SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Jahrgangsstufe 6 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Die Menge der positiven rationalen Zahlen

1. Die folgenden Brüche sind dadurch entstanden, dass man zunächst mit 5 und dann nochmals mit 6 gekürzt hat. Bestimme jeweils den ursprünglichen Bruch.
   $\frac{1}{2}$, $\frac{13}{7}$, $5\frac{1}{8}$, $\frac{60}{12}$, $7\frac{8}{8}$

Lösung: $\frac{30}{60}$, $\frac{390}{210}$, $\frac{1230}{240}$, $\frac{150}{30}$, $\frac{240}{30}$

2. (a) Schreibe fünf Brüche hin, die sich nur aus den Ziffern 1 und 3 zusammensetzen und die man nicht kürzen kann.
   (b) Schreibe fünf Brüche hin, die sich jeweils aus drei verschiedenen Ziffern zusammensetzen und die gleichzeitig $\frac{1}{3}$ ergeben.

Lösung: (a) z.B. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{3}{11}$, $3\frac{1}{3}$, $1\frac{11}{13}$
(b) z.B. $\frac{7}{21}$, $\frac{9}{27}$, $\frac{10}{30}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{6}{18}$

3. Karin und Uwe lesen in der Zeitung:
   „Die Zuschauerzahlen für das jährlich stattfindende Open-Air-Festival in Kreischhausen schwanken in letzter Zeit stark: Während es im Jahre 2007 ein Drittel weniger Zuschauer als im Jahre 2006 gab, kamen im Jahre 2008 ein Drittel mehr Zuschauer als 2007.“
   Uwe meint: „Also sind es 2008 wieder genauso viele Teilnehmer wie 2006.“
   Karin entgegnet: „Das sieht zwar auf den ersten Blick so aus, aber wenn beispielsweise im Jahr 2006 ... “

   Setze den Gedanken von Karin fort. Begründe damit, dass Uwes Aussage nicht zutrifft.

Lösung: Angenommen, es kamen im Jahre 2006 9000 Zuschauer.
2007: $\frac{1}{3}$ von $9000 = 3000 \quad 9000 - 3000 = 6000$ Zuschauer.
2008: $\frac{1}{3}$ von $6000 = 2000 \quad 6000 + 2000 = 8000$ Zuschauer.
Also kamen 2008 1000 Zuschauer weniger als 2006.
Der Grund liegt darin, dass der dritte Teil im Jahre 2006 von mehr Zuschauern errechnet wurde als 2007.

2 Rechnen mit positiven rationalen Zahlen

1. Berechne:
   (a) $\frac{12}{24} - \frac{1}{3} + \frac{7}{42}$
   (b) $(\frac{12}{24} + \frac{15}{20}) : \frac{27}{36}$

Lösung: (a) $\frac{1}{3}$ (b) 2

2. Egon bekommt folgende Aufgabe: $7\frac{1}{3} : (2\frac{1}{2} - \frac{5}{2}) =$
   Er denkt erst nach, bevor er rechnet. Dann ruft er: „Die Aufgabe kann man doch im Kopf ausrechnen, da kommt $7\frac{1}{3}$ heraus!“.
   Stimmt das? Begründe deine Ansicht.

Lösung: $7\frac{1}{3} : (2\frac{1}{2} - \frac{5}{2}) = 7\frac{1}{3} : 0$
Die Division durch Null ist nicht erlaubt! Egon hat nicht Recht.

3. (a) Untersuche, ob die Summe aus einem echten Bruch und seinem Kehrbruch $\frac{3}{7}$ ergeben kann.
   (b) Untersuche, ob der Quotient aus einem unechten Bruch und seinem Kehrbruch $\frac{3}{7}$ ergeben kann.

Lösung: (a) Nein, denn der Wert des Kehrbruch eines echten Bruches liegt über 1. Addieert man eine weitere Zahl, so bleibt der Summenwert über 1. Es gilt aber: $\frac{3}{7} < 1$.

(b) Das ist nicht möglich. Jeder unechte Bruch besitzt einen Wert, der über 1 liegt. Dividiert man einen unechten Bruch durch seinen Kehrbruch, so multipliziert man eigentlich den unechten Bruch nur mit sich selbst. Das Produkt stellt wiederum einen unechten Bruch dar. $\frac{3}{7}$ ist jedoch ein echter Bruch.

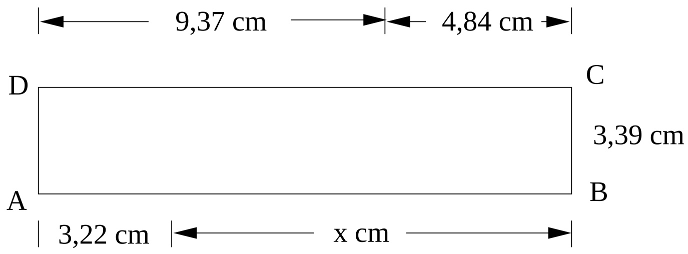
4. (a) Welche Zahl ergibt durch ihren 6. Teil geteilt den Wert 6?
   (b) Welche Zahl ergibt durch ihren 6. Teil geteilt den Wert 5?

Lösung: (a) Jede von Null verschiedene Zahl. (b) Keine Zahl.

5. Berechne jeweils auf zwei verschiedene Arten:
   (a) $0,25 \cdot (3,5 - 1,9)$
   (b) $(-3,56 + 6,7 - 9,84) \cdot 100$

Lösung: (a) $0,4$ (b) -670

6. Berechne x am Rechteck $ABCD$ (Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.):



Lösung: $x = 10,99$

7. Die drei Söhne des verstorbenen Scheichs Minussi erben eine Kamelherde, die aus 17 Tieren besteht. Im Testament heißt es:
„Mein erstgeborener Sohn Ali soll die Hälfte der Tiere, Abdulla ein Drittel und Arif ein Neuntel der Kamelherde bekommen. Kein Kamel darf geschlachtet werden.“
Die Söhne sind ratlos. (Warum?) Sie tragen ihr Problem einem Nachbarn vor, der als weiser Mann bekannt ist. Er überlegt nicht lange und gibt ihnen den folgenden Rat:
„Ich besitze selbst Kamele. Davon leihe ich euch eines. Vollzieht damit die Teilung wie es das Testament verlangt.“
Wie viele Kamele bekommt jeder der Söhne? Was fällt dir auf? Hast du eine Erklärung dafür?

Lösung: Die ursprüngliche Teilung ist nicht möglich, da 17 nicht durch 2, 3 und 9 teilbar ist.

$17 + 1 = 18$	Ali	Abdulla	Arif
Anzahl der Kamele für	9	6	2

Die Summe ergibt 17. Das geliehene Kamel kann wieder zurückgegeben werden.
Das Testament war fehlerhaft verfasst: Die Summe der Anteile ergibt kein Ganzes, sondern nur $\frac{17}{18}$.

8. Bei Wandverkleidungen werden häufig Profilbretter verwendet. Der im Handel angebotene Preis pro m^2 bezieht sich aber auf die Fläche der Bretter und nicht auf die zusammengesteckten Bretter der zu bedeckenden Wandfläche. Es ist davon auszugehen, dass $1\,\mathrm{m}^2$ Bretter nur $0,9\,\mathrm{m}^2$ Wandfläche bedeckt.

(a) Es sollen $12,4\,\text{m}^2$ Wand verkleidet werden. Wie viel im Handel angebotene m^2 Profilbretter müssen mindestens angeboten werden?

(b) Ein Brett ist $3,40\,\text{m}$ lang und $121\,\text{mm}$ breit. Wie viele m^2 können mit diesem Brett tatsächlich bedeckt werden? Wie viele solcher Bretter braucht man mindestens für $1\,\text{m}^2$ Wandfläche?

(c) Im Prospekt wird der m^2 Profilbretter zu $4,55$ € angeboten. Wie hoch ist der Preis pro m^2 Wandfläche? Reichen 75 € für eine Wandfläche von $13,5\,\text{m}^2$?

Lösung: (a) $14\,\text{m}^2$, es werden nämlich keine $13,\overline{7}\,\text{m}^2$ angeboten.

(b) Etwa $0,37\,\text{m}^2$. Man braucht mindestens 3 Bretter.

(c) $5,06$ €
Die Kosten betragen $68,31$ €; also reichen 75 €.

9. Ein Grundstück wird vermessen und die Länge auf $83,5\,\text{m}$ und die Breite auf $42\,\text{m}$ festgelegt.

(a) Welchen Flächeninhalt besitzt das Grundstück?

(b) Ein Käufer bietet für das Grundstück 250000 €. Von welchem Preis pro m^2 geht der Käufer aus? (auf Euro genau).

(c) Der Käufer will auf dem Grundstück ein Hotel einrichten. Die örtlichen Bauvorschriften besagen, dass höchstens ein Drittel des Grundstücks bebaut werden darf. Welche Grundfläche hat das Hotel, wenn der Käufer das Höchstmaß dafür sogar um $200\,\text{m}^2$ unterschreitet.

Lösung: (a) $3507\,\text{m}^2$

(b) 72 €

(c) $969\,\text{m}^2$

10. Bei einer Tombola wurden $\frac{2}{3}$ der Lose an Kinder und $\frac{1}{4}$ der Lose an Erwachsene verkauft. Es blieben 100 Lose übrig, 97 davon waren Nieten.
Wie viele Lose wurden verkauft?

Lösung: Es wurden 1000 Lose verkauft; die Anzahl der Nieten spielt keine Rolle.

11. Wie viele Quadrate zu je $2,5\,\text{cm}$ Seitenlänge ergeben einen Quadratmeter?

Lösung: 1600

12. Es gibt viele Zahlenpaare, deren Produktwert 0,64 beträgt.

(a) Gib 10 solche Zahlenpaare an.

(b) Ermittle dasjenige Zahlenpaar, das den kleinsten Summenwert besitzt. Entdeckst du vielleicht ein weiteres Zahlenpaar (Produktwert 0,64), mit dem man einen noch kleineren Summenwert erzeugen kann?

(c) Wiederhole das Experiment jeweils mit den Produktwerten 6,25 und 1,6. Was stellst du fest, wenn du wieder den kleinsten Summenwert berechnest?

Lösung: Beispiel:

(a)

erste Zahl	1	2	0,8	0,4	0,2	4	...
zweite Zahl	0,64	0,32	0,8	1,6	3,2	0,16	...
Summenwert	1,64	2,32	1,60	2,0	3,4	4,16	...

(b) Das Paar $(0,8|0,8)$ scheint den kleinsten Summenwert zu liefern. Es besteht aus gleichen Zahlen.

(c) Beim Produktwert 6,25 scheint der minimale Summenwert erneut durch zwei gleiche Zahlen erzeugt zu werden: $(2,5|2,5)$
Beim Produktwert 1,6 jedoch scheint ein minimaler Summenwert nicht exakt bestimmbar. Es gilt z.B.: $1,26 \cdot 1,26 = 1,5876$ und $1,27 \cdot 1,27 = 1,6129$.
Weiter gilt $1,265 \cdot 1,265 = 1,600225$.

13. Bei einem Hilfsprojekt in Afrika wird Milchpulver, das in Säcken zu je 24 kg verpackt ist, in Tüten mit $1\frac{4}{5}$ kg Inhalt abgefüllt.

(a) Wie viele ganze Tüten können aus zwei Säcken insgesamt abgefüllt werden?

(b) In einer Verteilerstelle für Hilfsgüter befinden sich 22 dieser Säcke. Durch einen Wasserschaden werden 176 kg davon unbrauchbar.
Welcher Bruchteil der ursprünglichen Menge kan jetzt noch verwendet werden?

(c) Bei einem der Säcke ist durch ein Loch $\frac{2}{15}$ des Inhalts verloren gegangen.
Wie viele ganze Tüten kann man von dem Rest des Sackinhalts noch füllen?

(d) Der LKW der Hilfsorganisation, der die Säcke brachte, war um 04 : 40 Uhr gestartet, hatte um 07 : 25 Uhr eine Pause von $1\frac{2}{5}$ Stunden eingelegt, musste wegen einer Reifenpanne um 09 : 40 Uhr nochmals die Fahrt für $1\frac{11}{12}$ Stunden unterbrechen und kam schließlich um 12 : 25 Uhr bei der Verteilerstelle an.
Wie lang war die reine Fahrzeit des LKWs?

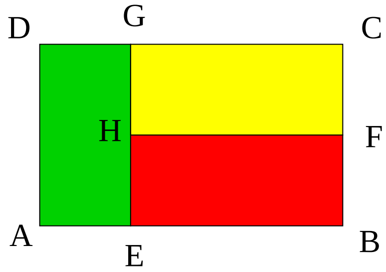
Lösung: (a) Es können 22 ganze Tüten abgefüllt werden.

(b) Es kann noch $\frac{2}{3}$ der ursprünglichen Menge verwendet werden.

(c) Man kann noch 11 Tüten füllen.

(d) Die reine Fahrzeit betrug 4 Stunden und 26 Minuten.

14.



Nach dieser Abbildung der Nationalflagge von Benin in Afrika soll eine Fahne aus Tuch gefertigt werden, die 5 m breit und 3 m hoch ist.

(a) In einer Fabrik wird sie so genäht, dass das Rechteck $AEGD$ $\frac{2}{5}$ der Fahnenfläche einnimmt. Die beiden anderen Rechtecke sind gleich groß.
Berechne die Stoffmenge für jedes Rechteck in m^2.

(b) Eine andere Fabrik näht die Fahne so, dass alle drei inneren Rechtecke gleich groß sind.
Berechne Breite und Höhe jedes dieser Rechtecke in Metern. Runde auf Zentimeter genau.

(c) In einer dritten Fabrik wird die Fahne so genäht, dass die Rechtecke $AEGD$ und $EBFH$ zusammen genau so groß sind wie das Rechteck $HFCG$.
Ordne den Flächeninhalt dieser drei Rechtecke der Größe nach.
Übrigens: Diese Fahne wäre in Benin wahrscheinlich unverkäuflich. Warum?

Lösung:

(a) Rechteck $AEGD$: $6\,\mathrm{m}^2$; Rechtecke $EBFH$ und $HFCG$: $4{,}5\,\mathrm{m}^2$

(b) Jedes Rechteck hat eine Fläche von $5\,\mathrm{m}^2$.

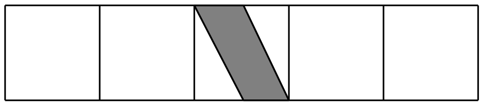
Rechteck	Breite in m	Höhe in m
$AEGD$	1,67	3,00
$EBFH$	3,33	1,50
$HFCG$	3,33	1,50

(c) Es sind drei Fälle möglich:
$A(HFCG) > A(AEGD) > A(EBFH)$ oder
$A(HFCG) > A(EBFH) > A(AEGD)$ oder
$A(HFCG) > A(EBFH) = A(AEGD)$.
Dadurch können die beiden Rechtecke $HFCG$ und $EBFH$ nie gleich groß sein. Diese Fahne ist nur ein entstelltes Bild der Nationalflagge.

15. Um Bakterien einer Zellkultur abzutöten, werden Antibiotika eingesetzt. In der ersten Stunde wird die Hälfte der Bakterien getötet, in der zweiten Stunde von den noch vorhandenen ein Drittel und in der dritten Stunde von den noch vorhandenen ein Viertel.
Berechne den Bruchteil der Bakterien, die dann noch vorhanden sind.

Lösung: Es sind noch $\frac{1}{4}$ der ursprünglichen Bakterien vorhanden.

16.



Hier sind fünf Quadrate zu einem Rechteck zusammengesetzt worden.
Welcher Bruchteil der Rechtecksfläche ist gefärbt?

Lösung: Es ist $\frac{1}{10}$ der Quadrate gefärbt.

17. Gleiche Symbole bedeuten gleiche positive Ziffern; verschiedene Symbole bedeuten verschiedene positive Ziffern:

$$(\Delta + \Box)^2 = \mathrm{O}\Delta\,\Box$$

Lösung: Die Symbole rechts vom Gleichheitszeichen stellen eine dreistellige Quadratzahl dar. Dreistellige Quadratzahlen reichen von $100 = 10^2$ bis $961 = 31^2$, denn $9^2 = 81$ (zweistellig) und $32^2 = 1024$ (vierstellig).
Folglich muss $(\Delta + \Box)$ mindestens den Wert 10 besitzen, darf aber gleichzeitig den Wert 31 nicht überschreiten. Weil die letzten beiden Ziffern von 100 aber gleich sind, scheidet $(\Delta + \Box) = 10$ aus.
Die Summe zweier verschiedener Ziffern kann jedoch höchstens den Wert $17 = 8 + 9$ erreichen. Also muss das Folgende gleichzeitig gelten:

$$(\Delta + \Box) > 10 \quad \mathbf{(1)} \qquad \text{und} \qquad (\Delta + \Box) \leqq 17 \quad \mathbf{(2)}.$$

Quadratzahlen enden nur auf die Ziffern 1, 4, 5, 6 oder 9.

1. Fall: $\Box = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta + 1 \leqq 10$: Nichts geht.

2. Fall: $\Box = 4$
Dann endet der Summenwert $\Delta + 4$ entweder auf 2 oder 8, denn nur 2^2 und 8^2 enden auf die Ziffer 4.
Nun sind die folgenden Fälle möglich:

- Der Summenwert endet auf die Ziffer 2. Dann ist wegen (1) und (2) nur $\Delta + \Box = 12$ möglich, aber $12^2 = 144$, was nicht geht.
- Der Summenwert endet auf die Ziffer 8. Als einzige Zahl käme 18 in Frage, was aber wegen (2) nicht geht.

3. Fall: $\square = 5$
Dann endet der Summenwert $\Delta + \square$ auch auf 5. Es kommt wegen (1)und (2) nur 15 in Betracht, aber $15^2 = 225$, was nicht geht.

4. Fall: $\square = 6$
Dann endet der Summenwert $\Delta + \square$ entweder auf 4 oder auf 6.
Nun sind die folgenden Fälle möglich:

- Der Summenwert $\Delta+\square$ endet auf die Ziffer 4. Dann ist wegen (1) und (2) nur $\Delta+\square = 14$ möglich, aber $14^2 = 196$, was wegen $9 + 6 = 15 \neq 14$ nicht geht.
- Der Summenwert endet auf die Ziffer 6. Es kommt wegen (1)und (2) nur 16 in Betracht. Dann ist $16^2 = 256$. Weil $5 + 6 = 11$ und nicht 16 ist, kommt auch in diesem Fall nichts heraus.

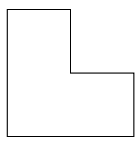
5. Fall: $\square = 9$
Dann endet der Summenwert $\Delta + \square$ entweder auf 3 oder auf 7.

- Der Summenwert endet auf die Ziffer 3. Dann ist wegen (1) und (2) nur $\Delta + \square = 13$ möglich, aber $13^2 = 169$, was nicht geht, weil $6 + 9 = 15$ und nicht 13 ist.
- Der Summenwert endet auf die Ziffer 7. Dann ist wegen (1) und (2) nur $\Delta + \square = 17$ möglich, In der Tat ist nun $17^2 = 289$ und $8 + 9 = 17$.

Damit hast du eine einzige Lösung: $O = 2$, $\Delta = 8$ und $\square = 9$.

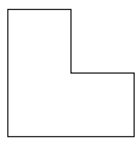
18.

Figur a)



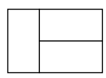
$\frac{3}{4}$

Figur b)



$\frac{1}{2}$

Figur c)



$\frac{3}{9}$

Jede der drei Figuren stellt den darunter angegebenen Bruchteil eines ganzen Rechtecks dar.

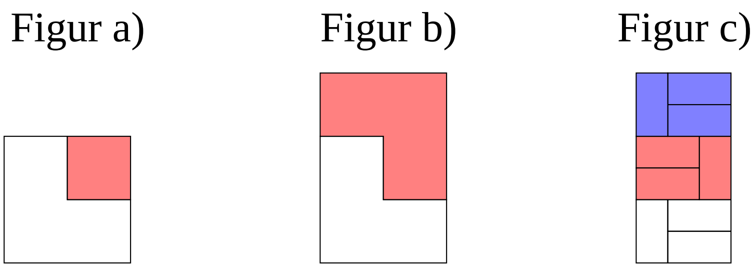
(a) Ergänze sauber jede der Figuren zu einem Ganzen.

(b) Schreibe die dazu passenden Brüche in die Kästchen:

Figur a) $\frac{3}{4} + \boxed{\phantom{\frac{1}{4}}} = 1$ Figur b) $\boxed{\phantom{\frac{1}{4}}} + \boxed{\phantom{\frac{1}{4}}} = 1$

Figur c) $\boxed{\phantom{\frac{1}{4}}} + \boxed{\phantom{\frac{1}{4}}} = \boxed{\phantom{\frac{1}{4}}}$

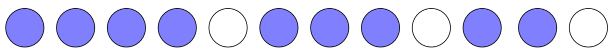
Lösung: (a)



(b) Figur a) $\frac{3}{4} + \boxed{\frac{1}{4}} = 1$ Figur b) $\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{2}} = 1$

Figur c) $\boxed{\frac{3}{9}} + \boxed{\frac{6}{9}} = \boxed{\frac{9}{9} \text{ oder } 1}$

19.



(a) Welcher Bruchteil der Kugeln ist dunkel? Bruchteil: ____________

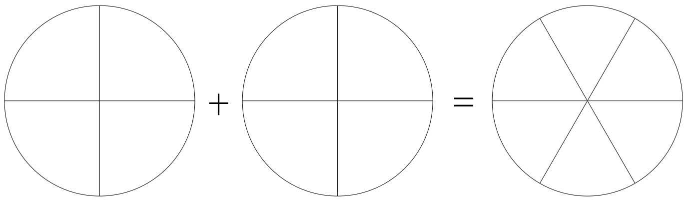
(b) Würdest du rechts eine helle oder dunkle Kugel als nächste hinlegen? Begründe:

Lösung: (a) Unter zwölf Kugeln befinden sich neun dunkle. Also beträgt der Bruchteil der dunklen Kugeln $\frac{9}{12}$.

Oder: Von jeweils vier Kugeln sind drei dunkel. Also beträgt der Bruchteil der dunklen Kugeln $\frac{3}{4}$. Daraus folgt: $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

(b) Es gehört eine dunkle Kugel hin.
Begründung: Links von einer weißen Kugel liegen erst vier, dann drei und dann zwei dunkle. Also müsste rechts auf die letze weißen Kugel eine dunkle folgen.
Oder: Die Zahl der dunklen zwischen den hellen Kugeln nimmt nach rechts immer um eins ab.

20. Fritz rechnet: $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6}$



(a) Zeige an den drei Kreisen mit Hilfe von Farben, dass Fritz nicht recht hat. Notiere deine Begründung:

____

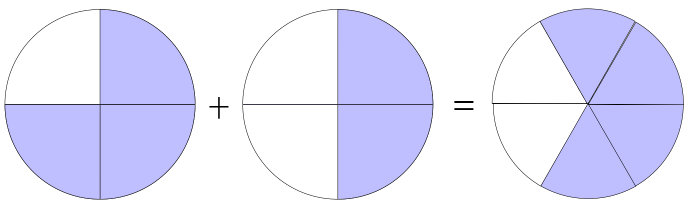
____

(b) Welchen Fehler hat Fritz gemacht?

____

____

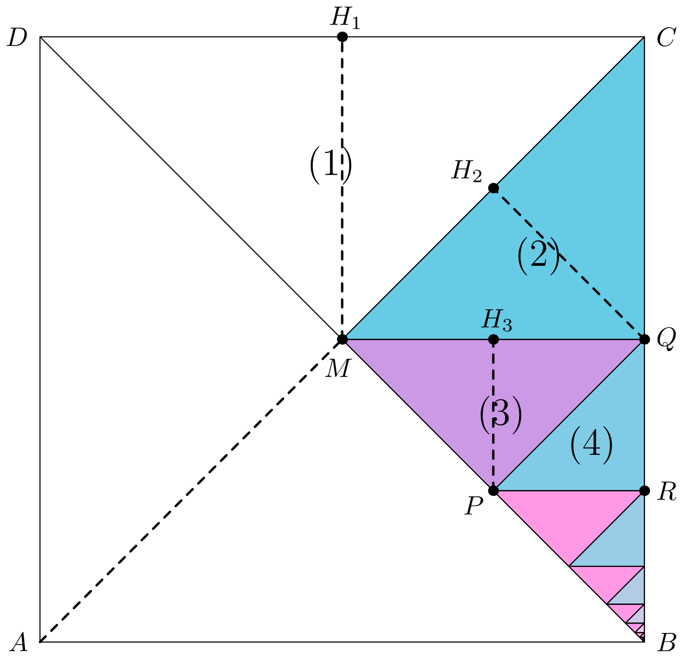
Lösung: (a)



Links vom Gleichheitszeichen ergibt die Summe mehr als einen Kreis, nämlich $\frac{5}{4}$. Auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ergeben aber $\frac{4}{6}$ weniger als einen ganzen Kreis. Fritz hat unrecht.

(b) Fritz hat einfach die beiden Zähler und die beiden Nenner getrennt addiert. Das ist falsch.

21.



Im Quadrat $ABCD$ sind die Dreiecke (1), (2), (3), (4), … zu sehen.
Achte bei den folgenden Fragen auf die gestrichelten Hilfslinien.

(a) Welche gemeinsame Besonderheiten besitzen alle diese Dreiecke?

(b) Welchen Bruchteil der Quadratfläche A_Q nimmt das Dreieck (1) ein?

(c)
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Flächeninhalt $A_{(1)}$ des Dreiecks (1) und dem Flächeninhalt $A_{(2)}$ des Dreiecks (2)? Begründe.
- Welchen Bruchteil der Quadratfläche A_Q nehmen die beiden Dreiecke (1) und (2) zusammen ein? Wie viel Prozent sind das?

(d)
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Flächeninhalt eines dieser immer kleiner werdenden Dreiecke und seinem jeweiligen Vorgänger? Begründe deine Antwort anhand der Dreiecke (2), (3) und (4).
- Welchen Bruchteil der Quadratfläche nimmt das Dreieck (4) ein?

(e)
- Welchen Bruchteil der Quadratfläche nehmen alle Dreiecke (1), (2), (3), (4), … zusammen ein?
- Was ergibt $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$?

Lösung: (a) Alle diese Dreiecke sind gleichschenklig-rechtwinklig.

(b) $A_{(1)} = \dfrac{1}{4}A_Q$.

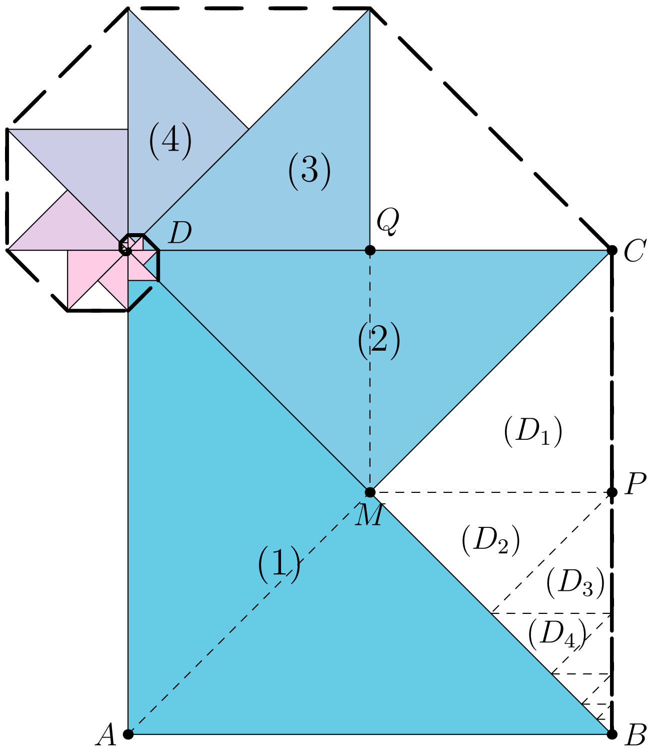
(c)
- $A_{(2)} = \dfrac{1}{2}A_{(1)}$. Begründung:

  Es gilt $A_{(2)} = A_{\Delta\, MQC} = \dfrac{1}{2}A_{MQCH_1} = \dfrac{1}{2}A_{\Delta\, MCD} = \dfrac{1}{2}A_{(1)}$.
- $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8} = 0,375 = 37,5\%$.

(d)
- Die gestrichelte Hilfslinie $[QH_2]$ halbiert das Dreeick (2). Weil das Viereck $MPQH_2$ ein Quadrat ist, gilt: $A_{(3)} = \frac{1}{2}A_{(2)}$.
  Die gestrichelte Hilfslinie $[PH_3]$ halbiert das Dreieck (3). Weil das Viereck $PRQH_3$ ein Quadrat ist, gilt: $A_{(4)} = \frac{1}{2}A_{(3)}$.
  Der Flächeninhalt eines dieser immer kleiner werdenden Dreiecke ist jeweils halb so groß wie der seines Vorgängers.
- $A_{(4)} = A_{(3)} : 2 = A_{(2)} : 4 = A_{(1)} : 8 = \frac{1}{4}A_Q : 8 = \frac{1}{32}A_Q$.

(e)
- Aus der Zeichnung erkennst du: Alle Dreiecke von (1), (2) angefangen bis ins unendlich kleinste ergeben die Hälfte des Quadrates $ABCD$.
- Dann muss $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \ldots = \dfrac{1}{2}$ sein.

22.



Im Quadrat $ABCD$ sind die getönten Dreiecke (1), (2), (3), (4), ... und die „weißen“ Dreiecke (D_1),(D_2), $D_3)$, (D_4), ... zu sehen.

(a) Welche gemeinsame Besonderheiten besitzen alle diese Dreiecke?

(b) Welchen Bruchteil der Quadratfläche nimmt das getönte Dreieck (1) ein?

(c)
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Flächeninhalt $A_{(1)}$ des Dreiecks (1) und dem Flächeninhalt $A_{(2)}$ des Dreiecks (2)? Begründe.
- Welchen Bruchteil der Quadratfläche A_Q nehmen die beiden getönten Dreiecke (1) und (2) zusammen ein? Wie viel Prozent sind das?

(d)
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Flächeninhalt eines dieser immer kleiner werdenden getönten Dreiecke (1), (2), (3), (4), ... und seinem jeweiligen Vorgänger? Begründe deine Antwort anhand der Dreiecke (D_1),(D_2), $D_3)$, (D_4) ....
- Welchen Bruchteil der Fläche des Quadrates $ABCD$ nimmt das getönte Dreieck (4) ein?

(e)
- Wie groß sind alle getönten Dreiecke (1), (2), (3), (4), ... zusammen?
- Was ergibt $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$?
- Was ergibt $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$?

Lösung: (a) Alle diese Dreiecke sind gleichschenklig-rechtwinklig.

(b) $A_{(1)} = \frac{1}{2} A_Q$.

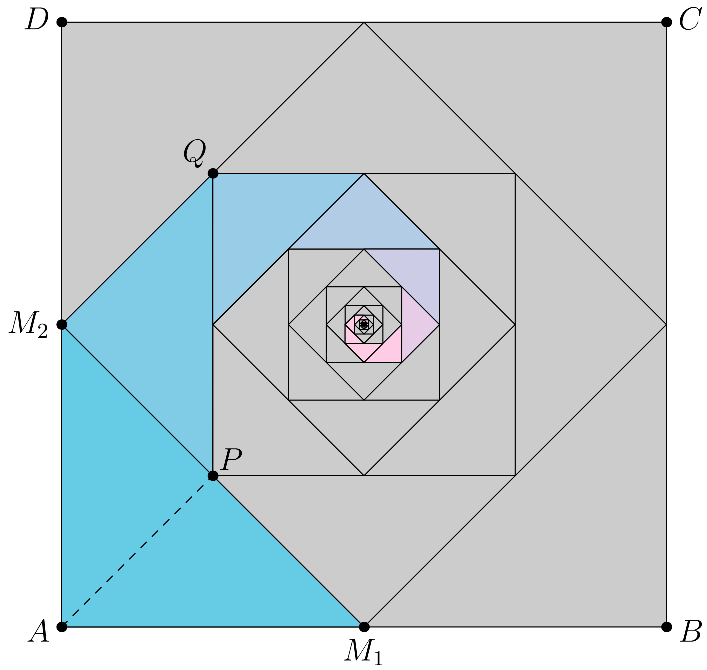
(c)
- $A_{(2)} = \frac{1}{2} A_{(1)}$. Begründung:

  Die Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ zerlegen das Quadrat $ABCD$ in vier kongruente Teildreiecke, wovon eines das Teildreieck (2) ist. Das Dreieck ABD ist aus zwei dieser Teildreiecke zusammengesetzt. Also ist das Dreieck (2) halb so groß wie das Teildreieck (1).
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$.

(d)
- Es wurde schon gezeigt, dass $A_{(2)} = \frac{1}{2}A_{(1)}$ gilt.
  Die Dreiecke MPC (= Dreieck (D_1)), MCQ und Dreieck (3) sind kongruent.
  Also gilt $A_{(3)} = \frac{1}{2}A_{(2)}$.
  Am oben liegenden Quadrat mit der Seitenlänge $[DQ]$ erkennst du: $A_{(4)} = \frac{1}{2}A_{(3)}$ und die Dreiecke (4) und (D_2) sind kongruent.
  Insgesamt gilt: Jedes getönte Dreieck ist halb so groß wie sein Vorgänger. Jedes getönte Dreieck hat einen kongruenten Partner unter den Dreiecken (D_1),(D_2), $D_3)$, (D_4), ... Jedes der Dreiecke (D_1),(D_2), $D_3)$, (D_4), ... hat einen kongruenten Partner in den getönten.
- $A_{(4)} = A_{(3)} : 2 = A_{(2)} : 4 = A_{(1)} : 8 = \frac{1}{2}A_Q : 8 = \frac{1}{16}A_Q$.

(e)
- Aus der Zeichnung erkennst du: Alle Dreiecke von (1), (2) angefangen bis ins unendlich kleinste ergeben das vollständige Quadrat $ABCD$.
- Dann muss $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$ sein.
- $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots}_{=1}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

23.



Der Schweizer Künstler Eugen Jost hat ein Bild gemalt, in dem lauter ineinander geschachtelte Quadrate dargestellt sind. Das Bild oben verdeutlicht dies.

(a) Erkläre, wie Eugen Jost diese Quadrate zustande gebracht hat.

(b) Eine chinesische Spruchweisheit lautet: „Das Unendliche ist ein Quadrat ohne Ecken.“ Erkläre den Zusammenhang zwischen dieser Aussage und dem Bild.

(c) In der obigen Darstellung sind einige Dreiecke nochmals farbig herausgehoben, die sich im Uhrzeigersinn spiralförmig in das Zentrum Z des Quadrates hineinwinden. Die Spirale beginnt mit dem Dreieck AM_1M_2.
- Welche gemeinsame Besonderheiten weisen diese Dreiecke in der Spirale auf?
- Welchen Bruchteil des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Dreieck AM_1M_2 ein? Wie viel Prozent sind das?

- Begründe: Der Flächeninhalt des nächst kleineren Dreiecks PQM_2 ist halb so groß wie der des Dreiecks AM_1M_2. Betrachte dazu die gestrichelte Hilfslinie $[AP]$.

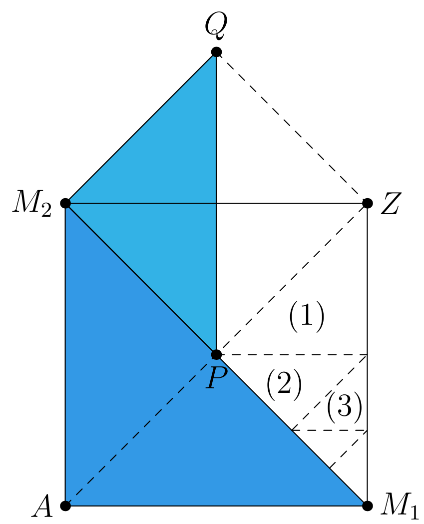
(d)
- Zeichne das Quadrat AM_1ZM_2 mit einer Seitenlänge von 4 cm.
  Übertrage das Dreieck PQM_2 in der richtigen Position.
  Begründe: Alle Dreiecke in der Spirale des Bildes lassen sich lückenlos in dem Quadrat AM_1ZM_2 unterbringen.
- Begründe: Der Flächeninhalt aller Dreiecke in der Spirale ergibt zusammen ein Viertel des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$.
- Was ergibt $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots$?

Lösung: (a) Die Seitenmittelpunkte des großen Quadrates $ABCD$ liefern ein Quadrat, das um 90° gedreht worden ist. Die Seitenmittelpunkte dieses Quadrates liefern wiederum ein kleineres Quadrat, dessen Seitenmittelpunkte erneut ein noch kleineres Quadrat erzeugen usw. Das Ganze „verschwindet“ schließlich im Zentrum der Figur.

(b) Die Eckpunkte der immer kleiner werdenden Quadrate rücken näher und näher zusammen, bis sie sich nicht mehr voneinander unterscheiden lassen. Somit entsteht im Unendlichen ein „Quadrat ohne Ecken“.

- Diese Dreiecke sind alle gleichschenklig-rechtwinklig.
- Das Dreieck AM_1M_2 nimmt $\frac{1}{8}$ des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ ein.
  $\frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$.
- Das Viereck $APQM_2$ ist ein Parallelogramm. Die Diagonale $[PM_2]$ zerlegt dieses Parallelogramm in zwei kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke.
  Die Strecke $[AP]$ zerlegt das Dreieck AM_1M_2 ebenfalls in zwei kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke.
  Also gilt: $A_{\Delta PQM_2} = \frac{1}{2} A_{\Delta AM_1M_2}$.

(c)
-



Das Viereck $PZQM_2$ ist ein Quadrat.
Das Dreieck PQM_2 lässt sich also mit dem Dreieck PZM_2 zur Deckung bringen.
Das Dreieck, das dem Dreieck PQM_2 unmittelbar in der Spirale folgt, ist zum Dreieck (1) kongruent. Sein Nachfolger in der Spirale deckt sich mit dem Dreieck (2), dessen Nachfolger in der Spirale deckt sich mit dem Dreieck (3) usw.
So wird das Dreieck PM_1Z nach und nach lückenlos mit Nachfolgern in der Spirale aufgefüllt.

- Mit allen Dreiecken aus der Spirale lässt sich das Quadrat AM_1ZM_2 lückenlos füllen. Dieses Quadrat bedeckt $\frac{1}{4}$ des Quadrates $ABCD$.
- $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1}{4}$.

24. Gib 10 Brüche an, die zwischen $\frac{7}{9}$ und $\frac{8}{9}$ liegen.

Lösung: Erweitere die beiden Brüche zunächst mit 10:

$$\frac{7}{9} = \frac{70}{90} \text{ und } \frac{8}{9} = \frac{80}{90}.$$

Das reicht nicht, denn du kannst im Moment nur 9 Büche aufschreiben, die **dazwischen** liegen, nämlich:

$$\frac{71}{90}; \ldots; \frac{79}{90}.$$

Erweitere also nochmals mit 10:

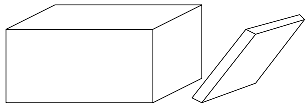
$$\frac{70}{90} = \frac{700}{900} \text{ und } \frac{80}{90} = \frac{800}{900}.$$

Nun könntest du bequem sogar 99 Brüche notieren, die dazwischen liegen.

25. Berechne:
   (a) Ein Drittel von $0,03$
   (b) Ein Viertel von $\frac{4}{100}$
   (c) Fünf Hundertstel von $0,2$

Lösung: (a) Ein Drittel von $0,03 = \frac{1}{3} \cdot 0,03 = 0,03 : 3 = 0,01$
(b) Ein Viertel von $\frac{4}{100} = \frac{1}{4} \cdot 0,04 = 0,04 : 4 = 0,01$
(c) Fünf Hundertstel von $0,2 = \frac{5}{100} \cdot 0,2 = \frac{1}{20} \cdot 0,2 = 0,2 : 20 = 0,01$

26.



Im altägyptischen „Papyrus Rhind“ (ca. 1650 v.Chr.) wird die Frage aufgeworfen, wie neun Brote auf zehn Personen gerecht aufgeteilt werden können.

(a) Egon meint: „Das ist doch nicht schwer; man muss halt $\frac{9}{10}$ eine jeden Brotes abmessen und dann alles verteilen.“ Edwin hat jedoch Einwände: „Dann bekäme am Ende eine Person ....“
Welches Problem hat Edwin erkannt?

(b) Die Alten Ägypter zerlegten $\frac{9}{10}$ in eine Summe aus verschiedenen Brüchen:

$$\frac{9}{10} = \bigcirc + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}$$

- Welcher Bruchteil muss an Stelle des Kreises eingesetzt werden?
- Angenommen, jedes der neun Brote hat die Form eines 30 cm langen Quaders.
  Wie würden solche Brote dann zerlegt? Hältst du diese Teilung für besser als den Vorschlag von Egon? Begründe deine Anwort.

Lösung: (a) Es bekämen neun Personen fast ein ganzes Brot, die zehnte Person aber erhielte neun einzelne Scheiben, die im Laufe der Zeit eher austrocknen als ein großes Stück Brot.

(b)
- $\frac{9}{10} = \frac{27}{30} = \bigcirc + \frac{6}{30} + \frac{1}{30} \qquad \frac{27}{30} = \bigcirc + \frac{7}{30}\,.$

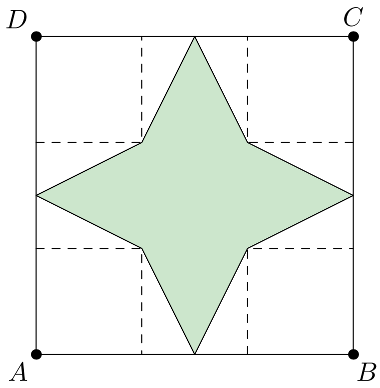
  $\bigcirc = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$
- Neun Personen bekämen jeweils folgende Brotabschnitte:

  $\frac{2}{3}$ von 30 cm + $\frac{1}{5}$ von 30 cm + $\frac{1}{30}$ von 30 cm =

  $20\,\text{cm} + 6\,\text{cm} + 1\,\text{cm} = 27\,\text{cm}\,.$

  Die zehnte Person bekommt neun Abschnitte, die jeweils 3 cm lang sind:
  $9 \cdot 3\,\text{cm} = 27\,\text{cm}\,.$
  Diese Aufteilung erfordert zunächst mehr Arbeit, weil jedes Brot nicht nur in zwei, sondern in vier Teile zerschnitten werden muss. Neun Personen bekommen dabei neben zwei größeren Stücken jeweils eine 1 cm dünne Scheibe. Die zehnte erhält lauter gleiche Abschnitte, die jeweils 3 cm lang sind. Diese Aufteilung scheint etwas gerechter zu sein.

27.

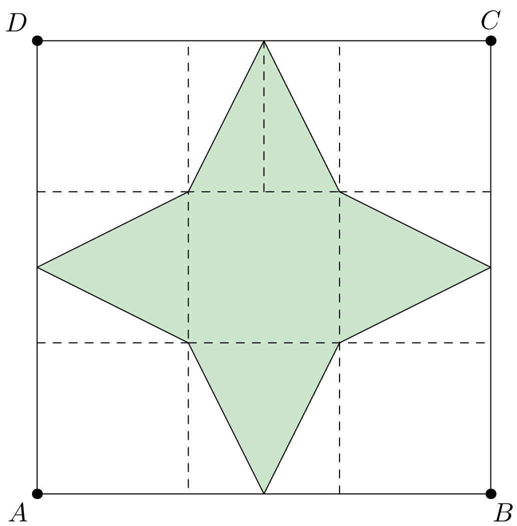


Jede Seite des Quadrates $ABCD$ ist in drei gleiche Teile geteilt worden. Dadurch ist der symmetrische vierzackige Stern entstanden.

(a) Zeichne den Stern in ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm.

(b) Welchen Bruchteil der Quadratfläche nimmt der Stern ein?

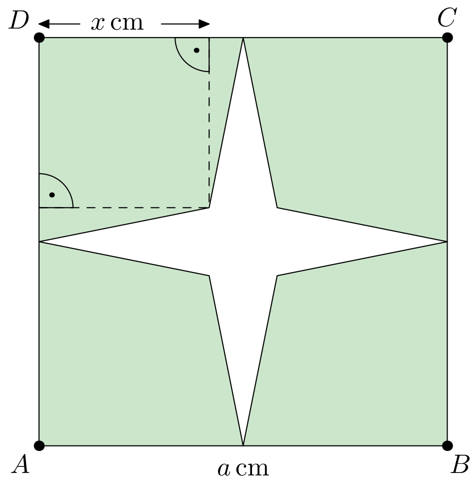
Lösung: (a)



(b) Das Quadrat $ABCD$ fügt sich aus neun gleich großen gestrichelten Quadraten zusammen.Also bedeckt eines dieser kleinen Quadrate $\frac{1}{9}$ der Fläche des großen Quadrates $ABCD$.
Das kleine Quadrat oben in der Mitte wird in zwei kongruente Rechtecke geteilt. Der Rand des Sterns teilt dort jedes dieser Rechtecke in zwei gleiche Hälften. Also nimmt die Sternspitze im obigen kleinen Quadrat gerade dessen halbe Fläche ein. Die vier Sternspitzen sind also genau so groß wie zwei kleine Quadrate.
Das Zentrum des Sterns ist wiederum ein kleines Quadrat.
Somit ist der Stern genauso groß wie drei kleine gestrichelte Quadrate.

$$A_{Stern} = \frac{3}{9} \cdot A_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABCD} \,.$$

28.

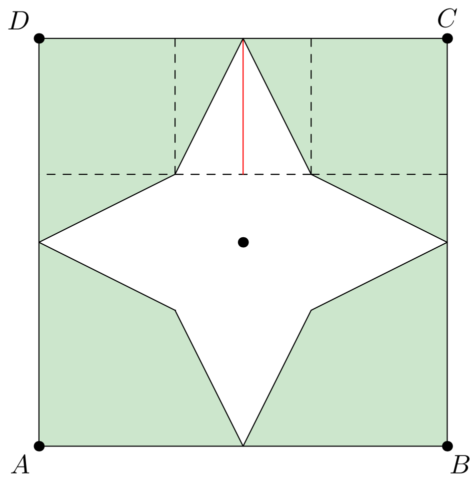


Der Stern in der Mitte entsteht, wenn du wie am Punkt D gezeigt, auch anden drei anderen Eckpunkten ein Qadrat mit den gestrichelten Hilfslinien einzeichnest.

(a) Zeichne für $x = 2$ den Stern in ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 6 cm.

(b) Welchen Bruchteil der Quadratfläche nimmt der Stern ein?

Lösung: (a)



(b) Das Quadrat $ABCD$ fügt sich aus neun gleich großen gestrichelten Quadraten zusammen.Also bedeckt eines dieser kleinen Quadrate $\frac{1}{9}$ der Fläche des großen Quadrates $ABCD$.
Das kleine Quadrat oben in der Mitte wird in zwei kongruente Rechtecke geteilt. Der Rand des Sterns teilt dort jedes dieser Rechtecke in zwei gleiche Hälften. Also nimmt die Sternspitze im obigen kleinen Quadrat gerade dessen halbe Fläche ein. Die vier Sternspitzen sind also genau so groß wie zwei kleine Quadrate.
Das Zentrum des Sterns ist wiederum ein kleines Quadrat.
Somit ist der Stern genauso groß wie drei kleine gestrichelte Quadrate.

$$A_{Stern} = \frac{3}{9} \cdot A_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABCD} \,.$$

29. Dr. Stuart Savory hat eine Regel veröffentlicht, wie man überprüfen kann, ob eine natürliche Zahl (z.B. 1295) durch 7 teilbar ist:

- Streiche die letzte Ziffer (im Beispiel die „5“, das ergibt 129).
- Subtrahiere das Doppelte der gestrichenen Zahl von der Restzahl: $129 - 2 \cdot 5 = 119$.
- Wenn 119 durch 7 teilbar ist dann ist auch 1295 durch 7 teilbar. Das ist hier der Fall.
- Wenn du nicht mit einer gewöhnlichen Division ausrechenen willst, ob 119 durch 7 teilbar ist, kannst du jetzt das Experiment wiederholen:
  $11 - 2 \cdot 9 = 11 - 18 = -7$ und $\mid -7 \mid = 7$ ist durch 7 teilbar. (Für negative Zahlen ist die Division durch 7 kaum in Gebrauch; daher die Betragsstriche.)

(a) Überprüfe mit dieser Regel die folgenden Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 7: 1386; 1814; 4648; 4873; 5096; 4473; 44 730 und schließlich 1 000 007.
Für die beiden letzten Zahlen kannst du auch ohne die Regel eine Entscheidung treffen.

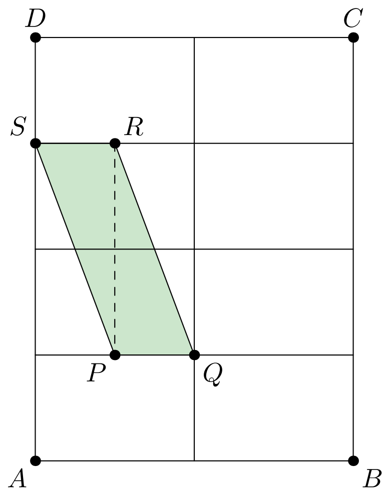
(b) Diese Teilbarkeitsregel von Dr. Savory zu lernen, ist im Schullehrplan nicht vorgesehen. Welchen Grund könnte das haben? Formuliere eine Antwort.

Lösung: (a) 1386: Ja.
1814: Nein.
4648: Ja.
4873: Nein.
5096: Ja.
4473: Ja.
44 730: Ja. Klar, denn, wenn 4473 durch 7 teilbar ist, dann ist es auch 44 730.

1 000 007: Nein. Nur, wenn 1 000 00 durch 7 teilbar wäre, dann wäre es auch 1 000 007. Aber 1 000 00 ist wegen der sechs Nullen am Ende nicht durch 7 teilbar. Also ist es auch 1 000 007 nicht.

(b) Diese Teilbarkeitsregel ist in den allermeisten Fällen umständlich zu handhaben. Meist kommt man durch direktes Dividieren genauso schnell oder sogar schneller, wie das Beispiel 1 000 007 zeigt, zum Ziel.

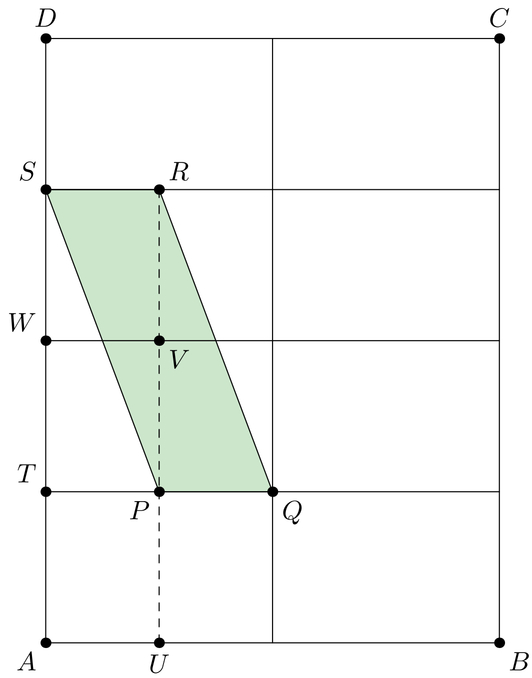
30.



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 8\,\text{cm}$.

(b) Welchen Bruchteil der Fläche des Rechtecks $ABCD$ nimmt das Viereck $PQRS$ ein?

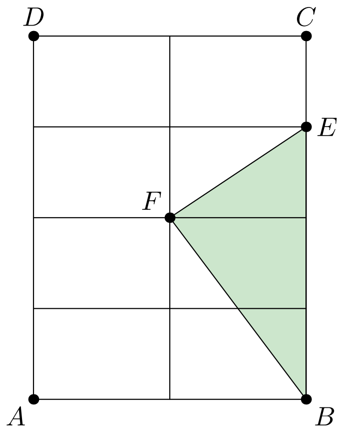
Lösung: (a)



(b) Das Rechteck $TPRS$ hat den gleichen Flächeninhalt wie das Viereck $PQRS$ (Übrigens: Das Viereck $PQRS$ heißt „Parallelogramm".)
Das Viereck $PQRS$ wiederum hat den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck $AUVW$.
In das Rechteck $ABCD$ passt das Viereck $AUVW$ 8-mal hinein. Also gilt:

$$\frac{A_{AUVW}}{A_{ABCD}} = \frac{1}{8} = \frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}}\,.$$

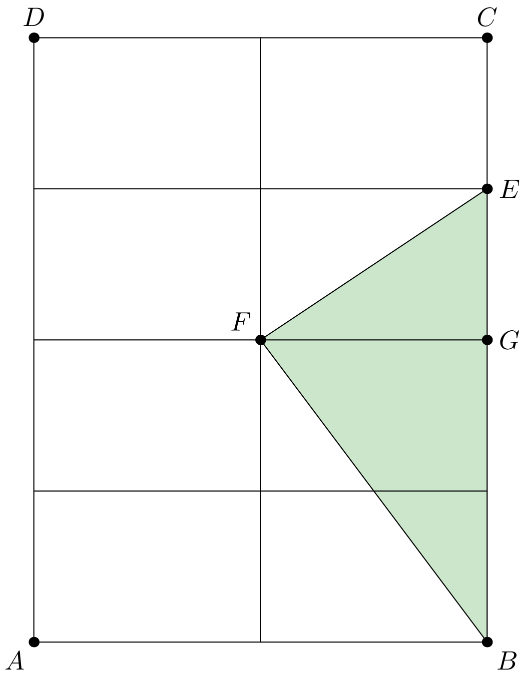
31.



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 8\,\text{cm}$.

(b) Wie viel Prozent der Fläche des Rechtecks $ABCD$ nimmt das Dreieck BEF ein?

Lösung: (a)



(b) Das Rechteck $ABCD$ setzt sich aus acht kleinen kongruenten Rechtecken zusammen. Das Dreieck FGE ist halb so groß wie eines dieser kleinen Rechtecke. Also nimmt das Dreieck FGE $\frac{1}{16}$ der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ein.
Das Dreieck BGF wiederum nimmt die Hälfte von zwei dieser kleinen Rechtecke ein.Also nimmt das Dreieck BGF $\frac{1}{8}$ der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ein.
Daraus folgt::

$$\frac{A_{BEF}}{A_{ABCD}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16} = 0{,}1875 = 18{,}75\,\%\,.$$

32. Gegeben ist die Menge M von unmittelbar aufeinander folgenden Stammbrüchen:

$$M = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \ldots\right\}$$

(a) Berechne:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} =$

(b)
- Notiere eine Regel, die beschreibt, wie du den Nenner des Ergebnisses berechnest.
- Notiere eine Regel, die beschreibt, wie du den Zähler des Ergebnisses berechnest.

(c) Stelle $\frac{31}{240}$ als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender Stammbrüche dar.

(d) Untersuche, ob sich $\frac{293}{21467}$ als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender Stammbrüche darstellen lässt.

(e) Begründe, weshalb sich $\frac{123008}{3782742016}$ nicht als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender Stammbrüche darstellen lässt.

Lösung: (a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{4 \cdot 3} = \frac{7}{12}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5+4}{5 \cdot 4} = \frac{9}{20}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6+5}{6 \cdot 5} = \frac{11}{30}$

(b)
- Der Nenner des Ergebnisses ist das Produkt aus den Nennern der beiden Stammbrüche.

- Der Zähler des Ergebnisses ist die Summe aus den Nennern der beiden Stammbrüche.

(c) Es gilt $31 = 15 + 16$ und $16 \cdot 15 = 240$. Also folgt $\dfrac{31}{240} = \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{16}$.

(d) Der Zähler 293 lässt sich nur auf eine Weise als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender natürlicher Zahlen darstellen: $293 = 146 + 147$. 146 und 147 müssen gleichzeitig die beiden gesuchten Nenner der Stammbrüche sein, deren Produkt 21467 ergeben müsste.
Es gilt jedoch $146 \cdot 147 = 21462 \neq 21467$. Die Darstellung als Summe zweier solcher Stammbrüche ist also nicht möglich.

(e) Der Zähler 123008 müsste sich als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender natürlicher Zahlen darstellen lassen. Von zwei unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen muss eine ungerade und die andere gerade sein. Die Summe aus einer geraden und ungeraden natürlichen Zahl ist aber stets ungerade. Der Zähler 123008 ist jedoch eine gerade Zahl. Die Darstellung als Summe zweier solcher Stammbrüche ist also nicht möglich.

3 Dezimalbrüche

1. Es gilt z.B. $0,\overline{2} = \frac{2}{9}$, $0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ und $0,\overline{7} = \frac{7}{9}$.
   Nun wird die folgende Summe gebildet: $1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \cdots$.

   (a) Schreibe die drei Nachfolger des Summanden 0,001 hin. Beschreibe, wie sich die Summe aufbaut.

   (b) Berechne den Wert der obigen Summe.

   (c) Berechne den Wert der Summe $3 - 0,2 - 0,02 - 0,002 - \cdots$

Lösung: (a) $\cdots 0,0001;\ 0,00001;\ 0,000001;\ \cdots$ (b) $\frac{10}{9}$ (c) $\frac{25}{9}$

2. Bereche den Wert der Differenz $1 - 0,\overline{9}$.

Lösung: Es ergibt sich der Wert 0, denn es kämen „unendlich viele“ Nullen und „dann“ die 1.

3. Berechne: (a) $(2,3^2 - 1,7^2) : 0,6$ (b) $(3,1^2 - 0,6^2) : 2,5$
   (c) $(4,7^2 - 1,2^2) : 5,9$ (d) $(5,3^2 - 1,9^2) : 7,2$
   Was stellst du fest? Schreibe es auf.

Lösung: (a) $4 = 2,3 + 1,7$ (b) $3,7 = 3,1 + 0,6$
(c) $3,5 = 4,7 - 1,2$ (d) $3,4 = 5,3 - 1,9$
Es ergibt sich stets die Summe oder die Differenz der beiden Basiszahlen in der jeweiligen Klammer.

4. Herr G. Wicht ist 120 kg schwer. Er beginnt am 1. Oktober eine radikale Abmagerungskur.

   (a) Am 1. November hat er 15% seines Körpergewichts verloren. Wie schwer ist er jetzt?

   (b) Bis zum 1. Dezember verliert er erneut 15% an Gewicht. Wie schwer ist er zu diesem Zeitpunkt?

   (c) Im Januar jedoch - nach den vielen Feiertagen - zeigt die Waage wieder 120 kg an! Um wie viel Prozent hat er in den beiden vergangenen Monaten wieder zugenommen? Runde auf eine Kommastelle.

Lösung: (a) 102 kg (b) 86,7 kg (c) $36,4\%$

5. Herr R. Asant startet um 8 Uhr mit seinem Auto von Nürnberg zum 450 km entfernten Düsseldorf. Er will dort um 13 Uhr ankommen. Leider erreichte Herr Asant aufgrund eines Staus bis zum 225 km entfernten Frankfurt nur die Hälfte der erforderlichen Durchschnittsgeschwindigkeit.
Um wie viel müsste er seine Durchschnittsgeschwindigkeit von Frankfurt nach Düsseldorf steigern, um die ursprünglich errechnete Durchschnittsgeschwindigkeit doch noch zu erreichen?

Lösung:

geplant:	Nürnberg - Düsseldorf	$v_0 = \frac{450km}{5h} = 90\,\frac{km}{h}$
tatsächlich:	Nürnberg - Frankfurt	$\overline{v_1} = 45\,\frac{km}{h} \Rightarrow t_1 = \frac{225km}{45\frac{km}{h}=} = 5h$

Das bedeutet, dass Herr Asant erst um 13 Uhr in Frankfurt ist.
Damit ist jedoch keine Zeit mehr übrig, um so nach Düsseldorf zu gelangen, dass 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ im gesamten Durchschnitt erreicht werden.

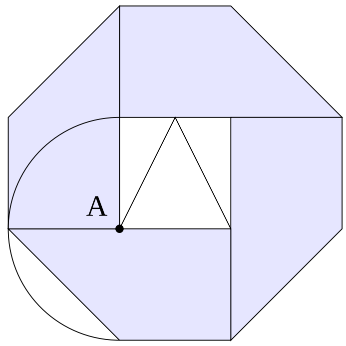
6. Berechne jeweils den Wert der Summe in jeder Einheit, die in der Summe auftaucht.
   (a) $0,5\,\text{m} - 3,0\,\text{dm} + 13,2\,\text{cm}$
   (b) $0,45\,\text{m}^2 - 4\,\text{dm}^2 - 250\,\text{cm}^2$
   (c) $\frac{1}{5}\,\text{h} + 45\,\text{min} + 120\,\text{s}$

Lösung: (a) 0,932 m = 9,32 dm = 93,2 cm
(b) $0,515\,\text{m}^2 = 51,5\,\text{dm}^2 = 5150\,\text{cm}^2$
(c) $\frac{59}{60}$ h = 59 min = 3540 s

7. Wasser vergrößert sein Volumen beim Gefrieren um 10%.
   (a) Berechne das Volumen des Eises, das dann aus 1 Liter Wasser entstanden ist.
   (b) Wie viele Liter Wasser entstehen, wenn $5\frac{1}{2}\,\text{dm}^3$ Eis geschmolzen sind?

Lösung: (a) 1,1 Liter (b) 5 Liter

8. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Der Halbkreis mit dem Mittelpunkt A und das Dreieck im Inneren des weißen Quadrates wurden zusätzlich eingezeichnet.



(a) Begründe: Wenn der Flächeninhalt dieses Dreiecks $4,5\,\text{cm}^2$ beträgt, muss eine Seite des mittleren Quadrates 3 cm lang sein.

(b) Zeichne die Figur mit dieser 3 cm langen Quadratseite.

(c) Welchen Bruchteil der Gesamtfläche nimmt das Dreieck im Zentrum ein?

(d) Schneide von einem Quadrat aus Papier mit der Seitenlänge 9 cm die vier Ecken so ab, dass der Umriss dieses Logos entsteht.
Klebe die Figur in dein Heft.

- Wie viel Prozent des ursprünglichen Papierquadrates sind weggefallen?
- Begründe: Das Quadrat im Inneren hat einen Umfang von 12 cm.

Lösung: (a) Weil das Dreieck halb so groß wie das Quadrat ist, beträgt der Flächeninhalt des Quadrates $9\,\text{cm}^2$. Das hängt nicht davon ab, ob die Spitze dieses Dreiecks genau in der Mitte der oberen Quadratseite liegt. Eine Quadratseite ist demnach 3 cm lang.

(b) –

(c) Das Logo setzt sich aus 5 ganzen und vier halben Quadraten zusammen, deren Flächeninhalt insgesamt $63\,\text{cm}^2$ beträgt. Anteil des mittleren Dreiecks an de Gesamtfläche: $\frac{4,5\,\text{cm}^2}{63\,\text{cm}^2} = \frac{1}{14}$

(d) Es fallen zwei Quadrate mit einer Seitenlänge von je 3 cm weg.
Abfall: $\frac{18\,\text{cm}^2}{81\,\text{cm}^2} = \frac{2}{9} \approx 22,22\%$.
Es sind vier gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit einer Kathetenlänge von je 3 cm abgeschnitten worden. Also bleibt in der Mitte ein Quadrat von $9\,\text{cm} - 2 \cdot 3\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$ übrig. Sein Umfang beträgt damit 12 cm.

9. Erika möchte ihre Superstarsammlung erweitern. Dazu kauft sie einige Poster, 3 CDs, 48 Aufkleber und eine DVD. Insgesamt bezahlt sie 94, 13 €.
Folgende Preise sind bekannt: ein Aufkleber kostet 39 ct, die drei CDs kosten 19, 99 € und die DVD 44, 50 €.

(a) Wie viele Poster kauft sie, wenn eines 91 ct kostet?

(b) Auf einem Aufkleber ist Daniel 140 mm groß. Er ist im Maßstab 1 : 12 abgebildet. Wie groß ist er in Wirklichkeit? (Ergebnis in Komma-Schreibweise!)

Lösung: (a) Sie kauft 12 Poster.

(b) Daniel ist in Wirklichkeit $1,68\,\text{m}$ groß.

10.

$$\frac{\square}{7} \cdot 2\frac{1}{3} = \triangle$$

Die Platzhalter $\square$ und $\triangle$ vertreten natürliche Zahlen.

(a) Berechne $\square$ für $\triangle = 337$.

(b) Berechne $\triangle$ für $\square = 111$.

(c) Uwe behauptet: „Wenn du für den Platzhalter $\square$ ein Vielfaches von 7 einsetzt, geht die Rechnung immer auf.“
Eva widerspricht: „Nur, wenn du für den Platzhalter $\square$ eine durch ... teilbare Zahl einsetzt, geht die Rechnung auf.“

- Begründe, dass Uwe nicht recht hat.
- Was hat Eva gemeint? Begründe, dass sie recht hat.

Lösung: (a) $\frac{\square}{7} \cdot 2\frac{1}{3} = 357 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\square}{7} \cdot \frac{7}{3} = 357 \quad \Leftrightarrow \quad \square = 357 \cdot 3 = 1071$

(b) $\frac{111}{7} \cdot \frac{7}{3} = \triangle \quad \Leftrightarrow \quad \triangle = 37$

(c)

- Beispiel: $\square = 35$.

  $$\frac{35}{7} \cdot 2\frac{1}{3} = 5 \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{3} = \triangle.$$

  Weil aber $\triangle$ eine natürliche Zahl sein soll, ist damit Uwes Behauptung widerlegt.

- $\frac{\square}{7} \cdot \frac{7}{3} = \triangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\square}{3} = \triangle$

  Also musst du für den Platzhalter $\square$ eine durch drei teilbare Zahl einsetzen. Dann kommt links und damit auch für den Platzhalter $\triangle$ immer eine natürliche Zahl heraus. Dehalb hat Eva recht.

11. Im Vorverkauf für ein Open-Air-Festival in einem Stadion mit 20 000 Plätzen wurden 12 000 Eintrittskarten abgesetzt. Während der Veranstaltung war das Stadion zu 90% besetzt.
Berechne die Gesamteinnahmen, wenn eine Karte im Vorverkauf für 20 € und an der Stadionkasse für 25 € zu haben war.

Lösung: 12 000 Zusachuer bezahlten je 20 €. Das sind insgesamt 240 000 €.
90% von 20 000 Plätzen sind $0,9 \cdot 20\,000 = 18\,000$ Zuschauer.
Also haben $18\,000 - 12\,000 = 6\,000$ Zuschauer ihre Karte an der Stadionkasse gekauft.
Somit kommen $6\,000 \cdot 25$ €= 1500 000 € an Einnahmen noch hinzu.
Insgesamt wurden also 240 000 € + 150 000 €= 390 000 € eingenommen.

12. Der Anglerverein „Petri Heil“ hat 120 Mitglieder. 75% davon sind Erwachsene. Dem Verein treten 10 Männer und 5 Jugendliche neu bei.
    (a) Wie viele Jugendliche sind danach im Verein?
    (b) Wie viel Prozent Erwachsene sind danach im Verein? Runde den Prozentsatz auf eine Stelle nach dem Komma.

Lösung: (a) Zahl der Erwachsenen vorher: 75% von $120 = 90$.
Zahl der Jugendlichen vorher: $120 - 90 = 30$.

(b) Zahl der Erwachsenen nachher: $90 + 10 = 100$.
Zahl der Jugendlichen nachher: $30 + 5 = 35$.
Gesamtzahl der Vereinsmitglieder nachher: $100 + 35 = 135$.

$$\frac{100}{135} \approx 0,741 = 74,1\%.$$

13. Gib 10 Brüche an, die zwischen $\frac{7}{9}$ und $\frac{8}{9}$ liegen.

Lösung: Erweitere die beiden Brüche zunächst mit 10:

$$\frac{7}{9} = \frac{70}{90} \text{ und } \frac{8}{9} = \frac{80}{90}.$$

Das reicht nicht, denn du kannst im Moment nur 9 Büche aufschreiben, die **dazwischen** liegen, nämlich:

$$\frac{71}{90}; \ldots; \frac{79}{90}.$$

Erweitere also nochmals mit 10:

$$\frac{70}{90} = \frac{700}{900} \text{ und } \frac{80}{90} = \frac{800}{900}.$$

Nun könntest du bequem sogar 99 Brüche notieren, die dazwischen liegen.

14. Berechne:

(a) Ein Drittel von $0,03$

(b) Ein Viertel von $\frac{4}{100}$

(c) Fünf Hundertstel von $0,2$

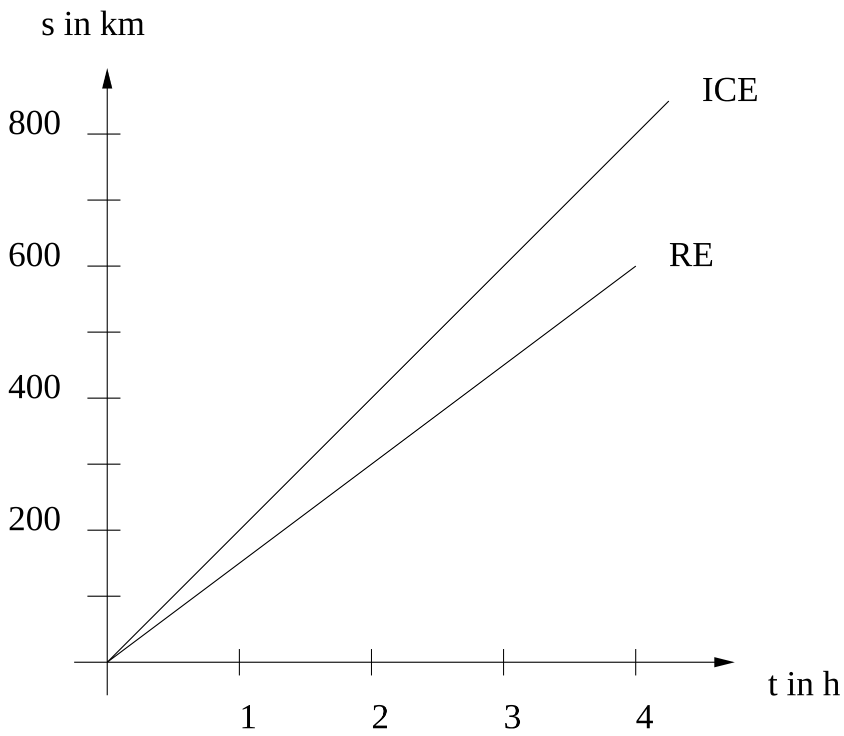
Lösung: (a) Ein Drittel von $0,03 = \frac{1}{3} \cdot 0,03 = 0,03 : 3 = 0,01$

(b) Ein Viertel von $\frac{4}{100} = \frac{1}{4} \cdot 0,04 = 0,04 : 4 = 0,01$

(c) Fünf Hundertstel von $0,2 = \frac{5}{100} \cdot 0,2 = \frac{1}{20} \cdot 0,2 = 0,2 : 20 = 0,01$

4 Direkte Proportionalität

1. Folgende direktproportionale Zuordnung ist gegeben:



   (a) Lies aus dem Diagramm ab, wie weit ICE und RE jeweils in 2 h fahren.

   (b) Berechne den Proportionalitätsfaktor für ICE und RE! Was bedeutet er?

   (c) Eine Regionalbahn fährt in 4 h 300 km. Trage diese Halbgerade ein!

Lösung: (a) ICE: 400 km in 2 h
RE: 300 km in 2 h

(b) ICE: $k = 200$ km in 1 h
RE: $k = 150$ km in 1 h

(c) - -

2. Überprüfe, ob jeweils eine direkte proportionale Zuordnung vorliegt und begründe kurz.

(a)

Verbrauch in l	Strecke in km
4,25	70
12,75	210

(b)

Stückzahl	Preis in €
2	1,60
4	3,20
10	7,20

(c)

Menge in kg	Preis in €
2,5	10,0
0,5	2,5

Lösung: (a) Direkt proportional, da gleicher Faktor.

(b) Nicht direkt proportional, da $1,6 \cdot 5 = 8$ ist.

(c) Nicht direkt proportional, da unterschiedliche Divisoren.

3. Die folgende Wertetabelle enthält direktproportionale Wertepaare. Berechne die fehlenden Werte und trage die Wertepaare in ein Gitternetz ein!

Menge in l	4	6	8	
Preis in €	6			16,5

x-Achse: 1 cm $\widehat{=}$ 2 l
y-Achse: 1 cm $\widehat{=}$ 2 €

Lösung:

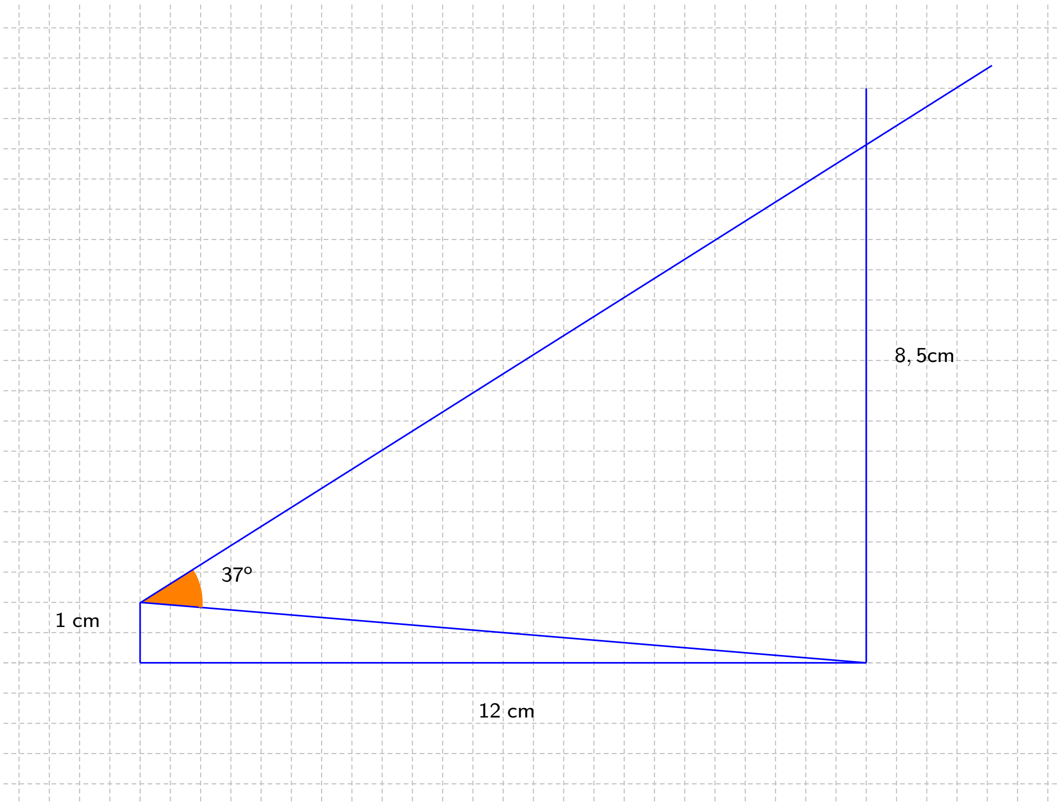
Menge in l	4	6	8	11
Preis in €	6	9	12	16,5

4. Im Urlaub fährt Sabine mit ihren Eltern nach Griechenland. Dort sieht sie eine Statue unter einem Winkel von 37° und ist 18 m von ihr entfernt. Sabine ist $1,50$ cm groß.

   (a) Fertige eine Skizze im Maßstab 1 : 150 an.

   (b) Wie groß ist die Statue in Wirklichkeit?

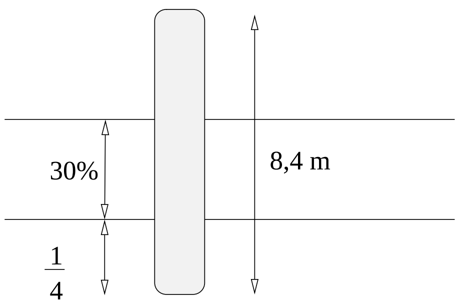
Lösung:



Sabine: $150\,\mathrm{cm} : 150 = 1\,\mathrm{cm}$
Abstand zur Statue: $1800\,\mathrm{cm} : 150 = 12\,\mathrm{cm}$

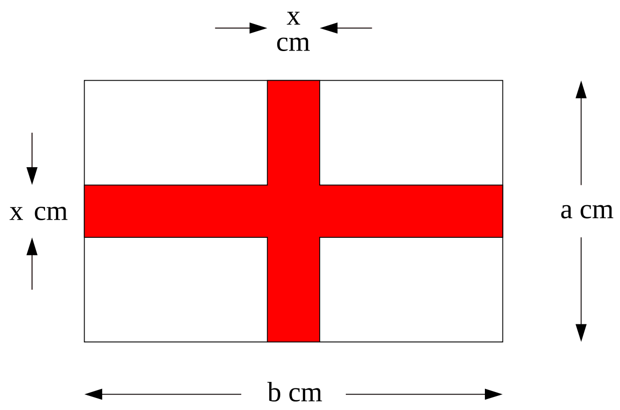
(b) Statue in Wirklichkeit: $8,5\,\mathrm{cm} \cdot 150 = 1275\,\mathrm{cm} = 12,75\,\mathrm{m}$

5. Ein $8,4\,\mathrm{m}$ langer Pfahl steckt zu $\frac{1}{4}$ im Boden und zu $30\,\%$ im Wasser. Fertige eine Skizze mit den gegebenen Daten an und berechne wie viele Meter aus dem Wasser herausragen?



Lösung: $3,78\,\mathrm{m}$

6. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



(a) Zeichne die Figur für $b = 8$, $a = 5$ und $x = 1$.

(b) Diese Fahne ist aus Tuch gefertigt worden, die $5,40\,\mathrm{m}$ lang und $3,00\,\mathrm{m}$ breit ist.

- Berechne den Flächeninhalt eines der weißen Rechtecke im Inneren, wenn das Kreuz $\frac{2}{9}$ der Gesamtfläche einnimmt.
- Berechne den Flächeninhalt des Kreuzes, wenn eines der weißen Rechtecke im Inneren 20% der Gesamtfläche der Fahne einnimmt.

Lösung:

(a) –

(b)
- Der Flächeninhalt der Fahne beträgt $16,20\,\mathrm{m}^2$. Die vier Rechtecke nehmen zusammen $1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ der Fahnenfläche ein.

$$\frac{7}{9} \text{ von } 16,20\,\mathrm{m}^2 = 12,60\,\mathrm{m}^2.$$

  Dann besitzt ein Rechteck im Inneren eine Fläche von $3,15\,\mathrm{m}^2$.
- Das Kreuz nimmt dann $100\% - 4 \cdot 20\% = 20\%$ der Gesamtfläche der Fahne ein; d.h. es ist genauso groß wie jedes der 4 Rechtecke.
  Also: $16,20\,\mathrm{m}^2 : 5 = 3,24\,\mathrm{m}^2$ beträgt die Fläche des Kreuzes.

5 Die Menge der ganzen Zahlen

1. Gib genau 100 ganze Zahlen an, die kleiner als 5 sind. Setze dabei die drei Punkte sinnvoll ein.

Lösung: z.B. $\{4; 3; 2; 1; 0; -1; \ldots; -95\}$ oder $\{-1000; -1001; \ldots; -1099\}$

2. Wie viele negative ganze Zahlen gibt es, die nicht kleiner als -10 sind? Begründe deine Antwort.

Lösung: 10

3. Herr Piepaga hat für seine Zoohandlung Zwergmäuse zu je 3 € und Goldhamster zu je 5 € eingekauft. Insgesamt hat er dafür 54 € ausgegeben.
   (a) Stelle zum Text die passende Gleichung auf. Dabei soll z der Einzelpreis für eine Zwergmaus und g der Einzelpreis für einen Goldhamster sein.
   (b) Zeige, dass sich die Gleichung von Aufgabe (a) in die Gleichung $g = \dfrac{54 - 3z}{5}$ umformen lässt.
   (c) Wie viele Zwergmäuse und wie viele Goldhamster hat Herr Piepaga eingekauft? Es gibt mehrere Möglichkeiten.

Lösung: (a) $3 \cdot z + 5 \cdot g = 54$

(b) $3 \cdot z + 5 \cdot g = 54 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \cdot g = 54 - 3z \;|:5 \quad \Leftrightarrow \quad g = \dfrac{54 - 3z}{5}$

(c) Angenommen, es ist $z = 1$ (eine Zwergmaus): $\Rightarrow \quad g = \dfrac{54 - 3 \cdot 1}{5} = \dfrac{51}{5}$ (†).

Weil die gesuchte Anzahl der Goldhamster ganz sein muss, hat Herr Piepaga mehr als eine Zwergmaus gekauft.
Auch für $z \in \{2; 3; 4; \ldots; 7\}$ gibt es keine passende Zahl von Goldhamstern.

Für $z = 8$ folgt dagegen: $g = \dfrac{54 - 3 \cdot 8}{5} = \dfrac{30}{5} = 6$.

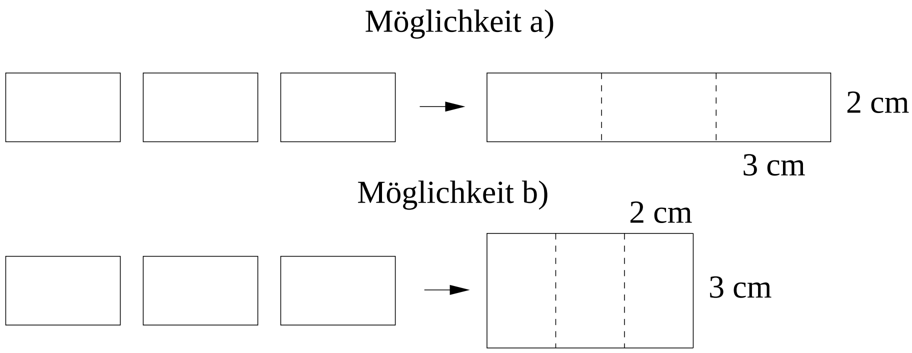
Herr Piepaga könnte also 8 Zwergmäuse und 6 Goldhamster gekauft haben.
Es gibt jedoch für $z = 13$ noch eine Lösung:

$$g = \frac{54 - 3 \cdot 13}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Es könnten also auch 13 Zwergmäuse und 3 Goldhamster gewesen sein.
Anregungen:

- Was wäre, wenn Herr Piepaga 18 Zwergmäuse gekauft hätte? Würde dieser Fall zu einer dritten Lösung führen?
- Begründe, dass es nicht mehr als die obigen beiden Möglichkeiten gibt.

4.



Die Abbildung zeigt, wie du auf verschiedene Weise drei kongruente Rechtecke mit einer Länge von jeweils 3 cm und einer Breite von jeweils 2 cm zu einem größeren Rechteck zusammenfügen kannst.

(a) Berechne den Umfang des großen Rechtecks in der Möglichkeit a) und in der Möglichkeit b).

(b) Es entstehen nach der Möglichkeit a) und der Möglichkeit b) noch größere Rechtecke, wenn du 17 kongruente kleine Rechtecke mit denselben Abmessungen wie oben dargestellt aneinander fügst. Berechne für a) und b) den Umfang des betreffenden großen Rechtecks.

(c)
- Zeige: Wenn mit Hilfe der Möglichkeit a) x Rechtecke zusammengefügt werden, dann gilt für den Umfang u des betreffenden großen Rechtecks in Abhängikeit von x:
$$u_a(x) = (6 \cdot x + 4)\,\text{cm mit } x \in \mathbb{N}$$
- Zeige: Wenn mit Hilfe der Möglichkeit b) y Rechtecke zusammengefügt werden, dann gilt für den Umfang u des betreffenden großen Rechtecks in Abhängikeit von y:
$$u_b(y) = (4 \cdot y + 6)\,\text{cm mit } y \in \mathbb{N}$$

(d) Berechne die Anzahl x von kleinen Rechtecken, die sich nach der Möglichkeit a) zu einem großen Rechteck mit einem Umfang von 292 cm zusammenfügen lassen.

(e) Gibt es eine Anzahl y von kleinen Rechtecken, die sich nach der Möglichkeit b) zu einem großen Rechteck mit einem Umfang von $5,36\,\text{m}$ zusammenfügen lassen? Begründe.

(f) Kannst du nach irgend einer Möglichkeit a) oder b) aus kleinen Rechtecken ein Rechteck mit einem Umfang von $12345\,\text{cm}$ zusammenfügen? Begründe.

(g) Tabellarisiere u_a und u_b so weit, bis mindestens fünf gemeinsame Umfangslängen auftauchen.
Entnimm der Tabelle diese Umfangslängen und die Zahl der benötigten Rechtecke im Fall a) und im Fall b).

(h) Begründe, dass du beliebig viele gemeinsame Umfangslängen mit der Methode a) und mit der Methode b) erzeugen kannst.

Lösung: (a) Möglichkeit a):
Die Längsseite taucht 6-mal und die Breitseite taucht 2-mal auf. Also beträgt der Umfang des großen Rechtecks $6 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 2\,\text{cm} = 22\,\text{cm}$.
Möglichkeit b):
Die Längsseite taucht 2-mal und die Breitseite taucht 6-mal auf. Also beträgt der Umfang des großen Rechtecks $2 \cdot 3\,\text{cm} + 6 \cdot 2\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$.

(b) Möglichkeit a):
Die Längsseite taucht jetzt 34-mal und die Breitseite taucht nach wie vor nur 2-mal auf. Also beträgt der Umfang des großen Rechtecks
$34 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 2\,\text{cm} = 106\,\text{cm}$.
Möglichkeit b):
Jetzt taucht die Breitseite 34-mal auf, und die Längsseite taucht nur 2-mal auf. Also beträgt der Umfang des großen Rechtecks
$34 \cdot 2\,\text{cm} + 2 \cdot 3\,\text{cm} = 74\,\text{cm}$.

(c)
- Jede $3\,\text{cm}$ lange Längsseite taucht doppelt auf. Wenn x Rechtecke aneinander gefügt werden, tragen somit alle Längsseiten mit $2 \cdot 3\,\text{cm} \cdot x = 6x\,\text{cm}$ zum Umfang bei. Hinzu kommen noch 2 Breitseiten zu je $2\,\text{cm}$, also zusammen $4\,\text{cm}$. Damit ergibt sich: $u_a(x) = (6 \cdot x + 4)\,\text{cm}$.
- Jede $2\,\text{cm}$ lange Breitseite taucht doppelt auf. Wenn y Rechtecke aneinander gefügt werden, tragen somit alle Breitseiten mit $2 \cdot 2\,\text{cm} \cdot y = 4y\,\text{cm}$ zum Umfang bei. Hinzu kommen noch 2 Längsseiten zu je $3\,\text{cm}$, also zusammen $6\,\text{cm}$. Damit ergibt sich: $u_b(y) = (4 \cdot y + 6)\,\text{cm}$.

(d) Es gilt: $6 \cdot x + 4 = 292 \quad \Leftrightarrow \quad x = 48$. Es müssen 48 kleine Rechtecke aneinander gefügt werden.

(e) Es müsste gelten: $4 \cdot y + 6 = 536 \quad \Leftrightarrow \quad y = 132,5 \notin \mathbb{N}$.
Weil y eine **Anzahl** darstellt, geht mit der Möglichkeit b) nichts.

(f) Für die Maßzahl von u_a gilt: $6x + 4 = 2 \cdot (3x + 2)$. Diese Maßzahl ist also immer **gerade**.
Für die Maßzahl von u_b gilt: $4y + 6 = 2 \cdot (2y + 3)$. Auch diese Maßzahl ist immer **gerade**.
Die Maßzahl 12345 ist aber **ungerade**. Ein Zusammenfügen mit diesem Ergebnis ist also nicht möglich.

(g)

Anzahl x	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$6x + 4$	**10**	16	**22**	28	**34**	40	**46**	52	**58**	64	**70**	76	**82**
Anzahl y	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$4y + 6$	**10**	14	18	**22**	26	30	**34**	38	42	**46**	50	54	**58**

Bei einem einzigen Rechteck liefern natürlich beide „Möglichkeiten“ identische Ergebnisse.
Fügst du nach a) 3 oder nach b) 4 Rechtecke zusammen, dann ergibt sich ein gemeinsamer Umfang von 22 cm.
Ebenso liefern mit a) 5 Rechtecke und mit b) 7 Rechtecke den gemeinsamen Umfang von 34 cm usw.

(h) Der Tabelle kannst du entnehmen, dass der x-Wert von der Zahl 1 ausgehend immer um 2 und gleichzeitig der y-Wert von der Zahl 1 ausgehend immer um 3 zunehmen muss, damit die zugehörige Umfangslänge nach beiden Möglichkeiten des Zusammenfügens übereinstimmt. Also gibt es beliebig viele Möglichkeiten der Übereinstimmung.
Von Fall zu Fall nimmt der Umfang von 10 cm ausgehend immer um 12 cm zu.

Du kannst das auch allgemein durch Gleichsetzen zeigen:
Es muss gelten: $6x + 4 = 4y + 6 \,|\, : 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2 = 2y + 3$ mit $x, y \in \mathbb{N}$. (*)
Die Gleichung (*) soll also nur natürliche Zahlen als Lösungen liefern. Eine solche Gleichung heißt nach dem griechischen Mathematiker **Diophant** (um 250 n.Chr.) **diophantische Gleichung**.

$$3x + 2 = 2y + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2y+1}{3} \text{ (**)}$$

$y = 1$ liefert $x = 1$, also wie gewünscht eine natürliche Zahl.
$y = 2$ und $y = 3$ liefern für x Brüche, scheiden also aus. Erst $y = 4 = 1 + 3$ liefert das wieder brauchbare $x = 3$. Es muss also zum y-Wert 1 immer ein Dreiervielfaches addiert werden, damit x ganz wird.
Allgemein könntest du es so ausdrücken: $y = 1 + 3k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Setze es in die Gleichung (**) ein:

$$x = \frac{2 \cdot (1 + 3k) + 1}{3} = \frac{2 + 6k + 1}{3} = \frac{3 + 6k}{3} = \frac{3(1 + 2k)}{3}$$

Kürze mit 3. Dann erhältst du $x = 1 + 2k$.
Durchläuft k die Zahlen aus $\mathbb{N}_0$, kannst du beliebig viele gemeinsame Umfangslängen erzeugen:

$k = 0$ liefert $x = y = 1$ (klar).
$k = 1$ liefert $x = 3$ und $y = 4$. Das liefert den Tabellenwert 22.
$k = 2$ liefert $x = 5$ und $y = 7$. Das liefert den Tabellenwert 34.
$k = 3$ liefert $x = 7$ und $y = 10$. Das liefert den Tabellenwert 46 usw.

5. Berechne den Term $\frac{6}{\square} - \frac{\square}{6}$ für $\square \in \{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$. Addiere dann alle Termwerte.

Lösung:

$$\begin{array}{llcccc}
\square = 1: & \frac{6}{1} - \frac{1}{6} & = & \frac{35}{6} & = & 5\,\frac{5}{6} \\[2ex]
\square = 2: & \frac{6}{2} - \frac{2}{6} & = & \frac{16}{6} & = & 2\,\frac{2}{3} \\[2ex]
\square = 3: & \frac{6}{3} - \frac{3}{6} & = & \frac{9}{6} & = & 1\,\frac{1}{2} \\[2ex]
\square = 6: & \frac{6}{6} - \frac{6}{6} & = & 0 & &
\end{array}$$

$$\frac{35}{6} + \frac{16}{6} + \frac{9}{6} + 0 = \frac{60}{6} = 10$$

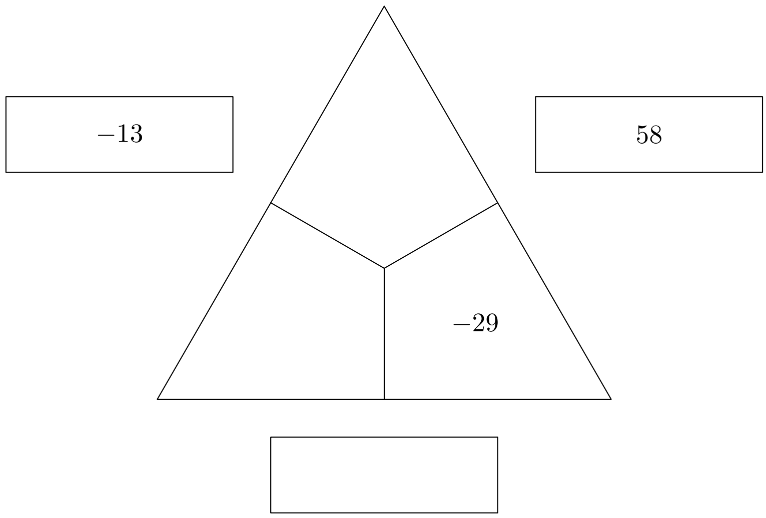
6. Berechne den Term $\frac{6}{\square} + \frac{\square}{6}$ für $\square \in \{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$. Addiere dann alle Termwerte.

Lösung:

$$\begin{array}{llcccc}
\square = 1: & \frac{6}{1} + \frac{1}{6} & = & \frac{37}{6} & = & 6\,\frac{1}{6} \\[2ex]
\square = 2: & \frac{6}{2} + \frac{2}{6} & = & \frac{20}{6} & = & 3\,\frac{1}{3} \\[2ex]
\square = 3: & \frac{6}{3} + \frac{3}{6} & = & \frac{15}{6} & = & 2\,\frac{1}{2} \\[2ex]
\square = 6: & \frac{6}{6} + \frac{6}{6} & = & \frac{12}{6} & = & 2
\end{array}$$

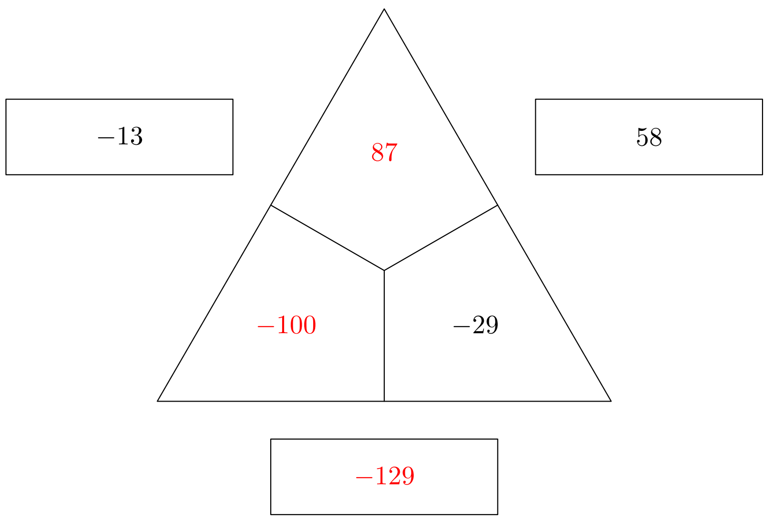
$$\frac{37}{6} + \frac{20}{6} + \frac{15}{6} + \frac{12}{6} = \frac{84}{6} = 18$$

7.

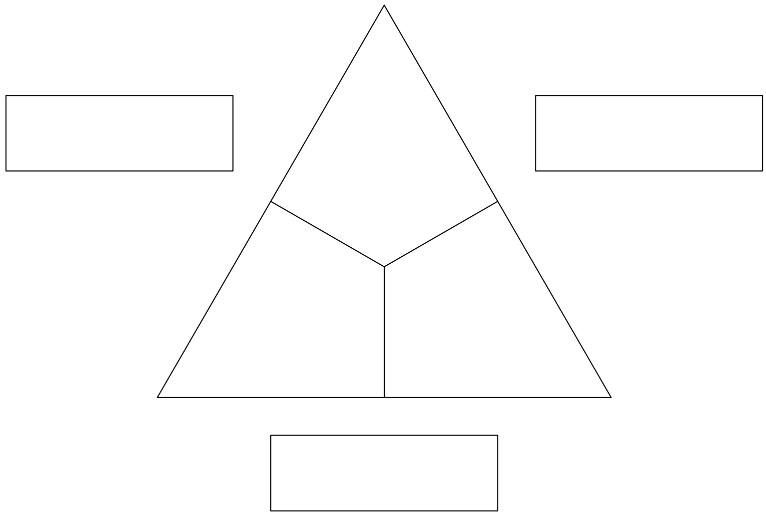


In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke der Wert der Summe aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Zahlen.

Lösung:



8.



In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke das Produkt aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht.
Wir nennen die Plätze, die mit ganzen Zahlen zu belegen sind, „Zellen“. Das Dreieck enthält drei Zellen und die Rechtecke außen stellen drei weitere Zellen dar.
Untersuche, ob die folgenden Behauptungen wahr sind:

(a) Wenn eine Dreieckszelle mit null belegt ist, dann muss in zwei Außenzellen null stehen.

(b) Wenn eine Außenzelle mit null belegt ist, dann muss eine weitere Außenzelle null enthalten.

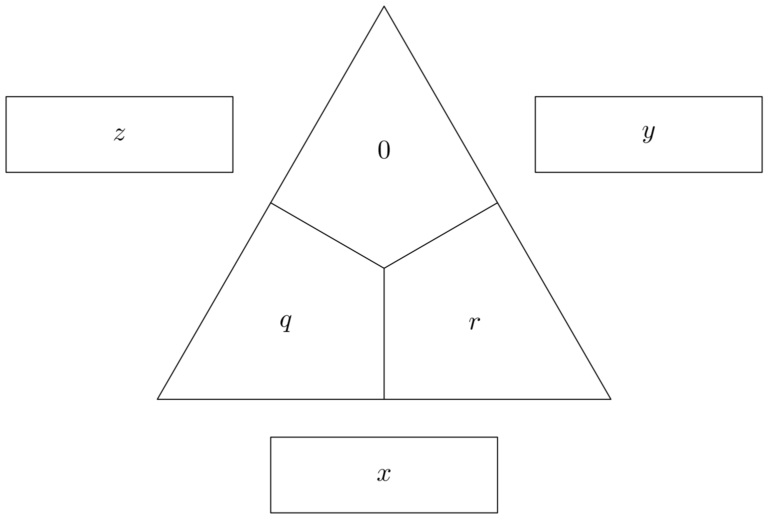
(c) Wenn in allen Außenzellen null steht, dann enthalten auch die inneren Dreieckszellen lauter Nullen.

Lösung: Du hast gelernt:

- **Wenn in einem Produkt ein Faktor null ist, dann ist der Produktwert null.**
- **Wenn der Produktwert null ist, dann muss ein Faktor dieses Produktes den Wert null besitzen.**

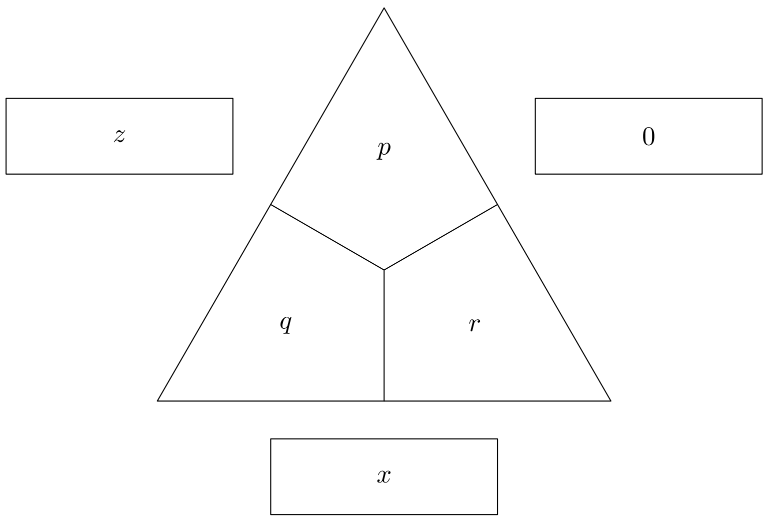
Mit der Anwendung dieser beiden Sätze kannst du die Behauptungen untersuchen:

(a)



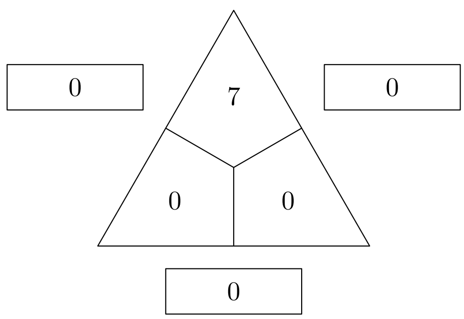
Angenommen, die Null steht oben in der Dreiecksspitze. Dann müssen die beiden Rechtecke oben rechts und links gemäß den eingangs festgelegten Regeln ebenfalls den Faktor null enthalten. Dann gilt aber $z = y = 0$. Die Behauptung ist richtig.

(b)



Angenommen, die Null steht im Rechteck oben rechts. Dann muss $p = 0$ oder auch $r = 0$ gelten. Die Behauptung ist richtig.

(c) Die Behauptung ist falsch. Zur Begründung genügt es, ein Gegenbeispiel zu finden.



6 Grundbegriffe der ebenen Geometrie

1. (a) Zeichne das Dreieck ABC mit $A(0 \mid 0)$, $B(3 \mid 1)$ und $C(-1 \mid 3)$ in ein Koordinatensystem.

   Platzbedarf: $-5 \leqq x \leqq 5$ und $-3 \leqq y \leqq 5$

   (b) Bezeichne den Mittelpunkt der Strecke $[BC]$ mit M.

   (c) Zeichne die Parallele p_1 zur Strecke $[AB]$ durch den Punkt C.

   (d) Zeichne die Parallele p_2 zur Strecke $[BC]$ durch den Punkt A.

   (e) Es gilt dann $p_1 \cap p_2 = \{D\}$. Gib die Koordinaten des Punktes D an.

   (f) Es gibt eine Gerade g, so dass $B \in g \wedge g \perp p_1$ gilt. Zeichne diese Gerade g und deren Schnittpunkte mit p_1 und p_2 ein.

   (g) Welche besonderen Vierecke entdeckst du jetzt in der Figur?

Lösung: (a) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig

(b) –

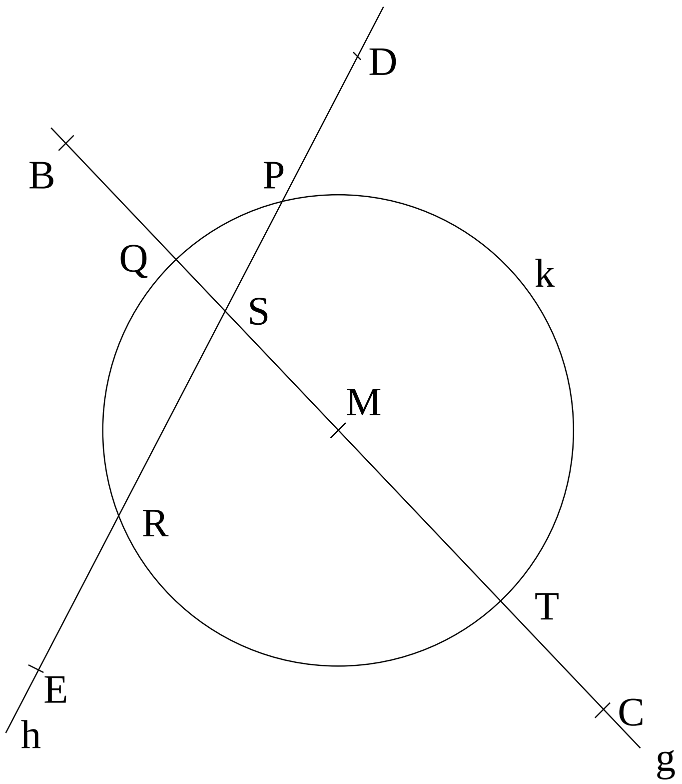
(c) –

(d) –

(e) $D(-4|2)$

(f) Man erkennt ein Quadrat, zwei Parallelogramme und ein achsensymmetrisches Trapez.

2. Fülle die Lücken an Hand der Zeichnung richtig aus!



(a) Der Durchmesser von k beträgt:

(b) $M \in$ .....

(c) $[TB$ ..... h

(d) $[QS]$ ..... $[BT]$

(e) ..... $\notin k$

(f) ..... $\subsetneqq [BC]$

Lösung: (a) Der Durchmesser von k beträgt $7{,}2\,\mathrm{cm}$.

(b) $M \in g$

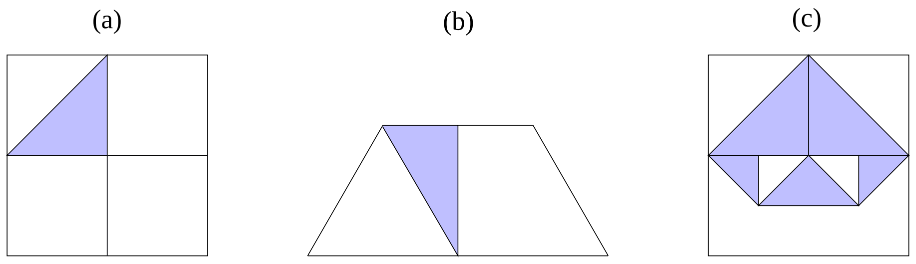
(c) $[TB \in h$

(d) $[QS] \subseteqq [BT]$

(e) $C \notin k$

(f) $[ER] \subsetneqq [BC]$

3. In den drei Bildern sind Winkel mit den Maßen $\{30°; 45°; 60°; 90°; 120°; 135°\}$ zu sehen.

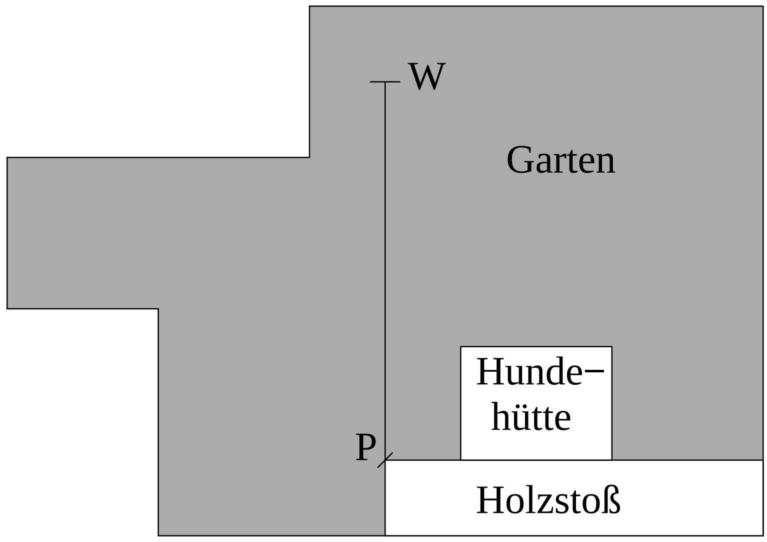


(a) Übertrage die Figuren (a), (b) und (c) auf kariertes Papier.

(b) Welchen Bruchteil der Gesamtfläche nimmt jeweils die dunkel eingefärbte Fläche ein?

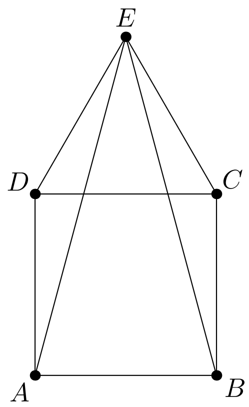
Lösung: (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

4. Hier siehst du die maßstabsgetreue Skizze eines Grundstücks. Der Wachhund W zieht gerade an der Leine, die am Punkt P befestigt ist.
Zeichne ein, wo sich der Hund innerhalb des Gartens bewegen kann!



Lösung: - -

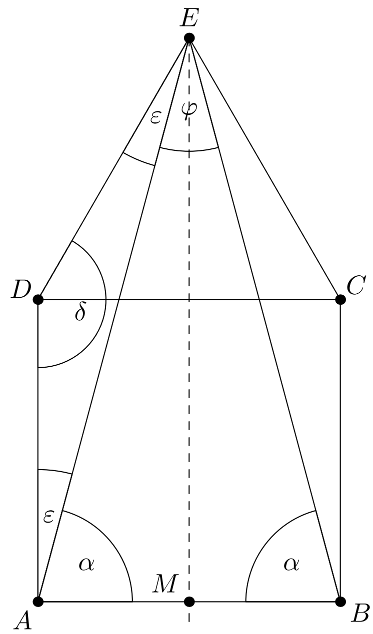
5. An das Quadrat $ABCD$ ist das gleichseitige Dreieck DCE angefügt worden.



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks ABE.

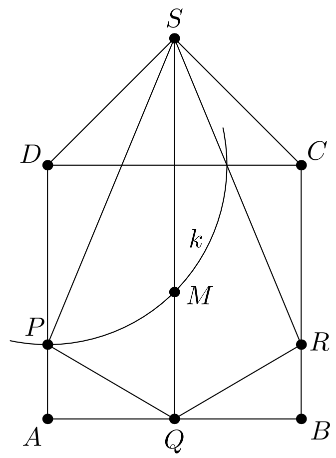
Lösung: (a)



(b) In der Figur ist EM die Symmetrieachse.
Weil die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ mit der des gleichseitigen Dreiecks DCE übereinstimmt, sind die Dreiecke AED und EBC gleichschenklig und wegen der Symmetrie kongruent.
Aus Symmetriegründen ist das Dreieck ABE ebenfalls gleichschenklig.
Weiter gilt: $\delta = 90° + 60° = 150° \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = (180° - 150°) : 2 = 15°$.
$\Rightarrow \quad \alpha = 90° - \varepsilon = 75°$ und $\varphi = 180° - 2 \cdot \alpha = 30°$
Oder am Punkt E: $\varphi = 60° - 2 \cdot \varepsilon = 30°$.

6. An das Quadrat $ABCD$ ist das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck DCS angefügt worden.

Der Punkt D ist der Mittelpunkt des Kreisbogens k durch den Quadratmittelpunkt M. Dadurch entsteht der achsensymmetrische Drachen $PQRS$.

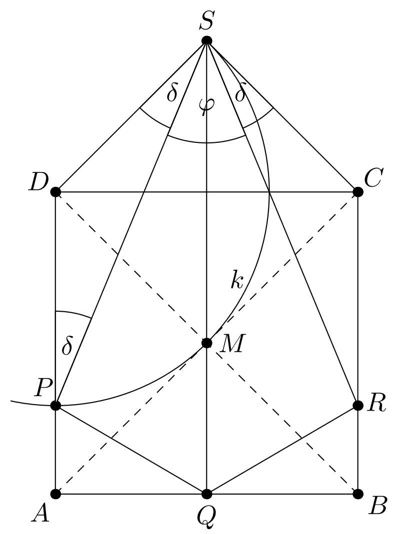


(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Berechne das Maß φ des Winkels PSR.

(c) Welchen Flächeninhalt hätte das Quadrat $ABCD$, wenn das Dreieck DCS einen Flächeninhalt von $6\,\text{cm}^2$ hätte?

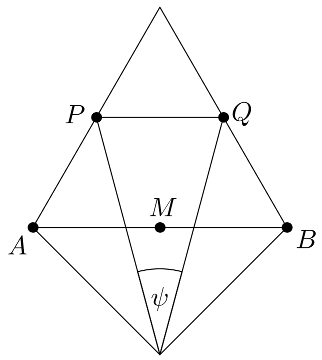
Lösung: (a)



(b) Das Viereck $DMCS$ ist ein Quadrat, denn die Dreiecke DMC und DCS sind deckungsgleich. Daher ist das Dreieck PSD gleichschenklig: $\overline{DP} = \overline{DM} = \overline{DS}$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle PDS = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ \quad \Rightarrow \quad \delta = (180^\circ - 135^\circ) : 2 = 22{,}5^\circ$
$\Rightarrow \quad \varphi = 90^\circ - 2 \cdot 22.5^\circ = 45^\circ$

(c) Mit Hilfe der gestrichelten Linien erkennst du: Das Quadrat $ABCD$ ist in vier kongruente Dreiecke zerlegt worden, die zum Dreieck DCS kongruent sind.
Das Quadrat $ABCD$ hätte also einen Flächeninhalt von $4 \cdot 6\,\text{cm}^2 = 24\,\text{cm}^2$.

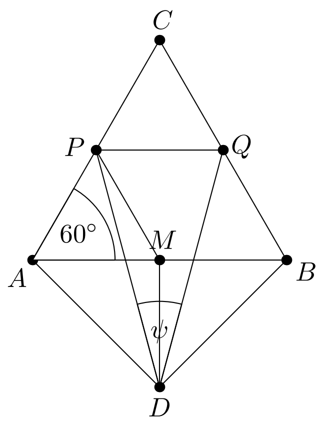
7. Der achsensymmetrische Drachen ist aus einem gleichseitigen und einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck zusammengefügt worden. Die Punkte P und Q sind Seitenmittelpunkte.



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

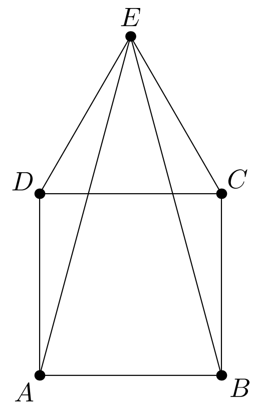
(b) Berechne das Winkelmaß ψ.
Tipp: Zeichne ausgehend vom Mttelpunkt M zwei geeignete Hilfslinien ein.

Lösung: (a)



(b) Die beiden Hilfslinien sind die zwei Strecken $[MP]$ und $[MD]$.
Das gleichschenklige Dreieck AMP ($\overline{AM} = \overline{AP}$) besitzt einen Innenwinkel mit dem Maß $60°$; also muss es gleichseitig sein.
Damit gilt: $\overline{MP} = \overline{AM}$ **(*)** und $\sphericalangle PMA = \sphericalangle APM = 60°$.
Das Dreieck ADM ist ein halbes Quadrat. Damit gilt: $\overline{AM} = \overline{MD}$.
Mit **(*)** folgt: $\overline{MP} = \overline{MD}$; d.h. das Dreieck PDM ist gleichschenklig und es gilt: $\sphericalangle PMD = 60° + 90° = 150°$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle MDP = (180° - 150°) : 2 = 15°$.
Die Strecke $[DM]$ halbiert den Winkel mit dem Maß ψ. Also folgt $\psi = 30°$.

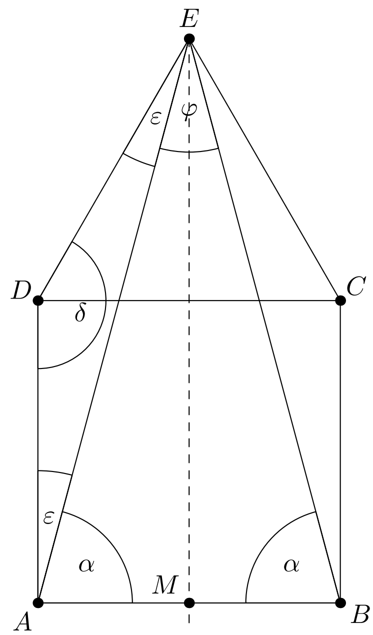
8. An das Quadrat $ABCD$ ist das gleichseitige Dreieck DCE angefügt worden.



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$.

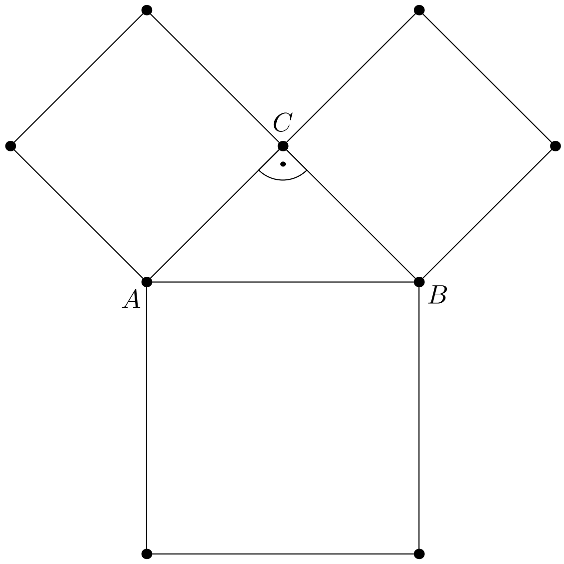
(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks ABE.

Lösung: (a)



(b) In der Figur ist EM die Symmetrieachse.
Weil die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ mit der des gleichseitigen Dreiecks DCE übereinstimmt, sind die Dreiecke AED und EBC gleichschenklig und wegen der Symmetrie kongruent.
Aus Symmetriegründen ist das Dreieck ABE ebenfalls gleichschenklig.
Weiter gilt: $\delta = 90° + 60° = 150° \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = (180° - 150°) : 2 = 15°$.
$\Rightarrow \quad \alpha = 90° - \varepsilon = 75°$ und $\varphi = 180° - 2 \cdot \alpha = 30°$
Oder am Punkt E: $\varphi = 60° - 2 \cdot \varepsilon = 30°$.

9. Der Lehrer B. Weis legt seiner 6. Klasse die unten dargestellte Figur vor. Dort sind an das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck ABC drei Quadrate angefügt worden. Diese Quadrate sollen die Schülerinnen und Schüler miteinander vergleichen.



(a) Zuerst bekommt die Klasse den Auftrag, die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ zu zeichnen. Zeichne selbst.

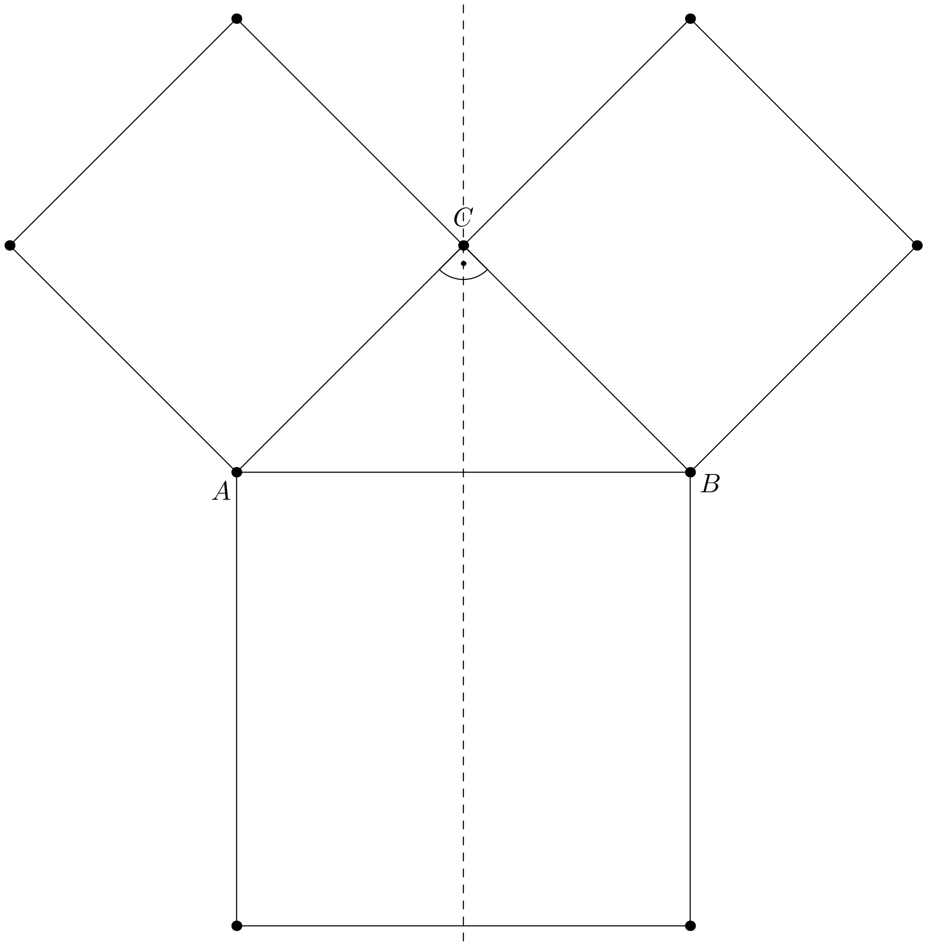
(b) Maria meint: „Die beiden oberen Quadrate sind gleich groß, weil … ."
Finde eine richtige Fortsetzung ihres angefangenen Satzes.

(c) Franz stellt mit seinem Geodreieck fest, dass die Seite $[AC]$ in seiner Zeichnung $4{,}2\,\text{cm}$ lang ist. Damit rechnet er weiter. Wie fällt am Ende sein Vergleich der drei Quadrate aus?

(d) Fritz dagegen hat $\overline{AC} = 4{,}3\,\text{cm}$ gemessen. Zu welchem Ergebnis kommt er dann?

(e) Ursula meldet sich: „Herr Weis, eigentlich braucht man gar nicht zu rechnen. Ich habe Diagonalen eingezeichnet. Da habe ich sofort gesehen, dass … ."
Ergänze deine Zeichung entsprechend der Idee von Ursula.
Welche Entdeckung hat Ursula gemacht? Notiere eine Begründung dafür.

Lösung: (a)

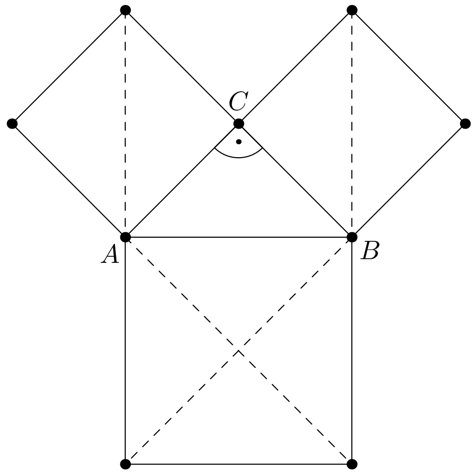


(b) „... die Figur achsensymmetrisch ist, siehe gestrichelte Linie.“
Oder: „... das Dreieck ABC gleichschenklig ist: Es gilt $\overline{AC} = \overline{BC}$. Also sind die Seiten der beiden oberen Quadrate gleich lang; damit sind diese beiden Quadrate gleich.“

(c) Flächeninhalt der beiden kleinen Quadrate zusammen:
$A_1 = 2 \cdot 4{,}2\,\text{cm} \cdot 4{,}2\,\text{cm} = 2 \cdot 17{,}64\,\text{cm}^2 = 35{,}28\,\text{cm}^2$
Flächeninhalt des großen Quadrates: $A_2 = 6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 36\,\text{cm}^2$
Also wäre der Flächeninhalt des großen Quadrates etwas größer als der der beiden anderen Quadrate.

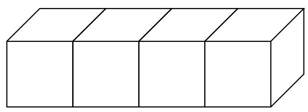
(d) Flächeninhalt der beiden kleinen Quadrate zusammen:
$A_1 = 2 \cdot 4{,}3\,\text{cm} \cdot 4{,}3\,\text{cm} = 2 \cdot 18{,}49\,\text{cm}^2 = 36{,}98\,\text{cm}^2$
Flächeninhalt des großen Quadrates: $A_2 = 6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 36\,\text{cm}^2$
Also wäre der Flächeninhalt des großen Quadrates etwas kleiner als der der beiden anderen Quadrate.

(e)



Die vier Hälften der beiden kleinen Quadrate passen genau in das große Quadrat. Also sind die beiden kleinen Quadrate zusammen genauso groß wie das große Quadrat.

10.



Vier Würfel werden zu einem Quader zusammengefügt. Das Volumen dieses Quaders beträgt $62,5\,\text{cm}^3$.

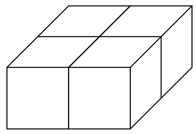
(a) Berechne die Oberfläche des Quaders.

(b) Die vier Würfel lassen sich noch auf andere Weise zu einem Quader zusammenfügen, nämlich so, dass dann der Quader zwei quadratische Seitenflächen bekommt.

- Zeichne ein Schrägbild dieses Quaders.
- Berechne die Oberfläche dieses Quaders.

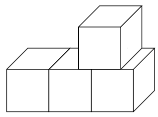
Lösung: (a) Das Volumen eines Würfels beträgt $62,5\,\text{cm}^3 : 4 = 15,625\,\text{cm}^3$
1. Versuch: Kantenlänge des Würfels $2\,\text{cm}$, aber $2^3 = 8$ ist zu klein.
1. Versuch: Kantenlänge des Würfels $3\,\text{cm}$, aber $3^3 = 27$ ist zu groß.
Die Kantenlänge muss also zwischen $2\,\text{cm}$ und $3\,\text{cm}$ liegen. Weil das Würfelvolumen $15,625\,\text{cm}^3$ auf die Ziffer 5 endet, muss die Maßzahl der Kantenlänge ebenfalls auf 5 enden.
Probiere es daher mit $2,5\,\text{cm}$. Und tatsächlich: $2,5^3 = 15,625$. Die Kantenlänge eines Würfels beträgt also $2,5\,\text{cm}$.
Der Inhalt einer Seitenflache des Würfels beträgt dann $2,5\,\text{cm} \cdot 2,5\,\text{cm} = 6,25\,\text{cm}^2$.
Die Oberfläche des Quaders besteht aus $2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 18$ quadratischen Seitenflächen.
Also: $O_{Quader} = 18 \cdot 6,25\,\text{cm}^2 = 112,5\,\text{cm}^2$.

(b) •



- Die Oberfläche dieses Quaders besteht jetzt aus 16 Teilflächen.
  Also: $O_{Quader} = 16 \cdot 6,25\,\text{cm}^2 = 100\,\text{cm}^2$.

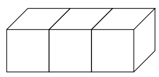
11.



Jeder der vier Würfel besitzt eine Kantenlänge von $2,5\,\text{cm}$. Berechne die Oberfläche des Körpers.

Lösung: Jeder Würfel hat eine Oberfläche von $6 \cdot 2,5^2\,\text{cm}^2 = 37,5\,\text{cm}^2$.
Vier Würfel haben dann eine Oberfläche von $150\,\text{cm}^2$.
Weil aber der obere Wüfel mit einer quadratischen Seitenfläche aufliegt, hat der Körper eine Oberfläche von $(4 \cdot 6 - 1) \cdot 2,5^2\,\text{cm}^2 = 143,75\,\text{cm}^2$.

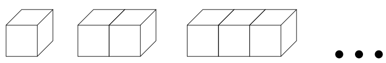
12.



Drei Würfel werden zu einem Quader zusammengefügt. Die Oberfläche dieses Quaders beträgt $87,5\,\text{dm}^2$. Berechne die Kantenlänge eines Würfels.

Lösung: $O_{Quader} = 87,5\,\text{dm}^2 = 8750\,\text{cm}^2$.
Die Quaderoberfläche besteht aus 14 kongruenten Quadraten.
$8750\,\text{cm}^2 : 14 = 625\,\text{cm}^2 = 25\,\text{cm} \cdot 25\,\text{cm}$.
Also hat ein Würfel eine Kantenlänge von $25\,\text{cm}$.

13.



Gleiche Würfel werden immer wieder zu neuen Quadern auf die oben dargestellte Weise aneinander gefügt. Die Kantenlänge eines Würfels soll $2\,\text{cm}$ betragen.

(a) Berechne die Oberfläche O_3 des Quaders, der aus drei Würfeln zusammengefügt ist.

(b) Berechne die Oberfläche O_{100} des Quaders, der sich aus 100 Würfeln zusammensetzt in der Einheit dm^2..

(c) Aus wie vielen Würfeln mit der Kantenlänge 2 cm setzt sich ein Quader zusammen, dessen Oberfläche $600\,\mathrm{cm}^2$ beträgt?

(d) Untersuche, ob man mit solchen Würfeln auf dieses Weise einen Quader mit einer Oberfläche von $20\,\mathrm{dm}^2$ zusammenbauen kann.

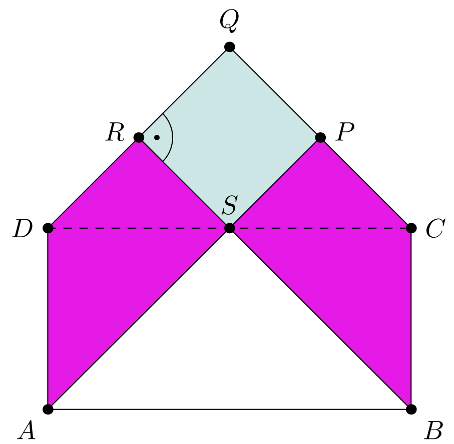
Lösung: (a) Die Anzahl der Quadrate rundherum beträgt: $3 \cdot 4 = 12$.
Hinzu kommen zwei Quadrate, die den Quader links und rechts abschließen.
Der Flächeninhalt eines Quadrates beträgt $4\,\mathrm{cm}^2$.
$\Rightarrow \quad O_3 = 14 \cdot 4\,\mathrm{cm}^2 = 56\,\mathrm{cm}^2$

(b) $O_{100} = 100 \cdot 4 \cdot 4\,\mathrm{cm}^2 + 2 \cdot 4\,\mathrm{cm}^2 = 1608\,\mathrm{cm}^2$

(c) Subtrahiere zunächst die beiden seitlichen Begrenzungsflächen zu je $4\,\mathrm{cm}^2$.
Dann bleiben noch $592\,\mathrm{cm}^2$ rundherum. Jede dieser Schichten enthalt 4 Quadrate zu je $4\,\mathrm{cm}^2$. Das ergibt $592\,\mathrm{cm}^2 : 4\,\mathrm{cm}^2 : 4 = 37$ Würfel.

(d) $20\,\mathrm{dm}^2 = 2000\,\mathrm{cm}^2$; $2000\,\mathrm{cm}^2 - 8\,\mathrm{cm}^2 = 1992\,\mathrm{cm}^2$; $1992\,\mathrm{cm}^2 : 16\,\mathrm{cm}^2 = 124{,}5$ Aber: $124{,}5 \notin \mathbb{Z}$
Die Anzahl der Würfel muss ganz sein. Einen solchen Quader gibt es nicht.

14.



Die beiden Dreiecke ABS und DCQ sind kongruente, gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke.

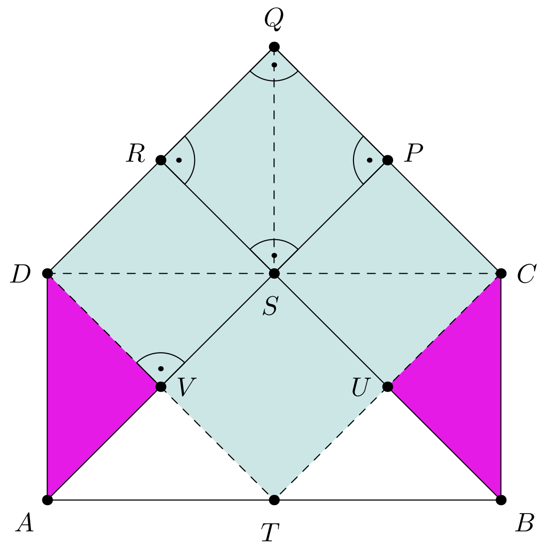
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\mathrm{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $SPQR$ ist ein Quadrat. Zeichne dazu eine geeignete Hilfslinie ein.

(c) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Trapezes $ASRD$ größer als der des Quadrates $SPQR$? Zeichne dazu eine geeignete Hilfslinie ein.

(d) Vergleiche den Flächeninhalt des Quadrates $SPQR$ mit der Gesamtfigur $ABCQD$. Vervollständige dazu deine Zeichnung mit weiteren geeigneten Hilfslinien.

Lösung: (a)

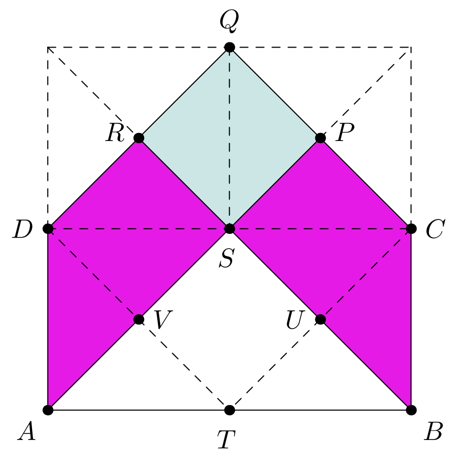


(b) Die Strecke $[QS]$ dient als Hilfslinie.
Das Dreieck DQS ist gleichschenklig-rechtwinklig. Die Höhe $[SR]$ zerlegt es in zwei kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke DSR und SQR. Also gilt: $\overline{DR} = \overline{RQ} = \overline{RS}$.
Aus Symmetriegründen folgt: $\overline{PC} = \overline{PQ} = \overline{PS}$. Also handelt es sich bei dem Viereck $PQRS$ um eine Raute, in der ein Innenwinkel ein rechter ist.
Aus Symmetriegründen müssen dann die Punkte Q und S auch Scheitel von rechten Winkeln sein. Ebenso muss auch der Punkt P der Scheitel eines rechten Winkels sein.

(c) Die Strecke $[DV]$ ist eine geeignete Hilfslinie.
Die beiden Vierecke $VSRD$ und $SPQR$ sind kongruente Quadrate. Das Dreieck AVD ist so groß wie die Hälfte von einem dieser Quadrate. Das Trapez $ASRD$ enthält drei solche Dreiecke, das Quadrat $SPQR$ nur zwei davon.
Also ist der Flächeninhalt des Trapezes $ASRD$ um ein Drittel $= 33{,}\overline{3}\,\%$ größer als der des Quadrates $SPQR$.

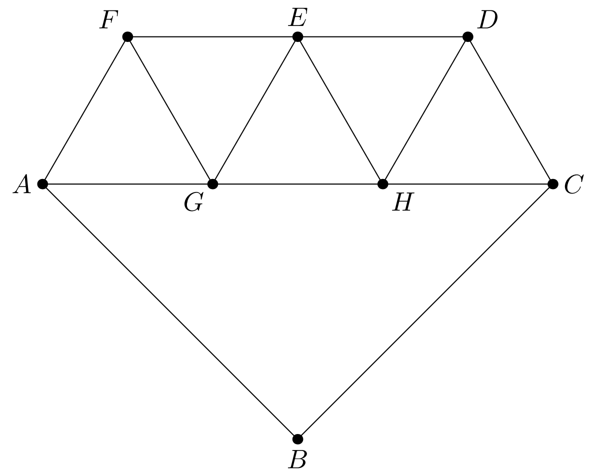
(d) Es bieten sich die zusätzlichen Hilfslinien $[VT]$ und $[CT]$ an.
In die Figur $ABCQD$ passt das Quadrat $SPQR$ offensichtlich 4-mal hinein. Von den vier kongruenten restlichen Dreiecken lassen sich je zwei zu einem Quadrat von der Größe des Quadrates $SPQR$ zusammenfügen.
Also ist die Figur $ABCQD$ 6-mal so groß wie das Quadrat $SPQR$.

Anregung:



Betrachte die zum großen Quadrat ergänzte Figur im Zusammenhang mit den gestellten Aufgaben.

15.



Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Trapez $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 9\,\text{cm}$, wobei über der Strecke $[DF]$ $6\,\text{cm}$ Platz bleiben sollen.

(b) Benenne die Innenwinkel des Trapezes $ACDF$ mit griechischen Buchstaben. Berechne diese Innenwinkel.

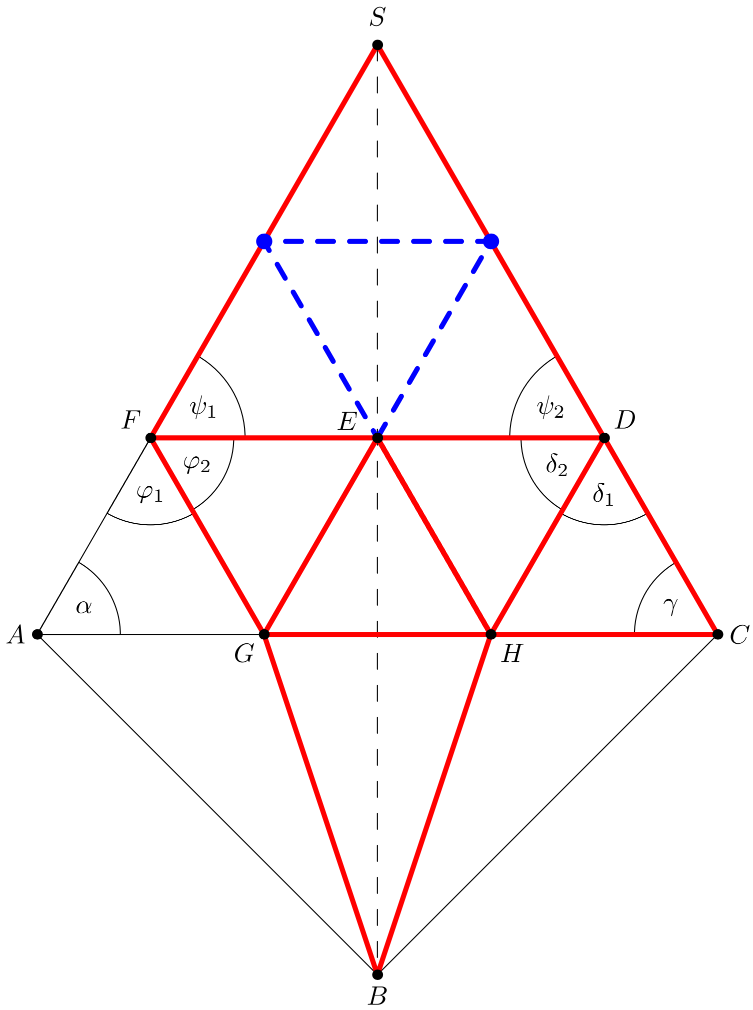
(c) Verlängere die Strecken $[AF]$ über F und $[CD]$ über C hinaus so weit, bis sie sich im Punkt S schneiden. Begründe: Im Dreieck FDS gibt es zwei Innenwinkel mit dem Maß $60°$.

(d) Wie viele Dreiecke vom Typ AGF passen lückenlos in das Dreieck FDS? Begründe.

(e) In der Figur sind drei Drachenvierecke mit dem Eckpunkt H zu erkennen. Zeichne sie farbig ein. Um welche besonderen Drachenvierecke handelt es sich? Begründe.

(f) In der Figur ist ein weiteres Drachenviereck mit dem Eckpunkt H verborgen. Zeichne es farbig ein.

Lösung: (a)



(b) Die Gerade SB ist die Symmetrieachse der Figur. Da sich das Trapez $ACDF$ nur aus gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt, gilt: $\alpha = \gamma = 60°$.
Aus dem gleichen Grund gilt: $\delta_1 = \varphi_1 = \delta_2 = \varphi_2 = 60°$.
Also gilt: $\sphericalangle AFD = \sphericalangle FDC = 120°$.

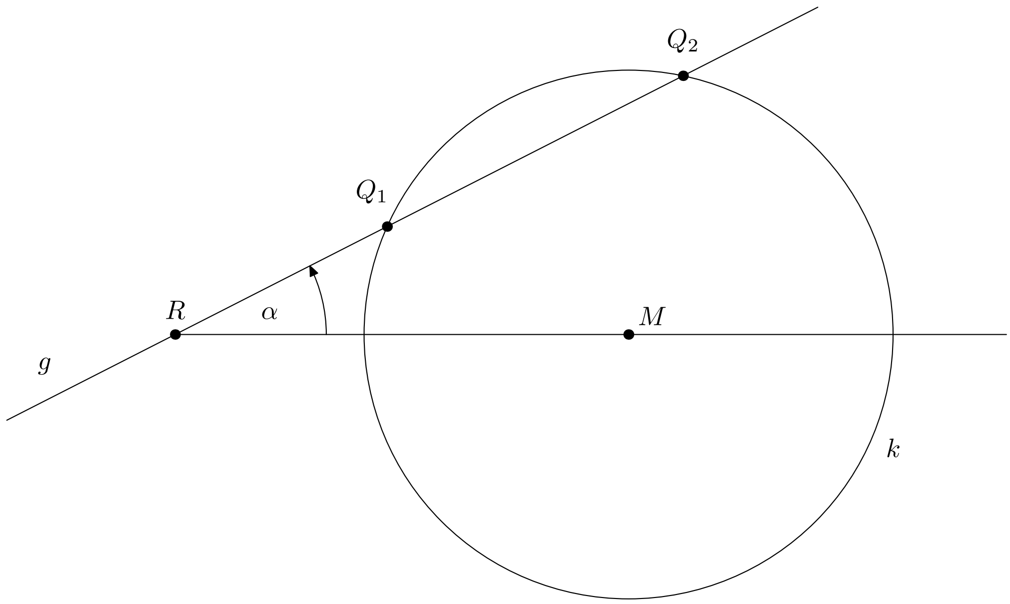
(c) Der Winkel ψ_1 ist der Nebenwinkel des Winkels AFD:
$\psi_1 = 180° - 120° = 60° = \psi_2$.

(d) Es sind **vier** solche Dreiecke, wie du an den dicken gestrichelten Linien erkennen kannst.

(e) Es sind die Vierecke $HCDE$, $HDEG$ und $HEFG$. Diese Drachenvierecke dürfen sich sogar **Rauten** nennen. denn sie setzen sich jeweils aus zwei kongruenten geleichseitigen Dreiecken zusammen. Also besitzen alle drei Vierecke gleich lange Seiten. Siehe Zeichnung.

(f) Es ist das Viereck $BHEG$. Siehe Zeichnung.

16.



Die Gerade g durch den Punkt R schneidet die Kreislinie k in den Punkten Q_1 und Q_2.

(a) Welchen Namen trägt diese Gerade bezüglich ihrer Lage zur Kreislinie k?

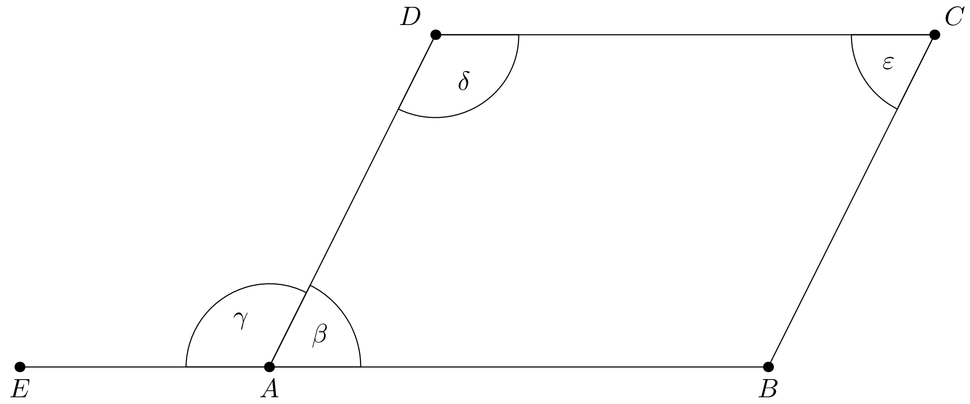
(b) Stelle dir vor, der Winkel mit dem Maß α wird jetzt langsam in Pfeilrichtung größer und größer, bis $\alpha = 90°$ wird. Dabei ändert auch die Gerade g ihre Lage zur Kreisline k.

- Was lässt sich dann während dieser Winkelvergrößerung vom Anfang bis zum Ende über die Lage dieser Geraden g zur Kreislinie k aussagen?
- Was lässt sich gleichzeitig über die mitwandernden Punkte Q_1 und Q_2 aussagen?

Lösung: (a) Die Gerade g heißt „Sekante“.

(b)
- Erst wird die Sekante zur Tangente und schließlich zur Passante.
- Die Schnittpunkte Q_1 und Q_2 kommen einander näher, bis sie aufeinander fallen. (Dann ist die Gerade g zur Tangente geworden.)
  Im Falle der Passante gibt es keine Schnittpunkte mehr.

17.

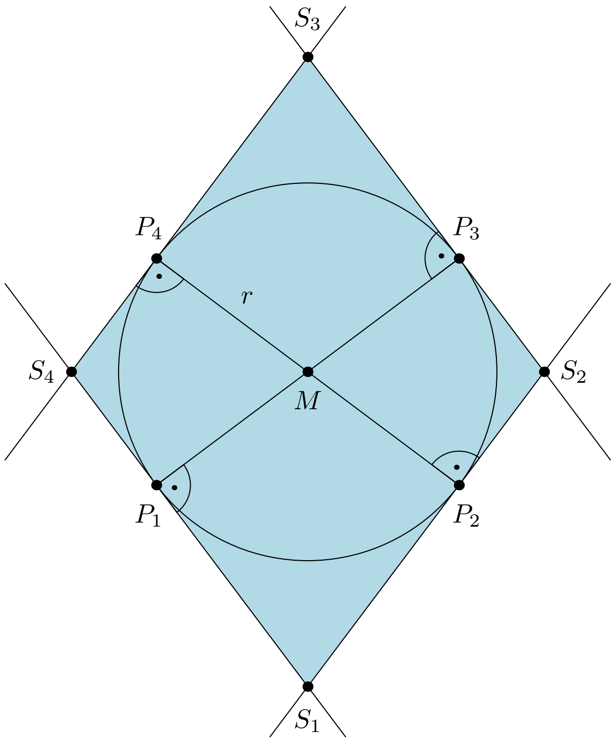


Auf der Kreislinie k liegen die vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4.

(a) Zeichne jeweils mit dem Kreisradius r die vier zugehörigen Tangenten und ihre Schnittpunkte ein.

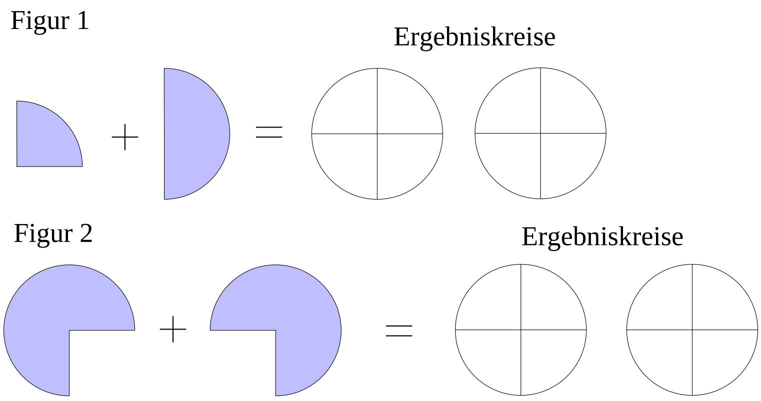
(b) Die vier Tangentenschnittpunkte bilden ein Viereck. Um welches besondere Viereck handelt es sich? Begründe:

Lösung: (a)



(b) Das Vierek ist eine Raute, denn alle Seiten sind gleich lang.

18.



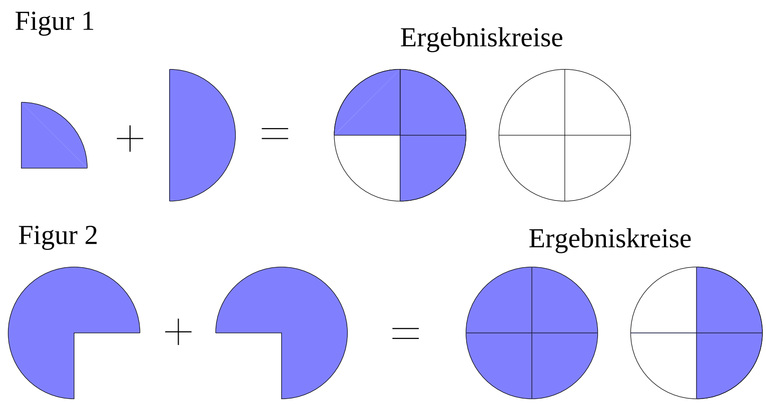
(a) Kennzeichne farbig den richtigen Bereich in den Ergebniskreisen. Decke dabei möglichst viele Einzelteile im jeweils ersten Ergebniskreis ab.

(b) Schreibe jeweils die Rechnung mit Brüchen dazu:

Figur 1: ____________________

Figur 2: ____________________

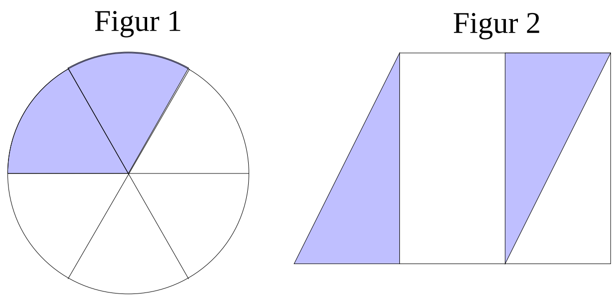
Lösung: (a)



(b) Figur 1: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Figur 2: $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$ oder ein Ganzes und ein Halbes

19.



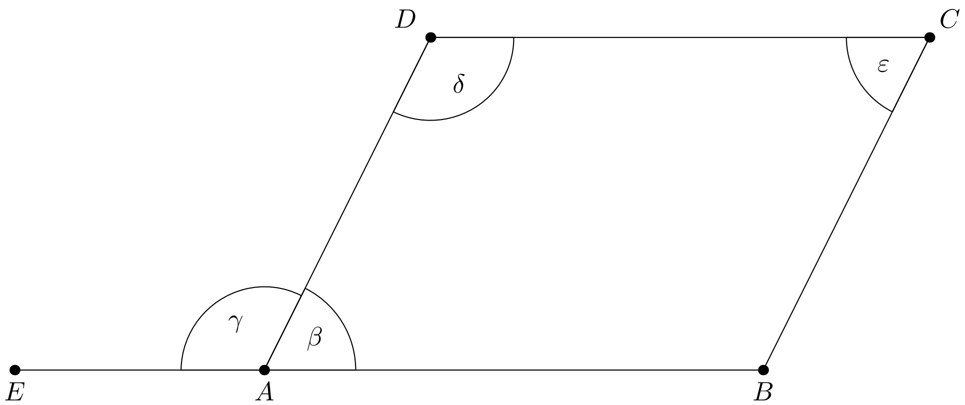
Welcher Bruchteil ist jeweils eingefärbt?

Lösung:

Figur 1: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Figur 2: $\frac{2}{5}$

20.



(a) Um welches besondere Viereck handelt es sich beim Viereck $ABCD$? Begründe deine Antwort.

(b)
- Bestimme mit dem Geodreieck die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße.
- Was fällt dir an deinen Messergebnissen auf?

(c) Egon bastelt die Figur aus vier Stäben: $[LB]$, $[BC]$, $[CD]$ und $[AD]$, wobei das Viereck an den Punkten A, B, C und D beweglich ist.

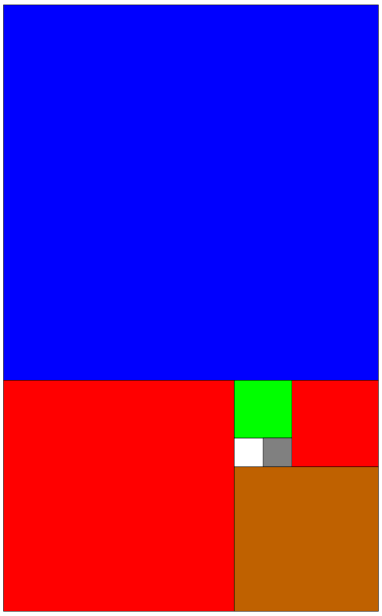
- Wie ändern sich β, ε und δ, wenn γ größer wird?
- Wie ändern sich γ, ε und β, wenn δ kleiner wird?
- Wie groß müsste γ sein, damit Egon ein Rechteck erhält?

Lösung: (a) Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm. Die beiden gegenüber liegenden Seiten sind jeweils parallel.

(b)
- $\beta \approx 63° = \varepsilon$ genauer: $\beta = \varepsilon = 63,43494882\ldots\ °$
  $\gamma = \delta \approx 117°$ genauer: $\gamma = \delta = 116,5650512\ldots\ °$
- Z.B.: $\beta = \varepsilon$ und $\gamma = \delta$ und $\beta + \gamma = 180°$ usw.

(c)
- δ wächst mit γ. β und ε nehmen ab.
- γ nimmt mit δ ab. ε und β werden größer.
- γ muss ein rechter Winkel werden, damit Egon ein Rechteck erhält.

21.



Der Schweizer Maler Eugen Jost hat ein rechteckiges Bild gemalt, das sich aus lauter Quadraten zusammenfügt. Die Seitenlänge a der beiden kleinsten Quadrate soll jeweils 1 cm betragen.

a in cm	1	1	2	3	5		
A in cm^2	1	1	4	9			
$\frac{A_{Quadrat}}{A_{Vorgänger}}$		$1:1=1$	$4:1=4$	$9:4=2,25$			
a in cm							
A in cm^2							
$\frac{A_{Quadrat}}{A_{Vorgänger}}$							

In der Tabelle sind in den beiden ersten Zeilen die Seitenlänge a und der zugehörige Flächeninhalt A der einzelnen Quadrate so dargestellt, dass auf ein Quadrat stets das nächst größere folgt.
In der dritten Zeile wird jeweils der Quotient aus dem Flächeninhalt eines Quadrates und dem Flächeninhalt seines Vorgängers berechnet.

(a) Ergänze jeweils die leeren Zellen in der ersten Zeile. Notiere, wie du dabei vorgegangen bist.

(b) Fülle den Rest der zweiten Zeile aus.

(c) Berechne den Inhalt der noch leeren Zellen in der dritten Zeile. Runde dabei jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma. Was stellst du fest?

Lösung: Das Bildungsgesetz in der ersten Zeile der Tabelle heißt: Addiere den Inhalt zweier benachbarter Zellen. Der Summenwert stellt den Inhalt der darauf folgenden Zelle dar.
Deine Tabelle müsste so aussehen:

a in cm	1	1	2	3	5	8	13
A in cm^2	1	1	4	9	25	64	169
$\frac{A_{Quadrat}}{A_{Vorgänger}}$		$1:1=1$	$4:1=4$	$9:4=2,25$	$2,78$	$2,56$	$2,64$
a in cm	21	34	55	89	144	233	377
A in cm^2	441	1156	3025	7921	20736	54289	142129
$\frac{A_{Quadrat}}{A_{Vorgänger}}$	$2,61$	$2,62$	$2,62$	$2,62$	$2,62$	$2,62$	$2,62$

Der Wert des Quotienten bleibt bei $2,62$ stehen.

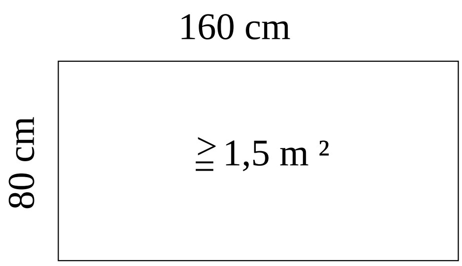
22. Herr Knörz gibt Schreinermeister Hobel den Auftrag, ihm eine Tischplatte aus Eichenholz zu fertigen. Dazu hat der Kunde folgende Wünsche:
    - Die Tischplatte soll 80 cm breit und 4 cm dick sein.
    - Die Tischplatte soll doppelt so lang wie beit sein.
    - Die Fläche der Tischplatte soll mindestens $1,5\,\text{m}^2$ betragen.

    Meister Hobel macht sich eine Skizze und rechnet dann. Schließlich schüttelt er den Kopf: „Lieber Herr Knörz, das geht leider nicht. Entweder ... “

    (a) Begründe, dass die Tischplatte unter den angegebenen Bedingungen nicht gefertigt werden kann.

    (b) Setze die Aussage von Meister Hobel, die mit „Entweder“ beginnt, logisch fort.

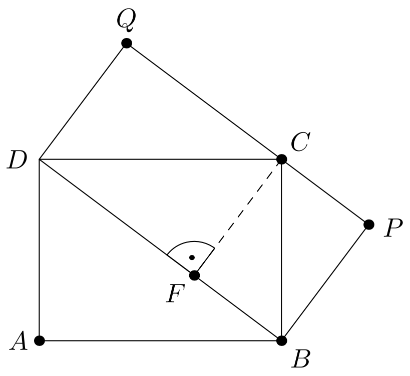
Lösung: (a)



Es kommt nicht darauf an, wie dick die Platte werden soll.
Wenn die Platte 80 cm breit werden soll, dann ist deren Länge doppelt so groß, nämlich 160 cm.
Ihr Flächeninhalt beträgt dann $160\,\text{cm} \cdot 80\,\text{cm} = 1,6\,\text{m} \cdot 0,8\,\text{m} = 1,28\,\text{m}^2$.
Das ist mit dem Wunsch von Herrn Knörz, dass der Flächeninhalt der Platte mindestens $1,5\,\text{m}^2$ betragen soll, nicht vereinbar.

(b) „Entweder wird die Tischplatte breiter als 80 cm oder mehr als doppelt so lang wie breit oder ihr Flächeninhalt beträgt weniger als $1,5\,\text{m}^2$.“

23.

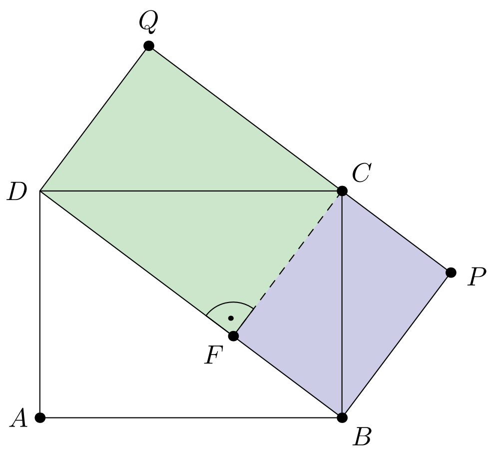


Die Vierecke $ABCD$ und $DBPQ$ sind jeweils Rechtecke.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = 3\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Rechteck $ABCD$ hat den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck $DBPQ$.

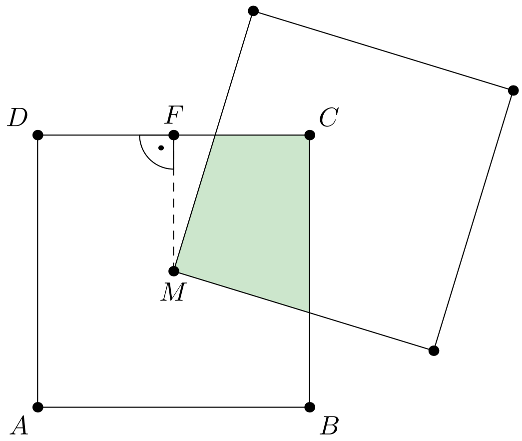
Lösung:



(a) Siehe Zeichnung.

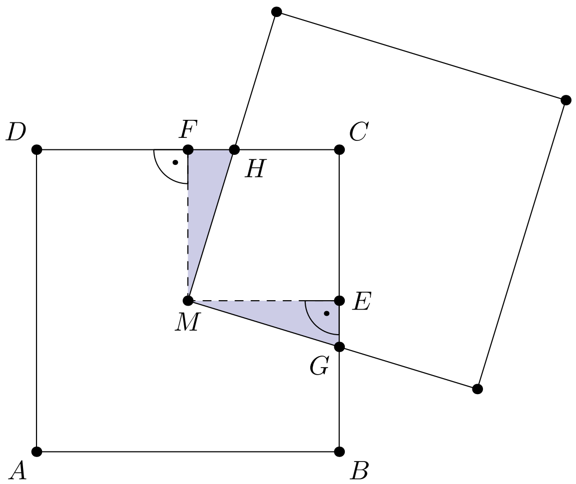
(b) Die Diagonale $[BD]$ zerlegt das Rechteck $ABCD$ in zwei kongruente Teildreiecke.
Das Rechteck $DBPQ$ wird durch die Diagonalen $[DC]$ bzw. $[BC]$ in vier paarweise kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt.
Die beiden Teildreiecke DFC und FBC fügen sich zum Dreieck DBC zusammen.
Also ist das Rechteck $DBPQ$ doppelt so groß wie das Dreieck DBC und damit genau so groß wie das Rechteck $ABCD$.

24.



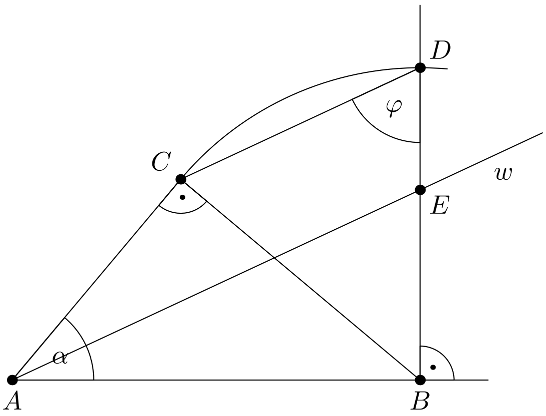
Zwei gleiche Quadrate überlagern sich so, wie es die obige Darstellung zeigt.
Der Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$ ist M. Welcher Bruchteil der Fläche des Quadrates $ABCD$ ist eingefärbt?
Hinweis: In der Figur ist eine Hilfslinie $[MF]$ gestrichelt eingezeichnet. Zeichne eine passende Hilfslinie $[ME]$ ein.

Lösung:



Die gesuchte Hilfslinie ist das Lot $[ME]$ vom Quadratmittelpunkt M auf die Quadratseite $[BC]$.
Das Quadrat $MECF$ nimmt den vierten Teil der Fläche des Quadrates $ABCD$ ein. Von diesem Quadrat $MECF$ wurde eineseits das Dreieck MHF weggenommen, aber gleichzeitig wurde das Dreieck MGE angefügt.
Die beiden Dreiecke MHF und MGE sind kongruent. Also hat das Viereck $MGCH$ (das ist die getönte Fläche der Figur in der Aufgabe) den gleichen Flächeninhalt wie das Viertelquadrat $MECF$.

25.



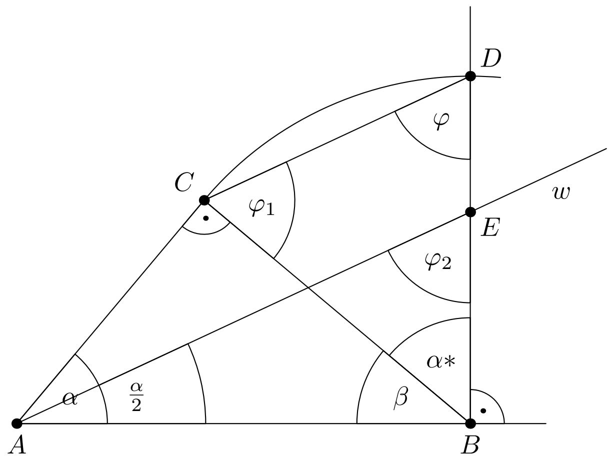
Der Punkt B ist der Mittelpunkt des Kreisbogens mit dem Radius $[BC]$. Die Halbgerade w halbiert den Winkel α.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\alpha = 50°$.

(b) Berechne φ für $\alpha = 50°$.

(c) Begründe: Die Strecke $[CD]$ und die Winkelhalbierende w sind parallel.

Lösung: (a)



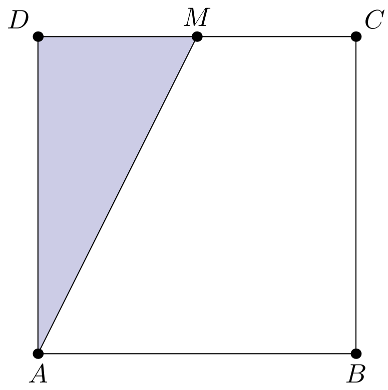
(b) Wegen $\beta = 90° - \alpha = 90° - 50° = 40°$ folgt: $\alpha = \alpha* = 50°$.
Das Dreieck BDC ist gleichschenklig. $\Rightarrow \quad \varphi = \varphi_1$.
$\Rightarrow \quad \varphi = (180° - 50°) : 2 = 65°$.

(c) Im rechtwinkligen Dreieck ABE gilt:

$$\varphi_2 + \frac{\alpha}{2} = 90° \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 90° - 25° = 65° = \varphi \text{ (siehe (b))}.$$

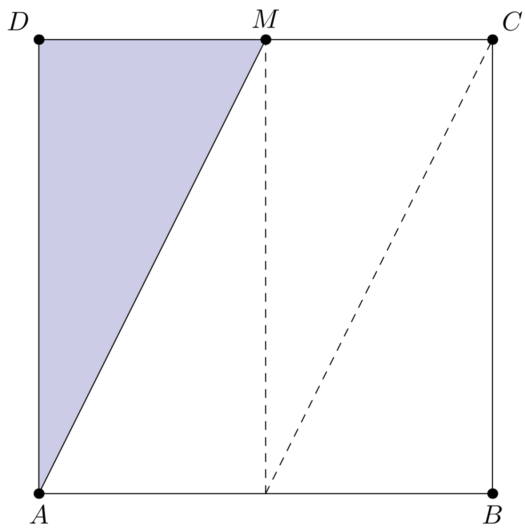
Also gilt: $[CD] \parallel w$, weil φ und φ_2 F-Winkel sind.

26.



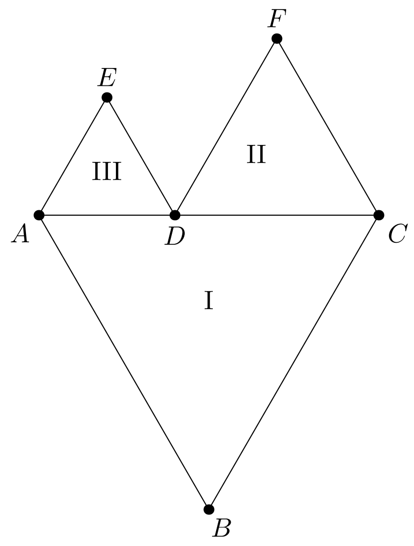
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Punkt M stellt den Mittelpunkt der Seite $[CD]$ dar.
Berechne den Umfang des Quadrates, wenn der Flächeninhalt des getönten Dreiecks AMD $9\,\text{cm}^2$ beträgt.

Lösung:



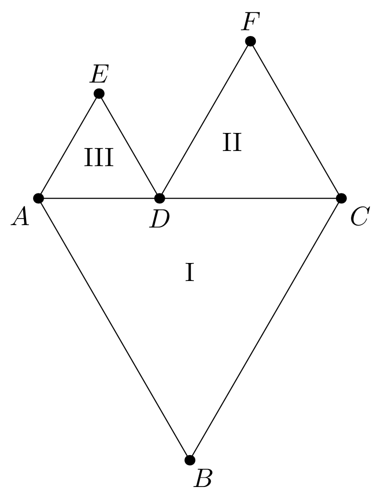
Mit Hilfe der gestrichelten Linien erkennst du, dass das Quadrat $ABCD$ in vier deckungsgleiche Dreiecke zerlegt worden ist.
Der Flächeninhalt dieses Quadrates beträgt dann $4 \cdot 9\,\text{cm}^2 = 36\,\text{cm}^2$.
Dann beträgt die Seitenlänge des Quadrates $6\,\text{cm}$. Also beträgt sein Umfang $4 \cdot 6\,\text{cm} = 24\,\text{cm}$.

27.



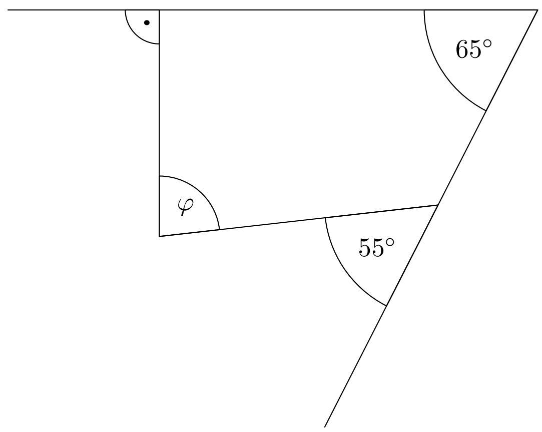
Die Figur setzt sich aus drei jeweils gleichseitigen Dreiecken zusammen.
Der Umfang u_{I} des Dreiecks ABC beträgt $16,8\,\mathrm{cm}$ und der Umfang u_{II} des Dreiecks DCF beträgt $14,1\,\mathrm{cm}$. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Berechne den Umfang u_{III} des Dreiecks ADE.

Lösung:



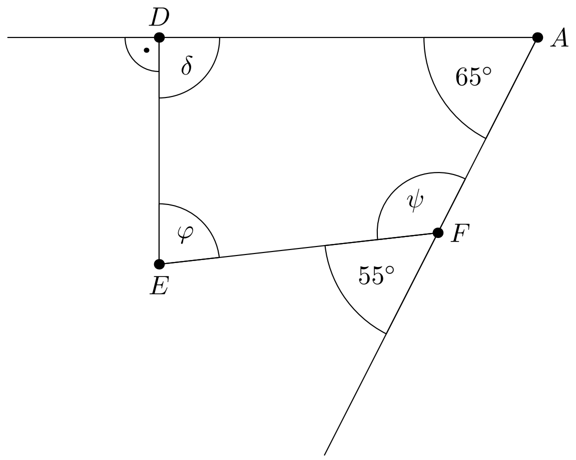
Den Umfang u eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a berechnest du mit $u = 3 \cdot a$.
Aus $u_{\mathrm{I}} = 16,8\,\mathrm{cm}$ folgt $\overline{AC} = 16,8\,\mathrm{cm} : 3 = 5,6\,\mathrm{cm}$.
Aus $u_{\mathrm{II}} = 14,1\,\mathrm{cm}$ folgt $\overline{DC} = 14,1\,\mathrm{cm} : 3 = 4,7\,\mathrm{cm}$.
Dann folgt $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{DC} = 5,6\,\mathrm{cm} - 4,7\,\mathrm{cm} = 0,9\,\mathrm{cm}$.
$\Rightarrow \quad u_{II} = 3 \cdot 0,9\,\mathrm{cm} = 2,7\,\mathrm{cm}$.

28.



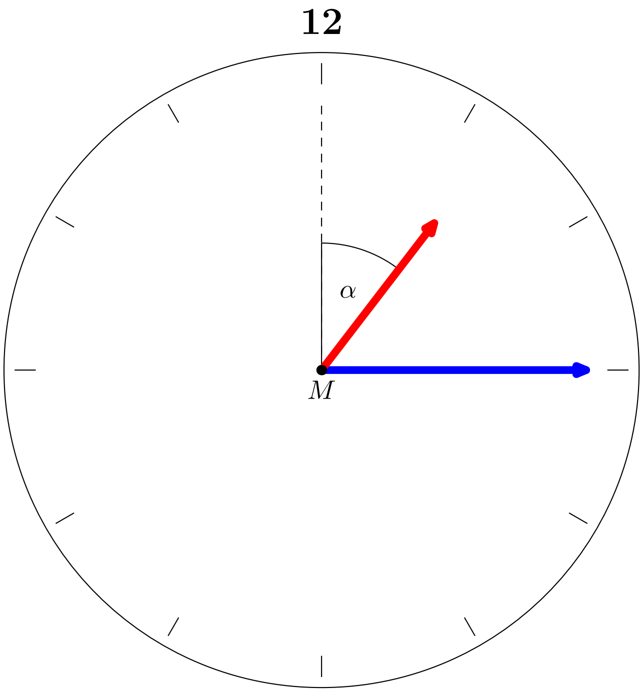
Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht. Berechne das Winkelmaß φ .

Lösung:



Nach der Beziehung zwischen Nebenwinkeln gilt: $\delta = 180° - 90° = 90°$ und $\psi = 180° - 55° = 125°$.
Die Innenwinkelsumme betr“agt in jedem Viereck $360°$.
Also gilt im Viereck $ADEF$: $65° + 90° + \varphi + 125° = 360° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 80°$.

29. Idee: Toni Chehlarova

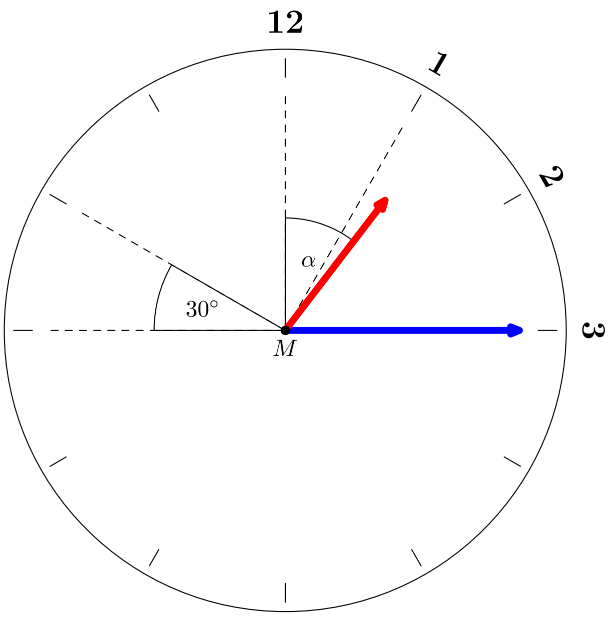


(a) Wie viel Uhr ist es?

(b) Berechne das Winkelmaß α .

Lösung: (a) Es gibt zwei Zeitpunkte für diese Zeigerstellung: tagsüber 13:15 Uhr oder nachts 01:15 Uhr.

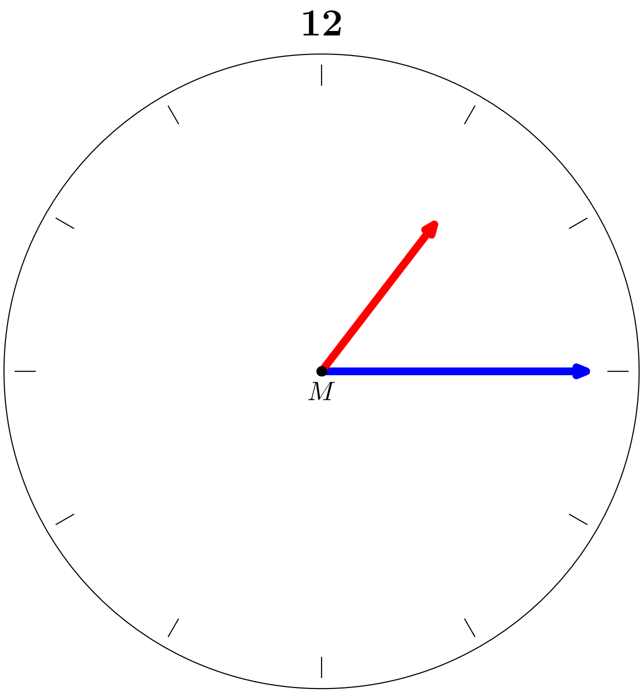
(b)



Wenn du den Minutenzeiger (blau) um 15 min. d.h. eine Viertelstunde zurückdrehst, hat sich der Stundenzeiger (rot) um den vierten Teil des Weges zwischen der „1“ und der „2“ zurückgedreht. Zwichen der „1“ und der „2“ wird ein Winkel von $360° : 12 =$

$30°$ überstrichen. Also hat sich der rote Zeiger um $30° : 4 = 7,5°$ weiterbewegt.
Also folgt: $\alpha = 30° + 7,5° = 37,5°$.

30. Idee: Toni Chehlarova



Wie spät ist es, wenn sich der Minutenzeiger um $300°$ weitergedreht hat?

Lösung: Um auf dem Zifferblatt von einer Ziffer zur nächsten zu gelangen, braucht der blaue Minutenzeiger stets 5 Minuten. Dabei überstreicht er einen Winkel von
$360° : 12 = 30°$.
Für einen Winkel von $300°$ braucht der Minutenzeiger $(300° : 30°) \cdot 5\,\text{Minuten} = 50\,\text{Minuten}$.
Er ist danach über die „12“ um 5 Minuten hinausgewandert und der rote Stundenzeiger ist gleichzeitig über die „2“ hinausgewandert.
Dann ist es entweder 14:05 Uhr oder 02:05 Uhr.

7 Achsenspiegelung

1. (a) Zeichne das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck ABC mit $A(2 \mid 0$, $B(7 \mid 1)$ und $C(5 \mid 2)$ in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-1 \leqq x \leqq 8$ und $-4 \leqq y \leqq 4$

   (b) Spiegelt man den Punkt B am Mittelpunkt M_1 der Strecke $[AC]$, so erhält man den Bildpunkt B'.
   Zeichne M_1 und B' ein und lies die Koordinaten von B' ab.

   (c) Spiegle den Punkt C am Mittelpunkt M_2 der Strecke AB (Spiegelbild C').

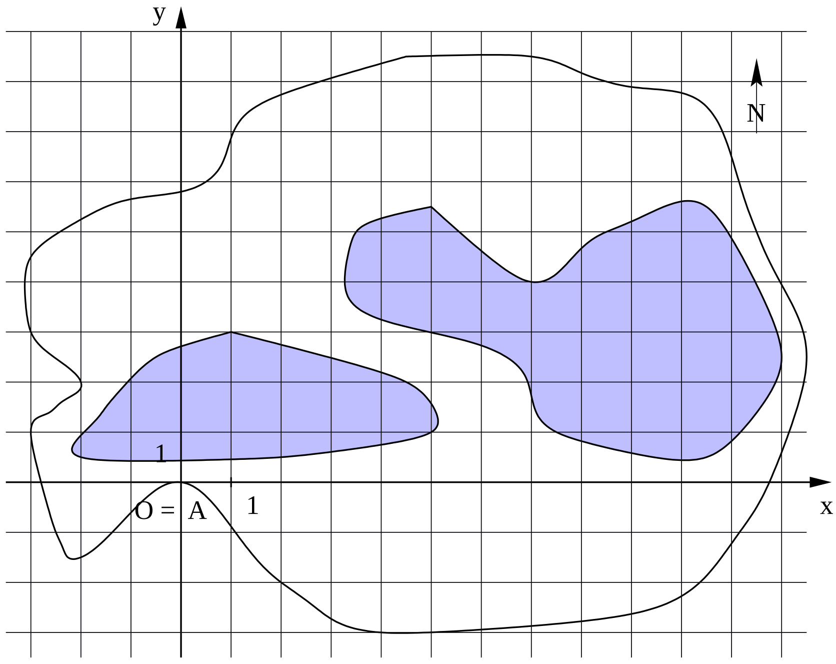
   (d) Lies die Koordinaten des Punktes M_2 ab und berechne die Koordinaten des Bildpunktes C' mit Pfeilen.

   (e) Zeichne die Strecken $[B'C]$, $[B'C']$ sowie $[C'B]$ ein und beweise durch Rechnung: Das Viereck $ABCB'$ ist ein Parallelogramm.

   (f) Entdeckst du in deiner Zeichnung eine Raute? Begründe deine Antwort.

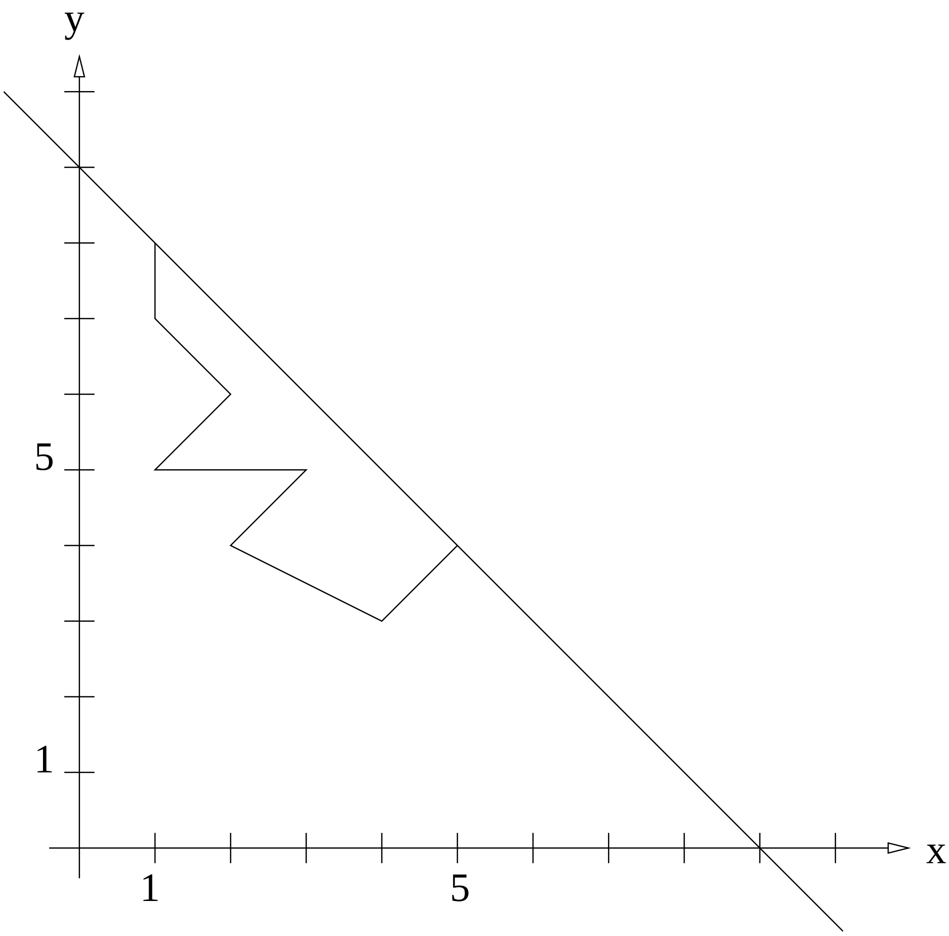
Lösung: (b) $B'(0 \mid 3)$ (d) $C'(4 \mid -3)$
(f) Das Viereck $AC'BC$ ist eine Raute, denn jede Punktspiegelung ist längentreu.

2. Ein alter Pirat hinterlässt seinem Sohn eine Schatzkarte (siehe Zeichnung unten) mit folgender Beschreibung:
   Fahre mit dem Schiff zur Insel „Mariucassa" und lege am Ankerplatz A an. Gehe 250 Schritte nach Osten und anschließend 100 Schritte nach Norden. Du stehst dann direkt unter einer Kokospalme P. Gehe nun 150 Schritte nach Westen und nochmals 250 Schritte nach Norden. Jetzt erreichst du einen Wasserfall W. Gehe von hier 300 Schritte nach Osten und 50 Schritte nach Süden. Vor dir erhebt sich ein Affenbrotbaum, in dessen Schatten ich für dich eine Schatzkiste vergraben habe.
   Trage in die Landkarte die Stelle S ein, wo der Sohn nach dem Schatz graben muss und berechne ihre Koordianten auf deinem Schulaufgabenblatt.



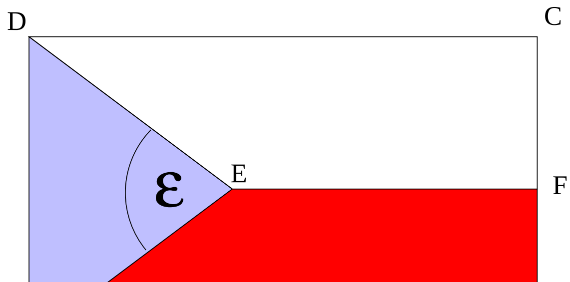
Lösung: Die Koordinaten des Schatzes S heißen (8|6).

3. Ergänze die Figur zu einer achsensysmmetrischen Figur mit der Geraden g als Symmetrieachse!



Lösung: - -

4. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AB} = 9\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = \overline{EF} = 6\,\text{cm}$. Der Winkel mit dem Maß ε ist zusätzlich eingezeichnet.

(a) Zeichne die Figur so, dass über dem Rechteck $ABCD$ noch 4 cm Platz bleibt.

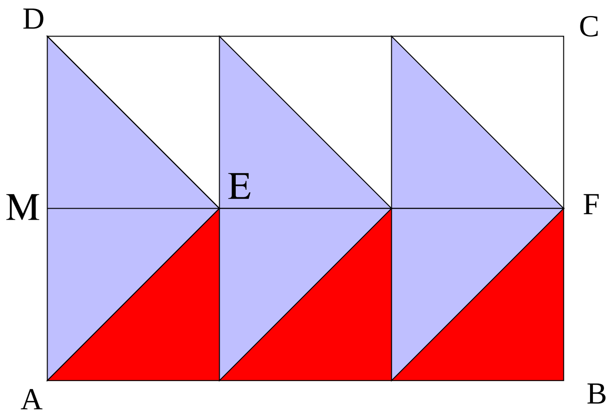
(b) Ermittle sowohl den Flächenanteil des Dreiecks AED als auch den des Vierecks $DEFC$ am Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$.
Hinweis: Mache in einer Zeichnung deutlich, wie oft das Dreieck AED in das Rechteck $ABCD$ hinein passt.

(c) Wie ändert sich der Flächenanteil des Dreiecks AED an dem des Rechtecks $ABCD$, wenn bei sonst unveränderten Bedingungen das Winkelmaß ε kleiner wird? Begründe deine Antwort.

(d) Spiegle die Figur an der Achse AE.

Lösung: (a) –

(b)

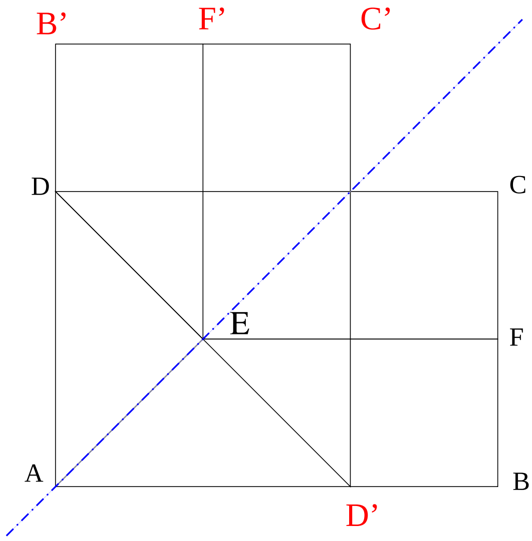


Das Rechteck $ABCD$ besteht aus 6 konguenten Quadraten. Das Dreieck AED ist sich aus Symemtriegründen genau so groß wie eines dieser Quadrate.

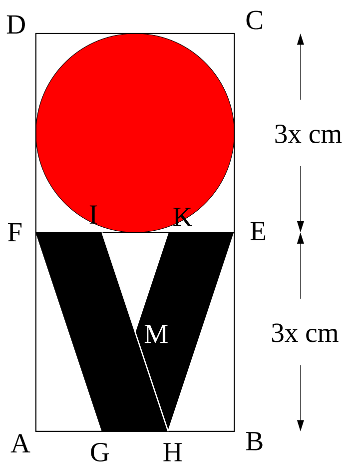
$$\Rightarrow \quad \frac{A(AED)}{A(ABCD)} = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad \frac{A(ABFE)}{A(ABCD)} = \frac{2,5}{6} = \frac{5}{12}\,.$$

(c) Wenn ε kleiner werden soll, dann muss der Punkt E nach rechts wandern. Dadurch wird der Flächenanteil des Dreiecks AED am Rechteck $ABCD$ größer.

(d)



5. Das ist ein Bild des Logos der Firma MARABU, die Farben herstellt.



Die Figur setzt sich aus zwei Quadraten zusammen.
Die Strecken $[AG], [GH], [HB], [FI], [IK]$ und $[KE]$ sind alle gleich lang.

(a) Zeichne die Figur für $x = 1,5$.

(b) Der Mathematiklehrer G. Rade gibt den Auftrag: „Zeichnet von denjenigen Teilfiguren des Logos, die symmetrisch aufgebaut sind, alle Symmetrieachsen ein.“
Da meldet sich Maria: „Das geht in einem Fall gar nicht.“

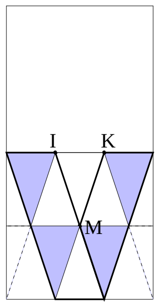
(c) Im unteren Quadrat ist eine V-förmige Figur zu sehen, die sich aus einem Parallelogramm und einem Trapez zusammensetzt.
Ermittle den Anteil dieser Figur an der Gesamtfläche des Logos als Bruch. **Hinweis:** Zerlege das Quadrat $ABEF$ in lauter gleiche Dreiecke vom Typ MKI.

Lösung:

(a) –

(b) Maria hat Recht: Der rote Kreis enthält unendlich viele Symmetrieachsen, die man gar nicht alle zeichnen kann.
Ansonsten sind zwei Quadrate, das Rechteck, das Trapez $GHEF$ und zwei gleichschenklige Dreiecke als achsensymmetrische Figuren vorhanden.

(c)



Das untere Quadrat enthält 10 ganze und 4 halbe Dreiecke vom Typ MKI. Also ist die Fläche des ganzen Logos so groß wie 24 solcher Dreiecke.
Das Parallelogramm besteht aus 4 und das Trapez aus 3 solchen Dreiecken. Der V-Teil des Logos nimmt also $\frac{7}{24}$ der Gesamtfläche ein.

6. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ durch $A(-1 \mid 1)$, $B(2 \mid 0)$, $C(3 \mid 3)$ und $D(0 \mid 4)$.
Dieses Quadrat wird an einer Achse s so gespiegelt, dass das Spiegelbild B' des Punktes B die Koordinaten $(0 \mid 2)$ besitzt.

(a) Zeichne das Quadrat$ABCD$ und den Punkt B' in ein Koordinatensystem.
Platzbedarf: $-2 \leqq x \leqq 5$ und $-2 \leqq y \leqq 5$.

(b) Konstruiere die Spiegelachse s mit dem Zirkel.
Zeichne das Bildquadrat $A'B'C'D'$ ein.
[Teilergebnis: $A'(1 \mid -1)$]

(c) Es gilt $[AB] \cap [A'B'] = S$. Zeichne den Punkt S ein.
Begründe: Der Punkt $S(0,5 \mid 0,5)$ liegt auf der Spiegelachse.

(d) Es gilt: $\psi \approx 53,13°$.
Berechne das Maß φ des Winkels BSB' auf zwei Stellen nach dem Komma.

(e) Welchen besonderen Namen würdest du dem Viereck $SBCB'$ geben?
Nenne zwei besondere Eigenschaften dieses Vierecks.

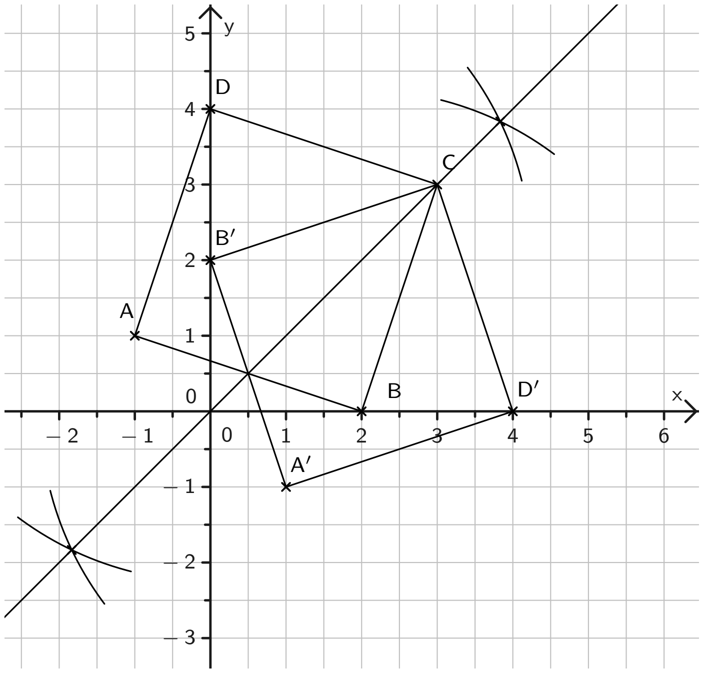
(f) Begründe: Die Dreiecke $B'CD$ und $BD'C$ haben jeweils gleich lange Seiten.
Wie nennt man Dreiecke mit dieser Eigenschaft?

Lösung:

(a) –

(b) –

(c)



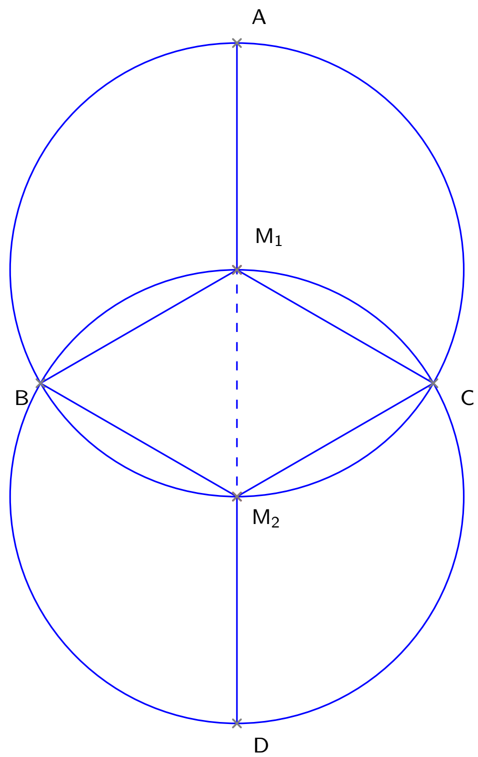
(d) $\varphi \approx 360° - 2 \cdot 90° - 53{,}13°$; $\quad \varphi \approx 126{,}86°$

(e) Es ist ein achsensymmetrischer Drachen.

- $\overline{CB'} = \overline{CB}$
- Es besitzt eine Symmetrieachse.

(f) Es gilt: $\overline{BC} = \overline{B'C}$ und $\overline{CD} = \overline{CD'}$
Z.B.: Jede Achsenspiegelung ist längentreu.
Solche Dreiecke nennt man gleichschenklig.

7.



(a) Zeichne die dargestellte Figur für $\overline{M_1M_2} = 3$ cm auf dein Blatt.

(b) Zeichne farbig alle Symmetrieachsen in deine Figur ein.

(c) Welchen besonderen Namen kannst du dem Viereck M_2CM_1B geben. Begründe deine Antwort.

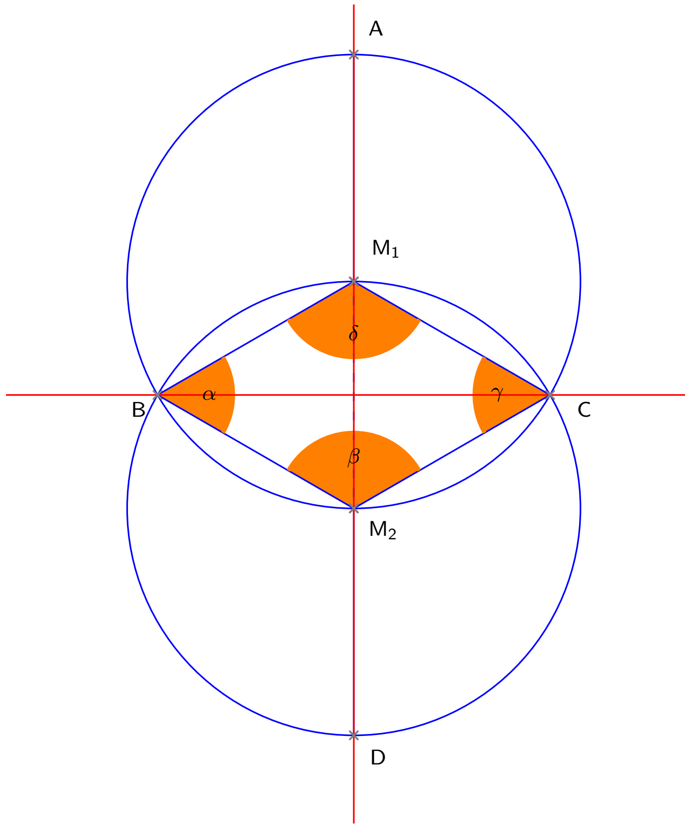
(d) Begründe ohne Messung: Das Maß eines Innenwinkels im Viereck M_2CM_1B beträgt 60°.

(e) Bestimme die Maße der restlichen Innenwinkel des Vierecks M_2CM_1B ohne Messung. Begründe jeweils deine Ergebnisse.

(f) Zeichne das Viereck $BDCA$ ein. Wie oft passt das Viereck M_2CM_1B in das Viereck $BDCA$? Begründe deine Antwort.

Lösung:

(a) –



(b) –

(c) Das Viereck ist eine Raute.

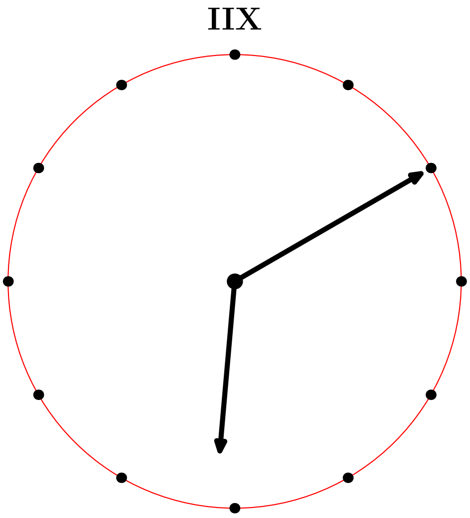
(d) Es gilt z.B. $\alpha = 60°$, denn das Dreieck BM_2M_1 ist gleichseitig.

(e) $\alpha = \gamma = 60°$ (Symmetrie) $\beta = \delta = (306° - 2 \cdot 60°) : 2 = 120°$

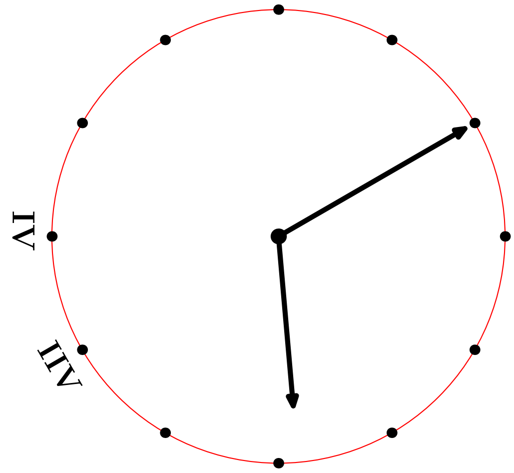
(f) Das Dreieck BCA ist in 3 kongruente Dreiecke zerlegt worden. Das Viereck BM_2CM_1 enthält zwei dieser Dreiecke, das Viereck $BDCA$ enthält 6 dieser Dreiecke. Also ist das große Viereck dreimal so groß wie das kleine.

8.

Figur a)



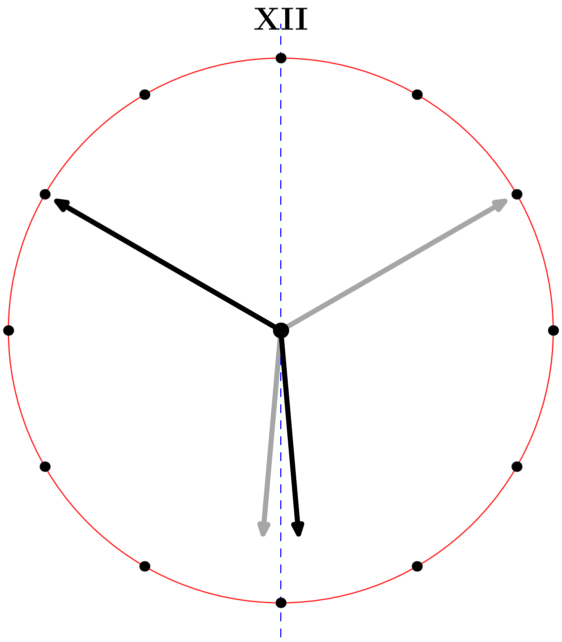
Figur b)



Wie spät ist es jeweils auf den beiden Uhren?

Lösung: **Figur a)**
Offenbar ist die römische Zahl **XII** und damit auch das Zifferblatt spiegelverkehrt dargestellt.

Figur a)

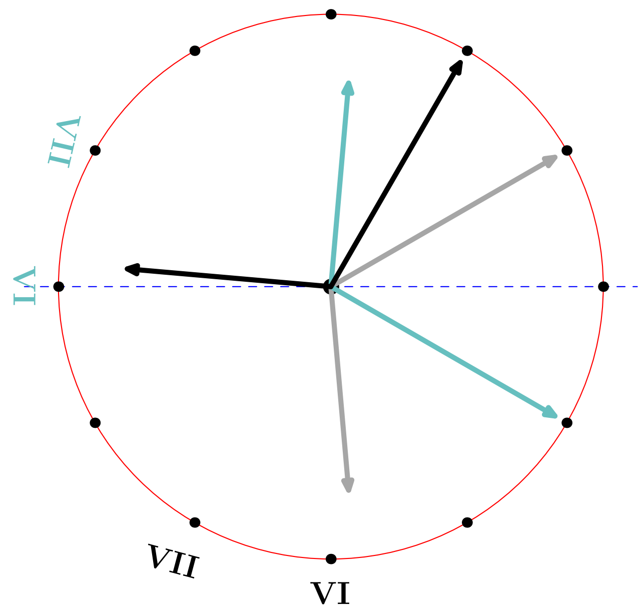


Jetzt ist es also 10 Minuten vor Sechs oder 17:50 Uhr oder 05:50 Uhr.

Figur b)
Am Rand links ist die römische Zahl **VII** und damit auch das Zifferblatt spiegelverkehrt (oben und unten sind vertauscht) dargestellt. Nach der entsprechenden Rückspiegelung

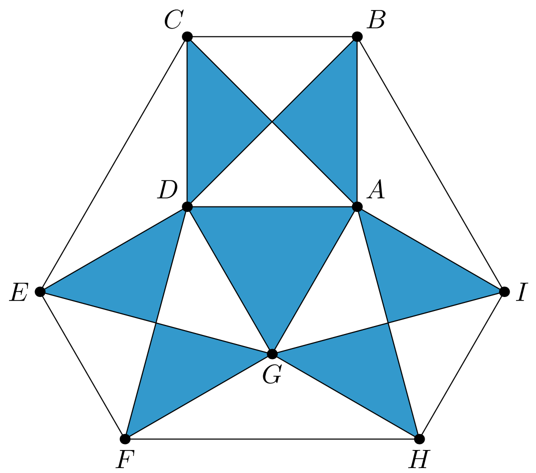
steht die Uhr dann auf 12:20 Uhr (siehe türkis-gefärbte Zeiger).
Gleichzeitig ist dann die benachbarte Zahl eine **VI**. Normalerweise befindet sich die VI unten in der Mitte. Also ist dass Zifferblatt nicht nur spiegelverkehrt, sondern auch noch um $-90°$ gedreht dargestellt.

Figur b)



Jetzt ist es also 5 Minuten nach Neun oder 09:05 Uhr oder 21:05 Uhr.

9.



Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt.

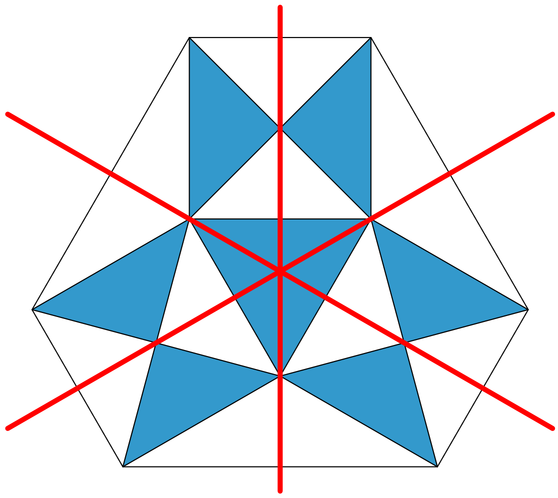
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AD} = 4\,\text{cm}$. Beginne mit dem gleichseitigen Dreieck im Zentrum.

(b) Zeichne die Symmetrieachsen ein.

(c) Wie viele Dreiecke sind zusätzlich durch das Einzeichnen der Symmetrieachsen entstanden?

Lösung: (a) Errichte über jeder Seite des gleichseitigen Dreiecks im Zentrum das entsprechende Quadrat.
Zeichne dann jeweils die Verbindungsstrecke zwischen den äußeren Eckpunkten zweier benachbarter Quadrate.

(b)



(c) Im Inneren des gleichseitigen Dreiecks: **12** zusätzliche Dreiecke.

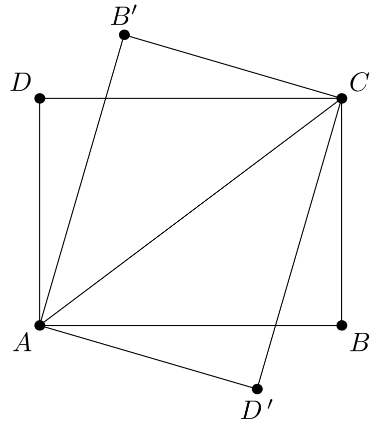
Gleichseitiges Dreieck im Zentrum und die drei benachbarten „weißen“ gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke: **24** zusätzliche Dreiecke.

In den drei „weißen“ gleichschenkligen Dreiecken außen: **6** zusätzliche Dreiecke.

In den drei Quadraten gibt es schließlich **6** zusätzliche Dreiecke. Nicht 12, denn die „weißen“ Paare gleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke, die am gleichseitigen Dreieck im Zentrum liegen, sind schon gezählt.

Es sind also **48** zusätzliche Dreiecke erzeugt worden.

10.



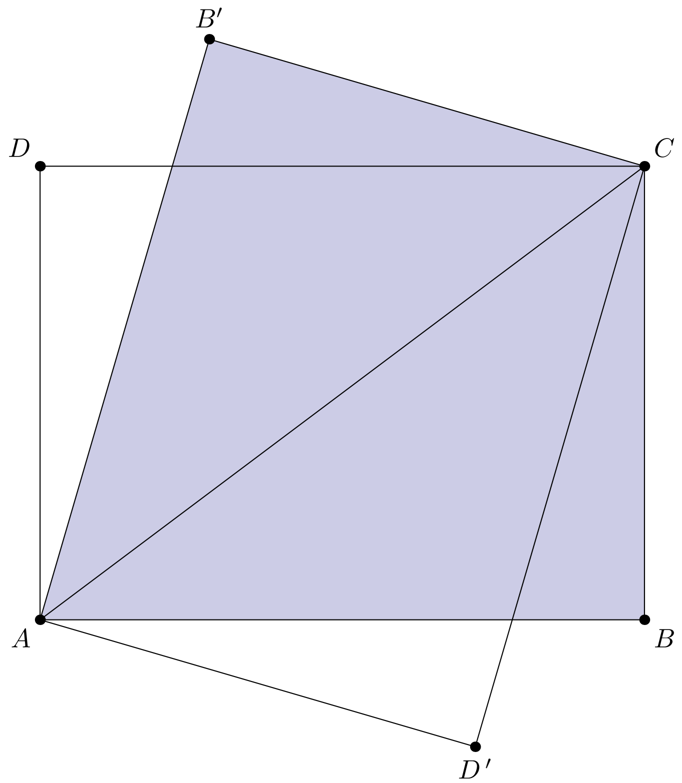
Die Punkte B und D des Rechtecks $ABCD$ wurden an dessen Diagonale $[AC]$ gespiegelt. Dadurch ist das Viereck $AD'CB'$ entstanden.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe:

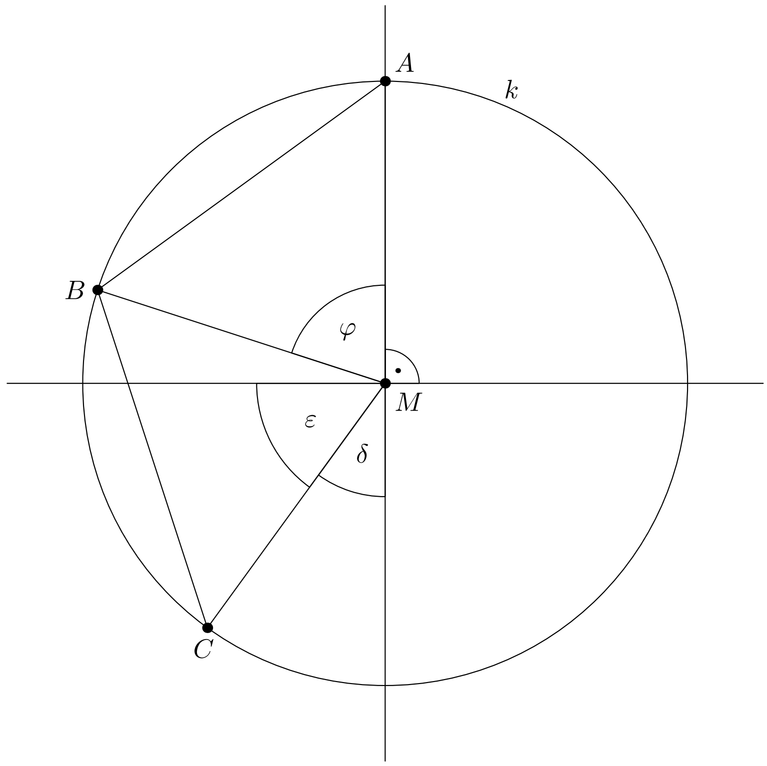
- Das Rechteck $ABCD$ und das Viereck $AD'CB'$ haben den gleichen Flächeninhalt.
- Das Viereck $ABCB'$ ist ein Drachenviereck.

Lösung: (a)



(b)
- Durch die Spiegelung des Punktes B an $[AC]$ wird das Dreieck ABC auf das Dreieck ACB' abgebildet.
  Durch die Spiegelung des Punktes D an $[AC]$ wird das Dreieck ACD auf das Dreieck $AD'C$ abgebildet.
  Jede Achsenspiegelung ist flächentreu, also haben die zwei Vierecke $ABCD$ und $AD'CB'$ den gleichen Flächeninhalt.
- Jede Achsenspiegelung ist längentreu, also gilt:
  $\overline{AB} = \overline{AB'}$ und $\overline{CB} = \overline{CB'}$. Also ist das Viereck $ABCB'$ ein Drachenviereck.

11.



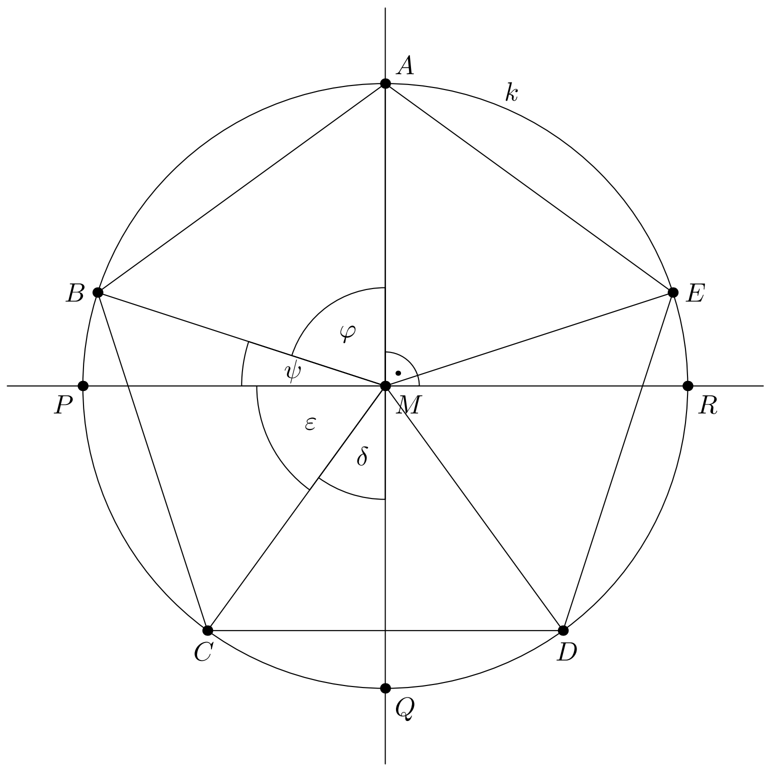
Die Eckpunkte des regelmäßigen Fünfecks $ABCDE$ liegen alle auf der Kreislinie k mit dem Mittelpunkt M.

(a) Ergänze die Figur entsprechend.

(b) Begründe:

- $\varphi = 72°$
- $\varepsilon = 54°$
- $\delta = 36°$.

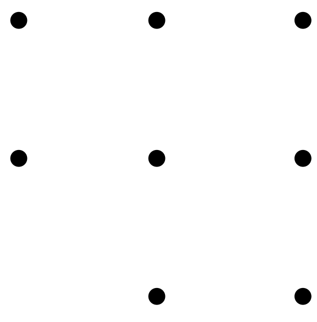
Lösung: (a)



Du kannst die fehlenden Eckunkte D und E z.B. durch Spiegelung der Punkte C und B an der Symmetrieachse AQ des Fünfecks $ABCDE$ erzeugen.

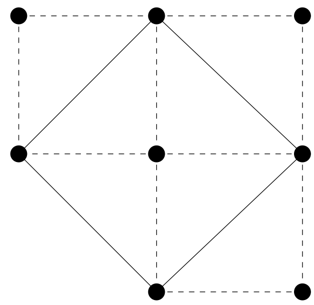
(b)
- Der Mittelpunktswinkel φ tritt in diesem regelmäßigen Fünfeck 5-mal auf:
  $\Rightarrow \quad \varphi = 360° : 5 = 72°$.
- Es gilt: $\psi = 90° - \varphi = 90° - 72° = 18°$.
  Der Winkel BMC besitzt ebenfalls das Maß 72°.
  $\Rightarrow \quad \varepsilon = 72° - \psi = 72° - 18° = 54°$.
- $\delta = 90° - \varepsilon = 90° - 54° = 36°$.

12.



Wie viele Quadrate kannst du erzeugen, wenn du Punkte im Gitter durch Strecken verbindest?
Aus: Känguru der Mathematik 2008, Gruppe Kadett, Österreich 31.03.2008

Lösung:



Die acht Punkte scheinen nur drei Quadrate herzugeben, aber die vier schrägen Strecken liefern ein weiteres Quadrat. Also sind es insgesamt vier Quadrate, die du so erzeugen kannst.
Das große Quadrat hat den gleichen Flächeninhalt wie zwei kleine Quadrate.