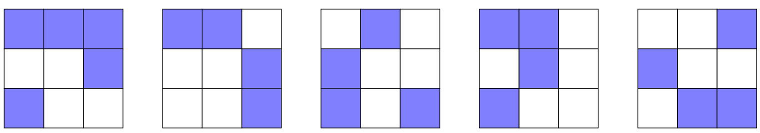
Anmerkungen

- Obwohl die drei Lote jeweils die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes zur gegenüber liegenden Seite des Grundstücks darstellen, ergibt die Summe dieser drei Entfernungen nicht den kürzesten Weg von F_1 zu den zwei Seiten $[BC]$ und $[CA]$ nach F_2.
- Mit Hilfe der GEONExT-Datei „07eh011.gxt“, kannst du den Kontrollgang von Herrn Lith variieren.

6.



Stelle dir vor, dass die quadratisch gemusterte Figur auf eine durchsichtige Folie aufgedruckt ist.
Welche der unten abgebildeten gemusterten Quadrate lassen sich mit dem obigen Quadrat so zur Deckung bringen, dass dann alles dunkel erscheint?



a) b) c) d) e)

Lösung: Zur besseren Veranschaulichung sind die Felder der ursprünglichen Figur durchnummeriert:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figur a): Wenn du dieses Muster auf die obige Figur schiebst, dann werden alle Felder überdeckt (das Feld Nr. 3 sogar doppelt).

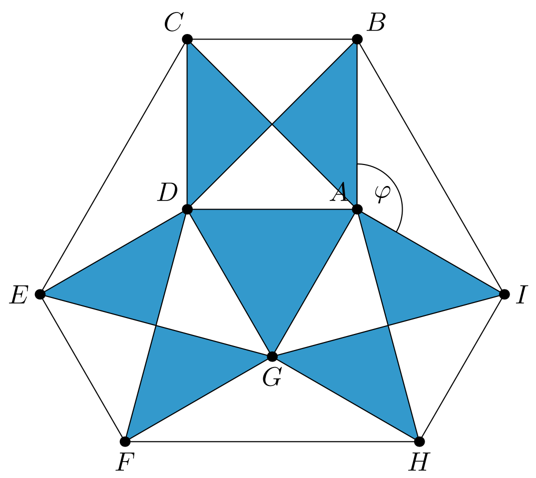
Figur b): Ein Feld bleibt weiß: z.B. Nr. 6 oder Nr. 7.

Figur c): Wenn du diese Figur um $-90°$ oder $270°$ drehst, lässt sie sich so auf die ursprüngliche Figur schieben, dass alle Felder dunkel erscheinen.

Figur d): Eines der Felder 3, 6 oder 9 bleibt in jedem Fall weiß.

Figur e): Wenn du diese Figur an ihrem Mittelpunkt spiegelst oder um $180°$ drehst, lässt sie sich so auf die ursprüngliche Figur schieben, dass alle Felder dunkel erscheinen.

7.



Die Figur ist drehsymmetrisch.

(a) Gib drei verschiedene Möglichkeiten an, wie du das Drehzentrum Z konstruieren könntest. Zeichne das Drehzentrum ein.

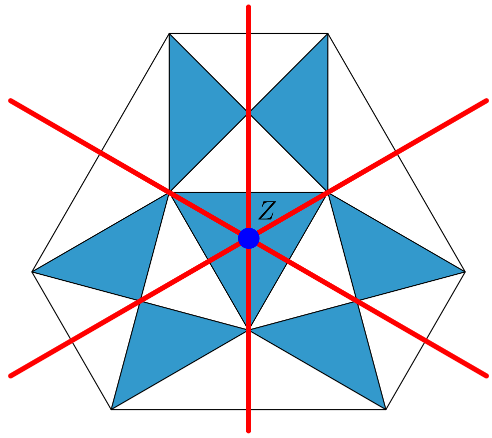
(b) Die Figur lässt sich um verschiedene Winkel α so drehen, dass die gedrehte Figur mit der ursprünglichen Figur wieder zur Deckung kommt.
Gib für $\alpha \in \,]\,0°; 360°\,[$ die betreffenden Drehwinkel an.

(c) Berechne φ.

Lösung: (a)

- Die drei Mittelsenkrechten auf die Seiten $[EC]$, $[BI]$ und $[HF]$ schneiden sich in Z.
- Die drei Mittelsenkrechten auf die Seiten $[DA]$, $[AG]$ und $[GD]$ schneiden sich in Z.

- Die drei Mittelsenkrechten auf die Seiten $[CB]$, $[IH]$ und $[FE]$ schneiden sich in Z.

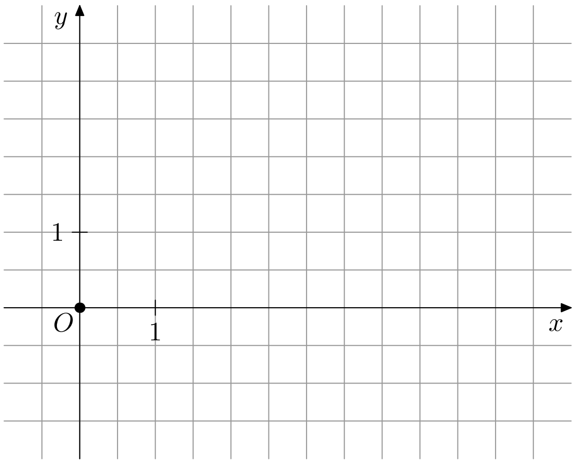


(b) $\alpha \in \{120°; 240°\}$

(c) Der Winkel φ wird von den beiden Quadraten $ABCD$ und $GHIA$ eingeschlossen. Hinter dem Scheitel liegt das gleichseitige Dreieck ADG. Mit dem betreffenden Vollwinkel ergibt sich:
$2 \cdot 90° + 60° + \varphi = 360° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 120°$

6. Punktspiegelung

1.



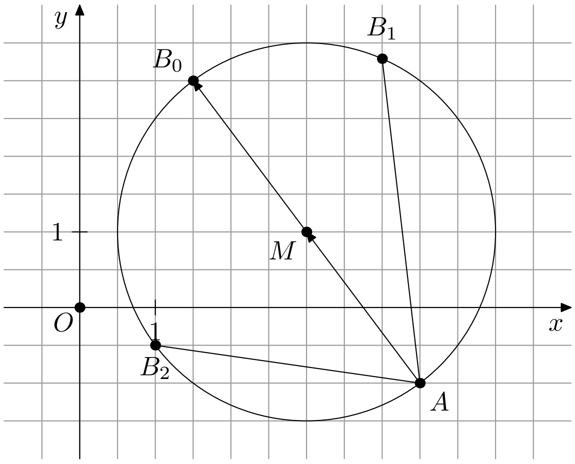
Gegeben sind ein Kreis k mit dem Mittelpunkt $M(3 \mid 1)$ und dem Radius $r = 2.5\,\text{cm}$ sowie der Punkt $A(4,5 \mid -1) \in k$.

(a) Zeichne den Kreis k und den Punkt A in das Koordinatensystem ein.

(b) Auf der Kreislinie k wandern Punkte B_n, so dass laufend Kreissehnen $[AB_n]$ erzeugt werden.
Zeichne für $B_1(4 \mid y_1)$ mit $y_1 > 0$ und $B_2(x_2 \mid -0,5)$ mit $x_2 < 3$ die beiden Kreissehnen $[AB_1]$ und $[AB_2]$ ein.

(c) Unter allen Kreissehnen $[AB_n]$ gibt es eine längste: die Sehne $[AB_0]$. Zeichne sie ein. Berechne die Koordinaten des Punktes B_0.

Lösung:



(a) Siehe Zeichnung.

(b) Siehe Zeichnung.

(c) Siehe Zeichnung. Die längste Kreissehne muss durch den Kreismittelpunkt verlaufen. Es gilt z.B.: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB_0}$ mit $B_0(x \mid y)$.

$$\begin{pmatrix} 3-4,5 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -1,5 = x-3 \text{ und } 2 = y-1$$

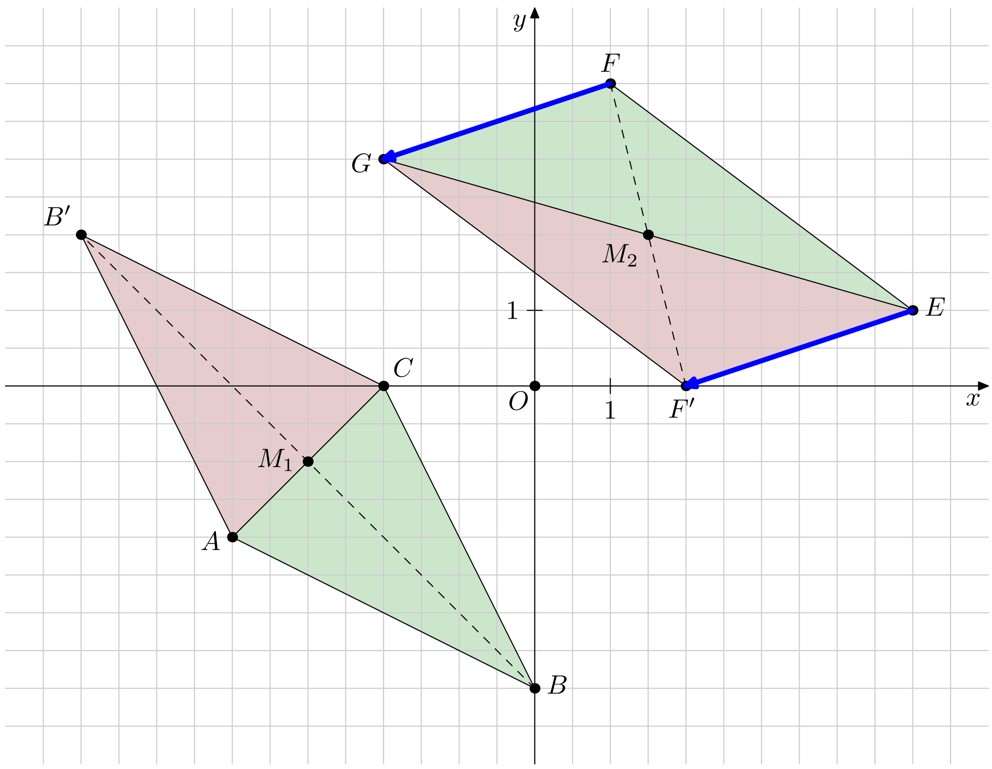
$$\Rightarrow \quad B_0(1,5 \mid 3)$$

2. Gegeben sind die Punkte $A(-4 \mid -2)$, $B(0 \mid -4)$, $C(-2 \mid 0)$ und $E(5 \mid 1)$, $F(1 \mid 4)$ und $G(-2 \mid 3)$.
   (a) Zeichne die beiden Dreiecke ABC und EFG in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-7 \leqq x \leqq 6$ und $-5 \leqq y \leqq 5$
   (b)
   - Spiegle das Dreieck ABC am Mittelpunkt der Seite $[AC]$. Dadurch entsteht das Viereck $ABCB'$.
   - Notiere einen Namen, der dieses Viereck möglichst genau beschreibt.
   - Gib eine der charakteristischen Eigenschaften dieses Vierecks an.

   (c)
   - Spiegle das Dreieck EFG am Mittelpunkt der Seite $[EG]$. Dadurch entsteht das Viereck $EFGF'$.
   - Notiere einen Namen, der dieses Viereck möglichst genau beschreibt.
   - Gib eine der charakteristischen Eigenschaften dieses Vierecks an.

   (d) Berechne die Komponenten des Pfeiles $\overrightarrow{BC}$.
   (e) Berechne die Koordinaten des des Bildpunktes F'.

Lösung: (a)



(b)
- Siehe Zeichnung.
  Hier gilt: $A \xrightarrow{M_1} C \quad C \xrightarrow{M_1} A$ und $B \xrightarrow{M_1} B'$
- Dieses Viereck ist eine **Raute**.
  Anmerkung: Auf jeden Fall ist das Viereck ein Parallelogramm, weil jede Punktspiegelung winkeltreu ist. Weil das Dreieck ABC aber gleichschenklig ist, sind alle vier Seiten gleich lang, also ist dieses Parallelogramm sogar eine Raute.
- Alle vier Seiten sind gleich lang.

(c)
- Siehe Zeichnung. Hier gilt: $E \xrightarrow{M_2} G \quad G \xrightarrow{M_2} E$ und $F \xrightarrow{M_2} F'$
- Es ist ein **Parallelogramm**.
- Je zwei gegenüber liegende Seiten sind parallel.

(d)

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

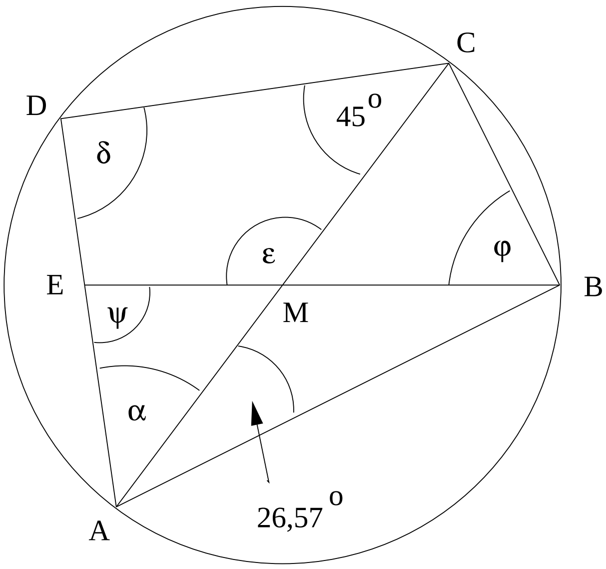
(e) Es sei $F'(x' \mid y')$. Im Parallelogramm $EFGF'$ gilt z.B.: $\overrightarrow{EF'} = \overrightarrow{FG}$:

$$\begin{pmatrix} x'-5 \\ y'-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} \Leftrightarrow & x'-5 = -3 & \Leftrightarrow & x' = -2 \\ \wedge & y'-1 = -1 & \Leftrightarrow & y' = 0 \qquad \Rightarrow \quad F'(2 \mid 0) \end{array}$$

7. Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche

1. Ermittle alle mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße.

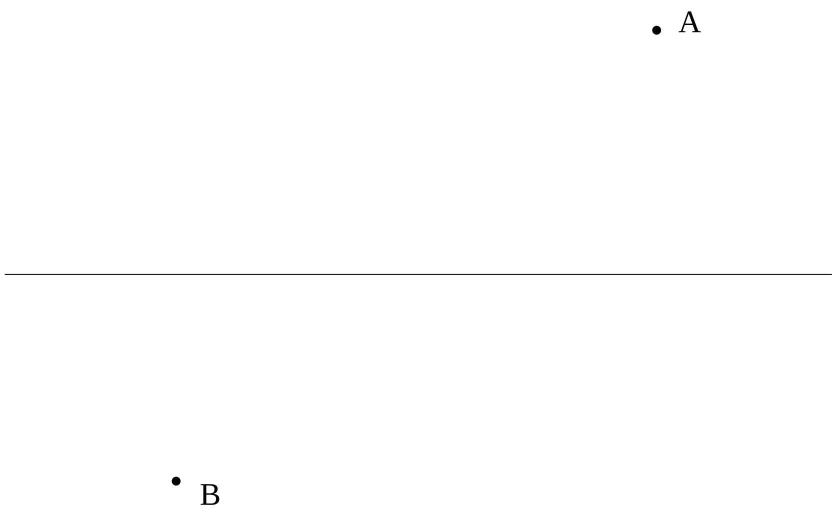


Lösung: $\delta = 90°$ $\alpha = 45°$ $\varepsilon = 126{,}86°$ $\varphi = 63{,}43°$ $\psi = 81{,}86°$

2. Gegeben ist ein Kreis k mit Radius $r = 5\,\text{cm}$ und dem Mittelpunkt $M(1 \mid 2)$. Durch die Punkte $A(-5 \mid 4)$ und $B(7 \mid 3)$ verläuft eine Gerade g.
   (a) Fertige gemäß den Angaben eine Zeichnung an.
   Platzbedarf: $-7 \leqq x \leqq 8$ und $-4 \leqq y \leqq 8$
   (b) Kennzeichne farbig eindeutig die Menge aller Punkte auf der Kreislinie k, die von der Geraden g mindestens $2\,\text{cm}$ Abstand haben.
   (c) Fritz behauptet: „Auf der ganzen Kreislinie k gibt es keinen Punkt, der vom Punkt A weniger als $1\,\text{cm}$ entfernt ist.“ Hat Fritz Recht? Die Begründung für eine Antwort sollst du in deiner Zeichnung deutlich machen.

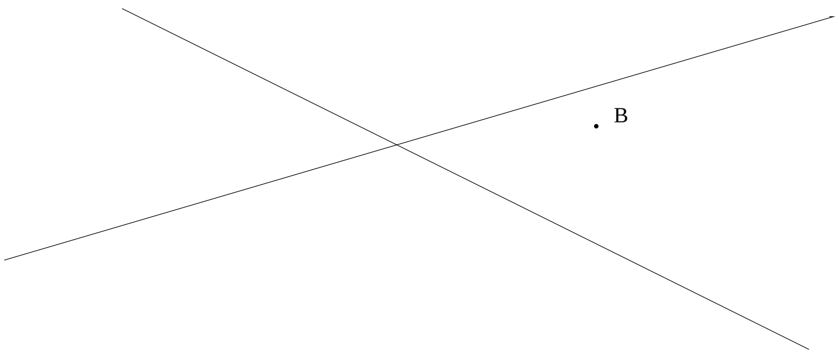
Lösung: (a) –
(b) –
(c) Fritz hat Recht, denn der Kreis um A mit Radius $1\,\text{cm}$ meidet die Kreislinie k.

3. Im Zuge des sechsspurigen Ausbaus der Autobahn A3 werden Lärmschutzmaßnahmen notwendig. Der Lärmschutzwall muss vom unten eingezeichneten Mittelstreifen der Autobahn einen Abstand von 50 m haben. Er wird aber nur in dem Bereich eingerichtet, wo die Entfernung zwischen Ortschaft und Lärmschutzwall weniger als 200 m beträgt. Markiere den möglichen Verlauf des Walls für die Ortschaften A und B! (Maßstab: 100 m $\widehat{=}$ 2 cm)



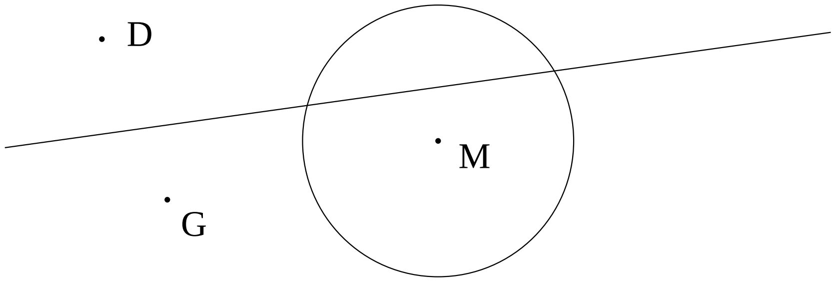
Lösung: - -

4. In der Nähe einer Landstraßenkreuzung wird ein Familienerholungsheim errrichtet. Es soll von beiden Straßen den gleichen Abstand haben und außerdem von einem Bauernhof B 40 m entfernt liegen. Kennzeichne den möglichen Standort S! (Maßstab: 20 m $\widehat{=}$ 1 cm)



Lösung: - -

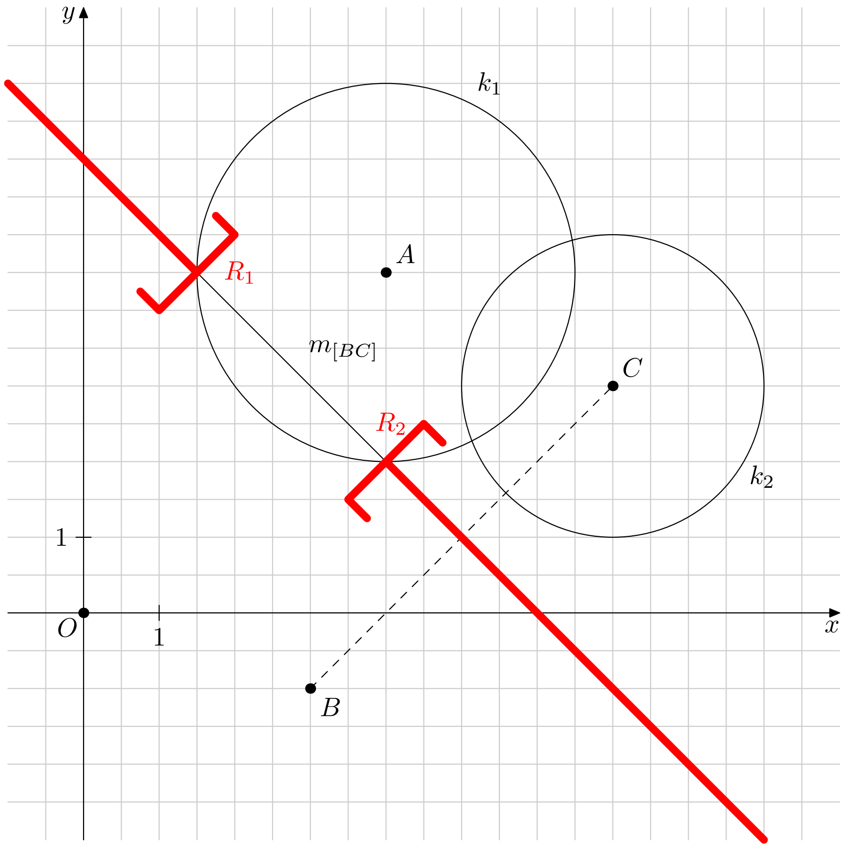
5. Formuliere zur abgebildeten Ortslinienverknüpfung eine mögliche praxisorientierte Aufgabenstellung!



Lösung: - -

6. Gegeben sind die Punkte $A(4 \mid 4,5), B(3 \mid -1)$ und $C(7 \mid 3)$.
   (a) Zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-1 \leqq x \leqq 10$ und $-3 \leqq y \leqq 8$
   (b) Kennzeichne farbig die Menge aller Punkte P, die jeweils von den Punkten B und C gleich weit entfernt sind und die gleichzeitig vom Punkt A mindestens $2,5\,\text{cm}$ entfernt sind.
   (c) Mache in deiner Zeichnung deutlich, ob es unter allen Punkten P, welche die in Aufgabe (b) genannten Eigenschaften besitzen, solche gibt, die vom Punkt C höchstens $2\,\text{cm}$ entfernt sind. Notiere eine Begründung.

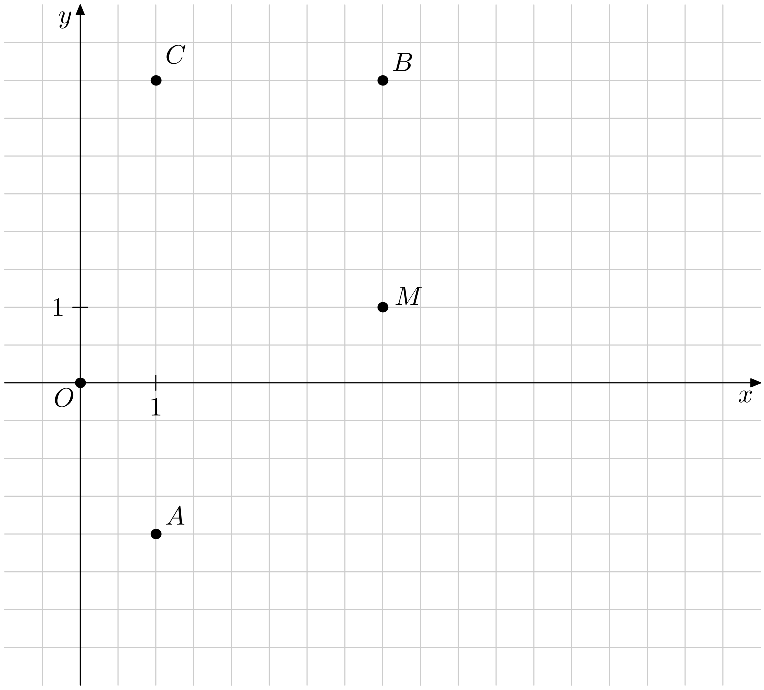
Lösung: (a)



Kommentar:
Alle Punkte P, die gleichweit von B und C entfernt sind, liegen auf der **Mittelsenkrechten** $m_{[BC]}$.
Gleichzeitig dürfen die Punkte P **nicht innerhalb des Kreises** k_1 um den Punkt A mit dem Radius 2,5 cm liegen. Damit ergibt sich die farbig dargestellte Lösungsmenge. Die Randpunkte R_1 und R_2 der beiden Halbgeraden gehören zur Lösungsmenge dazu, weil beide sowohl auf der Mittelsenkrechten als auch nicht im Inneren von k_1 liegen.

(b) Alle Punkte, die vom Punkt C höchstens 2 cm entfernt sind, dürfen sich **nicht außerhalb** der Kreislinie k_2 aufhalten. Weil aber die Kreislinie k_2 die Mittelsenkrechte $m_{[AB]}$ und damit auch die farbig gekennzeichnete Lösungsmenge meidet, gibt es die fraglichen Punkte nicht.

7.



(a) Zeichne in das obige Koordinatensystem folgende Objekte ein:
$[AC$ $\quad BC \quad$ $[MB$ $\quad$ und $\quad$ $k(M;\, r = 3\,\text{cm})$.

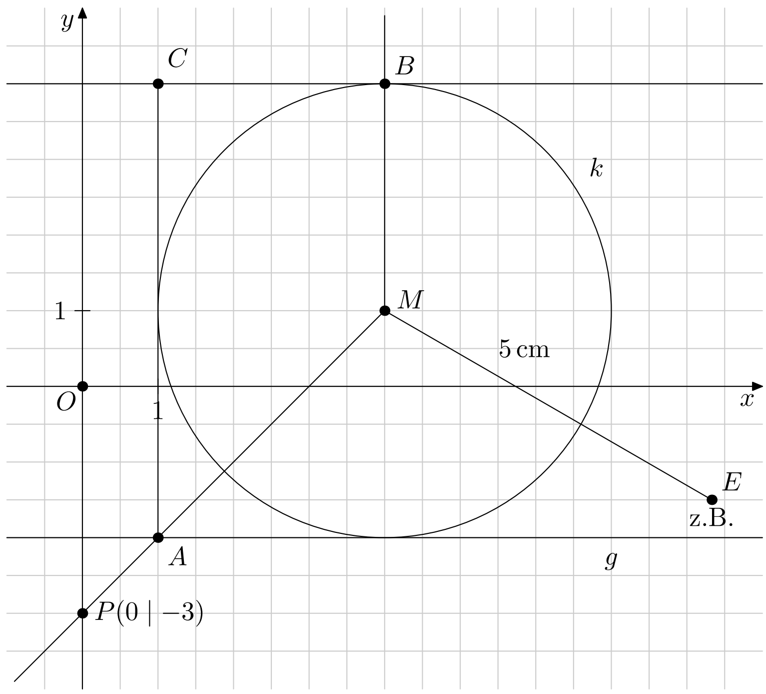
(b) Zeichne im IV. Quadranten einen Punkt E ein, so dass $\overline{ME} = 5\,\text{cm}$ gilt.

(c) Zeichne durch den Punkt A eine Gerade g ein, sodass $CB \cap g = \emptyset$ gilt.

(d) Die Halbgerade $[MA$ schneidet die y-Achse im Punkt P. Gib die Koordinaten des Punktes P an.

(e) Wie viele Kreise mit dem Mittelpunkt M gibt es, die durch alle vier Quadranten verlaufen?
Gib zwei Kreisradien an.

Lösung:



(a) Siehe Zeichnung.

(b) Siehe Zeichnung; es gibt beliebig viele Lösungen: Der Punkt E muss sich im IV. Quadranten auf einer Kreislinie um den Punkt M mit dem Radius 5 cm aufhalten

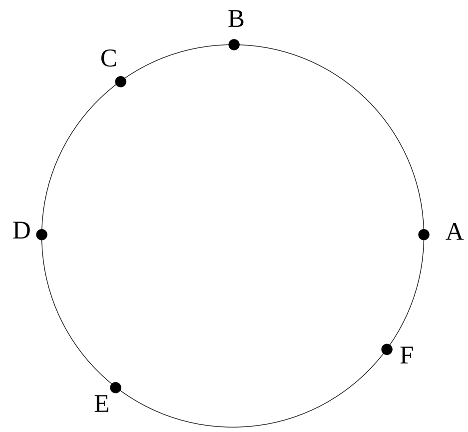
(c) Die Gerade g muss zur Geraden CB parallel verlaufen.

(d) $P(0 \mid -3)$

(e) Es gibt beliebig viele Kreise, z.B. für $r_1 = 4{,}5\,\text{cm}$ oder $r_2 = 10\,\text{km}$.

8. Sechs Punkte A, B, C, D, E und F liegen getrennt auf einer Kreisline.
Wie viele Dreiecke kannst du aus jeweils drei dieser sechs Punkte einzeichnen?

Lösung:



Eckpunkt A als erster:

ABC, ABD, ABE, ABF
ACD, ACE, ACF
ADE, ADF
AEF.

Eckpunkt B als erster:

BCD, BCE, BCF
BDE, BDF
BEF.

Eckpunkt C als erster:

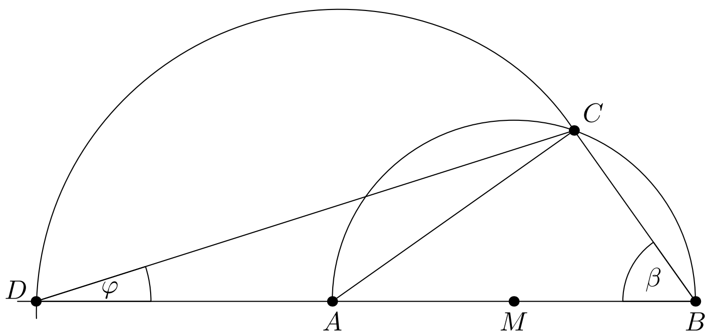
CDE, CDF
CEF.

Eckpunkt D als erster:

DEF.

Es gibt nicht mehr und nicht weniger als 20 solche Dreiecke.

9.

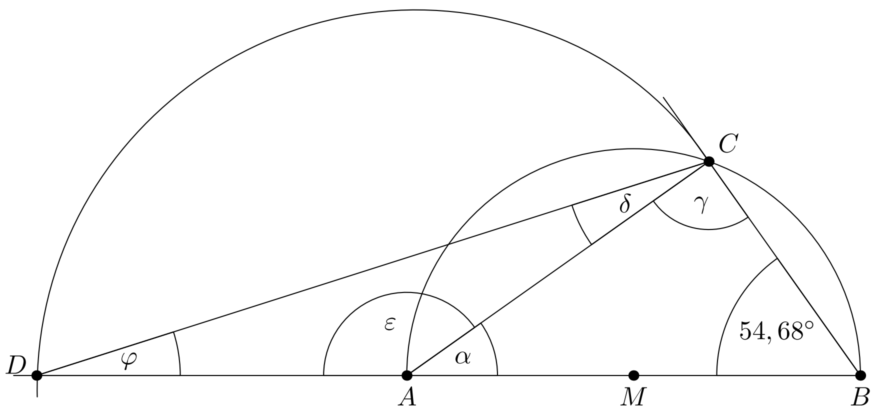


Die Punkte M und A sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\beta = 54,68°$.

(b) Berechne φ auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

Lösung: (a)



- Zeichne den Halbkreis mit dem Durchmesser $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.
- Trage im Punkt B den Winkel mit dem Maß $54,68° \approx 55°$ an.
- Der freie Schenkel des $55°$-Winkels schneidet den Halbkreis im Punkt C.
- Zeichne den Kreisbogen mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{AC}$ vom Punkt C aus so weit, bis er die Halbgerade $[BA$ schneidet. Der Schnittpunkt ist der Punkt D.

(b) Der Kreisbogen über dem Durchmesser $[AB]$ ist der THALES-Kreis.
$\Rightarrow \quad \gamma = 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° - 54,68° = 35,32°$.
ε ist der Nebenwinkel von α: $\quad \varepsilon = 180° - 35,32° = 144,68°$.
Das Dreieck DAC ist gleichschenklig: $\overline{AD} = \overline{AC}$.
$\Rightarrow \quad \delta = \varphi = (180° - 144,68°) : 2 = 17,66°$.

Teil II.

Wahlpflichtfächergruppe II/III

8. Die Menge der rationalen Zahlen

1. Berechne:
   (a) $(-1) \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) =$
   (b) $[(-1) : (-1)] : [(-2) : (+2)] =$
   (c) $5 - 2 \cdot [17 + (-4) \cdot 4] + [22 - 111 : (-37)] =$

Lösung: (a) 0 (b) -1 (c) 28

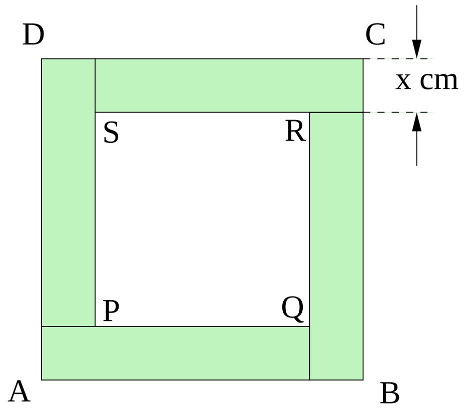
2. Ergänze im Folgenden die Leerstellen.
   $3x^2 + 18x + \ldots = 0 \quad G = \mathbb{R}, L = \{-2; \ldots\}$.

Lösung: $3x^2 + 18x + 24 = 0 \quad L = \{-2; -4\}$

3. Gegeben sind die Punkte $A(-2 \mid -1)$, $B(6 \mid 1)$, $C(3 \mid 4{,}5)$ und $D(-1 \mid 3{,}5)$
   (a) Zeichne das Viereck $ABCD$ in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $5 \leqq x \leqq 7$ und $2 \leqq y \leqq 6$
   (b) Kennzeichne alle Innenwinkel mit griechischen Buchstaben.
   (c) Schreibe die dazugehörigen Winkelmaße hin.
   (d) Begründe durch Rechnung, ob deine vier Messergebnisse im Rahmen der Messgenauigkeit stimmen.

Lösung: Es handelt sich um ein achsensymmetrisches Trapez, in dem zwei Innenwinkel das Maß $63{,}43°$ und zwei das Maß $116{,}57°$ besitzen.

4.

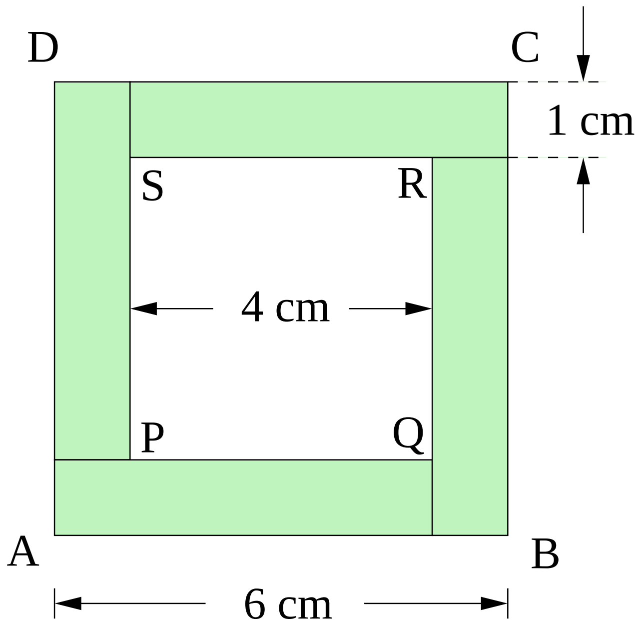


Das Quadrat $ABCD$ ist aus vier kongruenten Rechtecken und dem Quadrat $PQRS$ zusammengefügt worden. Die kürzere Seite jedes Rechtecks ist x cm lang.

(a)
- Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $x = 1$.
- Berechne den Anteil der Fläche des Quadrates $PQRS$ am Quadrat $ABCD$ in Prozent.

(b)
- Wie viel Prozent der Fläche des Quadrates $ABCD$ würde eines der vier Rechtecke einnehmen, wenn das Quadrat $PQRS$ 68% der Gesamtfläche einnehmen würde?
- Berechne x so, dass das Quadrat $PQRS$ 25% der Gesamtfläche einnimmt.

Lösung: (a)
-



- $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{16\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = 0{,}\overline{4} = 44{,}\overline{4}\%$, also die knappe Hälfte.

(b) • Wenn das Quadrat $PQRS$ 68% der Gesamtfläche einnimmt, dann müssen die vier Rechtecke zusammen $100\% - 68\% = 32\%$ der Gesamtfläche einnehmen.
Weil aber alle vier Rechtecke kongruent sind, beträgt der Anteil eines dieser Rechtecke 8%.

• 25% von $36\,\text{cm}^2$ sind $9\,\text{cm}^2$. Die Seitenlänge des Quadrates $PQRS$ beträgt also in diesem Fall 3 cm.
$3 + 2 \cdot x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,5.$

5.

$$-60\,; \qquad -1\,; \qquad 0\,; \qquad +2\,; \qquad +5$$

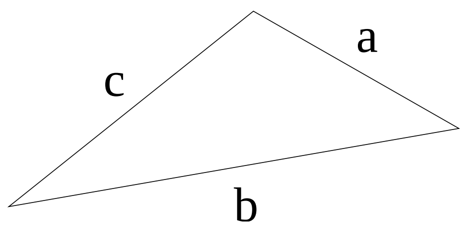
(a) Wähle aus den obigen fünf Zahlen zwei Zahlen so aus, dass deren Quotientenwert am größten wird.

(b) Wähle aus den obigen fünf Zahlen zwei Zahlen so aus, dass deren Quotientenwert am kleinsten wird.

Lösung: (a) $(-60) : (-1) = 60$

(b) $(-60) : (+2) = -30$

6.



Das skizzierte Dreieck hat einen Umfang von $21,5\,\text{cm}$.
Die Seite b ist die längste Seite. Die Seite a ist um 5 cm kürzer als die Seite b und die Seite c ist um 3 cm länger als die Seite a. Berechne die Seitenlängen des Dreiecks.

Lösung: Für die Seite a gilt: $a = b - 5\,\text{cm}$.
Für die Seite c gilt: $c = a + 3\,\text{cm} = b - 5\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = b - 2\,\text{cm}$.
Für den Umfang u gilt: $u = 21,5\,\text{cm} = a + b + c$
Also folgt: $21,5\,\text{cm} = b - 5\,\text{cm} + b + b - 2\,\text{cm}$.
$21,5\,\text{cm} + 7\,\text{cm} = 3b \quad \Leftrightarrow \quad b = 9,5\,\text{cm}$.
Dann ist die Seite a $4,5\,\text{cm}$ und die Seite c $7,5\,\text{cm}$ lang.
Probe: $4,5\,\text{cm} + 9,5\,\text{cm} + 7,5\,\text{cm} = 21,5\,\text{cm}$

7. Frau Zoprent kandidierte in Besselheim für das Bürgermeisteramt.
   41200 Einwohnwer waren wahlberechtigt. Die Wahlbeteiligung betrug 70%. Frau Zoprent wurde mit 60% aller abgegebenen Stimmen zur Bürgermeisterin gewählt.
   (a) Wie viele Stimmen hat Frau Zoprent auf sich vereinigt?
   (b) Herr Zoprent meint nach der Wahl zu seiner Gattin: „Wenn die Wahlbeteiligung unter 60% gelegen hätte, wärest du nicht gewählt worden." Begründe, dass Herr Zoprent nicht Recht hat.

Lösung: (a) Abgegebene Stimmen: $41200 \cdot 0,7 = 28840$
Davon 60%: $28800 \cdot 0,6 = 17304$.
Für Frau Zoprent haben 17304 Wählerinnen und Wähler in Besselheim gestimmt.

(b) Fau Zoprent ist mit 60%, also mehr als der Hälfte aller abgegebenen Stimmen gewählt worden, egal, wie viele Stimmen insgesamt abgegeben worden sind. Die Wahlbeteiligung spielt rechnerisch keine Rolle.

8. In Cantorhausen wurde Herr Roprentz zum Bürgermeister gewählt. 32900 Einwohner waren wahlberechtigt. Die Wahlbeteiligung betrug 70%. Herr Roprentz hatte mehr als 50% aller Stimmen auf sich vereinigt.
   Wie viele Wählerinnen und Wähler waren es mindestens, die ihre Stimme für ihn abgegeben haben?

Lösung: Abgegebene Stimmen: $32900 \cdot 0,7 = 23030$.
Davon 50% (also die Hälfte): 11515.
Also haben mindestens $11515 + 1 = 11516$ Wählerinnen und Wähler in Cantorhausen für Herrn Roprentz gestimmt.

9.

$$\{-7;\ -5;\ -3;\ 0; +1\}$$

   (a) Wähle aus der obigen Menge zwei Zahlen aus, so dass deren Produktwert maximal wird.
   (b) Wähle aus der obigen Menge zwei Zahlen aus, so dass deren Produktwert minimal wird.
   (c)

$$5 : \boxed{} \ =$$

   - Welche Zahl aus der obigen Menge muss in dem Kästchen stehen, damit der Wert des Quotienten maximal wird?
   - Welche Zahl aus der obigen Menge muss in dem Kästchen stehen, damit der Wert des Quotienten minimal wird?

(d) Wähle aus der obigen Menge zwei Zahlen aus, so dass deren Differenzwertwert maximal wird.

Lösung: (a) $(-5) \cdot (-7) = 35$

(b) $(-7) \cdot (+1) = -7$

(c) •

$$5 : \boxed{+1} = +5$$

•

$$5 : \boxed{-3} = -1{,}666\ldots$$

(d)

$$+3 - (-7) = +10$$

10. Gegeben ist der Term $T(x) = -2x + 3$ mit $G = \mathbb{N}$.
Für diesen Term wurde die folgende unvollständige Tabelle erstellt:

x	$-2,5$	4	
$T(x) = -2x + 3$		-5	0

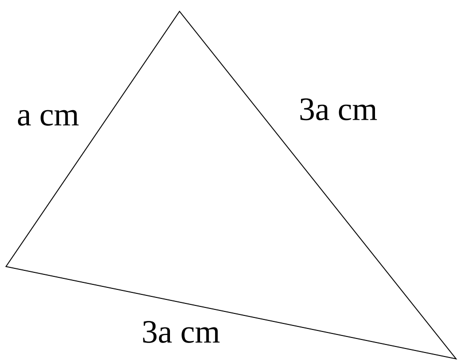
Berechne den Inhalt der leeren Zellen.

Lösung:

x	$-2,5$	4	B
$T(x) = -2x + 3$	A	-5	0

Die Zelle A: $T(-2,5) = -2 \cdot (-2,5) + 3 = 8$, also kommt 8 in Zelle A.
Die Zelle B: $0 = -2x + 3 \mid -3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 = 2x \mid : 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1,5$
Also kommt $-1,5$ in Zelle B.

11.



In der Skizze soll die Variable a nur mit natürlichen Zahlen belegt werden.

(a)
- Berechne den Umfang des Dreiecks für $a = 17$ und $a = 23$.
- Welchen gemeinsamen Teiler, der größer als 1 ist, besitzen die Maßzahlen der beiden Ergebnisse?

(b)
- Berechne den Umfang u des Dreiecks in Abhängigkeit von a.
- Begründe: Die Maßzahl des Umfangs ist - egal womit du den Platzhalter $a \in \mathbb{N}$ belegtst - stets durch 7 teilbar.

Lösung: (a)
- $a = 17$: $u = (17 + 3 \cdot 17 + 3 \cdot 17)\,\text{cm} = 119\,\text{cm}$
  $a = 23$: $u = (23 + 3 \cdot 23 + 3 \cdot 23)\,\text{cm} = 161\,\text{cm}$
- $119 = 17 \cdot 7$ und $161 = 23 \cdot 7$
  Also besitzen beide Maßzahlen den gemeinsamen Teiler 7.

(b)
- $u(a) = (a + 3a + 3a)\,\text{cm}$
- $u(a) = (a + 3a + 3a)\,\text{cm} = 7 \cdot a\,\text{cm}$
  Also gilt für alle $a \in \mathbb{N}$: $7a \in V_7$.

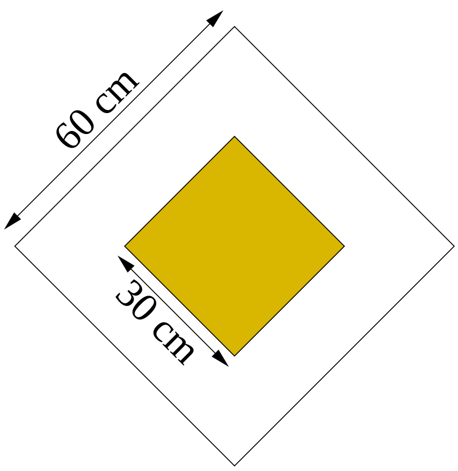
12. Untersuche, ob die beiden Gleichungen G_1 und G_2 die gleiche Lösungsmenge besitzen:
G_1: $4 - (5x^2 + 8) \cdot (-12) = 13$ $\qquad$ G_2: $3 \cdot (8 + 5x^2) \cdot 4 = 9$

Lösung:

$$\begin{array}{rrcll} & 4 - (5x^2 + 8) \cdot (-12) & = & 13 & \\ \Leftrightarrow & 4 - (-12) \cdot (5x^2 + 8) & = & 13 & \mid -4 \\ \Leftrightarrow & 12 \cdot (5x^2 + 8) & = & 9 & \\ \Leftrightarrow & 3 \cdot (8 + 5x^2) \cdot 4 & = & 9 & \end{array}$$

Die Gleichung G_1 lässt sich also in die Gleichung G_2 umformen. Daher besitzen beide Gleichungen dieselbe Lösungsmenge.

13.



Das Vorfahrtszeichen besteht aus zwei Quadraten.

(a) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Quadrate.

(b) Welche Seitenlänge müsste das große Quadrat besitzen, damit es neunmal größer als das innere Quadrat ist?

In Anlehnung an: Mathematiktest in der Jahrgangsstufe 8 für bayerische Realschulen vom 25. Sept. 2007

Lösung: (a) Fläche des großen Quadrates: $A_g = 60\,\text{cm} \cdot 60\,\text{cm} = 3600\,\text{cm}^2$
Fläche des kleinen Quadrates: $A_k = 30\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} = 900\,\text{cm}^2$
$3600\,\text{cm}^2 : 900\,\text{cm}^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad A_k : A_g = 1 : 4$

(b) $A_g = 30\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} \cdot 9 = 8100\,\text{cm}^2$
Weil $90\,\text{cm} \cdot 90\,\text{cm} = 8100\,\text{cm}^2$ ergibt, müsste die Seitenlänge des großen Quadrates 90 cm betragen.

14. Eva und Franz vergleichen die beiden folgenden Terme in der Grundmenge $G = \mathbb{Z}$:

$$T_1(x) = 3(x+80) \quad \text{und} \quad T_2(x) = 7(x+80).$$

Eva notiert:

- In beiden Termen kommt der Faktor $(x + 80)$ vor
- $3 < 7$
- Also gilt stets $T_1(x) < T_2(x)$

Franz hat Zweifel, doch Eva begründet ihre Aussagen mit Hilfe einer Wertetabelle:

x	10	20	30	-10	-20	-30
$T_1(x)$	270	300	330	210	180	150
$T_2(x)$	630	700	770	490	420	350

Sie meint: „Also gilt immer $T_1(x) < T_2(x)$.“ Franz entgenet beim Anblick der Tabelle: „Du hast nicht Recht, denn wenn wir die Tabelle fortsetzen ... “

(a) Begründe, dass Franz Recht hat.

(b) Für welche Belegungen von x ergeben sich gleiche Termwerte?

Lösung: (a) Wenn du in der von Franz vorgeschlagenen Fortsetzung der Tabelle z.B. auf $x = -90$ stößt, dann ergibt sich:
$T_1(-90) = -30$ und $T_2(-90) = -70$.
Also gilt hier $T_1(-90) > T_2(-90)$.

(b) $3(x + 80) = 7(x + 80) \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 240 = 7x + 560 \quad \Leftrightarrow \quad -4x = 320 \quad \Leftrightarrow \quad x = -80$

15.

$$
\begin{aligned}
&(36 - \underline{\qquad}) \bullet \underline{\qquad} \\
&= 36 \bullet \underline{\qquad} - \underline{\qquad} \bullet \underline{\qquad} \\
&= -180 + \underline{\qquad} \\
&= 20
\end{aligned}
$$

Fülle die leeren Plätze passend mit ganzen Zahlen aus.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
&(36 - \underline{40}) \bullet \underline{(-5)} \\
&= 36 \bullet \underline{(-5)} - \underline{40} \bullet \underline{(-5)} \\
&= -180 + \underline{200} \\
&= 20
\end{aligned}
$$

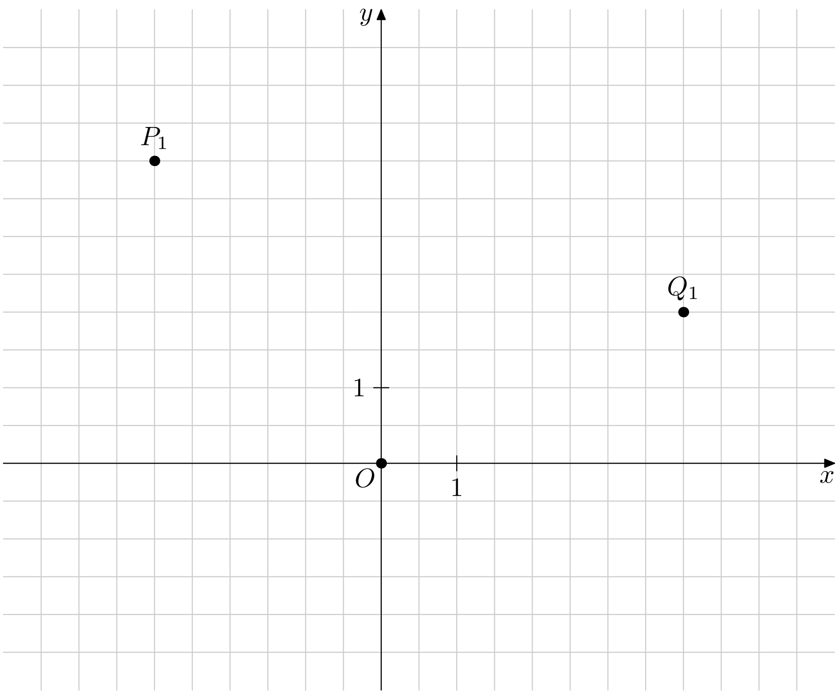
16. Fritz rechnet die folgende Aufgabe:

$$-2^4 + (-2)^4 = 16 + 16 = 32.$$

Maria erkennt, dass Fritz dabei ein Fehler unterlaufen ist. Sie weist ihn darauf hin, doch Fritz will dies nicht einsehen: „Wir haben gelernt: Wenn der Exponent eine gerade Zahl ist, dann ist der Wert der betreffenden Potenz immer positiv. Also kommt 32 heraus.“ Maria entgegnet: „Das stimmt nur manchmal.“
Notiere die restlichen Sätze von Marias Antwort, so dass Fritz seinen Fehler erkennt und vollkommen einsieht.

Lösung: „Um -2^4 steht keine Klammer. Also darfst du das Minuszeichen nur einmal berücksichtigen; d.h. $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$.“

17.



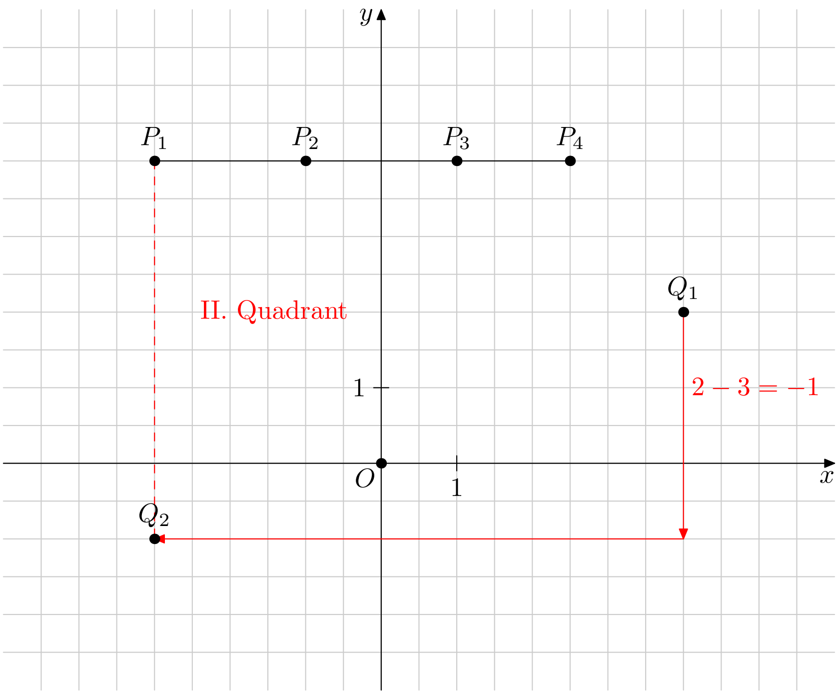
(a) Gib die Koordinaten der Punkte P_1 und Q_1 an.

(b)
- Zeichne drei weitere Punkte P_2, P_3 und P_4 ein, die alle den gleichen y-Wert wie der Punkt P_1 besitzen.
- Verbinde die vier Punkte $P_1 - P_2 - P_3 - P_4$ mit deinem Geodreieck, so dass eine Strecke entsteht.
  Beschreibe die Lage dieser Strecke zu einer der beiden Koordinatenachsen.

(c) Zeichne einen Punkt Q_2 ein, dessen y-Wert um 3 kleiner ist als der y-Wert des Punktes Q_1 und der gleichzeitig den gleichen x-Wert besitzt wie der Punkt P_1.

(d) Erich überlegt, ob es im II. Quadranten einen Punkt gibt, der den x-Wert $4,3$ besitzt. Was meinst du? Begründe.

Lösung:



(a) $P_1(-3 \mid 4)$ und $Q_1(4 \mid 2)$.

(b)
- Beispiel: Siehe Zeichnung oben.
- Siehe Zeichnung oben.
  Z.B.: „Diese Strecke liegt parallel zur x-Achse“.

(c) Siehe Zeichnung oben.

(d) Das kann nicht sein, denn im II. Quadranten gibt es nur negative x-Werte.

18. Konstanze rechnet die folgende Aufgabe:

$$-(-3)^4 - (-3)^2 - (-3)^1 = 93.$$

Konstanzes Lehrer stellt fest: „$-(-3)^4$ ergibt aber -81.“ Konstanze widerspricht: „Sie haben uns doch beigebracht, dass Minus Minus Plus ergibt!“. Der Lehrer entgegnet: „Du kannst diese Regel hier nicht so ohne weiteres anwenden, weil …“

(a) Notiere die restlichen Sätze des Lehrers, so dass Konstanze ihren Fehler erkennt und vollkommen einsieht.

(b) Berechne das richtige Ergebnis.

Lösung: (a) „$\cdots$ weil $-(-3)^4 = -(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)$. Also musst du das Minuszeichen 5-mal berücksichtigen. 5 Minuszeichen lassen sich dann zu einem Minuszeichen zusammenfassen.“

(b) $-(-3)^4 - (-3)^2 - (-3)^1 = -81 - 9 + 3 = -87$.

19.

$$\square \cdot \bigcirc - \triangle = -12$$

(a) Setze in jeden Platzhalter eine der Zahlen $\{-4; 0; 2; 4; 10\}$ so ein, dass die Rechnung stimmt.

(b) Franz will mit den Zahlen aus der oben angegebenen Menge und der gleichen Platzhalterkombination das Ergebnis -3 erzeilen. Geht das? Begründe.

Lösung: (a)

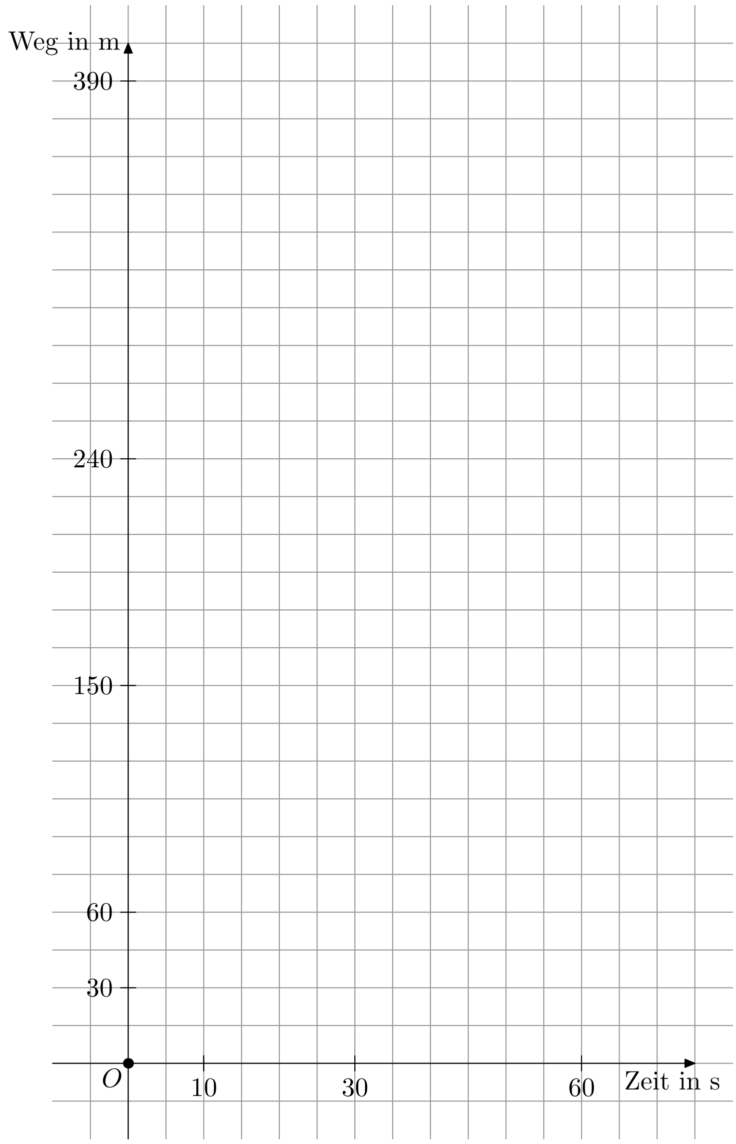
$$\boxed{-4} \cdot 2 - 4 = -12$$

(b) Das geht nicht, weil in der oben angegebenen Zahlenmenge mit der Null nur gerade Zahlen stehen. Die Subtraktion und die Multiplikation können aber aus geraden Zahlen keine ungeraden machen.

20. Fritz und Franz fahren mit ihren Fahrrädern um die Wette. Der zurückgelegte Weg von jedem ist im Zehn-Sekunden-Abstand in der folgenden Tabelle festgehalten:

Zeit in s	0	10	20	30	40	50
Strecke von Fritz in m	0	60	120	180	240	300
Strecke von Franz in m	0	15	60	135	240	375

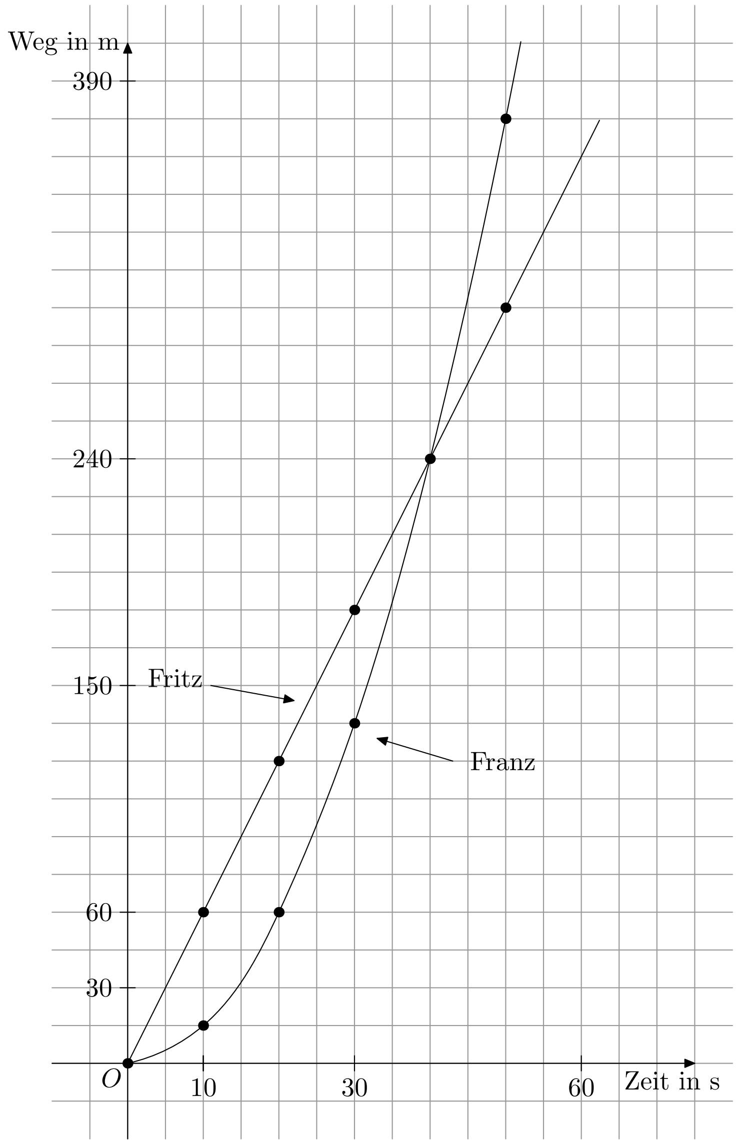
(a) Zeichne das Diagramm von Fritz und das Diagramm von Franz in das vorbereitete Koordinatensystem:



(b) Wessen Diagramm lässt auf eine direkte Proportionalität schließen? Begründe.

(c) Wer gewinnt das Rennen? Begründe.

Lösung: (a)



(b) Es ist das Diagramm von Fritz, denn es stellt eine Ursprungs-Halbgerade dar.

(c) Franz gewinnt das Rennen, denn nach 40 s überholt er Fritz. Dann baut er seinen Vorsprung immer weiter aus.

21. Edwin rechnet die folgende Aufgabe:

$$-2^4 + (-2)^4 = 16 + 16 = 32.$$

Martha erkennt, dass Edwin dabei ein Fehler unterlaufen ist. Sie weist ihn darauf hin, doch Edwin will das nicht einsehen: „Wir haben gelernt: Wenn der Exponent eine gerade Zahl ist, dann ist der Wert der betreffenden Potenz immer positiv. Also kommt 32 heraus.“

Martha entgegnet: „Das stimmt nicht immer, denn . . . "
Wie hat Martha ihre Antwort begründet? Setze Marthas angefangene Begründung fort, sodass Edwin seinen Fehler erkennt und vollkommen einsieht. Berichtige Edwins Lösung.

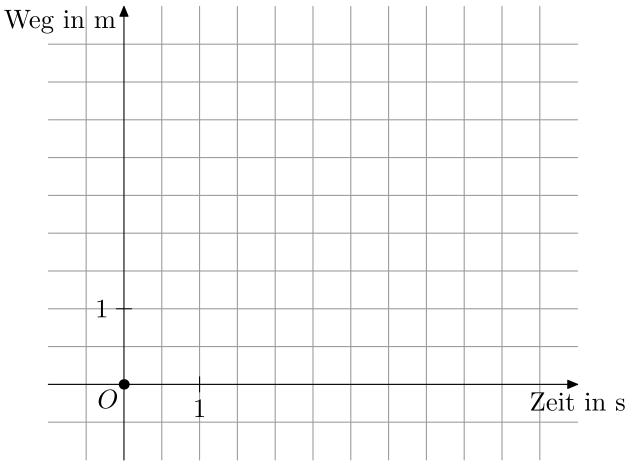
Lösung: „. . . es kommt darauf an, ob das Minuszeichen eingeklammert ist oder nicht.
Bei -2^4 ist es nicht eingeklammert, somit wird es nur einmal berücksichtigt.
Bei $(-2)^4$ dagegen wird -2 viermal mit sich selbst multipliziert, also auch mit dem Minuszeichen.
Somit gilt: $-2^4 + (-2)^4 = -16 + 16 = 0$".

22. Während einer Bewegung wurden die Zeit t und der Weg s in einer Tabelle festgehalten:

Zeit t in s	2	3	5
Wegstrecke s in m	2	$2,5$	$3,5$

(a) Untersuche rechnerisch, ob die Zeit t und der Weg s zueinander direkt proportional sind. Begründe deine Antwort.

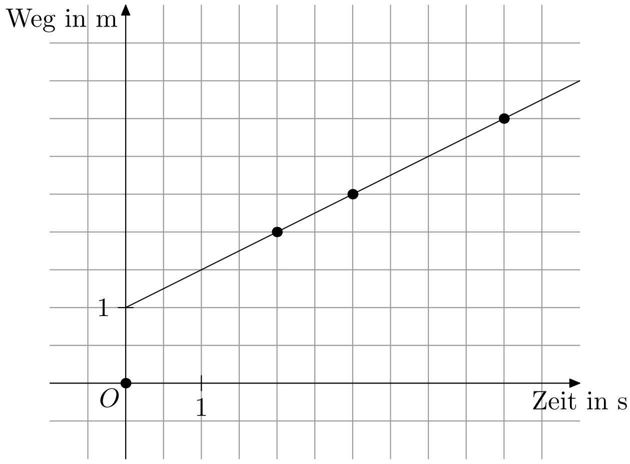
(b)



- Trage die drei Zahlenpaare der Tabelle als Punkte in das Koordinatensystem ein.
- Begründe nun anhand des Diagramms, dass deine Antwort in der Aufgabe (a) richtig war.

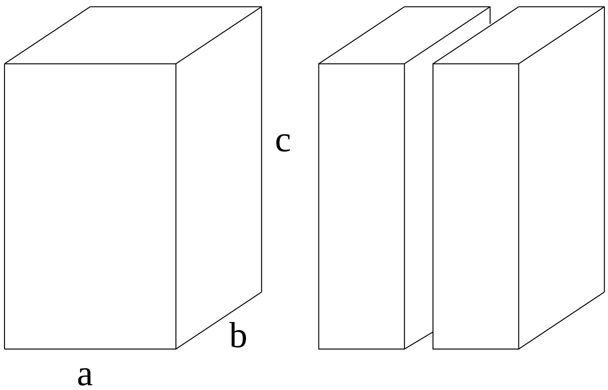
Lösung: (a) Es gilt $2 : 2 = 1$ und $3 : 2,5 = 1,2$. Also sind schon diese beiden Zahlenpaare nicht quotientgleich.
Deshalb sind für diese Bewegung die Zeit t und der Weg s nicht direkt proportional zueinander.

(b) •



- Das Diagramm ergibt zwar eine Gerade, aber keine Ursprungsgerade. Damit ist bestätigt, dass für diese Bewegung die Zeit t und der Weg s nicht direkt proportional zueinander sind.

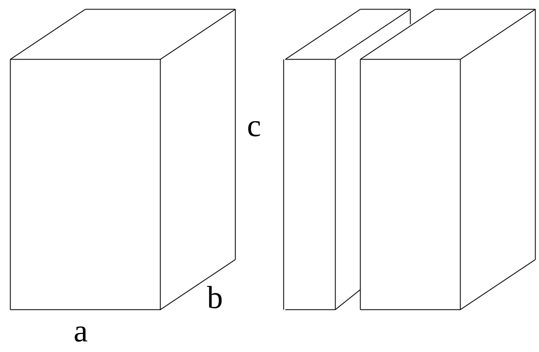
23.



Ein quaderförmiger Holzklotz mit $a = 2\,\mathrm{dm}$, $b = 2,5\,\mathrm{dm}$ und $c = 3\,\mathrm{dm}$ wird mit einer Axt so halbiert, wie es die obige Darstellung zeigt.

(a) Um wie viel Prozent hat sich jetzt die Oberfläche der beiden Hälften im Vergleich zu der des massiven Holzklotzes vergrößert? Gib den Prozentsatz auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet an.

(b)



Hätte sich am Rechenergebnis der Aufgabe (a) etwas geändert, wenn die Axt nicht die Mitte getroffen hätte? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a)

$$\begin{aligned}
O_{ganz} &= 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2 \cdot (5\,\mathrm{dm}^2 + 6\,\mathrm{dm}^2 + 7{,}5\,\mathrm{dm}^2) \\
O_{ganz} &= 37\,\mathrm{dm}^2 \\
2 \cdot O_{Hälfte} &= 2 \cdot 2 \cdot (2{,}5\,\mathrm{dm}^2 + 3\,\mathrm{dm}^2 + 7{,}5\,\mathrm{dm}^2) \\
O_{Teile} &= 52\,\mathrm{dm}^2
\end{aligned}$$

$$\frac{52\,\mathrm{dm}^2 - 37\,\mathrm{dm}^2}{37\,\mathrm{dm}^2} = \frac{15}{37} = 0{,}40540\ldots \approx 40{,}54\%$$

(b) Die Oberfläche der beiden Teile wäre auch hier nur um den doppelten Betrag einer rechteckigen Seitenfläche mit den Längen b und c angewachsen. Das ändert am Ergebnis nichts.

24. Früher hatte eine Schachtel Lebkuchen der Firma „Timz“ 1500 g Inhalt.
Für das kommende Weihnachtsgeschäft kommen nur noch 1200 g in eine Schachtel, die aber das Gleiche kostet wie früher die mit 1500 g Inhalt.
Um wie viel Prozent hat die Firma „Timz“ ihre Lebkuchen verteuert?

Lösung: **1. Möglichkeit:** Rechne mit einem Zahlenbeispiel.

Früher:	1500 g kosteten z.B. 12 EURO .	$\Rightarrow$	100 g kosteten dann 80 Cent .
Jetzt :	1200 g kosten auch 12 EURO .	$\Rightarrow$	100 g kosten dann 1 EURO .

100 g Lebkuchen sind also um 20 Cent teurer geworden.

$$\frac{20\,\mathrm{Cent}}{80\,\mathrm{Cent}} = 0{,}25 = 25\%$$

Die Lebkuchen sind also um 25% teurer geworden.

2. Möglichkeit: Die Lebkuchen kosten x EURO.

Früher: 1500 g kosteten x EURO. $\Rightarrow$ 100 g kosteten dann $\dfrac{x}{15}$ EURO.

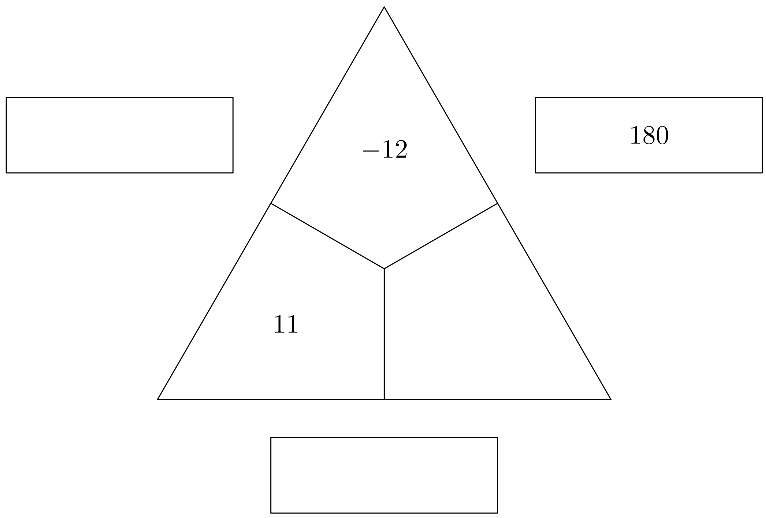
Jetzt : 1200 g kosten auch x EURO. $\Rightarrow$ 100 g kosten dann $\dfrac{x}{12}$ EURO.

100 g Lebkuchen sind also um $\dfrac{x}{12}$ EURO $-$ $\dfrac{x}{15}$ EURO teurer geworden.

$$\left(\frac{x}{12} - \frac{x}{15}\right) \text{ EURO} = \frac{x}{60} \text{ EURO}$$
$$\frac{x}{60} \text{ EURO} : \frac{x}{15} \text{ EURO} = \frac{15}{60} = 0,25 = 25\%$$

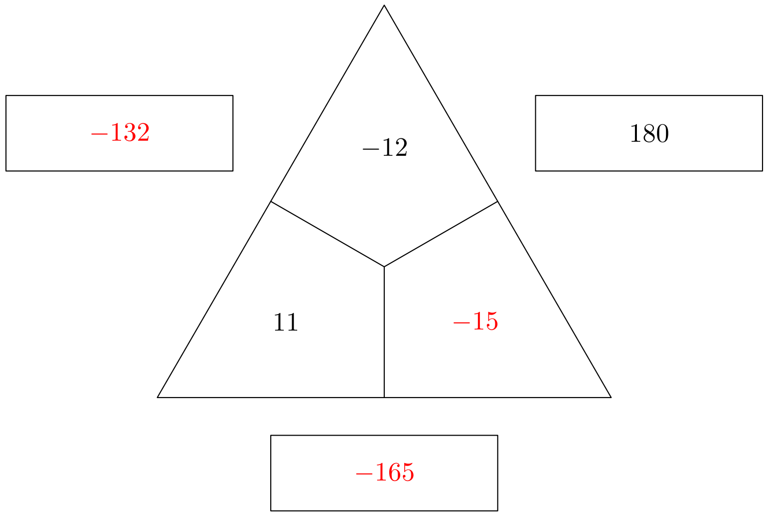
Das Ergebnis ist das gleiche wie oben.

25.



In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke der Wert des Produktes aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Zahlen.

Lösung:



26. Gegeben ist die Gleichung $x \cdot y \cdot x = 284$, wobei x und y ganze Zahlen sein sollen. Ermittle alle Lösungen für x und y.

Lösung: $x \cdot y \cdot x = x^2 \cdot y = 284$.
Die Zahl 284 muss also einen quadratischen Teiler besitzen. Nun ist $284 = 1 \cdot 4 \cdot 71$.
1. Fall:
$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \vee x = -1$ zusammen mit $b = 284$.
2. Fall:
$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \vee x = -2$ zusammen mit $b = 71$.
Weil $71 \in \mathbb{P}$ gilt, gibt es nur die Lösungen
$\{(-1 \mid 284); (1 \mid 284); (-2 \mid 71); (2 \mid 71)\}$.

27. Die Käsesorte „Bergglück“ besteht zu 40% aus Wasser. Die Trockenmasse besteht zu 40% aus Fett.
Wie viel Prozent Fett sind in der Käsesorte „Bergglück“ enthalten?

Lösung: Angenommen, der Käse wird in 100 g-Stücken angeboten.
Dann sind davon 40 g Wasser.
Die Trockenmasse beträgt 60 g. 40% davon sind Fett, das sind 24 g.
Also sind 24 g Fett in 100 g Käse enthalten. Der Fettgehalt dieser Käsesorte beträgt somit 24%.
Dieser Prozentsatz ist für jede Käsemenge dieser Sorte die gleiche.

28. Es gilt: $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125$.
Die Zahl 1000 lässt sich also in zwei Faktoren zerlegen, wobei keiner der beiden durch 10 teilbar ist; d.h. keiner der beiden endet auf 0.
Zerlege 21 000 so in zwei Faktoren, dass keiner der beiden auf 0 endet. Gib alle Möglichkeiten an.

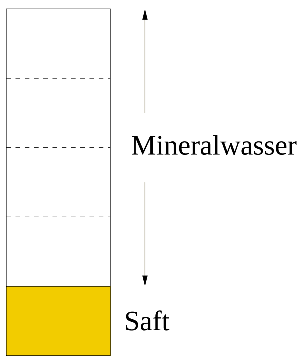
Lösung:

$$\begin{array}{rcl cl}
21\,000 & = & 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3 & & \\
21\,000 & = & (21 \cdot 8) \cdot 125 & = & 168 \cdot 125 \\
 & = & (21 \cdot 125) \cdot 8 & = & 2625 \cdot 8 \\
 & = & (3 \cdot 8) \cdot (7 \cdot 125) & = & 24 \cdot 875 \\
 & = & (7 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 125) & = & 56 \cdot 375
\end{array}$$

29. In einem Glas befinden sich 25 ml Fruchtsaft. Es werden 100 ml Mineralwasser dazugegeben. Dann wird umgerührt.
    (a) Berechne, wie viel Prozent Saft sich jetzt im Glas befindet.
    (b) Erkläre dein Rechenergebnis anhand einer Skizze.

Lösung: (a) Gesamtmenge G im Glas: $25\,\mathrm{ml} + 100\,\mathrm{ml} = 125\,\mathrm{ml}$.
Der Prozentwert P an Saft beträgt: $P = 25\,\mathrm{ml}$.
Der Prozentsatz p beträgt dann $p = \dfrac{25\,\mathrm{ml}}{125\,\mathrm{ml}} = 0,2 = 20\%$

(b)



Der Saft nimmt offenbar $\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$ der Flüssigkeitsmenge ein, die sich nach dem Auffüllen im Glas befindet.

30. Ein Discounter verkauft Fruchtnektar in Tetrapacks. Auf der Packung steht:

„1 l Ananas-Maracuya - Fruchtgehalt mindestens 60%“

Egon öffnet eine Packung und schenkt sich 300 ml in ein Glas ein.
    (a) Wie viele ml reiner Fruchtsaft befinden sich noch im Tetrapack?
    (b) Wie viele ml reiner Fruchtsaft befindet sich im Glas?

Lösung: (a) Im Tetrapack befinden sich $1\,\mathrm{l} = 1000\,\mathrm{ml}$ Nektar.
Egon entnimmt 300 ml. Dann befindet sich im Rest, nämlich in $1000\,\mathrm{ml} - 300\,\mathrm{ml} = 700\,\mathrm{ml}$, auch wieder 60% reiner Fruchtsaft.
60% von $700\,\mathrm{ml} = 0.6 \cdot 700\,\mathrm{ml} = 420\,\mathrm{ml}$.

(b) Eine Möglichkeit:
In der ungeöffenten Tetra-Packung befanden sich
60% von $1000\,\text{ml} = 0.6 \cdot 1000\,\text{ml} = 600\,\text{ml}$ Fruchtsaft.
Nach dem Ausgießen befinden sich jetzt $600\,\text{ml} - 420\,\text{ml} = 180\,\text{ml}$ reiner Fruchtsaft in Egons Glas.

9. Gleichungen und Ungleichungen

1. Hans soll die folgende Ungleichung lösen:

   $$3 \cdot (x-3) + 17 \leqq -13 \text{ auf } G = \mathbb{N}\,.$$

   Die Einzelschritte seiner Rechnung sehen so aus:

   $$\begin{array}{lll} \text{1. Schritt:} & 3x - 3 & \leqq -30 \\ \text{2. Schritt:} & 3x & \leqq -27 \\ \text{3. Schritt:} & x & \geqq -9 \\ \text{4. Schritt:} & L = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\} & \end{array}$$

   In manchen dieser Schritte hat Hans Fehler gemacht. Schreibe auf, in welchem Schritt ein Fehler passiert ist und worin jeweils der Fehler besteht.
   Berechne die richtige Lösungsmenge.

Lösung: Schritt 1: Distributivgesetz nicht beachtet
Schritt 2: richtig
Schritt 3: Inversionsgesetz falsch angewendet
Schritt 4: $0 \notin \mathbb{N}$
Die richtige Lösungsmenge ist leer.

2. Gegeben ist die Lösungsmenge $L = \{-4;\ -3;\ -2;\ \cdots\}$.
   Finde zu dieser Lösungsmenge drei passende Ungleichungen. Vergiss nicht, jeweils die Grundmenge anzugeben.

Lösung: Z.B. für $G = \mathbb{Z}$: $x \geqq -4$ oder $-4 \leqq x$ oder $12 - 4x \leqq 28$

3. In einem Freigehege sind ebenso viele Fasanen wie Kaninchen. Zusammen haben sie 204 Füße.

Lösung: 34 Fasane und 34 Kaninchen

4. Der Umfang eines Fünfecks beträgt $32,8\,\text{cm}$. Die erste Seite ist $4\,\text{cm}$ lang, die zweite ist $1,8\,\text{cm}$ länger als die erste. Die Summe der Längen dieser beiden Seiten ist gleich der Länge der dritten Seite. Die letzte und vorletzte Seite sind gleich lang.

Lösung: Die letzte und vorletzte Seite sind jeweils $6,6\,\text{cm}$ lang.

5. Aus einem rechteckigen Blatt Papier (16 cm x 12 cm) soll das Würfelnetz eines möglichst großen Würfels ausgeschnitten werden. Berechne die Abfallfläche.

Lösung: $96\,\text{cm}^2$

6. Die Zahl $356,25$ ergibt sich als Differenz aus dem Dreifachen einer rationalen Zahl und 582.

Lösung: $312,75$

7. Die Seiten eines Vierecks werden wie folgt gebildet: Die vierte Seite ist 1 cm länger als die dritte. Die dritte Seite ist 1 cm länger als die zweite. Die zwete Seite ist 1 cm länger als die erste. Der Umfang des Vierecks beträgt 24 cm.

Lösung: Die Seiten sind $4,5\,\text{cm}$, $5,5\,\text{cm}$, $6,5\,\text{cm}$ und $7,5\,\text{cm}$ lang.

8. Eine $2,1\,\text{m}$ lange Holzlatte wird wie folgt zersägt. Das erste Teilstück ist doppelt so lang wie das zweite. Das dritte Teilstück ist halb so lang wie das zweite.

Lösung: Die Stücke sind $1,2\,\text{m}$, $0,6\,\text{m}$ und $0,3\,\text{m}$ lang.

9. Gegeben ist die Gleichung $ax = 36$ auf $G = \mathbb{Q}$ und $a \in \mathbb{Q}$.
   (a) Berechne jeweils die Lösung für $a = -4$ und $a = 0,\overline{3}$.
   (b) Für welche Belegung von a gibt es keine Lösung? Begründe.
   (c) Die Variablen a und x können so mit gleichen Zahlen belegt werden, dass eine wahre Aussage entsteht. Gib sämtliche Möglichkeiten an.

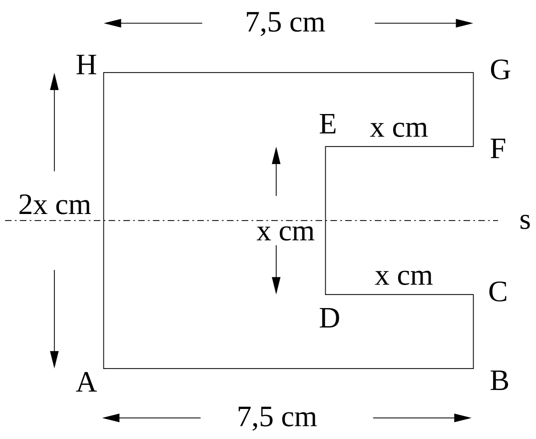
Lösung: (a) $a = -4$ ergibt $-4x = 36 \;|: (-4) \quad \Leftrightarrow \quad x = -9$

$$a = 0,\overline{3} = \frac{1}{3} \text{ ergibt } \frac{1}{3}x = 36 \;|\; \cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 108$$

(b) Für $a = 0$ gibt es keine Lösung, denn $0 \cdot x = 0$ und nicht $= 36$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.

(c) $x = a = 6: \quad 6 \cdot 6 = 36$ und $x = a = -6: \quad (-6) \cdot (-6) = 36$

10.



Die dargestellte Figur $ABCDEFGH$ besitzt die Symmetrieachse s. Es gilt $x \in \mathbb{Q}^+$.

(a) Zeichne die Figur für $x = 3$.

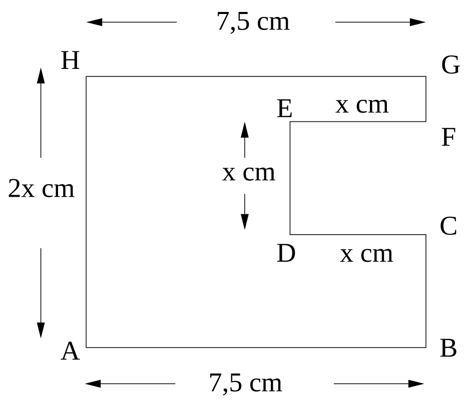
(b) Berechne den Umfang der Figur für $x = 3$.

(c) Zeige: Für den Umfang u der Figur gilt in Abhängigkeit von x:
$$u(x) = (6x + 15)\,\text{cm}$$

(d) Berechne x so, dass der Umfang der Figur $28,5\,\text{cm}$ lang wird.

(e) Gibt es eine Belegung von x, die einen $14,3\,\text{cm}$ langen Umfang erzeugt? Begründe.

(f)



(g) Hier ist die Figur im Gegensatz zur urspründlichen nicht mehr symmetrisch. Gilt auch hier $u(x) = (6x + 15)\,\text{cm}$? Begründe.

Lösung: (a) Klar.

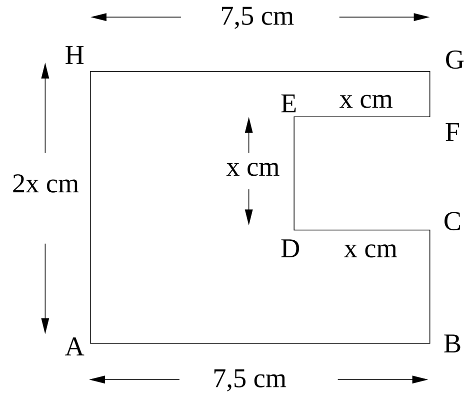
(b) Es gilt $u = 2 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 7,5\,\text{cm} + 3 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 1,5\,\text{cm} = 33\,\text{cm}$.

(c) $u(x) = 2x\,\text{cm} + 15\,\text{cm} + 3x\,\text{cm} + \overline{BC} + \overline{FG}$
Nun gilt $\overline{GF} = \overline{CB} = (2x\,\text{cm} - x\,\text{cm}) : 2 = 0,5x\,\text{cm}$.
Also: $u(x) = 2x\,\text{cm} + 15\,\text{cm} + 3x\,\text{cm} + 2 \cdot 0,5x\,\text{cm} = (6x + 15)\,\text{cm}$.

(d) $6x + 15 = 28,5 \Leftrightarrow x = 4,5$

(e) Weil für die Belegungen von x nur positive Zahlen in Betracht kommen, ist der Term $6x+15$ größer als 15. Also gibt es keine dieser Figuren mit einem Umfang von $14,3\,\text{cm}$.

(f)



Hier gilt wie schon in der ursprünglichen Figur:
$\overline{AH} = \overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FG} \Leftrightarrow 2x\,\text{cm} = \overline{BC} + x\,\text{cm} + \overline{FG}$
$\Leftrightarrow x\,\text{cm} = \overline{BC} + \overline{FG}$
Also gilt unverändert $u(x) = (6x + 15)\,\text{cm}$, auch wenn die Symmetrie zerstört worden ist.

11. Gib zehn Belegungen für $x \in \mathbb{Q}$ an, so dass $\frac{x}{4} < 2$ gilt.

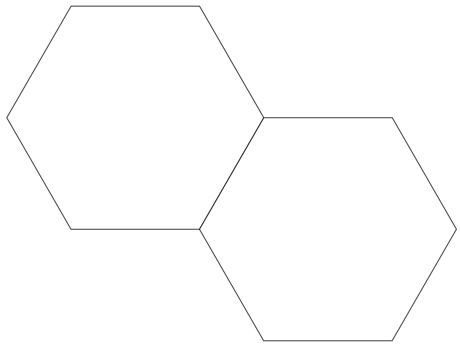
Lösung: Es gilt z.B. $\frac{7}{4} = 1,75 < 2\,.$

Dann ist aber auch $\frac{6}{4} = 1,5 < 2\,, \quad \frac{5}{4} = 1,25 < 2\,, \quad \ldots \quad , \quad \frac{1}{4} < 2\ .$

Wenn dann $x < 1$ ist, stimmt die Ungleichung immer.
Also gilt insgesamt z.B. $x \in \{6;\ 5;\ 4;\ 3;\ 2;\ 1;\ 0,98;\ 0,97;\ 0,96;\ 0,95\,\}$
oder $x \in \{0,25;\ 0,15;\ 0,05;\ 0,03;\ 0,02;\ 0,01;\ 0,098;\ 0,097;\ 0,096;\ 0,095\,\}$
oder $x \in \{-17;\ -20;\ -30;\ -300;\ -5678;\ -10^6;\ -10^8;\ -10^7;\ -3,146;\ 0\,\}\ .$

10. Parallelverschiebung

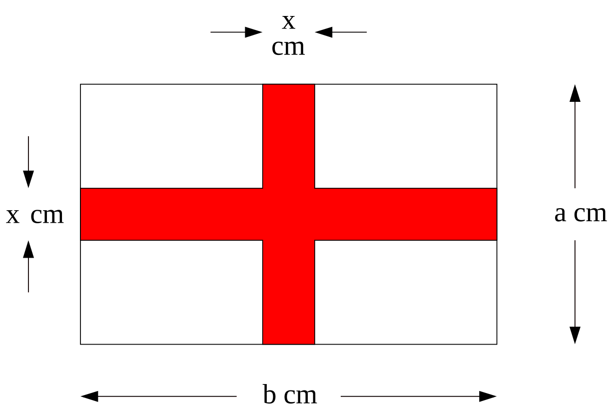
1. Zeichne die rechts skizzierte Figur aus zwei regelmäßigen Sechsecken mit der Seitenlänge $a = 4\,\text{cm}$.



Füge weitere regelmäßige Sechsecke von der gleichen Größe an.

Lösung: - -

2. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



(a) Zeichne die Figur für $b = 8$, $a = 5$ und $x = 1$.

(b) Das weiße Rechteck oben links lässt sich auf das weiße Rechteck rechts unten verschieben.

- Zeichne die vier Stellvertreter des Verschiebungsvektors $\overrightarrow{v}$ zwischen den entsprechenden Eckpunkten der beiden Rechtecke ein.

- Gib die Komponenten des Verschiebungsvektors $\vec{v}$ an.

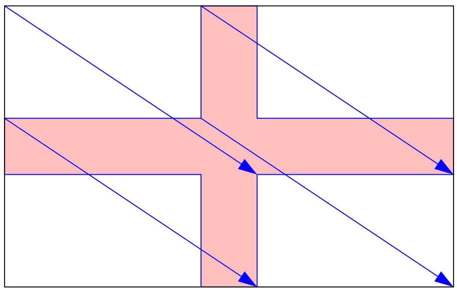
(c) Das weiße Rechteck rechts oben lässt sich so drehen, dass es mit dem Rechteck links unten zur Deckung kommt.

- Zeichne das Drehzentrum ein und gib den Drehwinkel an.
- Um welche besondere Drehung handelt es sich?

Lösung:

(a) –

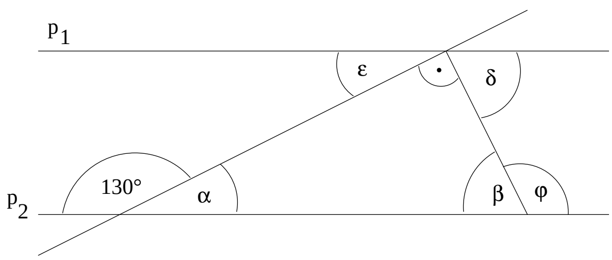
(b) •



- $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}$

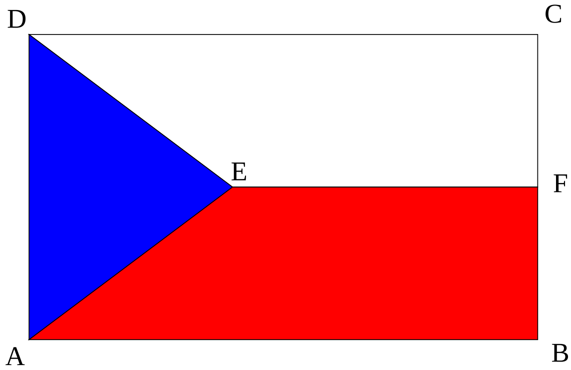
(c)
- Das Drehzentrum liegt im Schnittpunkt der Diagonalen des großen Rechtecks. Dieser Schnittpunkt deckt sich mit dem Symmetriezentrum des Kreuzes. Der Drehwinkel beträgt 180°.
- Es handelt sich um eine Punktspiegelung.

3. Bestimme die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Die nicht maßstabsgetreue Zeichnung brauchst du nicht auf dein Blatt zu übertragen. Die Geraden p_1 und p_2 sind parallel.
Begründe jeweils durch eine kurze Rechnung oder ein passendes Stichwort.



Lösung: $\alpha = 50°$ $\beta = 40°$ $\varphi = 140°$ $\varepsilon = 50°$ $\delta = 40°$

4. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AD} = \overline{EF} = 4\,\text{cm}$ und $\sphericalangle DEA = 52{,}8°$.

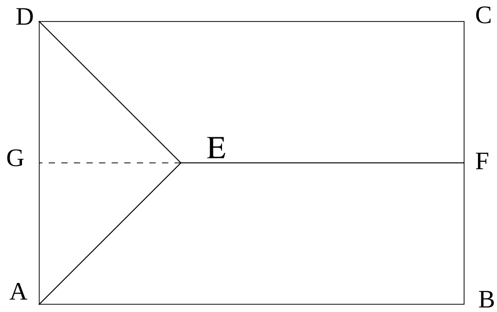
(a) Berechne auf verschiedenen Weise das Maß des Winkels BAE auf eine Stelle nach dem Komma.

[Ergebnis: $\sphericalangle BAE = 26{,}4°$]

(b) Zeichne die Figur auch mit dem Ergebnis der Aufgabe (a).

(c) Welche besondere Eigenschaft hätte das Dreieck DAE, wenn $\sphericalangle AED = 300°$ wäre?

Lösung: (a)



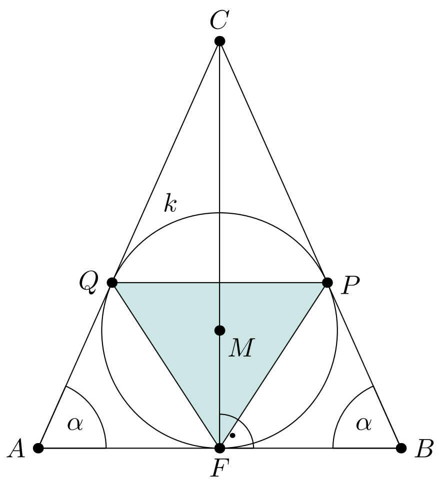
1. Möglichkeit:
Die Strecke GE liegt auf der Halbierenden des Winkels $DEA. \Rightarrow \sphericalangle GEA = \sphericalangle BAE$ (Wechselwinkel) $= 52{,}8° : 2 = 26{,}4°$.
2. Möglichkeit: Das Dreieck AED ist gleichschenklig mit der Basis $[AD]$.
$\Rightarrow \sphericalangle EAD = (180° - 52{,}8°) : 2 = 63{,}6°$ und $\sphericalangle BAE = 90° - 63{,}6° = 26{,}4°$.

(b) –

(c) Es würde gelten: $\sphericalangle DEA = 60°$. Weil aber das Dreieck AED schon gleichschenklig ist, muss jetzt es sogar gleichseitig sein.

11. Winkel

1.



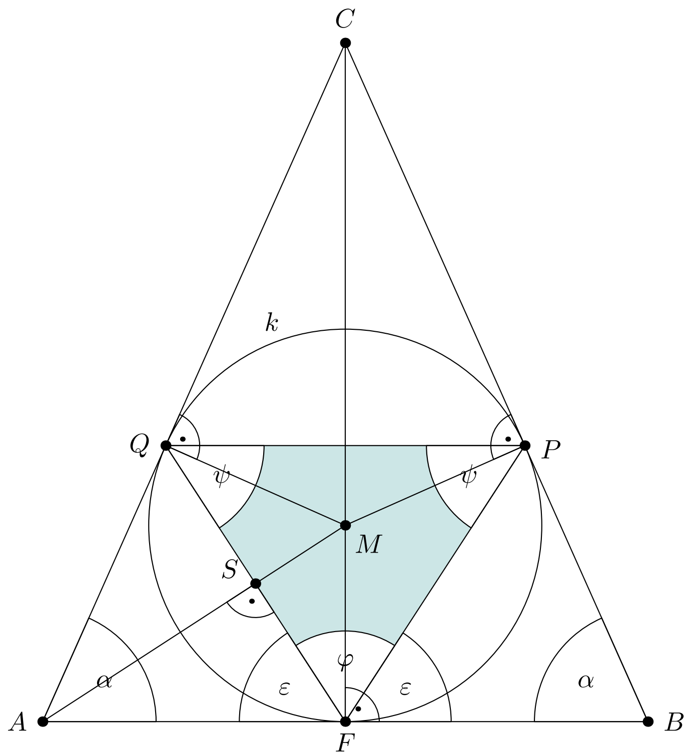
Die Kreislinie k mit dem Mittelpunkt M berührt die Seiten des Dreiecks ABC in den Punkten F, P und Q.

(a) Zeichne die Figur mit $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\alpha = 66°$. Zeichne die zwei Kreisradien ein, die zu den Punkten P und Q führen.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks FPQ.

[Teilergebnis: $\sphericalangle PFQ = 66°$]

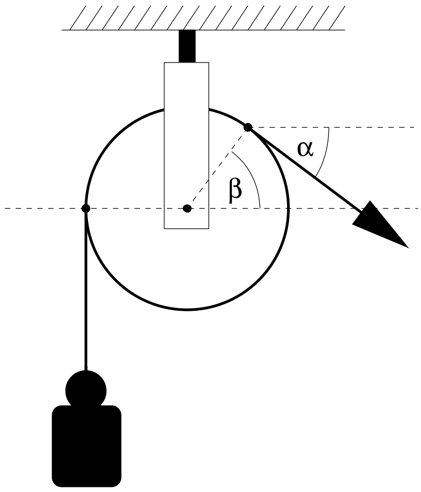
Lösung: (a)



Die Kreislinie k ist der Inkreis dieses Dreiecks ABC. Im Mittelpunkt M schneiden sich die drei Winkelhalbierenden. Die Winkelhalbierende $[CF]$ ist bereits vorhanden. Für die Konstruktion von M genügt es z.B., die Halbierende des Winkels BAC noch einzuzeichnen.

(b) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, denn die beiden Basiswinkel haben das Maß α. Aus Symmetriegründen taucht daher das Winkelmaß ε zweimal auf.
Jeder der drei Berührradien $\overline{MF}$, $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ steht auf seiner betreffenden Dreiecksseite senkecht.
Das Viereck $AFMQ$ ist ein achsensymmetrischer Drachen mit der Symmetrieachse $[AM]$, die den Winkel α halbiert.
Weiter gilt dann: $[QF] \perp [AM] \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle ASF = 90°$.
Aus der Winkelsumme im Dreieck AFS ergibt sich dann: $\varepsilon = 90° - 33° = 57°$.
$\Rightarrow \quad \varphi = 180° - 2 \cdot 57° = 66° = \alpha$.
Das Dreieck FPQ ist aus Symmetriegründen gleichschenklig mit der Basis $[PQ]$.
$\Rightarrow \quad \psi = \varepsilon = 57°$, da es Z-Winkel sind.

2.



Ein Seil, das am linken Ende mit einem Gewicht belastet ist, wird über eine feste Rolle geführt. Am rechten Seilstück, das mit der Waagrechten den Winkel α einschließt, wird das Gleichgewicht gehalten.

(a) Begründe: $\beta = 90° - \alpha$.

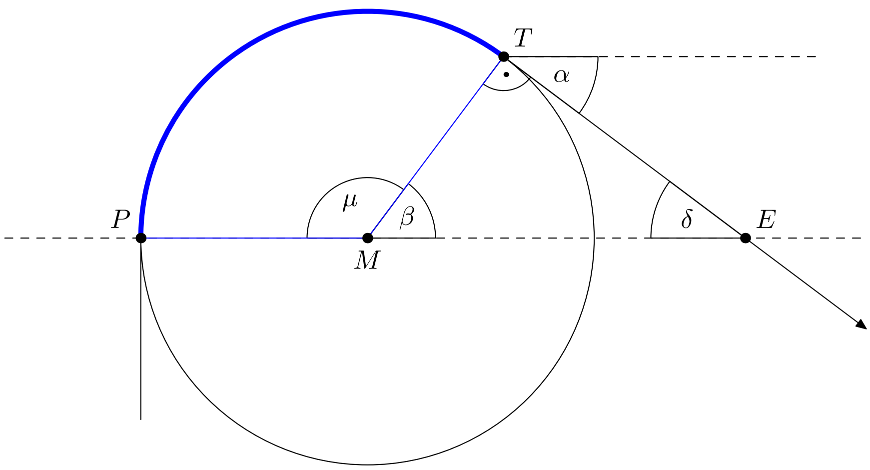
(b) Zeichne die Rolle mit dem Seil für den Radius $r = 3\,\text{cm}$ und $\alpha = 37°$.

(c) Berechne den Bruchteil des Umfangs der festen Rolle, der für $\alpha = 30°$ vom Seil berührt wird.

(d) Wie groß müsste man den Winkel α wählen, damit die Länge des Seilstückes, das die Rolle berührt, 40% des Rollenumfangs beträgt?

Lösung: (a) Siehe Zeichnung zu (b):
Die Halbgerade $[TE$ liegt auf der Kreistangente mit dem Berührpunkt T. Der Berührradius $[MT]$ steht auf dieser Tangente senkrecht. Weiter gilt: $\delta = \alpha$ (Z-Winkel).
$\Rightarrow \quad \beta = 90° - \delta = 90° - \alpha$.

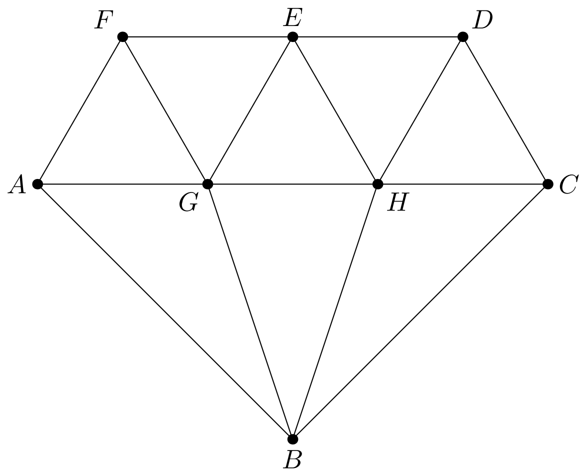
(b) Wenn also $\alpha = 37°$ ist, dann folgt $\beta = 90° - 37° = 53°$.
Damit kannst du den Berührradius mit dem Punkt T und seine Kreistangente konstruieren. Das linke Seilende führt senrecht nach unten.



(c) Aus $\alpha = 30°$ folgt $\beta = 60° \quad \Rightarrow \quad \mu = 180° - 60° = 120°$.
Der Mittelpunktswinkel μ nimmt also ein Drittel des Vollwinkels (360°) ein. Damit bedeckt das Seil ein Drittel des Rollenumfangs.

(d) Berechne α aus dem Mittelpunktswinkel μ:
$\mu = 40\%$ von $360° = 0{,}4 \cdot 360° = 144°$.
$\beta = 180° - 144° = 36° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° - 36° = 54°$.

3.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Trapez $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 9\,\mathrm{cm}$, wobei über der Strecke $[DF]$ 6 cm Platz bleiben sollen.

(b) Benenne die Innenwinkel des Trapezes $ACDF$ mit griechischen Buchstaben. Berechne diese Innenwinkel.

(c) Verlängere die Strecken $[AF]$ über F und $[CD]$ über C hinaus so weit, bis sie sich im Punkt S schneiden. Begründe: Das Dreieck FDS ist gleichseitig.

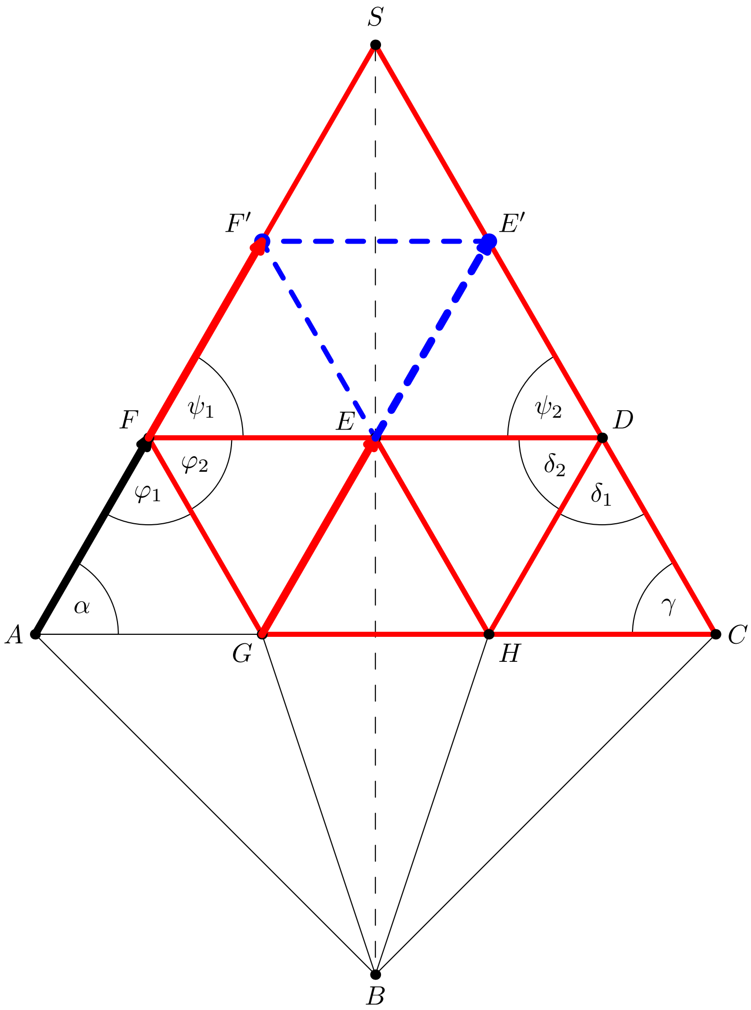
(d) Verschiebe die Raute $AGEF$ mit dem Vektor $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$.

(e) Wie viele Dreiecke vom Typ AGF passen lückenlos in das Dreieck FDS? Begründe.

(f) Der Winkel HBG hat das Maß $36{,}87°$ (gerundet).

- Berechne die Maße der Innenwinkel des Drachenvierecks $BHEG$.
- Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks ABG.

Lösung: (a)



(b) Die Gerade SB ist die Symmetrieachse der Figur. Da sich das Trapez $ACDF$ nur aus gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt, gilt: $\alpha = \gamma = 60°$.
Aus dem gleichen Grund gilt: $\delta_1 = \varphi_1 = \delta_2 = \varphi_2 = 60°$.
Also gilt: $\sphericalangle AFD = \sphericalangle FDC = 120°$.

(c) Der Winkel ψ_1 ist der Nebenwinkel des Winkels AFD:
$\psi_1 = 180° - 120° = 60° = \psi_2$.
Im Dreieck FDC haben also zwei Innenwinkel das Maß 60°. Also muss wegen der Innenwinkelsumme von 180° auch der dritte Innenwinkel das Maß 60° haben. Damit ist das Dreieck FDS gleichseitig.

(d) Es entsteht das Viereck $FEE'F'$: siehe Zeichnung.

(e) Es sind **vier** solche Dreiecke, wie du an den dicken gestrichelten Linien erkennen kannst.

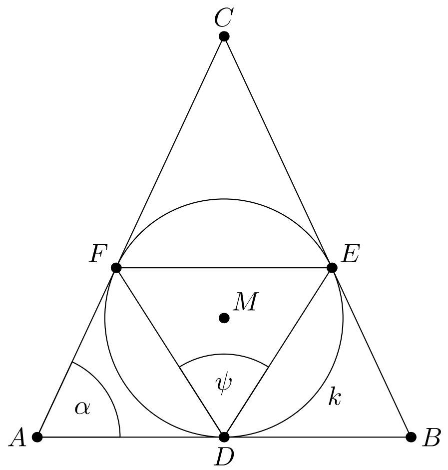
(f) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Alle Winkelmaße sind auf zwei Kommastellen gerundet.

- Das Dreieck BHG ist aus Symmetriegründen gleichschenklig.
  $\Rightarrow \quad \sphericalangle GHB = \sphericalangle BGH = (180° - 36{,}87°) : 2 = 71{,}57°$.
  Das Dreieck GHE ist gleichseitig.

Also gilt: $\sphericalangle HGE = 60° = \sphericalangle EHG = \sphericalangle GEH$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle EHB = 60° + 71,57° = 131,57° = \sphericalangle BGE$

- $\sphericalangle GBA = (90° - \sphericalangle HBG) : 2 = 26,57°$.
  Weiter gilt: $\sphericalangle BAC = 45°$
  $\Rightarrow \quad \sphericalangle AGB = 180° - 45° - 26,57° = 108,43°$
  Anmerkung: Es gibt noch andere Lösüngsmöglichkeiten.

4.



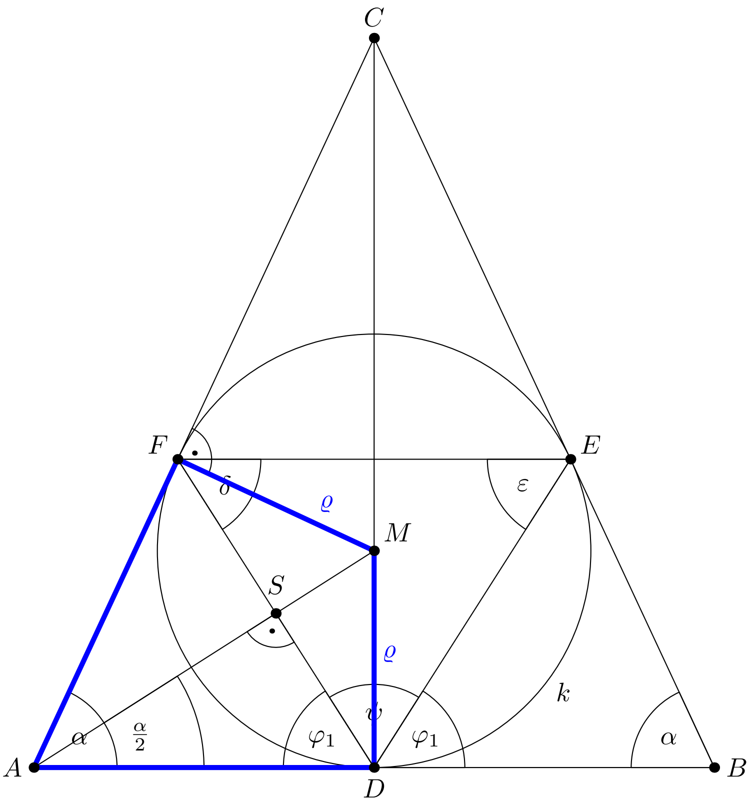
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit der Basis $[AB]$. Der Inkreis k mit dem Mittelpunkt M berührt die Dreiecksseiten in den Punkten D, E und F.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 9\,\text{cm}$ und $\alpha = 65°$.

(b) • Zeichne das Viereck $ADMF$ ein.
  • Um welches besondere Viereck handelt es sich? Begründe.

(c) Zeige: $\psi = \alpha$.

Lösung: (a)



Der Inkreismittelpunkt M ist der Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden, die z.B. auf $[AM]$ und $[CD]$ liegen.
Der Inkreisradius ϱ steht als Berührradius auf $[AB]$ bzw. $[AC]$ senkrecht.

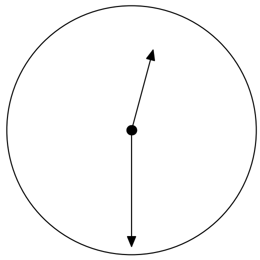
(b)
- Siehe obige Zeichnung.
- Das Viereck $ADMF$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, denn die Diagonale $[AM]$ ist die Halbierende des Winkels mit dem Maß α und damit die Symmetrieachse dieses Vierecks.

(c) Das Dreieck ADS ist rechtwinklig, weil die beiden Diagonalen in jedem Drachenviereck senkrecht aufeinander stehen:
$\varphi_1 = 90° - \dfrac{\alpha}{2} = \varphi_2$. Weiter muss gelten: $\varphi_1 + \varphi_2 + \psi = 180°$
$\Rightarrow \quad \psi = 180° - 2 \cdot \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \psi = \alpha.$

Oder: Die Winkel mit den Maßen δ und ε bilden mit den Winkeln φ_1 bzw. φ_2 Z-Winkel.
Also gilt: $\delta = \varepsilon = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$.

Dann gilt im Dreieck DEF: $\delta + \varepsilon + \psi = 180°$. $\quad \Rightarrow \psi = 180° - 2 \cdot \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ usw.

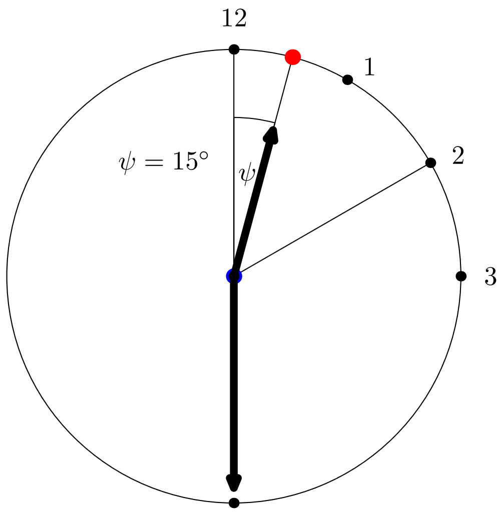
5.



(a) Welchen Winkel schließen die beiden Uhrzeiger um 12 : 30 Uhr ein?

(b) Um welchen Winkel haben sich der Minuten- und der Stundenzeiger von 12 : 30 Uhr bis 13 : 10 Uhr weitergedreht?

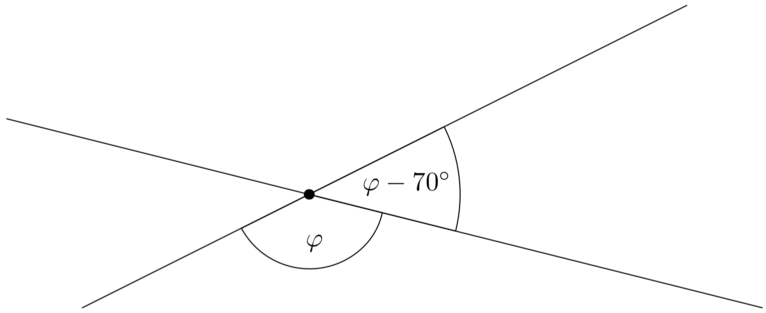
Lösung: (a)



Der Winkel beträgt $180° - 15° = 165°$.

(b) Der Minutenzeiger hat sich um $180° + 60° = 240°$ weitergedreht.
Bis 13 : 00 Uhr hat sich der Stundenzeiger um $15°$ weitergedreht. 10 Minuten sind der sechste Teil einer Stunde, die einem Winkel von $30°$ entspricht. Dann entsprechen 10 Minuten einem Winkel von $30° : 6 = 5°$. Also hat der Stundenzeiger während dieser Zeit einen Winkel von $30° + 5° = 35°$ überstrichen.

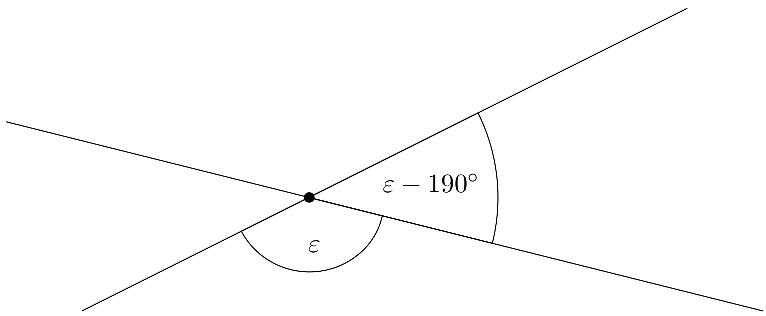
6.



Bestimme das Winkelmaß φ an der Geradenkreuzung. Beachte: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu.

Lösung: Es muss gelten:
$\varphi + (\varphi - 70°) = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2\varphi = 180° + 70° \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 125°$

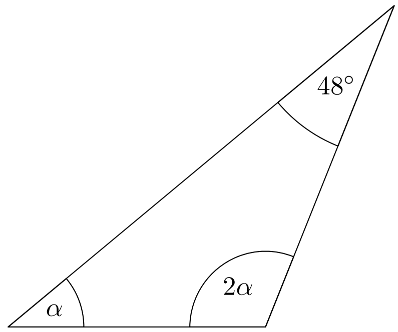
7.



Begründe: Den Winkel ε gibt es in Wirklichkeit nicht.

Lösung: Du siehst in der Zeichnung zwei Nebenwinkel:
$\varepsilon + (\varepsilon - 190°) = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2\varepsilon = 370° \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 185°$.
ε ist somit überstumpf. Das geht bei Nebenwinkeln nicht. Beide Nebenwinkel dürfen nicht größer als 180° werden.

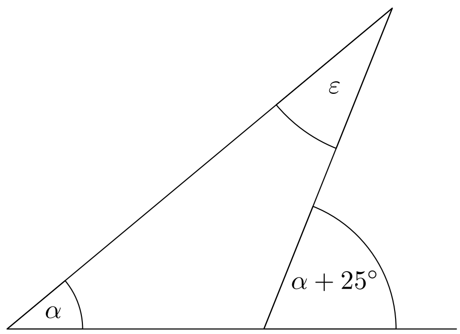
8.



Berechne α. Beachte: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

Lösung: Es gilt $\alpha + 2\alpha + 48^\circ = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad 3\alpha = 180^\circ - 48^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 44^\circ$.

9.



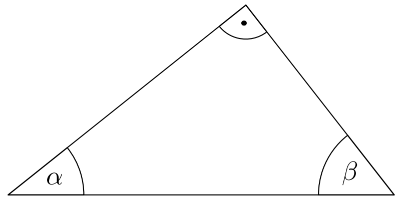
Berechne ε. Beachte: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

Lösung: Nach dem Satz vom Außenwinkel muss $\alpha + 25^\circ = \alpha + \varepsilon$ ergeben.
Also gilt: $\varepsilon = 25^\circ$.

10. In einem Dreieck ist der erste Winkel doppelt so groß wie der zweite Winkel. Der dritte Winkel ist um 36° kleiner als der zweite Winkel. Berechne die Winkelmaße.

Lösung: 1. Winkel: α 2. Winkel: β 3. Winkel: γ
$\alpha = 2\beta \quad \wedge \quad \gamma = \beta - 36^\circ$.
Innenwinkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$: $2\beta + \beta + (\beta - 36^\circ) = 180^\circ$
$\Leftrightarrow \quad 4\beta = 180^\circ + 36^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 54^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = 108^\circ \quad \Rightarrow \quad \gamma = 18^\circ$.

11.



In einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Winkel fünf Mal so groß wie ein anderer Winkel. Wie groß sind die Winkel?
Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten.

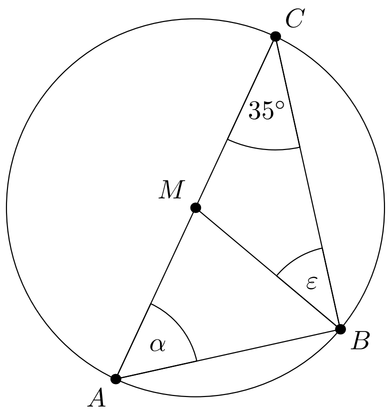
Lösung: In jedem Dreieck gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$:
In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: $\alpha + \beta = 90°$

1. Möglichkeit:
$\alpha = 5\beta \quad \Rightarrow \quad 5\beta + \beta = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 15° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 75°$
Die Variante $\beta = 5\alpha$ liefert ein spiegelbildliches Ergebnis.

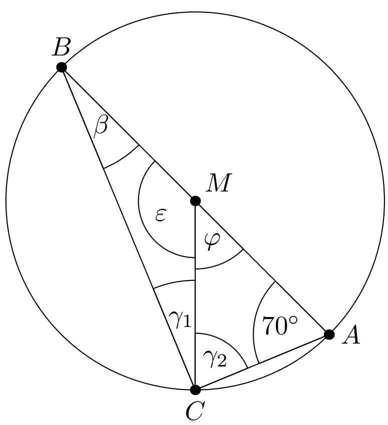
2. Möglichkeit:
$5\alpha = 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18° \quad \Rightarrow \quad \beta = 72°$.
Die Variante $5\beta = 90°$ liefert ein spiegelbildliches Ergebnis.

12. Berechne jeweils die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Zuweilen musst du erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

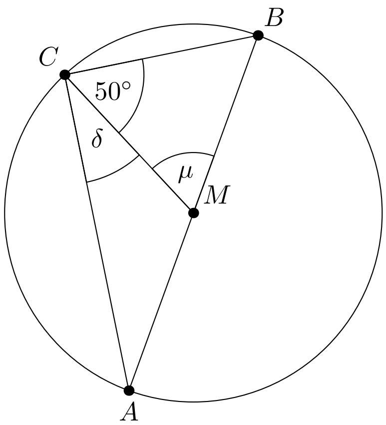
Figur a)



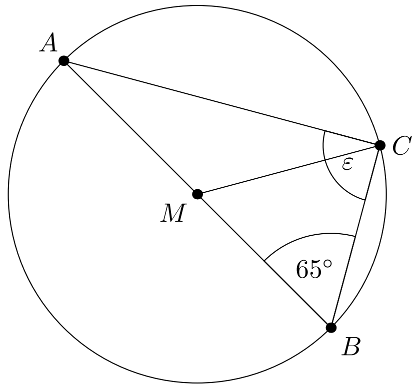
Figur b)



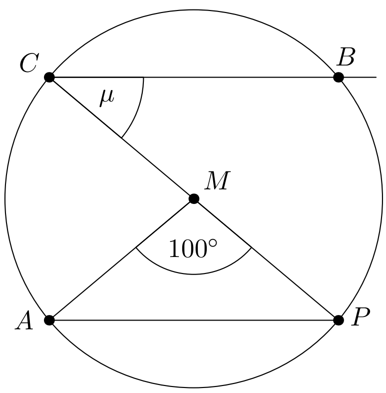
Figur c)



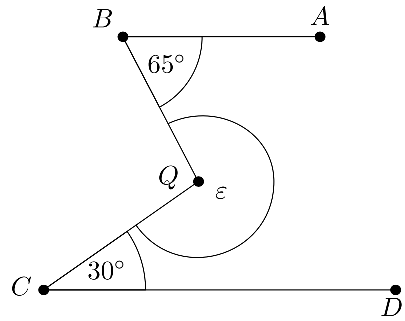
Figur d)



Figur e) $CB \parallel AP$



Figur f) $AB \parallel CD$



Tipp zur Figur f): Zeichne eine Hilfslinie durch den Punkt Q ein.

Lösung: In allen Zeichnungen findest du gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel so lang wie der jeweilige Kreisradius sind.

Figur a)

Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \varepsilon = 35°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\sphericalangle BMC = 110°$

Der Winkel AMB ist der Nebenwinkel dazu: $\sphericalangle AMB = 180° - 110° = 70°$. Im Dreieck ABM gilt dann: $\alpha = (180° - 70°) : 2 = 55°$.

Figur b)

Das Dreieck CAM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \gamma_2 = 70°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\varphi = 40°$

Der Winkel ε ist der Nebenwinkel dazu: $\varepsilon = 180° - 40° = 140°$. Im gleichschenkligen Dreieck CMB gilt dann: $\beta = \gamma_1 = (180° - 140°) : 2 = 20°$.

Figur c)

Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \sphericalangle CBM = 50°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\mu = 80°$.
Der Winkel $\sphericalangle CMA$ ist der Nebenwinkel dazu: $\sphericalangle CMA = 180° - 80° = 100°$.
Im gleichschenkligen Dreieck AMC gilt dann:
$\sphericalangle MAC = \delta = (180° - 100°) : 2 = 40°$

Figur d)

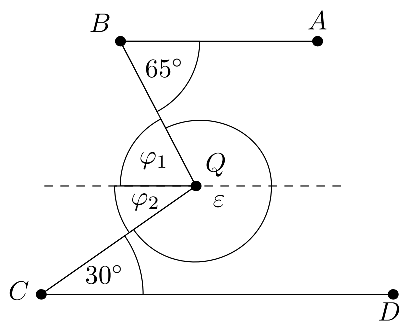
Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \sphericalangle MCB = 65°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\sphericalangle BMC = 50°$.
Der Winkel $\sphericalangle CMA$ ist der Nebenwinkel dazu: $\sphericalangle CMA = 180° - 50° = 130°$
Im gleichschenkligen Dreieck CMB gilt dann:
$\sphericalangle MAC = \sphericalangle ACM = (180° - 130°) : 2 = 25°$
$\varepsilon = \sphericalangle ACM + \sphericalangle MCB = 25° + 65° = 90°$.

Figur e)

Das Dreieck APM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \sphericalangle MPA = \sphericalangle PAM$.
Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt
$\sphericalangle MPA = \sphericalangle PAM = (180° - 100°) : 2 = 40°$
Die Winkel MPA und μ sind maßgleich, weil sie „Z-Winkel“ sind. $\Rightarrow \mu = 40°$.

Figur f)

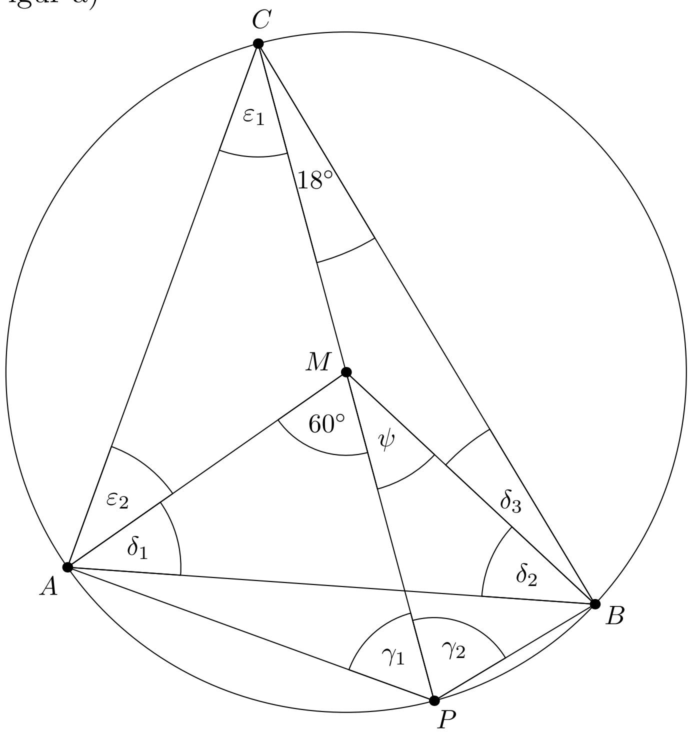
Figur f) $AB \parallel CD$



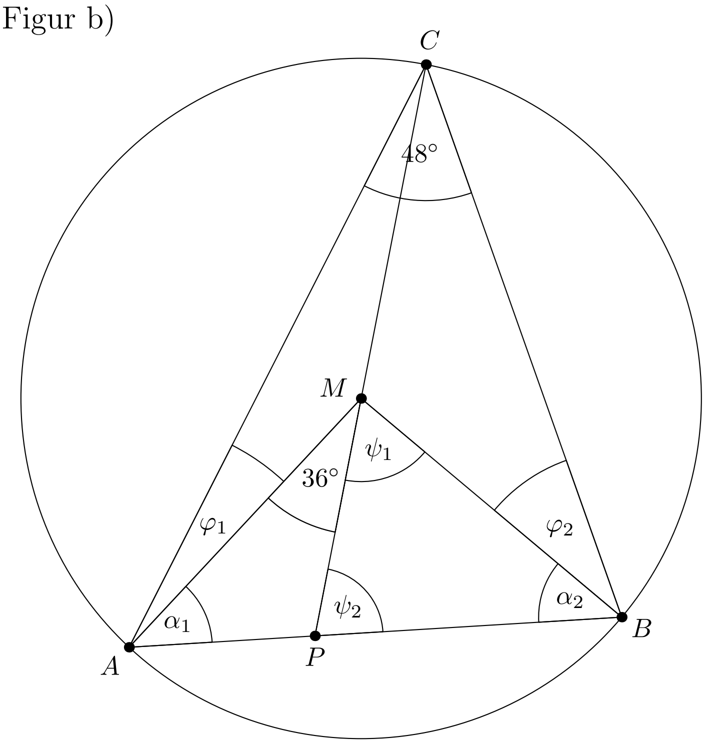
Die gesuchte Hilfslinie ist die **Parallele** zu den Geraden BA bzw. CD durch den Punkt Q.
Nun gilt: $\varphi_1 = 65°$ (Z-Winkel) und $\varphi_2 = 30°$ (Z-Winkel).
$\varepsilon = 360° - (65° + 30°) = 265°$.

13. Berechne jeweils die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Zuweilen musst du erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

Figur a)



Figur b)



Lösung: In allen Zeichnungen findest du gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel so lang wie der jeweilige Kreisradius sind. In jedem gleichschenkligen Dreieck gibt es zwei maßgleiche Winkel.

Figur a)

Das Dreieck APM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \gamma_1 = 60°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\sphericalangle PAM = 60°$; d.h. das Dreieck APM ist sogar gleichseitig.

Der Winkel CMA ist der Nebenwinkel zu dem 60°-Winkel:
$\sphericalangle CMA = 180° - 60° = 120°$. Im Dreieck AMC gilt dann:
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = (180° - 120°) : 2 = 30°$.
Das Dreieck MBC ist gleichschenklig: $\Rightarrow \delta_3 = 18°$. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° folgt $\sphericalangle BMC = 144°$.
Der Winkel ψ ist der Nebenwinkel zu dem 144°-Winkel: $\psi = 180° - 144° = 36°$.
Das Dreieck PBM ist gleichschenklig: $\Rightarrow \gamma_2 = (180° - 36°) : 2 = 72°$.

Im gleichschenkligen Dreieck ABM ist $\sphericalangle AMB = 60° + 36° = 96°$.
$\Rightarrow \delta_1 = \delta_2 = (180° - 96°) : 2 = 42°$

Figur b)

Der Winkel CMA ist der Nebenwinkel zu dem 36°-Winkel:
$\sphericalangle CMA = 180° - 36° = 144°$. Das Dreieck AMC ist gleichschenklig:
$\Rightarrow \varphi_1 = \sphericalangle ACM = (180° - 144°) : 2 = 18°$.

Weiter gilt: $\sphericalangle MCB = 48° - 18° = 30°$. Weil das Dreieck MBC gleichschenklig ist, folgt $\varphi_2 = 30°$. $\sphericalangle BMC = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$.
Der Winkel ψ_1 ist der Nebenwinkel zu dem 120°-Winkel:
$\psi_1 = 180° - 120° = 60°$.

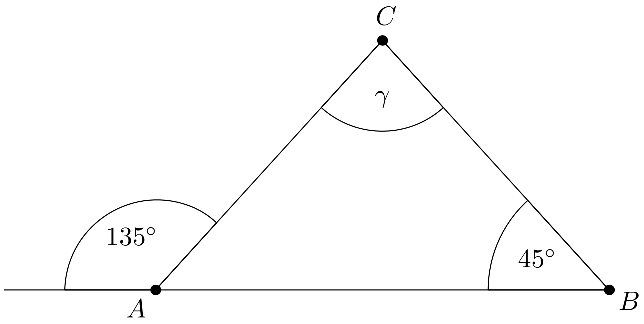
Im Dreieck ABM gilt: $\sphericalangle AMB = 36° + 60° = 96°$. Das Dreieck MBC ist gleichschenklig:
$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = (180° - 96°) : 2 = 42°$.

Im Dreieck PBM findest du über die Innenwinkelsumme:
$\psi_2 = 180° - (60° + 42°) = 78°$.

14. Zur Berechnung der mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße musst du zuweilen erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

    (a)

Figur a)

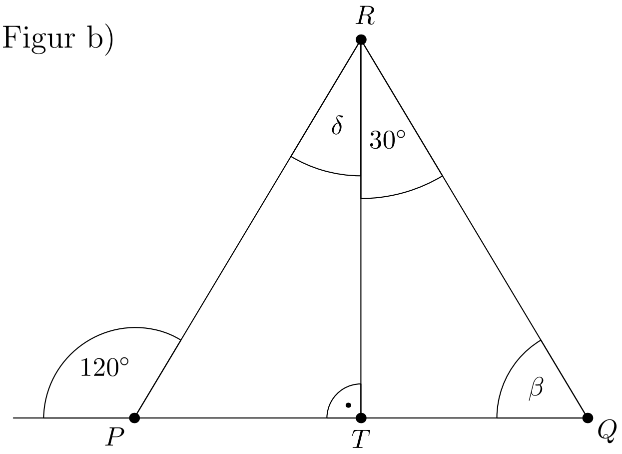


In der Figur a) gilt: $\overline{AC} = 4\,\text{cm}$.

- Berechne γ.
- Begründe: $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

(b)

Figur b)



In der Figur b) gilt: $\overline{RQ} = 7,64\,\text{cm}$.

- Berechne β und δ.
- Begründe: $\overline{PR} = 7,64\,\text{cm}$ und $\overline{PT} = 3,82\,\text{cm}$.

Lösung: (a)

- Der Winkel BAC ist der Nebenwinkel des $135°$ -Winkels:
  $\sphericalangle BAC = 180° - 135° = 45° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 180° - 45° - 45° = 90°$.

- Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, weil es zwei maßgleiche Innenwinkel besitzt:
  $\Rightarrow \quad \overline{AC} = \overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

(b)

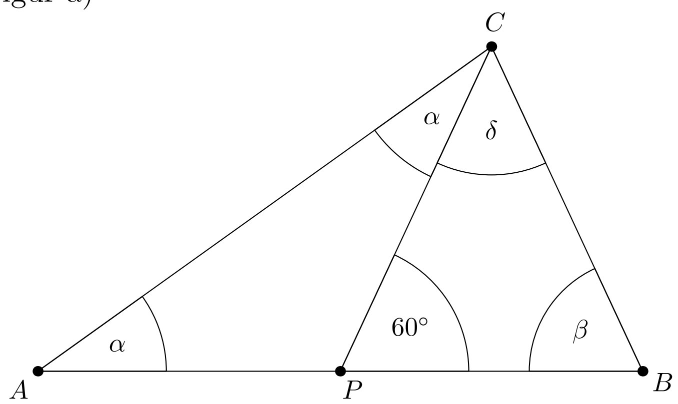
- Das Dreieck TQR ist rechtwinklig. $\Rightarrow \quad \beta = 90° - 30° = 60°$. Der Winkel TPR ist der Nebenwinkel des $120°$ -Winkels:
  $\sphericalangle TPR = 180° - 120° = 60° \quad \Rightarrow \quad \delta = 180° - 90° - 60° = 30°$.

- Das Dreieck PQR ist wegen seiner drei $60°$-Innenwinkel **gleichseitig**:
  $\Rightarrow \quad \overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{QR} = 7,64\,\text{cm}.$
  Die Strecke $[RT]$ ist in diesem Dreieck PQR eine Winkelhalbierende, also gleichzeitig die Mitttelsenkrechte auf die Basis $[PQ]$.
  $\Rightarrow \quad \overline{PT} = 0.5 \cdot \overline{PQ} = 3,82\,\text{cm}.$

15. Zur Berechnung der mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße musst du zuweilen erst Zwischenwinkel selbst markieren und diese zunächst berechnen. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

(a)

Figur a)

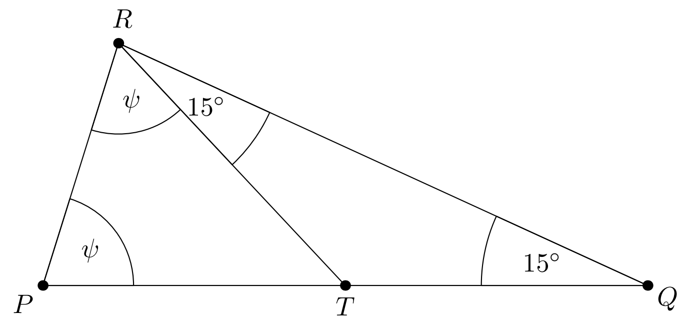


In der Figur a) gilt: $\overline{AP} = 5\,\text{cm}$ und $\alpha + \delta = 90°$.

- Berechne die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße.
- Begründe: $\overline{AB} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$.

(b)

Figur b)



In der Figur b) gilt: $\overline{PQ} = 9,38\,\text{cm}$.

- Berechne die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße.
- Begründe: $\overline{RT} = 4,69\,\text{cm}$.

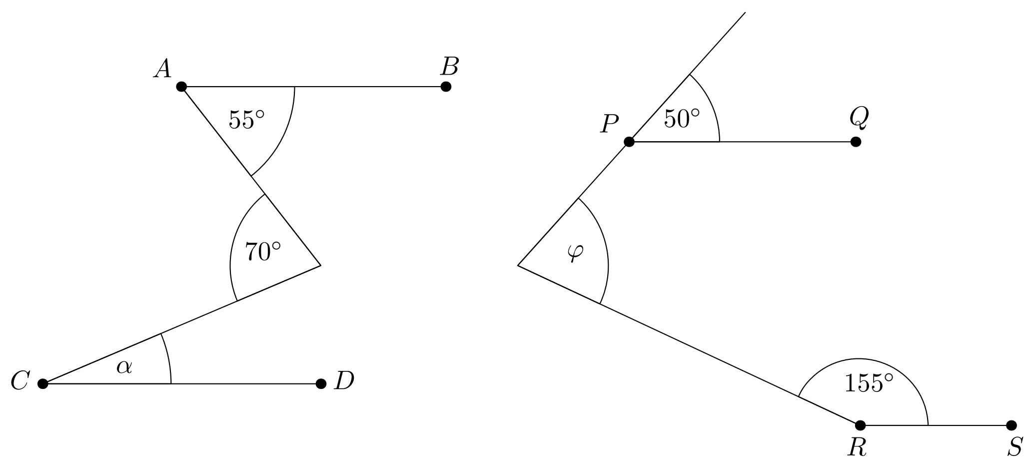
Lösung: (a)

- Der Winkel CPA ist der Nebenwinkel des $60°$ -Winkels:
  $\sphericalangle CPA = 180° - 60° = 120°$.
  $\Rightarrow \quad \alpha = (180° - 120°) : 2 = 30°$.
  Wegen $\alpha + \delta = 90°$ folgt: $\delta = 60°$.
  Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck PBC ergibt sich $\beta = 60°$.
- Das Dreieck APC enthält zwei maßgleiche Innenwinkel, also ist es **gleichschenklig**.
  $\Rightarrow \quad \overline{AP} = \overline{PC} = 5\,\text{cm}$.
  Das Dreieck PBC enthält drei maßgleiche Innenwinkel, also ist es **gleichseitig**.
  Damit gilt: $\overline{AP} = 5\,\text{cm} = \overline{PC} = \overline{CB} = \overline{PB}$
  $\Rightarrow \quad \overline{AB} = 5\,\text{cm} + 5\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$.

(b) In der Figur b) gilt: $\overline{PQ} = 9,38\,\text{cm}$.

- Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck TQR ergibt sich:
  $\sphericalangle QTR = 180° - 2 \cdot 15° = 150°$.
  Der Winkel RTP ist der Nebenwinkel des $150°$ -Winkels:
  $\sphericalangle RTP = 180° - 150° = 30°$.
  Im Dreieck PTR folgt $\psi = (180° - 30°) : 2 = 75°$.
  Anmerkung: Wegen $\psi + 15° = 90°$ ist das Dreieck PQR rechtwinklig.
- Das Dreieck TQR ist gleichschenklig, weil es zwei maßgleiche Innenwinkel besitzt:
  $\Rightarrow \quad \overline{TQ} = \overline{TR}$.
  Das Dreieck PTR ist ebenfalls gleichschenklig, weil es zwei maßgleiche Innenwinkel besitzt:
  $\Rightarrow \quad \overline{TP} = \overline{TR}$.
  Also gilt: $\overline{TQ} = \overline{TR} = \overline{TP}$. Also ist der Punkt T der Mittelpunkt der Seite $[PQ]$ und es gilt: $\overline{PT} = 0.5 \cdot \overline{PQ} = 4,69\,\text{cm}$.
  Anmerkung: Wegen $\overline{TQ} = \overline{TR} = \overline{TP}$ liegen die Punkte P, Q und R auf einer Kreislinie mit dem Mittelpunkt T.

16.

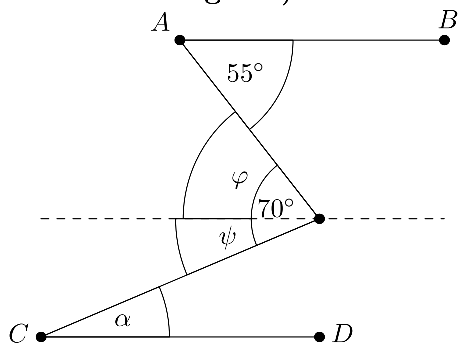


Figur a): $AB \parallel CD$ Figur b): $PQ \parallel RS$

Berechne die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Zeichne dazu geeignete Hilfslinien ein. Die Zeichnungen sind nicht maßstabgerecht.

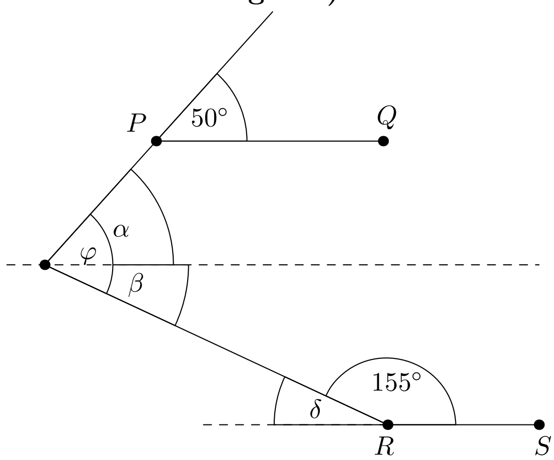
Lösung:

Figur a)



Eine Hilfslinie ist z.B. die Parallele zu AB bzw. CD, die durch den Scheitel des 70°-Winkels verläuft (hier: die gestrichelte Linie).
Du erkennst nun: $\varphi = 55°$ (Z-Winkel) und $\psi = \alpha$ (Z−Winkel).
Wegen $\varphi + \psi = 70°$ ist nun $\psi = 70° - 55° = 15° = \alpha$.
Anmerkung: Es gibt auch eine andere Hilfslinie, die zur Lösung führt, nämlich die Senkrechte zu CD durch den Scheitel des 70°-Winkels. Probiere es aus.

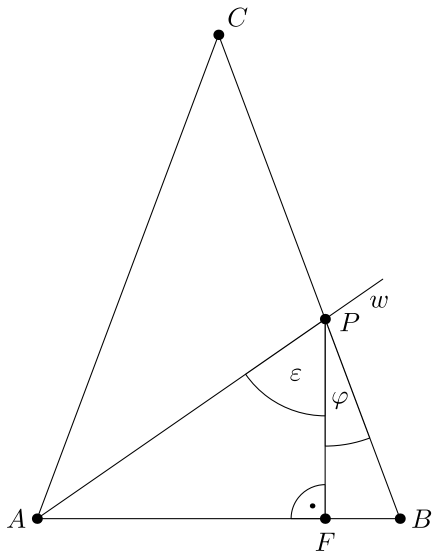
Figur b)



Wieder ist eine Hilfslinie ist z.B. die Parallele zu PQ bzw. RS, die durch den Scheitel des Winkels mit dem Maß φ verläuft (hier: die gestrichelte Linie in der Mitte). Du erkennst nun: $\alpha = 50°$ (F-Winkel).

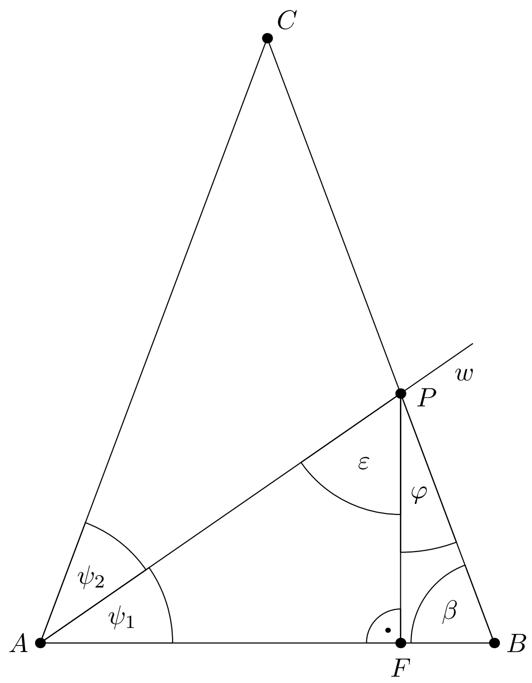
Wenn du die Strecke $[SR]$ ein wenig über den Punkt R hinaus verlängerst, entsteht ein weiterer Winkel - hier mit dem Maß δ.
Du siehst einerseits : $\delta = 180° - 155° = 25°$ (Nebenwinkel).
Andererseits sind die Winkel β und δ maßgleiche Z−Winkel. $\Rightarrow \quad \beta = \delta = 25°$.
Also ergibt sich $\varphi = \alpha + \beta = 50° + 25° = 75°$

17.



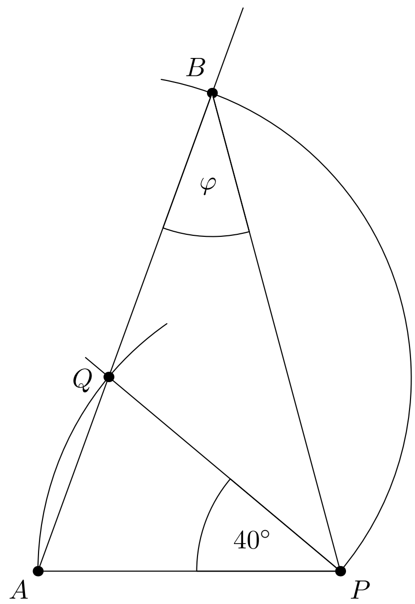
Im Dreieck ABC gilt: $\overline{CA} = \overline{CB}$ und $\varepsilon = 56,81°$. Die Halbgerade $w = [AP$ halbiert den Winkel BAC. Die Skizze ist nicht maßstabgerecht. Berechne φ.

Lösung:



Im Dreieck AFP gilt: $\psi_1 = 90° - \varepsilon = 90° - 56,81° = 33,19°$.
Weil w die Winkelhalbierende ist, gilt: $\psi_2 = \psi_1 = 33,19°$.
Weil das Dreieck ABC gleichschenklig ist, gilt $\beta = 2 \cdot 33,19° = 66,38°$.
Im rechtwinkligen Dreieck FBP gilt dann: $\varphi = 90° - \beta = 90° - 66,38°$
$\Rightarrow \quad \varphi = 23,62°$.

18.



Die Punkte P und Q sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AP} = 4\,\text{cm}$.

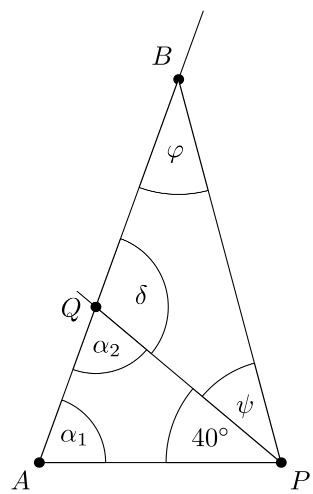
(b) Berechne φ.

(c) Begründe, dass das Dreieck APB nicht gleichschenklig ist.

(d) Wie groß müsste der Winkel QPA werden, damit das Dreieck APB bei sonst unveränderlichen Bedingungen gleichschenklig wird?

(e) Könnte das Dreieck APB bei geeigneter Wahl des Winkels QPA vielleicht sogar gleichseitig werden?

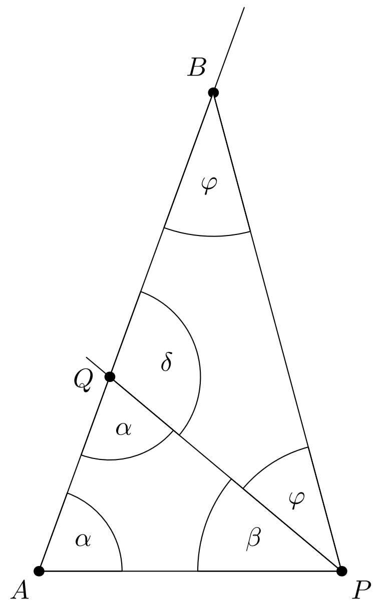
Lösung: (a)



(b) Die beiden Dreiecke APQ und QPB sind gleichschenklig: $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$.
Also gilt: $\alpha_1 = \alpha_2 = (180° - 40°) : 2 = 70°$.
Der Winkel mit dem Maß δ ist der Nebenwinkel von α_2:
$\delta = 180° - \alpha_2 = 180° - 70° = 110°$.
Im Dreieck QPB gilt: $\varphi = \psi$.
$\Rightarrow \quad \varphi = \psi = (180° - 110°) : 2 = 35°$.

(c) Es müsste $\alpha_1 = 40° + \psi$ gelten, aber: $40° + 35° = 75° \neq 70° \quad (\dagger)$.

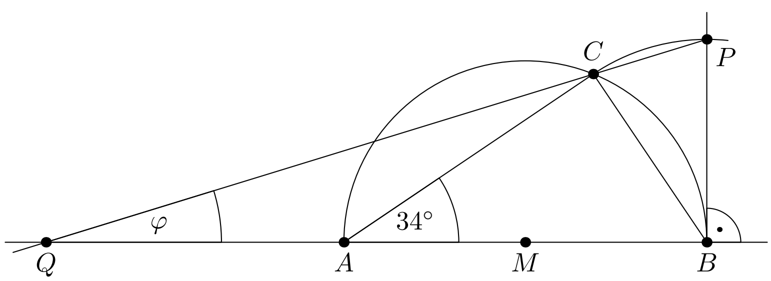
(d)



Es muss gelten:
$\beta = 180° - 2 \cdot \alpha, \quad \delta = 180° - \alpha$ und
$\varphi = 180° - \delta = [180° - (180° - \alpha)] : 2 = \frac{1}{2}\alpha$.
Soll das Dreieck APB gleichschenklig werden, dann muss $\alpha = \beta + \varphi$ sein:
$\alpha = 180° - 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 2,5\alpha = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 72°$.

(e) In der Lösung der Aufgabe (d) wurde gezeigt, dass es nur ein einziges gleichschenkliges Dreieck APB gibt. Dessen Basiswinkel hat aber das Maß 72°. Im Falle des gleichseitigen Dreiecks müsste der Basiswinkel (wie alle Inneninkel dort) 60° betragen. Also ist ein gleichseitiges Dreeick auf diese Weise nicht zu konstruieren.

19.



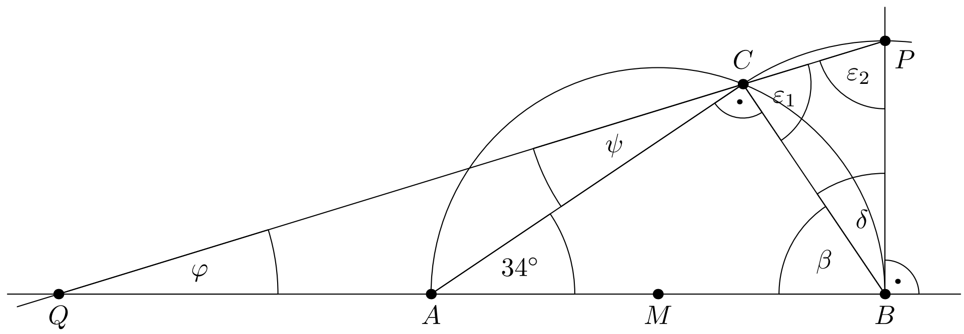
Die Punkte M und B sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Zeige: $\varphi = 17°$.

(c) Untersuche, ob das Dreieck ACQ gleichschenklig ist.

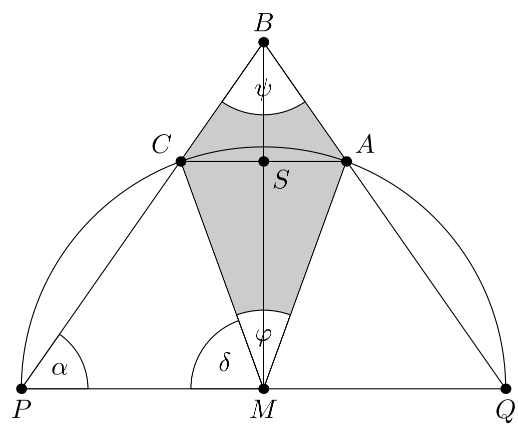
Lösung: (a)



(b) Der Halbkreis mit dem Durchmesser $[AB]$ ist der THALES-Kreis über $[AB]$.
Also folgt: $\sphericalangle ACB = 90°$.
$\Rightarrow \quad \beta = 90° - 34° = 56° \quad \Rightarrow \quad \delta = 90° - \beta = 90° - 56° = 34°$.
Im Dreieck BPC gilt: $\overline{BC} = \overline{BP}$, also ist das Dreieck BPC gleichschenklig.
$\Rightarrow \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = (180° - 34°) : 2 = 73°$.
Das Dreieck QBP ist rechtwinklig: $\varphi + 90° + \varepsilon_2 = 180°$.
$\Rightarrow \quad \varphi + \varepsilon_2 = 90° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 17°$.

(c) Im Dreieck QBC gilt:
$\varphi + \beta + 90° + \psi = 180°$. Also: $17° + 56° + 90° + \psi = 180°$.
$\Rightarrow \quad \psi = 17°$.
Damit haben zwei Innenwinkel des Dreiecks ACQ gleiches Maß. Also ist das Dreieck ACQ gleichschenklig.

20.



Die achsensymmetrische Darstellung zeigt einen Halbkreis und das Viereck $MABC$.

(a) Um welches besondere Viereck handelt es sich beim Viereck $MABC$? Begründe deine Antwort.

(b) Zeichne die Figur für $\overline{PQ} = 8\,\text{cm}$ und $\alpha = 55°$.

(c) Trage überall dort, wo es möglich ist, das Winkelmaß „α“ ein.

(d) Zeige: $\delta = 180° - 2\alpha$ und $\varphi = 4\alpha - 180°$.

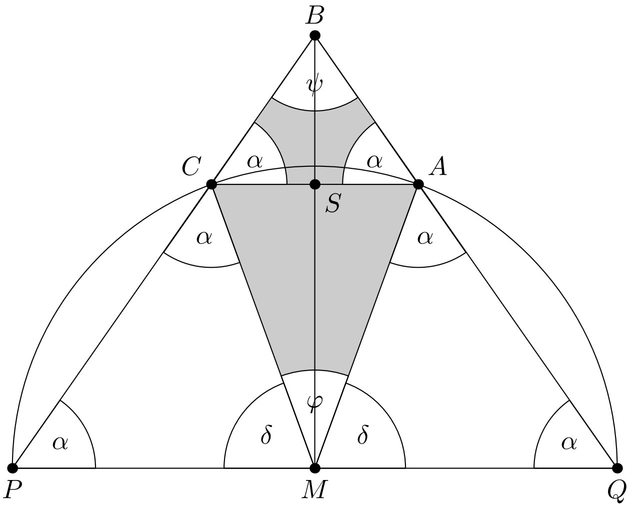
(e) Für welche Belegungen von α gibt es überhaupt solche Vierecke $MABC$?

(f) Zeige: $\psi = 180° - 2\alpha$.

(g) Berechne α so, dass das Viereck $MABC$ eine Raute wird.

Lösung: (a) Das Viereck $MABC$ ist ein achsensymmetrischer Drachen, denn die beiden Diagonalen stehen aufeinander senkrecht.

(b)



(c) Siehe Zeichnung.

(d) Im Dreieck PMC gilt: $2\alpha + \delta = 180° \quad \Rightarrow \quad \delta = 180° - 2\alpha$.
Am Punkt M gilt: $\delta + \varphi + \delta = 180°$.
Also: $180° - 2\alpha + \varphi + 180° - 2\alpha = 180° \quad \Rightarrow \quad 360° + \varphi - 4\alpha = 180°$
$\Rightarrow \quad \varphi = 4\alpha - 180°$.

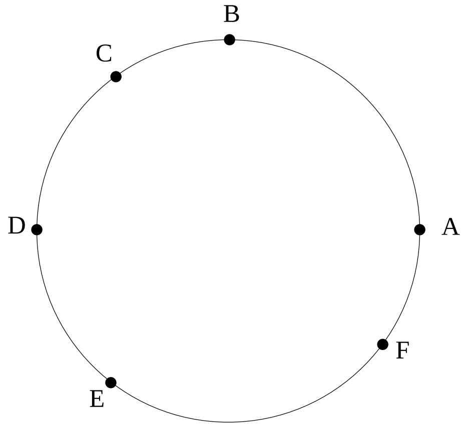
(e) Es muss $\varphi = 4\alpha - 180° > 0$ sein: $\Leftrightarrow \quad 4\alpha - 180° > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 45°$. Außerdem muss $\alpha < 90°$ sein. Insgesamt muss gelten $45° < \alpha < 90°$.

(f) Im Dreieck CAB gilt: $2\alpha + \psi = 180° \quad \Rightarrow \quad \psi = 180° - 2\alpha$.

(g) Damit das Viereck $MABC$ eine Raute wird, muss $\varphi = \psi$ gelten:
Also: $4\alpha - 180° = 180° - 2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 6\alpha = 360° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 60°$.

21. Sechs Punkte A, B, C, D, E und F liegen getrennt auf einer Kreisline.
Wie viele Dreiecke kannst du aus jeweils drei dieser sechs Punkte einzeichnen?

Lösung:



Eckpunkt A als erster:

ABC, ABD, ABE, ABF
ACD, ACE, ACF
ADE, ADF
AEF.

Eckpunkt B als erster:

BCD, BCE, BCF
BDE, BDF
BEF.

Eckpunkt C als erster:

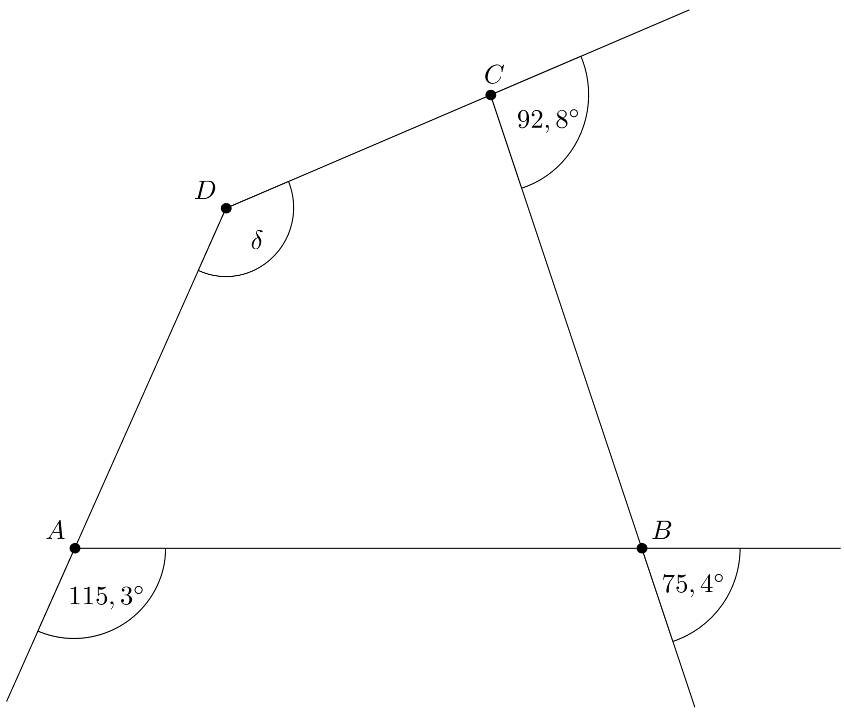
CDE, CDF
CEF.

Eckpunkt D als erster:

DEF.

Es gibt nicht mehr und nicht weniger als 20 solche Dreiecke.

22.

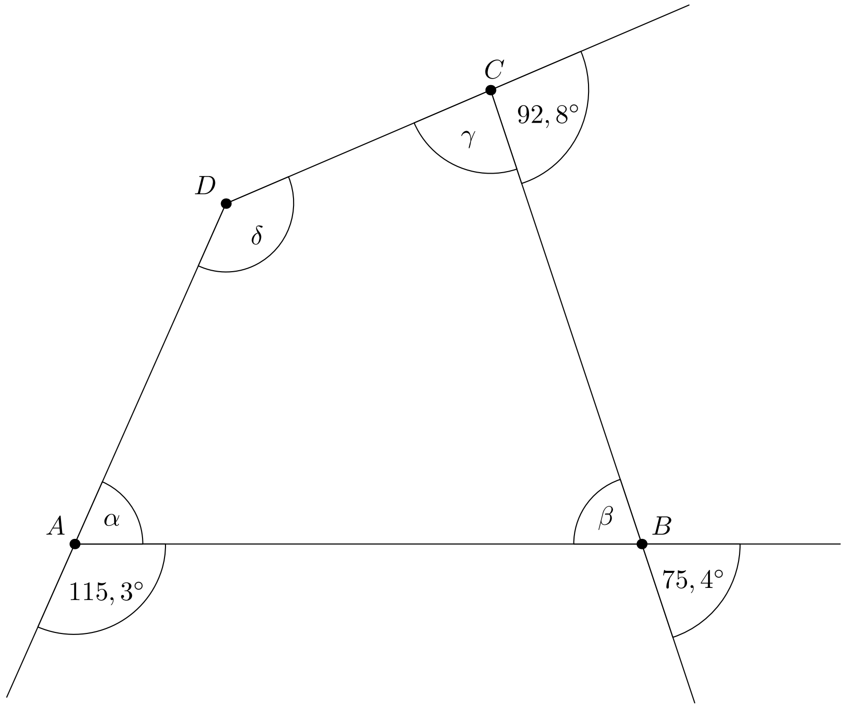


Uwe und Emil wollen aus den gegebenen Winkeln den Winkel δ bestimmen. Die Zeichnung ist aber nicht maßstabgerecht.
Emil behauptet: „Das ist ganz einfach: Der $115,3°$-Winkel und δ sind F-Winkel. Also ist δ auch $115,3°$“.
Uwe widerspricht: „Das können keine F-Winkel sein, weil …“

(a) Notiere, wie Uwe seine Antwort begündet.

(b) Berechne δ.

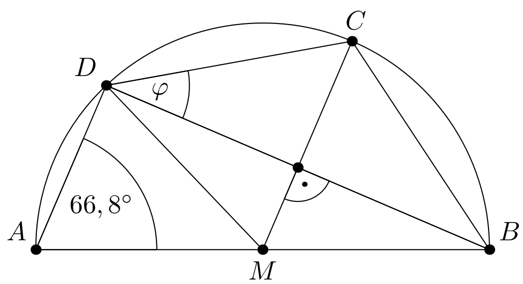
Lösung:



(a) „... die Halbgeraden $[AB$ und $[DC$ nicht parallel sind.“

(b) $\beta = 75,4^\circ$ (Scheitelwinkel)
$\gamma = 180^\circ - 92,8^\circ = 87,2^\circ$ und
$\alpha = 180^\circ - 115,3^\circ = 64,7^\circ$ (jeweils Nebenwinkel)
Die Innenwinkelsumme in jedem Viereck beträgt 360°.
$\Rightarrow \quad \delta = 360^\circ - 75,4^\circ - 87,2^\circ - 64,7^\circ = 132,7^\circ$.

23.

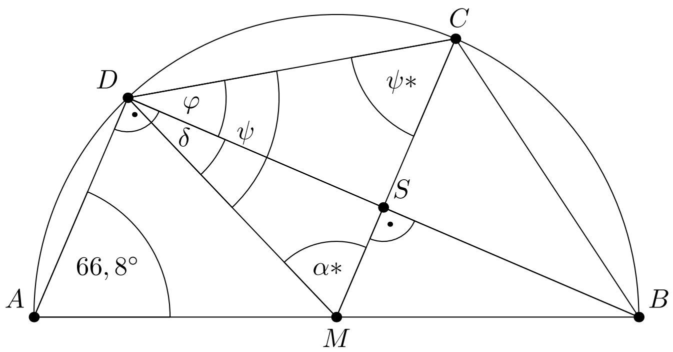


Der Mittelpunkt M der Strecke $[A, B]$ ist gleichzeitig der Mittelpunkt des Halbkreises durch die vier Punkte A, B, C und D.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$.

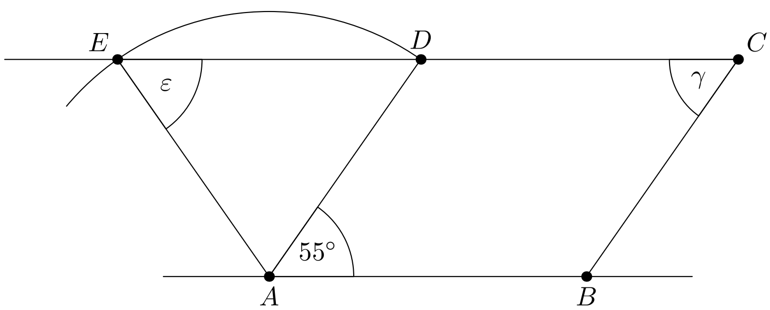
(b) Berechne φ.

Lösung: (a)



(b) Der Halbkreis ist gleichzeitig der THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$. Also gilt: $\sphericalangle ADB = 90°$.
$\Rightarrow \quad [AD] \parallel [MC] \quad \Rightarrow \quad \alpha* = 66,8°$.
Das Dreieck MCD ist gleichschenklig; es gilt: $\overline{MC} = \overline{MD} = 4\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad \psi* = \psi = (180° - 66,8°) : 2 = 56,6°$.
Im Dreieck MSD gilt: $\delta = 90° - \alpha* = 90° - 66,8° = 23,2°$.
Also ist $\varphi = \psi - \delta = 56,6° - 23,2° = 33,4°$.

24.



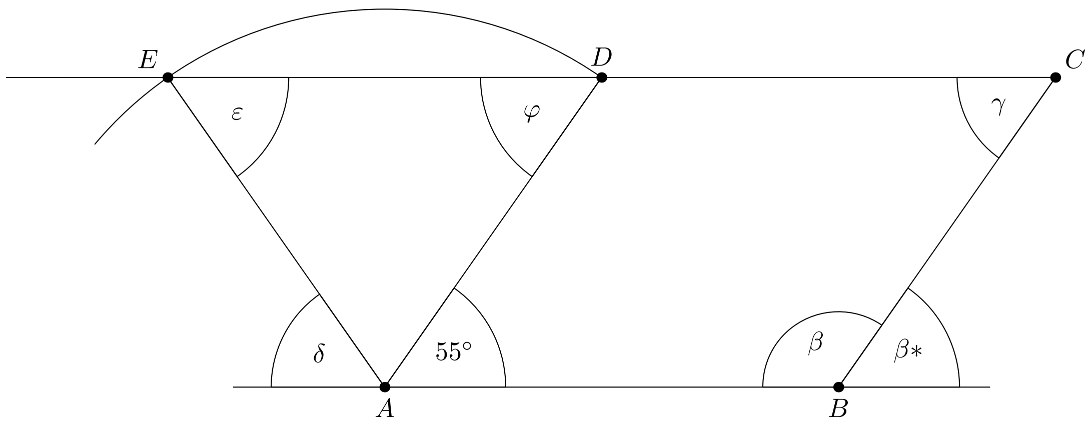
Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm. Es gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$. Der Punkt A ist der Mittelpunkt des Kreisbogens durch den Punkt D.

(a) Zeichne die Figur in folgenden Schritten:
- Zeichne zunächst die Strecke $[AB]$.
- Trage am Punkt A den $55°$-Winkel an.
- Zeichne den Punkt D ein.
- Zeichne den Punkt C ein.
- Konstruiere mit Hilfe des Kreisbogens den Punkt E.

(b) Begründe: Das Dreieck ADE ist gleichschenklig.

(c) Begründe:
- Es gilt $\gamma = \varepsilon = 55°$
- Das Viereck $ABCE$ ist ein achsensymmetrisches Trapez.

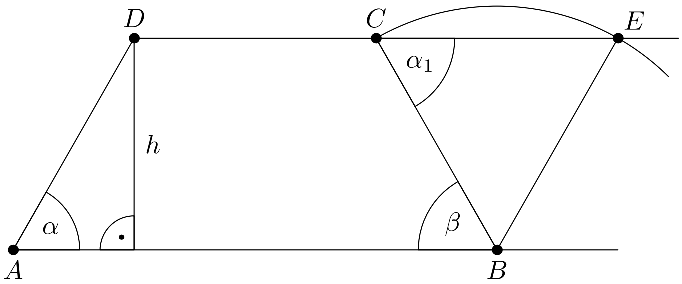
Lösung: (a)



(b) Es gilt $\overline{AD} = \overline{AE} = 5\,\text{cm}$; also ist das Dreieck ADE gleichschenklig.

(c)
- Im Parallelogramm $ABCD$ gilt: $\gamma = 55°$.
  $\Rightarrow \quad \varphi = 55°$ (F-Winkel zu γ).
  Weil das Dreieck ADE gleichschenklig ist, folgt $\varphi = \varepsilon = 55°$.
- Dann gilt aber auch $\delta = \varepsilon = 55°$ (Z-Winkel zu ε).
  $\Rightarrow \quad \beta* = 55°$ (Z-Winkel zu γ).
  $\Rightarrow \quad \beta = 180° - 55° = 125°$ (Nebenwinkel von $\beta*$).
  Andererseits ist $\sphericalangle BAE$ der Nebenwinkel von δ:
  $\sphericalangle BAE = 180° - 55° = 125° = \beta$.
  Im Viereck $ABCE$ gilt: $[AB] \parallel [CE]$.
  Die beiden spitzen und die beiden stumpfen Innenwinkel haben jeweils gleiches Maß. Also ist das Viereck $ABCE$ ein achsensymmetrisches Trapez.

25.



Das Viereck $ABCD$ ist ein achsensymmetrisches Trapez.
Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{DC} = 4\,\text{cm}$ und $h = 3,5\,\text{cm}$.
Der Punkt B ist der Mittelpunkt des Kreisbogens durch den Punkt C.

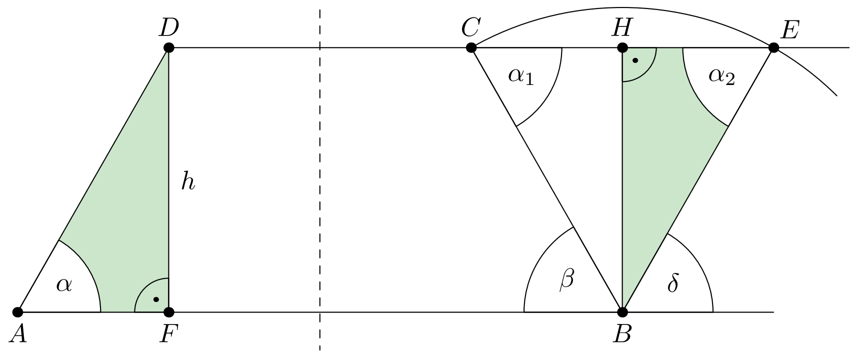
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe:

- Das Dreieck BEC ist gleichschenklig.

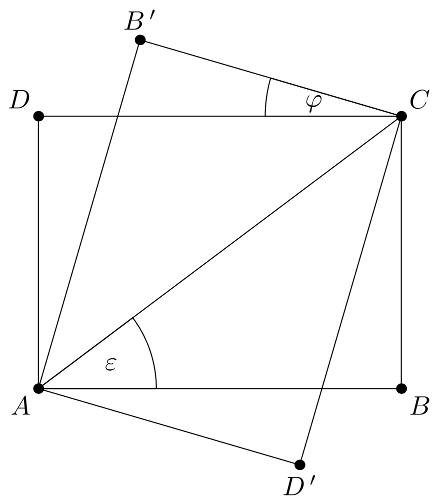
- $\alpha_1 = \alpha$.
- Das Viereck $ABED$ ist ein Parallelogramm.

Lösung: (a)



(b)
- Es gilt: $\overline{BC} = \overline{BE}$, weil die beiden Punkte C und E auf derselben Kreislinie mit B als Mittelpunkt liegen.
- Weil das Trapez achsensymmetrisch ist, folgt $\beta = \alpha$. Weiter gilt: $\beta = \alpha_1$ (Z-Winkel). Also folgt $\alpha_1 = \alpha$.
- Das Dreieck BEC ist gleichschenklig. $\Rightarrow$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Weiter folgt $\delta = \alpha_2$ (Z-Winkel) $\Rightarrow$ $\delta = \alpha$, d.h. es gilt: $[AD] \parallel [BE]$ weil damit δ und α F-Winkel sind. Beim Trapez $ABCD$ gilt $[AB] \parallel [CD]$ und damit auch $[AB] \parallel [ED]$. Daher sind im Viereck $ABED$ jeweils zwei gegenüberliegende Seiten parallel, also ist das Viereck $ABED$ ein Parallelogramm.

26.

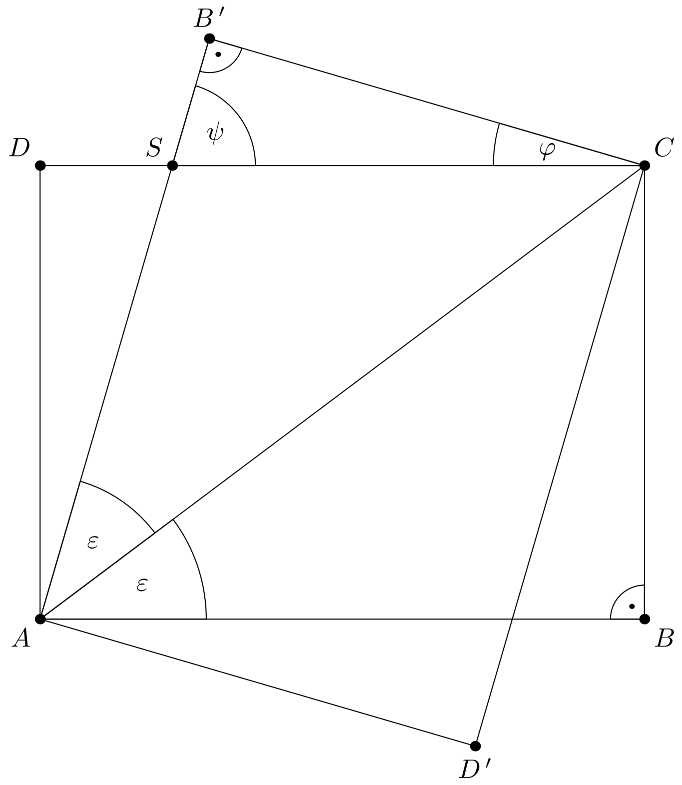


Das Rechteck $ABCD$ wurde an seiner Diagonalen $[AC]$ gespiegelt. Dadurch ist das Viereck $AD'CB'$ entstanden.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne φ für $\varepsilon = 36{,}87°$.

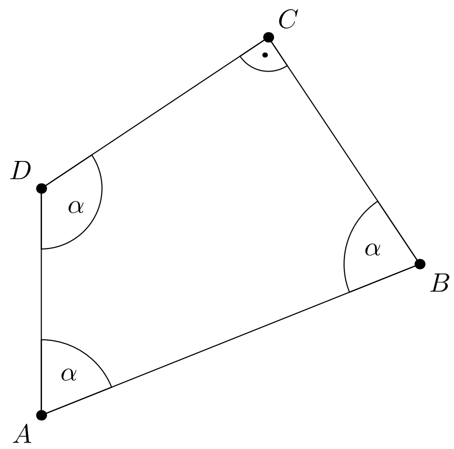
Lösung: (a)



(b) Jede Achsenspiegelung ist längen- und winkeltreu. Daher sind das Viereck $AD'CB'$ und das Rechteck $ABCD$ kongruent. $\Rightarrow$ $\sphericalangle SB'C = 90°$.
Der Winkel CSB' ist ein Stufenwinkel zum Winkel BAS:
$\Rightarrow$ $\psi = 2 \cdot \varepsilon = 73{,}74°$.
$\Rightarrow$ $\varphi = 90° - \psi = 90° - 73{,}74° = 16{,}26°$.

27. In einem Viereck sind drei Winkel gleich groß. Der vierte Winkel ist ein rechter Winkel. Um welches besondere Viereck handelt es sich?

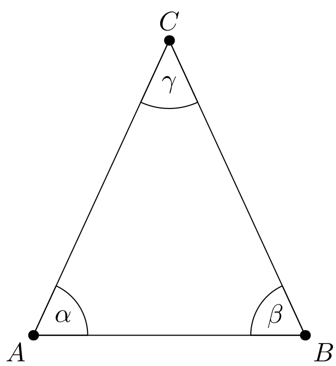
Lösung:



Es gilt: $\alpha + \alpha + \alpha + 90° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot \alpha + 90° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 90°$.
Die drei restlichen Innenwinkel des Vierecks sind damit ebenfalls rechte Winkel. Bei diesem Viereck muss es sich also um ein Rechteck handeln.

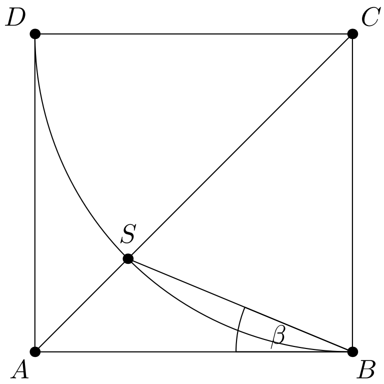
28. In einem gleichschenkligen Dreieck hat ein Winkel das Maß $42,68°$.

Lösung:



In einem gleichschenkligen Dreieck haben die beiden Basiswinkel gleiches Maß. In der Figur gilt also: $\alpha = \beta$.
1. Möglichkeit: $\alpha = \beta = 42,68° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 180° - 2 \cdot 42,68° = 94,64°$.
2. Möglichkeit: $\gamma = 42,68° \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = (180° - 42,68°) : 2 = 68,66°$.

29.

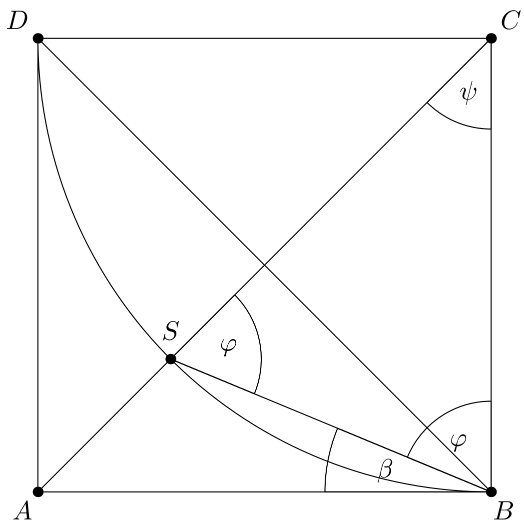


Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

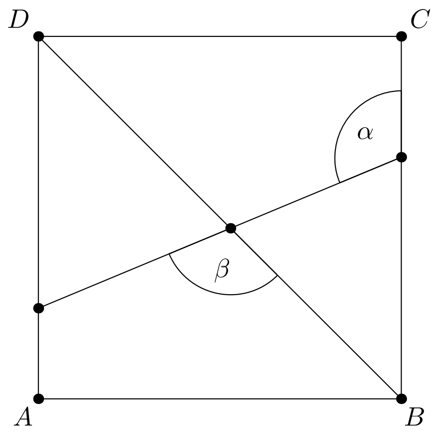
(b) Berechne das Maß β des Winkels SBA.

Lösung: (a)



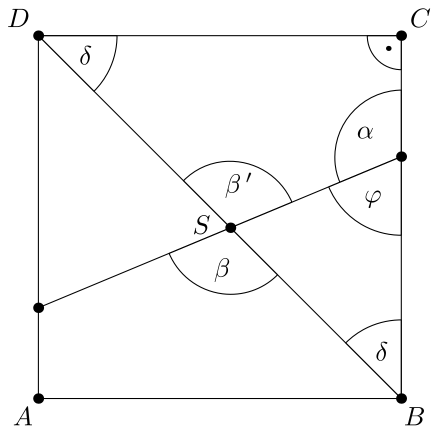
(b) Im Quadrat $ABCD$ halbiert die Diagonale $[AC]$ den rechten Winkel DCB. Also gilt: $\psi = 45°$.
Das Dreieck SBC ist gleichschenklig. $\Rightarrow$ $\varphi = (180° - 45°) : 2 = 67,5°$.
$\Rightarrow$ $\beta = 90° - \varphi = 22,5°$.

30.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Es gilt $\alpha = 123,4^\circ$. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.
Berechne β auf zwei verschiedene Arten.

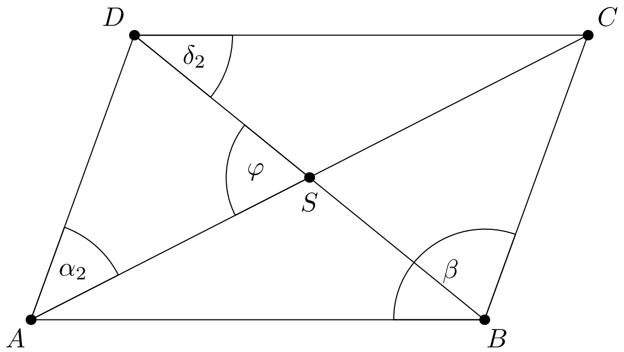
Lösung:



1. Möglichkeit: Über die Innenwinkelsumme im Viereck $SQCD$
Weil jede Quadratdiagonale Winkelhalbierende von zwei rechten Winkeln ist, folgt $\delta = 45^\circ$.
Dann gilt im Viereck $SQCD$: $45^\circ + \beta' + 123,4^\circ + 90^\circ = 360^\circ$
$\Rightarrow \quad \beta' = 101,6^\circ$.
Weil β' und β Scheitelwinkel sind, folgt $\beta' = \beta = 101,6^\circ$.

2. Möglichkeit: Über den Satz vom Außenwinkel
φ ist der Nebenwinkel von α. Also gilt: $\varphi = 180^\circ - 123,4^\circ = 56,6^\circ$.
β ist ein Außenwinkel am Dreieck BQS: $\beta = \delta + \varphi = 45^\circ + 56,6^\circ = 101,6^\circ$.

31.

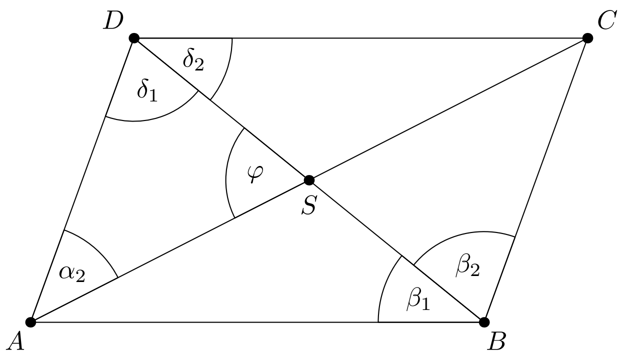


Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
Es soll gelten: $\alpha_2 = 42,1°$, $\delta_2 = 38,7°$ und $\varphi = 65,3°$. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.

(a) Skizziere das Parallelogramm.

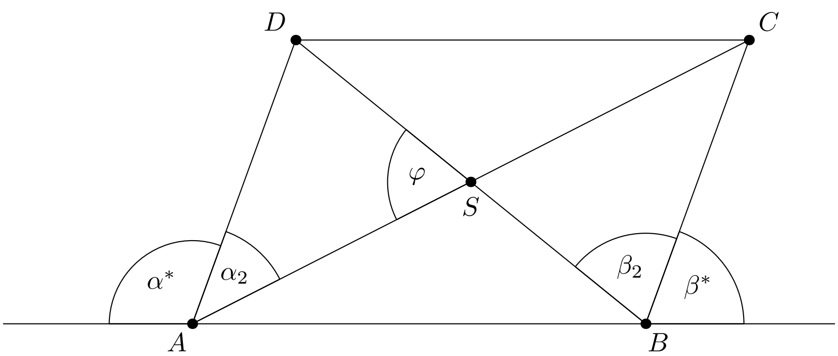
(b) Berechne β.

Lösung: (a)



(b) Es gibt mehrere Möglichkeiten, z.B.:
$\Delta\, ASD$: $\delta_1 = 180° - 42,1° - 65,3° = 72,6° = \beta_2$ (Z-Winkel).
$\beta_1 = \delta_2 = 38,7°$ (Z-Winkel) $\quad\Rightarrow\quad \beta = \delta_1 + \delta_2 = 111,3°$.

32.

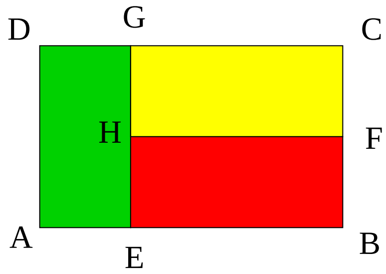


Die Klasse 7a bekommt vom Mathematiklehrer die folgende Aufgabe gestellt:
„Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
Es soll gelten: $\alpha_2 = 38,9°$, $\alpha^* = 109,2°$, $\varphi = 67,5°$ und $\beta^* = 77,6°$.
Berechne β_2 . Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.“
Erwin meint nach mehreren Rechenversuchen: „In der Angabe kann etwas nicht stimmen.“ Wo liegt der Fehler?

Lösung: Es müsste gelten: $\beta = \sphericalangle CBA = 180° - \beta^* = 180° - 77,6° = 102,4°$.
Weil aber α^* und β zwei zugehörige F-Winkel sind, müssten beide Winkel gleiches Maß besitzen.
Aber in der Angabe steht: „$\alpha^* = 109,2° \neq 102,4°$.“ Das geht nicht.

12. Drehung

1.



Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.
Die drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Ihre Seitenlängen stehen jeweils im Verhältnis 1:2. Weiter gilt: $\overline{HF} = 2x\,\mathrm{cm}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

(a) Zeichne die Figur für $x = 4$.
In welchem Verhältnis stehen hier die Seitenlängen des Rechtecks $ABCD$? Ist das immer so, egal, womit man x belegt?

(b) Berechne den Umfang u des Rechtecks $ABCD$ in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $u(x) = 10x\,\mathrm{cm}$.]

(c) Berechne x so, dass der Saum der Fahne 4 m 30 cm lang ist.

(d) Das Rechteck $HFCG$ lässt sich so drehen, dass es sich mit dem Rechteck $AEGD$ deckt.
Zeichne die Figur für $x = 6$ und konstruiere das Drehzentrum Z.
Begründe: Der Drehwinkel hat das Maß 90°.

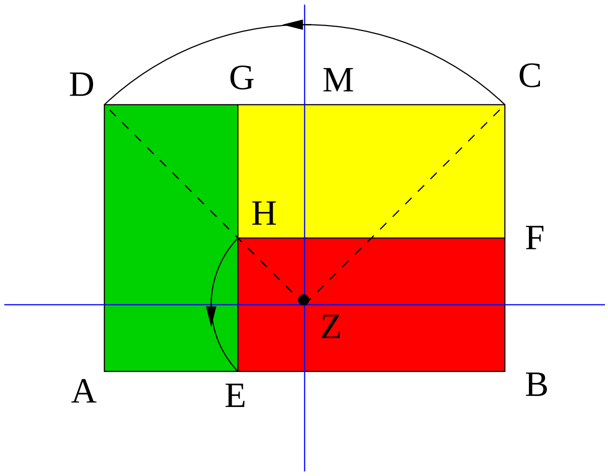
Lösung:

(a) Das Rechteck $ABCD$ ist 12 cm breit und 8 cm hoch.
Die Seitenlängen stehen im Verhältnis 2:3.
Breite jedes Rechtecks im Inneren: $3x$ cm
Höhe jedes Rechtecks im Inneren: $2x$ cm
Breite : Höhe = 2x : 3x = 2 : 3. Das gilt für alle $x \in \mathbb{Q}^+$.

(b) $u(x) = 2 \cdot [(2x + x) + (x + x)]\,\mathrm{cm} = 10x\,\mathrm{cm}$

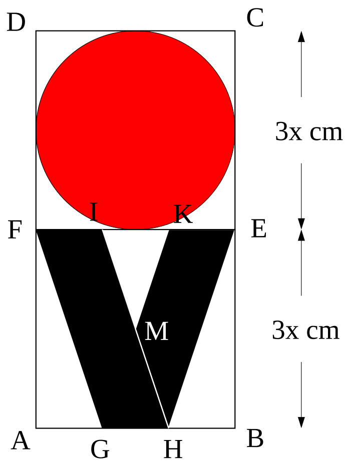
(c) $10x = 430 \quad \Rightarrow \quad x = 43$

(d)



Für diese Drehung gilt z.B.: $C \to D$ und $H \to E$. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecken $[CD]$ und $[HE]$ ergibt den Drehpunkt Z.
Die Dreiecke DZM und ZCM sind gleichschenklig-rechtwinklig. Also hat der Drehwinkel CZD das Maß $90°$.

2. Das ist ein Bild des Logos der Firma MARABU, die Farben herstellt.



Die Figur setzt sich aus zwei Quadraten zusammen.
Die Strecken $[AG], [GH], [HB], [FI], [IK]$ und $[KE]$ sind alle gleich lang.

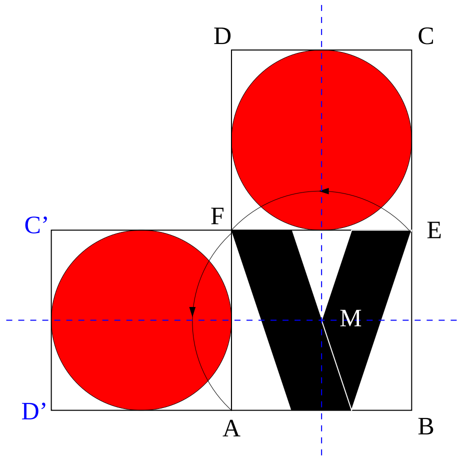
(a) Zeichne die Figur für $x = 2$. Platzbedarf nach links: 7 cm

(b) Die Figur $FECD$ soll so gedreht werden, dass sie dann lückenlos neben das Quadrat $ABEF$ passt.

- Begründe: Das Drehzentrum muss im Punkt M liegen.
- Führe die Drehung durch.
- Begründe: Der Drehwinkel hat das Maß $90\,°$.

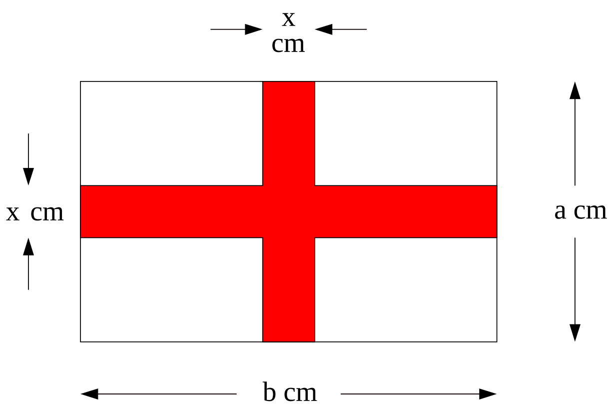
Lösung: (a) –

(b)
- Der Punkt E muss so gedreht werden, dass er auf F zu liegen kommt. Also muss das Drehzentrum auf der Mittelsenkrechten der Strecke $[EF]$ liegen.
  Gleichzeitig wird der Punkt F auf den Punkt A gedreht. Also muss das Drehzentrum auch auf der Mittelsenkrechten der Strecke $[AF]$ liegen.
  Also liegt das Drehzentrum im Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten, nämlich im Punkt M, dem Quadratmittelpunkt.
-



- 1. Möglichkeit:
  Das Dreieck MEF ist gleichschenklig-rechtwinklig mit der Hypotenuse $[FE]$.
  2. Möglichkeit:
  Die Mittelenkrechte der Strecke $[FE]$ deckt sich nach der Drehung mit der Mittelsenkrechten zu $[AF]$. Weil beide Mittelsenkrechten aufeinander senkrecht stehen, hat der Drehwinkel das Maß 90°.

3. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



(a) Zeichne die Figur für $b = 8$, $a = 5$ und $x = 1$.

(b) Das weiße Rechteck oben links lässt sich auf das weiße Rechteck rechts unten verschieben.

- Zeichne die vier Stellvertreter des Verschiebungsvektors $\overrightarrow{v}$ zwischen den entsprechenden Eckpunkten der beiden Rechtecke ein.
- Gib die Komponenten des Verschiebungsvektors $\overrightarrow{v}$ an.

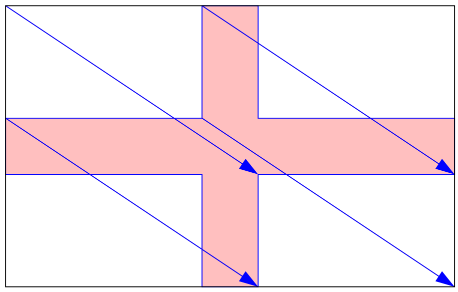
(c) Das weiße Rechteck rechts oben lässt sich so drehen, dass es mit dem Rechteck links unten zur Deckung kommt.

- Zeichne das Drehzentrum ein und gib den Drehwinkel an.
- Um welche besondere Drehung handelt es sich?

Lösung:

(a) –

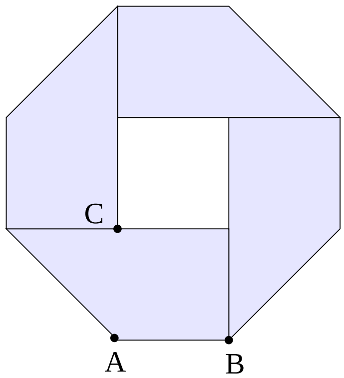
(b) •



- $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ -3 \end{pmatrix}$

(c)
- Das Drehzentrum liegt im Schnittpunkt der Diagonalen des großen Rechtecks. Dieser Schnittpunkt deckt sich mit dem Symmetriezentrum des Kreuzes. Der Drehwinkel beträgt 180°.
- Es handelt sich um eine Punktspiegelung.

4. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Das weiße Viereck im Inneren ist ein Quadrat. Es gilt: $\overline{AB} = \overline{AC} = 2,5\,\text{cm}$



(a) Zeichne die Figur.

(b) Gib alle Winkelmaße φ an, um die man die Figur drehen kann, sodass sie sich wieder mit der Ausgangsfigur deckt. Zeichne dazu das Drehzentrum und weitere Hilfslinien ein.

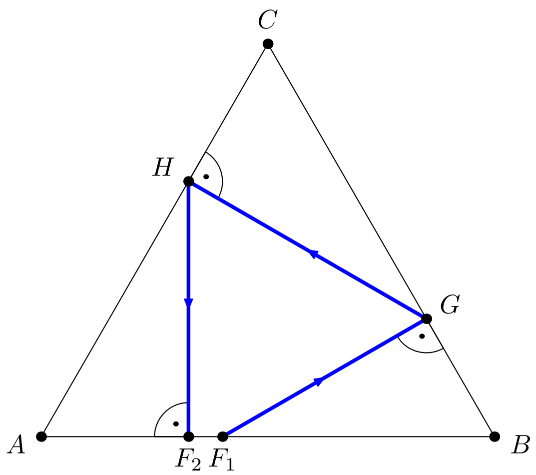
(c) Begründe: Die Figur ist punktsymmetrisch.

Lösung: (a) –

(b) $\varphi \in \{k \cdot 90°\}$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Das Drehzentrum ist der Quadratmittelpunkt. Die geforderten Hilfslinien verlaufen vom Drehzentrum zu Urbildpunkten und den zugehörigen durch Drehung entstandenen Bildpunkten.

(c) Wegen $2 \cdot 90° = 180°$ kann auch um $180°$ gedreht werden. Jede Drehung um $180°$ ist eine Punktspiegelung.

5.

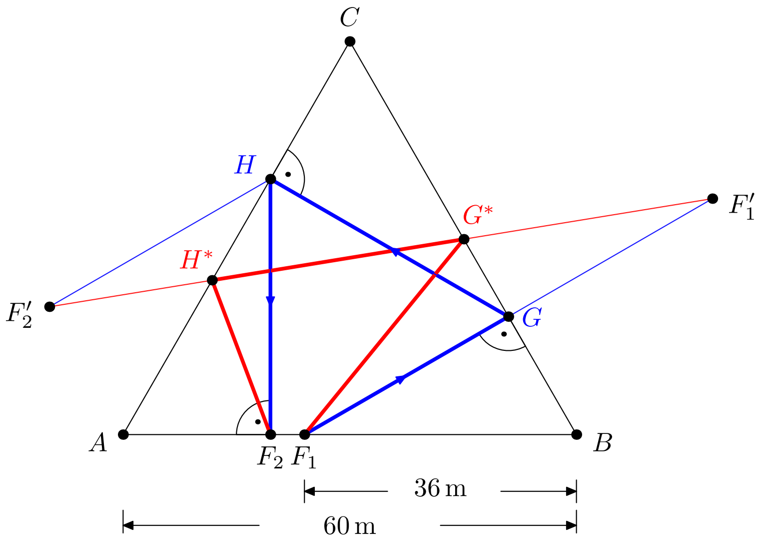


Herr Theo Lith ist als Platzwart für ein Spielfeld ABC verantwortlich, das die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 60 m hat. Der Fahnenmast F_1 ist 36 m vom Punkt B entfernt.
Wie in der Skizze dargestellt, läuft er während eines Kontrollgangs zu den seitlichen Begrenzungen dieses Spielfeldes von F_1 nach G, dann nach H und schließlich gelangt er zum Fahnenmast F_2.

(a) Zeichne die Figur mit dem Weg von Herrn Lith. Dabei sollen 10 m einem cm in deinem Heft entsprechen.

(b) Berechne den Abstand der beiden Fahnenmasten.

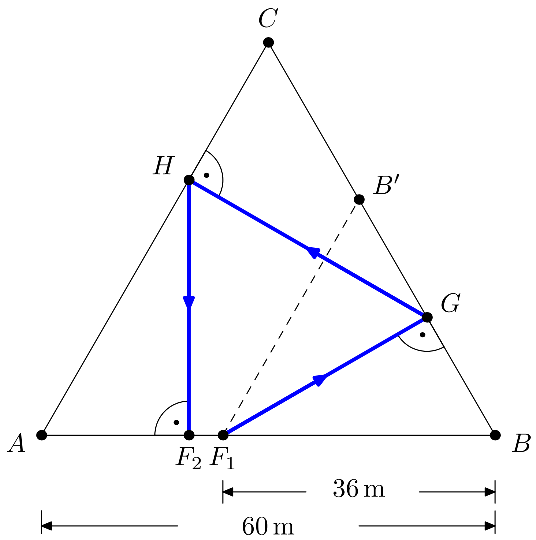
(c)



Es wurden die Punkte F_1 an $[BC]$ und F_2 an $[AC]$ gespiegelt. Dadurch entstehen die Spiegelbilder F_1' und F_2'.

- Begründe anhand der Zeichnung: Es gilt z.B. $\overline{F_1G} = \overline{GF_1'}$ und $\overline{HF_2'} = \overline{HF_2}$.
- Begründe: Der Streckenzug $F_1' - G - H - F_2'$ ist genauso lang wie der Weg von Herrn Lith, der ihn vom Mast F_1 über G und H nach F_2 führte.
- Begründe: Wäre Herr Lith auf seinem Komtrollweg vom Masten F_1 über G^* nach H^* zum Masten F_2 gegangen, dann wäre das der kürzeste Kontrollweg gewesen.

Lösung: (a)



(b) **In einem gleichseitigen Dreieck hat jeder Innenwinkel das Maß 60°.**
Wenn du den Punkt B am Punkt G spiegelst, dadurch erhältst du den Punkt B'. Weil jede Achsen- oder Punktspiegelung winkeltreu ist, muss das Dreieck F_1BB' gleichseitig sein, denn alle Innenwinkel haben das Maß 60°.
Dann ist das Dreieck F_1BG ein halbes gleichseitiges Dreieck und es gilt:

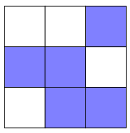
$\overline{BG} = 0,5 \cdot 36\,\text{m} = 18\,\text{m}$.
$\Rightarrow \quad \overline{GC} = 60\,\text{m} - 18\,\text{m} = 42\,\text{m}$.
Das Dreieck HGC ist wieder ein halbes gleichseitiges Dreieck und es gilt:
$\overline{HC} = 0,5 \cdot 42\,\text{m} = 21\,\text{m}$.
$\Rightarrow \quad \overline{AH} = 60\,\text{m} - 21\,\text{m} = 39\,\text{m}$.
Weil das Dreieck AF_2H wiederum ein halbes gleichseitiges Dreieck ist, folgt:
$\overline{AF_2} = 0,5 \cdot 39\,\text{m} = 19,5\,\text{m}$.
$\Rightarrow \quad \overline{F_1F_2} = 60\,\text{m} - 36\,\text{m} - 19,5\,\text{m} = 4,5\,\text{m}$.
Die beiden Fahnenmasten sind $4,5\,\text{m}$ voneinander entfernt.

(c)
- Dieser Sachverhalt ergibt sich sofort aus der Längentreue de Achsenspiegelung.
- Wie schon vorher gezeigt sind die Längen der Strecken $[GF_1]$ und $[GF_1']$ sowie $[HF_2]$ und $[HF_2']$ gleich. Hinzu kommt lediglich die mittlere Strecke $[GH]$, die ja den Rest beiden Streckenzüge ausmacht. Also sind beide Wege gleich lang.
- Die kürzeste Verbindung zwischen F_1' und F_2' liegt ist die gerade Linie zwischen diesen beiden Punkten.
  Aus der Längentreue der Achsenspiegelung folgt nun, dass $\overline{F_1G^*} = \overline{F_1'G^*}$ und $\overline{F_2H^*} = \overline{F_2'H^*}$ sein muss.
  Weil $[G^*H^*]$ in beiden Streckenzügen den Rest bildet, ist der Streckenzug $F_1 - G^* - H^* - F_2$ genauso lang wie die minimale Strecke $[F_1'F_2']$, also ebenfalls minimal.

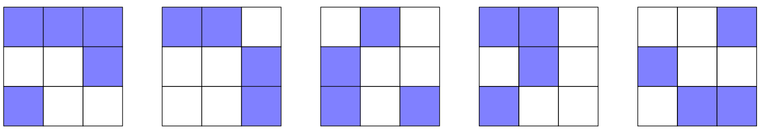
Anmerkungen

- ▶ Obwohl die drei Lote jeweils die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes zur gegenüber liegenden Seite des Grundstücks darstellen, ergibt die Summe dieser drei Entfernungen nicht den kürzesten Weg von F_1 zu den zwei Seiten $[BC]$ und $[CA]$ nach F_2.
- ▶ Mit Hilfe der GEONExT-Datei „07eh011.gxt“, kannst du den Kontrollgang von Herrn Lith variieren.

6.



Stelle dir vor, dass die quadratisch gemusterte Figur auf eine durchsichtige Folie aufgedruckt ist.
Welche der unten abgebildeten gemusterten Quadrate lassen sich mit dem obigen Quadrat so zur Deckung bringen, dass dann alles dunkel erscheint?



a) b) c) d) e)

Lösung: Zur besseren Veranschaulichung sind die Felder der ursprünglichen Figur durchnummeriert:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figur a): Wenn du dieses Muster auf die obige Figur schiebst, dann werden alle Felder überdeckt (das Feld Nr. 3 sogar doppelt).

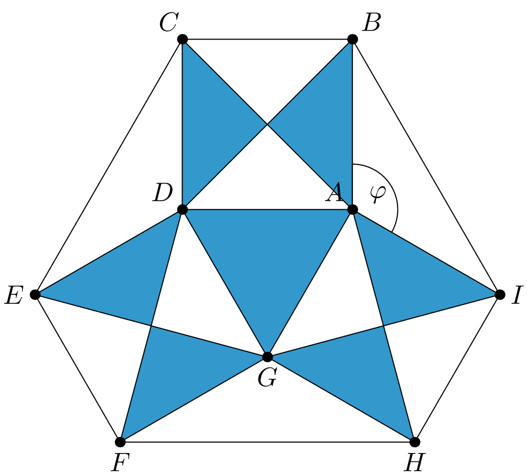
Figur b): Ein Feld bleibt weiß: z.B. Nr. 6 oder Nr. 7.

Figur c): Wenn du diese Figur um $-90°$ oder $270°$ drehst, lässt sie sich so auf die ursprüngliche Figur schieben, dass alle Felder dunkel erscheinen.

Figur d): Eines der Felder 3, 6 oder 9 bleibt in jedem Fall weiß.

Figur e): Wenn du diese Figur an ihrem Mittelpunkt spiegelst oder um 180° drehst, lässt sie sich so auf die ursprüngliche Figur schieben, dass alle Felder dunkel erscheinen.

7.



Die Figur ist drehsymmetrisch.

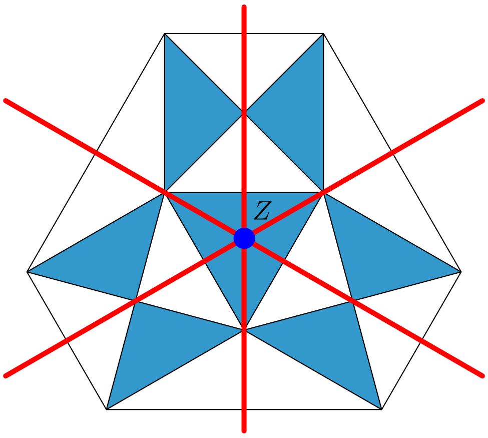
(a) Gib drei verschiedene Möglichkeiten an, wie du das Drehzentrum Z konstruieren könntest. Zeichne das Drehzentrum ein.

(b) Die Figur lässt sich um verschiedene Winkel α so drehen, dass die gedrehte Figur mit der ursprünglichen Figur wieder zur Deckung kommt.
Gib für $\alpha \in \,]\,0°; 360°\,[$ die betreffenden Drehwinkel an.

(c) Berechne φ.

Lösung: (a)
- Die drei Mittelsenkrechten auf die Seiten $[EC]$, $[BI]$ und $[HF]$ schneiden sich in Z.
- Die drei Mittelsenkrechten auf die Seiten $[DA]$, $[AG]$ und $[GD]$ schneiden sich in Z.

- Die drei Mittelsenkrechten auf die Seiten $[CB]$, $[IH]$ und $[FE]$ schneiden sich in Z.

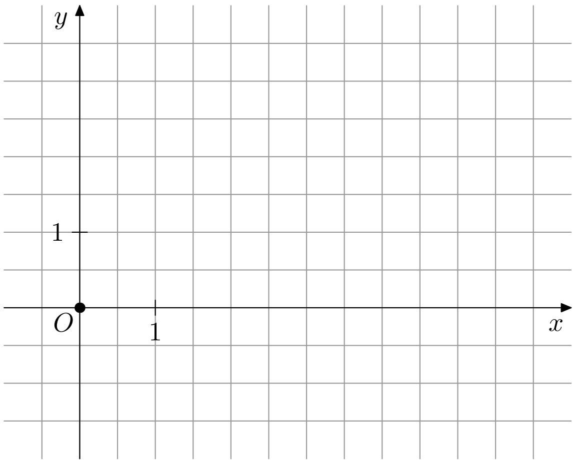


(b) $\alpha \in \{120°; 240°\}$

(c) Der Winkel φ wird von den beiden Quadraten $ABCD$ und $GHIA$ eingeschlossen. Hinter dem Scheitel liegt das gleichseitige Dreieck ADG. Mit dem betreffenden Vollwinkel ergibt sich:
$2 \cdot 90° + 60° + \varphi = 360° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 120°$

13. Punktspiegelung

1.



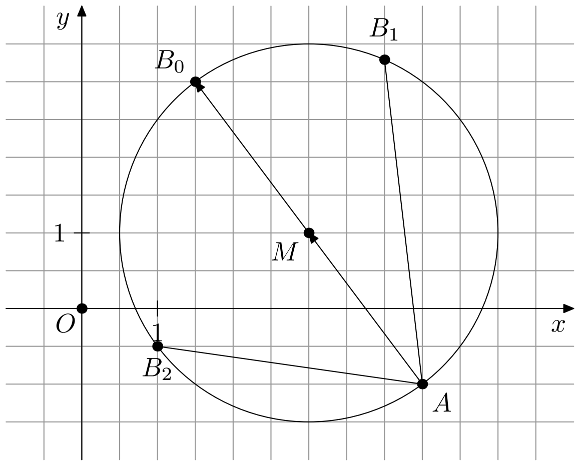
Gegeben sind ein Kreis k mit dem Mittelpunkt $M(3 \mid 1)$ und dem Radius $r = 2.5\,\text{cm}$ sowie der Punkt $A(4,5 \mid -1) \in k$.

(a) Zeichne den Kreis k und den Punkt A in das Koordinatensystem ein.

(b) Auf der Kreislinie k wandern Punkte B_n, so dass laufend Kreissehnen $[AB_n]$ erzeugt werden.
Zeichne für $B_1(4 \mid y_1)$ mit $y_1 > 0$ und $B_2(x_2 \mid -0,5)$ mit $x_2 < 3$ die beiden Kreissehnen $[AB_1]$ und $[AB_2]$ ein.

(c) Unter allen Kreissehnen $[AB_n]$ gibt es eine längste: die Sehne $[AB_0]$. Zeichne sie ein. Berechne die Koordinaten des Punktes B_0.

Lösung:



(a) Siehe Zeichnung.

(b) Siehe Zeichnung.

(c) Siehe Zeichnung. Die längste Kreissehne muss durch den Kreismittelpunkt verlaufen. Es gilt z.B.: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB_0}$ mit $B_0(x \mid y)$.

$$\begin{pmatrix} 3-4,5 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -1,5 = x-3 \text{ und } 2 = y-1$$

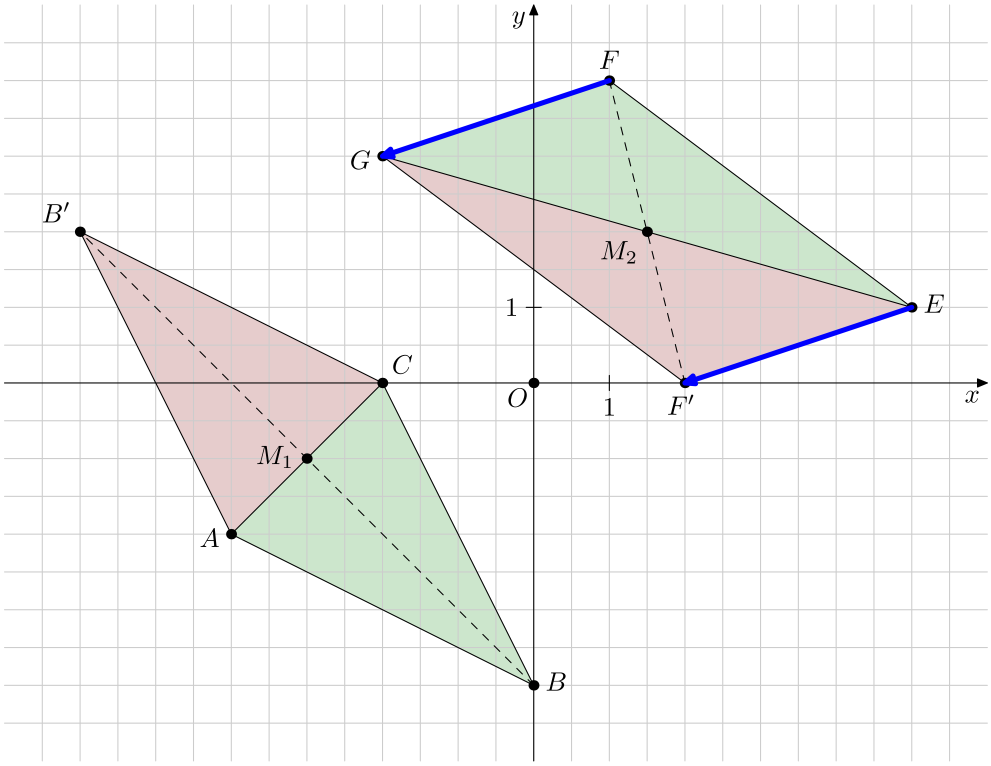
$$\Rightarrow \quad B_0(1,5 \mid 3)$$

2. Gegeben sind die Punkte $A(-4 \mid -2)$, $B(0 \mid -4)$, $C(-2 \mid 0)$ und $E(5 \mid 1)$, $F(1 \mid 4)$ und $G(-2 \mid 3)$.
   (a) Zeichne die beiden Dreiecke ABC und EFG in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-7 \leqq x \leqq 6$ und $-5 \leqq y \leqq 5$
   (b)
   - Spiegle das Dreieck ABC am Mittelpunkt der Seite $[AC]$. Dadurch entsteht das Viereck $ABCB'$.
   - Notiere einen Namen, der dieses Viereck möglichst genau beschreibt.
   - Gib eine der charakteristischen Eigenschaften dieses Vierecks an.

   (c)
   - Spiegle das Dreieck EFG am Mittelpunkt der Seite $[EG]$. Dadurch entsteht das Viereck $EFGF'$.
   - Notiere einen Namen, der dieses Viereck möglichst genau beschreibt.
   - Gib eine der charakteristischen Eigenschaften dieses Vierecks an.

   (d) Berechne die Komponenten des Pfeiles $\overrightarrow{BC}$.
   (e) Berechne die Koordinaten des des Bildpunktes F'.

Lösung: (a)



(b)
- Siehe Zeichnung.
  Hier gilt: $A \xrightarrow{M_1} C \quad C \xrightarrow{M_1} A \quad \text{und} \quad B \xrightarrow{M_1} B'$
- Dieses Viereck ist eine **Raute**.
  Anmerkung: Auf jeden Fall ist das Viereck ein Parallelogramm, weil jede Punktspiegelung winkeltreu ist. Weil das Dreieck ABC aber gleichschenklig ist, sind alle vier Seiten gleich lang, also ist dieses Parallelogramm sogar eine Raute.
- Alle vier Seiten sind gleich lang.

(c)
- Siehe Zeichnung. Hier gilt: $E \xrightarrow{M_2} G \quad G \xrightarrow{M_2} E \quad \text{und} \quad F \xrightarrow{M_2} F'$
- Es ist ein **Parallelogramm**.
- Je zwei gegenüber liegende Seiten sind parallel.

(d)

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(e) Es sei $F'(x' \mid y')$. Im Parallelogramm $EFGF'$ gilt z.B.: $\overrightarrow{EF'} = \overrightarrow{FG}$:

$$\begin{pmatrix} x'-5 \\ y'-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lllll} \Leftrightarrow & x'-5 = -3 & \Leftrightarrow & x' = -2 & \\ \wedge & y'-1 = -1 & \Leftrightarrow & y' = 0 & \Rightarrow \quad F'(2 \mid 0) \end{array}$$