SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 5 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Aufbau des Dezimalsystems

1. (a) Es ist die Folge der ungeraden Zahlen.
   (b) Die Differenz von einer Zahl zu deren Vorgänger erhöht sich stets um 1.
   (c) Der Wert der Summe aus den beiden vorangehenden Folgegliedern ergibt das nächste Folgeglied. („FIBONACCI-Folge“)
   (d) Die Folge wird durch den Term 2^n erzeugt.
   (e) Es ist die Folge der Quadratzahlen.
   (f) Es könnte die Folge der Primzahlen sein.

2. (a) 10234 (b) 9998
   (c) Nein, es gibt nur 5 verschiedenen Ziffern, die gerade Zahlen erzeugen können: 0; 2; 4; 6 und 8.
   (d) 10023
   (e) Er hat recht, denn solche Zahlen sind stets durch die jeweilige Ziffer, die sie erzeugt, ohne Rest teilbar. Ausgenommen sind dabei die einstelligen Zahlen 2, 3, 5 und 7, die selbst Primzahlen sind.

2 Die vier Grundrechenarten

1. Die Summen bestehen aus unmittelbar aufeinander folgenden ungeraden Zahlen. Sie beginnen stets mit 1.
   Die Summenwerte ergeben stets Quadratzahlen. Z.B.: $1+3+5=9=3\cdot 3=3^2$. Die Basis gibt die Anzahl der Summanden wieder.

2. Prinzip: Der kleinste Summand am Anfang jeder Darstellung bleibt so lange wie möglich erhalten.

3. $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$ Möglichkeiten

4.
   - Die Zahl 4 ist Lösung jeder Gleichung.
   - Summanden darf man vertauschen.
   - Es ist egal, welchen Namen der Platzhalter trägt.
   - Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man beide Seiten der Gleichung vertauscht.
   - Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung dasselbe addiert.

5.
   - Es gilt in jedem Fall für $G=\mathbb{N}: L=\{1;\,2;\,3;\,4\}$
     und für $G=V_5: L=\emptyset$
   - Die Lösungsmenge einer Ungleichung ändert sich nicht, wenn man auf beiden Seiten der Ungleichung dasselbe addiert bzw. subtrahiert.

6. (a): B (b): B (c): A (d): $\{1;\,2;\,3;\,4;\,5;\,6;\,8\}$
   (e) und (f): $\{2;\,4;6\}$

7. $L=\{6;\,12;\,;\,\ldots\,;\,36\}$

8. Der größte Teiler des Differenzwertes ist stets 99.
   Beispiel: 259 ist die Spiegelzahl von 952.
   $952 - 259 = 100 \cdot 9 + 10 \cdot 5 + 2 - 100 \cdot 2 - 10 \cdot 5 - 9 = 99 \cdot 9 - 99 \cdot 2$
   Allgemein: Wenn die Ziffernfolge abc heißt, dann gilt:
   $100a + 10b + 1 \cdot c - 100c - 10b - 1 \cdot a = 99a - 99c$

9. $157 + 175 + 517 + 571 + 715 + 751 = 200 \cdot (1 + 5 + 7) + 20 \cdot (1 + 5 + 7) + 2 \cdot (1 + 5 + 7)$
   $= 222 \cdot (1 + 5 + 7) = 222 \cdot 13$
   Die Teilermenge enthält auf jeden Fall die Elemente: {2; 3; 37; „Quersumme"}

10. (a) Es können 2; 3; 4; 6; 8; 12 oder 24 Kinder gewesen sein.
    (b1) Bei 25 Stückchen: 2; 5 oder 25 Kinder
    (b2) Bei 23 Stückchen: nur 23 Kinder

11. (a) Zwei Schachteln vom Typ (I) enthalten zusammen genau so viele Streichhölzer wie eine Schachtel vom Typ (II). Es ergibt sich z.B.:

Anzahl in Schachtel (I)	1	2	3	11	32	...
Anzahl in Schachtel (II)	2	4	6	22	64	...

    (b) Rechts liegen 16 Streichhölzer lose herum. Befindet sich rechts in der Schachtel vom Typ (II) nur ein Streichholz, dann sind es insgesamt 17 Streichhölzer. Die kannst du aber nicht gleichmäßig auf die drei Schachteln links verteilen. Also müssen in der Schachtel vom Typ (II) mindestens zwei Streichhölzer liegen. Dann sind es rechts mindestens 18. Also liegen links in jeder Schachtel vom Typ (I) mindestens 6 Streichhölzer. Gibt man dann in die Schachtel rechts vom „=" 3 dazu, dann sind es zusammen 21 Hölzer. Dann entfallen links auf jede Schachtel 7 Streichhölzer. Nun kannst du immer Vielfache von 3 in die Schachtel (II) dazugeben; die Division durch 3 geht dann für die rechte und damit auch für die linke Seite immer auf.
    In Tabellenform erhältst du damit:

Anzahl in Schachtel (I)	6	7	8	19	10	11	...
Anzahl in Schachtel (II)	2	5	8	11	14	17	...

    Der Inhalt der Streichholzschachteln kann jedoch nicht beliebig groß werden. Handelsübliche volle Schachteln enthalten meist weniger als 50 Streichhölzer.

    (c) Die Anzahl der Streichhölzer in Schachtel (II) spielt keine Rolle, da sie ja auf beiden Seiten auftaucht. Deshalb enthalten die drei Schachteln vom Typ (I) zusammen 19 Streichhölzer, die sich aber nicht gleichmäßig auf drei diese drei Schachteln verteilen lassen. Also hat Fritz mit seiner kritischen Anmerkung recht.

12.

A	B	C
D	E	☆
❁	F	G

Die Felder „G“ und „D“ dürfen weder mit „Stern“ noch mit „Rosette“ belegt werden, den sonst lägen entweder in der 3. Spalte oder in der 3. Zeile bzw. in der 1. Spalte oder in der 2. Zeile zwei gleiche Symbole. Also muss „Pik“ auf „D“ und auf „G“ liegen. liegen.
Dann liegt auf „A“ ein „Stern“ und auf „C“ gehört eine „Rosette“ hin.
Der Rest ist klar. Claudia hat am Ende das folgende Muster erzeugt:

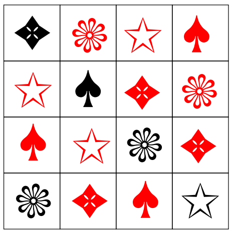
☆	♠	❁
♠	❁	☆
❁	☆	♠

Anregung: Beginne ein neues Muster aus drei gleichen Symbolen, die auf einer der beiden Diagonalen liegen und vervollständige es.

13.

♦	A	B	C
D	♠	E	F
G	H	❁	I
❁	J	K	☆

In der 1. Spalte müssen auf „D“ oder „G“ „Stern“ oder „Pik“ liegen. Da in der 2. Zeile jedoch schon „Pik“ liegt, muss auf „D“ der „Stern“ liegen. Dann liegt auf „G“ die Spielfarbe „Pik“.
In der 4. Zeile müssen auf „J“ oder „K“ „Karo“ oder „Pik“ liegen. Da in der 2. Spalte jedoch schon „Pik“ liegt, muss auf „J“ das „Karo“ liegen. Dann liegt auf „K“ die Spielfarbe „Pik“.
In der 2. Spalte müssen auf „A“ oder „H“ „Stern“ oder „Rosette“ liegen. Da in der 3. Zeile jedoch schon eine „Rosette“ liegt, muss auf „H“ der „Stern“ liegen. Dann liegt auf „A“ die „Rosette“.
Der Rest ist klar. Helmut hat am Ende das folgende Muster erzeugt:



14. (a) Marie:
$74 + \bigcirc = 121 \quad \Rightarrow \quad \bigcirc = 47$ und tatsächlich: $74 + 47 = 121$.
Beate:
$67 + 76 = 143 \quad \Rightarrow \quad 13 \cdot \square = 143 \quad \Rightarrow \quad \square = 11$.
Gregor hat es am schwersten gemacht:
Du weißt schon: $\square = 11$. Also ist $187 = 11 \cdot \heartsuit \quad \Rightarrow \quad \heartsuit = 17$.
Jetzt muss also die Summe aus einer zweistelligen Zahl und ihrer Spiegelzahl 187 ergeben.
1. Versuch: $99 + 99 = 198$; das ist zuviel.
2. Versuch: $98 + 89 = 187$ oder $89 + 98 = 187$; beides passt.
Gregor hat zwei Möglichkeiten offen gelassen:
$\blacksquare = 8$ und $\triangle = 9$ oder $\blacksquare = 9$ und $\triangle = 8$.

(b) Max meint den Teiler 11.

(c) Ursula meint: „Beim Addieren der beiden Ziffern der zweistelligen Zahl kommt an der Tafel immer der zweite Faktor heraus.“

(d)
- Zweiziffrige Zahl: $z \cdot 10 + e \cdot 1$; ihre Spiegelzahl: $e \cdot 10 + z \cdot 1$
  Summe: $z \cdot 10 + e \cdot 1 + e \cdot 10 + z \cdot 1$. In dieser Summe tauchen also 11 Zehner und 11 Einer auf. Also sind es $11 \cdot (\text{Zehner} + \text{Einer})$.
  Für die Summe aus der zweiziffrigen Zahl und ihrer Spiegelzahl ergibt sich also: $11 \cdot z + 11 \cdot e = 11 \cdot (z + e)$.
  Max hat somit recht: Der Summenwert hat stets den Teiler 11.
  Die Summe $11 \cdot z + 11 \cdot e = 11 \cdot (z + e)$ enthält also einerseits immer den Faktor 11, andererseits auch stets den Faktor $(z + e)$, der aber gerade die Ziffernsumme der zweistelligen Zahl darstellt. Die Summe aus allen Ziffern einer Zahl heißt „**Quersumme**“.
  Ursula hat auch recht: Die Quersumme aus der zweiziffrigen Zahl ist stets Teiler des Summenwertes.
- Wenn Herr Lierte die Null zugelassen hätte, dann wären Max und Ursula dennoch im Recht. Probiere es an einigen Beispielen aus. Was wäre, wenn Du die „zweiziffrige Zahl“ 00 verwenden würdest?

(e)
- $209 : 11 = 19$; insofern ist die Aussage von Max hier bestätigt. Nach der Aussage von Ursula muss jedoch die Summe der beiden Ziffern von Lisas Zahl (von der sie dann die Spiegelzahl erzeugt) den Wert 19 besitzen. Die größte Zffer ist die 9. Die größte zweistellige Zahl ist somit 99, die mit ihrer Spiegelzahl identisch ist: $9 + 9 = 18 < 19$. Also muss ich Lisa verrechnet haben und Emil hat recht.

- $99 + 99 = 198$; das ist der größte Summenwert, der überhaupt auftauchen kann. Alle möglichen Summenwerte besitzen den Teiler 11 (angefangen von der Zahl 11 selbst). Also gibt es $198 : 11 = 18$ verschiedene Summenwerte.
- $143 : 11 = 13$; gesucht sind alle zweiziffrigen Zahlen mit der Quersumme 13: Es kommen für das Paar (Zahl | Spiegelzahl) nur die Kombinationen

$$(49 \mid 94); (58 \mid 85); (67 \mid 76); (76 \mid 67); (85 \mid 58); (94 \mid 49)$$

in Frage.

15. (a) Die Riesenzahl setzt sich aus $2007 : 3 = 669$ Dreier-Paketen „207“ zusammen. In jedem Paket steckt eine Null. Also enthält die Riesenzahl 669 Nullen.

(b) $207 : 9 = 23$ $\qquad$ $207207 : 9 = 23\,023$ $\qquad$ $207207207 : 9 = 23\,203\,203$.
Es tauchen nur die Ziffern 0,2 und 3 auf, die sich periodisch wiederholen.

(c) Nach dem, was du in (b) herausfinden solltest, beginnt der Wert des Quotienten mit dem Päckchen „23“. Dann folgen $669 - 1 = 668$ Dreier-Pakete mit „023“.
Also enthält der Wert des Quotienten $2 + 668 \cdot 3 = 2006$ Ziffern.

(d)
- Im ersten Päckchen und in allen folgenden Paketen ist die 2 enthalten. Also ist die Ziffer 2 669-mal im Wert des Quotienten enthalten.
- Die Null fehlt im ersten Zweierpäckchen „23“. In jedem Dreier-Paket mit „023“ kommt sie vor.
  Also enthält der Wert des Quotienten $669 - 1 = 668$-mal die Null.

(e) $207 : 23 = 9$ $\qquad$ $207207 : 23 = 9\,009$ $\qquad$ $207207207 : 23 = 9\,009\,009$.
Wie schon in (a) gezeigt, besteht der Zahlengigant aus 669 Dreierpaketen mit „207“.
Bei der Division durch 23 beginnt der Wert des Quotienten mit dem Minipaket „9“.
Dann folgen wieder 668 Dreier-Pakete mit „009“.
Also enthält dieser Wert des Quotienten $668 \cdot 2 = 1336$ Nullen.

16.

$$\underbrace{(10^{117} + 1)}_{\text{1.Faktor}} \cdot \underbrace{(10^{117} \cdot 100)}_{\text{2.Faktor}} \cdot \underbrace{(117^{10+1})}_{\text{3.Faktor}} \cdot \underbrace{(1^{117+10})}_{\text{4.Faktor}} \cdot \underbrace{(10 + 0^{117})}_{\text{5.Faktor}}$$

Der **1. Faktor** endet auf die Ziffer 1.
Der **2. Faktor** besteht aus einer 1, auf die 119 Nullen folgen.
Die letzte Ziffer des **3. Faktors** ist sicher keine Null, da die letzte Ziffer der Basis eine 7 und keine 0 ist.
Der **4. Faktor** hat den Wert 1. Er ändert nichts am Produktwert.
Der **5. Faktor** hat den Wert 10. Dadurch erhöht sich die Anzal aller Nullen beim Wert des Produktes um 1.
Somit liefern der **2. Faktor** und der **5. Faktor** zusammen 120 Nullen, die am Ende des Produktwetes auftauchen.

17. (a) Die letzen beiden Ziffern ergeben die Zahl 12, die durch 4 teilbar ist. Also ist es auch die vollständige Zahl.

    (b) Das Ungetüm besteht aus 18 „Dreierpaketen“ 512. Die Quersumme dieses Zahlenriesen berechnest du dann mit $18 \cdot (5 + 2 + 1) = 18 \cdot 8$. Den Produktwert musst du jetzt gar nicht mehr ausrechnen, denn er ist durch 18 und damit auch durch 9 teilbar. Daher ist das Ungetüm sowohl durch 4 als auch durch 9, also auch durch $4 \cdot 9 = 36$ teilbar.

18. (a) $10 = 7 + 3$.

    (b) Es gibt nur eine gerade Zahl, die nicht größer als 3 ist, nämlich 2. Diese Zahl lässt sich aber nur mit $1 + 1$ als Summe dartsellen. Die Zahl 1 gehört jedoch nicht zu den Primzahlen.

    (c) $18 = 13 + 5$ und $18 = 11 + 7$.

    (d) Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin, von 40 nach und nach alle Primzahlen, die kleiner als 40 sind, zu subtrahieren und dann zu überprüfen, ob der Wert der jeweiligen Differenz eine Primzahl ist:

$40 - 2 = 38 \notin \mathbb{P}$	$\boxed{40 - 3 = 37 \in \mathbb{P}}$	$40 - 5 = 35 \notin \mathbb{P}$
$40 - 7 = 33 \notin \mathbb{P}$	$\boxed{40 - 11 = 29 \in \mathbb{P}}$	$40 - 13 = 27 \notin \mathbb{P}$
$\boxed{40 - 17 = 23 \in \mathbb{P}}$	$40 - 19 = 21 \notin \mathbb{P}$	Fertig.

    (e) Die Darstellung einer ungeraden Zahl als Summe zweier natürlicher Zahlen ist nur möglich, wenn ein Summand gerade, der andere aber ungerade ist. Wenn die beiden Summanden Primzahlen sein sollen, dann muss einer der Summanden 2 sein, denn 2 ist die einzige gerade Primzahl. Beginne mit der Zahl 29, usw:

$\boxed{29 - 2 = 27 \notin \mathbb{P}}$	$\boxed{27 - 2 = 25 \notin \mathbb{P}}$	$25 - 2 = 23 \in \mathbb{P}$
$\boxed{23 - 2 = 21 \notin \mathbb{P}}$	$21 - 2 = 19 \in \mathbb{P}$	$19 - 2 = 17 \in \mathbb{P}$
$\boxed{17 - 2 = 15 \notin \mathbb{P}}$	$15 - 2 = 13 \in \mathbb{P}$	$\boxed{11 - 2 = 9 \notin \mathbb{P}}$
$9 - 2 = 7 \in \mathbb{P}$	$7 - 2 = 5 \in \mathbb{P}$	$5 - 2 = 3 \in \mathbb{P}$
Fertig.		

    (f) Ein Computer mag noch so viele Zahlen durchprobieren, es bleiben immer noch unendlich viele Zahlen übrig, wo man noch nicht weiß, ob sich in diesen Fällen die Goldbachsche Vermutung als richtig oder falsch herausstellt.
    Herr Richstein geht also zu Recht leer aus.

19. (a) „...es ist egal, ob ich die 15 erst von 19 oder von der Summe aus 27 und 19 subtrahiere. Auf jeden Fall wird nur 15 subtrahiert und sonst nichts.“

    (b) Der Wert der Differenz in der jeweiligen Klammer liefert eine kleine Zahl, die ich dann leicht addieren kann.

20. (a) $39 - (27 + 4) = 8$ und $(39 - 27) + 4 = 16$.
$(87 - 53) - 14 = 20$ und $87 - (53 - 14) = 48$.

(b) 1. Zeile Aufgabe links: Von 39 wird mehr als 27 subtrahiert.
1. Zeile Aufgabe rechts: Von 39 wird 27 subtrahiert, dann aber 4 addiert. Also kommt hier mehr heraus.
2. Zeile Aufgabe links: Von 87 wird 53 subtrahiert und davon nochmals 14.
2. Zeile Aufgabe rechts: Von 87 wird um 14 weniger als 53 subtrahiert. Also kommt hier mehr heraus.

21. In der Aufgabe 1 wird von 3456789 nur $12345 - 11 = 12334$ abgezogen. In der Aufgabe 2 wird zunächst 12345, dann aber nochmals 11 abgezogen. Also wird insgesamt $12345 + 11 = 12356$ abgezogen.
Die Differenz beträgt hier $12356 - 12334 = 22$. Also wird in der 2. Aufgabe von 3456789 um 22 mehr subtrahiert als in der 1. Aufgabe. Helmut hat recht und Gertrud hat vermutlich richtig gerechnet. (Warum nur „vermutlich“?)

22. (a) An jeder Kante stehen dann immer zwei kleine Würfel aufeinander: Sie braucht also $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ Würfel.
Das Volumen beträgt dann $(2 \cdot 3\,\text{cm})^3 = 216\,\text{cm}^3$.

(b)
- Anzahl bei dreifacher Kantenlänge $= 3^3 = 27$ Würfel
  Anzahl bei vierfacher Kantenlänge $= 4^3 = 256$ Würfel
  Insgesamt bräuchte sie 283 kleine Würfel.
- **1. Möglichkeit:**
  Maria braucht also 27 Würfel.
  Jeder davon hat ein Volumen von $3\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 27\,\text{cm}^3$.
  $27 \cdot 27\,\text{cm}^3 = 729\,\text{cm}^3$.
  2. Möglichkeit:
  Der große Würfel hat eine Kantenlänge von $3 \cdot 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$.
  Für dessen Volumen ergibt sich: $(9\,\text{cm})^3 = 729\,\text{cm}^3$.

(c) Sie bräuchte 100 kleine Würfel. Aber 100 kleine Würfel ergeben keinen großen Würfel, denn die dreifache Kantenlänge erfordert 27 Würfel und die vierfache Kantenlänge schon 256 Würfel. Dazwischen gibt es nichts.

(d) Für einen Würfel mit der dreifachen Kantenlänge braucht sie 27 kleine.
$150 - 27$ ist ungerade, also bleibt bei der Division durch 8 (doppelte Kantenlänge) ein Rest.
Für zwei Würfel mit der dreifachen Kantenlänge braucht sie 54 kleine.
$150 - 54 = 96$ und $96 : 8 = 12$
Aus 150 Bausteinen kann sie also 12 Würfel mit doppelter und zwei Würfel mit dreifacher Kantenlänge bauen.

23. (a)

$99 \cdot 11 = 1\,089$	
$999 \cdot 11 = 10\,989$	$99 \cdot 111 = 10\,989$
$9999 \cdot 11 = 109\,989$	$99 \cdot 1111 = 109\,989$
$99999 \cdot 11 = 1\,099\,989$	$99 \cdot 11111 = 1\,099\,989$

Es ist $9\,999 \cdot 11 = 9 \cdot 1\,111 \cdot 11 = 9 \cdot 11 \cdot 1\,111 \cdot 11 = 99 \cdot 1\,111$.

(b) Im Wert 1089 des Produktes $99 \cdot 11$ taucht mittendrin noch keine 9 auf.

Das nächste Produkt $999 \cdot 11$ hat eine 9 mehr. Gleichzeitig taucht im Produktwert die erste 9 in der Mitte auf:
$99\mathbf{9} \cdot 11 = 10\mathbf{9}89$.

Im folgenden Produkt $9999 \cdot 11$ stehen zwei Neuner mehr. Gleichzeitig tauchen im Produktwert zwei zusätzliche Neuner auf:
$99\mathbf{99} \cdot 11 = 10\mathbf{99}89$.

Das Produkt $99999 \cdot 11$ in der letzen Zeile enthält drei Neuner mehr. Also stehen im Produktwert drei Neuner mehr als in der ersten Aufgabe: $99\mathbf{999} \cdot 11 = 10\mathbf{999}89$.
Also folgt:
$999\mathbf{9999} \cdot 11 = 10\mathbf{9999}89$ und $99 \cdot 111111111 = 999999999 \cdot 11 = 10\mathbf{9999999}89$.

24. Zunächst rechnest du am besten alle Längen, die in m angegeben sind, in cm um. Z.B.: $4,50\,\text{m} = 450\,\text{cm}$. Dann erhältst du die folgenden Lösungen:

(a)

(a1)	(a2)	(a3)	(a4)
540 cm	60 cm	240 cm	30 cm

(b)

(b1)	(b2)	(b3)	(b4)
300 cm	36 cm	125 cm	15 cm

25. (a) mit (b)

$\boxed{21}$	−	12	=	9
$\boxed{42}$	−	24	=	18
$\boxed{63}$	−	36	=	27
$\boxed{84}$	−	48	=	36

(b)
- Siehe Rechnung oben.
  - → Alle Zahlen sind durch 3 teilbar..
  - → In der ersten Spalte nehmen die Zahlen von oben nach unten um jeweils 21 zu.
  - → In der zweiten Spalte nehmen die Zahlen von oben nach unten um jeweils 12 zu.
  - → In der dritten Spalte nehmen die Zahlen von oben nach unten um jeweils 9 zu.
  - → In der ersten Spalte sind alle Zahlen durch 21 teilbar.
  - → In der zweiten Spalte sind alle Zahlen durch 12 teilbar.
  - → In der dritten Spalte sind alle Zahlen durch 9 teilbar.

26. Z.B. Gleichung (1):
Michaela möchte gern einen Zwerghasen besitzen. Dafür bekommt sie von ihrem Onkel Herbert einen Geldbetrag geschenkt. Sie meint: „Jetzt habe ich doppelt so viel Geld wie vorher.“
Sie geht mit ihren Eltern in die Zoohandlung. Die Einstreu kostet 4 €. Der Zwerghase kostet 32 €. Michaela freut sich: „Auch wenn ich jetzt kein Geld mehr habe, wird es 'Maxi' bei mir gut haben.“
Welchen Betrag hat Michaela von Onkel Herbert erhalten?

Z.B. Gleichung (2):
Alfred hat sich für 4 € eine CD gekauft. Er zählt dann sein gesamtes „Barvermögen“ und meint: „Wenn ich nochmal den gleichen Betrag spare, den ich jetzt noch besitze, könnte ich mir im Sommer eine Karte zu 32 € für das Konzert der 'Glorious Angels' leisten.“
Wie viel Geld hatte Alfred vor dem Kauf der CD zur Verfügung?

27. (a)

Potenz	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	...
Endziffer	3	9	7	1	3	9	7	1	3	9	...

(b) Die Endziffern bilden offenbar Viererpakete in der Reihenfolge [3; 9; 7; 1].

(c) Aus dem Exponenten 22 lassen sich also 5 solche Viererpakete bis zum Exponenten $20 = 5 \cdot 4$ schnüren. Der Exponent 21 muss dann wieder die Endziffer 3 und der Exponent 22 die Endziffer 9 liefern.
Der Wert der Potenz 3^{22} endet also auf die Ziffer 9.

(d) Der Wert der Differenz $3^{22} - 4$ endet wegen $9 - 4 = 5$ auf die Ziffer 5. Der Wert dieser Differenz muss also durch 5 teilbar sein. Also stellt er keine Primzahl dar.
Hinweis: Es gibt Rechenprogramme, welche die Primfaktorzerlegung dieses Differenzwertes ausgeben: $3^{22} - 4 = 5 \cdot 7 \cdot 71 \cdot 499 \cdot 25\,307$. Die Rechenzeit dauert weniger als eine zehntel Sekunde.

(e) Für das Fragezeichen an Stelle des Exponenten könnten z.B. die Zahlen 102, 806 oder 99 998 stehen.
Du musst für den Exponenten nur Zahlen nehmen, die bei der Division durch 4 den Rest 2 ergeben.

28. (a) Hans hat Recht. Ein Beispiel genügt:
Die Zahl 123 besitzt die Quersumme 6. Weil 123 **ungerade** ist, kann diese Zahl aber nicht durch 6 teilbar sein.

(b) Maria hat Unrecht: Wenn du die Ziffern einer Zahl vertauschst, dann bleibt deren Quersumme unverändert. Wenn sie also vorher durch 9 teilbar war, ist sie es auch nach dem Zifferntausch.

29. (a) Die Zahl heißt 1 111 111 111.
Gäbe es eine weitere Zahl mit dem Produktwert 1, dann müsste mindestens eine Ziffer von 1 verschieden sein. Dann wäre der Produktwert entweder 0 oder größer als 1. Also ist dies die einzige Möglichkeit.

(b) Es genügen zwei Darstellungen der Zahl vier als Produkt:
$4 = 4 \cdot 1$ und $4 = 2 \cdot 2$. Um daraus eine dreistellige natürliche Zahl zu erzeugen, muss jeweils mit dem Faktor 1 aufgefüllt und das Kommutativgesetz angewendet werden:

$$\begin{array}{llll} 411 & 141 & 114 & \text{und} \\ 221 & 212 & 122 & \end{array}$$

(c) Es gilt: Hat in einem Produkt mindestens ein Faktor den Wert 0, dann hat das Produkt den Wert 0.
Die Frage nach der Anzahl der dreistelligen natürlichen Zahlen mit dem Querproduktwert 0 ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Anzahl dreistelliger Zahlen, die mindestens eine 0 (nicht an der ersten Stelle) enthalten.
Wir probieren es zunächst im Bereich von 100 bis 199:

100	101	102	...	110	zusammen 11 Zahlen
120	130	140	...	190	zusammen 8 Zahlen
					zusammen 19 Zahlen

Dieselben Überlegungen gelten auch im Bereich von 200 bis 299: Auch hier sind es wieder 19 solche Zahlen, die mindestens eine 0 enthalten.
Diese Überlegungen lassen sich bis in den Berecih von 900 bis 999 fortsetzen. Also sind es zusammen 9 solche Bereiche mit je 19 Zahlen. Damit sind es $19 \cdot 9 = 171$ solche Zahlen, die mindestens eine 0 enthalten.

(d) Weil 11 eine Primzahl ist, müsste das Querprodukt diese Zahl als Faktor enthalten; d.h. es müsste eine zweistellige Ziffer 11 geben. Weil das aber nicht der Fall ist, musst du die gestellte Frage verneinen.

30. (a) Klar.

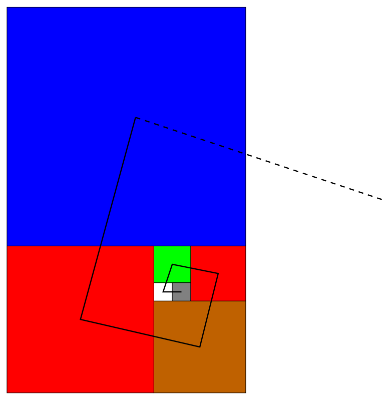
(b)

Quadrat Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
Seitenlänge in cm	1	1	2	3	5	8	13	

Das 8. Quadrat hätte eine Seitenlänge von $8\,\text{cm} + 13\,\text{cm} = 21\,\text{cm}$. Das 9. Quadrat hätte eine Seitenlänge von $13\,\text{cm} + 21\,\text{cm} = 34\,\text{cm}$. Die Seitenlänge des nachfolgenden Quadrates ergibt sich aus Summe der Seitenlängen seiner beiden Vorgänger.

(c) $A = 13\,\text{cm} \cdot 21\,\text{cm} = 273\,\text{cm}^2 = 2{,}73\,\text{dm}^2$

(d)



Es ergibt sich ein spiralförmiger Streckenzug. Solche Spiralen sind auch im Blütenkörbchen der Sonnenblumen erkennbar.

(e) Lass deinen Einfallsreichtum walten!

31. (a) Das Feld oben links ergibt sich zunächst aus $111 - 87 = 24$.
Die drei Kästchen sollen darstellen, dass aus dem Ergebnis 24 drei gleiche Teile gemacht werden. Also steht das Fragezeichen für $24 : 3 = 8$.

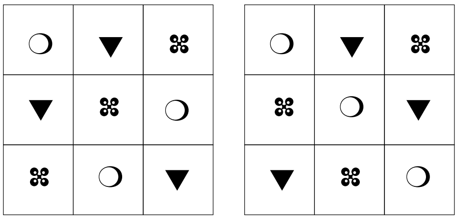
(b)

Figur 2

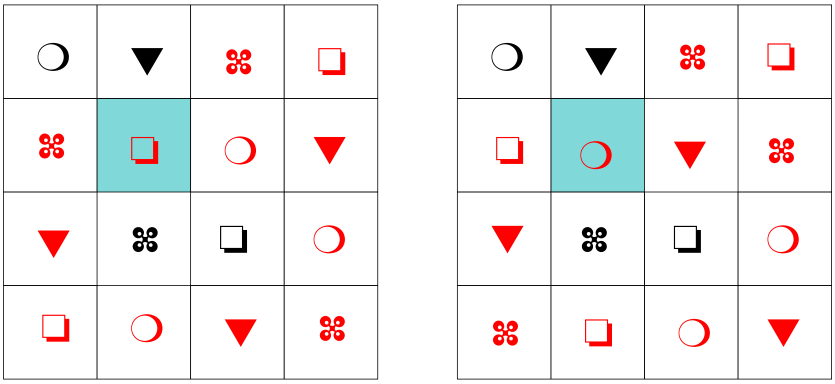
8	1	6
3	5	7
4	9	2

32. Betrachte zunächst das linke Quadrat: $(3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot B = 120 \quad 60 \cdot B = 120$.
Also gilt: $B = 2$.
Am rechten Quadrat gilt dann: $(2 \cdot 5 \cdot 12) \cdot A = 120 \quad 120 \cdot A = 120$.
Also gilt: $A = 1$.

33.



34.



Die erste und die dritte Zeile liegen eindeutig fest. Dann gibt es nur zwei Möglichkeiten, das getönte Quadrat zu belegen. Das ist alles.

35. Edwin wurde im Jahre 1926 geboren. Im Jahre 2026 wäre er dann gerade 100 Jahre alt.

36. (a) Im Jahre 2010 sind die vier Geschwister zusammen 52 Jahre alt. Bis zum Jahr 2013 sind für jedes Kind drei Jahre vergangen.
Also: $52 + 3 \cdot 4 = 64$. Die Kinder sind dann zusammen 64 Jahre alt.

(b) $(100 - 52) : 4 = 12 \quad 2010 + 12 = 2022$.
Im Jahre 2022 sind die vier Geschwister zusammen 100 Jahre alt.

(c) $(163 - 52) : 4 = 111 : 4 = 27$ Rest 3. Es kommt also keine ganze Jahreszahl heraus; die vier Kinder werden nicht zusammen 163 Jahre alt.

37. (a) $1 \heartsuit 4 = 1^2 + 1 \cdot 4 = 5$,
$1 \heartsuit 5 = 1^2 + 1 \cdot 5 = 6$,
$1 \heartsuit 6 = 1^2 + 1 \cdot 6 = 7, \ldots, \ 1 \heartsuit 473589 = 1^2 + 1 \cdot 473589 = 473590$.

(b) Verwende ein Zahlenbeispiel: $8 \heartsuit 5 = 104$. (Siehe oben.)
Aber $5 \heartsuit 8 = 5^2 + 5 \cdot 8 = 65$. Das Kommutativgesetz gilt in diesem Fall nicht, also gilt es für das Rechenziechen $\heartsuit$ nicht.

(c) $7 \heartsuit \square = 126$ bedeutet:
$7^2 + 7 \cdot \square = 126 \quad \Rightarrow \quad 7 \cdot \square = 77 \quad \Rightarrow \quad \square = 11$.

(d) $x \heartsuit x = x^2 + x^2$.
Rechts wird zweimal die gleiche Zahl addiert, egal, welche Belegung des Platzhalters x du gerade wählst. Wenn du aber zu einer Zahl die gleiche Zahl addierst, kommt stets eine gerade Zahl heraus.

(e)

x ist gerade:	Dann ergibt $x^2 + xy$ eine gerade Zahl.
x ist ungerade und y ist ungerade:	Dann ergibt $x^2 + xy$ eine gerade Zahl.
x ist **ungerade** und y ist **gerade**:	**Dann ist $x^2 + xy$ ungerade.**

38. (a) 94 000

(b) 10 039

39. (a) Es sind die Zahlen 34, 43, 62 und 26.

(b) Solche Zahlen sind z.B. 17, 117, 1117, 11117, ...; d.h. die Ziffer 1 lässt sich beliebig oft einfügen, ohne dass sich am Wert des Ziffernproduktes etwas ändert. Also gibt es **unendlich** viele solche natürliche Zahlen.

(c) Die Zahl 13 ist eine Primzahl. D.h. die 13 lässt sich nicht in Faktoren (außer 1) zerlegen, die kleiner als 13 sind. Weil jede natürliche Zahl aus lauter einstelligen Ziffern besteht, die 13 aber zweistellig ist, gibt es **keine** solche natürliche Zahl.

(d) Deine Tabelle könnte z.B. so aussehen:

	100	110	200	210	...	800	810	900	910
	101	120	201	220	...	801	820	901	920
	102	130	202	230	...	802	830	902	930
	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	109	190	209	290	...	809	890	909	990
Anzahl:	10	9	10	9	...	10	9	10	9

Die Einhunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.
Die Zweihunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.
...
Die Achthunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.
Die Neunhunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.

Also sind es insgesamt $(10 + 9) \cdot 9 = 171$ solche natürliche Zahlen.

40.

$$2 \cdot 9\,089\,133 = 9\,089\,129 + \boxed{9\,089\,137}$$

Begründung:
$2 \cdot 9\,089\,133 = 9\,089\,133 + 9\,089\,133$. Der erste Summand auf der rechten Seite der Aufgabe, nämlich $9\,089\,129$, hat einen um 4 geringeren Wert als $9\,089\,133$. Also muss der gesuchte Summand im Kästchen zum Ausgleich dafür einen um 4 höheren Wert als $9\,089\,133$ besitzen. Also muss im Kästchen die Zahl $9\,089\,137$ stehen.

41. (a)
- $\{9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14\}$.
- Es sind sechs natürliche Zahlen.
- Z.B.: Bilde die Differenz der Randzahlen: $15 - 8 = 7$.
  Subtrahiere 1 vom Wert der Differenz: $7 - 1 = 6$.
  Also liegen sechs Zahlen dazwischen.

(b)
- $74 - 57 - 1 = 16$. Es liegen 16 natürliche Zahlen dazwischen.
- Klar.

(c) $801\,467 - 103\,859 - 1 = 697\,607$. Dazwischen liegen also $697\,607$ natürliche Zahlen.

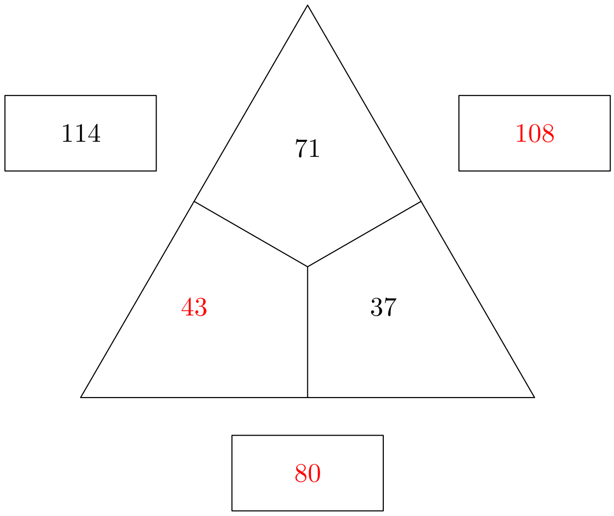
42. (a) **1. Möglichkeit:**
Multipliziere die letzten Ziffern der zwei Faktoren: $8 \cdot 5 = 40$. Dann muss die letzte Ziffer des Produktwertes eine 0 werden und darf damit keine 5 sein.
2. Möglichkeit:
Eine Überschlagsrechnung zeigt: $5\,000 \cdot 2\,000 = 10\,000\,000$. Der richtige Produktwert muss also größer als $10\,000\,000$ sein. Egon hat aber weniger als $10\,000\,000$ errechnet.

(b) $5\,378 \cdot 2\,165 = 11\,643\,370$.

43. (a) $12 + 21 + 24 + 42 + 36 + 63 + 48 + 84 = 330$.

(b) $T_{330} = \{1;\ 3;\ 5;\ 6;\ 10;\ 11;\ 30;\ 33;\ 55;\ 66;\ 110;\ 330\}$.

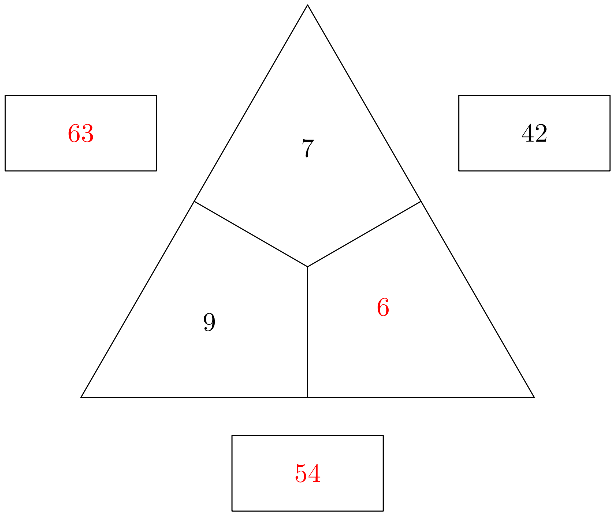
44. (a)
-



- Summe im Inneren des Dreiecks $S_1 = 43 + 37 + 71 = 151\,.$
- Summe der Zahlen in den drei Rechtecken: $S_2 = 80 + 108 + 114 = 302\,.$
- $S_2 = 2 \cdot S_1\,.$

(b)
- Es gibt beliebig viele verschiedene Möglichkeiten.
- Er gilt immer noch; auch dein Nachbar müsste das mit seinem Beispiel bestätigen.
- Beispiel: Die Zahl 114 in der Lösung (a) im Rechteck links oben. Dort ist die 71 gemäß der Regeln als Summand enthalten. Aber auch im Rechteck rechts oben ist die Zahl 71 als Summand in der Zahl 108 enthalten. Also taucht die Zahl 71 bei der Berechnung des Summenwertes aus dem Inhalt der drei Rechtecke doppelt auf.
  Dieses doppelte Auftreten gilt jeweils aber gleichermaßen für die Zahlen 37 und 43.
  Also besteht die Summe aus dem Inhalt der drei Rechtecke stets aus dem Doppelten der drei einzelnen Zahlen im Dreieck.

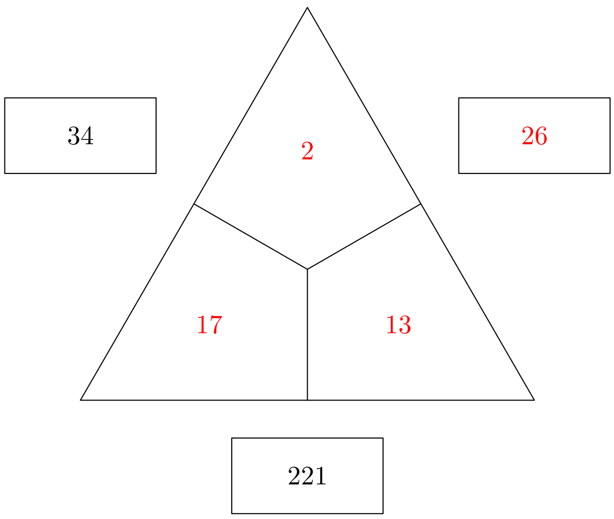
45. (a)
-



- Produkt im Inneren des Dreiecks $P_1 = 9 \cdot 6 \cdot 7 = 378$.
- Produkt der Zahlen in den drei Rechtecken: $P_2 = 54 \cdot 42 \cdot 63 = 142\,844$.
- $142\,844 : 378 = 378$; d.h. $P_2 : P_1 = P_1$ oder $P_2 = P_1^2$.

(b)
- Es gibt beliebig viele verschiedene Möglichkeiten.
- Er gilt immer noch; auch dein Nachbar müsste das mit seinem Beispiel bestätigen.
- Jede Zahl im Dreieck dient als Faktor für die Produktwerte in zwei Rechtecken. Also tauch jeder Faktor im Produkt der Zahlen aus den drei Rechtecken doppelt auf.

46.



Die Zahl 34 lässt sich sich nur auf eine Weise in Primfaktoren zerlegen :
$34 = 2 \cdot 17$. Weil aber 221 ungerade ist, darf nicht der Faktor 2 unten links im Dreieck stehen, sondern die 17. Der Rest ist klar.

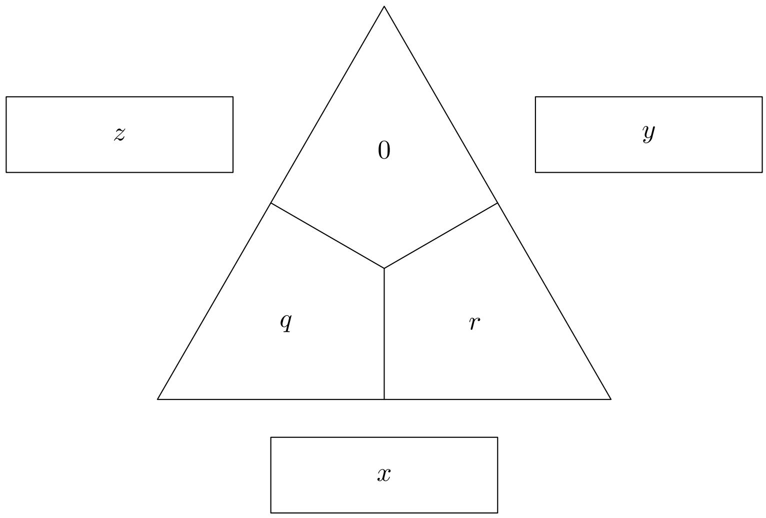
Wenn du jedoch statt 34 zunächst 221 ins Auge fasst, ist die Zerlegung schwieriger, aber genauso eindeutig: $221 = 17 \cdot 13$.

47. Du hast gelernt:

- **Wenn in einem Produkt ein Faktor null ist, dann ist der Produktwert null.**
- **Wenn der Produktwert null ist, dann muss ein Faktor dieses Produktes den Wert null besitzen.**

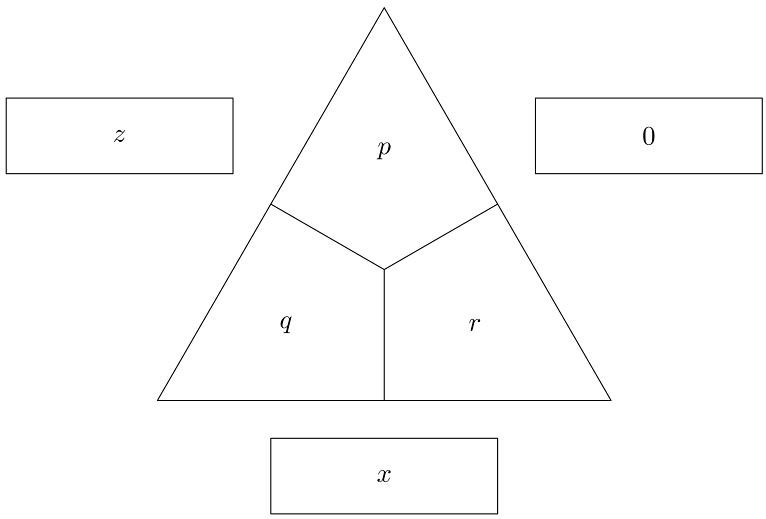
Mit der Anwendung dieser beiden Sätze kannst du die Behauptungen untersuchen:

(a)



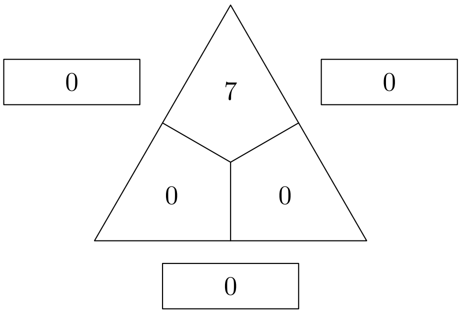
Angenommen, die Null steht oben in der Dreiecksspitze. Dann müssen die beiden Rechtecke oben rechts und links gemäß den eingangs festgelegten Regeln ebenfalls den Faktor null enthalten. Dann gilt aber $z = y = 0$. Die Behauptung ist richtig.

(b)



Angenommen, die Null steht im Rechteck oben rechts. Dann muss $p = 0$ oder auch $r = 0$ gelten. Die Behauptung ist richtig.

(c) Die Behauptung ist falsch. Zur Begründung genügt es, ein Gegenbeispiel zu finden.



48. (a) Beispiel: Aus $13 + 17 = 30$ wird dann $2 \cdot 13 + 2 \cdot 17 = 60 = 2 \cdot 30 = 60 = 2 \cdot (13 + 17)$. Die Behauptung ist wahr.

(b) Beispiel: 1. Summand: 19 EURO. 19 EURO : 2 = 9 EURO und 50 Cent.
2. Summand: 17 EURO. 17 EURO ·2 = 34 EURO.
19 EURO +17 EURO = 34 EURO $\neq$ 9 EURO und 50 Cent+34 EURO.
Die Behauptung ist falsch.

49. (a) Beispiel: 1. Faktor: 46 ; 2. Faktor: 50; $46 \cdot 50 = 2300$
$46 : 2 = 23$; $50 \cdot 2 = 100$; $23 \cdot 100 = 2300$. Die Behaupung ist immer richtig. Wenn ein Faktor halbiert wird, dann wird der ganze Produktwert halbiert. Wird aber gleichzeitig der zweite Faktor verdoppelt, dann wird es auch der halbe Produktwert. Also belibt alles beim alten. Fritz hat Recht.

(b)
- Beispiel: 1. Faktor: 11 ; 2. Faktor: 9; $11 \cdot 9 = 99$
  $11 \cdot 3 = 33$; $9 \cdot 3 = 27$; $33 \cdot 27 = 891 = 99 \cdot 9$. Der Produktwert hat sich verneunfacht.
- Alter Produktwert: $\square \cdot \bigcirc$.
  Verdreifachung des ersten Faktors: $3 \cdot \square$; Verdreifachung des zweiten Faktors: $3 \cdot \bigcirc$.
  Neuer Produktwert: $3 \cdot \square \cdot 3 \cdot \bigcirc = 3 \cdot 3 \cdot \square \cdot \bigcirc = 9 \cdot \square \cdot \bigcirc$.

(c) „Wenn in einem Produkt aus zwei Faktoren jeder Faktor gleichzeitig verzehnfacht wird, dann verhundertfacht sich der Produktwert.“

50. (a) $36 + 2 \cdot (99 - 62) = 36 + 2 \cdot 37 = 36 + 74 = 110$.

(b)
- $(198 + 36) - 124 = 234 - 124 = 110$.
- Du erhältst das gleiche Ergebnis wie in der Aufgabe (a).
- Die Klammern in der Lösung der Aufgabe (b) sind für das Rechenergebnis ohne Bedeutung.
  Weil Summanden vertauschbar sind, ohne dass sich der Summenwert ändert,

kannst du das Ergebnis auch so rechnen:
$36 + 198 - 124$.
Nun sind 198 das Doppelte von 99 und 124 das Doppelte von 62 . Das bedeutet, dass auch hier der doppelte Inhalt der Klammern von der Aufgabe (a) ausgerechnet wird. Die Zahl 36 ist in beiden Aufgabe gleich. Also muss bei der Aufgabe (a) das gleiche herauskommen wie bei der Aufgabe (b).

51. (a) $(100 - 2 \cdot 10) \cdot (74 : 2 - 37) = (100 - 20) \cdot (37 - 37) = 80 \cdot 0$. Bis dahin stimmt alles.

(b) Im Kino sitzen 80 Zuschauer. Während der Vorführung geht der Filmprojektor kaputt. Die Zuschauer können den Film nicht zu Ende sehen. Als Entschädigung bekommt jeder Besucher 0 EURO. Nach Helmuts Rechnung würden dann insgesamt 80 EURO ausgezahlt.

(c) Weshalb soll bei $0 : 0$ „ausgerechnet“ 80 herauskommen?
Bisher galt die Regel: Wenn in einem Quotienten der Dividend und der Divisor den gleichen Wert besitzen, dann hat der Quotient den Wert 1 . Aber, ob das bei $0 : 0$ auch noch stimmt?

52.

•	2	3
13	26	39
17	34	51

53. (a) $7 \cdot 101 = 707 = 700 + 7$; seine Regel stimmt.
$53 \cdot 101 = 5353 = 5300 + 53$; seine Regel stimmt.
$964 \cdot 101 = 97364 = 96400 + 964$; seine Regel stimmt.
$1001 \cdot 101 = 101\,101 = 100\,100 + 1001$; seine Regel stimmt.

(b) Christian sollte die Regel von Hans zunächst an einem Beispiel testen:
$1\,234\,567 \cdot 101 = 124\,691\,267 = 123\,456\,700 + 1\,234\,567$; die Regel von Hans stimmt auch für dieses Beispiel.
Allerdings ist dieses eine Beispiel nur ein Hinweis, aber kein Beweis dafür, dass die Regel auch für so große oder noch größere oder sogar **alle natürlichen Zahlen** gilt.
Wir untersuchen die Regel genauer.
„Hänge jeweils ... zwei Nullen an ...“ bedeutet: Multipliziere (den ersten Faktor)

mit 100. „Addiere zu dieser neuen Zahl den ersten Faktor.“ bedeutet: Dieser erste Faktor kommt noch einmal hinzu. Also hast du den ersten Faktor insgesamt mit 101 multipliziert. Das bedeutet: Die Regel von Hans bei der Multiplikation mit 101 gilt für alle natürlichen Zahlen.

54.

$1+1+8 = 10$	$2+2+6 = 10$	$3+3+4 = 10$
$1+2+7 = 10$	$2+3+5 = 10$	
$1+3+6 = 10$	$2+4+4 = 10$	
$1+4+5 = 10$		

55. (a) „Da brauche ich doch nur von Uwes Ergebnis 1000 zu subtrahieren. Dann habe ich mein Ergebnis.“
Begründung: Bei sonst identischen Summanden steht in Uwes Aufgabe $+500$ und in der Aufgabe von Doris -500. Also unterscheiden sich die beiden Ergebnisse um den Wert 1000.

(b) Das Ergebnis von Doris ist dann 10 386.

56. $6 \cdot 7 \cdot 15 = 10 \cdot 3 \cdot 21$.

57. (a) Damit der Differenzwert minimal wird, muss der Minuend möglichst klein und der Subtrahend möglichst groß werden:
$\square = 0$, $\heartsuit = 1$ und $\bigcirc = 9$.

(b) $8015 - 794 = 7221$.

58. Bei **jeder** Produktberechnung aus beliebig vielen Faktoren gilt:
Der Produktwert der **Endziffern** aus allen Faktoren hat selbst eine Endziffer. Diese stimmt mit der Endziffer des Produktwertes aus allen Faktoren überein.
Das bedeutet hier: $3 \cdot \bigcirc = \ldots 1$.
Der Produktwert aus 3 und der Ziffer $\bigcirc$ endet also auf 1. Dann muss $\bigcirc = 7$ gelten, denn im Dreiereinmaleins gibt es nur einen Produktwert, der auf 1 endet, nämlich $3 \cdot 7 = 21$.
Somit ergibt sich: $\square 3 \cdot 197 = 4\,531$ Umkehraufgabe: $4\,531 : 197 = 23$.
Also ist $\bigcirc = 2$, und $23 \cdot 197 = 4\,531$.

59. Abelstadt: Es steigen $306 : 2 = 153$ Fahrgäste aus und 79 Fahrgäste steigen ein. Dann sind $153 + 79 = 232$ Fahrgäste im Zug.
Besselheim: Es steigen $232 : 2 = 116$ Fahrgäste ein und 120 Personen aus. Dann sind 4 Fahrgäste weniger im Zug als vor der Ankunft in Besselheim.
Nach der Abfahrt in Besselheim sind dann also noch $232 - 4 = 228$ Fahrgäste im Zug.

60. Aus $a \cdot b + 3 = 42$ folgt $a \cdot b = 39$. Es gilt $\mathbb{T}_{39} = \{1; ; 3; 13; 39\}$. Damit sind folgende Fälle möglich:

$$\begin{array}{lclcll} 1 \cdot 39 & = & 39 & \Rightarrow & a = 1 \text{ und } b = 39 & \text{oder } a = 39 \text{ und } b = 1 \\ 3 \cdot 13 & = & 39 & \Rightarrow & a = 3 \text{ und } b = 13 & \text{oder } a = 13 \text{ und } b = 3 \end{array}$$

61. Die Faktoren sollen a, b und c heißen. Es gilt: $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$.
Weil du Faktoren vertauschen kannst, ohne dass sich der betreffende Produktwert ändert, ergeben sich dann die folgenden Möglichkeiten:

a	b	c
2	5	7
2	7	5
5	2	7
5	7	2
7	2	5
7	5	2

Insgesamt gibt es also sechs Möglichkeiten.

62. Zur Lösung sind die jeweiligen Umkehraufgaben hilfreich:

(a)

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{11 \cdot 5}_{=55} \cdot \square \cdot \underbrace{3 \cdot 7}_{=21} & = & 15\,015 \\ 55 \cdot \square \cdot 21 & = & 15\,015 \\ 55 \cdot \square & = & 15\,015 : 21 = 715 \\ \square & = & 715 : 55 = 13 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcl} 3\,000 : \bigcirc & = & 1 \cdot 10 \cdot 25 = 250 \\ 3\,000 & = & 250 \cdot \bigcirc \\ 3\,000 : 250 & = & \bigcirc \\ 12 & = & \bigcirc \end{array}$$

63. In der Umkehraufgabe muss $13 \cdot ?$ eine dreiziffrige Zahl ergeben, die einerseits aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und andererseits auf die Ziffer 5 endet. Notwendig dazu ist, dass anstelle des Fragezeichens eine natürliche Zahl steht, die auf die Ziffer 5 endet.
Das ergibt folgende Möglichkeiten:

Wert des Quotienten	Δ	$\bigcirc$	$\square$	
$13 \cdot 5 = 65$		6	5	keine dreiziffrige Zahl
$13 \cdot 15 = 195$	1	9	5	
$13 \cdot 25 = 325$	3	2	5	
$13 \cdot 35 = 455$	4	5	5	geht nicht: gleiche Ziffern
$13 \cdot 45 = 455$	5	8	5	geht nicht: gleiche Ziffern
$13 \cdot 55 = 715$	7	1	5	
$13 \cdot 65 = 845$	8	4	5	
$13 \cdot 75 = 975$	9	7	5	

Es sind also nur die Quotientenwerte $\{195; 325; 715; 845; 975\}$ möglich.

64. Wenn Egon ohne weitere Vorbedingungen 6 Jahre jünger wäre als Emil, dann wäre Emil 19 Jahre alt.
Egon ist aber nur unter der Bedingung 6 Jahre jünger, dass Emil ein Jahr älter ist. Mit 19 Jahren ist er ein Jahr zu alt. Also muss Emil jetzt 18 Jahre alt sein.

65. (a)

$1 \cdot 13 = 13$	$13 + 12 = 25$	gesuchte Zahl: **25**
$2 \cdot 13 = 26$	$26 + 12 = 38$	gesuchte Zahl: **38**
$3 \cdot 13 = 39$	$39 + 12 = 51$	gesuchte Zahl: **51**
$4 \cdot 13 = 52$	$52 + 12 = 64$	gesuchte Zahl: **64**
$5 \cdot 13 = 65$	$65 + 12 = 77$	gesuchte Zahl: **77**
$6 \cdot 13 = 78$	$78 + 12 = 90$	gesuchte Zahl: **90**
$7 \cdot 13 = 91$	$91 + 12 = 103$	Die Zahl 103 ist aber schon dreistellig.

(b) Die kleinste dreistellige Zahl ist 100. Aber hier gilt: $100 : 13 = 7\,R\,9$.
Die letze Zeile der Tabelle in der Lösung der Aufgabe (a) liefert damit die gesuchte kleinste Zahl **103** .

(c) 999 ist die größte dreistellige Zahl, aber es gilt: $999 : 13 = 76\,R\,11$.
Dann ist $998 : 13 = 76\,R\,10$. Du musst in deiner Suche also so weit zurück, bis der Rest auf 12 zugenommen hat.
$998 - 10 = 988$ .Dann gilt $988 : 13 = 76$. Also ist $987 : 13 = 75\,R\,12$.
Damit heißt die gesuchte Zahl **987**.

66. (a) Eine 11-stellige natürliche Zahl kann höchstens die Quersumme $11 \cdot 9 = 99$ erreichen. Für die Quersumme 100 muss also mindestens eine Stelle dazukommen.

(b)
- Die gesuchte Zahl muss mit einer „1“ beginnen. Dann muus die Quersumme 100 mit möglichst wenig weiteren Stellen erreicht werden. Also dürfen nur Neuner folgen, denn jede folgende Ziffer, die kleiner als 9 ist, hat eine Erhöhung der Stellenzahl und damit eine Vergrößerung des Zahlenwertes zur Folge.
Mit der Lösung von (a) erhältst du die gesuchte Zahl $199\,999\,999\,999$.

- „Einhundertneunundneunzig Milliarden neunhundertneunundneunzig Millionen neunhundertneunundneunzig Tausend neunhundertneunundneunzig".

(c) Du kannst eine natürliche Zahl zwischen der ersten und der letzten Ziffer mit beliebig vielen Nullen ausstatten, ohne dass sich der Wert der Quersumme 100 ändert. Mit immer mehr Stellen, die aussschließlich aus Nullen bestehen, kannst du den Zahlenwert immer weiter steigern, ohne dass du an eine Grenze stößt. Also gibt es keine größte natürliche Zahl mit der Quersumme 100.

67. (a) $2013 : 61 = 33$ und $33 = 11 \cdot 3$. Also gilt: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$.

(b) $2013^{2013} = (3 \cdot 11 \cdot 61)^{2013} = 3^{2013} \cdot 11^{2013} \cdot 61^{2013}$.
Durch das Potenzieren einer Primzahl kommen keine **neuen** Primzahlen hinzu.
Also enthält der Rechenausdruck 2013^{2013} auch wieder nur drei verschiedene Primfaktoren.

(c) 3^{2013} enthält 2013-mal den Primfaktor 3.
11^{2013} enthält 2013-mal den Primfaktor 11.
61^{2013} enthält 2013-mal den Primfaktor 61.
Also sind in der Potenz 2013^{2013} genau $3 \cdot 2013 = 6039$ Primfaktoren enthalten.

68. (a) Jeder Summand in S_g hat einen Partner in S_u, der um 1 größer ist. Weil beide Summen jeweils 999 Summanden enthalten, muss $S_u > S_g$ gelten.

(b) $S_u - S_g = 999 \cdot 1 = 999$.

3 Größen aus dem Alltag

1. $(170 + 3 + 7) : 4 = 45$

2. Es sei x die Anzahl der entnommenen Fische. Dann gilt:
   $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ und damit $x \in \{61; 121; 181; 241; \ldots\}$

3. $619\,\mathrm{cm}^2$

4. Daniel hat 10 Euro in seinem Geldbeutel.

5. Betrag in €:

Klaus	Beate	Helmut	Summe = 20?
1	3	4	nein
2	4	5	nein
3	5	6	nein
4	6	7	nein
5	7	8	ja

   Danach geht nichts mehr.

6. Es gibt genau fünf Lösungen:

Goldhamster	25	20	15	10	5
Meerschweinchen	5	8	11	14	17

7. 1500

8. (a)

	Mo.	So.	Sa.	Fr.	Do.	Mi.	Di.	Gesamt
Berta	1	0	1	0	1	0	1	4
Frieda	1	0	0	1	0	0	1	3
Paula	1	0	0	0	0	1	0	2
Summe	3	0	1	1	1	1	2	**9**

   Die Hühner hatten seit dem Dienstag 9 Eier gelegt.

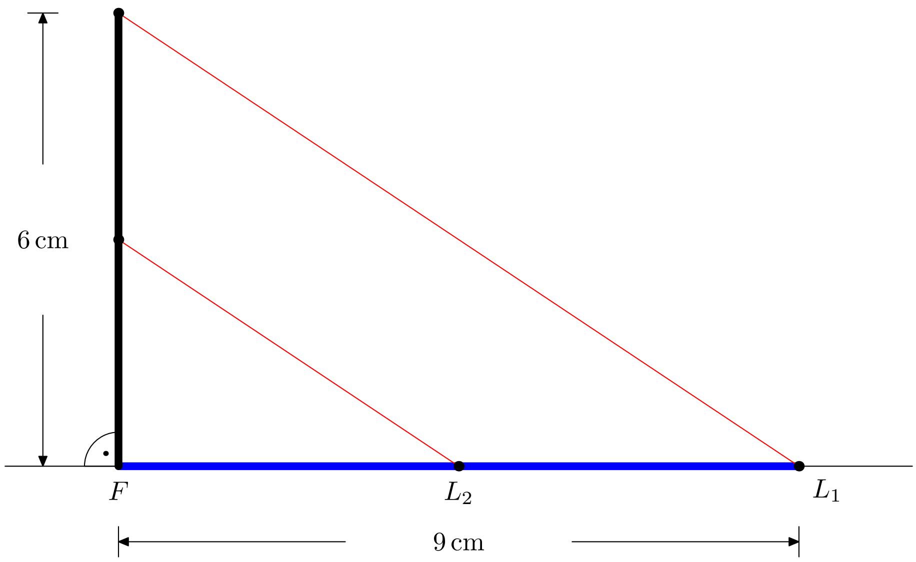
(b) Alle $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ Tage sind die Nester gleichzeitig belegt. Vor dem 10. August war das zuletzt am 11. Juli der Fall. Weil jede Woche 7 Tage dauert und $30 = 4 \cdot 7 + 2$ gilt, war es ein Samstag gewesen.

9. Die Uhr geht an einem Tag 12 Minuten nach.

10. (a) Jeder Würfel hat 12 Kanten. $100\,\text{cm} : 12 = 8\,\text{cm}$ Rest $4\,\text{cm}$.
Eine Kante ist $8\,\text{cm}$ lang. Es bleiben etwa (warum „etwa“?) 4 cm Rest.

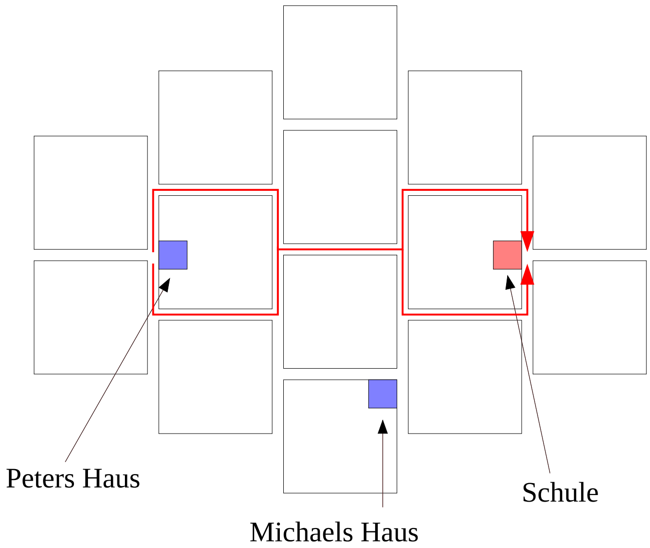
(b) $V \approx 8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} \cdot = 512\,\text{cm}^3$.

11. (a) Zunächst rechnest du am besten die in m angegeben Längen in cm um:
$1{,}20\,\text{m} = 120\,\text{cm}$ und $1{,}80\,\text{m} = 180\,\text{cm}$.
Der Maßstab $1 : 20$ bedeutet eine Verkleinerung um das 20-Fache. Also musst du die Längen durch 20 dividieren.
Den Stab zeichnest du dann $120\,\text{cm} : 20$, also $6\,\text{cm}$ hoch. Den Schatten zeichnest du dann $180\,\text{cm} : 20$, also $9\,\text{cm}$ lang.



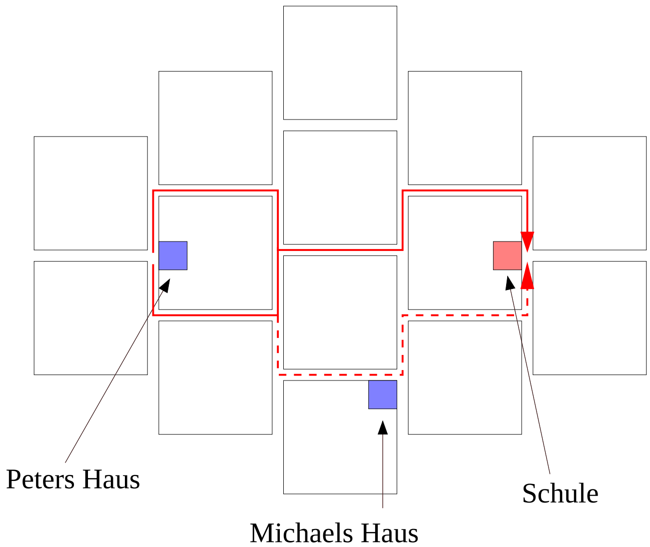
(b) Die zeichnerische Lösung ist schon in (a) dargestellt. Der Schatten ist in der Zeichnung $4{,}5\,\text{cm}$ lang. Diese Länge musst du dann noch mit 20 multiplizieren: $4{,}5\,\text{cm} \cdot 20 = 90\,\text{cm}$. So lang ist der Schatten in Wirklichkeit.
Wenn der Stab also halb so lang ist, dann wirft er auch nur einen halb so langen Schatten.

12. (a) Z.B.:



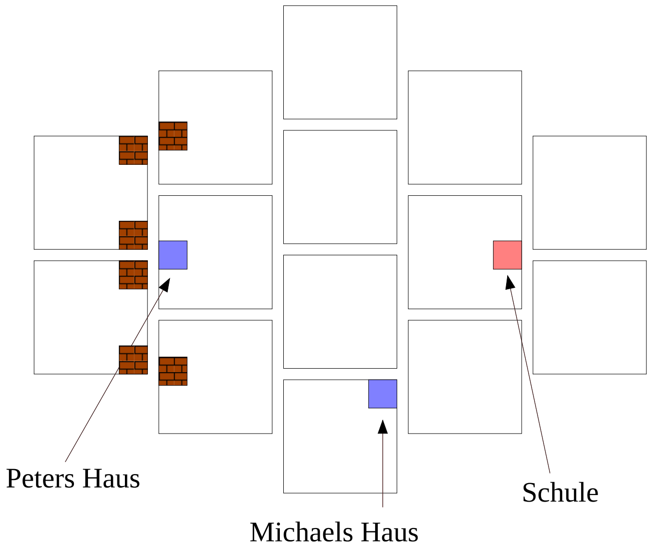
Die Streckenlänge ergibt sich aus:
$50\,\mathrm{m} + 100\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{m} + 100\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{m} + 100\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{m} = 500\,\mathrm{m}$.
Peter muss also mindestens einen halben Kilometer zur Schule zurücklegen.

(b)



Vergleiche die gestrichelte Linie mit den vorherigen Streckenabschnitten. Dann siehst du, dass auch jetzt Peters Weg die gleiche Länge besitzt.

(c)



Das Zuhause von Manfred, Eva und Ludwig könnte in den sechs Häusern sein, die Peters Wohnung am nächsten liegen. Es gibt also mehr als drei Möglichkeiten.

(d) Michael muss nur 300 m zur Schule zurücklegen.

13. $1,2\,\text{Liter} = 1200\,\text{cm}^3$
$1200\,\text{cm}^3 : 10 = 120\,\text{cm}^3 = 1,2\,\text{cl}$, so viel Kaffe enthält eine Tasse höchstens.
$1200\,\text{cm}^3 : 12 = 100\,\text{cm}^3 = 1,0\,\text{cl}$, so viel Kaffe enthält eine Tasse mindestens.

14. Herr Stern hat $160\,€ - 85\,€ = 80\,€$ gespendet.
Frau Glück hat $160\,€ - 110\,€ = 50\,€$ gespendet.
Frau Stern hat $160\,€ - 110\,€ = 30\,€$ gespendet.
Probe: $80\,€ + 50\,€ + 30\,€ = 160\,€$

4 Geometrische Grundlagen

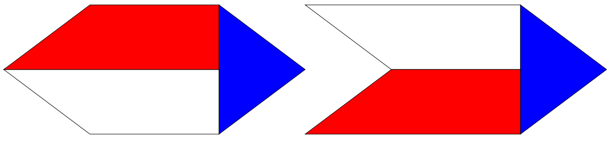
1. (a) 10 (b) 14

2. 44

3. (a) –
   (b) $4\,\text{cm}^2$
   (c) $28\,\text{cm}^2$
   (d) Das schraffierte Dreieck ist 28-mal in der Figur enthalten. Begründung: In das halbe innere Quadrat passen 2 schraffierte Dreiecke. In die Figur passen 14 halbe Quadrate: $2 \cdot 14 = 28$.

4.
   (a) Das Ergebnis fällt je nach Größe der Zeichnung aus.
   (b) Der Saum wäre 16 m lang und die Fläche jedes Rechtecks wäre $5\,\text{m}^2$ groß.
   (c) Je nach Größe der Zeichnung auf dem Blatt. Der Flächeninhalt der Originalfahne muss aber stets 400-mal so groß wie die Zeichnung sein.
   (d) Es gibt beliebig viele Lösungen, aber jedes Rechteck muss dabei doppelt so breit wie hoch sein.
   Im zweiten Fall müsste die Fahne selbst ein Quadrat oder viermal so breit wie hoch sein.

5.
   (a) Die Figur enthält ein symmetrisches Dreieck und zwei gleiche Vierecke (Trapeze).
   (b) Z.B.:



   (c) Z.B.: $A(1|1)$,$B(11|1)$,$C(11|7)$,$D(1|7)$,$E(5|4)$ und $F(11|4)$.

6.

(a) –

(b) Die Figur enthält

- ein großes Rechteck und zwei gleiche Quadrate, also symmetrische Figuren; gegenüber liegende Seiten sind zueinander parallel, benachbarte Seiten stehen aufeinander senkrecht.
- Ein Parallelogramm (die gegenüber liegenden Seiten sind jeweils parallel) und ein Trapez (zwei gegenüber liegende Seiten sind zueinander parallel)
- ein kleines und ein größeres („gleichschenkliges“) Dreieck mit je einer Symmetrieachse
- zwei gleiche („kongruente“) rechtwinklige Dreiecke

7.

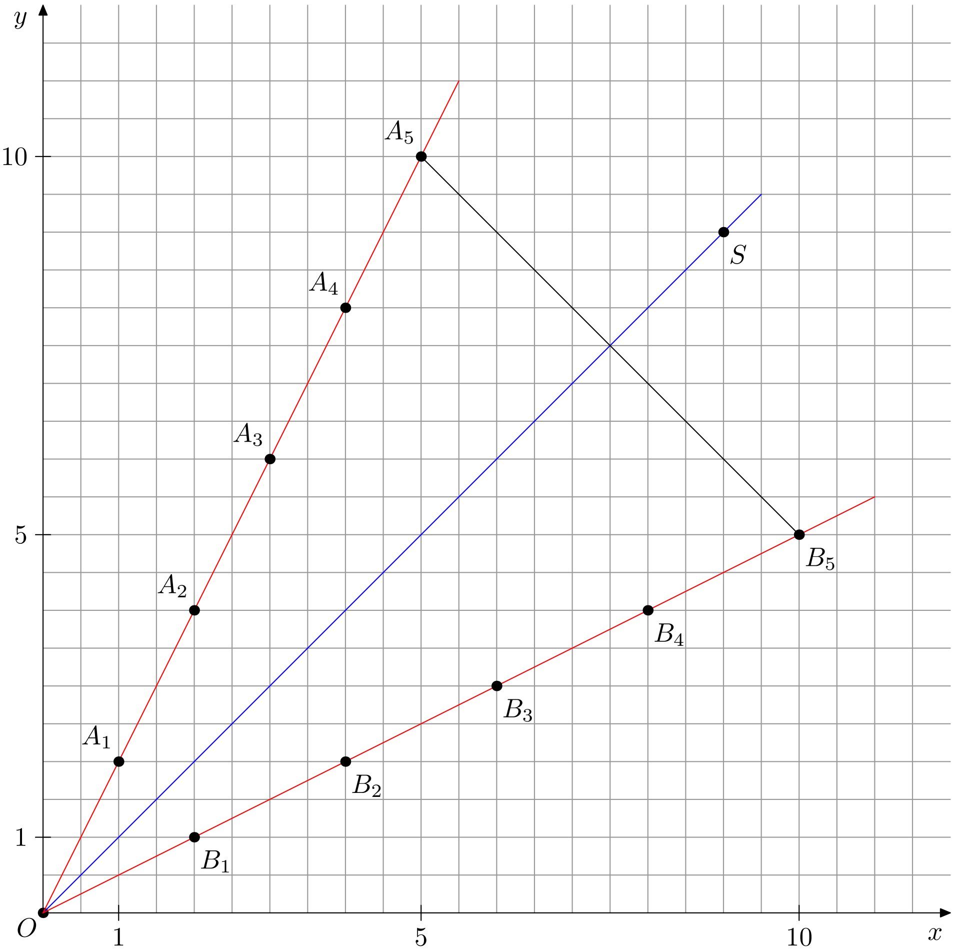
(a) –

(b) In der Figur sind 5 Rechtecke enthalten.

(c) In der Figur gibt es 16 rechte Winkel.

(d) Der Flächeninhalt beträgt $12\,\text{cm}^2$.

8. (a)



(b) $A_5(5 \mid 10)$. Siehe Zeichnung.

(c) „Der x-Wert der Punkte A_n ist stets halb so groß wie der y-Wert dieser Punkte.“
Oder:
„Der y-Wert der Punkte A_n ist stets doppelt so groß wie der x-Wert dieser Punkte.“

(d) Weil der y-Wert der Punkte A_n ist stets doppelt so groß wie der x-Wert dieser Punkte ist, muss der y-Wert stets gerade sein. Aber 24689 ist eine ungerade Zahl. Daher passt der Punkt N nicht.

(e) Der x-Wert der Punkte A_n ist stets halb so groß wie der y-Wert dieser Punkte. Wenn $y = 0$ gilt, dann muss $x = 0 : 2 = 0$ sein. Also gilt $? = 0$.
Oder: Alle Punkte A_n liegen auf einer Geraden, die durch den Ursprung verläuft. Also gilt $? = 0$.

(f) Siehe Zeichnung.

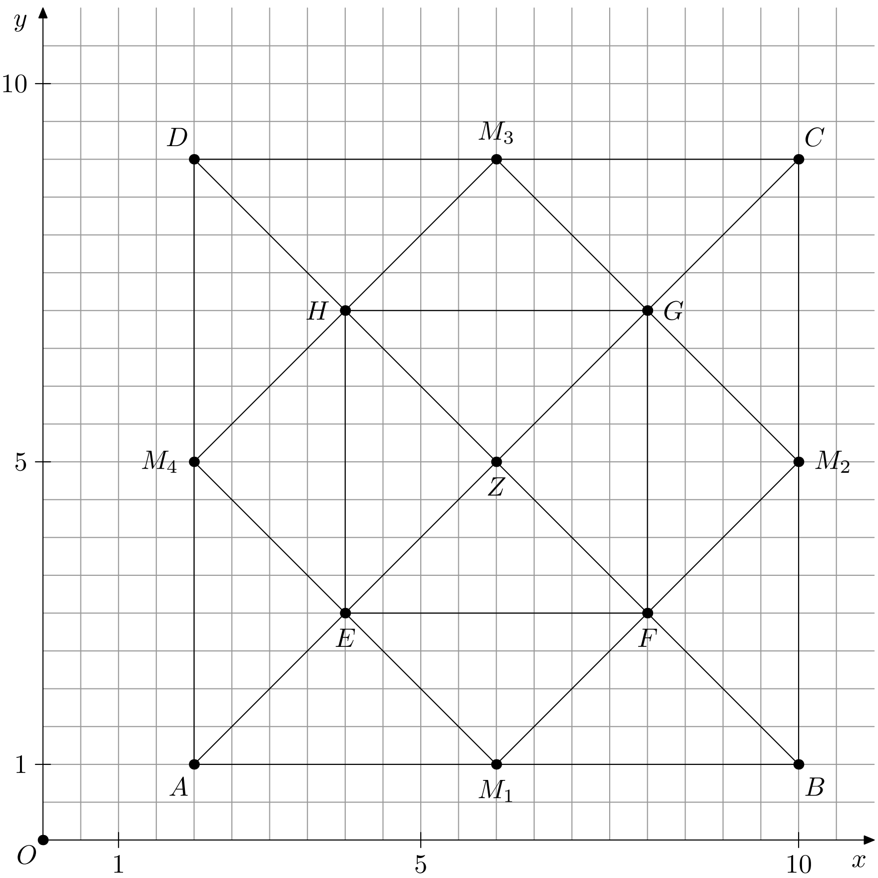
(g) „Der x-Wert der Punkte B_n ist stets doppelt so groß wie der y-Wert dieser Punkte.“
Oder:
„Der y-Wert der Punkte B_n ist stets halb so groß wie der x-Wert dieser Punkte.“

(h) Vertausche bei den Punkten A_n jeweils den x- mit dem y-Wert, dann erhältst du die Koordinaten der Punkte B_n.

(i) Alle Punkte A_n liegen auf einer Halbgeraden, weil die Reihe der Punkte A_n in der Zeichnung beliebig verlängert werden kann.
Alle Punkte B_n liegen ebenfalls auf einer Halbgeraden.
Siehe Zeichnung.

(j) Es entsteht das Dreieck OB_5A_5 (siehe Zeichnung). Die Halbgerade $[OS$ ist die Symmetrieachse dieses Dreiecks OB_5A_5.

9. (a)



- Es handelt sich um ein Quadrat. Alle vier Seiten sind 8 cm lang und alle Innenwinkel haben das Maß 90°.

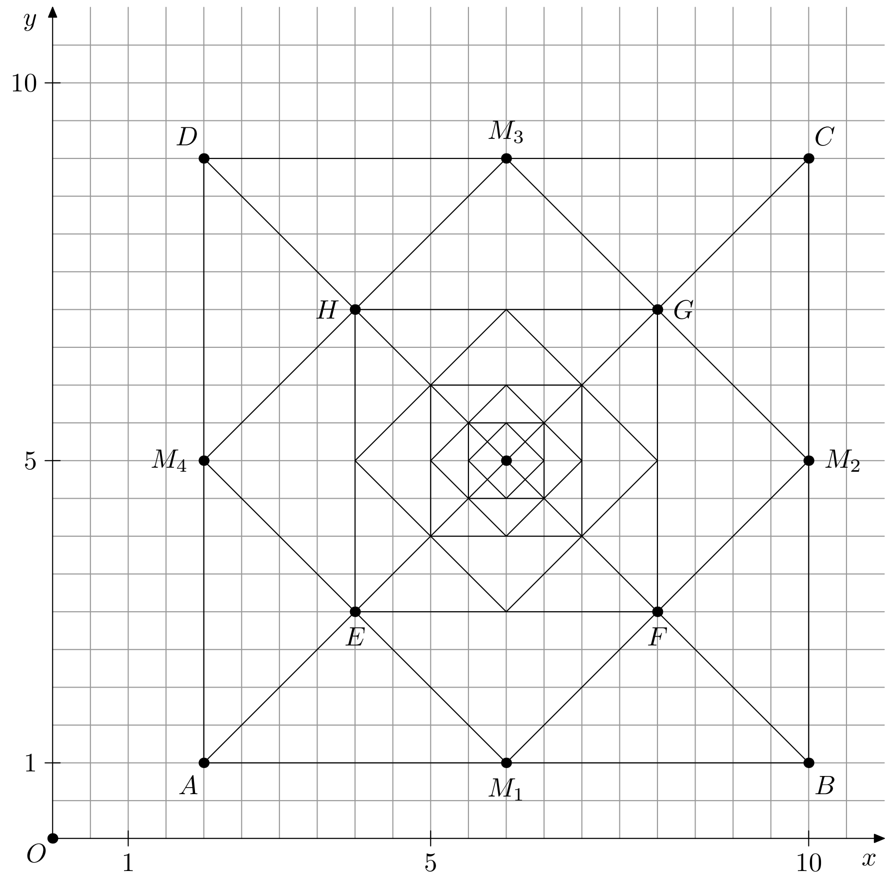
(b)
- Siehe Zeichnung.
- $M_1(6 \mid 1)$.
Die Punkte A, M_1 und B liegen auf einer Parallelen zur x-Achse mit dem Abstand 1 cm.
Alle drei Punkte haben den y-Wert 1.
Addiere die x-Werte von A und B. Teile den Summenwert durch 2. $(2+10) : 2 = 12 : 2 = 6$.
- $M_2(10 \mid 5)$.
Die Punkte B, M_2 und C liegen auf einer Parallelen zur y-Achse mit dem Abstand

10 cm.
Alle drei Punkte haben den x-Wert 10.
Addiere die y-Werte von B und C. Teile den Summenwert durch 2. $(1+9) : 2 = 10 : 2 = 5$.

(c) • Siehe Zeichnung. Die Vierecke $M_1M_2M_3M_4$ und $EFGH$ sind Quadrate.
Der x-Wert des Punktes E ist Hälfte der Summe aus den x-Werten der Punkte M_1 und M_4. Der y-Wert des Punktes E ist Hälfte der Summe aus den y-Werten der Punkte M_1 und M_4:
$E((6+2) : 2 \mid (1+5) : 2) = (4 \mid 3)$.

• In das Viereck $EFGH$ passen 4 gleiche Dreiecke. Das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ setzt sich aus 8 solchen Dreiecken zusammen. Also ist der Flächeninhalt des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ doppelt so groß wie der des Vierecks $EFGH$.
In das Viereck $ABCD$ passen 16 solche Dreiecke. Also ist der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ doppelt so groß wie der des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ und viermal so groß wie der Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$.

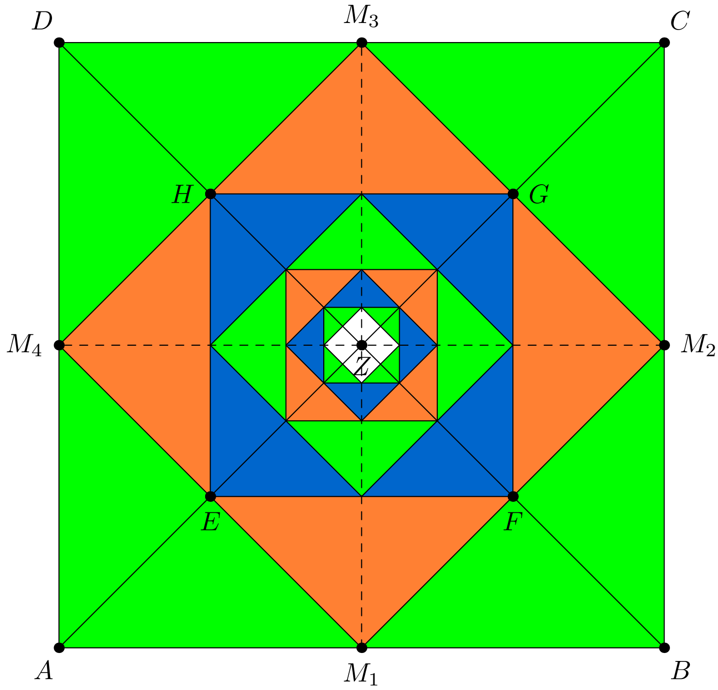
(d) •



Ein Seitenviereck ist stets halb so groß wie das vorhergehende.

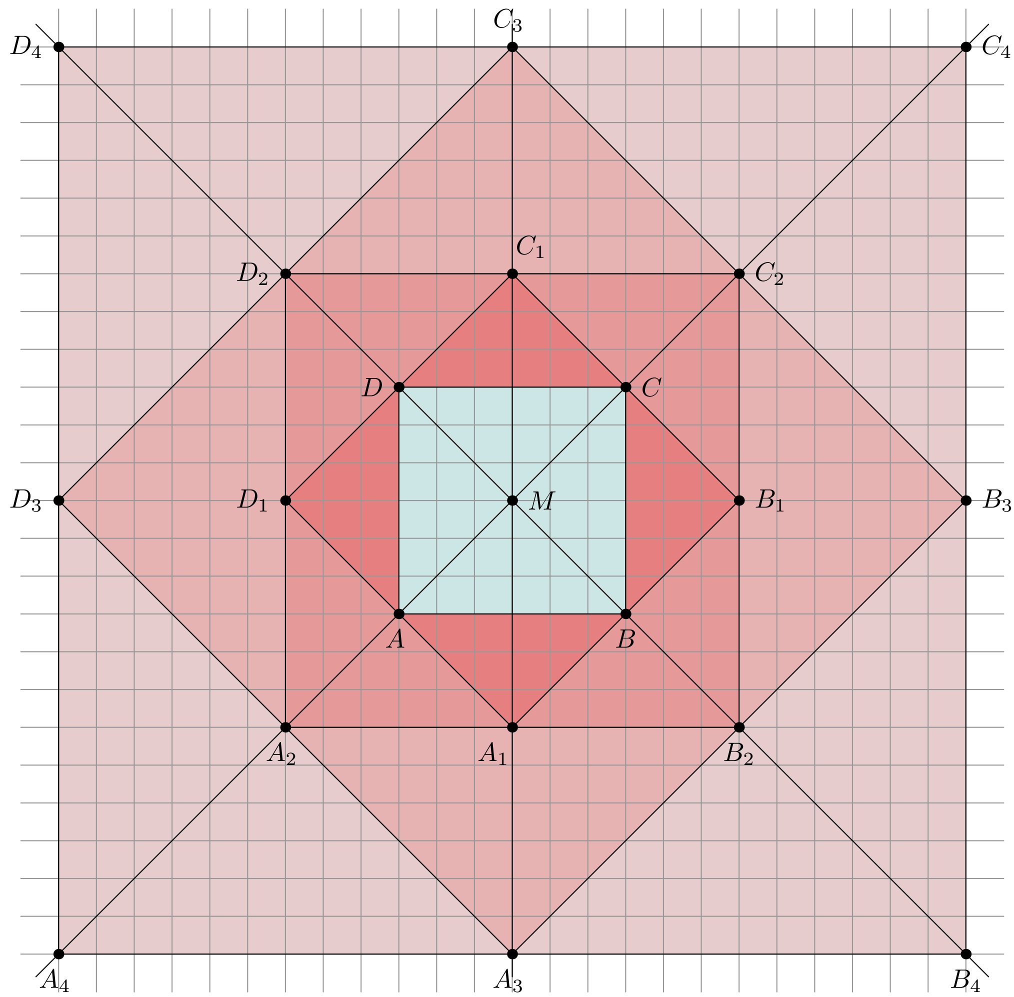
• Du könntest theoretisch noch unendlich viele Seitenmittenvierecke einzeichnen. Das Ganze endet im Punkt Z.

(e) • Dein Endprodukt müsste so aussehen:



- Siehe oben.
- Die vier grünen Dreiecke sind mit den vier Dreiecken, die im Inneren des Quadrates $M_1M_2M_3M_4$ durch die Strecken $[M_1M_3]$ und $[M_2M_4]$ entstehen, gleich.
- Wie vorher gilt: Die vier orangenen Dreiecke sind mit den vier Dreiecken, die im Inneren des Quadrates $EFGH$ durch die Strecken $[M_1M_3]$ und $[M_2M_4]$ entstehen, gleich.
- Wieder kannst du auf die gleiche Weise die Flächengleichheit zeigen.
- 1. Grund:
  Du kannst keine beliebig kleinen Dreiecke ausschneiden.
  2. Grund:
  Es wären unendlich viele Dreiecke auszuschneiden. Das kann kein Mensch bewältigen.
  Angenommen, es würde eine „weiße Fläche“ übrig bleiben. Dann muss diese Fläche aber ein winziges Quadrat sein, dessen Ecken du (wenigstens theoretisch) erneut abschneiden könntest, so dass ein noch winzigeres Quadrat als „weißen Fläche“ übrig bleibt. Dann könntest du von diesem noch winzigerem Quadrat wieder seine Ecken … . Du merkst, es bleibt am Ende (wann immer das auch sein mag) nichts Weißes übrig.
- Mit allen möglichen Dreiecken zusammen lässt sich das Quadrat $ABCD$ lückenlos bedecken. Nun stammen ja jeweils vier dieser Dreiecke von einem der Seitenmittenvierecke. Also ergibt der Flächeninhalt aller Seitenmittenvierecke den Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und der ist $8\,\text{cm} \cdot \text{cm} = 64\,\text{cm}^2$ groß.

10. Wenn du alle Zeichenaufträge ausgeführt hast, ergibt sich das folgende Bild:



(a) Siehe Zeichnung.

(b) Siehe Zeichnung.

(c) Siehe Zeichnung.
Das Viereck $A_1B_1C_1D_1$ ist ein Quadrat. Alle vier Seiten sind gleich alng und alle Innenwinkel haben das Maß $90°$.

(d)
- Siehe Zeichnung.
  Das Viereck $A_2B_2C_2D_2$ ist wieder ein Quadrat.
- Das ursprüngliche Quadrat $ABCD$ wird durch seine Diagonalen in vier deckungsgleiche Dreiecke zerlegt. Das Quadrat $A_2B_2C_2D_2$ besteht aus 16 dieser Dreiecke. $16 : 4 = 4$; also ist dieses Quadrat vier mal so groß wie das Quadrat $ABCD$.

(e)
- Siehe Zeichnung.
  Das Viereck $A_3B_3C_3D_3$ ist wieder ein Quadrat.
- Wenn Du die vier Teildreiecke A_2MD_2, A_2B_2M, MB_2C_2 und D_2MC_2 des Quadrates $A_2B_2C_2D_2$ jeweils nach außen klappst, dann erhältst du das Quadrat $A_3B_3C_3D_3$. Also ist dieses Quadrat doppelt so groß wie das Quadrat $A_2B_2C_2D_2$ und damit $2 \cdot 4 = 8$ mal so groß wie das Quadrat $ABCD$.

(f)
- Siehe Zeichnung.
- Das Quadrat $A_4B_4C_4D_4$ entsteht ebenso wie vorhin durch Ausklappen der Teildreiecke des Quadrates $A_3B_3C_3D_3$. Also ist das Quadrat $A_4B_4C_4D_4$ doppelt so groß wie sein Vorgänger und damit 16 mal so groß wie das ursprüngliche Quadrat $ABCD$.

(g)
- Der Nachfolger ist doppelt so groß wie sein Vorgänger.
- Vorletzte Zeile:
  $A_{V_7} = 2 \cdot A_{V_6} = 2^{\,6} \cdot A_0 = 64 \cdot 9\,\text{cm}^2 = 576\,\text{cm}^2$
  Letzte Zeile:
  $2304\,\text{cm}^2 : 9\,\text{cm}^2 = 256 = 2^{\,8}$. Also gilt: $? = 8$.
- 1. Möglicheit:
  624 ist nicht durch 9 teilbar, daher gibt es kein solches Quandrat.
  2. Möglichkeit:
  Es tauchen nur die folgenden Flächeninhalte auf: $9\,\text{cm}^2$, $18\,\text{cm}^2$, $36\,\text{cm}^2$, $72\,\text{cm}^2$, $144\,\text{cm}^2$, $288\,\text{cm}^2$, $576\,\text{cm}^2$, $1152\,\text{cm}^2$ ...
  Der Wert $624\,\text{cm}^2$ ist nicht mit dabei, daher gibt es kein solches Quandrat.

(h) Deinem Einfallsreichtum sind keine Grenzen gesetzt.

11. (a) In (I) eingesetzt ergibt sich: $2 \cdot 5 + 3 = 6$ (f).
In (II) eingesetzt ergibt sich: $2 \cdot 3 - 5 = 6$ (f).

(b) (I):

$\triangle$	0	1	2	3
$\square$	6	4	2	0

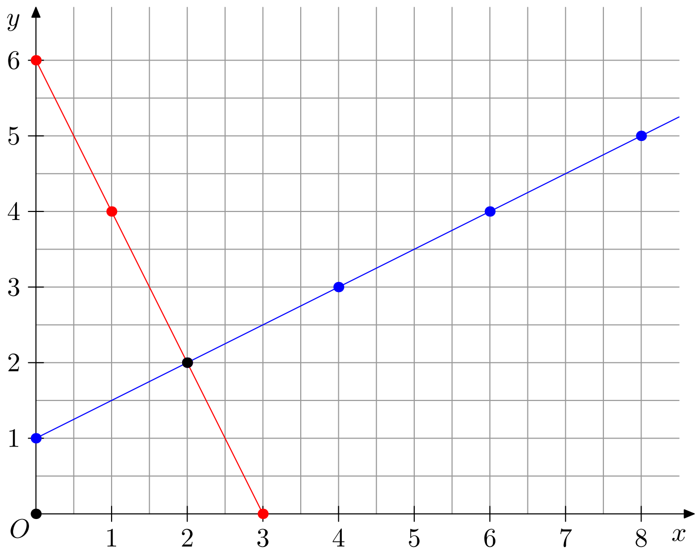
(II):

$\triangle$	0	2	4	6	8	...
$\square$	1	2	3	4	5	...

(c) „Wenn in der Tabelle (I) der $\triangle$-Wert um 1 zunimmt, dann nimmt der zugehörige $\square$-Wert jeweils um 2 ab.“
„Wenn in der Tabelle (II) der $\triangle$-Wert um 2 zunimmt, dann nimmt der zugehörige $\square$-Wert jeweils um 1 zu.“

(d)
- Das gemeinsame Paar ist $\triangle = 2 = \square$.
- Die Tabellenwerte in (I) haben ein Ende, die von (II) nicht.

(e)
-



- Siehe Zeichnung.
- – Die Tabelle (I) liefert Punkte, die auf einer Strecke liegen.
  – Die Tabelle (II) liefert Punkte, die auf einer Halbgeraden liegen.
  – Die Strecke und die Halbgerade stehen aufeinader senkrecht.

12.

Weg a)

Er besteht aus 5 gleich langen Strecken, denn jede Strecke stellt die Diagonale eines rechteckigen Gitterkästchens dar:
$110{,}5\,\mathrm{m} : 5 = 22{,}1\,\mathrm{m}$. So lang ist die Diagonale eines Gitterkästchens.

Weg b)

Er enthält 3 gleich lange Rechtecksdiagonalen eines Gitterkästchens. Der Rest dieses Weges ist dreimal so lang wie Breite eines Gitterkästchens. Für die Breite eines Gitterkästchens gilt dann:
$(91{,}8\,\mathrm{m} - 3 \cdot 22{,}1\,\mathrm{m}) : 3 = 8{,}5\,\mathrm{m}$.

Weg c)

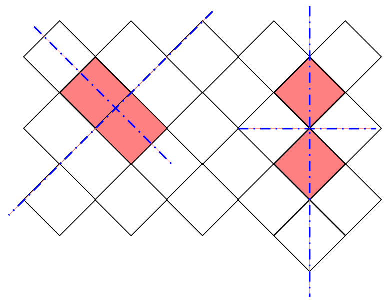
Dieser Weg verläuft punktsymmetrisch. Die $51{,}0\,\mathrm{m}$ lange Hälfte besteht aus einer Kästchendiagonalen, einer Kästchenhöhe und einer Kästchenbreite. Weil die Länge der Diagonalen und die Breite eines Kästchens schon bekannt sind, kannst du damit die Kästchenhöhe ausrechnen:
$51{,}0\,\mathrm{m} - 22{,}1\,\mathrm{m} - 8{,}5\,\mathrm{m} = 20{,}4\,\mathrm{m}$.

Weg d)

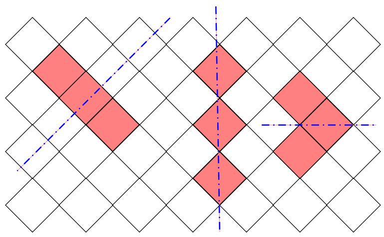
Dieser Weg verläuft achsensymmetrisch. In ihm sind die Längen aller Teilstrecken bekannt. Für die Länge des Weges d) ergibt sich also:
$(4 \cdot 8{,}5\,\mathrm{m} + 2 \cdot 20{,}4\,\mathrm{m} + 22{,}1\,\mathrm{m}) \cdot 2 = 193{,}8\,\mathrm{m}$.

13. Hier sind viele Beispiele, aber nicht alle Möglichkeiten dargestellt.

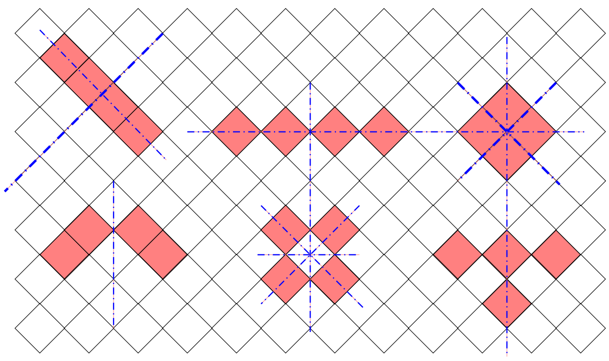
(a)



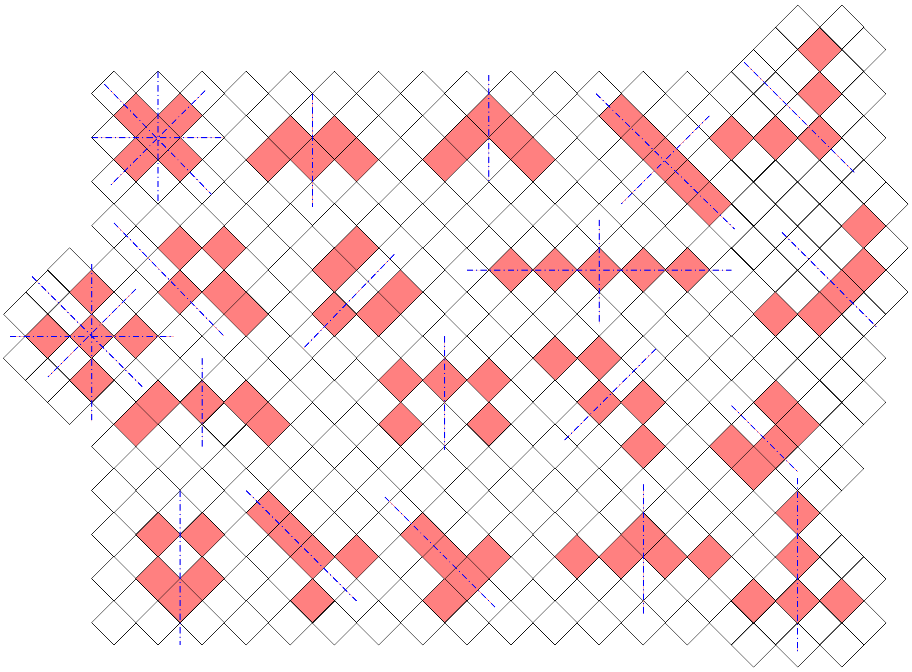
(b)



(c)

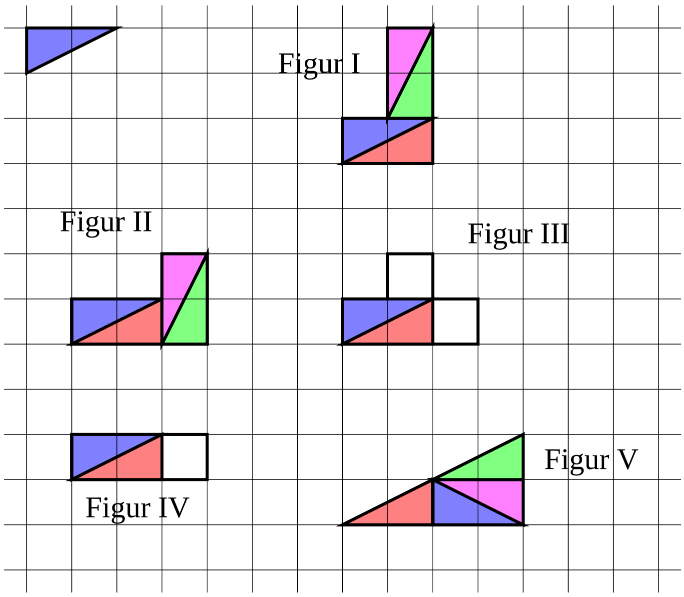


(d)



Anregung: Versuche die restlichen Möglichkeiten noch zu finden.

14.



Zwei eingefärbte Dreiecke sind so groß wie zwei Kästchen. Also ist ein eingefärbtes Dreieck so groß wie ein Kästchen.

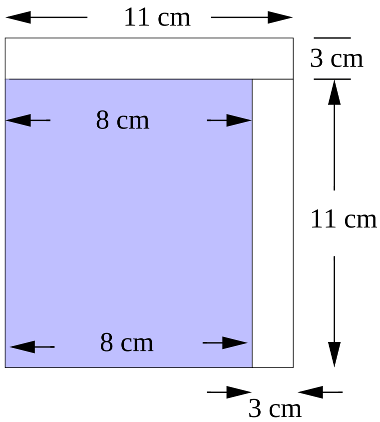
Figur II: Es passen vier Dreiecke hinein.

Figur III: Es passen ebenfalls vier Dreiecke hinein. Wenn du das obere Kästchen in der Figur II in die Mitte rückst, dann erhältst du die Figur III. Also passen genau so viele Dreiecke in die Figur III, nämlich vier.

Figur IV: Es passen drei Dreiecke hinein.

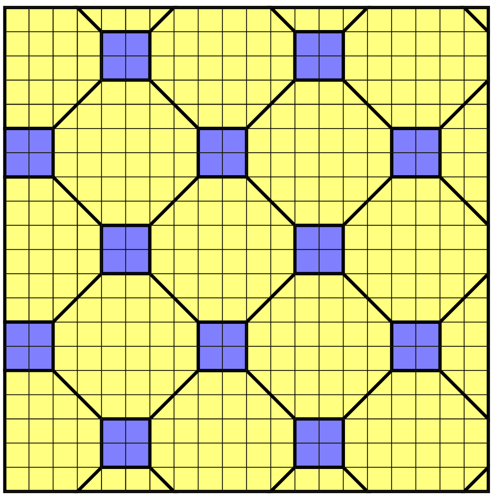
Figur V: Es passen vier Dreiecke hinein.

15.

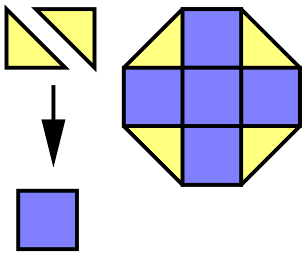


Der Flächeninhalt des eingefärbten Rechtecks beträgt $8\,\mathrm{cm} \cdot 11\,\mathrm{cm} = 88\,\mathrm{cm}^2$

16. (a)



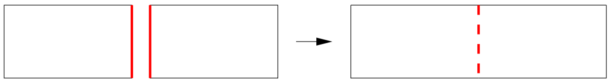
(b)



In das Achteck passen fünf kleine Quadrate. Dann bleiben noch 4 gleiche Dreiecke übrig. Je zwei davon lassen sich zu einem kleinen Quadrat zusammenfügen.
Also ist das große Achteck siebenmal so groß wie ein kleines Quadrat.

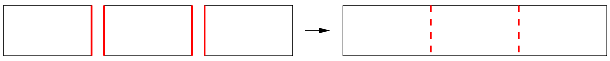
17. (a) $u = 2 \cdot 3,5\,\text{cm} + 2 \cdot 2\,\text{cm} = 11\,\text{cm}$

(b)



Die zwei Breitseiten der beiden Rechtecke, die sich gegenüber liegen, verschwinden beim Zusammenfügen im Inneren des großen Rechtecks. Sie fallen also bei der Berechnung des Umfang des großen Rechtecks weg. Zusammen sind die beiden Seiten 4 cm lang. Also: $u = 2 \cdot 11\,\text{cm} - 4\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$.

(c)

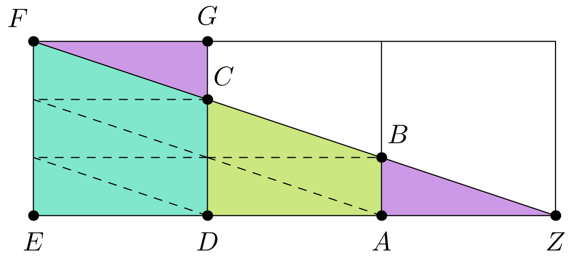


Du hast es bei drei kleinen Rechtecken mit zwei „Nahtstellen" zu tun. Also musst du die 4 cm zwei Mal subtrahieren:
$u = 3 \cdot 11\,\text{cm} - 2 \cdot 4\,\text{cm} = 25\,\text{cm}$.

(d) Vom 100-fachen Umfang eines kleinen Rechtecks musst du jetzt noch 99 Nahtstellen subtrahieren:
$u = 100 \cdot 11\,\text{cm} - 99 \cdot 4\,\text{cm} = 704\,\text{cm}$. Das ist etwas mehr als 7 m.

18. Jede Figur weist an den gestrichelten Linien vier gleich lange Nahtstellen auf.
Jede Figur besteht aus zwei rechteckigen Endstücken. Bei jedem davon verschwindet eine Breitseite im Flächeninneren.
Jede Figur besteht aus drei rechteckigen Mittelstücken. Bei jedem davon verschwinden zwei Breitseiten im Flächeninneren. Also sind die drei Figuren umfangsgleich.

19. (a)



(b) Das Viereck $ABCD$ nennt man auch „Trapez“, obwohl es nicht symmetrisch ist. Damit sich ein Viereck „Trapez“ nennen darf, genügt es, dass in ihm zwei Seiten parallel sind.
In diesem Trapez steckt das Dreieck AZB dreimal. Das Trapez wird also $3 \cdot 15\,\mathrm{dm}^2 = 45\,\mathrm{dm}^2$ groß.

(c) Das Viereck $EDCF$ ist auch ein Trapez.
In diesem Trapez steckt das Dreieck AZB fünfmal. Das Trapez wird also $5 \cdot 15\,\mathrm{dm}^2 = 75\,\mathrm{dm}^2$ groß.

(d) Eines der Quadrate enthält sechs Dreiecke zu je $15\,\mathrm{dm}^2$. Also hätten die drei Quadrate in der Ausstellung zusammen einen Flächeninhalt von

$$3 \cdot 6 \cdot 15\,\mathrm{dm}^2 = 270\,\mathrm{dm}^2.$$

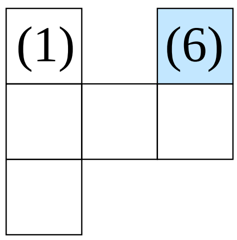
(e) Deiner Phantasie sind keine Grenzen gesetzt.

20. (a) Schräg nach hinten kannst du erkennen, dass in dieser Linie 4 Würfel enthalten sind. In allen anderen Reihen stehen weniger Würfel. Also braucht Marion insgesamt mindestens $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ Würfel.
Für die Figur hat sie schon 9 Würfel verwendet. Also braucht sie mindestens noch $64 - 9 = 55$ Würfel.

(b) In der Tüte sind dann noch $87 - 64 = 23$ Würfel.

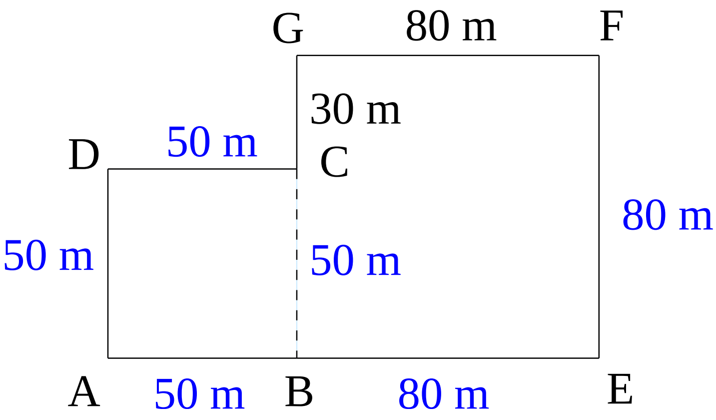
(c) Der große Würfel müsste 5 solcher Schichten enthalten.
Für den betreffenden Würfel bräuchte Marion $5 \cdot 25 = 125$ Würfel. Das sind mehr als in der Tüte waren.

21.



„... beim Zusammenfalten würden die beiden Quadrate (1) und (6) aufeinander liegen.“

22.



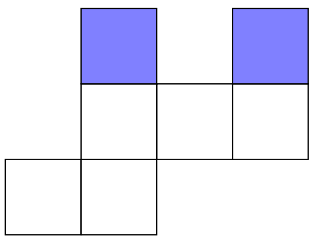
(a) Die Strecke $[GB]$ ist genau so lang wie die Strecke $[FE]$, nämlich 80 m, denn das Viereck $GBEF$ ist ein Quadrat.
Weil die Strecke $[GC]$ 30 m lang ist, muss die Strecke $[CB]$ 50 m lang sein.
Damit sind alle Seiten des Quadrates $ABCD$ 50 m lang.
Der Zaun $[AE]$ ist also $80\,\text{m} + 50\,\text{m} = 130\,\text{m}$ lang.

(b) Die Grundstücksfläche beträgt $50\,\text{m} \cdot 50\,\text{m} + 80\,\text{m} \cdot 80\,\text{m} = 8900\,\text{m}^2$.

23. Wenn der Umfang einer quadratischen Fliese 20 cm beträgt, dann beträgt die Seitenlänge einer Fliese $20\,\text{m} : 4 = 5\,\text{cm}$.
Der Flächeninhalt einer Fliese beträgt damit $5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 25\,\text{cm}^2$.
Im Rechteck $ABCD$ befinden sich $3 \cdot 8 = 24$ Fliesen.
Also beträgt der Flächeninhalt des Rechtecks $24 \cdot 25\,\text{cm}^2 = 600\,\text{cm}^2 = 6\,\text{dm}^2$.

24. (a) Jedes Würfelnetz besteht aus sechs Quadraten. Hier sind aber sieben aufgezeichnet.

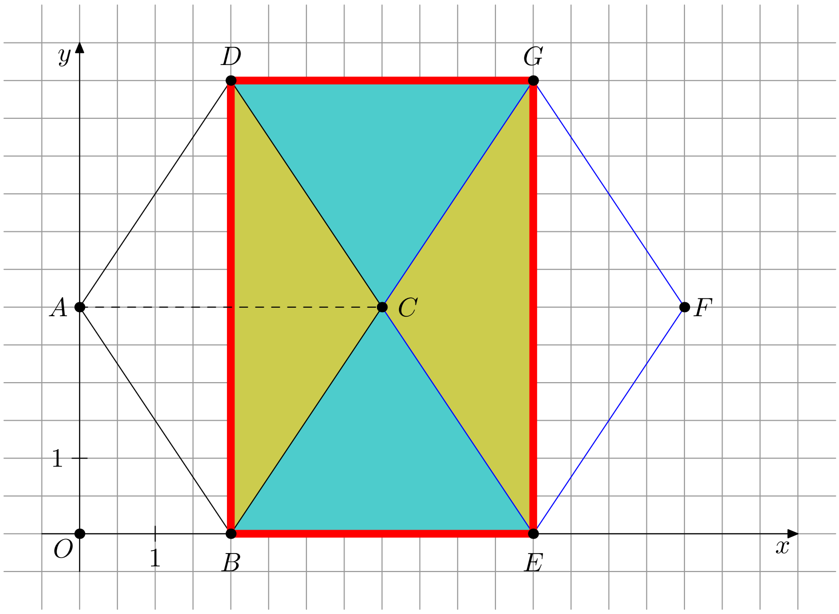
(b)



Eines der beiden dunkel getönten Quadrate muss weggeschnitten werden..

25. Die Darstellung gehört zur zeichnerischen Lösung der Aufgaben (a), (b), (c) und (d).

(a)



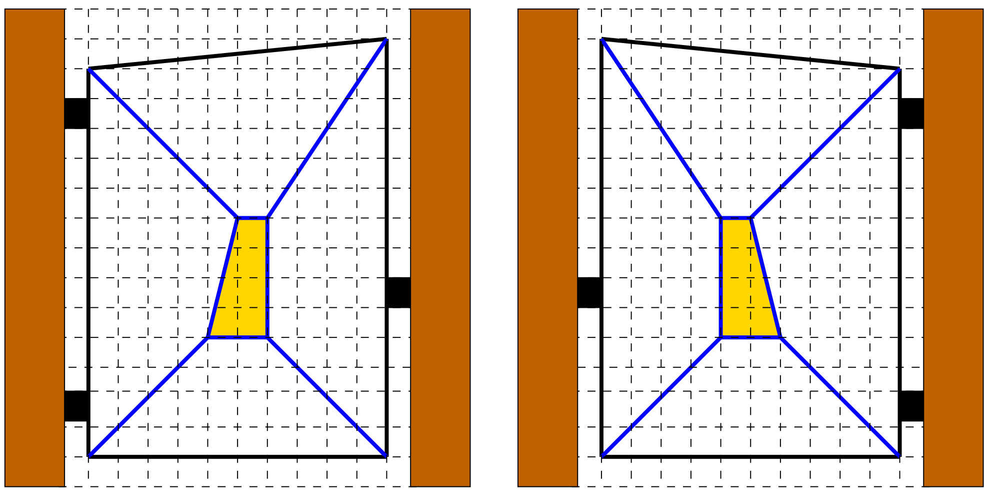
- Siehe oben.
- Das Viereck $ABCD$ ist nicht nur ein Parallelogramm, sondern sogar eine Raute, denn alle vier Seiten sind gleich lang.

(b) Siehe Zeichnung.

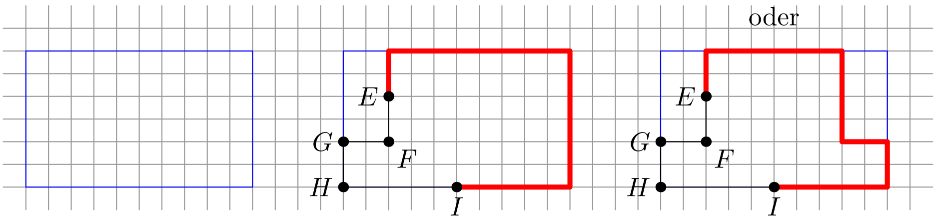
(c) Siehe Zeichnung.

(d) In dem Rechteck $BEGD$ ergeben die beiden Teildreiecke BCD und CEG zusammen die Raute $ABCD$.
Die halbe Raute ACD ist genau so groß wie jedes der beiden Dreiecke BEC und CGD.
Also passt die Raute $ABCD$ zweimal in das Rechteck $BEGD$.

26.

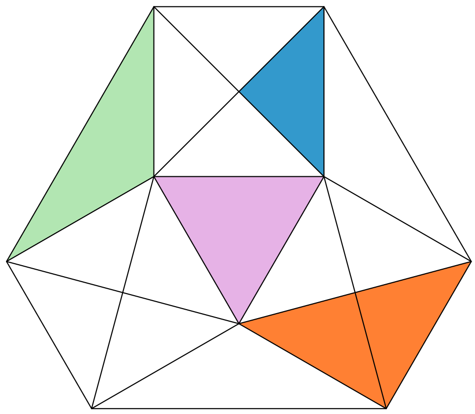


27.



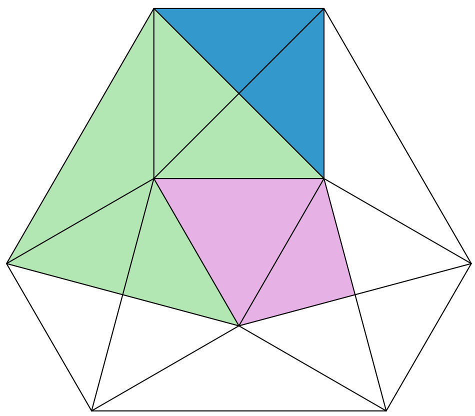
Hier sind zwei Möglichkeiten dargestellt. Es gibt noch viele weitere.

28. (a)



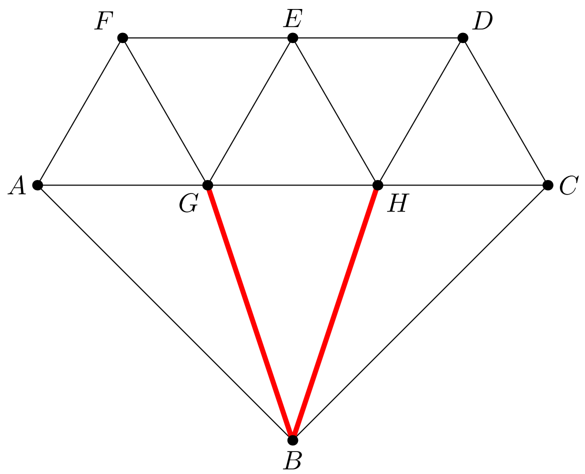
Es gibt ein gleichseitiges Dreieck vom Typ GAD.
Typ PAB: 12 gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke.
Typ EDC: 3 gleichschenklige Dreiecke.
Typ GHI: 12 gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, die jeweils doppelt so groß sind wie die vom Typ PAB.

(b)



Es gibt drei Quadrate vom Typ $ABCD$.
Es gibt drei achsensymmetrische Trapeze vom Typ $EGAC$.
Es gibt drei achsensymmetrische Drachenvierecke vom Typ $DGRA$.

29.



(a) Es sind **drei** Trapeze:
$AHEF$, $GCDF$ und $GHDF$.

(b) Siehe Zeichnung oben.

(c) Es könnte z.B. den Facettenschliff eines Brillinaten darstellen.

30.

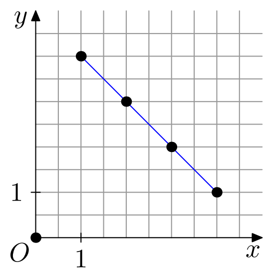
Zahl der Quadrate mit der Seitenlänge 1 LE:	12
Zahl der Quadrate mit der Seitenlänge 2 LE:	6
Zahl der Quadrate mit der Seitenlänge 3 LE:	2
Gesamtzahl der Quadrate :	20

31. In der Figur 1 werden die beiden „Extraquadrate“ durch die Gitterlinien in jeweils vier „Miniquadrate“ geteilt.
In der Figur 2 wird das „Extraquadrat“ links unten durch die Gitterlinien nur in vier Rechtecke, die keine Quadrate sind, geteilt.
Also enthält die Figur 1 mehr Quadrate als die Figur 2.

32. (a) Vervollständige die Tabelle entsprechend:

x	1	2	3	4	
y	4	3	2	1	
$(x \mid y)$	$(1 \mid 4)$	$(2 \mid 3)$	$(3 \mid 2$	$(4 \mid 1)$	

(b)



(c) • Alle Punkte liegen auf einer Strecke (oder Halbgeraden oder Geraden).
- Siehe Zeichnung.

33. (a) Wenn in jeder Kante fünf kleine Würfel lägen, dann bräuchte Alfred $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ Würfel.
Also dürfen in jeder Kante nur 4 kleine Würfel liegen: $4^3 = 64$. Dann hat Alfred noch $100 - 64 = 36$ kleine Würfel übrig.

(b) Wenn Alfred die 64 kleinen Würfel zu einem Turm aufschichten könnte, dann wäre der Turm $64 \cdot 2\,\text{cm} = 128\,\text{cm}$ hoch.

34. Unter den „kleinen Rechtecken“ können nur solche gezählt werden, die vollständig eingefärbt sind; das sind insgesamt 3 Rechtecke.
Das Rechteck jedoch, das alle Rechtecke umschließt, gehört auch dazu, denn vier von sechs seiner Teilflächen sind eingefärbt. Das ist mehr als die Hälfte.
Also sind es insgesamt 4 Rechtecke.

35. (a) Die Summe der Längen der aneinandergereihten Stäbchen ergibt eine ungerade Zahl. Dieser Summenwert müsste die Maßzahl für den Umfang des gesuchten Quadrates sein.
Der Unfang eines Quadrates berechnet sich aus 4-mal die Länge einer Seite. Weil sich die Trinkhalm-Seitenlänge jedes Quadrates aus natürlichen Zahlen zusammensetzt, muss diese Seitenlänge in jedem Fall auch eine natürliche Zahl sein.
Wenn du jedoch die ungerade Umfangs-Maßzahl durch vier teilst, ergibt sich keine natürliche Zahl.

(b) Nachdem alle Stäbchen sich nicht zu einem Quadrat legen lassen, musst du mindestens eines weglassen. Dann sind noch acht Stäbchen übrig. Damit die Umfangsmaßahl gerade wird, muss das weggelassene Stäbchen eine ungerade Längenmaßzahl besitzen. Dann bleiben zum Aufbau von jeder Quadratseite jeweils zwei Stäbchen übrig.

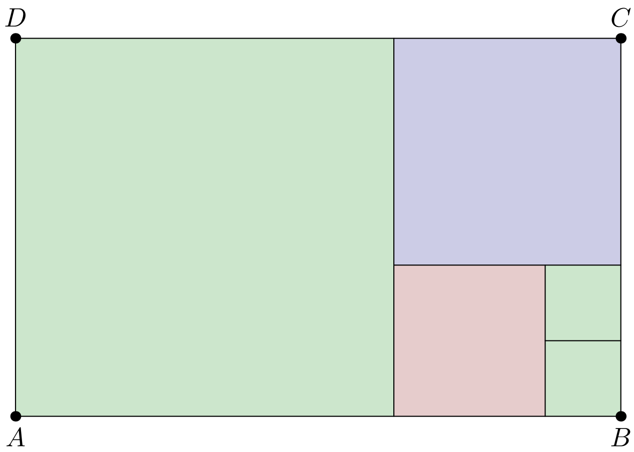
	1. Sl. in cm	2. Sl. in cm	3. Sl. in cm	4. Sl. in cm
1. Mögl.	8+1=9	7+2=9	6+3=9	5+4=9
2. Mögl.	9+1 =10	8+2=10	7+3=10	6+4=10
3. Mögl.	9+2 =11	8+3=11	7+4=11	6+5=11

Das sind alle Möglichkeiten.

5 Flächenmessung

1. Die Seitenlänge des Quadrats ABCD beträgt 11 cm.

2. (a)



   (b)
   - Es sind fünf Quadrate.
   - Zunächst siehst du vier Rechtecke, die keine Quadrate sind.
     Weil sich jedes Quadrat aber gleichzeitig auch Rechteck nennen darf (da es in sich alle Eigenschaften eines Rechtecks vereinigt), enthält die Figur $5 + 4 = 9$ Rechtecke.

   (c) Jedes der kleinsten Quadrate hat dann eine Seitenlänge von
   $24\,\text{cm} : 4 = 6\,\text{cm}$.

   Das nächst größere Quadrat hat dann eine Seitenlänge von
   $2 \cdot 6\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$.

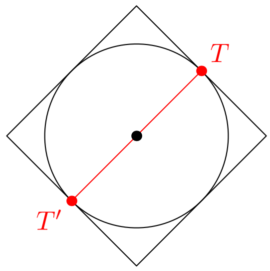
   Das Quadrat rechts oben hat dann eine Seitenlänge von
   $12\,\text{cm} + 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$.

   Das Quadrat links hat dann eine Seitenlänge von
   $12\,\text{cm} + 18\,\text{cm} = 30\,\text{cm}$.

   Somit erhältst du als Mindestlänge für den Goldsaum:
   $u = 2 \cdot [(30 + 12 + 6) + (6 + 6 + 18)]\,\text{cm} = 156\,\text{cm}$.

3. Es gilt: $\overline{RQ} = 8\,\text{m} - 3\,\text{m} = 5\,\text{m}$ und $\overline{RS} = 5\,\text{m} - 3\,\text{m} = 2\,\text{m}$
   $A_{\text{Kartoffelfeld}} = \overline{RQ} \cdot \overline{RS} = 5\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = 10\,\text{m}^2$.

4.



   Das Quadrat hat eine Seitenlänge von $5\,\text{m} : 4 = 500\,\text{cm} : 4 = 125\,\text{cm}$.
   Dann hat die Fensterscheibe ebenfalls einen Durchmesser von $125\,\text{cm}$ (siehe Strecke $[TT']$) .

5. Grundfläche des Stalles mit Hof: $9\,\text{m} \cdot 7\,\text{m} = 63\,\text{m}^2$.
   Grundfläche des Stalles: $50\,\text{m}^2$.
   Grundfläche des Hofes: $63\,\text{m}^2 - 50\,\text{m}^2 = 13\,\text{m}^2$.
   Grundfläche des Wohnhauses mit Hof: $12\,\text{m} \cdot 8\,\text{m} = 96\,\text{m}^2$.
   Grundfläche des Wohnhauses: $96\,\text{m}^2 - 13\,\text{m}^2 = 83\,\text{m}^2$.

6. $7\text{m}\,2\,\text{dm} = 72\,\text{dm}$.
   Die Seitenlänge des quadratischen Treppenabsatzes beträgt dann
   $72\,\text{dm} : 4 = 18\,\text{dm}$.
   Dann beträgt die Seitenlänge eines der drei kleineren unteren Quadrate
   $18\,\text{dm} : 3 = 6\,\text{dm}$.
   Die Seite $[AD]$ des Rechtecks $ABCD$ ist dann $18\,\text{dm} + 6\,\text{dm} = 24\,\text{dm}$ lang.
   Dann beträgt die Seitenlänge eines der drei größeren seitlichen Quadrate
   $24\,\text{dm} : 3 = 8\,\text{dm}$.
   Die Seite $[AB]$ des Rechtecks $ABCD$ ist dann $18\,\text{dm} + 8\,\text{dm} = 26\,\text{dm}$ lang.
   Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ ergibt sich dann aus
   $24\,\text{dm} \cdot 26\,\text{dm} = 624\,\text{dm}^2$.

7. Länge des Rechtecks: $2 \cdot 10\,\text{cm} = 20\,\text{cm}$. Breite des Rechtecks: $10\,\text{cm}$.
   Flächeninhalt des Rechtecks: $20\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} = 200\,\text{cm}^2$.

6 Teilbarkeit

1. (a) Das stimmt, denn die Quersumme ist 45.

   (b) Das ist nicht wahr, denn die Vertauschung der Ziffern ändert nichts am Wert der Quersumme.

2. 986

3.
$$\begin{array}{llll} \text{a)} & 244\,\boxed{2} & \text{b)} & 6\,\boxed{1}\,332 \\ \text{a)} & 244\,\boxed{8} & \text{b)} & 6\,\boxed{4}\,332 \\ & & \text{b)} & 6\,\boxed{7}\,332 \end{array}$$

4. 98 763

5. 100 000 005

6. (a) Ist die Quersumme einer natürlichen Zahl durch 9 teilbar, dann ist diese Zahl selbst durch 9 teilbar. Die Quersumme des Zahlengiganten beträgt $2007 \cdot 1 = 2007$ und $2 + 0 + 0 + 7 = 9$. Also ist der Zahlengigant ohne Rest durch 9 teilbar. Paul hat nicht Recht.

   (b) $111\,111\,111 \ : \ 9 = 12\,345\,679$
   $\underbrace{111\,111\,111}\,\underbrace{111\,111\,111} \ : \ 9 = \underbrace{12\,345\,679}\,\underbrace{012\,345\,679}$.

   (c) In der Lösung (b) erkennst du, dass das erste Neunerbündel aus Einsen die Ziffernfolge 12 345 679 als Quotientenwert ergibt.
   In der nächste Rechnung haben Paul und Erika zwei Neunerbündel aus Einsen geschnürt.
   Wieder taucht im Ergebnis zunächst 12 345 679 und darauf folgend dieselbe Ziffernfolge mit einer vorangestellten Null auf.
   2007 Einsen lassen sich zu $2007 : 9 = 223$ solcher Bündel aus jeweils 9 Einsen schnüren.
   Jedes Bündel aus 9 Einsen (bis auf das erste) ergibt bei der Division durch 9 immer die gleiche Ziffernfolge, nämlich 012 345 679; d.h. die Ziffer 8 kommt niemals vor.

   (d) Weil die Ziffernfolge 12 345 679 genau 223-mal erscheint, ist die 7 im Wert des Quotienten auch genau 223-mal vorhanden.

(e) Weil eine vorangestelle Null bei jeder natürlichen Zahl für deren Wert bedeutungslos ist, taucht die Null im Wert des Quotienten genau 222-mal auf.

7. (a) Wenn die Quersumme einer natürlichen Zahl; d.h. die Summe ihrer Ziffern durch 9 teilbar ist, dann ist diese natürliche Zahl durch 9 teilbar.
Die Quersumme von 357 beträgt $3 + 5 + 7 = 15$. Wenn der Wert der Summe aus den beiden einzufügenden Ziffern und 15 durch 9 teilbar ist, dann ist die Quersumme der gesuchten fünfstelligen Zahl ebenfalls durch 9 teilbar.
1. Möglichkeit:
Die Summe aus den beiden fehlenden Ziffern und 15 ergibt 18. Dann müssen die beiden fehlenden Ziffern zusammen 3 ergeben. Somit erhältst du die folgenden fünfstelligen Zahlen:
3**0**5**3**7, 3**3**5**0**7, 3**1**5**2**7, 3**2**5**1**7.
2. Möglichkeit:
Die Summe aus den beiden fehlenden Ziffern und 15 ergibt 27. Dann müssen die beiden fehlenden Ziffern zusammen 12 ergeben. Somit erhältst du die folgenden fünfstelligen Zahlen:
3**3**5**9**7, 3**9**5**3**7,
3**4**5**8**7, 3**8**5**4**7,
3**5**5**7**7, 3**7**5**5**7 und 3**6**5**6**7.
3. Möglichkeit:
Die Summe aus den beiden fehlenden Ziffern und 15 ergibt 36. Dann müssen die beiden fehlenden Ziffern zusammen 21 ergeben.
Es ist aber nur $9 + 9 = 18 < 21$ erreichbar. Somit erhältst du keine Zahlen mehr.

(b) Die Quersumme von 111 beträgt 3.
1. Möglichkeit:
Die Summe aus den beiden fehlenden Ziffern und 3 ergibt 9. Dann müssen die beiden fehlenden Ziffern zusammen 6 ergeben. Somit erhältst du die folgenden fünfstelligen Zahlen:
1**0**1**6**1, 1**6**1**0**1, 1**1**1**5**1, 1**5**1**1**1,
1**2**1**4**1, 1**4**1**2**1 und 1**3**1**3**1.
2. Möglichkeit:
Die Summe aus den beiden fehlenden Ziffern und 3 ergibt 18. Dann müssen die beiden fehlenden Ziffern zusammen 15 ergeben. Somit erhältst du die folgenden fünfstelligen Zahlen:
1**7**1**8**1, 1**8**1**7**1, 1**6**1**9**1 und 1**9**1**6**1.
3. Möglichkeit:
Die Summe aus den beiden fehlenden Ziffern und 3 ergibt 27. Dann müssen die beiden fehlenden Ziffern zusammen 24 ergeben.
Es ist aber nur $9 + 9 = 18 < 24$ erreichbar. Somit erhältst du keine Zahlen mehr.

8. (a) Z.B. 560 .

(b) Die neue, zweistellige Zahl.heißt dann 56 .

(c)
- $560 - 56 = 504$.
- Die Quersumme von 504 ergibt 9, also ist 504 durch 9 teilbar.
- $504 : 9 = 54$ also ist 504 auch durch 54, also durch die neue Zahl, teilbar.

(d)
- Die gemachten Feststellungen gelten stets.
- Die letzte Ziffer der ursprünglichen dreistelligen Zahl muss die Null sein. Wenn du die letze Ziffer streichst, dann entsteht eine Zahl, deren Zehnfaches die ursprüngleiche Zahl ist. Subtrahierst du von dieser ursprünglichen Zahl die neue Zahl, dann ergibt der Wert der Differenz das Neunfache der neuen Zahl. Also ist dieser Differenzwert nicht nur durch 9 sondern stets auch durch die neue (zweiziffrige) Zahl teilbar.

9. Der Wert der Potenz 2^{1400} enthält (neben der Eins) ausschließlich gerade Zahlen als Teiler. Die Zahl 14 ist durch 7 teilbar. Wenn 2^{1400} durch 14 teilbar wäre, dann müsste der **Potenzwert** (nicht der Exponent!) auch durch 7 teilbar sein. Das ist ein Widerspruch: 2^{1400} ist nicht durch 7 und damit auch nicht durch 14 teilbar

10. (a) $(3 \cdot 17 + 9) : (23 - 46 : 2)) = (51 + 9) : (23 - 23) = 60 : 0$. Bis dahin stimmt alles.

    (b) Nach Pauls Ansicht wäre sowohl $60 : 0 = 60$ als auch $60 : 1 = 60$.
    Für die Umkehraufgabe als Probe würde einerseits gelten: $60 \cdot 0 = 60$, was falsch ist, andererseits wäre $60 \cdot 1 = 60$, was stimmt. Pauls Ergebnis kann nicht stimmen.

    (c)
    - UA: $0 \cdot 0 = 60$, was nicht stimmt. Erikas Ergebnis ist auch falsch.
    - Z.B.: Wenn der Wert des Quotienten von $60 : 0$ irgendeine natürliche Zahl „$\square \in \mathbb{N}_0$“ wäre, dann müsste sich aus $60 : 0 = \square$ die UA $\square \cdot 0 = 60$ ergeben, was nicht stimmt, denn $60 \cdot 0 = 0$.
    - Wenn irgendeine natürliche Zahl durch null geteilt werden soll, dann liefert die UA „Wert des Quotienten $\cdot\ 0$ = natürliche Zahl“ stets ein falsches Ergebnis; d.h. ist der Divisor null, dann gibt es keinen vernünftigen Wert des Quotienten.

11. (a) Nimm z.B. die Zahl 72 538. Daraus wird 7 238. $72\,538 - 7238 = 65\,300$.
    Der möglichst große Teiler ist 100.

    (b)
    - Als möglichst großen Teiler erhältst du wieder 100..
    - Auch Deine Banknachbarn müssten diesen Teiler in ihrem Ergebnis wiederfinden.
    - Die letzten beiden Ziffern im Minuenden und im Subtrahenden stimmen stets überein. Dann müssen die letzten beiden Ziffern des Differenzwertes Nullen sein. Allso ist der Wert der Differenz immer durch 100 teilbar.

    (c)
    - „Die Stellenzahl muss **mindestens drei betragen und ungerade sein**.“ (Ist die Stellenzahl gerade, dann gibt es keine „mittlere Ziffer“.)
    - Weil dann in jedem Fall wieder Minuend und Subtrahend auf die gleichen beiden Ziffern enden, stehen beim Differenzwert am Ende zwei Nullen. Also ist 100 stes ein Teiler des Ergebnisses.

12. Z.B. $700 : 5 = 140 \quad 7000 : 5 = 1400 \quad 70000 : 5 = 14000$ usw.

    oder

    $705 : 5 = 141 \quad 750 : 5 = 150 \quad 570 : 5 = 114$

    oder

    $7005 : 5 = 1401 \quad 7050 : 50 = 150 \quad 57500 : 500 = 15$ usw.

    oder

    $70 : 5 = 14 \quad 700 : 50 = 14 \quad 7000 : 500 = 14$ usw.

13. (a) Da die Rechenaufgabe den Faktor 9 enthält, muss der Produktwert wiederum durch 9 teilbar sein, aber dessen Quersumme beträgt $3+3+4+9+5+0+1 = 25$. Weil 9 kein Teiler von 25 ist, kann Karls Ergebnis nicht stimmen.

    (b) Du musst also Neunervielfache finden, die in der Nähe von 25 liegen.
    Die Quersumme 18 kann mit Hilfe einer abgeänderten Zehntausenderstelle 4 nicht erreicht werden, denn dann müsste die richtige Ziffer um 7 kleinerer als 4 sein. Eine solche Ziffer gibt es nicht.
    Also muss das richtige Ergebnis die Quersumme 27 besitzen. Das ist dann der Fall, wenn die falsche Ziffer 4 durch die Ziffer 6 ersetzt wird.
    In der Tat ist dann $374\,389 \cdot 9 = 3\,369\,501$.

14. (a) $\{10; 12; 18; 20; 21; 24; 30; 36; 40; 42\}$.

    (b) Es kommen nur Zahlen mit $QS \in \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 11; 13; 14; 16\}$ in Frage.
    $QS = 1$ liefert $\{10; 100\}$: Beides sind aber ein Zehnervielfache.
    $QS = 2$ liefert 11 und 20. Beide Möglichkeiten scheiden aus.
    $QS = 4$ liefert $\{13; 31; 22; 40\}$. Keine Möglichkeit.
    $QS = 5$ liefert $\{14; 23; 41; 32; 50\}$. Keine Möglichkeit.
    $QS = 7$ liefert $\{16; 25; 34; 61; 52; 43; 70\}$. Keine Möglichkeit.
    $QS = 8$ liefert $\{17, 26; 35; 44; 71; 62; 43; 80\}$. Keine Möglichkeit.
    $QS = 11$: Die zugehörigen natürlichen Zahlen müssen zwei gleiche Ziffern besitzen. Damit kommt aber keine $QS = 11$ zustande.
    $QS = 13$ liefert $\{49; 58; 67; 94; 85; 76\}$. Keine Möglichkeit.
    $QS = 14$ liefert $\{59; 68; 77; 86; 95\}$. Keine Möglichkeit.
    $QS = 16$ liefert $\{79; 88; 97\}$. Keine Möglichkeit.

    (c)
    - Auf jeden Fall gehört 400 mit der $QS = 4 + 0 + 0 = 4$ dazu.
      Nun ist $4 = 1+1+2$. Also: $112 : 4 = 28$: Daher ist 112 eine der gesuchten Zahlen. Alle anderen dreistelligen Zahlen, die sich aus den Ziffern 1 und 2 zusammensetzen, sind ungerade und damit nicht durch 4 teilbar.

Weiter ist $4 = 2 + 2$. Das ergibt 202 (nicht durch 4 teilbar) und $220 : 4 = 55$. Daher ist 220 eine weitere der gesuchten Zahlen, andere gibt es nicht.

- Wieder ist 700 mit der $QS = 7 + 0 + 0 = 7$ eine der gesuchten Zahlen.

  1. Fall:
  $7 = 1 + 0 + 6$ ergibt $\{106; 160; 610; 601\}$.
  $106 : 7 = 15$ Rest 2.
  $160 : 7 = 22$ Rest 6.
  $610 : 7 = 87$ Rest 1.
  $601 : 7 = 85$ Rest 6.

  2. Fall:
  $7 = 2 + 0 + 5$ ergibt $\{205; 250; 502; 520\}$.
  $205 : 7 = 29$ Rest 2.
  $250 : 7 = 35$ Rest 5.
  $502 : 7 = 71$ Rest 5.
  $520 : 7 = 74$ Rest 2.

  3. Fall:
  $7 = 3 + 0 + 4$ ergibt $\{304; 340; 403; 430\}$.
  $304 : 7 = 43$ Rest 3.
  $340 : 7 = 48$ Rest 4.
  $403 : 7 = 57$ Rest 4.
  $430 : 7 = 61$ Rest 3.

  4. Fall:
  $7 = 1 + 1 + 5$ ergibt $\{115; 151; 511\}$.
  $115 : 7 = 16$ Rest 4.
  $151 : 7 = 21$ Rest 4.
  $511 : 7 = 73$ Rest 0. Also ist 511 eine der gesuchten Zahlen.

  5. Fall:
  $7 = 1 + 2 + 4$ ergibt $\{124; 142; 214; 241; 412; 421\}$.
  $124 : 7 = 17$ Rest 5.
  $142 : 7 = 20$ Rest 2.
  $214 : 7 = 30$ Rest 4.
  $241 : 7 = 34$ Rest 3.
  $412 : 7 = 58$ Rest 6.
  $421 : 7 = 60$ Rest 1.

  6. Fall:
  $7 = 1 + 3 + 3$ ergibt $\{133; 313; 331\}$.
  $133 : 7 = 19$ Rest 0. Also ist 133 eine der gesuchten Zahlen.

$313 : 7 = 44$ Rest 5.
$331 : 7 = 47$ Rest 2.

7. Fall:
$7 = 2 + 2 + 3$ ergibt $\{223; 232; 322\}$.
$223 : 7 = 31$ Rest 6.
$232 : 7 = 33$ Rest 1.
$322 : 7 = 46$ Rest 0. Also ist 322 eine der gesuchten Zahlen.

Also kommen nur die Zahlen 133, 322, 511 und 700 in Frage.

- Eine natürliche Zahl ist durch 25 teilbar, wenn sie auf das Ziffernpaar ... 00 oder ... 25 oder ... 50 oder ... 75 endet.

  1. Fall: Die Zahl endet auf ... 00 .
  Dann müssten die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 25 ergeben. Das ist nicht möglich.

  2. Fall: Die Zahl endet auf ... 25 .
  Dann muss die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 18 ergeben. Das ergibt 9925 als einzige Zahl: $9 + 9 + 2 + 5 = 25$.

  3. Fall: Die Zahl endet auf ... 50 .
  Dann müssten die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 20 ergeben. Das ist nicht möglich.

  4. Fall: Die Zahl endet auf ... 75 .
  Dann muss die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 13 ergeben. Das ergibt die folgenden Möglichkeiten: 9475 , 4975, 8575, 5875, 6775 und 7675 .

15. (a) Ist der Wert der Quersumme einer Zahl durch 9 teilbar, dann ist die Zahl selbst durch 9 teilbar.
Der Wert der Quersumme der Zahl 1 213 145 beträgt 17. Also ist diese nicht durch 9 teilbar.

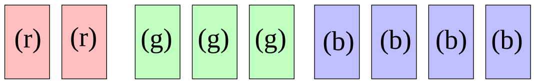
(b) Nach dem Streichen bestimmter Ziffern kann aus dem Wert 17 keine größere, sondern nur eine kleinere Quersumme werden. Der nächst kleinere Quersummenwert, der dann durch 9 teilbar ist, ist die 9.
Durch Streichen von bestimmten Ziffern muss also der Wert der Quersumme von 17 auf 9 abgeändert werden; d.h. die Summe der zu streichenden Ziffern muss den Wert $17 - 9 = 8$ annehmen. Dann gibt es die folgenden Möglichkeiten:

Ursprüngliche Zahl	Zu streichende Ziffern	Neue Zahl
1 213 145	5; 3	12 114
1 213 145	5; 2; 1	1 314
1 213 145	5; 2; 1	1 134
1 213 145	5; 1; 1; 1	234
1 213 145	4; 3; 1;	z.B. 1 215
1 213 145	4; 2; 1; 1;	z.B. 135
1 213 145	3; 2; 1; 1; 1;	45

16. $32 \cdot 10\,034\,300 \cdot 25 = 32 \cdot 25 \cdot 10\,034\,300 = 800 \cdot 1\,034\,300$.
    Am Ende des Produktwertes stehen somit 4 Nullen.

7 Neue Aufgaben, Daten und Zufall

1.



(a) Du musst immer vom ungünstigsten Fall ausgehen: Nachdem du die vier blauen und die zwei roten Karten umgedreht hast, ist die 7. Karte sicher eine grüne. Also musst du höchstens 7 Karten umdrehen.

(b) Im ungünstisten Fall erwischst du zuerst die vier blauen. Dann muss aber die 5. Karte eine rote oder eine grüne Karte sein. Also musst du höchstens 5 Karten umdrehen.

(c) Im ungünstigsten Fall kann Folgendes passieren: Du erwischst zuerst die 4 blauen Karten. Dann ist die 5. Karte rot oder grün.
Ist die 5. Karte rot, dann kann die 6. Karte auch rot sein. Dann muss aber die 7. Karte grün sein, weil alle roten und blauen Karten schon gezogen sind. Ist aber die 5. Karte grün, dann gibt es noch zwei grüne Karten, die du anschließend erwischen könntest. Dann muss die 8. Karte aber rot sein, weil alle blauen und grünen Karten schon aufgedeckt sind. In diesem (extrem ungünstigen) Fall musst du tatsächlich 8 Karten ziehen.

(d) 1. Fall: $12 + 12 + 12 = 36$, dann hat Ursula 3 grüne Karten gezogen.
2. Fall: $18 + 9 + 9 = 36$, dann hat Ursula eine rote und zwei blaue Karten gezogen.

(e) Alle Punktezahlen zu den einzelnen Karten sind durch 3 teilbar. Dann muss auch jede Summe, die eine Auswahl aus den Einzelpunkten als Summanden enthält, durch 3 teilbar sein, aber die Zahl 38 ist es nicht. Beate hat falsch addiert.

2. (a) Es kann z.B. der Nachname „Müller“ mit jedem der 5 Vornamen kombiniert werden. Auch für die anderen Nachnamen gibt es jeweils die gleiche Kombination. Es gibt 4 verschiedene Nachnamen. Also gibt es mindestens $4 \cdot 5 = 20$ Personen im Saal.

(b) Weil nicht auszuschließen ist, dass zwei (oder mehr) Personen anwesend sind, die z.B. „Renate Schmidt“ heißen, ist die Angabe einer Höchstzahl nicht möglich. Nur die Abmessungen des Saales begrenzen die Personenzahl.

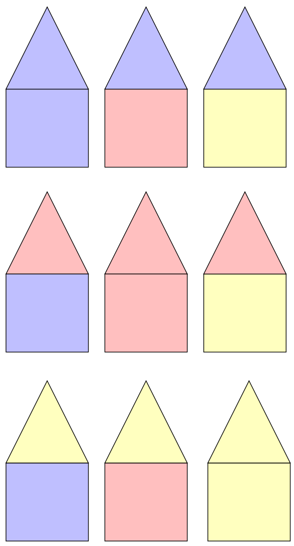
3. Am besten stellst du eine Tabelle auf:

Anzahl der 2 €-Münzen	1	2	3	⋯	14	15
Anzahl der 1 €-Münzen	28	26	24	⋯	2	0
Gesamtbetrag in €	30	30	30	⋯	30	30

Wie du aus der Tabelle erkennen kannst, gäbe es 15 Möglichkeiten. Diese Möglichkeiten müssen aber nicht alle eintreten: Wenn im Sparschwein 59 €enthalten sind, dann ist nur sicher, dass mindestens eine 1 €-Münze mit dabei ist. Ob genügend 1 €- und 2 €-Münzen vorhanden sind, um alle Möglichkeiten abzudecken, ist nicht geklärt.

4. Strategie: Lasse so lange wie möglich ein Objekt unverändert und kombiniere damit die restlichen Objekte.

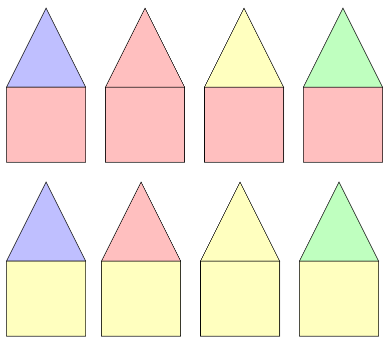
   (a) Hier bleiben zunächst alle Dreiecke blau, dann rot und am Ende gelb:

   Es gibt also $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten.

   Zusatzaufgabe: Ordne die Häuserfronten auf eine andere Weise systematisch an.

   (b) Hier wird z.B. das Quadrat einer Farbe so lange wie möglich beibehalten:

   Es gibt also $4 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten.

5. (a) Eine mögliche Strategie: Anton steht entweder links oder in der Mitte oder rechts. Für jede Position von Anton gibt es für Bettina und Claudia zwei Möglichkeiten, sich hinzustellen. Am besten wird dies in einer Tabelle deutlich, in der nur die Anfangsbuchstaben der Vornamen hingeschrieben werden:

ABC	**A**CB
B**A**C	C**A**B
BC**A**	CB**A**

Es gibt also $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten.

(b) Doris kann (z.B. von links gesehen) an der 1., 2., 3., oder 4. Stelle (ganz rechts) stehen.

DABC	**D**ACB	**D**BAC	**D**CAB	**D**BCA	**D**CBA
A**D**BC	A**D**CB	B**D**AC	C**D**AB	B**D**CA	C**D**BA
AB**D**C	AC**D**B	BA**D**C	CA**D**B	BC**D**A	CB**D**A
ABC**D**	ACB**D**	BAC**D**	CAB**D**	BCA**D**	CBA**D**

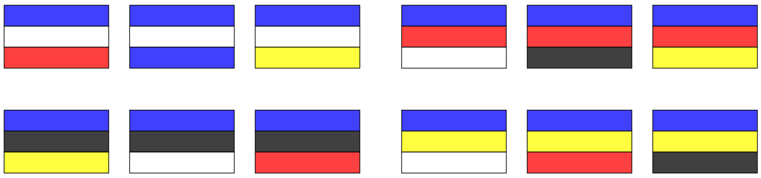
Im Zusammenhang mit der Lösung der vorherigen Aufgabe sind das
$4 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten.

(c) Egon kann die 1., 2., 3., 4. oder 5. Stelle (ganz rechts) einnehmen.
Jede dieser Positionen kannst du mit den 24 Möglichkeiten der vorherigen Lösung kombinieren. Also gibt es
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ Möglichkeiten.
Noch deutlicher kannst du dafür auch $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ schreiben.
Für diese Schreibweise hat man in der Mathematik das Zeichen $5!$ (sprich „Fünf Fakultät“) vereinbart.
So hat also z.B. $53! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53$ den Riesenwert
4274883284060025564298013753389399649690343788366813724672000000000000.

(d) Die Regel könnte also lauten: „Wenn zu der ursprünglichen Personengruppe eine Person hinzukommt, dann berechnest du die neue Anzahl von Möglichkeiten, indem du die ursprüngliche Zahl der Möglichkeiten mit der Personenzahl der neuen Gruppe multiplizierst.“

6. Wir verwenden als Abküzungen für die Gerichte jeweils deren Anfangsbuchstaben.
Welche Gerichte kannst du mit einer Tomatensuppe (T) einnehmen?
Die Tomatensuppe wird zunächst mit dem Schnitzel (S) und dem Nachtisch kombiniert:
TSE, **TS**O und **TS**K. Das sind 3 Möglichkeiten.
Als nächstes wählen wir Tomatensuppe und Hähnchen (H) ins Menü:
THE, **TH**O und **TH**K. Das sind wieder 3 Möglichkeiten.
Ebenso liefert die Zusammenstellung (**T, G** + Nachtisch) 3 Möglichkeiten.
Somit lassen sich mit der Tomatensuppe 9 verschiedene Menüs zusammenstellen.
Was der Tomatensuppe recht ist, ist der Lauchcremesuppe billig: Auch hier gibt es 9 verschiedene Menükombinationen.
Also lassen sich aus dieser Speisekarte 18 verschiedene Menüs zusammenstellen.

7. Im Weiteren werden die Farben blau mit (b), weiß mit (w), schwarz mit (s), rot mit (r) und gelb mit (g) abgekürzt.
   Als Vorgehensweise beim Abzählen empfiehlt es sich zunächst, die Farbe im obersten und im mittleren Streifen (z.B. blau und weiß) so lange unverändert zu lassen, bis damit alle restlichen Möglichkeiten ausgeschöpft sind:

   Die obige Darstellung ergibt für den Fall, dass der oberste Streifen blau ist, 12 Möglichkeiten.
   Nun gibt es ja 4 weitere verschiedene Möglichkeiten, den obersten Streifen einzufärben; insgesamt sind das 5 Möglichkeiten für den obersten Streifen. Zu jeder dieser 5 Möglichkeiten gibt es nun 12 Kombinationen.
   Damit gibt es $5 \cdot 12 = 60$ mögliche Farbzusammenstellungen.

   Wenn du nicht mit Farben arbeiten möchtest, kannst du auch die Anfangsbuchstaben der 5 Farben als Abkürzung verwenden und alle möglichen Farbzusammenstellungen in Form einer Tabelle aufschreiben:

b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
w	w	w	r	r	r	s	s	s	g	g	g
r	b	g	w	s	g	g	w	r	w	r	s

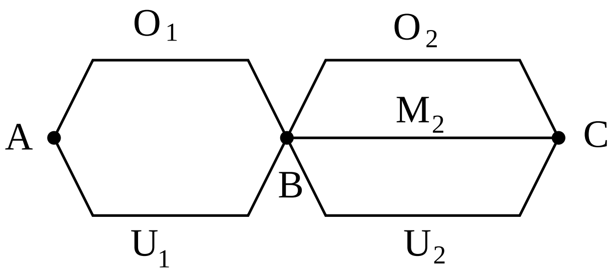
   Hier ergeben sich wieder $3 \cdot 4 = 12$ Möglichkeiten. Nun kannst du erneut die Farbe in dem obersten Streifen noch vier Mal wechseln. Dann erhältst du $4 \cdot 12 = 48$ weitere Möglichkeiten. Zusammen sind das wieder $48 + 12 = 60$ Farbkombinationen.

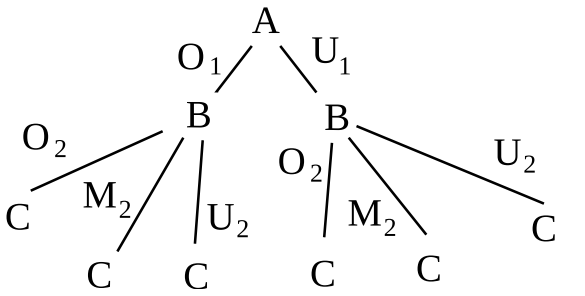
   Du kannst aber die Aufgabe auch nur rechnerisch lösen:

   - Für die Farbe des obersten Streifens dieser Flagge gibt es 5 Möglichkeiten.
   - Für **jede** dieser 5 Möglichkeiten gibt es für den mittleren Streifen 4 Möglichkeiten. Die beiden oberen Streifen lassen sich also auf $5 \cdot 4 = 20$ verschiedene Arten färben.
   - Für **jede** dieser 20 Möglichkeiten kann der unterste Streifen noch auf 3 verschiedene Arten gefärbt werden. Insgesamt gibt es für die Farbanordnung in der Flagge also $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten.

   Zusatzaufgabe: Ermittle Länder, die in ihrer Nationalflagge tatsächlich eine der Farbkombinationen aufweisen.

8. Du kannst die Anzahl der Möglichkeiten in einem **Baumdiagramm** darstellen:





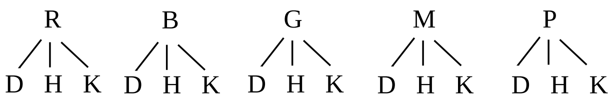
Also führen 6 verschiedene Wege nach Cantorhausen.

9. Kombiniere jede Hose mit allen Pullovern:
   1. Möglichkeit: Fertige mit den abkürzenden Buchstaben eine Tabelle an.

Hosen	Pullover				
D	R	B	G	M	P
H	R	B	G	M	P
K	R	B	G	M	P

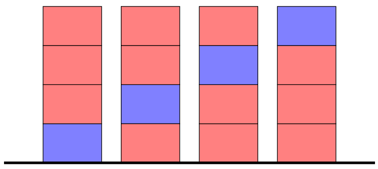
Zu jeder Hose kann Elvira fünf verschiedene Pullover anziehen. Sie hat drei verschiedene Hosen, also hat sie $3 \cdot 5 = 15$ verschiedene Möglichkeiten, sich anzuziehen.
Oder: Zum Pullover einer Farbe kann sie drei verschiedene Hosen anziehen. Sie besitzt fünf verschiedene Pullober. Also hat sie $5 \cdot 3 = 15$ verschiedene Möglichkeiten, sich anzuziehen.

2. Möglichkeit: Fertige mit den abkürzenden Buchstaben Baumdiagramme an.



Wieder ergeben sich 15 verschiedene Möglichkeiten.

10. Eine mögliche Strategie besteht darin, den blauen Legostein zunächst zuunterst zu legen und ihn dann Etage für Etage nach oben wandern zu lassen:



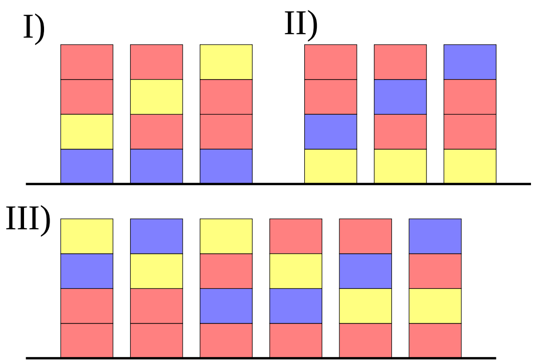
Du kannst also vier verschiedene Türme bauen.

Dasselbe kannst du auch in einer Tabelle aus den Anfangsbuchstaben „r“ für „rot“ und „b“ für „blau“ darstellen:

r	r	r	b
r	r	b	r
r	b	r	r
b	r	r	r

Auch hier gibt es wieder vier Möglichkeiten.

11. (a) Eine mögliche Strategie besteht darin, den blauen Legostein zunächst zuunterst zu legen und dann den gelben Stein Etage für Etage vom 1. in den 3. Stock nach oben wandern zu lassen. (siehe I)
Dann legst du den gelben Stein zuunterst und lässt dann den blauen Stein Etage für Etage vom 1. in den 3. Stock nach oben wandern. (siehe II)
Schließlich legst du zwei rote Steine zuunterst, dann blau, dann gelb bzw. erst gelb und dann blau.
Am Ende liegt ein roter Stein unten und darüber entweder entweder ein blauer oder ein gelber (siehe III).



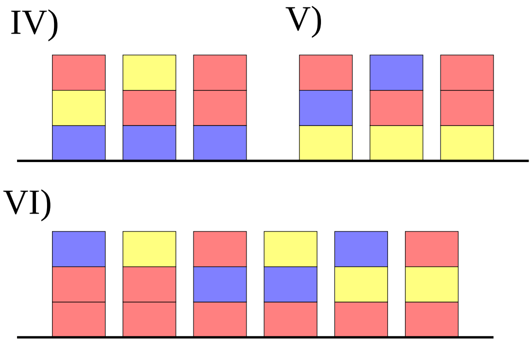
Du kannst also zwölf verschiedene Türme bauen.

Dasselbe kannst du auch in einer Tabelle aus den Anfangsbuchstaben „b“ für „blau“, „g“ für „gelb“ und „r“ für „rot“ darstellen:

Figur I)			Figur II)			Figur III)					
r	r	g	r	r	b	g	b	g	r	r	b
r	g	r	r	b	r	b	g	r	g	b	r
g	r	r	b	r	r	r	r	b	b	g	g
b	b	b	g	g	g	r	r	r	r	r	r

Auch hier gibt es wieder zwölf Möglichkeiten.

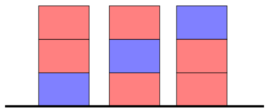
(b) Am einfachsten ist es, von den Vierertürmen der Lösung (a) den obersten Stein wegzunehmen. Dann ergibt sich das folgende Bild:



Du kannst also wieder zwölf verschiedene Türme bauen.

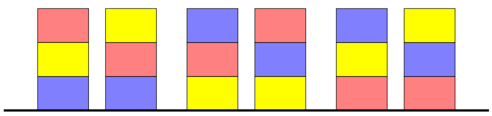
Doch du kannst auch die Lösung Aufgabe (b) unabhängig von der Lösung der Aufgabe (a) finden.

1. Fall:
Du hast zwei rote Steine und einen blauen.



Du kannst jetzt nur drei verschiedene Türme bauen. Natürlich ändert sich die Anzahl der Möglichkeiten nicht, wenn du neben den zwei roten einen gelben Stein nimmst. Das sind aber nochmals drei Möglichkeiten, weil in der Aufgabenstellung (b) nicht festgelegt ist, welche Farben unter den vorgegebenen im Turm vorkommen sollen. Also gibt es in diesem Fall 6 Möglichkeiten.

2. Fall:
Du hast einen blauen, einen gelben und einen roten Stein.



Du kannst jetzt sechs verschiedene Türme bauen.
Nimmst du z.B. den blauen Stein als untersten, dann gibt es darüber zwei Kombinationen: entweder gelb-rot oder rot-gelb. Genau so ergeben sich jeweils zwei Kombinationen wenn der gelbe oder der rote Stein zuunterst liegt. Weil es drei verschiedene Farben sind, ergeben sich also $2 \cdot 3 = 6$ verschiedene Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es wieder diese 12 Möglichkeiten.

12. Wichtig ist, dass (wie aus dem obigen Text ersichtlich) alle drei Farben bei den wieder eingefangenen Mäusen vertreten sind.
    (a) Es saßen mindestens 3 Mäuse in der Falle: eine schwarze, eine weiße und eine graue.
    (b) Gesamtzahl der Mäuse: $4 + 13 + 9 = 26$.
    Weil es aber einen Rest gibt, der sich noch auf der Flucht befindet, können höchstens 25 Tiere gefangen worden sein.
    (c) Im ungünstigsten Fall gehen zuerst die 13 weißen Mäuse und die 9 grauen Mäuse in die Falle. Dann muss die nächste Maus, die sich fangen lässt, aber schwarz ein. Also sind noch drei schwarze Nager frei.

13. Das weiße Brettchen muss in jedem Fall unter dem roten liegen. Dann gibt es drei Möglichkeiten:

b	r	r
r	b	w
w	w	b