SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 6 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Die Menge der positiven rationalen Zahlen

1. $\frac{30}{60}$, $\frac{390}{210}$, $\frac{1230}{240}$, $\frac{150}{30}$, $\frac{240}{30}$

2. (a) z.B. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{3}{11}$, $3\frac{1}{3}$, $1\frac{11}{13}$
   (b) z.B. $\frac{7}{21}$, $\frac{9}{27}$, $\frac{10}{30}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{6}{18}$

3. Angenommen, es kamen im Jahre 2006 9000 Zuschauer.
   2007: $\frac{1}{3}$ von $9000 = 3000 \quad 9000 - 3000 = 6000$ Zuschauer.
   2008: $\frac{1}{3}$ von $6000 = 2000 \quad 6000 + 2000 = 8000$ Zuschauer.
   Also kamen 2008 1000 Zuschauer weniger als 2006.
   Der Grund liegt darin, dass der dritte Teil im Jahre 2006 von mehr Zuschauern errechnet wurde als 2007.

2 Rechnen mit positiven rationalen Zahlen

1. (a) $\frac{1}{3}$ (b) 2

2. $7\frac{1}{3} : (2\frac{1}{2} - \frac{5}{2}) = 7\frac{1}{3} : 0$
   Die Division durch Null ist nicht erlaubt! Egon hat nicht Recht.

3. (a) Nein, denn der Wert des Kehrbruch eines echten Bruches liegt über 1. Addieert man eine weitere Zahl, so bleibt der Summenwert über 1. Es gilt aber: $\frac{3}{7} < 1$.

   (b) Das ist nicht möglich. Jeder unechte Bruch besitzt einen Wert, der über 1 liegt. Dividiert man einen unechten Bruch durch seinen Kehrbruch, so multipliziert man eigentlich den unechten Bruch nur mit sich selbst. Das Produkt stellt wiederum einen unechten Bruch dar. $\frac{3}{7}$ ist jedoch ein echter Bruch.

4. (a) Jede von Null verschiedene Zahl. (b) Keine Zahl.

5. (a) $0,4$ (b) -670

6. $x = 10,99$

7. Die ursprüngliche Teilung ist nicht möglich, da 17 nicht durch 2, 3 und 9 teilbar ist.

$17 + 1 = 18$	Ali	Abdulla	Arif
Anzahl der Kamele für	9	6	2

   Die Summe ergibt 17. Das geliehene Kamel kann wieder zurückgegeben werden.
   Das Testament war fehlerhaft verfasst: Die Summe der Anteile ergibt kein Ganzes, sondern nur $\frac{17}{18}$.

8. (a) $14\,\mathrm{m}^2$, es werden nämlich keine $13,\overline{7}\,\mathrm{m}^2$ angeboten.
   (b) Etwa $0,37\,\mathrm{m}^2$. Man braucht mindestens 3 Bretter.
   (c) 5,06 €
   Die Kosten betragen 68,31 €; also reichen 75 €.

9. (a) $3507\,\mathrm{m}^2$
   (b) 72 €
   (c) $969\,\mathrm{m}^2$

10. Es wurden 1000 Lose verkauft; die Anzahl der Nieten spielt keine Rolle.

11. 1600

12. Beispiel:

(a)

erste Zahl	1	2	0,8	0,4	0,2	4	...
zweite Zahl	0,64	0,32	0,8	1,6	3,2	0,16	...
Summenwert	1,64	2,32	1,60	2,0	3,4	4,16	...

   (b) Das Paar $(0,8|0,8)$ scheint den kleinsten Summenwert zu liefern. Es besteht aus gleichen Zahlen.
   (c) Beim Produktwert 6,25 scheint der minimale Summenwert erneut durch zwei gleiche Zahlen erzeugt zu werden: $(2,5|2,5)$
   Beim Produktwert 1,6 jedoch scheint ein minimaler Summenwert nicht exakt bestimmbar. Es gilt z.B.: $1,26 \cdot 1,26 = 1,5876$ und $1,27 \cdot 1,27 = 1,6129$.
   Weiter gilt $1,265 \cdot 1,265 = 1,600225$.

13. (a) Es können 22 ganze Tüten abgefüllt werden.
   (b) Es kann noch $\frac{2}{3}$ der ursprünglichen Menge verwendet werden.
   (c) Man kann noch 11 Tüten füllen.
   (d) Die reine Fahrzeit betrug 4 Stunden und 26 Minuten.

14.
   (a) Rechteck $AEGD$: $6\,\mathrm{m}^2$; Rechtecke $EBFH$ und $HFCG$: $4,5\,\mathrm{m}^2$

(b) Jedes Rechteck hat eine Fläche von $5\,\mathrm{m}^2$.

Rechteck	Breite in m	Höhe in m
$AEGD$	1,67	3,00
$EBFH$	3,33	1,50
$HFCG$	3,33	1,50

(c) Es sind drei Fälle möglich:
$A(HFCG) > A(AEGD) > A(EBFH)$ oder
$A(HFCG) > A(EBFH) > A(AEGD)$ oder
$A(HFCG) > A(EBFH) = A(AEGD)$.
Dadurch können die beiden Rechtecke $HFCG$ und $EBFH$ nie gleich groß sein. Diese Fahne ist nur ein entstelltes Bild der Nationalflagge.

15. Es sind noch $\frac{1}{4}$ der ursprünglichen Bakterien vorhanden.

16. Es ist $\frac{1}{10}$ der Quadrate gefärbt.

17. Die Symbole rechts vom Gleichheitszeichen stellen eine dreistellige Quadratzahl dar. Dreistellige Quadratzahlen reichen von $100 = 10^2$ bis $961 = 31^2$, denn $9^2 = 81$ (zweistellig) und $32^2 = 1024$ (vierstellig).
Folglich muss $(\Delta + \Box)$ mindestens den Wert 10 besitzen, darf aber gleichzeitig den Wert 31 nicht überschreiten. Weil die letzten beiden Ziffern von 100 aber gleich sind, scheidet $(\Delta + \Box) = 10$ aus.
Die Summe zweier verschiedener Ziffern kann jedoch höchstens den Wert $17 = 8 + 9$ erreichen. Also muss das Folgende gleichzeitig gelten:

$$(\Delta + \Box) > 10 \quad \textbf{(1)} \qquad \text{und} \qquad (\Delta + \Box) \leqq 17 \quad \textbf{(2)}.$$

Quadratzahlen enden nur auf die Ziffern 1, 4, 5, 6 oder 9.

1. Fall: $\Box = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta + 1 \leqq 10$: Nichts geht.

2. Fall: $\Box = 4$
Dann endet der Summenwert $\Delta + 4$ entweder auf 2 oder 8, denn nur 2^2 und 8^2 enden auf die Ziffer 4.
Nun sind die folgenden Fälle möglich:

- Der Summenwert endet auf die Ziffer 2. Dann ist wegen (1) und (2) nur $\Delta + \Box = 12$ möglich, aber $12^2 = 144$, was nicht geht.
- Der Summenwert endet auf die Ziffer 8. Als einzige Zahl käme 18 in Frage, was aber wegen (2) nicht geht.

3. Fall: $\Box = 5$
Dann endet der Summenwert $\Delta + \Box$ auch auf 5. Es kommt wegen (1)und (2) nur 15 in Betracht, aber $15^2 = 225$, was nicht geht.

4. Fall: $\Box = 6$
Dann endet der Summenwert $\Delta + \Box$ entweder auf 4 oder auf 6.
Nun sind die folgenden Fälle möglich:

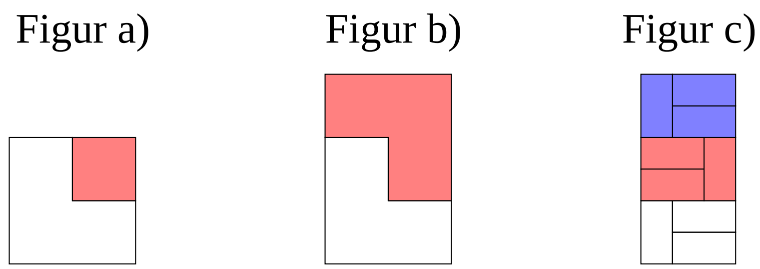
- Der Summenwert $\Delta + \Box$ endet auf die Ziffer 4. Dann ist wegen (1) und (2) nur $\Delta + \Box = 14$ möglich, aber $14^2 = 196$, was wegen $9 + 6 = 15 \neq 14$ nicht geht.
- Der Summenwert endet auf die Ziffer 6. Es kommt wegen (1)und (2) nur 16 in Betracht. Dann ist $16^2 = 256$. Weil $5 + 6 = 11$ und nicht 16 ist, kommt auch in diesem Fall nichts heraus.

5. Fall: $\Box = 9$
Dann endet der Summenwert $\Delta + \Box$ entweder auf 3 oder auf 7.

- Der Summenwert endet auf die Ziffer 3. Dann ist wegen (1) und (2) nur $\Delta + \Box = 13$ möglich, aber $13^2 = 169$, was nicht geht, weil $6 + 9 = 15$ und nicht 13 ist.
- Der Summenwert endet auf die Ziffer 7. Dann ist wegen (1) und (2) nur $\Delta + \Box = 17$ möglich, In der Tat ist nun $17^2 = 289$ und $8 + 9 = 17$.

Damit hast du eine einzige Lösung: $\mathrm{O} = 2, \quad \Delta = 8 \quad$ und $\quad \Box = 9$.

18. (a)



(b) Figur a) $\frac{3}{4} + \boxed{\frac{1}{4}} = 1$ Figur b) $\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{2}} = 1$

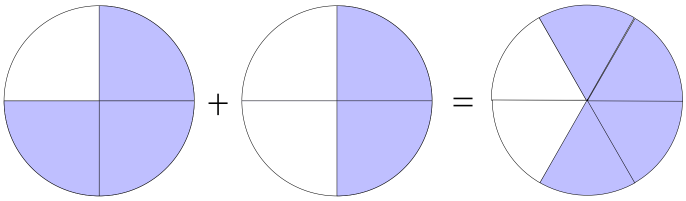
Figur c) $\boxed{\frac{3}{9}} + \boxed{\frac{6}{9}} = \boxed{\frac{9}{9} \text{ oder } 1}$

19. (a) Unter zwölf Kugeln befinden sich neun dunkle. Also beträgt der Bruchteil der dunklen Kugeln $\frac{9}{12}$.

Oder: Von jeweils vier Kugeln sind drei dunkel. Also beträgt der Bruchteil der dunklen Kugeln $\dfrac{3}{4}$. Daraus folgt: $\dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$.

(b) Es gehört eine dunkle Kugel hin.
Begründung: Links von einer weißen Kugel liegen erst vier, dann drei und dann zwei dunkle. Also müsste rechts auf die letze weißen Kugel eine dunkle folgen.
Oder: Die Zahl der dunklen zwischen den hellen Kugeln nimmt nach rechts immer um eins ab.

20. (a)



Links vom Gleichheitszeichen ergibt die Summe mehr als einen Kreis, nämlich $\frac{5}{4}$. Auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ergeben aber $\frac{4}{6}$ weniger als einen ganzen Kreis. Fritz hat unrecht.

(b) Fritz hat einfach die beiden Zähler und die beiden Nenner getrennt addiert. Das ist falsch.

21. (a) Alle diese Dreiecke sind gleichschenklig-rechtwinklig.

(b) $A_{(1)} = \dfrac{1}{4} A_Q$.

(c)
- $A_{(2)} = \dfrac{1}{2} A_{(1)}$. Begründung:

  Es gilt $A_{(2)} = A_{\Delta\, MQC} = \dfrac{1}{2} A_{MQCH_1} = \dfrac{1}{2} A_{\Delta\, MCD} = \dfrac{1}{2} A_{(1)}$.
- $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$.

(d)
- Die gestrichelte Hilfslinie $[QH_2]$ halbiert das Dreeick (2). Weil das Viereck $MPQH_2$ ein Quadrat ist, gilt: $A_{(3)} = \frac{1}{2} A_{(2)}$.
  Die gestrichelte Hilfslinie $[PH_3]$ halbiert das Dreieck (3). Weil das Viereck $PRQH_3$ ein Quadrat ist, gilt: $A_{(4)} = \frac{1}{2} A_{(3)}$.
  Der Flächeninhalt eines dieser immer kleiner werdenden Dreiecke ist jeweils halb so groß wie der seines Vorgängers.
- $A_{(4)} = A_{(3)} : 2 = A_{(2)} : 4 = A_{(1)} : 8 = \frac{1}{4} A_Q : 8 = \frac{1}{32} A_Q$.

(e)
- Aus der Zeichnung erkennst du: Alle Dreiecke von (1), (2) angefangen bis ins unendlich kleinste ergeben die Hälfte des Quadrates $ABCD$.
- Dann muss $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \ldots = \dfrac{1}{2}$ sein.

22. (a) Alle diese Dreiecke sind gleichschenklig-rechtwinklig.

(b) $A_{(1)} = \dfrac{1}{2} A_Q$.

(c)
- $A_{(2)} = \dfrac{1}{2} A_{(1)}$. Begründung:

  Die Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ zerlegen das Quadrat $ABCD$ in vier kongruente Teildreiecke, wovon eines das Teildreieck (2) ist. Das Dreieck ABD ist aus zwei dieser Teildreiecke zusammengesetzt. Also ist das Dreieck (2) halb so groß wie das Teildreieck (1).
- $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} = 0,75 = 75\%$.

(d)
- Es wurde schon gezeigt, dass $A_{(2)} = \frac{1}{2}A_{(1)}$ gilt.
  Die Dreiecke MPC (= Dreieck (D_1)), MCQ und Dreieck (3) sind kongruent.
  Also gilt $A_{(3)} = \frac{1}{2}A_{(2)}$.
  Am oben liegenden Quadrat mit der Seitenlänge $[DQ]$ erkennst du: $A_{(4)} = \frac{1}{2}A_{(3)}$ und die Dreiecke (4) und (D_2) sind kongruent.
  Insgesamt gilt: Jedes getönte Dreieck ist halb so groß wie sein Vorgänger. Jedes getönte Dreieck hat einen kongruenten Partner unter den Dreiecken (D_1),(D_2), $D_3)$, (D_4), … . Jedes der Dreiecke (D_1),(D_2), $D_3)$, (D_4), … hat einen kongruenten Partner in den getönten.
- $A_{(4)} = A_{(3)} : 2 = A_{(2)} : 4 = A_{(1)} : 8 = \frac{1}{2}A_Q : 8 = \frac{1}{16}A_Q$.

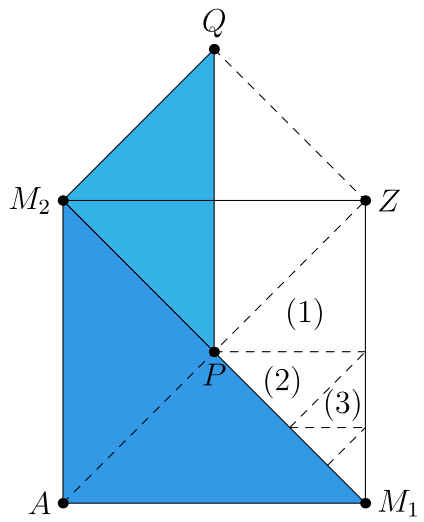
(e)
- Aus der Zeichnung erkennst du: Alle Dreiecke von (1), (2) angefangen bis ins unendlich kleinste ergeben das vollständige Quadrat $ABCD$.
- Dann muss $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \ldots = 1$ sein.
- $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \ldots = \underbrace{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \ldots}_{=1} - \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

23. (a) Die Seitenmittelpunkte des großen Quadrates $ABCD$ liefern ein Quadrat, das um 90° gedreht worden ist. Die Seitenmittelpunkte dieses Quadrates liefern wiederum ein kleineres Quadrat, dessen Seitenmittelpunkte erneut ein noch kleineres Quadrat erzeugen usw. Das Ganze „verschwindet“ schließlich im Zentrum der Figur.

(b) Die Eckpunkte der immer kleiner werdenden Quadrate rücken näher und näher zusammen, bis sie sich nicht mehr voneinander unterscheiden lassen. Somit entsteht im Unendlichen ein „Quadrat ohne Ecken“.

- Diese Dreiecke sind alle gleichschenklig-rechtwinklig.
- Das Dreieck AM_1M_2 nimmt $\frac{1}{8}$ des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ ein.
  $\frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$.
- Das Viereck $APQM_2$ ist ein Parallelogramm. Die Diagonale $[PM_2]$ zerlegt dieses Parallelogramm in zwei kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke.
  Die Strecke $[AP]$ zerlegt das Dreieck AM_1M_2 ebenfalls in zwei kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke.
  Also gilt: $A_{\Delta PQM_2} = \frac{1}{2}A_{\Delta AM_1M_2}$.

(c) •



Das Viereck $PZQM_2$ ist ein Quadrat.
Das Dreieck PQM_2 lässt sich also mit dem Dreieck PZM_2 zur Deckung bringen.
Das Dreieck, das dem Dreieck PQM_2 unmittelbar in der Spirale folgt, ist zum Dreieck (1) kongruent. Sein Nachfolger in der Spirale deckt sich mit dem Dreieck (2), dessen Nachfolger in der Spirale deckt sich mit dem Dreieck (3) usw.
So wird das Dreieck PM_1Z nach und nach lückenlos mit Nachfolgern in der Spirale aufgefüllt.

- Mit allen Dreiecken aus der Spirale lässt sich das Quadrat AM_1ZM_2 lückenlos füllen. Dieses Quadrat bedeckt $\frac{1}{4}$ des Quadrates $ABCD$.
- $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1}{4}$.

24. Erweitere die beiden Brüche zunächst mit 10:

$$\frac{7}{9} = \frac{70}{90} \text{ und } \frac{8}{9} = \frac{80}{90}.$$

Das reicht nicht, denn du kannst im Moment nur 9 Büche aufschreiben, die **dazwischen** liegen, nämlich:

$$\frac{71}{90}; \ldots; \frac{79}{90}.$$

Erweitere also nochmals mit 10:

$$\frac{70}{90} = \frac{700}{900} \text{ und } \frac{80}{90} = \frac{800}{900}.$$

Nun könntest du bequem sogar 99 Brüche notieren, die dazwischen liegen.

25. (a) Ein Drittel von $0,03 = \frac{1}{3} \cdot 0,03 = 0,03 : 3 = 0,01$
(b) Ein Viertel von $\frac{4}{100} = \frac{1}{4} \cdot 0,04 = 0,04 : 4 = 0,01$
(c) Fünf Hundertstel von $0,2 = \frac{5}{100} \cdot 0,2 = \frac{1}{20} \cdot 0,2 = 0,2 : 20 = 0,01$

26. (a) Es bekämen neun Personen fast ein ganzes Brot, die zehnte Person aber erhielte neun einzelne Scheiben, die im Laufe der Zeit eher austrocknen als ein großes Stück Brot.
(b)
- $\frac{9}{10} = \frac{27}{30} = \bigcirc + \frac{6}{30} + \frac{1}{30} \qquad \frac{27}{30} = \bigcirc + \frac{7}{30}$.

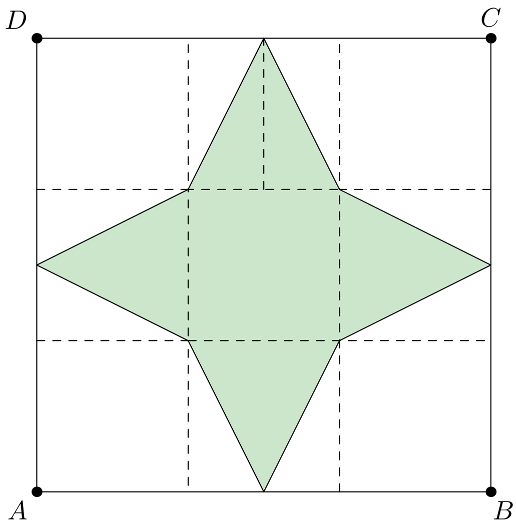
  $\bigcirc = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$
- Neun Personen bekämen jeweils folgende Brotabschnitte:

  $\frac{2}{3}$ von $30\,\text{cm} + \frac{1}{5}$ von $30\,\text{cm} + \frac{1}{30}$ von $30\,\text{cm} =$

  $20\,\text{cm} + 6\,\text{cm} + 1\,\text{cm} = 27\,\text{cm}$.

  Die zehnte Person bekommt neun Abschnitte, die jeweils 3 cm lang sind:
  $9 \cdot 3\,\text{cm} = 27\,\text{cm}$.
  Diese Aufteilung erfordert zunächst mehr Arbeit, weil jedes Brot nicht nur in zwei, sondern in vier Teile zerschnitten werden muss. Neun Personen bekommen dabei neben zwei größeren Stücken jeweils eine 1 cm dünne Scheibe. Die zehnte erhält lauter gleiche Abschnitte, die jeweils 3 cm lang sind. Diese Aufteilung scheint etwas gerechter zu sein.

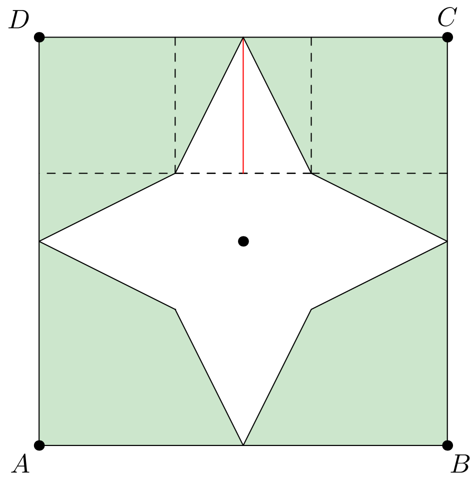
27. (a)



(b) Das Quadrat $ABCD$ fügt sich aus neun gleich großen gestrichelten Quadraten zusammen.Also bedeckt eines dieser kleinen Quadrate $\frac{1}{9}$ der Fläche des großen Quadrates $ABCD$.
Das kleine Quadrat oben in der Mitte wird in zwei kongruente Rechtecke geteilt. Der Rand des Sterns teilt dort jedes dieser Rechtecke in zwei gleiche Hälften. Also nimmt die Sternspitze im obigen kleinen Quadrat gerade dessen halbe Fläche ein. Die vier Sternspitzen sind also genau so groß wie zwei kleine Quadrate.
Das Zentrum des Sterns ist wiederum ein kleines Quadrat.
Somit ist der Stern genauso groß wie drei kleine gestrichelte Quadrate.

$$A_{Stern} = \frac{3}{9} \cdot A_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABCD}\,.$$

28. (a)



(b) Das Quadrat $ABCD$ fügt sich aus neun gleich großen gestrichelten Quadraten zusammen.Also bedeckt eines dieser kleinen Quadrate $\frac{1}{9}$ der Fläche des großen Quadrates $ABCD$.
Das kleine Quadrat oben in der Mitte wird in zwei kongruente Rechtecke geteilt. Der Rand des Sterns teilt dort jedes dieser Rechtecke in zwei gleiche Hälften. Also nimmt die Sternspitze im obigen kleinen Quadrat gerade dessen halbe Fläche ein. Die vier Sternspitzen sind also genau so groß wie zwei kleine Quadrate.
Das Zentrum des Sterns ist wiederum ein kleines Quadrat.
Somit ist der Stern genauso groß wie drei kleine gestrichelte Quadrate.

$$A_{Stern} = \frac{3}{9} \cdot A_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABCD}\,.$$

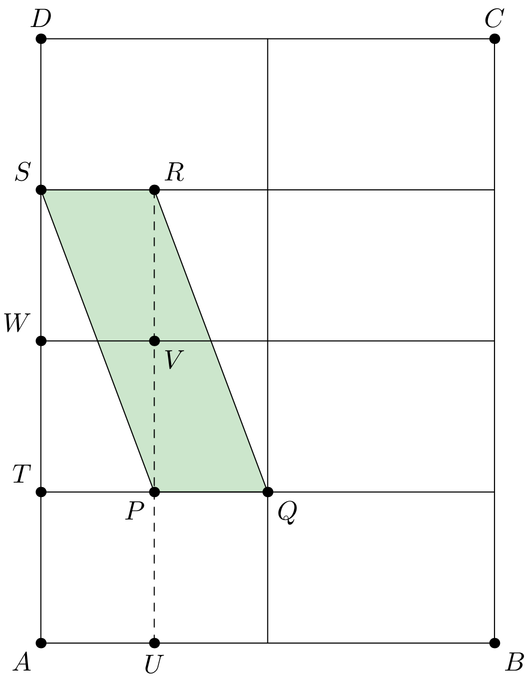
29. (a) 1386: Ja.
1814: Nein.
4648: Ja.
4873: Nein.

5096: Ja.
4473: Ja.
44 730: Ja. Klar, denn, wenn 4473 durch 7 teilbar ist, dann ist es auch 44 730 .

1 000 007: Nein. Nur, wenn 1 000 00 durch 7 teilbar wäre, dann wäre es auch 1 000 007 . Aber 1 000 00 ist wegen der sechs Nullen am Ende nicht durch 7 teilbar. Also ist es auch 1 000 007 nicht.

(b) Diese Teilbarkeitsregel ist in den allermeisten Fällen umständlich zu handhaben. Meist kommt man durch direktes Dividieren genauso schnell oder sogar schneller, wie das Beispiel 1 000 007 zeigt, zum Ziel.

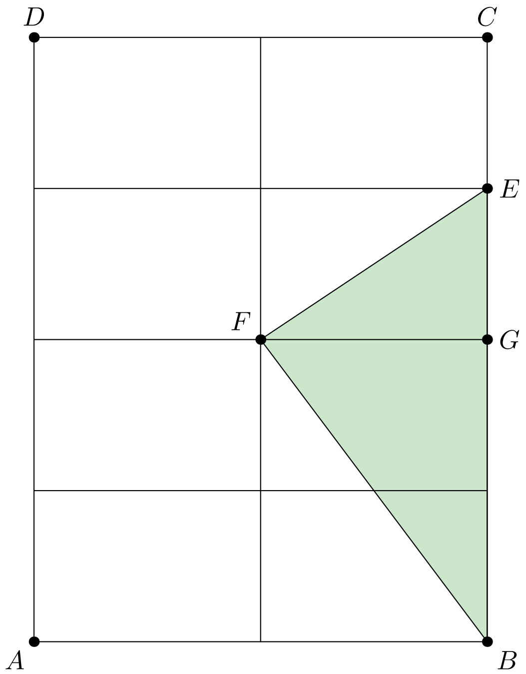
30. (a)



(b) Das Rechteck $TPRS$ hat den gleichen Flächeninhalt wie das Viereck $PQRS$ (Übrigens: Das Viereck $PQRS$ heißt „Parallelogramm“.)
Das Viereck $PQRS$ wiederum hat den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck $AUVW$.
In das Rechteck $ABCD$ passt das Viereck $AUVW$ 8-mal hinein. Also gilt:

$$\frac{A_{AUVW}}{A_{ABCD}} = \frac{1}{8} = \frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} .$$

31. (a)



(b) Das Rechteck $ABCD$ setzt sich aus acht kleinen kongruenten Rechtecken zusammen. Das Dreieck FGE ist halb so groß wie eines dieser kleinen Rechtecke. Also nimmt das Dreieck FGE $\frac{1}{16}$ der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ein.
Das Dreieck BGF wiederum nimmt die Hälfte von zwei dieser kleinen Rechtecke ein.Also nimmt das Dreieck BGF $\frac{1}{8}$ der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ein.
Daraus folgt::

$$\frac{A_{BEF}}{A_{ABCD}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16} = 0,1875 = 18,75\,\% \,.$$

32. (a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{4 \cdot 3} = \frac{7}{12}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5+4}{5 \cdot 4} = \frac{9}{20}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6+5}{6 \cdot 5} = \frac{11}{30}$

(b)
- Der Nenner des Ergebnisses ist das Produkt aus den Nennern der beiden Stammbrüche.
- Der Zähler des Ergebnisses ist die Summe aus den Nennern der beiden Stammbrüche.

(c) Es gilt $31 = 15 + 16$ und $16 \cdot 15 = 240$. Also folgt $\frac{31}{240} = \frac{1}{15} + \frac{1}{16}$.

(d) Der Zähler 293 lässt sich nur auf eine Weise als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender natürlicher Zahlen darstellen: $293 = 146 + 147$. 146 und 147 müssen

gleichzeitig die beiden gesuchten Nenner der Stammbrüche sein, deren Produkt 21467 ergeben müsste.
Es gilt jedoch $146 \cdot 147 = 21462 \neq 21467$. Die Darstellung als Summe zweier solcher Stammbrüche ist also nicht möglich.

(e) Der Zähler 123008 müsste sich als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender natürlicher Zahlen darstellen lassen. Von zwei unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen muss eine ungerade und die andere gerade sein. Die Summe aus einer geraden und ungeraden natürlichen Zahl ist aber stets ungerade. Der Zähler 123008 ist jedoch eine gerade Zahl. Die Darstellung als Summe zweier solcher Stammbrüche ist also nicht möglich.

3 Dezimalbrüche

1. (a) $\cdots 0,0001; 0,00001; 0,000001; \cdots$ (b) $\frac{10}{9}$ (c) $\frac{25}{9}$

2. Es ergibt sich der Wert 0, denn es kämen „unendlich viele“ Nullen und „dann“ die 1.

3. (a) $4 = 2,3 + 1,7$ (b) $3,7 = 3,1 + 0,6$
   (c) $3,5 = 4,7 - 1,2$ (d) $3,4 = 5,3 - 1,9$
   Es ergibt sich stets die Summe oder die Differenz der beiden Basiszahlen in der jeweiligen Klammer.

4. (a) 102 kg (b) 86,7 kg (c) $36,4\%$

5.

geplant:	Nürnberg - Düsseldorf	$v_0 = \frac{450km}{5h} = 90\,\frac{km}{h}$
tatsächlich:	Nürnberg - Frankfurt	$\overline{v_1} = 45\,\frac{km}{h} \Rightarrow t_1 = \frac{225km}{45\frac{km}{h}=} = 5h$

   Das bedeutet, dass Herr Asant erst um 13 Uhr in Frankfurt ist.
   Damit ist jedoch keine Zeit mehr übrig, um so nach Düsseldorf zu gelangen, dass 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ im gesamten Durchschnitt erreicht werden.

6. (a) 0,932 m = 9,32 dm = 93,2 cm
   (b) $0,515\,\text{m}^2 = 51,5\,\text{dm}^2 = 5150\,\text{cm}^2$
   (c) $\frac{59}{60}$ h = 59 min = 3540 s

7. (a) 1,1 Liter (b) 5 Liter

8. (a) Weil das Dreieck halb so groß wie das Quadrat ist, beträgt der Flächeninhalt des Quadrates $9\,\text{cm}^2$. Das hängt nicht davon ab, ob die Spitze dieses Dreiecks genau in der Mitte der oberen Quadratseite liegt. Eine Quadratseite ist demnach 3 cm lang.
   (b) –

(c) Das Logo setzt sich aus 5 ganzen und vier halben Quadraten zusammen, deren Flächeninhalt insgesamt $63\,\text{cm}^2$ beträgt. Anteil des mittleren Dreiecks an de Gesamtfläche: $\frac{4,5\,\text{cm}^2}{63\,\text{cm}^2} = \frac{1}{14}$

(d) Es fallen zwei Quadrate mit einer Seitenlänge von je $3\,\text{cm}$ weg.
Abfall: $\frac{18\,\text{cm}^2}{81\,\text{cm}^2} = \frac{2}{9} \approx 22,22\%$.
Es sind vier gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit einer Kathetenlänge von je $3\,\text{cm}$ abgeschnitten worden. Also bleibt in der Mitte ein Quadrat von $9\,\text{cm} - 2 \cdot 3\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$ übrig. Sein Umfang beträgt damit $12\,\text{cm}$.

9. (a) Sie kauft 12 Poster.

(b) Daniel ist in Wirklichkeit $1,68\,\text{m}$ groß.

10. (a) $\frac{\square}{7} \cdot 2\frac{1}{3} = 357 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\square}{7} \cdot \frac{7}{3} = 357 \quad \Leftrightarrow \quad \square = 357 \cdot 3 = 1071$

(b) $\frac{111}{7} \cdot \frac{7}{3} = \triangle \quad \Leftrightarrow \quad \triangle = 37$

(c)

- Beispiel: $\square = 35$.

  $$\frac{35}{7} \cdot 2\frac{1}{3} = 5 \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{3} = \triangle.$$

  Weil aber $\triangle$ eine natürliche Zahl sein soll, ist damit Uwes Behauptung widerlegt.

- $\frac{\square}{7} \cdot \frac{7}{3} = \triangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\square}{3} = \triangle$

  Also musst du für den Platzhalter $\square$ eine durch drei teilbare Zahl einsetzen. Dann kommt links und damit auch für den Platzhalter $\triangle$ immer eine natürliche Zahl heraus. Dehalb hat Eva recht.

11. $12\,000$ Zusachuer bezahlten je 20 €. Das sind insgesamt $240\,000$ €.
90% von $20\,000$ Plätzen sind $0,9 \cdot 20\,000 = 18\,000$ Zuschauer.
Also haben $18\,000 - 12\,000 = 6\,000$ Zuschauer ihre Karte an der Stadionkasse gekauft.
Somit kommen $6\,000 \cdot 25$ €$= 1500\,000$ € an Einnahmen noch hinzu.
Insgesamt wurden also $240\,000$ € $+\ 150\,000$ €$= 390\,000$ € eingenommen.

12. (a) Zahl der Erwachsenen vorher: 75% von $120 = 90$.
Zahl der Jugendlichen vorher: $120 - 90 = 30$.

(b) Zahl der Erwachsenen nachher: $90 + 10 = 100$.
Zahl der Jugendlichen nachher: $30 + 5 = 35$.

Gesamtzahl der Vereinsmitglieder nachher: $100 + 35 = 135$.

$$\frac{100}{135} \approx 0,741 = 74,1\%.$$

13. Erweitere die beiden Brüche zunächst mit 10:

$$\frac{7}{9} = \frac{70}{90} \text{ und } \frac{8}{9} = \frac{80}{90}.$$

Das reicht nicht, denn du kannst im Moment nur 9 Büche aufschreiben, die **dazwischen** liegen, nämlich:

$$\frac{71}{90}; \ldots; \frac{79}{90}.$$

Erweitere also nochmals mit 10:

$$\frac{70}{90} = \frac{700}{900} \text{ und } \frac{80}{90} = \frac{800}{900}.$$

Nun könntest du bequem sogar 99 Brüche notieren, die dazwischen liegen.

14. (a) Ein Drittel von $0,03 = \frac{1}{3} \cdot 0,03 = 0,03 : 3 = 0,01$
    (b) Ein Viertel von $\frac{4}{100} = \frac{1}{4} \cdot 0,04 = 0,04 : 4 = 0,01$
    (c) Fünf Hundertstel von $0,2 = \frac{5}{100} \cdot 0,2 = \frac{1}{20} \cdot 0,2 = 0,2 : 20 = 0,01$

4 Direkte Proportionalität

1. (a) ICE: 400 km in 2 h
   RE: 300 km in 2 h

   (b) ICE: $k = 200$ km in 1 h
   RE: $k = 150$ km in 1 h

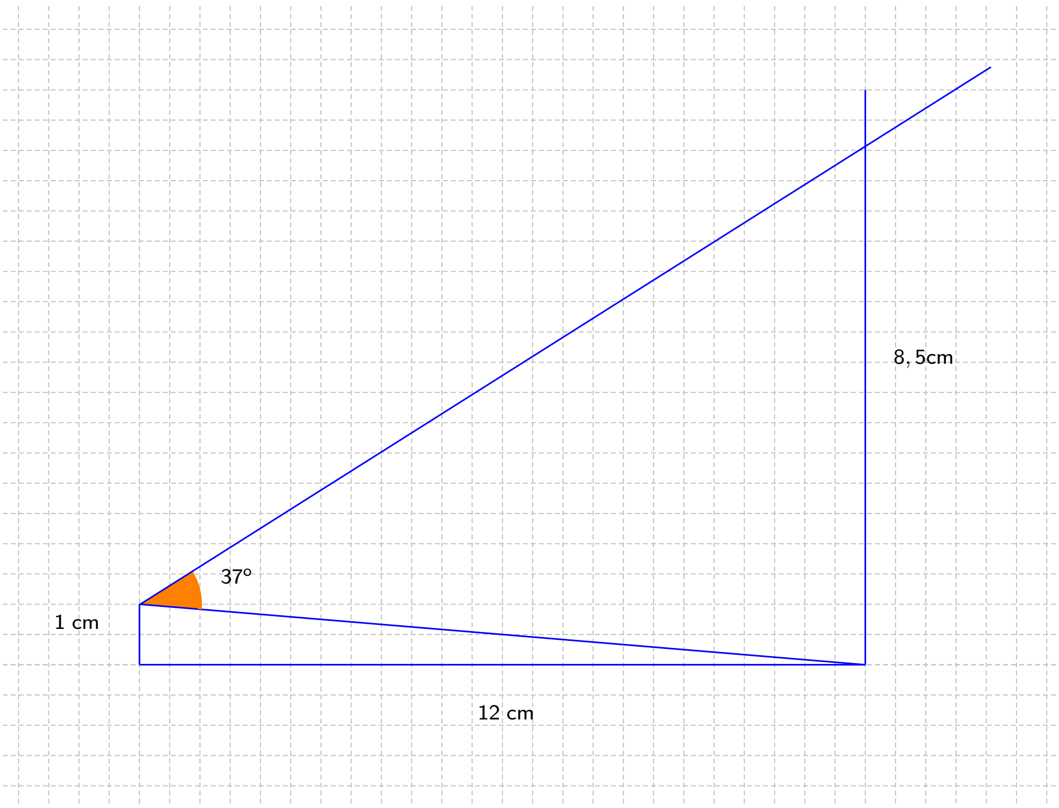
   (c) - -

2. (a) Direkt proportional, da gleicher Faktor.
   (b) Nicht direkt proportional, da $1,6 \cdot 5 = 8$ ist.
   (c) Nicht direkt proportional, da unterschiedliche Divisoren.

3.

Menge in l	4	6	8	11
Preis in €	6	9	12	16,5

4.



Sabine: $150\,\text{cm} : 150 = 1\,\text{cm}$
Abstand zur Statue: $1800\,\text{cm} : 150 = 12\,\text{cm}$

(b) Statue in Wirklichkeit: $8,5\,\text{cm} \cdot 150 = 1275\,\text{cm} = 12,75\,\text{m}$

5. $3,78\,\text{m}$

6.

(a) –

(b)
- Der Flächeninhalt der Fahne beträgt $16,20\,\text{m}^2$. Die vier Rechtecke nehmen zusammen $1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ der Fahnenfläche ein.

$$\frac{7}{9} \text{ von } 16,20\,\text{m}^2 = 12,60\,\text{m}^2.$$

  Dann besitzt ein Rechteck im Inneren eine Fläche von $3,15\,\text{m}^2$.

- Das Kreuz nimmt dann $100\% - 4 \cdot 20\% = 20\%$ der Gesamtfläche der Fahne ein; d.h. es ist genauso groß wie jedes der 4 Rechtecke.
  Also: $16,20\,\text{m}^2 : 5 = 3,24\,\text{m}^2$ beträgt die Fläche des Kreuzes.

5 Die Menge der ganzen Zahlen

1. z.B. $\{4; 3; 2; 1; 0; -1; \dots; -95\}$ oder $\{-1000; -1001; \dots; -1099\}$

2. 10

3. (a) $3 \cdot z + 5 \cdot g = 54$

   (b) $3 \cdot z + 5 \cdot g = 54 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \cdot g = 54 - 3z \mid : 5 \quad \Leftrightarrow \quad g = \dfrac{54 - 3z}{5}$

   (c) Angenommen, es ist $z = 1$ (eine Zwergmaus): $\Rightarrow \quad g = \dfrac{54 - 3 \cdot 1}{5} = \dfrac{51}{5}$ (†).

   Weil die gesuchte Anzahl der Goldhamster ganz sein muss, hat Herr Piepaga mehr als eine Zwergmaus gekauft.
   Auch für $z \in \{2; 3; 4; \dots; 7\}$ gibt es keine passende Zahl von Goldhamstern.

   Für $z = 8$ folgt dagegen: $g = \dfrac{54 - 3 \cdot 8}{5} = \dfrac{30}{5} = 6$.

   Herr Piepaga könnte also 8 Zwergmäuse und 6 Goldhamster gekauft haben.
   Es gibt jedoch für $z = 13$ noch eine Lösung:

   $$g = \frac{54 - 3 \cdot 13}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

   Es könnten also auch 13 Zwergmäuse und 3 Goldhamster gewesen sein.
   Anregungen:

   - Was wäre, wenn Herr Piepaga 18 Zwergmäuse gekauft hätte? Würde dieser Fall zu einer dritten Lösung führen?
   - Begründe, dass es nicht mehr als die obigen beiden Möglichkeiten gibt.

4. (a) Möglichkeit a):
   Die Längsseite taucht 6-mal und die Breitseite taucht 2-mal auf. Also beträgt der Umfang des großen Rechtecks $6 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 2\,\text{cm} = 22\,\text{cm}$.
   Möglichkeit b):
   Die Längsseite taucht 2-mal und die Breitseite taucht 6-mal auf. Also beträgt der Umfang des großen Rechtecks $2 \cdot 3\,\text{cm} + 6 \cdot 2\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$.

(b) Möglichkeit a):
Die Längsseite taucht jetzt 34-mal und die Breitseite taucht nach wie vor nur 2-mal auf. Also beträgt der Umfang des großen Rechtecks
$34 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 2\,\text{cm} = 106\,\text{cm}$.
Möglichkeit b):
Jetzt taucht die Breitseite 34-mal auf, und die Längsseite taucht nur 2-mal auf. Also beträgt der Umfang des großen Rechtecks
$34 \cdot 2\,\text{cm} + 2 \cdot 3\,\text{cm} = 74\,\text{cm}$.

(c)
- Jede 3 cm lange Längsseite taucht doppelt auf. Wenn x Rechtecke aneinander gefügt werden, tragen somit alle Längsseiten mit $2 \cdot 3\,\text{cm} \cdot x = 6x\,\text{cm}$ zum Umfang bei. Hinzu kommen noch 2 Breitseiten zu je 2 cm, also zusammen 4 cm. Damit ergibt sich: $u_a(x) = (6 \cdot x + 4)\,\text{cm}$.
- Jede 2 cm lange Breitseite taucht doppelt auf. Wenn y Rechtecke aneinander gefügt werden, tragen somit alle Breitseiten mit $2 \cdot 2\,\text{cm} \cdot y = 4y\,\text{cm}$ zum Umfang bei. Hinzu kommen noch 2 Längsseiten zu je 3 cm, also zusammen 6 cm. Damit ergibt sich: $u_b(y) = (4 \cdot y + 6)\,\text{cm}$.

(d) Es gilt: $6 \cdot x + 4 = 292 \quad \Leftrightarrow \quad x = 48$. Es müssen 48 kleine Rechtecke aneinander gefügt werden.

(e) Es müsste gelten: $4 \cdot y + 6 = 536 \quad \Leftrightarrow \quad y = 132{,}5 \notin \mathbb{N}$.
Weil y eine **Anzahl** darstellt, geht mit der Möglichkeit b) nichts.

(f) Für die Maßzahl von u_a gilt: $6x + 4 = 2 \cdot (3x + 2)$. Diese Maßzahl ist also immer **gerade**.
Für die Maßzahl von u_b gilt: $4y + 6 = 2 \cdot (2y + 3)$. Auch diese Maßzahl ist immer **gerade**.
Die Maßzahl 12345 ist aber **ungerade**. Ein Zusammenfügen mit diesem Ergebnis ist also nicht möglich.

(g)

Anzahl x	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$6x + 4$	**10**	16	**22**	28	**34**	40	**46**	52	**58**	64	**70**	76	**82**
Anzahl y	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$4y + 6$	**10**	14	18	**22**	26	30	**34**	38	42	**46**	50	54	**58**

Bei einem einzigen Rechteck liefern natürlich beide „Möglichkeiten“ identische Ergebnisse.
Fügst du nach a) 3 oder nach b) 4 Rechtecke zusammen, dann ergibt sich ein gemeinsamer Umfang von 22 cm.
Ebenso liefern mit a) 5 Rechtecke und mit b) 7 Rechtecke den gemeinsamen Umfang von 34 cm usw.

(h) Der Tabelle kannst du entnehmen, dass der x-Wert von der Zahl 1 ausgehend immer um 2 und gleichzeitig der y-Wert von der Zahl 1 ausgehend immer um 3 zunehmen muss, damit die zugehörige Umfangslänge nach beiden Möglichkeiten des Zusammenfügens übereinstimmt. Also gibt es beliebig viele Möglichkeiten der Übereinstimmung.
Von Fall zu Fall nimmt der Umfang von 10 cm ausgehend immer um 12 cm zu.

Du kannst das auch allgemein durch Gleichsetzen zeigen:
Es muss gelten: $6x + 4 = 4y + 6 \,|\, : 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2 = 2y + 3$ mit $x, y \in \mathbb{N}$. (*)
Die Gleichung (*) soll also nur natürliche Zahlen als Lösungen liefern. Eine solche Gleichung heißt nach dem griechischen Mathematiker **Diophant** (um 250 n.Chr.) **diophantische Gleichung**.

$$3x + 2 = 2y + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2y+1}{3} \; (**)$$

$y = 1$ liefert $x = 1$, also wie gewünscht eine natürliche Zahl.
$y = 2$ und $y = 3$ liefern für x Brüche, scheiden also aus. Erst $y = 4 = 1 + 3$ liefert das wieder brauchbare $x = 3$. Es muss also zum y-Wert 1 immer ein Dreiervielfaches addiert werden, damit x ganz wird.
Allgemein könntest du es so ausdrücken: $y = 1 + 3k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Setze es in die Gleichung (**) ein:

$$x = \frac{2 \cdot (1+3k) + 1}{3} = \frac{2 + 6k + 1}{3} = \frac{3 + 6k}{3} = \frac{3(1+2k)}{3}$$

Kürze mit 3. Dann erhältst du $x = 1 + 2k$.
Durchläuft k die Zahlen aus $\mathbb{N}_0$, kannst du beliebig viele gemeinsame Umfangslängen erzeugen:

$k = 0$ liefert $x = y = 1$ (klar).
$k = 1$ liefert $x = 3$ und $y = 4$. Das liefert den Tabellenwert 22.
$k = 2$ liefert $x = 5$ und $y = 7$. Das liefert den Tabellenwert 34.
$k = 3$ liefert $x = 7$ und $y = 10$. Das liefert den Tabellenwert 46 usw.

5.

$$\square = 1: \quad \frac{6}{1} - \frac{1}{6} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$$

$$\square = 2: \quad \frac{6}{2} - \frac{2}{6} = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}$$

$$\square = 3: \quad \frac{6}{3} - \frac{3}{6} = \frac{9}{6} = 1\frac{1}{2}$$

$$\square = 6: \quad \frac{6}{6} - \frac{6}{6} = 0$$

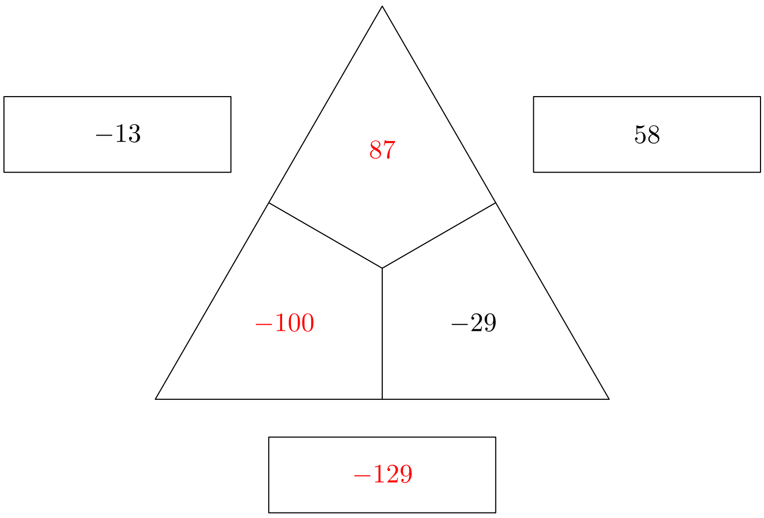
$$\frac{35}{6} + \frac{16}{6} + \frac{9}{6} + 0 = \frac{60}{6} = 10$$

6.

$$\begin{aligned}
\square = 1: \quad & \frac{6}{1} + \frac{1}{6} & = & \frac{37}{6} & = & 6\,\frac{1}{6} \\
\square = 2: \quad & \frac{6}{2} + \frac{2}{6} & = & \frac{20}{6} & = & 3\,\frac{1}{3} \\
\square = 3: \quad & \frac{6}{3} + \frac{3}{6} & = & \frac{15}{6} & = & 2\,\frac{1}{2} \\
\square = 6: \quad & \frac{6}{6} + \frac{6}{6} & = & \frac{12}{6} & = & 2
\end{aligned}$$

$$\frac{37}{6} + \frac{20}{6} + \frac{15}{6} + \frac{12}{6} = \frac{84}{6} = 18$$

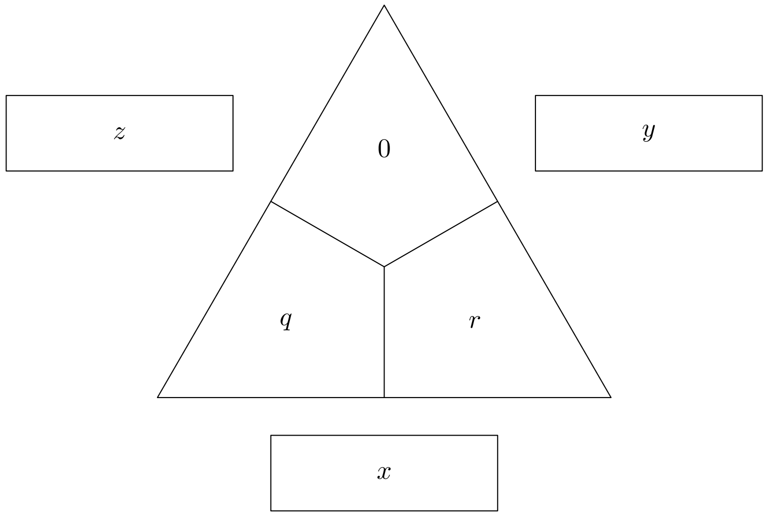
7.



8. Du hast gelernt:
   - **Wenn in einem Produkt ein Faktor null ist, dann ist der Produktwert null.**
   - **Wenn der Produktwert null ist, dann muss ein Faktor dieses Produktes den Wert null besitzen.**

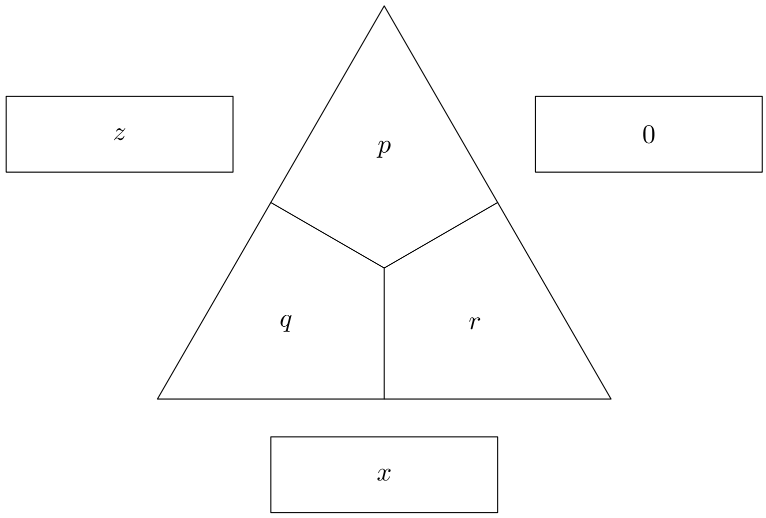
   Mit der Anwendung dieser beiden Sätze kannst du die Behauptungen untersuchen:

   (a)



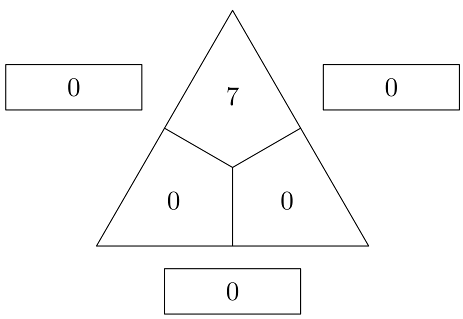
Angenommen, die Null steht oben in der Dreiecksspitze. Dann müssen die beiden Rechtecke oben rechts und links gemäß den eingangs festgelegten Regeln ebenfalls den Faktor null enthalten. Dann gilt aber $z = y = 0$. Die Behauptung ist richtig.

(b)



Angenommen, die Null steht im Rechteck oben rechts. Dann muss $p = 0$ oder auch $r = 0$ gelten. Die Behauptung ist richtig.

(c) Die Behauptung ist falsch. Zur Begründung genügt es, ein Gegenbeispiel zu finden.



6 Grundbegriffe der ebenen Geometrie

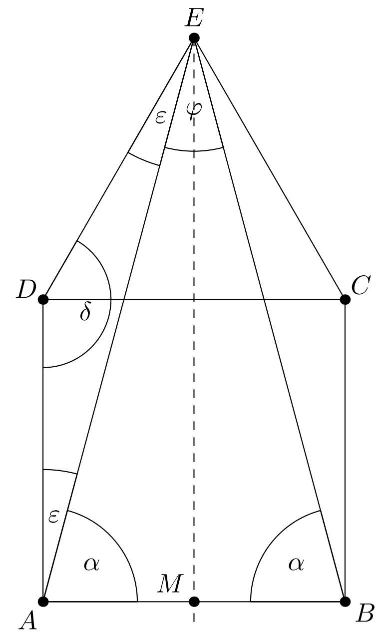
1. (a) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig
   (b) –
   (c) –
   (d) –
   (e) $D(-4|2)$
   (f) Man erkennt ein Quadrat, zwei Parallelogramme und ein achsensymmetrisches Trapez.

2. (a) Der Durchmesser von k beträgt $7,2\,\mathrm{cm}$.
   (b) $M \in g$
   (c) $[TB \in h$
   (d) $[QS] \subseteqq [BT]$
   (e) $C \notin k$
   (f) $[ER] \nsubseteqq [BC]$

3. (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

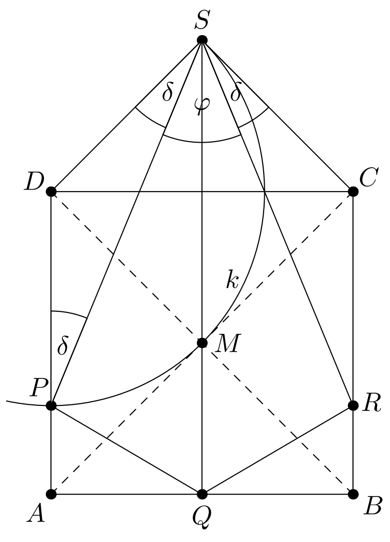
4. - -

5. (a)



(b) In der Figur ist EM die Symmetrieachse.
Weil die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ mit der des gleichseitigen Dreiecks DCE übereinstimmt, sind die Dreiecke AED und EBC gleichschenklig und wegen der Symmetrie kongruent.
Aus Symmetriegründen ist das Dreieck ABE ebenfalls gleichschenklig.
Weiter gilt: $\delta = 90° + 60° = 150° \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = (180° - 150°) : 2 = 15°$.
$\Rightarrow \quad \alpha = 90° - \varepsilon = 75°$ und $\varphi = 180° - 2 \cdot \alpha = 30°$
Oder am Punkt E: $\varphi = 60° - 2 \cdot \varepsilon = 30°$.

6. (a)

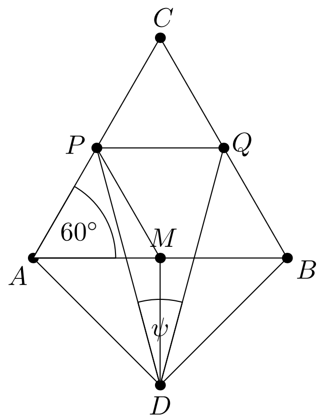


(b) Das Viereck $DMCS$ ist ein Quadrat, denn die Dreiecke DMC und DCS sind deckungsgleich. Daher ist das Dreieck PSD gleichschenklig: $\overline{DP} = \overline{DM} = \overline{DS}$.

$\Rightarrow \quad \sphericalangle PDS = 90° + 45° = 135° \quad \Rightarrow \quad \delta = (180° - 135°) : 2 = 22{,}5°$
$\Rightarrow \quad \varphi = 90° - 2 \cdot 22.5° = 45°$

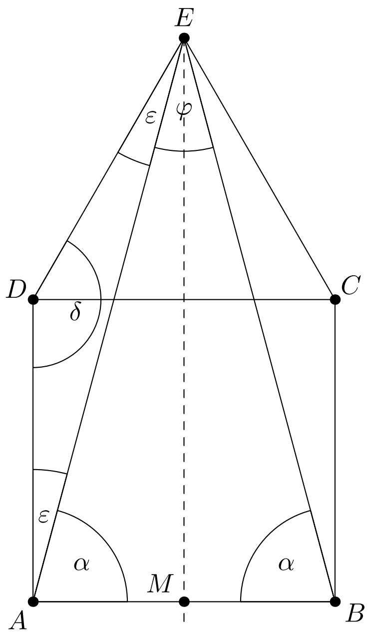
(c) Mit Hilfe der gestrichelten Linien erkennst du: Das Quadrat $ABCD$ ist in vier kongruente Dreiecke zerlegt worden, die zum Dreieck DCS kongruent sind.
Das Quadrat $ABCD$ hätte also einen Flächeninhalt von $4 \cdot 6\,\text{cm}^2 = 24\,\text{cm}^2$.

7. (a)



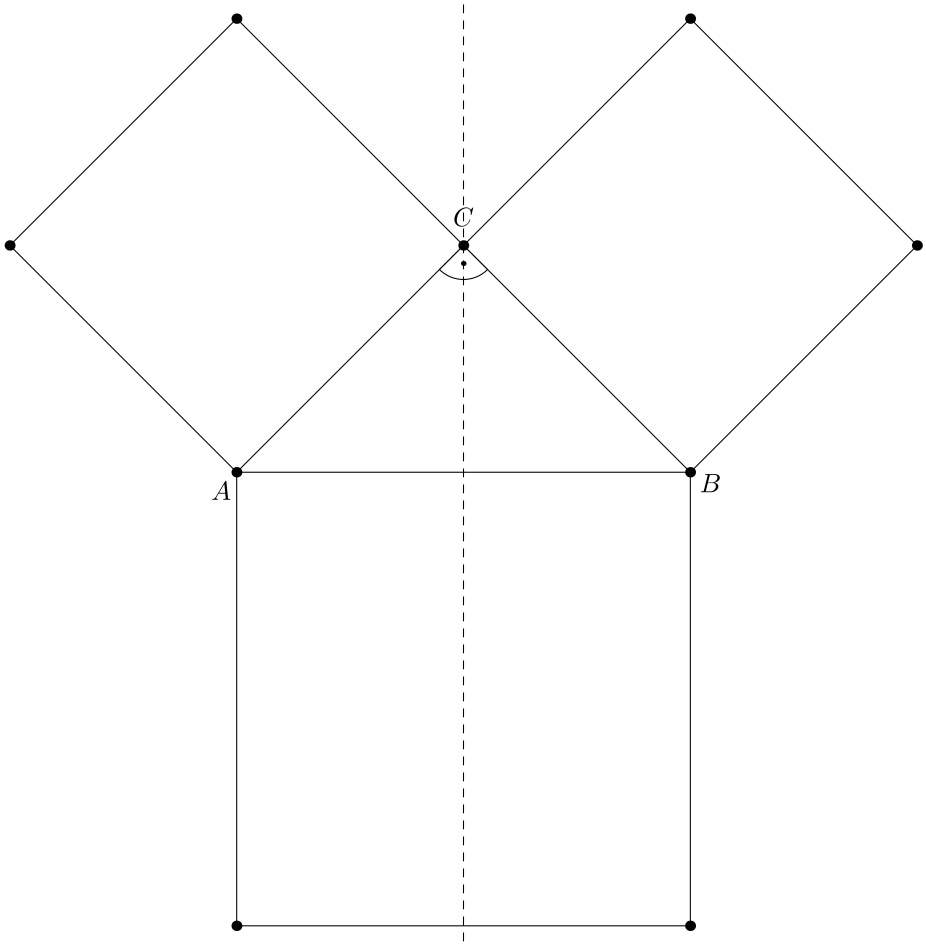
(b) Die beiden Hilfslinien sind die zwei Strecken $[MP]$ und $[MD]$.
Das gleichschenklige Dreieck AMP ($\overline{AM} = \overline{AP}$) besitzt einen Innenwinkel mit dem Maß 60°; also muss es gleichseitig sein.
Damit gilt: $\overline{MP} = \overline{AM}$ **(*)** und $\sphericalangle PMA = \sphericalangle APM = 60°$.
Das Dreieck ADM ist ein halbes Quadrat. Damit gilt: $\overline{AM} = \overline{MD}$.
Mit **(*)** folgt: $\overline{MP} = \overline{MD}$; d.h. das Dreieck PDM ist gleichschenklig und es gilt: $\sphericalangle PMD = 60° + 90° = 150°$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle MDP = (180° - 150°) : 2 = 15°$.
Die Strecke $[DM]$ halbiert den Winkel mit dem Maß ψ. Also folgt $\psi = 30°$.

8. (a)



(b) In der Figur ist EM die Symmetrieachse.
Weil die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ mit der des gleichseitigen Dreiecks DCE übereinstimmt, sind die Dreiecke AED und EBC gleichschenklig und wegen der Symmetrie kongruent.
Aus Symmetriegründen ist das Dreieck ABE ebenfalls gleichschenklig.
Weiter gilt: $\delta = 90° + 60° = 150° \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = (180° - 150°) : 2 = 15°$.
$\Rightarrow \quad \alpha = 90° - \varepsilon = 75°$ und $\varphi = 180° - 2 \cdot \alpha = 30°$
Oder am Punkt E: $\varphi = 60° - 2 \cdot \varepsilon = 30°$.

9. (a)

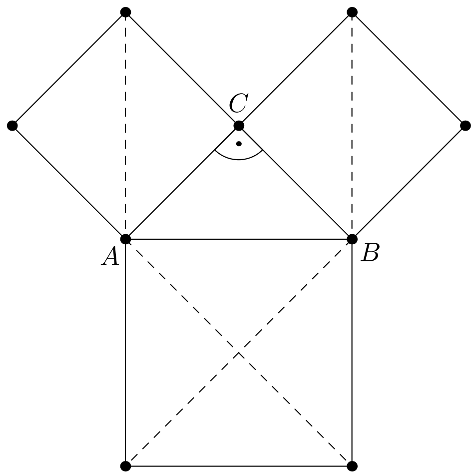


(b) „… die Figur achsensymmetrisch ist, siehe gestrichelte Linie.“
Oder: „… das Dreieck ABC gleichschenklig ist: Es gilt $\overline{AC} = \overline{BC}$. Also sind die Seiten der beiden oberen Quadrate gleich lang; damit sind diese beiden Quadrate gleich.“

(c) Flächeninhalt der beiden kleinen Quadrate zusammen:
$A_1 = 2 \cdot 4,2\,\text{cm} \cdot 4,2\,\text{cm} = 2 \cdot 17,64\,\text{cm}^2 = 35,28\,\text{cm}^2$
Flächeninhalt des großen Quadrates: $A_2 = 6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 36\,\text{cm}^2$
Also wäre der Flächeninhalt des großen Quadrates etwas größer als der der beiden anderen Quadrate.

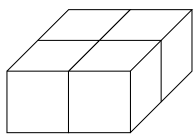
(d) Flächeninhalt der beiden kleinen Quadrate zusammen:
$A_1 = 2 \cdot 4,3\,\text{cm} \cdot 4,3\,\text{cm} = 2 \cdot 18,49\,\text{cm}^2 = 36,98\,\text{cm}^2$
Flächeninhalt des großen Quadrates: $A_2 = 6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 36\,\text{cm}^2$
Also wäre der Flächeninhalt des großen Quadrates etwas kleiner als der der beiden anderen Quadrate.

(e)



Die vier Hälften der beiden kleinen Quadrate passen genau in das große Quadrat. Also sind die beiden kleinen Quadrate zusammen genauso groß wie das große Quadrat.

10. (a) Das Volumen eines Würfels beträgt $62,5\,\text{cm}^3 : 4 = 15,625\,\text{cm}^3$
1. Versuch: Kantenlänge des Würfels $2\,\text{cm}$, aber $2^3 = 8$ ist zu klein.
1. Versuch: Kantenlänge des Würfels $3\,\text{cm}$, aber $3^3 = 27$ ist zu groß.
Die Kantenlänge muss also zwischen $2\,\text{cm}$ und $3\,\text{cm}$ liegen. Weil das Würfelvolumen $15,625\,\text{cm}^3$ auf die Ziffer 5 endet, muss die Maßzahl der Kantenlänge ebenfalls auf 5 enden.
Probiere es daher mit $2,5\,\text{cm}$. Und tatsächlich: $2,5^3 = 15,625$. Die Kantenlänge eines Würfels beträgt also $2,5\,\text{cm}$.
Der Inhalt einer Seitenflache des Würfels beträgt dann $2,5\,\text{cm} \cdot 2,5\,\text{cm} = 6,25\,\text{cm}^2$.
Die Oberfläche des Quaders besteht aus $2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 18$ quadratischen Seitenflächen.
Also: $O_{Quader} = 18 \cdot 6,25\,\text{cm}^2 = 112,5\,\text{cm}^2$.

(b)
- 
- Die Oberfläche dieses Quaders besteht jetzt aus 16 Teilflächen.
Also: $O_{Quader} = 16 \cdot 6,25\,\text{cm}^2 = 100\,\text{cm}^2$.

11. Jeder Würfel hat eine Oberfläche von $6 \cdot 2,5^2\,\text{cm}^2 = 37,5\,\text{cm}^2$.
Vier Würfel haben dann eine Oberfläche von $150\,\text{cm}^2$.
Weil aber der obere Wüfel mit einer quadratischen Seitenfläche aufliegt, hat der Körper eine Oberfläche von $(4 \cdot 6 - 1) \cdot 2,5^{\,2}\,\text{cm}^2 = 143,75\,\text{cm}^2$.

12. $O_{Quader} = 87,5\,\text{dm}^2 = 8750\,\text{cm}^2$.
Die Quaderoberfläche besteht aus 14 kongruenten Quadraten.

$8750\,\text{cm}^2 : 14 = 625\,\text{cm}^2 = 25\,\text{cm} \cdot 25\,\text{cm}$.
Also hat ein Würfel eine Kantenlänge von 25 cm.

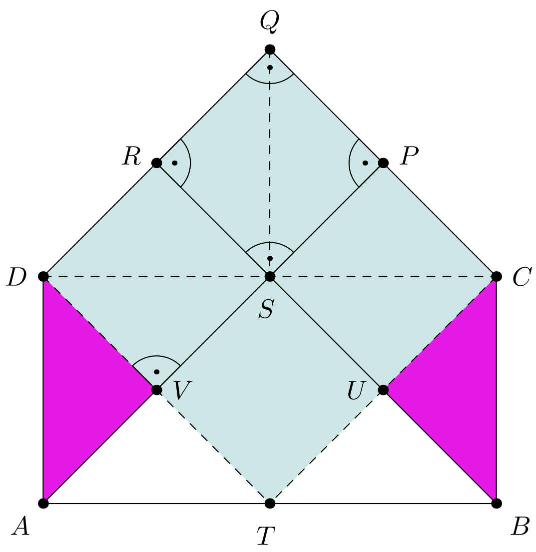
13. (a) Die Anzahl der Quadrate rundherum beträgt: $3 \cdot 4 = 12$.
Hinzu kommen zwei Quadrate, die den Quader links und rechts abschließen.
Der Flächeninhalt eines Quadrates beträgt $4\,\text{cm}^2$.
$\Rightarrow \quad O_3 = 14 \cdot 4\,\text{cm}^2 = 56\,\text{cm}^2$

(b) $O_{100} = 100 \cdot 4 \cdot 4\,\text{cm}^2 + 2 \cdot 4\,\text{cm}^2 = 1608\,\text{cm}^2$

(c) Subtrahiere zunächst die beiden seitlichen Begrenzungsflächen zu je $4\,\text{cm}^2$.
Dann bleiben noch $592\,\text{cm}^2$ rundherum. Jede dieser Schichten enthalt 4 Quadrate zu je $4\,\text{cm}^2$. Das ergibt $592\,\text{cm}^2 : 4\,\text{cm}^2 : 4 = 37$ Würfel.

(d) $20\,\text{dm}^2 = 2000\,\text{cm}^2$; $2000\,\text{cm}^2 - 8\,\text{cm}^2 = 1992\,\text{cm}^2$; $1992\,\text{cm}^2 : 16\,\text{cm}^2 = 124,5$ Aber: $124,5 \notin \mathbb{Z}$
Die Anzahl der Würfel muss ganz sein. Einen solchen Quader gibt es nicht.

14. (a)



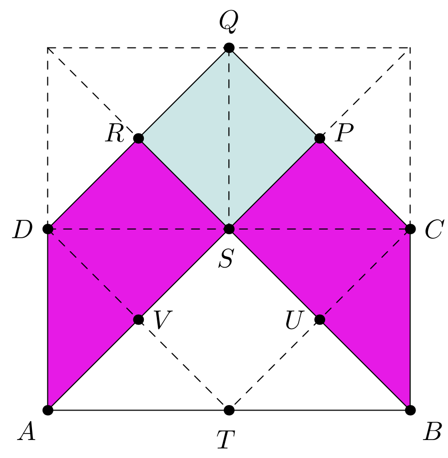
(b) Die Strecke $[QS]$ dient als Hilfslinie.
Das Dreieck DQS ist gleichschenklig-rechtwinklig. Die Höhe $[SR]$ zerlegt es in zwei kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke DSR und SQR. Also gilt: $\overline{DR} = \overline{RQ} = \overline{RS}$.
Aus Symmetriegründen folgt: $\overline{PC} = \overline{PQ} = \overline{PS}$. Also handelt es sich bei dem Viereck $PQRS$ um eine Raute, in der ein Innenwinkel ein rechter ist.
Aus Symmetriegründen müssen dann die Punkte Q und S auch Scheitel von rechten Winkeln sein. Ebenso muss auch der Punkt P der Scheitel eines rechten Winkels sein.

(c) Die Strecke $[DV]$ ist eine geeignete Hilfslinie.
Die beiden Vierecke $VSRD$ und $SPQR$ sind kongruente Quadrate. Das Dreieck AVD ist so groß wie die Hälfte von einem dieser Quadrate. Das Trapez $ASRD$ enthält drei

solche Dreiecke, das Quadrat $SPQR$ nur zwei davon.
Also ist der Flächeninhalt des Trapezes $ASRD$ um ein Drittel $= 33{,}\overline{3}\,\%$ größer als der des Quadrates $SPQR$.

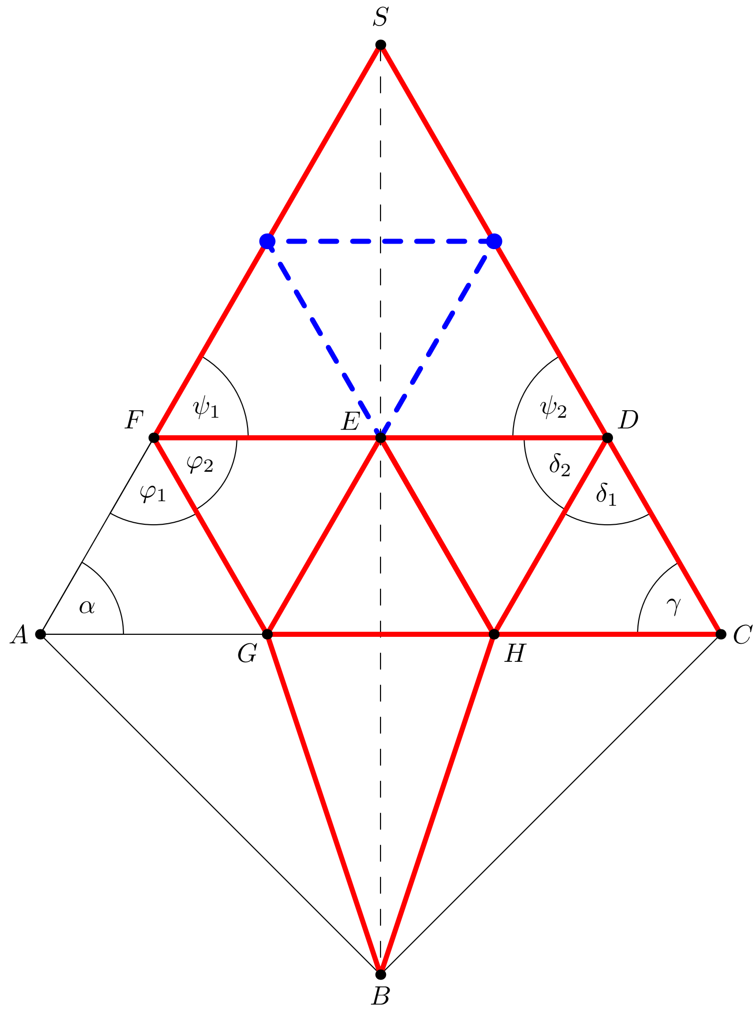
(d) Es bieten sich die zusätzlichen Hilfslinien $[VT]$ und $[CT]$ an.
In die Figur $ABCQD$ passt das Quadrat $SPQR$ offensichtlich 4-mal hinein. Von den vier kongruenten restlichen Dreiecken lassen sich je zwei zu einem Quadrat von der Größe des Quadrates $SPQR$ zusammenfügen.
Also ist die Figur $ABCQD$ 6-mal so groß wie das Quadrat $SPQR$.

Anregung:



Betrachte die zum großen Quadrat ergänzte Figur im Zusammenhang mit den gestellten Aufgaben.

15. (a)



(b) Die Gerade SB ist die Symmetrieachse der Figur. Da sich das Trapez $ACDF$ nur aus gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt, gilt: $\alpha = \gamma = 60°$.
Aus dem gleichen Grund gilt: $\delta_1 = \varphi_1 = \delta_2 = \varphi_2 = 60°$.
Also gilt: $\sphericalangle AFD = \sphericalangle FDC = 120°$.

(c) Der Winkel ψ_1 ist der Nebenwinkel des Winkels AFD:
$\psi_1 = 180° - 120° = 60° = \psi_2$.

(d) Es sind **vier** solche Dreiecke, wie du an den dicken gestrichelten Linien erkennen kannst.

(e) Es sind die Vierecke $HCDE$, $HDEG$ und $HEFG$. Diese Drachenvierecke dürfen sich sogar **Rauten** nennen. denn sie setzen sich jeweils aus zwei kongruenten geleichseitigen Dreiecken zusammen. Also besitzen alle drei Vierecke gleich lange Seiten. Siehe Zeichnung.

(f) Es ist das Viereck $BHEG$. Siehe Zeichnung.

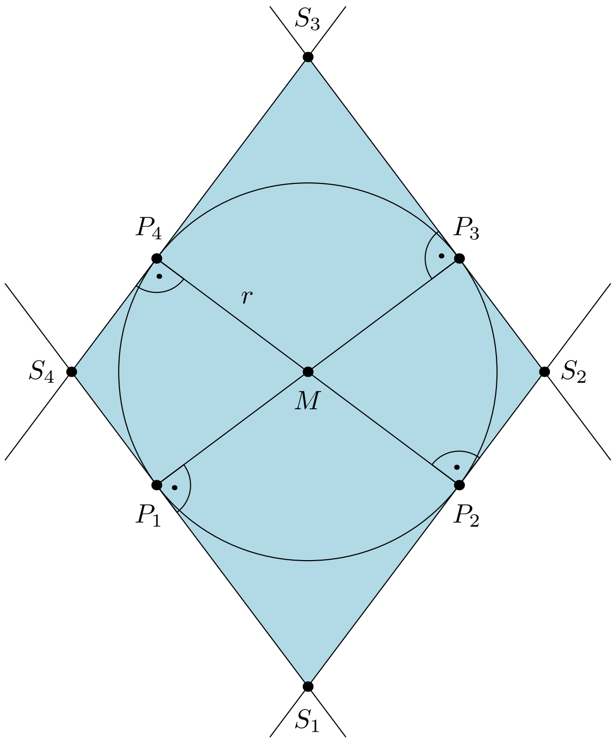
16. (a) Die Gerade g heißt „Sekante“.

(b) • Erst wird die Sekante zur Tangente und schließlich zur Passante.

- Die Schnittpunkte Q_1 und Q_2 kommen einander näher, bis sie aufeinander fallen. (Dann ist die Gerade g zur Tangente geworden.)
  Im Falle der Passante gibt es keine Schnittpunkte mehr.

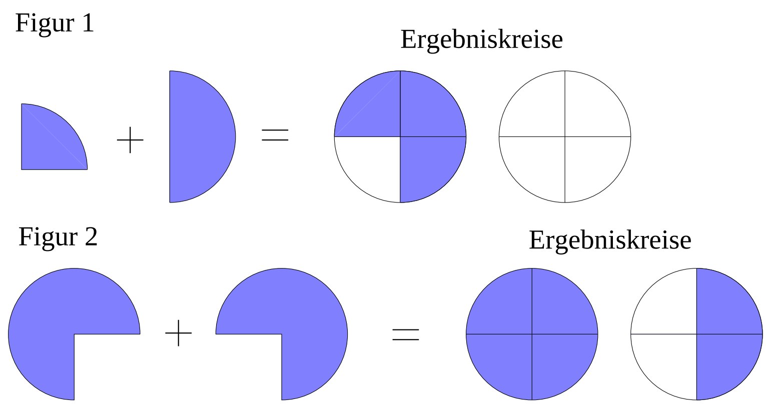
17.

(a)



(b) Das Vierek ist eine Raute, denn alle Seiten sind gleich lang.

18. (a)



(b) Figur 1: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Figur 2: $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$ oder ein Ganzes und ein Halbes

19.
Figur 1: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Figur 2: $\frac{2}{5}$

20. (a) Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm. Die beiden gegenüber liegenden Seiten sind jeweils parallel.

(b)
- $\beta \approx 63° = \varepsilon$ genauer: $\beta = \varepsilon = 63,43494882\ldots\,°$
  $\gamma = \delta \approx 117°$ genauer: $\gamma = \delta = 116,5650512\ldots\,°$
- Z.B.: $\beta = \varepsilon$ und $\gamma = \delta$ und $\beta + \gamma = 180°$ usw.

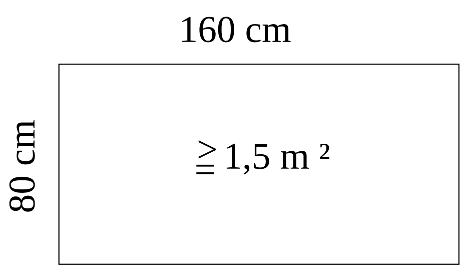
(c)
- δ wächst mit γ. β und ε nehmen ab.
- γ nimmt mit δ ab. ε und β werden größer.
- γ muss ein rechter Winkel werden, damit Egon ein Rechteck erhält.

21. Das Bildungsgesetz in der ersten Zeile der Tabelle heißt: Addiere den Inhalt zweier benachbarter Zellen. Der Summenwert stellt den Inhalt der darauf folgenden Zelle dar.
Deine Tabelle müsste so aussehen:

a in cm	1	1	2	3	5	8	13
A in cm^2	1	1	4	9	25	64	169
$\frac{A_{Quadrat}}{A_{Vorgänger}}$		$1:1=1$	$4:1=4$	$9:4=2,25$	$2,78$	$2,56$	$2,64$
a in cm	21	34	55	89	144	233	377
A in cm^2	441	1156	3025	7921	20736	54289	142129
$\frac{A_{Quadrat}}{A_{Vorgänger}}$	$2,61$	$2,62$	$2,62$	$2,62$	$2,62$	$2,62$	$2,62$

Der Wert des Quotienten bleibt bei $2,62$ stehen.

22. (a)

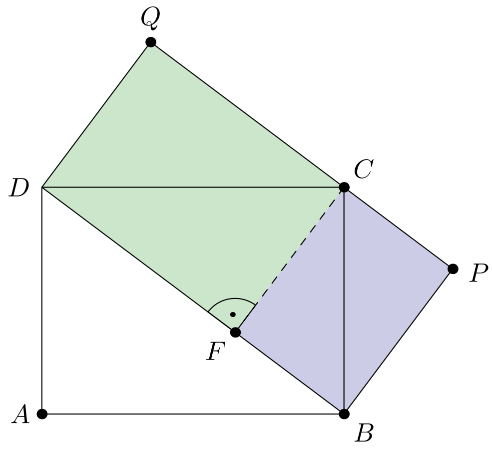


Es kommt nicht darauf an, wie dick die Platte werden soll.
Wenn die Platte 80 cm breit werden soll, dann ist deren Länge doppelt so groß, nämlich 160 cm.
Ihr Flächeninhalt beträgt dann $160\,\text{cm} \cdot 80\,\text{cm} = 1,6\,\text{m} \cdot 0,8\,\text{m} = 1,28\,\text{m}^2$.

Das ist mit dem Wunsch von Herrn Knörz, dass der Flächeninhalt der Platte mindestens $1,5\,\mathrm{m}^2$ betragen soll, nicht vereinbar.

(b) „Entweder wird die Tischplatte breiter als 80 cm oder mehr als doppelt so lang wie breit oder ihr Flächeninhalt beträgt weniger als $1,5\,\mathrm{m}^2$."

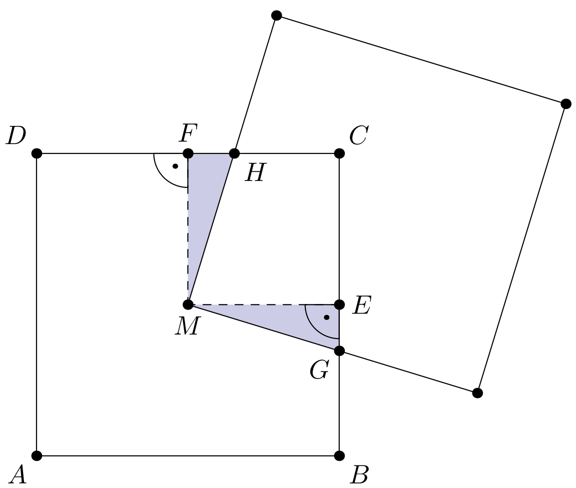
23.



(a) Siehe Zeichnung.

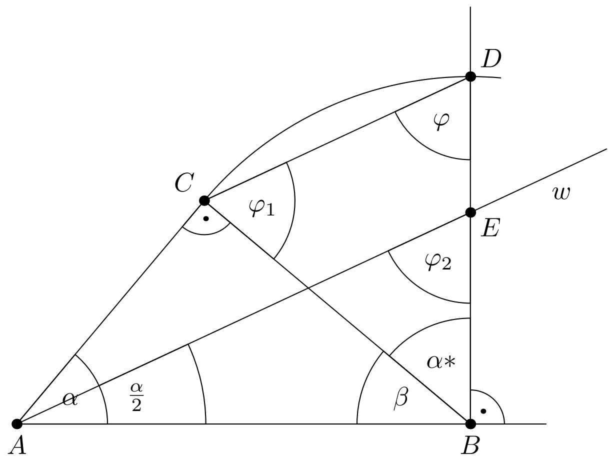
(b) Die Diagonale $[BD]$ zerlegt das Rechteck $ABCD$ in zwei kongruente Teildreiecke.
Das Rechteck $DBPQ$ wird durch die Diagonalen $[DC]$ bzw. $[BC]$ in vier paarweise kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt.
Die beiden Teildreiecke DFC und FBC fügen sich zum Dreieck DBC zusammen.
Also ist das Rechteck $DBPQ$ doppelt so groß wie das Dreieck DBC und damit genau so groß wie das Rechteck $ABCD$.

24.



Die gesuchte Hilfslinie ist das Lot $[ME]$ vom Quadratmittelpunkt M auf die Quadratseite $[BC]$.
Das Quadrat $MECF$ nimmt den vierten Teil der Fläche des Quadrates $ABCD$ ein. Von diesem Quadrat $MECF$ wurde eineseits das Dreieck MHF weggenommen, aber gleichzeitig wurde das Dreieck MGE angefügt.
Die beiden Dreiecke MHF und MGE sind kongruent. Also hat das Viereck $MGCH$ (das ist die getönte Fläche der Figur in der Aufgabe) den gleichen Flächeninhalt wie das Viertelquadrat $MECF$.

25. (a)



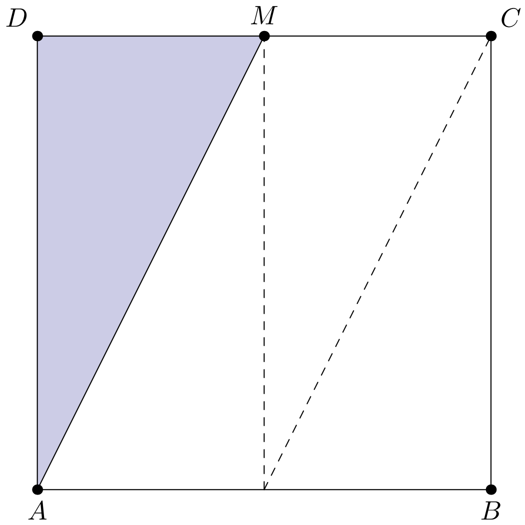
(b) Wegen $\beta = 90° - \alpha = 90° - 50° = 40°$ folgt: $\alpha = \alpha* = 50°$.
Das Dreieck BDC ist gleichschenklig. $\Rightarrow \quad \varphi = \varphi_1$.
$\Rightarrow \quad \varphi = (180° - 50°) : 2 = 65°$.

(c) Im rechtwinkligen Dreieck ABE gilt:

$$\varphi_2 + \frac{\alpha}{2} = 90° \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 90° - 25° = 65° = \varphi \text{ (siehe (b))}.$$

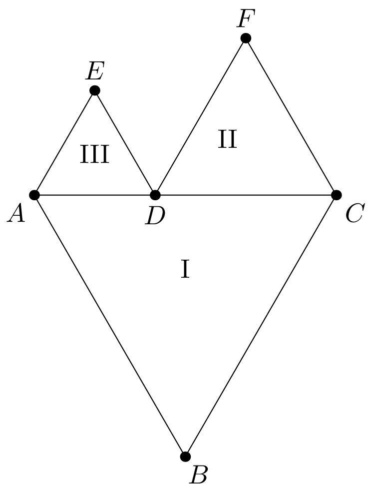
Also gilt: $[CD] \parallel w$, weil φ und φ_2 F-Winkel sind.

26.



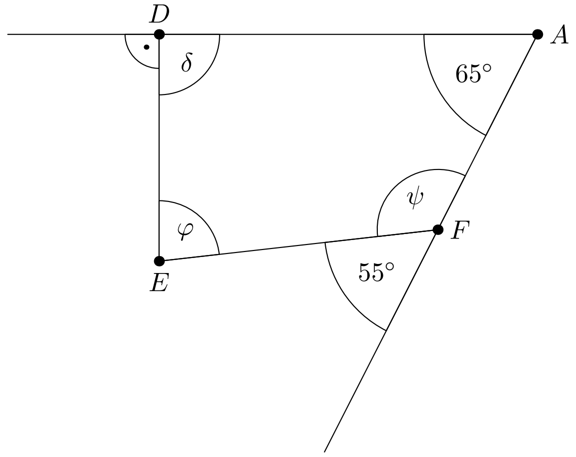
Mit Hilfe der gestrichelten Linien erkennst du, dass das Quadrat $ABCD$ in vier deckungsgleiche Dreiecke zerlegt worden ist.
Der Flächeninhalt dieses Quadrates beträgt dann $4 \cdot 9\,\text{cm}^2 = 36\,\text{cm}^2$.
Dann beträgt die Seitenlänge des Quadrates 6 cm. Also beträgt sein Umfang $4 \cdot 6\,\text{cm} = 24\,\text{cm}$.

27.



Den Umfang u eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a berechnest du mit $u = 3 \cdot a$.
Aus $u_{\text{I}} = 16,8\,\text{cm}$ folgt $\overline{AC} = 16,8\,\text{cm} : 3 = 5,6\,\text{cm}$.
Aus $u_{\text{II}} = 14,1\,\text{cm}$ folgt $\overline{DC} = 14,1\,\text{cm} : 3 = 4,7\,\text{cm}$.
Dann folgt $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{DC} = 5,6\,\text{cm} - 4,7\,\text{cm} = 0,9\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad u_{II} = 3 \cdot 0,9\,\text{cm} = 2,7\,\text{cm}$.

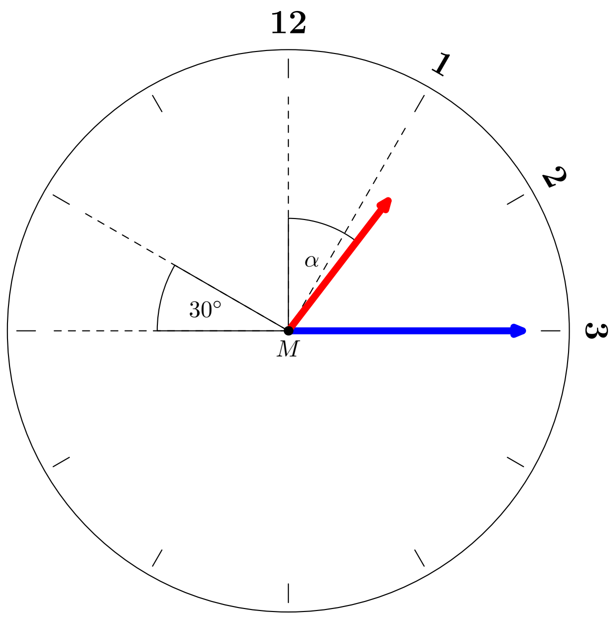
28.



Nach der Beziehung zwischen Nebenwinkeln gilt: $\delta = 180° - 90° = 90°$ und $\psi = 180° - 55° = 125°$.
Die Innenwinkelsumme betr"agt in jedem Viereck $360°$.
Also gilt im Viereck $ADEF$: $65° + 90° + \varphi + 125° = 360° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 80°$.

29. (a) Es gibt zwei Zeitpunkte für diese Zeigerstellung: tagsüber 13:15 Uhr oder nachts 01:15 Uhr.

(b)



Wenn du den Minutenzeiger (blau) um 15 min. d.h. eine Viertelstunde zurückdrehst, hat sich der Stundenzeiger (rot) um den vierten Teil des Weges zwischen der „1“ und der „2“ zurückgedreht. Zwichen der „1“ und der „2“ wird ein Winkel von $360° : 12 = 30°$ überstrichen. Also hat sich der rote Zeiger um $30° : 4 = 7,5°$ weiterbewegt.
Also folgt: $\alpha = 30° + 7,5° = 37,5°$.

30. Um auf dem Zifferblatt von einer Ziffer zur nächsten zu gelangen, braucht der blaue Minutenzeiger stets 5 Minuten. Dabei überstreicht er einen Winkel von
$360^\circ : 12 = 30^\circ$.
Für einen Winkel von 300° braucht der Minutenzeiger $(300^\circ : 30^\circ) \cdot 5\,\text{Minuten} = 50\,\text{Minuten}$.
Er ist danach über die „12“ um 5 Minuten hinausgewandert und der rote Stundenzeiger ist gleichzeitig über die „2“ hinausgewandert.
Dann ist es entweder 14:05 Uhr oder 02:05 Uhr.

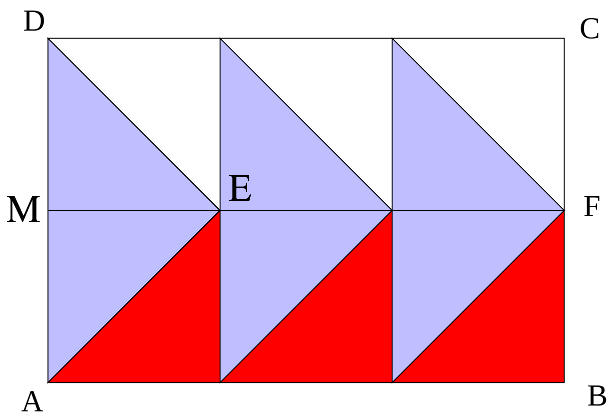
7 Achsenspiegelung

1. (b) $B'(0 \mid 3)$ (d) $C'(4 \mid -3)$
   (f) Das Viereck $AC'BC$ ist eine Raute, denn jede Punktspiegelung ist längentreu.

2. Die Koordinaten des Schatzes S heißen (8|6).

3. - -

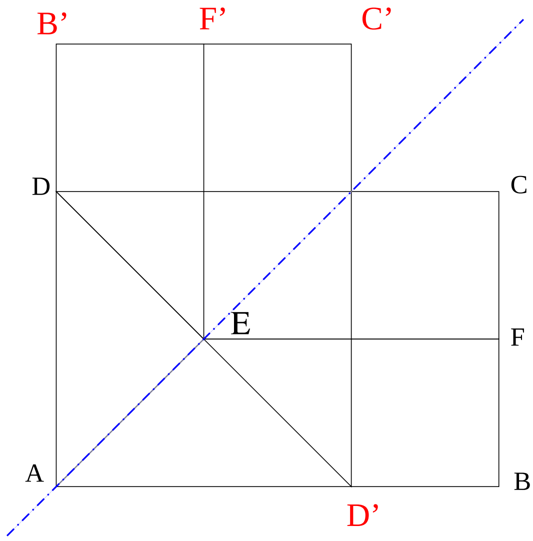
4. (a) –
   (b)



Das Rechteck $ABCD$ besteht aus 6 konguenten Quadraten. Das Dreieck AED ist sich aus Symemtriegründen genau so groß wie eines dieser Quadrate.

$$\Rightarrow \quad \frac{A(AED)}{A(ABCD)} = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad \frac{A(ABFE)}{A(ABCD)} = \frac{2,5}{6} = \frac{5}{12}\,.$$

   (c) Wenn ε kleiner werden soll, dann muss der Punkt E nach rechts wandern. Dadurch wird der Flächenanteil des Dreiecks AED am Rechteck $ABCD$ größer.
   (d)

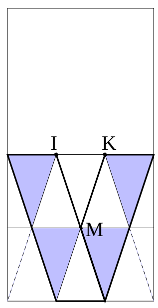


5.

(a) –

(b) Maria hat Recht: Der rote Kreis enthält unendlich viele Symmetrieachsen, die man gar nicht alle zeichnen kann.
Ansonsten sind zwei Quadrate, das Rechteck, das Trapez $GHEF$ und zwei gleichschenklige Dreiecke als achsensymmetrische Figuren vorhanden.

(c)



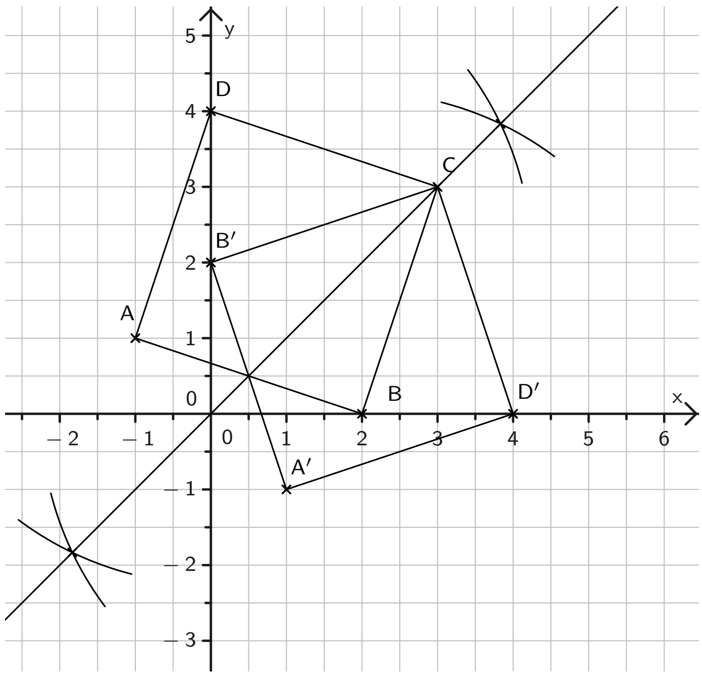
Das untere Quadrat enthält 10 ganze und 4 halbe Dreiecke vom Typ MKI. Also ist die Fläche des ganzen Logos so groß wie 24 solcher Dreiecke.
Das Parallelogramm besteht aus 4 und das Trapez aus 3 solchen Dreiecken. Der V-Teil des Logos nimmt also $\frac{7}{24}$ der Gesamtfläche ein.

6.

(a) –

(b) –

(c)



(d) $\varphi \approx 360° - 2 \cdot 90° - 53,13°$; $\quad \varphi \approx 126,86°$

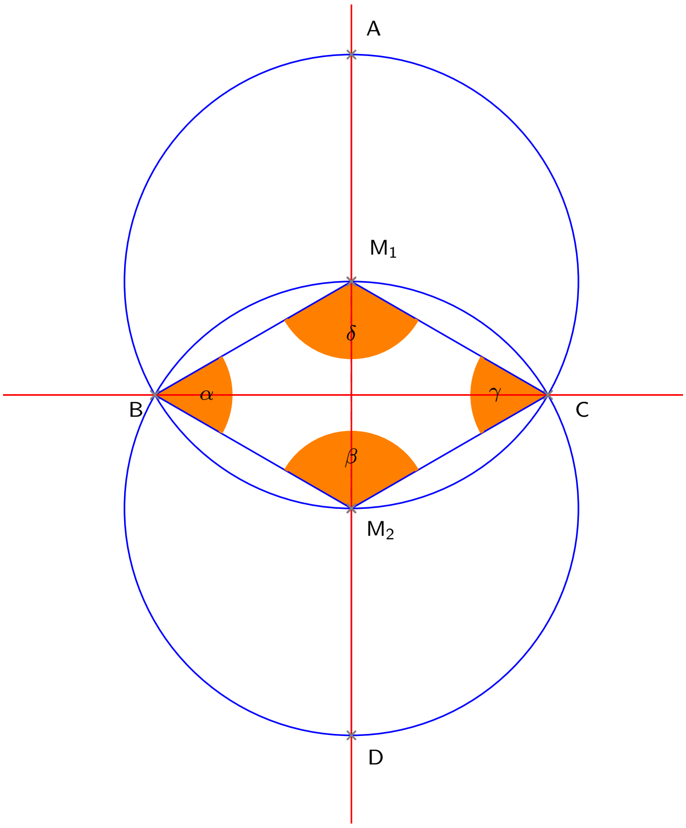
(e) Es ist ein achsensymmetrischer Drachen.

- $\overline{CB'} = \overline{CB}$
- Es besitzt eine Symmetrieachse.

(f) Es gilt: $\overline{BC} = \overline{B'C}$ und $\overline{CD} = \overline{CD'}$
Z.B.: Jede Achsenspiegelung ist längentreu.
Solche Dreiecke nennt man gleichschenklig.

7.

(a) –



(b) –

(c) Das Viereck ist eine Raute.

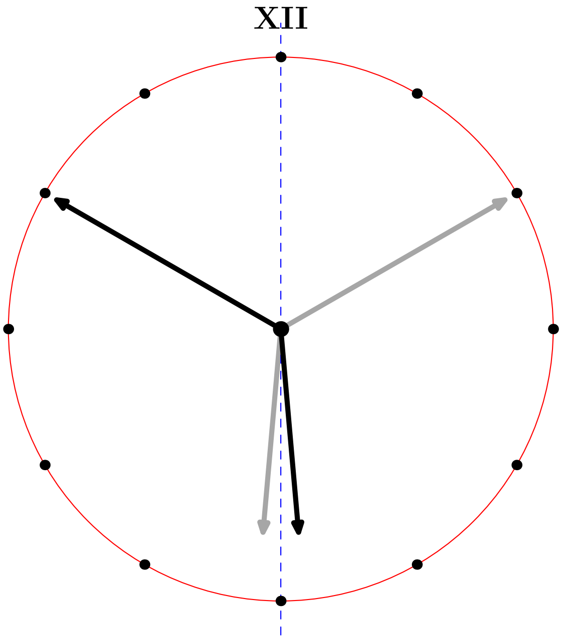
(d) Es gilt z.B. $\alpha = 60°$, denn das Dreieck BM_2M_1 ist gleichseitig.

(e) $\alpha = \gamma = 60°$ (Symmetrie) $\beta = \delta = (306° - 2 \cdot 60°) : 2 = 120°$

(f) Das Dreieck BCA ist in 3 kongruente Dreiecke zerlegt worden. Das Viereck BM_2CM_1 enthält zwei dieser Dreiecke, das Viereck $BDCA$ enthält 6 dieser Dreiecke. Also ist das große Viereck dreimal so groß wie das kleine.

8. **Figur a)**
Offenbar ist die römische Zahl **XII** und damit auch das Zifferblatt spiegelverkehrt dargestellt.

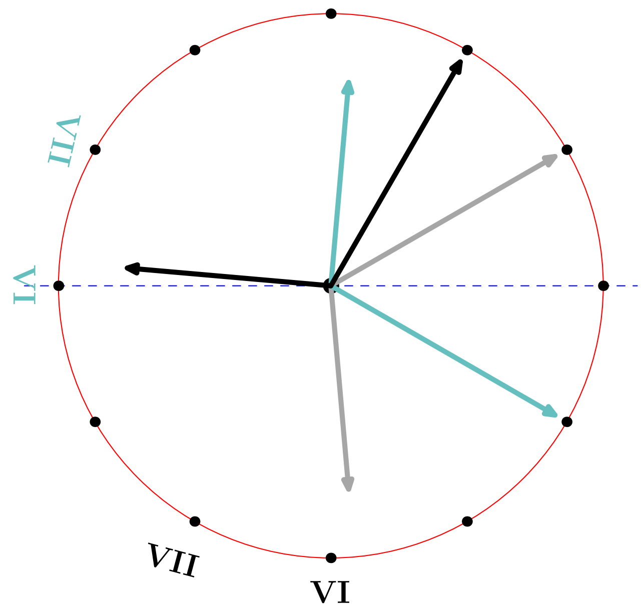
Figur a)



Jetzt ist es also 10 Minuten vor Sechs oder 17:50 Uhr oder 05:50 Uhr.

Figur b)
Am Rand links ist die römische Zahl **VII** und damit auch das Zifferblatt spiegelverkehrt (oben und unten sind vertauscht) dargestellt. Nach der entsprechenden Rückspiegelung steht die Uhr dann auf 12:20 Uhr (siehe türkis-gefärbte Zeiger).
Gleichzeitig ist dann die benachbarte Zahl eine **VI**. Normalerweise befindet sich die VI unten in der Mitte. Also ist dass Zifferblatt nicht nur spiegelverkehrt, sondern auch noch um $-90°$ gedreht dargestellt.

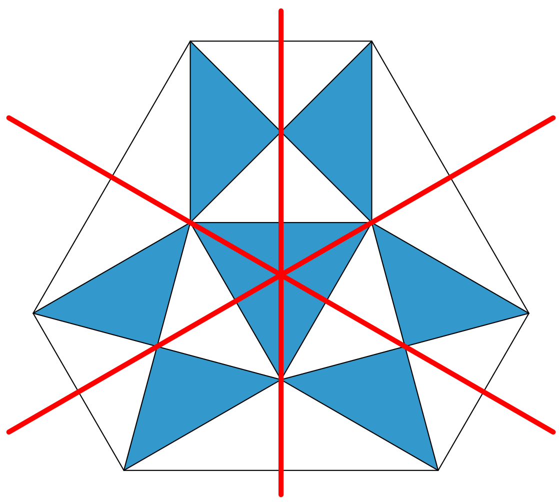
Figur b)



Jetzt ist es also 5 Minuten nach Neun oder 09:05 Uhr oder 21:05 Uhr.

9. (a) Errichte über jeder Seite des gleichseitigen Dreiecks im Zentrum das entsprechende Quadrat.
   Zeichne dann jeweils die Verbindungsstrecke zwischen den äußeren Eckpunkten zweier benachbarter Quadrate.

   (b)



   (c) Im Inneren des gleichseitigen Dreiecks: **12** zusätzliche Dreiecke.

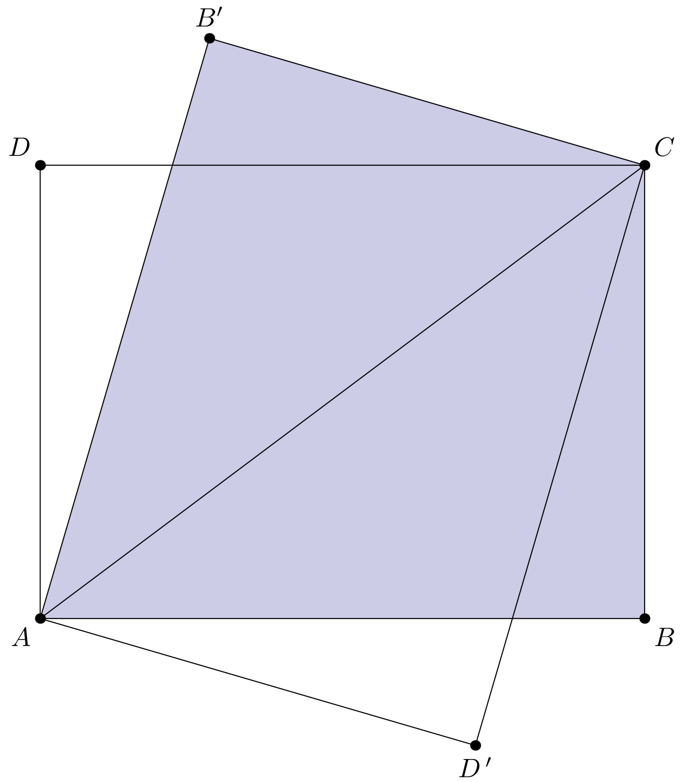
Gleichseitiges Dreieck im Zentrum und die drei benachbarten „weißen“ gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke: **24** zusätzliche Dreiecke.

In den drei „weißen“ gleichschenkligen Dreiecken außen: **6** zusätzliche Dreiecke.

In den drei Quadraten gibt es schließlich **6** zusätzliche Dreiecke. Nicht 12, denn die „weißen“ Paare gleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke, die am gleichseitigen Dreieck im Zentrum liegen, sind schon gezählt.

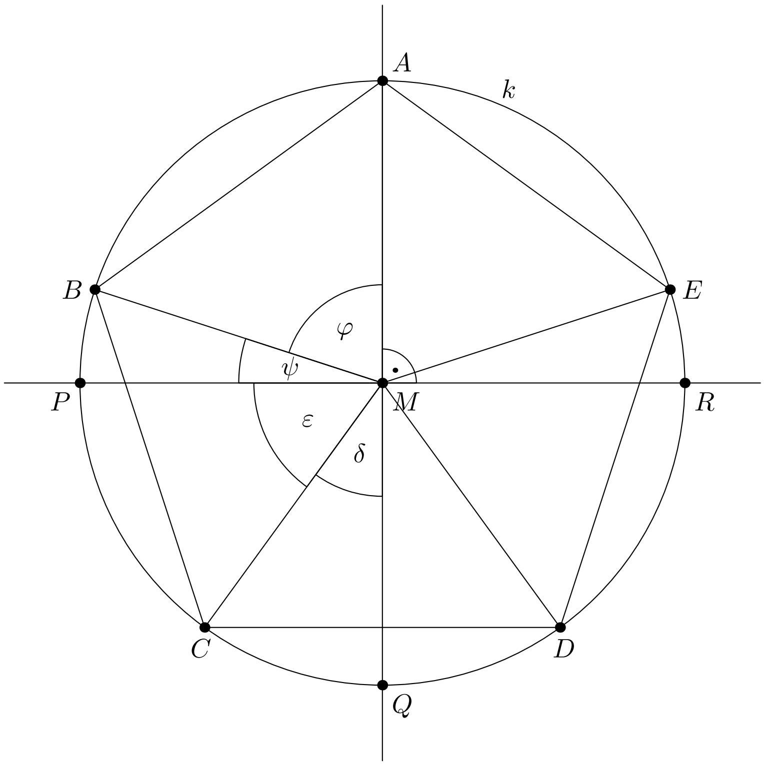
Es sind also **48** zusätzliche Dreiecke erzeugt worden.

10. (a)



(b)
- Durch die Spiegelung des Punktes B an $[AC]$ wird das Dreieck ABC auf das Dreieck ACB' abgebildet.
  Durch die Spiegelung des Punktes D an $[AC]$ wird das Dreieck ACD auf das Dreieck $AD'C$ abgebildet.
  Jede Achsenspiegelung ist flächentreu, also haben die zwei Vierecke $ABCD$ und $AD'CB'$ den gleichen Flächeninhalt.
- Jede Achsenspiegelung ist längentreu, also gilt:
  $\overline{AB} = \overline{AB'}$ und $\overline{CB} = \overline{CB'}$. Also ist das Viereck $ABCB'$ ein Drachenviereck.

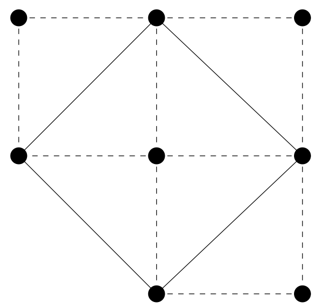
11. (a)



Du kannst die fehlenden Eckunkte D und E z.B. durch Spiegelung der Punkte C und B an der Symmetrieachse AQ des Fünfecks $ABCDE$ erzeugen.

(b)
- Der Mittelpunktswinkel φ tritt in diesem regelmäßigen Fünfeck 5-mal auf:
  $\Rightarrow \quad \varphi = 360° : 5 = 72°$.
- Es gilt: $\psi = 90° - \varphi = 90° - 72° = 18°$.
  Der Winkel BMC besitzt ebenfalls das Maß 72°.
  $\Rightarrow \quad \varepsilon = 72° - \psi = 72° - 18° = 54°$.
- $\delta = 90° - \varepsilon = 90° - 54° = 36°$.

12.



Die acht Punkte scheinen nur drei Quadrate herzugeben, aber die vier schrägen Strecken liefern ein weiteres Quadrat. Also sind es insgesamt vier Quadrate, die du so erzeugen

kannst.
Das große Quadrat hat den gleichen Flächeninhalt wie zwei kleine Quadrate.