SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 5 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Aufbau des Dezimalsystems

1. Erkläre, wie die jeweilige Zahlenfolge zustande gekommen ist und setze sie an den drei Punkten fort.
   (a) $\ldots; 7; 9; 11; 13; \ldots$
   (b) $1; 2; 4; 7; 11; 16; \ldots$
   (c) $1; 1; 2; 3; 5; 8; \ldots$
   (d) $\ldots; 128; 256; 512; \ldots$
   (e) $\ldots; 36; 49; 64; 81; \ldots$
   (f) $\ldots; 13; 17; 19; 23; 29; \ldots$

2. (a) Nenne die kleinste natürliche Zahl, die aus 5 verschiedenen Ziffern besteht.
   (b) Nenne die größte 4-stellige natürliche Zahl, die man aus 2 verschiedenen Ziffern erzeugen kann.
   (c) Untersuche, ob es eine größte 6-stellige natürliche Zahl gibt, die aus lauter verschiedenen geraden Ziffern besteht.
   (d) Nenne die kleinste 5-stellige Zahl, die sich aus vier verschiedenen Ziffern zusammensetzt.
   (e) Max behauptet: „Eine Zahl, die sich aus lauter gleichen Ziffern zusammensetzt, die größer als 1 sind, kann keine Primzahl sein.“ Hat er recht? Begründe deine Ansicht.

2 Die vier Grundrechenarten

1. Beschreibe, wie die folgenden Summen aufgebaut sind.
   Berechne in jeder Zeile den Summenwert. Schreibe dann an Stelle der drei Punkte passende Summenterme und ihre Summenwerte auf. Was stellst du fest?

   $$\begin{array}{ll} \ldots & = \\ 1+3 & = \\ 1+3+5 & = \\ 1+3+5+7 & = \\ 1+3+5+7+9 & = \\ \ldots & = \\ \ldots & = \end{array}$$

2. Die Zahl 5 lässt sich auf verschiedene Weise als Summe darstellen:

   $$\begin{array}{lcl} 5 & = & 1{+}1{+}1{+}1{+}1 \\ 5 & = & 1{+}1{+}1{+}2 \\ 5 & = & 1{+}2{+}2 \\ 5 & = & 1{+}1{+}3 \\ 5 & = & 2{+}3 \\ 5 & = & 1{+}4 \end{array}$$

   Gib alle möglichen Summendarstellungen für die Zahl 10 an.

3. Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Produkt $111 \cdot 222 \cdot 333 \cdot 444$ hinzuschreiben? Den Produktwert selbst sollst du nicht ausrechnen.

4. Berechne jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen für $G = \mathbb{N}$:
   (a) $5 + 7 \cdot x = 54$
   (b) $6 + 7 \cdot x = 55$
   (c) $54 = 7 \cdot x + 5$
   (d) $1 + 7 \cdot y + 4 = 54$
   (e) $23 + 7 \cdot x - 18 = 2 \cdot (19 + 8)$

   Was fällt dir auf? Hast du dafür eine Erklärung?

5. Berechne die Lösungsmenge der drei Ungleichungen sowohl für $G = \mathbb{N}$ als auch für $G = V_5$:
   (a) $31 - 3 \cdot x \leqq 17$
   (b) $35 - 3 \cdot x \leqq 20$
   (c) $27 - 3 \cdot x \leqq 13$

   Was fällt dir auf? Hast du dafür eine Erklärung?

6. Gegeben sind die Zahlenmengen $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ und $B = \{2; 4; 6; 8\}$. Bilde die folgenden Mengen:

(a)	$(A \cup B) \cap B$	(b)	$(A \cap B) \cup B$
(c)	$(B \cup A) \cap A$	(d)	$(B \cup A) \cup A$
(e)	$(A \cap B) \cap B$	(f)	$(B \cap A) \cap A$

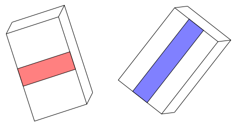
7. Gib alle natürlichen Zahlen an, die auf der Zahlengeraden nicht rechts von 37 liegen und die gleichzeitig sowohl durch 2 als auch durch 3 ohne Rest teilbar sind.

8. Schreibe eine dreistellige Zahl hin, die aus lauter verschiedenen positiven Ziffern besteht. Erzeuge die „Spiegelzahl“ dadurch, dass du die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge hinschreibst.
   Subtrahiere die kleinere von der größeren Zahl und bestimme den größten Teiler des Differenzwertes.
   Wiederhole das Experiment mehrfach. Was stellst du fest? Hast du eine Erklärung dafür?

9. Aus der Zahl 157 lassen sich neue dreistellige Zahlen erzeugen, indem man ihre Ziffern vertauscht.
   Schreibe alle Zahlen auf und addiere sie. Bestimme sämtliche Teiler des Summenwertes.
   Erfinde selbst eine neue dreistellige Zahl, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und wiederhole das Experiment. Vergleiche die Teiler mit jenen der Einstiegsaufgabe. Was stellst du fest? Gilt das immer?

10. (a) Die 24 Stückchen einer Tafel Schokolade werden in einer Kindergartengruppe gleichmäßig verteilt. Wie viele davon bekommt jedes Kind?
    (b) Beantworte die Frage (a), wenn es 25 oder 23 Stückchen wären.

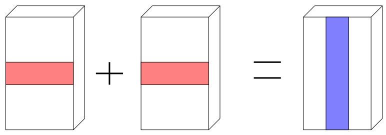
11.



(I) (II)

In jeder der beiden Streichholzschachteln (I) und (II) befinden sich Streichhölzer.

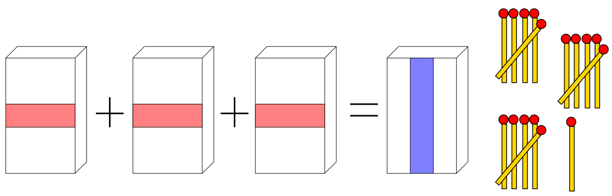
(a)
- Gleich aussehende Schachteln enthalten stets die gleiche Anzahl von Streichhölzern. Notiere, was die folgende Gleichung aussagt:



- Gib mindestens 5 verschiedene Lösungen für diese Gleichung in Tabellenform an, etwa so:

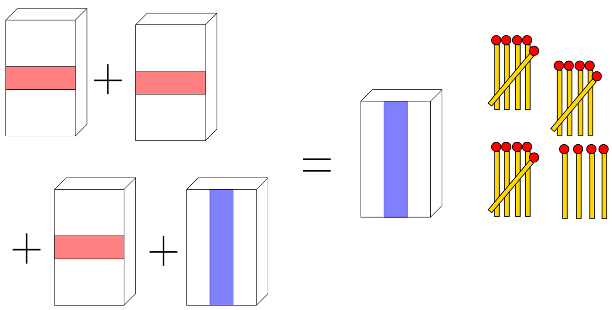
Anzahl in Schachtel (I)	...	...
Anzahl in Schachtel (II)	...	...

(b)



Ermittle die jeweilige Anzahl von Streichhölzern in jeder der beiden Schachteln vom Typ (I) und Typ (II), für welche die obige Darstellung zutrifft. Finde möglichst viele verschiedene Lösungen.

(c)



Fritz schaut sich die Gleichung an. Dann schüttelt er den Kopf und meint: „Hier stimmt doch etwas nicht!“ Begründe, dass Fritz recht hat.

12.

		☆
❁		

Melanie hat neun Spielkarten. Je drei davon sind „Rosette“ (❁), „Stern“ (☆) und „Pik“ (♠). Sie hat in dem quadratischen Muster bereits zwei Spielkarten platziert.
Ihre Freundin Claudia soll jetzt die noch freien Felder in dem quadratischen Muster so mit den restlichen sieben Karten belegen, dass dann weder in einer Zeile noch in einer Spalte zwei gleiche Bilder liegen.

13.

❖			
	♠		
		❁	
❁			☆

Hans hat 16 Spielkarten. Je vier davon sind „Rosette“ (❁), „Stern“ (☆), „Pik“ (♠) und „Karo“ (❖).
Er hat in dem quadratischen Muster bereits fünf Spielkarten platziert.
Sein Freund Helmut soll jetzt die noch freien Felder in dem quadratischen Muster so mit den restlichen 11 Karten belegen, dass dann weder in einer Zeile noch in einer Spalte zwei gleiche Bilder liegen.

14. Die Klasse 5c der Leonhard-Euler-Realschule bekommt von ihrem Mathematiklehrer, Herrn Lieret, die folgende Aufgabe:
„Schreibe eine zweiziffrige Zahl auf, in der keine Null vorkommt. Durch Vertauschen der beiden Ziffern erhältst du eine zweite Zahl, die ‚Spiegelzahl‘. Addiere zur Zahl ihre Spiegelzahl. Zerlege den Summenwert in Faktoren“.

(a) Nach einer Weile bittet Herr Lieret Marie, Beate und Gregor, ihre Rechnungen an die Tafel zu schreiben, aber dabei nicht alles zu verraten.

Marie schreibt: $74 + \bigcirc = 11 \cdot 11$

Gregor und Beate haben zusammengearbeitet.

Beate schreibt: $67 + 76 = 13 \cdot \square$

Gregor schreibt: $\blacksquare + \triangle = 187 = \square \cdot \heartsuit$

Berechne für ◯, □, ■, △ und ♡ die entsprechenden Zahlen. Beachte dabei: Gleiche Zeichen bedeuten gleiche Zahlen.

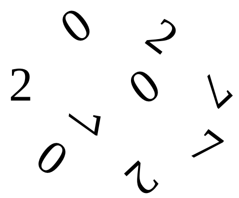
(b) Da ruft Max: „Herr Lieret, der Summenwert hat immer den Teiler … .“ Die anderen bestätigen das auch für ihre Rechnung. Welchen Teiler meint Max?

(c) Ursula meldet sich: „Der zweite Faktor neben der 11 an der Tafel ist zwar immer anders, aber beim Addieren der … kommt der zweite Faktor heraus. Was hat Ursula gemeint?“

(d)
- Jede zweiziffrige Zahl lässt sich in der Form $z \cdot 10 + e \cdot 1$ schreiben, wobei z die Anzahl der Zehner und e die Anzahl der Einer darstellt.
  Beispiel: $37 = 3 \cdot 10 + 7 \cdot 1$; also ist hier $z = 3$ und $e = 7$.
  Bestätige mit der Darstellung $z \cdot 10 + e \cdot 1$ für zweiziffige Zahlen, dass die Aussagen von Max und Ursula für alle möglichen Lösungen der Aufgabe richtig sind.
- Was wäre, wenn Herr Lieret in seiner Aufgabe die Null bei der Bildung der zweiziffrigen Zahlen zugelassen hätte?

(e)
- Herr Lieret will wissen, wer in der Klasse den größten Summenwert erhalten hat. Lisa ist es; sie hat 209 herausbekommen. Doch Emil widerspricht: „Das kann nicht stimmen.“ Wie kannst du Lisa überzeugen, dass Emil recht hat?
- Wie viele verschiedene Summenwerte gibt es überhaupt?
- Wie viele zweiziffrige Zahlen (ohne die Ziffer Null) ergeben zusammen mit ihrer Spiegelzahl den Summenwert 143?

15.



(a) Wie oft ist die Null in dem Zahlengiganten

$$\underbrace{207207207\ldots207}_{\text{2007 Ziffern}} \qquad \text{vertreten?}$$

(b) Berechne 207 : 9 207207 : 9 207207207 : 9.
Was stellst du fest?

(c) Wie viele Ziffern enthält der Wert des Quotienten aus diesem Zahlengiganten und 9?

(d)
- Wie oft ist die Ziffer 2 im Wert des Quotienten aus diesem Zahlengiganten und 9 vertreten?

- Wie oft ist die Null im Wert des Quotienten aus diesem Zahlengiganten und 9 vertreten?

(e) Wie viele Nullen sind im im Wert des Quotienten aus diesem Zahlengiganten und 23 enthalten?

16. Auf wie viele Nullen endet der Wert des folgenden Produktes?

$$(10^{117}+1)\cdot(10^{117}\cdot 100)\cdot(117^{10+1})\cdot(1^{117+10})\cdot(10+0^{117})$$

17. 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512
Karin und Wolfgang betrachten den Zahlenriesen. Wolfgang meint:„Die Zahl ist durch 4 teilbar.“ Karin hat genauer hingeschaut: „Die Zahl ist sogar durch 36 teilbar.“

(a) Woran hat Wolfgang die Teilbarkeit durch 4 erkannt?

(b) Wie kannst du ohne längere Rechnung begründen, dass Karin Recht hat?

18. Christian GOLDBACH (1690-1764) war Mathematiklehrer. Am 7. Juni 1742 schrieb er einen Brief an den berühmten Mathematiker Leonhard EULER (1707-1783). Darin steht eine Behauptung, die heute als die **Goldbachsche Vermutung** bekannt ist. Sie lautet:
Jede gerade natürliche Zahl, die größer als 3 ist, lässt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.

(a) Zeige am Beispiel der Zahl 10, dass diese als Summe zweier Primzahlen dargestellt werden kann.

(b) Weshalb stehen in der Goldbachschen Vermutung die Worte: „..., die größer als drei ist, ...“?

(c) Zeige, dass die Zahl 18 auf verschiedene Weise als Summe zweier Primzahlen dargestellt werden kann.

(d) Gib alle Möglichkeiten an, wie sich die Zahl 40 als Summe zweier Primzahlen darstellen lässt.

(e) In der Goldbachschen Vermutung sind ungerade natürliche Zahlen ausgenommen. Finde unter den ungeraden naürlichen Zahlen, die kleiner als 30 sind, alle diejenigen, die sich nicht als Summe zweier Primzahlen darstellen lassen.

(f) Der Mathematiker Jörg Richstein vom Institut für Informatik der Universität Gießen hat im Jahre 1998 mit Hilfe eines Rechenprogrammes am Computer alle geraden Zahlen bis 400 Billionen untersucht. Bei jeder einzelnen geraden Zahl hat sich die Goldbachsche Vermutung dabei als richtig herausgestellt.
Der britische Verlag „Faber and Faber“ hat demjenigen ein Preisgeld von einer

Million Dollar versprochen, der die Goldbachsche Vermutung entweder beweisen oder widerlegen kann. Eigentlich dürfte doch Herr Richstein dann eine Million Dollar kassieren. Oder?

19. Susanne und Hans rechnen im Kopf:
    - $37 + (19 - 15)$ und $(37 + 19) - 15$
    - $(53 + 21) - 18$ und $53 + (21 - 18)$

    Sie stellen fest, dass die Ergebnisse in jeder Zeile die gleichen sind.

    (a) Susamme meint: „Das ist doch klar, denn . . . “.
    Wie hat es Susanne dem Hans erklärt?

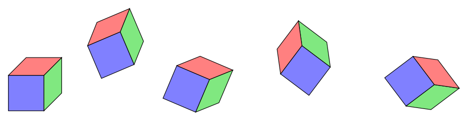
    (b) Hans gibt zu bedenken: „Obwohl die Ergebnisse jeweils gleich sind, geht es dabei in einem Fall schneller.“ Begründe, weshalb es da schneller geht.

20. (a) Berechne im Kopf:
    - $39 - (27 + 4)$ und $(39 - 27) + 4$
    - $(87 - 53) - 14$ und $87 - (53 - 14)$

    (b) Erkläre, weshalb in jeder Zeile verschiedene Ergebnisse herauskommen, obwohl doch die gleichen Zahlen und die gleichen Rechenzeichen in unveränderter Reihenfolge dastehen.

21. Gertrud, Helmut und Willy brüten über zwei Riesenaufgaben:
    Aufgabe 1: $3456789 - (12345 - 11)$ Aufgabe 2: $(3456789 - 12345) - 11$
    Willy war zuerst fertig: „Lauter gleiche Zahlen und Rechenzeichen - also sind die Ergebnisse gleich.“
    Gertrud widerspricht. „Meine beiden Ergebnisse unterscheiden sich um 22.“ Helmut mischt sich ein. „Gertrud hat recht. Dazu brauchen wir nur die Zahlen zu betrachten, die jeweils von 3456789 subtrahiert werden müssen“.
    Wie hat Helmut gerechnet?

22.



Maria baut Würfel aus lauter kleinen Würfeln zusammen, deren Kantenlänge jeweils 3 cm beträgt. Sie hat einen Vorrat von 150 solcher kleinen Würfel.

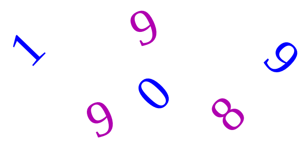
(a) Wie viele kleine Würfel braucht sie, um einen größeren Würfel mit doppelter Kantenlänge zusammenzusetzen? Welches Volumen hat dieser große Würfel?

(b)
- Wie viele kleine Würfel bräuchte sie, um zwei größere Würfel, den einen mit dreifacher und den anderen mit vierfacher Kantenlänge zusammenzusetzen, wenn sie genügend viele kleine Würfel hätte?
- Berechne das Volumen des großen Würfels mit dreifacher Kantenlänge auf zwei verschiedene Arten.

(c) Könnte Maria auch einen Würfel zusammenfügen, dessen Volumen 100-Mal so groß wie der eines kleinen Würfels ist?

(d) Maria baut aus ihren 150 kleinen Würfeln solche mit der doppelten und solche mit der dreifachen Kantenlänge so dass kein kleiner Würfel übrig bleibt.
Wie viele größere Würfel hat sie?

23.



(a) Berechne jeweils die Ergebnisse und trage sie in die Tabelle ein:

$99 \cdot 11 =$	
$999 \cdot 11 \quad =$	$99 \cdot 111 \quad =$
$9999 \cdot 11 \quad =$	$99 \cdot 1111 \quad =$
$99999 \cdot 11 \quad =$	$99 \cdot 11111 \quad =$

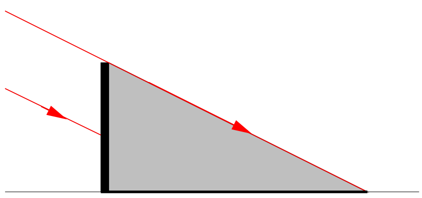
(b) Wenn du richtig gerechnet hast, dann stimmen deine Ergebnisse ab der zweiten Zeile links und rechts überein.
Begründe, dass z.B. $9999 \cdot 11 = 99 \cdot 1111$ sein muss, indem du eine geeignete Zerlegung in Faktoren vornimmst.

(c) Dann könntest du doch auch die Ergebnisse von

$$9\,999\,999 \cdot 11 \text{ und } 99 \cdot 111\,111\,111$$

ganz leicht angeben.
Warum? Was kommt heraus?

24.



Der Schatten eines 1,50 m hohen Stabes ist 1,80 m lang.

(a) Wie lang ist jeweils zur gleichen Zeit der Schatten von Stäben, welche die folgenden Längen aufweisen:
(a1) 4,50 m (a2) 50 cm (a3) 2 m (a4) 25 cm
Weshalb steht in der Aufgabe „... jeweils zur gleichen Zeit ...“?

(b) Wie lang sind jeweils die Stäbe, welche die folgenden Schattenlängen erzeugen?
(b1) 3,60 m (b2) 30 cm (b3) 1,50 m (b4) 18 cm

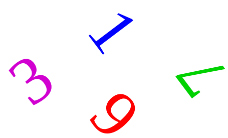
25. Es gibt vier zweistellige Zahlen, für die die erste Ziffer doppelt so groß ist wie die zweite.

(a) Schreibe alle diese Zahlen der Größe nach geordnet von oben nach unten in die Kästchen. Beginne mit der kleinsten.

(b) Wenn du in jeder Zahl die Ziffern vertauschst, so entsteht die „Spiegelzahl“.
- Subtrahiere von jeder Zahl ihre Spiegelzahl. Rechne oben in der betreffenden Zeile.
- Notiere, was dir alles auffällt.

26. Erzähle zu den beiden Gleichungen eine passende Geschichte:
Gleichung (1): $2 \cdot x - 4 = 32$ und
Gleichung (2): $2 \cdot (x - 4) = 32$.

27.



Du kannst zeigen, dass $3^{22} - 4$ keine Primzahl ist, ohne dass du den Wert der Potenz 3^{22} ausrechnen musst.

(a) Trage die Endziffern der Werte der betreffenden Potenzen in die Tabelle ein:

Potenz	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	...
Endziffer											...

(b) Was stellest du fest?

(c) Wie heißt demnach die letzte Ziffer des Wertes der Potenz 3^{22}?

(d) Wie begründest du also die Tatsache, dass der Wert der Differenz $3^{22} - 4$ keine Primzahl ist?

(e) Gib für das Fragezeichen im Exponenten drei verschiedene natürliche Zahlen an, die größer als 100 sind , so dass der Differenzwert $3^{?} - 4$ durch 5 teilbar ist. Erkläre, wie du deine Auswahl getroffen hast.

28. (a) Hans behauptet: „Nicht jede dreistellige Zahl mit der Quersumme 6 muss durch 6 teilbar sein.“ Hat Hans Recht? Begründe deine Antwort.

(b) Maria behauptet: „Wenn du die Ziffern einer 35-stelligen Zahl, die durch 9 teilbar ist, vertauschst, kann es passieren, dass die abgeänderte Zahl nicht mehr durch 9 teilbar ist.“ Hat sie Recht? Begründe deine Antwort.

29. Das „Querprodukt“ einer natürlichen Zahl erhältst du, wenn du alle Ziffern dieser Zahl miteinander multiplizierst.
Beispiel: Die Zahl 5346 hat das Querprodukt $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 360$.

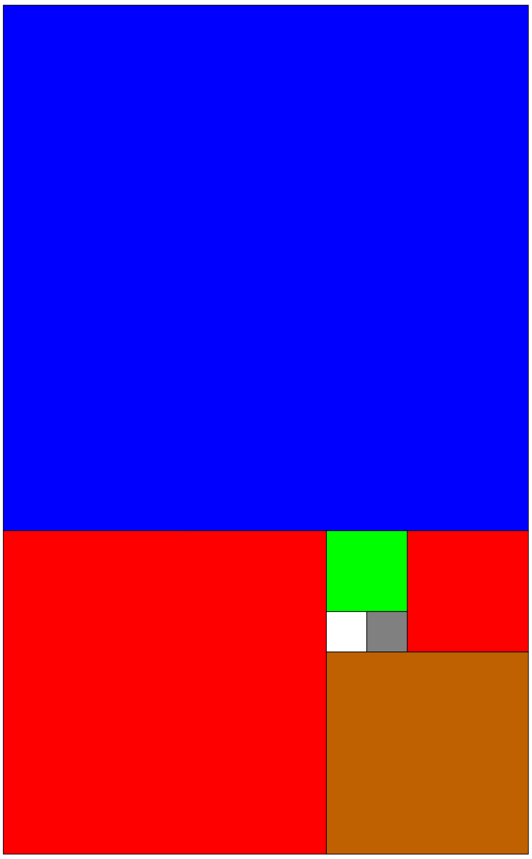
(a) Gib eine zehnstellige Zahl an, deren Querprodukt den Wert 1 besitzt. Ist das die einzig mögliche Zahl? Begründe.

(b) Gib alle dreistelligen Zahlen an, deren Querprodukt den Wert 4 hat.

(c) Wie viele dreistellige Zahlen mit dem Querproduktwert 0 gibt es?

(d) Gibt es eine natürliche Zahl, deren Querprodukt durch 11 ohne Rest teilbar ist? Begründe.

30.



Der Maler Eugen Jost aus der Schweiz hat ein rechteckiges Bild gemalt, das sich aus lauter Quadraten zusammenfügt. Er hat das Wort „Girasole“ (auf deutsch: „Sonnenblume“) darunter geschrieben.

(a) Zeichne das Bild mit deinem Geodreieck (du brauchst eine ganze Heftseite). Die Seitenlänge der beiden kleinsten Quadrate soll jeweils 1 cm betragen. Male die Quadrate noch nicht aus. Beschreibe, wie du vorgehst.

(b)

Quadrat Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
Seitenlänge in cm	1	1						

Ergänze die fehlenden Seitenlängen in der Tabelle in der Reihenfolge, wie du die Quadrate gezeichnet hast.
Welche Seitenlänge hätte das 8. Quadrat?
Wie kannst du die Seitenlänge des 9. Quadrates und damit auch die aller folgenden Quadrate berechnen? Erkläre.

(c) Berechne den Flächeninhalt deines Bildes in der Einheit „ dm^2“.

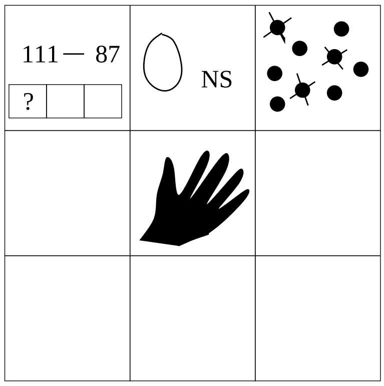
(d) Verbinde den Mittelpunkt des kleinsten grauen Quadrates mit dem des gleichgroßen weißen. Setze dann die Verbindungslinen zu den Quadratmittelpunkten in der Reihenfolge fort, in der du die Quadrate nacheinander gezeichnet hast.

Wie würdest du den Verlauf deines Streckenzuges beschreiben? Betrachte dazu das Foto des Blütenkörbchens einer Sonnenblume („Girasole“). Wenn du keine echte Sonnenblume betrachten kannst, dann versuche es im Internet.

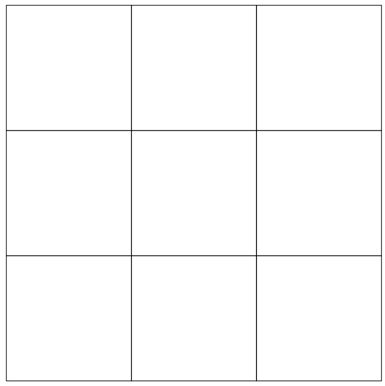
(e) Male dein Bild nach eigenen Vorstellungen aus.

31.

Figur 1



Figur 2



Ein „Magisches Quadrat“ ist eine quadratisch angeordnete Zahlentafel, die in jeder Zeile, Spalte und Diagonalen die gleiche Summe ergibt.
In der Figur 1 ist ein solches magisches Quadrat verschlüsselt und unvollständig dargestellt.

(a) Trage die Zahlen, die sich in der Figur 1 in Rätseln verbergen, an die entsprechende Stelle in der Figur 2 ein.

(b) Vervollständige die noch leeren Felder in der Figur 2, so dass ein magisches Quadrat entsteht.

32.

❍	▼		
	⌘	❏	

Das Produkt der vier Zahlen an jedem Quadrat beträgt 120. Berechne A.

33.

❍	▼	⌘

Zeichne in jedes der freien Kästchen eines der Symbole „Kreis“, „Dreieck“ oder „Kreuz“ so ein, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes der drei Symbole nur einmal vorkommt. Gib alle Möglichkeiten an.

34.

❍	▼		
	⌘	❏	

Zeichne in jedes der freien Kästchen eines der Symbole „Kreis“, „Dreieck“, „Quadrat“ oder „Kreuz“ so ein, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes der vier Symbole nur einmal vorkommt. Gib zwei Möglichkeiten an.
Sind das alle Möglichkeiten?

35. Im Jahre 1963 ist Edwin 37 Jahre alt. Wie alt wäre er im Jahre 2026?

36. Familie Reich hat vier Kinder. Im Jahre 2010 sind Arne 10, Bettina 12, Carsten 14 und Doris 16 Jahre alt.
    (a) Berechne das Gesamtalter der vier Kinder im Jahre 2013.
    (b) In welchem Jahr werden die Geschwister zusammen 100 Jahre alt sein?
    (c) Können die vier Kinder zusammen jemals 163 Jahre alt werden?

37. In der Klasse 5a ist ein neues Rechenzeichen, nämlich das „$\heartsuit$“ für natürliche Zahlen erfunden worden.
    Für dieses Zeichen gilt die Rechenvorschrift

    $$x \heartsuit y = x^2 + x \cdot y, \text{ wobei } x \text{ und } y \text{ Platzhalter für natürliche Zahlen sind.}$$

    Beispiel: $x = 8$ und $y = 5$: $8 \heartsuit 5 = 8^2 + 8 \cdot 5 = 64 + 40 = 104$.
    (a) Berechne $1 \heartsuit 4$, $1 \heartsuit 5$, $1 \heartsuit 6$, ... , $1 \heartsuit 473589$.
    (b) Untersuche, ob für das Rechenzeichen $\heartsuit$ das Kommutativgesetz gilt.
    (c) $7 \heartsuit \square = 126$
    Welche Zahl gehört in das Kästchen?
    (d) Edwin hat etwas entdeckt: „$x \heartsuit x$ ergibt stets eine gerade Zahl!“ Begründe, dass Edwin Recht hat.
    (e) Für welche Belegungen von x und y ergibt $x \heartsuit y$ stets eine ungerade Zahl? Begründe deine Antwort.

38. (a) Gib die größte fünfstellige natürliche Zahl an, deren Quersumme 13 beträgt.
    (b) Gib die kleinste fünfstellige natürliche Zahl an, deren Quersumme 13 beträgt.

39. (a) Gib alle natürlichen Zahlen an, deren Ziffernprodukt 12 ergibt.
    (b) Wie viele natürliche Zahlen gibt es, deren Ziffernprodukt 7 ergibt? Begründe deine Antwort.

(c) Wie viele natürliche Zahlen gibt es, deren Ziffernprodukt 13 ergibt? Begründe deine Antwort.

(d) Ermittle mit Hilfe einer Tabelle systematisch alle dreistelligen natürlichen Zahlen, deren Ziffernprodukt 0 ergibt. Wie viele sind es insgesamt?

40.

$$2 \cdot 9\,089\,133 = 9\,089\,129 + \boxed{}$$

Welche Zahl gehört in das Kästchen, damit die Gleichung stimmt? Versuche, die Frage zu beantworten, ohne den Produktwert auf der linken Seite zu berechenen.

41. (a)
- Schreibe alle natürlichen Zahlen zwischen 8 und 15 auf.
- Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen 8 und 15?
  Schreibe als Antwort einen vollständigen Satz.
- Notiere eine Regel, nach der du die Anzahl der natürlichen Zahlen zwischen 8 und 15 ausrechnen kannst, ohne alle in Frage kommenden Zahlen hinzuschreiben.

(b)
- Wende deine Regel auf die Anzahl der natürlichen Zahlen an, die zwischen 57 und 74 liegen.
- Überprufe deine Lösung durch Abzählen der betreffenden Zahlen.

(c) Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen 103 859 und 801 467? Formuliere als Antwort wieder einen vollständigen Satz.

42. Egon soll $5\,378 \cdot 2\,165$ ausrechnen. Er bekommt 9 643 375 heraus. Das ist jedoch falsch.

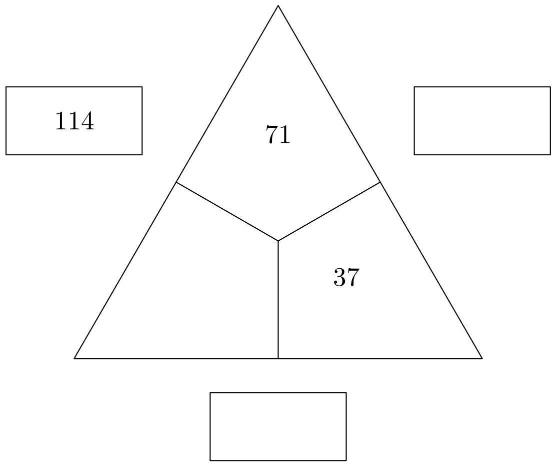
(a) Begründe auf verschiedene Weise, zunächst ohne das richtige Ergebnis auszurechen, weshalb sein Ergebnis fehlerhaft ist.

(b) Berechne das richige Ergebnis.

43. (a) Berechne die Summe aus allen zweistelligen Zahlen, wobei jeweils eine Ziffer doppelt so groß wie die andere ist.

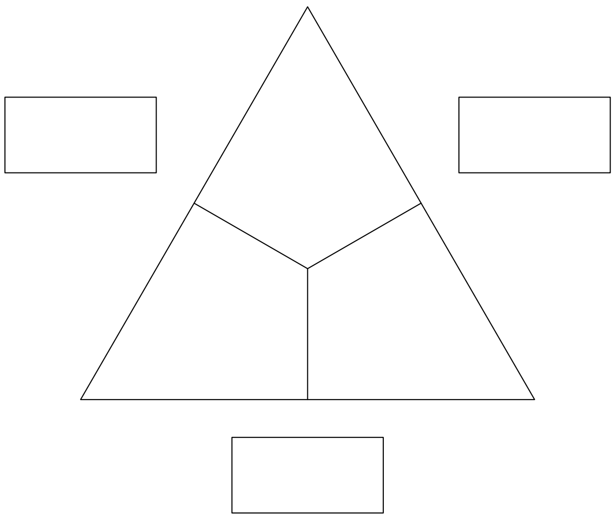
(b) Berechne die Teilermenge des Summenwertes.

44.



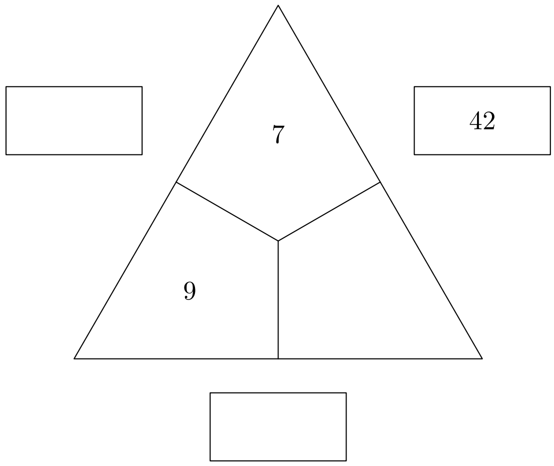
In jedem der Rechtecke soll der Wert der Summe aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck stehen.

(a)
- Berechne die noch fehlenden Zahlen.
- Berechne den Wert der Summe aus den drei Zahlen im Dreieck.
- Berechne den Wert der Summe aus den drei Zahlen in den Rechtecken.
- Vergleiche die beiden Summenwerte. Notiere, was du feststellst.

(b)
- 

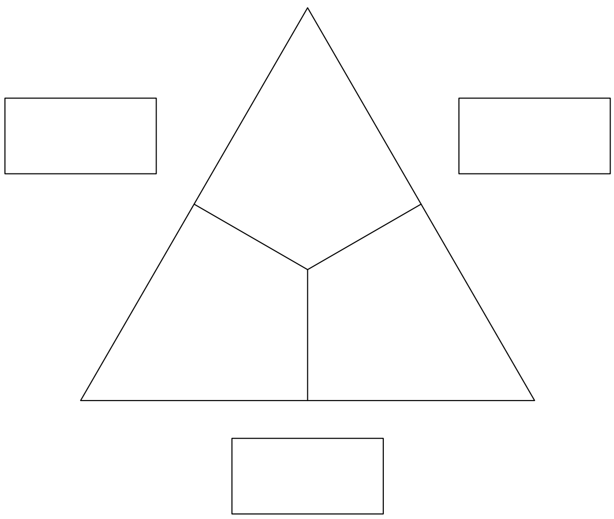
  Fülle die Figur nach obigen Regeln mit Zahlen aus.
- Gilt der Zusammenhang zwischen den beiden Summenwerten innerhalb des Dreiecks und in den drei Rechtecken. jetzt auch noch? Notiere deine Antwort. Vergleiche sie mit der deines Nachbarn.
- Gilt das, was du herausgefunden hast, immer? Begründe deine Antwort.

45.



In jedem der Rechtecke soll der Wert des Produktes aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck stehen.

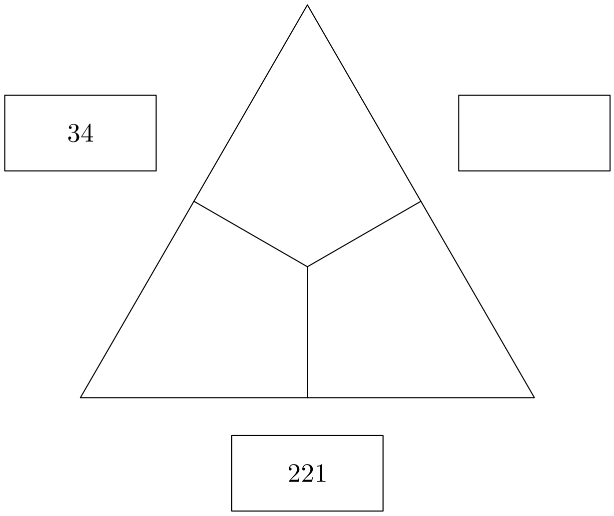
(a)
- Berechne die noch fehlenden Zahlen.
- Berechne den Wert des Produktes aus den drei Zahlen im Dreieck.
- Berechne den Wert des Produktes aus den drei Zahlen in den Rechtecken.
- Dividiere den größeren Produktwert durch den kleineren. Notiere, was du feststellst.

(b)
- 

  Fülle die Figur nach obigen Regeln mit Zahlen aus.
- Gilt der Zusammenhang zwischen den beiden Produktwerten innerhalb des Dreiecks und in den drei Rechtecken. jetzt auch noch? Notiere deine Antwort. Vergleiche sie mit der deines Nachbarn.

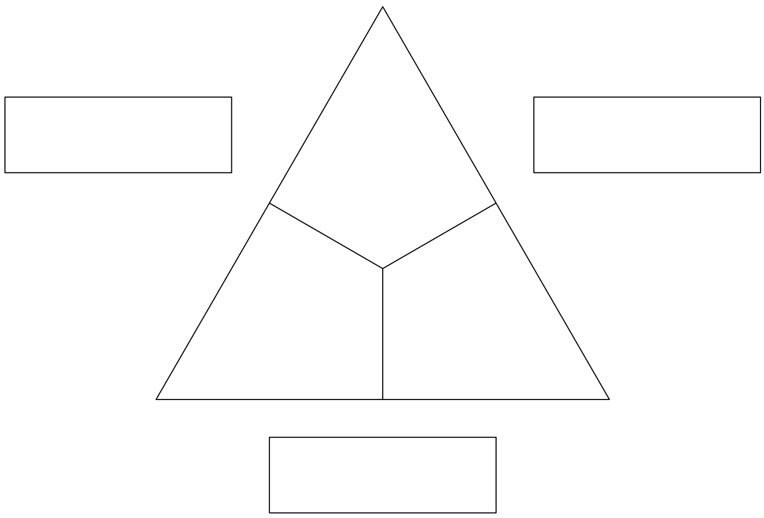
- Gilt das, was du herausgefunden hast, immer? Begründe deine Antwort.

46.



In die drei Felder im Dreieck gehören natürliche Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke der Wert des Produktes aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Zahlen.

47.



In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke das Produkt aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht.
Wir nennen die Plätze, die mit ganzen Zahlen zu belegen sind, „Zellen“. Das Dreieck enthält drei Zellen und die Rechtecke außen stellen drei weitere Zellen dar.
Untersuche, ob die folgenden Behauptungen wahr sind:

(a) Wenn eine Dreieckszelle mit null belegt ist, dann muss in zwei Außenzellen null stehen.

(b) Wenn eine Außenzelle mit null belegt ist, dann muss eine weitere Außenzelle null enthalten.

(c) Wenn in allen Außenzellen null steht, dann enthalten auch die inneren Dreieckszellen lauter Nullen.

48. Untersuche, ob die folgenden Behauptungen wahr sind:

(a) Wenn du in einer Summe aus zwei Summanden den ersten und gleichzeitig den zweiten Summanden verdoppelst, dann verdoppelt sich der Summenwert.

(b) Wenn du in einer Summe aus zwei Summanden den ersten Summanden halbierst und gleichzeitig den zweiten Summanden verdoppelst, dann bleibt der Summenwert unverändert..

49. (a) Fritz behauptet: „Wenn du in einem Produkt aus zwei Faktoren den ersten Faktor halbierst und gleichzeitig den zweiten Faktor verdoppelst, dann bleibt der Produktwert unverändert.“ Untersuche, ob Fritz Recht hat.

(b) Wie ändert sich der Wert des Produktes aus zwei Faktoren, wenn beide Faktoren gleichzeitig verdreifacht werden?

- Beantworte die Frage anhand eines Beispiels.
- Verwende $\square$ als Platzhalter für den ersten und $\bigcirc$ als Platzhalter für den zweiten Faktor.

(c) „Wenn in einem Produkt aus zwei Faktoren jeder Faktor gleichzeitig verzehnfacht wird, dann … “
Schreibe den vollständigen Satz hin.

50. (a) Addiere 36 zur doppelten Differenz aus 99 und 62 .

(b)
- Subtrahiere 124 von der Summe aus 198 und 36 .
- Vergleiche das Ergebnis mit dem der Aufgabe (a).
- Hast du eine Erklärung dafür?

51. Helmut rechnet eine Aufgabe:

$$(100 - 2 \cdot 10) \cdot (74 : 2 - 37) = 80 \cdot 0$$

(a) Überprüfe, ob seine Rechnung bis dahin stimmt.

(b) Helmut rechnet weiter: $80 \cdot 0 = 80$.
Beate hat zugeschaut. Sie meint: „Das kann aber nicht stimmen.“ Erkläre anhand eines Beispiels oder einer kleinen Geschichte, dass Beate Recht hat.

(c) Ursula rechnet anders, nämlich $80 \cdot 0 = 0$. Zur Probe rechnet sie die Umkehraufgabe: $0 : 0 = 80$. Notiere deine Überlegungen zu $0 : 0 = 80$.

52. Fülle das Malkreuz vollständig aus:

•		
	26	39
		51

53. Die Schülerinnen und Schüler der 5a haben die folgenden Aufgaben bekommen:
$7 \cdot 101 =$ $\quad$ $53 \cdot 101 =$ $\quad$ $964 \cdot 101 =$ $\quad$ $1001 \cdot 101 =$ $\quad$.
Beim Berechnen der Ergebnisse meint Hans: „Das mit dem zweiten Faktor 101 ist doch eigentlich ganz einfach: Hänge jeweils an den ersten Faktor zwei Nullen an und addiere zu dieser neuen Zahl den ersten Faktor. Dann hast du den Wert des betreffenden Produktes.“

(a) Berechne selbst die vier Produktwerte. Bestätige, dass Hans mit seiner Regel Recht hat.

(b) Christian behauptet jedoch: „Ja aber wenn der erste Faktor größer als eine Million ist, dann funktioniert die Regel nicht mehr.“
Hat Christian Recht? Begründe deine Antwort.

54. Die Summe aus drei natürlichen Zahlen soll 10 ergeben. Notiere alle Möglichkeiten.

55. Uwe rechnet:
$5183 + 4625 + 1078 + 500 = 11\,386$. Die Lehrerin bestätigt sein Ergebnis.
Doris soll die folgende Aufgabe rechnen:
$5183 - 500 + 1078 + 4625 =$.
Sie betrachtet das Ergebnis von Uwe und meint dann: „Da brauche ich doch nur … .“

(a) Was hat Doris gemeint? Notiere ihre vollständige Antwort und begründe sie.

(b) Schreibe das Ergebnis ihrer Rechenaufgabe hin.

56. Welche Zahl gehört in das Kästchen?
$6 \cdot 7 \cdot 15 = 10 \cdot \square \cdot 21$

57. Ein halkugelförmiges Glasgefäß mit einer Wandstärke von 5 mm hat ein Fassungsvermögen von 10 l.
Berechne den Außendruchmesser des Gefäßes in mm.

58. Berechne die fehlenden Ziffern $\square$ und $\bigcirc$ in der folgenden Multiplikationsaufgabe:

$$\square 3 \cdot 19 \bigcirc = 4\,531$$

59. Ein Personenzug fährt von Cantorhausen über Abelstadt nach Besselheim.
In Cantorhausen befinden sich 306 Fahrgäste im Zug.
In Abelstadt steigt die Hälfte davon aus und 79 Fahrgäste steigen ein.
Die Anzahl der in Besselheim zugestiegenen Fahrgäste ist genauso groß wie die Hälfte der Fahrgäste, die sich bei der Ankunft im Bahnhof im Zug befunden haben. Außerdem steigen in Besselheim 120 Fahrgäste aus.
Wie viele Fahrgäste befinden sich im Zug, wenn dieser den Bahnhof in Besselheim verlässt?

60. a und b sind zwei natürliche Zahlen. Finde alle natürlichen Zahlen a und b, für die $a \cdot b + 3 = 42$ gilt.

61. Ein Produkt aus drei Faktoren hat den Wert 70 . Jeder Faktor ist größer als eins.
Welchen Wert können die drei Faktoren haben? Gib alle Möglichkeiten an.

62. Berechne die Platzhalter:

(a) $11 \cdot 5 \cdot \square \cdot 3 \cdot 7 = 15\,015$.

(b) $\{[(3\,000 : \bigcirc) : 10] : 25\} = 1$.

63.

$$\triangle \quad \bigcirc \quad \boxed{5} \quad : \quad 13 = \; ?$$

Der dreistellige Dividend soll aus lauter verschiedenen Ziffern bestehen.
Berechne alle möglichen Quotientenwerte.

64. Egon ist 13 Jahre alt und er wäre 6 Jahre jünger als Emil, wenn dieser 1 Jahr älter wäre.
Wie alt ist Emil?

65. Wenn du 31 durch 9 dividierst, bleibt der Rest 4.
Eine möglich Schreibweise dafür ist $31 = 3 \cdot 9 + 4$.
    (a) Ermittle alle zweistelligen Zahlen, die bei der Division durch 13 den Rest 12 lassen.
    (b) Ermittle die kleinste dreistellige Zahl, die bei der Division durch 13 den Rest 12 lässt.
    (c) Ermittle die größte dreistellige Zahl, die bei der Division durch 13 den Rest 12 lässt.

66. Die Klasse 5b beschäftigt sich gerade mit natürlichen Zahlen, deren Quersumme 100 beträgt.
    (a) Begründe: Solche Zahlen müssen mehr als 11 Stellen aufweisen.
    (b)
        - Ermittle die kleinste natürliche Zahl mit der Quersumme 100.
        - Schreibe ihren Namen im Wortlaut hin.
    (c) Untersuche, ob es eine größte natürliche Zahl mit der Quersumme 100 gibt.

67. Die Zahl 2013 ist durch 61 teilbar.
    (a) Finde die restlichen Primfaktoren, die in 2013 enthalten sind.
    (b) Wie viele verschiedene Primfaktoren enthält die Potenz 2013^{2013}? Begründe deine Antwort.
    (c) Wie viele Primfaktoren enthält die Potenz 2013^{2013}? Begründe deine Antwort.

68. Eine Rechensoftware kann in Bruchteilen von Sekunden Summen berechnen, z.B.:
Die Berechnung der Summe aller dreistelligen geraden Zahlen $S_g = 100 + 102 + \ldots ?$ und die Berechnung der Summe aller dreistelligen ungeraden Zahlen $S_u = ?$ sind für sie kein Problem.

(a) Welche der beiden Summen hat den größeren Wert ? Begründe deine Antwort.

(b) Die Schüler/-innen der 5a bekommen die Aufgabe, den Wert der Differenz der beiden Summenwerte zu berechnen.
Pauline seufzt: „Das ist ja Wahnsinn! Da sitzen wir ja ewig dran!“
Doch Edwin meint: „Vielleicht könnten wir die geforderte Differenz auch ohne die Summenwerte berechnen. Pass auf: Ich vergleiche 100 mit 101 und dann 102 mit ... “ Pauline unterbricht ihn: „Danke, ich weiß jetzt, wie es geht!“
Berechne selbst den Wert der Differenz.

3 Größen aus dem Alltag

1. Hans arbeitet während der Ferien in einem Supermarkt. Dort soll er die vier Böden eines Regals mit Konservendosen auffüllen, weil dort nur noch 3 Dosen vorhanden sind. Man hat ihm 170 Dosen hingestellt, die er einräumt. Doch es fehlen immer noch 7 Dosen.

   Wie viele Dosen passen auf einen leeren Regalboden?

2. Herr Waller hat Karpfen aus seinem Weiher gefischt. Er will sie gleichmäßig auf drei Wasserbottiche verteilen; dabei stellt er fest, dass ein Fisch übrig bleibt.
   Weil die Fische zu dicht untergebracht sind, will er sie gleichmäßig auf vier Wasserbehälter verteilen., aber es bleibt wieder ein Fisch übrig. Auch mit 5 Bottichen passiert dasselbe.
   Wie viele Fische hat Herr Waller seinem Weiher entnommen?

3. Ursula misst ein DIN-A4-Blatt aus: Breite 209 mm und Länge 296 mm.
   Berechne den Flächeninhalt in cm^2.

4. Daniel hat in seinem Geldbeutel 9 Ein-Euro Stücke, 9 Zehn-Cent Stücke und 9 Ein-Cent Stücke. Wie viel Euro hat er im Geldbeutel?

5. Beate hat 2 € mehr als Klaus, der wiederum 3 € weniger als Helmut besitzt. Zusammen haben sie 20 €.
   Wie viele € hat jede Person?

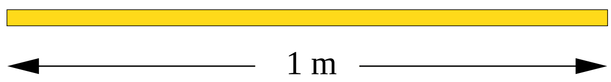
6. Der Zoohändler Grimbart kauft im Großhandel Goldhamster zu je 3 € und Meerschweinchen zu je 5 €. Er muss dafür genau 100 € bezahlen.
   Wie viele Tiere von jeder Art hat er gekauft?

7. Ein Blauwal wiegt etwa 110 t, ein Hirsch dagegen ca. 220 kg.
   Wie viele Hirsche sind dann so schwer wie 3 Blauwale?

8. Die Henne „Berta“ legt jeden 2. Tag ein Ei, die Henne „Frieda“ jeden 3. Tag und ihre Kollegin „Paula“ legt jeden 5. Tag eines.
   Bauer Mecke fand am 10. August, einem Montag, in jedem Nest ein frisch gelegtes Ei.
   (a) Wie viele Eier hatten die drei Hühner seit dem vorigen Dienstag gelegt?
   (b) An welchem Tag waren zuletzt 3 Eier gleichzeitig im Nest gelegen?
   Welcher Wochentag war das?

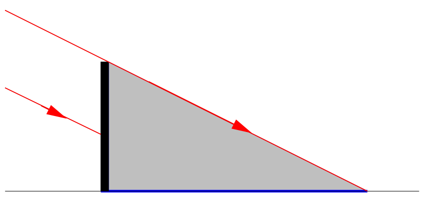
9. Sabrinas Uhr geht in jeder Stunde 30 Sekunden nach. Berechne wie viele Minuten die Uhr an einem Tag nachgeht.

10.



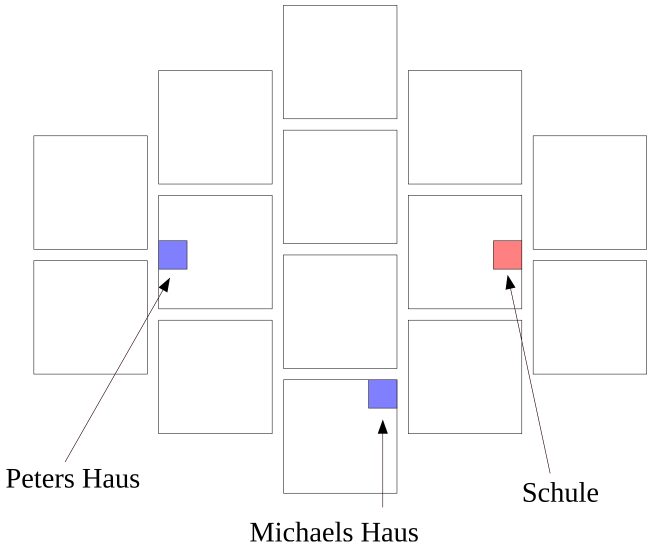
Sarah möchte aus einer 1 m lange Holzleiste, die sie in Stücke sägt, einen möglichst großen Würfel basteln. Sie misst die erforderliche Kantenlänge in ganzen Zentimetern ab.
   (a) Wie lang muss sie dann eine Seitenkante des Würfels wählen? Welchen Abfall hat sie?
   (b) Welches Volumen hat ihr Würfel dann ungefähr?

11.



Der Schatten eines $1,20\,\text{m}$ hohen Stabes ist $1,80\,\text{m}$ lang.
   (a) Zeichne wie in der Skizze oben den Stab und seinen Schatten im Maßstab $1:20$.
   (b) Ermittle mit Hilfe deiner Zeichnung, wie lang der Schatten eines $60\,\text{cm}$ hohen Stabes wäre.
   Erkläre ohne deine Zeichnung, weshalb die Schattenlänge gerade so groß sein muss.

12.



Du siehst einen Plan von der Gegend, in der Peter wohnt. Jedes eingezäunte Grundstück ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 100 m. Dazwischen gibt es Straßen.

(a) Es gibt mehrere Möglichkeiten, wie Peter auf dem kürzesten Weg zur Schule gehen kann. Zeichne farbig zwei Möglichkeiten ein.
Welche Streckenlänge muss Peter also mindestens zur Schule zurücklegen?

(b) Muss Peter einen weiteren Weg zur Schule in Kauf nehmen, wenn er mit Michael gemeinsam zur Schule geht? begründe.

(c) Eva, Manfred und Ludwig haben einen genau so langen Schulweg wie Peter. Alle drei Kinder wohnen auf verschiedenen Grundstücken. Zeichne die Wohnhäuser der drei Kinder ein.

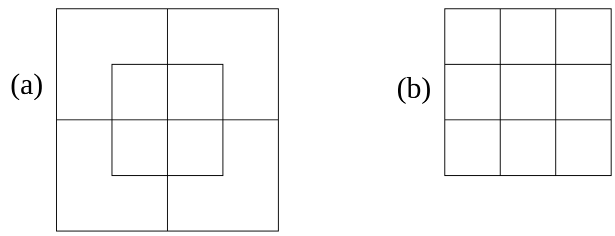
(d) Um wie viele Meter ist der Weg von Michael zur Schule kürzer als de Schulweg von Peter?

13. In der Beschreibung eines Kaffee-Automaten heißt es: „Für 10 bis 12 Tassen; Fassungsvermögen $1,2$ Liter“.
Wie viele cl Kaffe enthält eine Tasse mindestens? Wie viele cl Kaffe enthält eine Tasse höchstens?

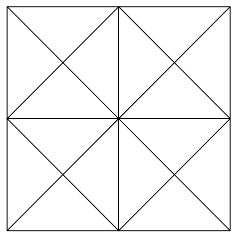
14. Frau Glück, Herr Stern und Frau Klee haben an Weihnachten für bedürftige Kinder zusammen 160 € gespendet.
Frau Glück und Frau Klee haben zusammen 85 € gespendet. Herr Stern und Frau Klee haben zusammen 110 € gespendet. Wie viele € hat jede Person gespendet?

4 Geometrische Grundlagen

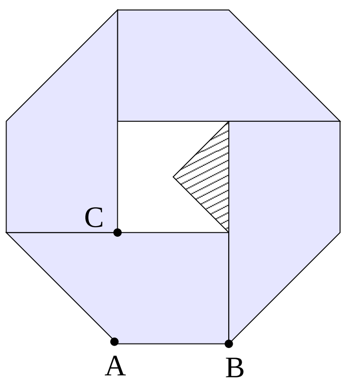
1. Wie viele Quadrate entdeckst du in jeder der beiden Figuren?



2. Wie viele Dreiecke entdeckst du in der Figur?



3. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Zusätzlich ist hier ein schraffiertes Dreieck im Inneren des weißen Quadrates eingezeichnet.



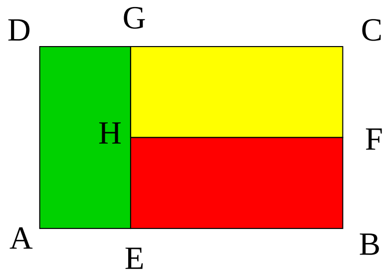
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = \overline{AC} = 2\,\text{cm}$. Du musst nicht am Punkt A oder B beginnen.

(b) Berechne den Flächeninhalt des weißen Quadrates in deiner Zeichnung.

(c) Berechne den Flächeninhalt der gesamten Figur.

(d) Wie oft kannst du das schraffierte Dreieck in der Figur unterbringen? Begründe deine Antwort.

4.



Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.

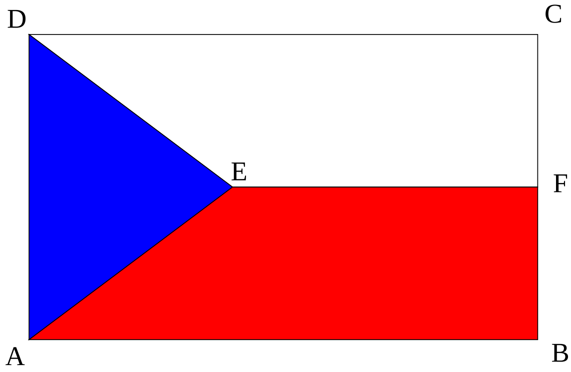
(a) Berechne den Flächeninhalt jedes Rechtecks in mm^2.

(b) Welche Länge hätte der Saum dieser Flagge, wenn sie $5\,\text{m}$ lang und $3\,\text{m}$ hoch wäre?
Wie viele m^2 Stoff bräuchte man für das Rechteck $AEGD$ in dieser Flagge, wenn alle Rechtecke im Inneren den gleichen Flächeninhalt hätten?

(c) Wie viele m^2 Stoff bräuchte man für eine Flagge in Originalgröße, wenn das obige Bild diese Flagge im Maßstab 1:200 darstellt?

(d) Die Fahne wird jetzt so gefaltet, dass der Punkt B auf A und der Punkt C auf D zu liegen kommt. Welche Abmessungen in m müsste die Fahne haben, damit sich auf diese Weise ein Quadrat ergibt?
Wie müsste die Fahne aussehen, damit sich erst nach zweimaligem Falten ein Quadrat ergibt?

5. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.

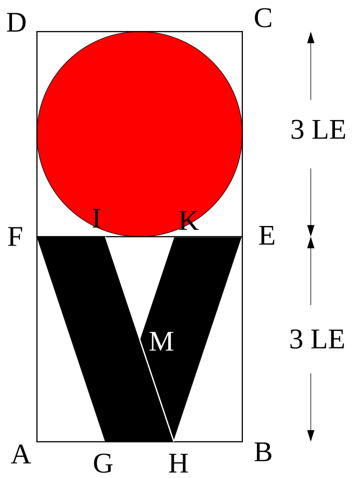


(a) In welche Figuren ist die rechteckige Fahne unterteilt?

(b) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = \overline{EF} = 6\,\text{cm}$.
Zerschneide sie in ihre Teilflächen und setze sie dann auf verschiedene Weise zu einer anderen symmetrischen Figur wieder zusammen. Bei der Symmetrieeigenschaft soll auf Farben keine Rücksicht genommen werden.
Klebe die Figur, die dir besser gefällt, in dein Heft.

(c) Zeichne die Figur mit den gleichen Abmessungen wie in Aufgabe (b) in ein Gitternetz.
Gib die Koordinaten der Punkte A, B, C, D, E und F an.

6. Das ist ein Bild des Logos der Firma MARABU, die Farben herstellt.

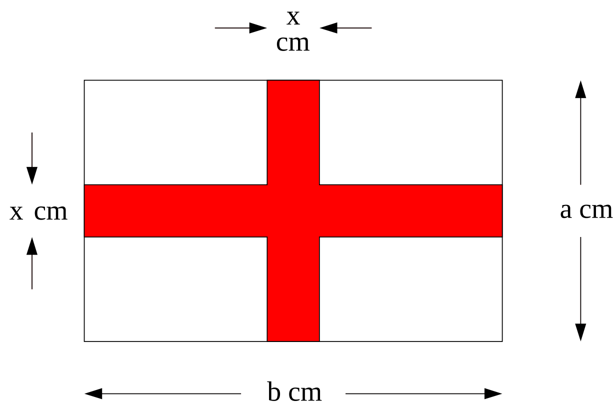


Es gilt: $\overline{AG} = \overline{GH} = \overline{HB} = 1\,\text{LE}$. Ebenso gilt: $\overline{FI} = \overline{IK} = \overline{KE} = 1\,\text{LE}$.

(a) Zeichne die Figur. 1LE entspricht dabei 2 cm.

(b) Wie viele Vierecke und wie viele Dreiecke endeckst du darin? Beschreibe ihre Eigenschaften möglichst genau mit den Begriffen „senkrecht“, „parallel“ und „symmetrisch“.

7. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



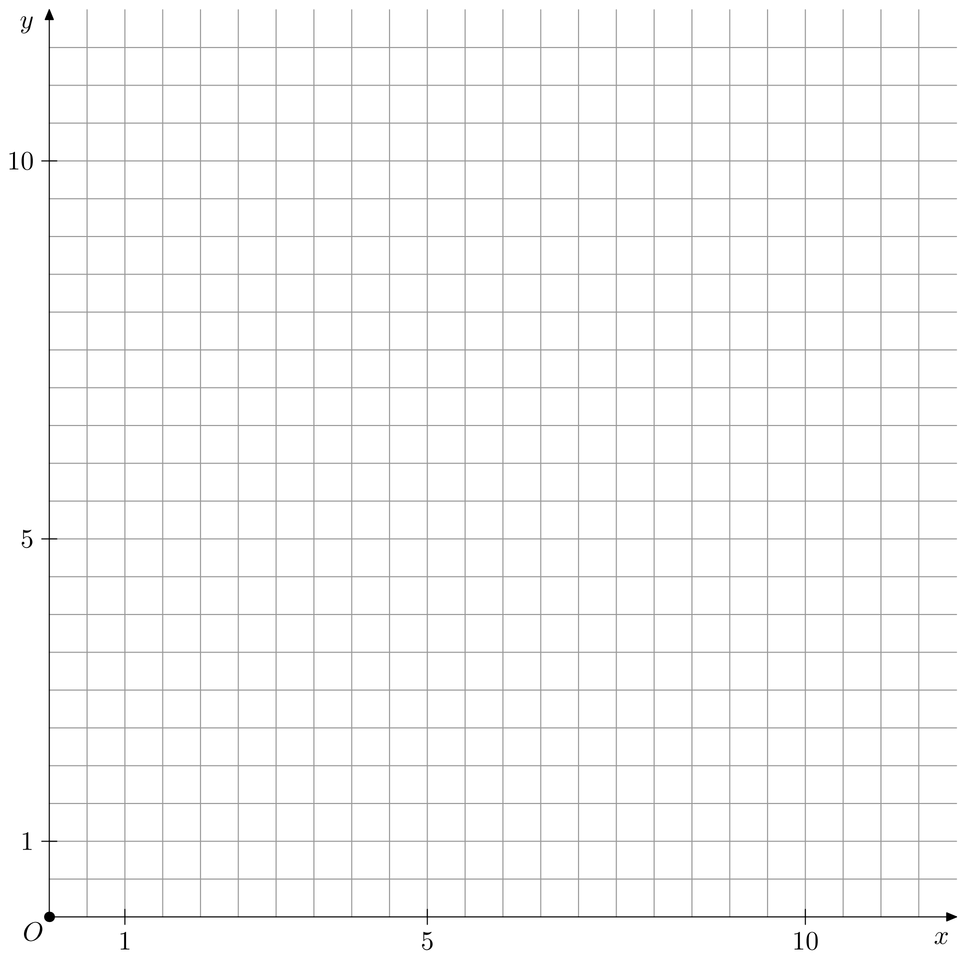
(a) Zeichne die Figur für $b = 8$, $a = 5$ und $x = 1$.

(b) Wie viele Rechtecke sind in der Figur enthalten?

(c) Wie viele rechte Winkel entdeckst du?

(d) Berechne den Flächeninhalt des roten Kreuzes.

8.



(a) Zeichne die Punkte $A_1(1 \mid 2)$, $A_2(2 \mid 4)$, $A_3(3 \mid 6)$ und $A_4(4 \mid 8)$ in das Gitternetz.

(b) Notiere die Koordinaten des dazu passenden Punktes A_5. Zeichne diesen Punkt ein.

(c) Notiere jeweils für alle möglichen Punkte A_n einen Zusammenhang zwischen dem x-Wert und dem betreffenden y-Wert.

(d) Begründe: Der Punkt $N(x \mid 24689)$ passt nicht dazu, egal, welchen Wert die Variable x annimmt.

(e) Setze an die Stelle des Fragezeichens in $P(? \mid 0)$ eine Zahl ein, so dass der Punkt P passt. Begründe.

(f) Zeichne die Punkte $B_1(2 \mid 1)$, $B_2(4 \mid 2)$, $B_3(6 \mid 3)$, $B_4(8 \mid 4)$ und $B_5(10 \mid 5)$ in das Gitternetz.

(g) Notiere einen Zusammenhang zwischen dem x-Wert und dem y-Wert, der für alle Punkte B_n gilt.

(h) Vergleiche die Koordinaten der Punkte B_n mit denjenigen der Punkte A_n. Notiere, was Dir auffällt.

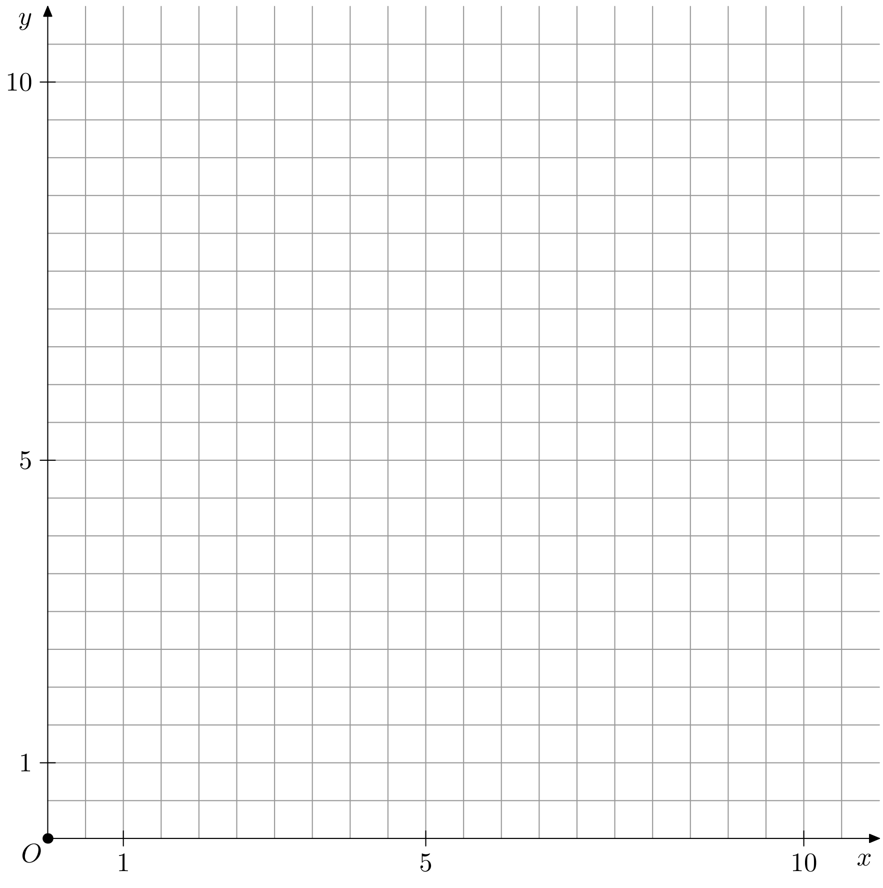
(i) Alle möglichen Punkte A_n und alle möglichen Punkte B_n liegen geordnet im Gitternetz. Setze jeweils den fehlenden Fachbegriff ein:

Alle möglichen Punkte A_n liegen auf einer ______________________________.

Alle möglichen Punkte B_n liegen auf einer ______________________________.
Ergänze deine Zeichnung entsprechend.

(j) Zeichne die Strecke $[A_5B_5]$ ein. Dadurch entsteht ein Dreieck.
Zeichne den Punkt $S(9 \mid 9)$ und die Halbgerade $[OS$ ein. Welche Rolle spielt die Halbgerade in diesem Dreieck?

9.



Gegeben sind die Punkte $A(2 \mid 1)$, $B(10 \mid 1)$, $C(10 \mid 9)$ und $D(2 \mid 9)$.

(a)
- Zeichne das Viereck $ABCD$ in das Gitternetz. Zeichne seine Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ein. Zeichne den Diagonalenschnittpunkt Z ein.
- Um welches besondere Viereck handelt es sich hier? Begründe.

(b) Die Mittelpunkte der Seiten $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ und $[DA]$ sind in dieser Reihenfolge die Punkte M_1, M_2, M_3 und M_4.

- Zeichne diese Seitenmittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 ein.
- Gib die Koordinaten von M_1 an.
  Welche besondere Lage besitzen die Punkte A, M_1 und B im Gitternetz? Welche Gemeinsamkeiten weisen die Koordinaten dieser drei Punkte auf? Notiere, wie du den x-Wert des Mittelpunktes M_1 aus den beiden x-Werten der Punkte A und B berechnen kannst.
- Gib die Koordinaten von M_2 an.
  Welche besondere Lage besitzen die Punkte B, M_2 und C im Gitternetz? Welche Gemeinsamkeiten weisen die Koordinaten dieser drei Punkte auf? Notiere, wie du den y-Wert des Mittelpunktes M_2 aus den beiden y-Werten der Punkte B und C berechnen kannst.

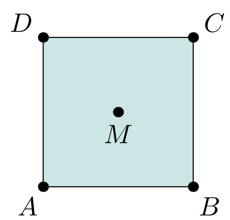
(c)
- Zeichne das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ ein. Um welches besondere Viereck handelt es sich?
  Verbinde die Seitenmittelpunkte des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ zu einem neuen Viereck $EFGH$, wobei der Punkt E links unten liegen soll. Was für ein besonderes Viereck ist das?
  Notiere, wie du die Koordinaten des Mittelpunktes E aus den Koordinaten der Punkte M_1 und M_4 berechnen kannst.
- Durch seine Diagonalen wird das Viereck $EFGH$ in vier gleiche Dreiecke zerlegt. Vergleiche den Flächeninhalt dieses Vierecks mit dem der Vierecke $M_1M_2M_3M_4$ und $ABCD$.

(d)
- In das Viereck $EFGH$ kannst du wieder ein Seitenmittenviereck einzeichnen, und in dieses wieder ein Seitenmittenviereck usw.
  Zeichne auf diese Weise fünf weitere Seitenmittenvierecke ein. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Flächeninhalten zweier unmittelbar aufeinander folgender Seitenmittenvierecke?
- Wie viele Seitenmittenvierecke könntest du theoretisch noch einzeichnen? Wo endet das Ganze?

(e)
- Nimm eine neue karierte Heftseite quer. Zeichne das Quadrat $ABCD$ mit den mittlerweile sieben Seitenmittenvierecken in seinem Inneren ohne Koordinatenachsen doppelt nebeneinander.
  Zeichne die Strecken $[M_1M_3]$ und $[M_2M_4]$ gestrichelt in beide Quadrate ein. Schneide das linke Quadrat $ABCD$ aus.
- Außerhalb des Seitenmittenvierecks $M_1M_2M_3M_4$ bleiben im Inneren des Quadrates $ABCD$ vier gleiche Dreiecke übrig. Male diese vier Dreiecke in der beiden Figuren grün aus.
  Schneide vom ausgeschnittenen Quadrat diese vier Dreiecke ab.
  Zeige am rechten Quadrat $ABCD$: Diese vier Dreiecke lassen sich zum Seitenmittenviereck $M_1M_2M_3M_4$ zusammenfügen.

- Außerhalb des Seitenmittenvierecks $EFGH$ bleiben im Inneren des Seitenmittenvierecks $M_1M_2M_3M_4$ vier gleiche Dreiecke übrig. Male diese vier Dreiecke in beiden Figuren orange aus.
  Schneide von der ausgeschnittenen Restfigur diese vier Dreiecke ab.
  Zeige am rechten Quadrat $ABCD$: Diese vier Dreiecke lassen sich zum Seitenmittenviereck $EFGH$ zusammenfügen.
- Außerhalb des nächsten Seitenmittenvierecks bleiben im Inneren des Seitenmittenvierecks $EFGH$ vier gleiche Dreiecke übrig. Male diese vier Dreiecke in beiden Figuren blau aus.
  Schneide von der ausgeschnittenen Restfigur diese vier Dreiecke ab.
  Zeige am rechten Quadrat $ABCD$: Diese vier Dreiecke lassen sich zu diesem nächsten Seitenmittenviereck zusammenfügen.
- Du kannst dir schon denken, wie es weitergeht: Färbe in der Reihenfolge grün- orange-blau immer wieder die folgenden vier gleichen Dreiecke ein, schneide sie aus und vergleiche ihren Flächeninhalt mit dem entsprechenden Seitenmittenviereck in der rechten Zeichnung.
  Nenne zwei Gründe, weshalb du mit deiner Schere diese Vorgehensweise nicht beliebig weit fortsetzen kannst.
  Bliebe etwas von der Restfigur übrig, wenn du dieses Verfahren „bis zum Ende hin“ fortsetzen könntest?
  Würde im Quadrat $ABCD$ rechts eine weiße Fläche übrig bleiben, wenn du dieses Verfahren „bis zum Ende hin“ fortsetzen könntest?
- Begründe: Die Summe der Flächeninhalte aller möglichen Seitenmittenvierecke ergibt $64\,\text{cm}^2$.

10.



(a) Zeichne in die Mitte einer leeren karierten Heftseite ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 3 cm, so dass die Seite $[AB]$ waagrecht liegt. Zeichne die beiden Geraden ein, die jeweils durch zwei gegenüber liegende Eckpunkte des Quadrates und dem Quadratmittelpunkt M verlaufen. Nutze dabei den Platz auf deiner Heftseite voll aus.

(b) Zeichne durch die Eckpunkte des Quadrates jeweils eine Parallele zu einer Diagonalen.

(c) Die vier Parallelen schneiden sich in vier Punkten. Dadurch entsteht ein neues Viereck V_1. Um was für ein Viereck handelt es sich? Begründe.

(d)
- Zeichne durch die Eckpunkte dieses Vierecks V_1 erneut Parallelen zu dessen Diagonalen, so dass an deren Schnittpunkten ein neues Viereck V_2 entsteht. Wenn du richtig gezeichnet hast, müssen jetzt zwei Seiten dieses Vierecks V_2 wieder waagrecht liegen.
  Um was für ein Viereck handelt es sich?
- Wie oft ist das ursprüngliche Quadrat $ABCD$ im Viereck V_2 enthalten? Begründe.

(e)
- Zeichne auf die gleiche Weise wie vorhin mit Hilfe der Parallelen zu den Diagonalen des Vierecks V_2 das Viereck V_3. Um welche Art von Viereck handelt es sich wieder?
- Wie oft ist das ursprüngliche Quadrat $ABCD$ im Viereck V_3 enthalten? Begründe.

(f)
- Zeichne mit der gleichen Vorgehensweise das Viereck V_4 ein, wobei dann zwei Seiten wieder waagrecht liegen müssen.
- Vergleiche die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge des Vierecks V_4.
  Wie oft ist das ursprüngliche Quadrat im Viereck V_4 enthalten? Begründe.

(g) Die nächsten auf diese Weise erzeugten Vierecke würden über deine Heftseite hinausragen.
- Notiere einen Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten zweier unmittelbar aufeinander folgender Quadate.
- Der Flächeninhalt A_0 des Vierecks $ABCD$ beträgt $3\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}^2$.
  Fülle die restlichen Zellen der folgenden Tabelle aus:

Viereck Nr.	Zusammenhang mit $A_0 = 9\,\text{cm}^2$
1	$A_{V_1} = 2 \cdot 9\,\text{cm}^2 = 2^1 \cdot A_0$
2	$A_{V_2} = 2 \cdot A_{V_1} = 2 \cdot 2 \cdot 9\,\text{cm}^2 = 2^{\,2} \cdot A_0$
3	$A_{V_3} = 2 \cdot A_{V_2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9\,\text{cm}^2 = 2^{\,3} \cdot A_0$
7	$A_{V_7} =$
?	$A_{V_?} = 2304\,\text{cm}^2$

- Kann eines der Vierecke einen Flächeninhalt von $624\,\text{cm}^2$ besitzen? Begründe deine Antwort auf verschiedene Weise.

(h) Male deine Zeichnung mit verschiedenen Farben aus.

11. Gegeben sind die beiden Gleichungen

$$\text{(I):}\quad 2 \cdot \triangle + \square = 6 \qquad \text{und} \qquad \text{(II):}\quad 2 \cdot \square - \triangle = 2.$$

(a) Zeige, dass $\triangle = 5$ und $\square = 3$ in beiden Gleichungen falsche Ergebnisse liefern.

(b) Setze für die Platzhalter $\triangle$ und $\square$ passende Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ ein. (Tipp: Es ist auch erlaubt, $\triangle$ und $\square$ mit gleichen Zahlen zu belegen.)
Übertrage diese Zahlen in zwei Tabellen, etwa so:

(I):

$\triangle$	...	...	...
$\square$	...	...	...

und (II):

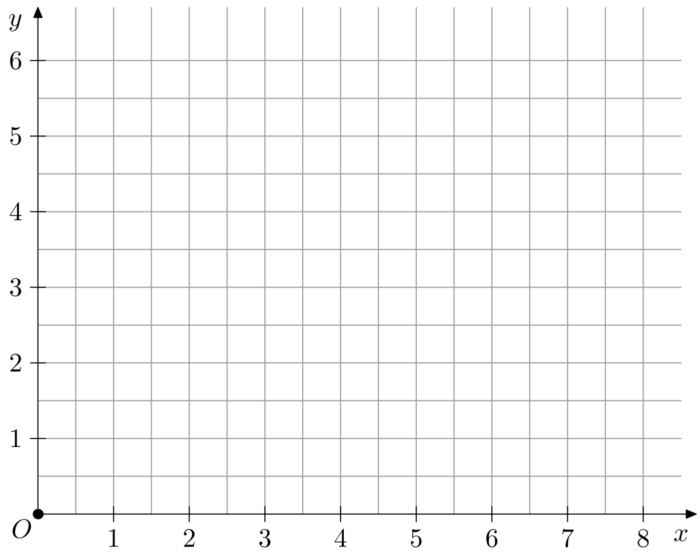
$\triangle$	...	...	...
$\square$	...	...	...

(c) Setze den angefangenen Satz fort:
„Wenn in der Tabelle (I) der $\triangle$-Wert um 1 zunimmt, dann nimmt der zugehörige $\square$-Wert ...“
Notiere einen entsprechenden Zusammenhang, der für die Tabelle (II) gilt.

(d)
- Gib das Platzhalterpaar an, das sowohl in Tabelle (I) als auch in Tabelle (II) auftaucht.
- Worin unterscheidet sich die Tabelle (I) von der Tabelle (II), wenn du alle Möglichkeiten betrachtest, die sich für $\triangle$ und $\square$ ergeben?

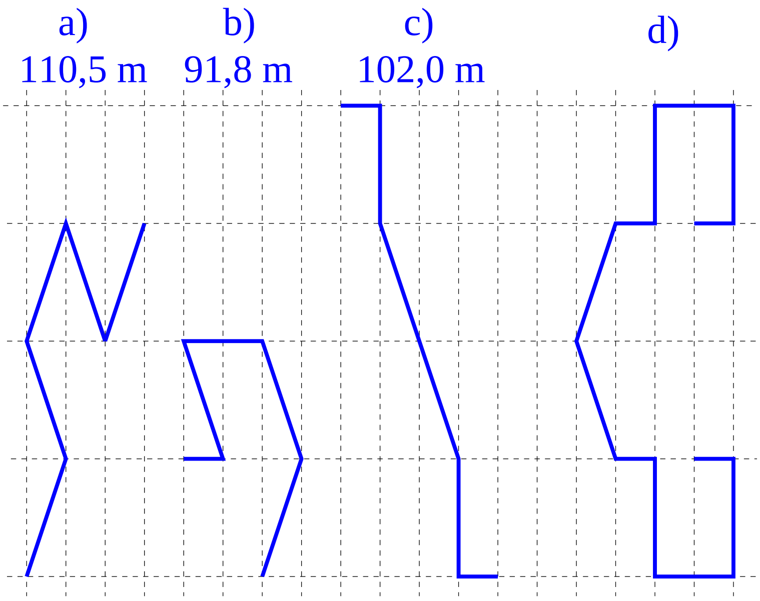
(e) Wenn du richtig gerechnet hast, dann sind z. B. in der Tabelle (I) $\triangle = 1$ und $\square = 4$ vorhanden. Diese Werte lassen sich als ein **Zahlenpaar** $(1 \mid 4)$ im Gitternetz darstellen.

- Trage dieses Zahlenpaar in das Gitternetz ein, wobei „$\triangle$“ den x-Wert (Rechtswert) und „$\square$“ den y-Wert (Hochwert) darstellen soll:



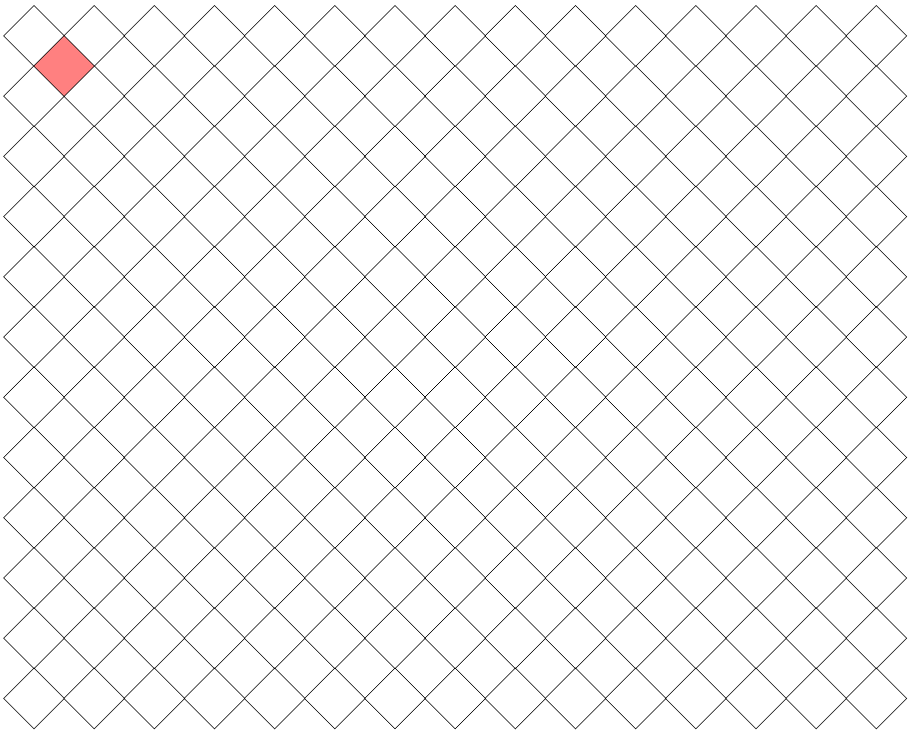
- Übertrage deine restlichen Werte aus beiden Tabellen auf die gleiche Weise in das Gitternetz. Benutze dabei für (I) und (II) verschiedene Farben.
- Betrachte die Lage der Punkte zueinander. Welche Zusammenhänge stellst du fest?

12.



Die Längen der drei Wege a), b) und c) sind angegeben. Wie lang ist der Weg d)?

13.



Das eingefärbte Quadrat im Gitternetz heißt „Einheitsquadrat“.
Male in das Gitternetz möglichst viele verschiedene achsensymmetrische Figuren, die

sich aus Einheitsquadraten zusammensetzen. Vergleiche jeweils deine Figur mit der deines Banknachbarn.

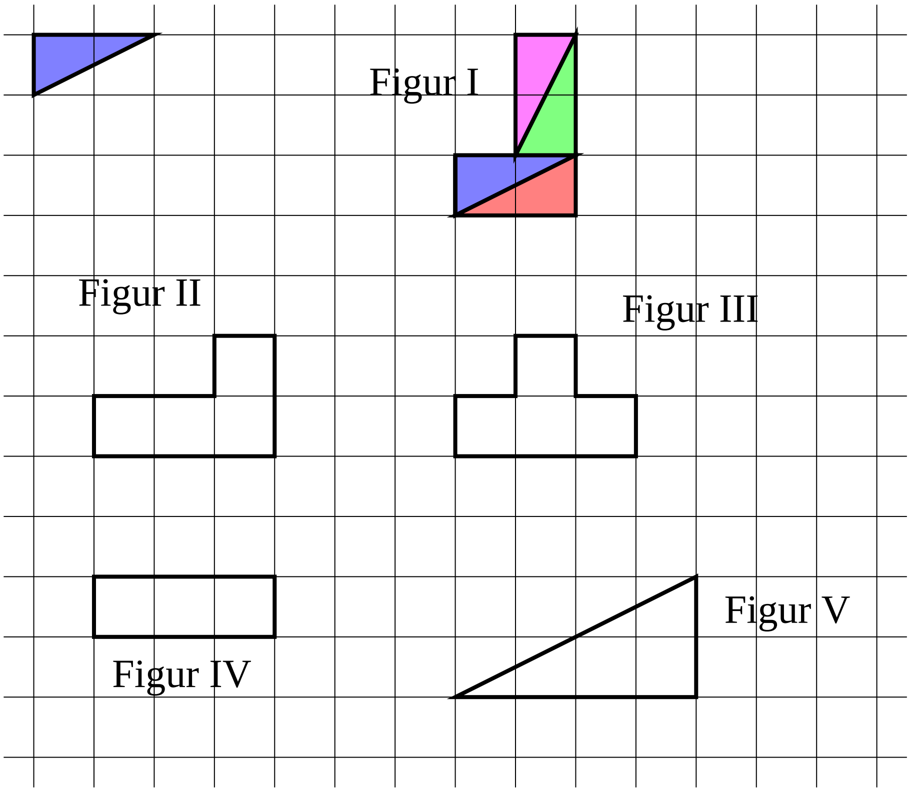
(a) Die Figur soll nur aus zwei Einheitsquadraten bestehen.

(b) Die Figur soll aus drei Einheitsquadraten bestehen.

(c) Die Figur soll aus vier Einheitsquadraten bestehen.

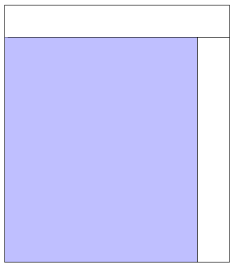
(d) Die Figur soll aus fünf Einheitsquadraten bestehen.

14.



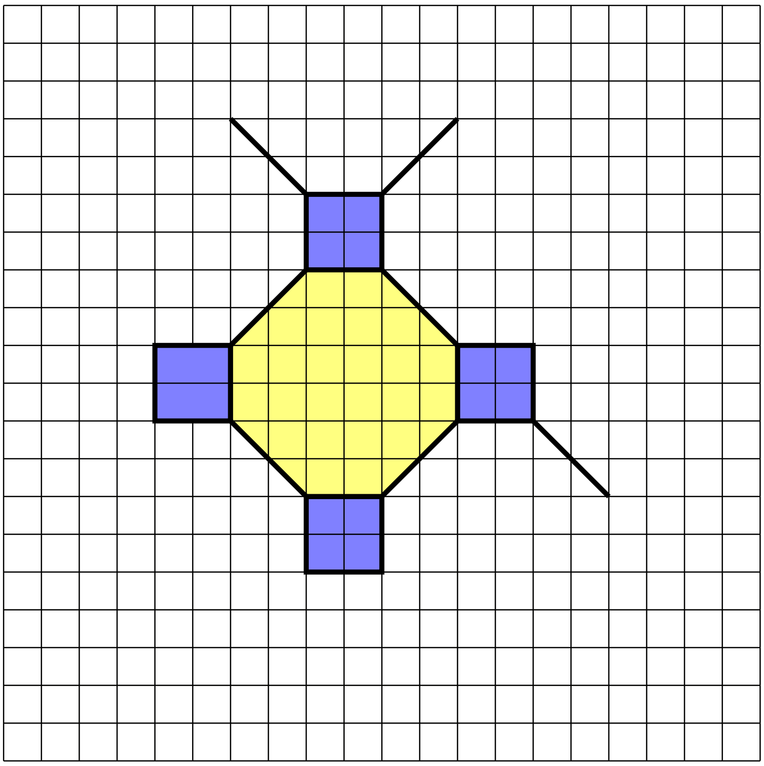
Der Flächeninhalt der Figur I ist offenbar viermal so groß wie der des eingefärbten Dreiecks.
Wie oft passt der Flächeninhalt des eingefärbten Dreiecks in jede der Figuren II, III, IV und V? Arbeite wie im Beispiel mit Farben.

15.



Zwei gleiche Papierstreifen, die jeweils 11 cm lang und 3 cm breit sind, werden so, wie es die Figur darstellt, aneinander gelegt.
Welchen Flächeninhalt hat das eingefärbte Rechteck?

16.

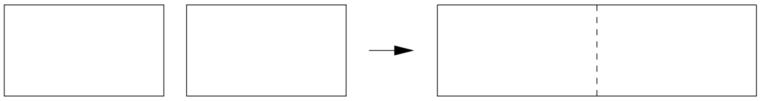


Familie Seifel möchte den Fußboden im Bad mit großen achteckigen und mit kleinen quadratischen Fliesen neu belegen lassen. Herr Seifel hat dazu schon einen Plan angefangen.

(a) Setze diesen Plan bis zum Rand lückenlos fort.

(b) Wie viel mal größer als eines der kleinen Quadrate ist das große Achteck?

17.



Jedes der beiden Rechtecke soll $3,5\,\text{cm}$ lang und $2\,\text{cm}$ breit sein. Sie werden zu einem einzigen Rechteck lückenlos so zusammengefügt, wie es die Darstellung zeigt.

(a) Berechne den Umfang von einem der beiden kleinen Rechtecke.

(b) Egon soll den Umfang des großen Rechtecks berechnen. Er meint: „Das ist doch ganz leicht. Das große Rechteck besteht aus zwei kleinen, die gleich sind. Also ist der Umfang des großen Rechtecks doppelt so groß wie der von einem kleinen.“ Sophia widerspricht ihm: „Erst, wenn du von deinem Ergebnis noch $4\,\text{cm}$ abziehst, kommt das richtige Ergebnis heraus.“ Was hat Sophia damit gemeint? Mache es an einer Skizze deutlich. Berechne den gesuchten Umfang.

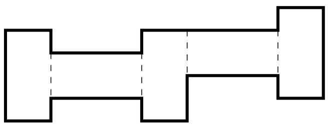
(c) Jetzt werden drei dieser kleinen Rechtecke zu einem einzigen großen auf die gleiche Weise zusammengefügt. Wie oft musst du jetzt noch die $4\,\text{cm}$ abziehen, bis es stimmt? Berechne jetzt den Umfang des so entstandenen großen Rechtecks mit der Methode von Egon.

(d) Berechne nach der „Egon-Methode“ den Umfang des Rechtecks, das aus 100 kleinen Rechtecken zusammengefügt worden ist.

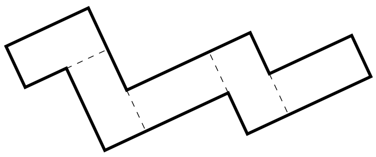
18.

Figur a)

Figur b)

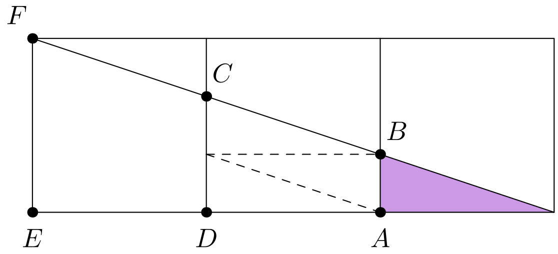


Figur c)



Max und Elfi haben die drei Figuren aus 15 gleichen Bausteinen gelegt.
Jede der drei Figuren setzt sich aus fünf dieser Bausteine zusammen. Vergleiche die Umfänge der drei Figuren.

19.



Ruth soll im Kunstunterricht ein Muster für eine Ausstellung entwerfen. Sie hat schon drei Quadrate, mehrere gestrichelte Hilfslinien und ein getöntes Dreieck eingezeichnet. Das dunkel getönte Dreieck soll später in der Ausstellung $15\,\text{dm}^2$ groß werden.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AD} = 2\,\text{cm}$.

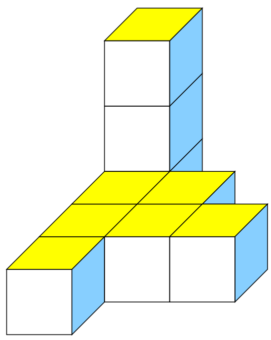
(b) Welchen Flächeninhalt bekommt dann das Viereck $ABCD$ in der Ausstellung? Begründe deine Antwort.

(c) Wie groß wird dann die Fläche des Vierecks $EDCF$ in der Ausstellung? Begründe deine Antwort. Zeichne dazu weitere Hilfslinien ein.

(d) Welche Fläche bedecken dann die drei Quadrate zusammen in der Ausstellung? Begründe deine Antwort.

(e) Entwirf selbst ein buntes Dreiecksmuster in Quadraten.

20.



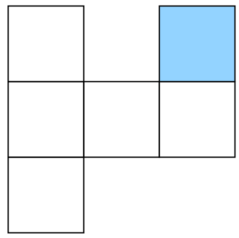
Klaus hat eine Plastiktüte voll von 87 gleichen kleinen Würfeln. Davon hat Marion welche genommen und die Figur aufgebaut. Diese Figur will sie zu einem großen Würfel vervollständigen.

(a) Wie viele Würfel aus der Plastiktüte braucht sie noch mindestens, damit aus der angefangenen Figur ein Würfel wird?

(b) Berechne, wie viele kleine Würfel dann noch in der Plastiktüte sind.

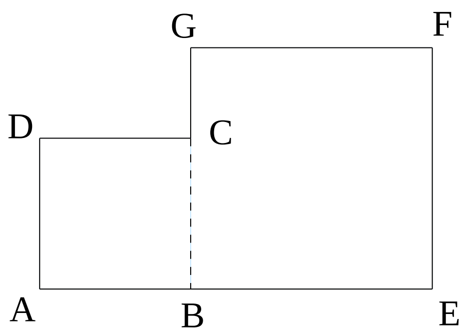
(c) Würden die 87 Würfel für einen großen Würfel reichen, der in jeder Schicht 25 Würfel enthält? Begründe deine Antwort.

21.



Lisa hat das dunkel getönte Quadrat noch hinzugefügt, damit ein Würfelnetz entsteht. Marcel meint dazu: „Da stimmt doch etwas nicht, denn . . . “
Wie würdest du Marcels angefangene Behauptung fortsetzen?

22.

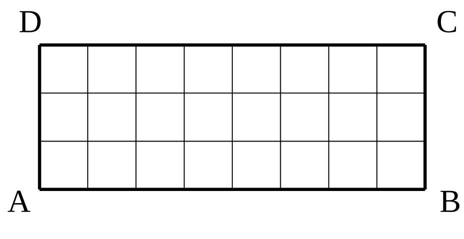


Das Grundstück $AEFGCD$ setzt sich aus den beiden Quadraten $ABCD$ und $BEFG$ zusammen. In der Planfigur gilt: $\overline{GC} = 30\,\text{m}$ und $\overline{GF} = 80\,\text{m}$.

(a) An der Grundstücksseite $[AE]$ wird der Zaun erneuert. Berechne die Länge dieses Zaunes.

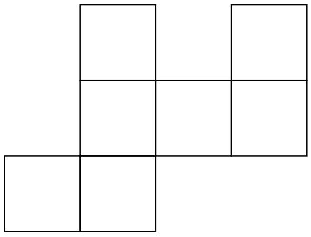
(b) Berechne die Grundstücksfläche.

23.



Die rechteckige Fläche $ABCD$ in einem Bad wird gefliest. Jede Fliese hat eine Umfang von $20\,\text{cm}$. Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ in der Einheit dm^2.

24.

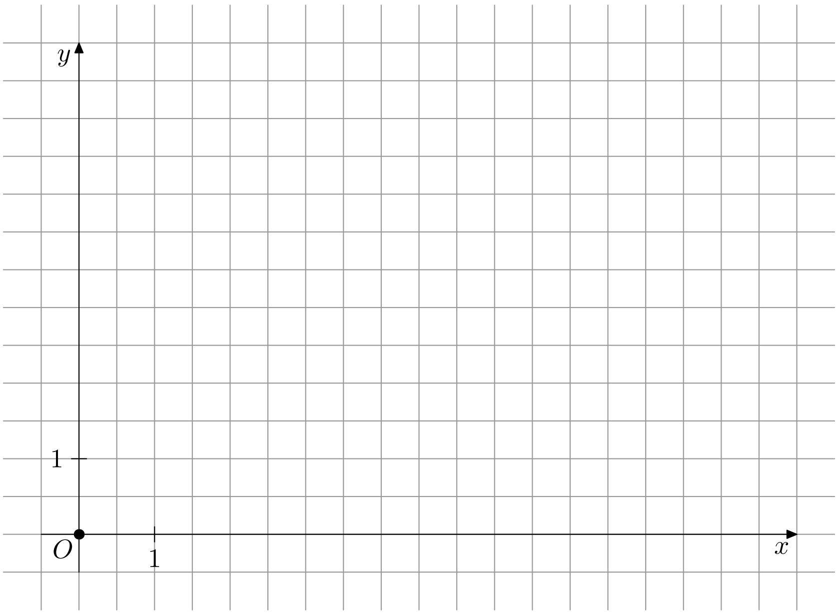


Erika soll die Figur ausschneiden, so dass ein Würfelnetz entsteht. Sie meint: „Die Figur ergibt kein Netz.“

(a) Woran hat sie das gemerkt?

(b) Zeichne die Figur und schneide sie so aus, dass ein Würfelnetz entsteht.

25.



Gegeben sind die Punkte $A(0 \mid 3)$, $B(2 \mid 0)$, $C(4 \mid 3)$ und $D(2 \mid 6)$.

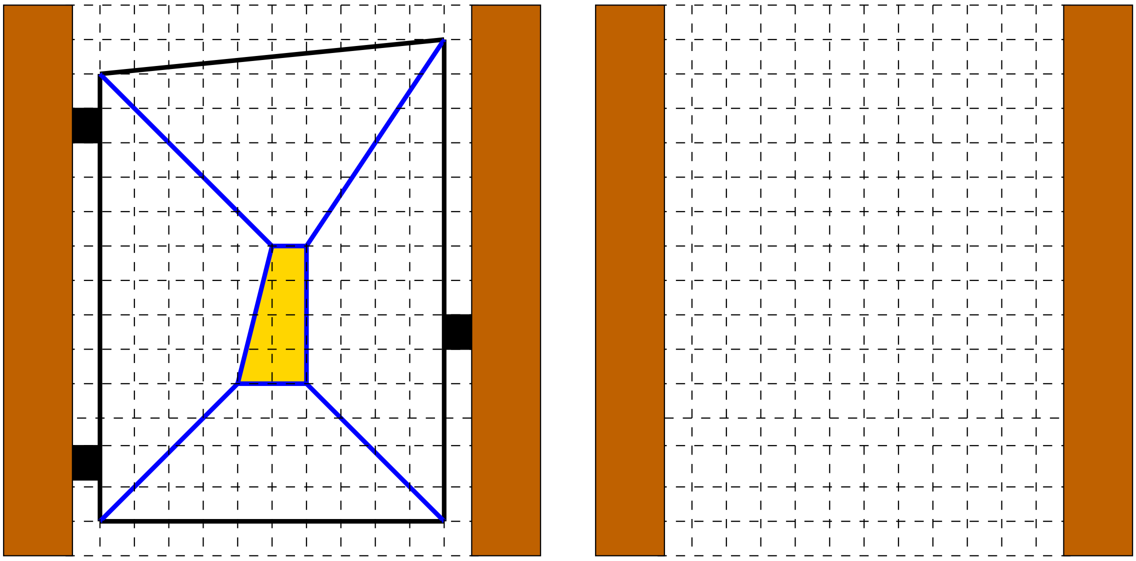
(a)
- Zeichne das Viereck $ABCD$ in das Gitternetz.
- Um welches besondere Viereck handelt es sich? Begründe.

(b) Du erhältst ein neues Viereck $CEFG$, indem du die x-Werte aller Punkte A, B, C und D um jeweils 4 vergrößerst: A wandert dabei nach C, B nach E, C nach F und D nach G.
Zeichne das neue Viereck $CEFG$ in einer anderen Randfarbe ein. Male es nicht aus.

(c) Zeichne das Viereck $BEGD$ in einer neuen Randfarbe ein. Es muss ein Rechteck sein.

(d) Wie oft passt das Viereck $ABCD$ in das Viereck $BEGD$? Begründe deine Antwort sowohl mit Worten als auch durch Ausmalen entsprechender Teilflächen.

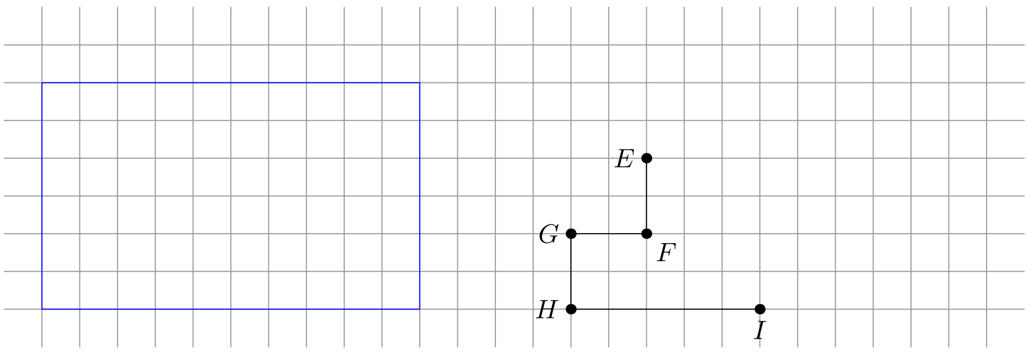
26.



Das Tor zum Schloss Geostein ist in der linken Abbildung von vorne (Straßenseite) zu sehen. Zeichne in das rechte Gitternetz dieses Tor, wie man es von hinten (Schlossseite) sieht.

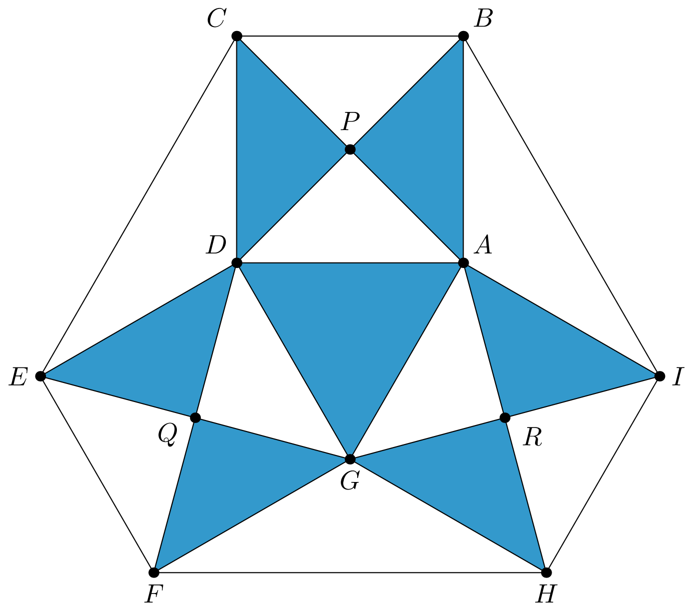
Quelle: Probeunterricht 2007 für bayerische Realschulen, 5. Jahrgangsstufe

27.



Setze den Streckenzug $E - F - G - H - I$ auf dem Gitter so fort, dass eine Fläche entsteht, deren Umfang genau so groß wie der des linken Rechtecks ist.

28.

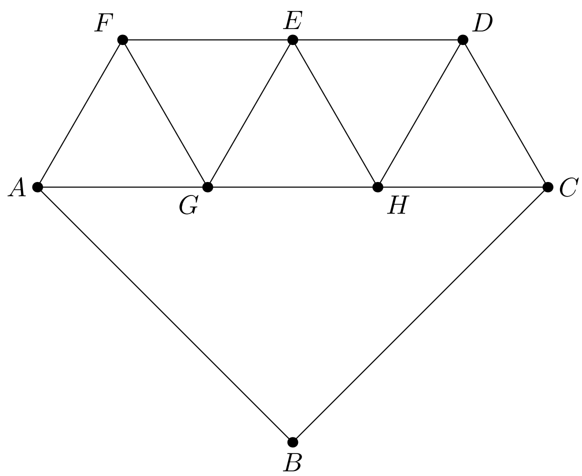


Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt.

(a) Welche Dreieckstypen entdeckst du in dem Wahrzeichen? Verwende zu deren Kennzeichnung jeweils drei Buchstaben.

(b) Welche Vierecksseckstypen entdeckst du in dem Emblem? Verwende zu deren Kennzeichnung jeweils vier Buchstaben.

29.



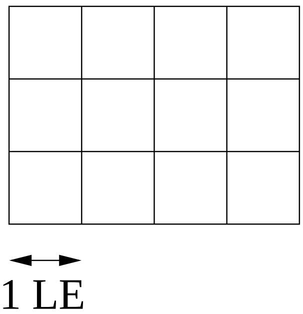
Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Trapez $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

(a) Wie viele Trapeze erkennst du außer dem Trapez $ACDF$ in der Figur? Verwende zum Aufzählen die Buchstaben.

(b) Zeichne farbig zwei Strecken so in die Figur, dass ein achsensymmetrisches Drachenviereck mit dem Eckpunkt E sichtbar wird.

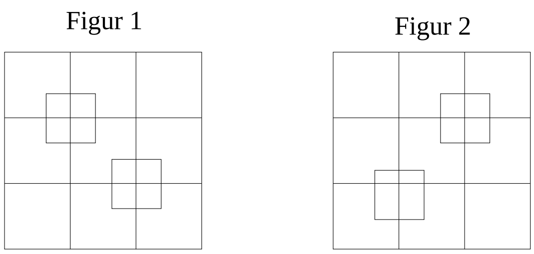
(c) Woran erinnert dich die Figur jetzt?

30.



Wie viele Quadrate entdeckst du in der Figur?

31.



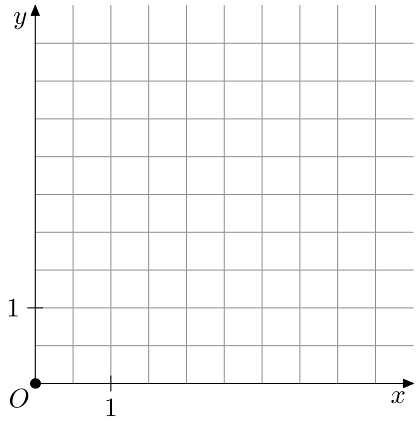
Beate betrachtet die beiden Figuren 1 und 2. Sie ist sich nicht sicher, ob die Anzahl der Quadate in beiden Darstellungen die gleiche ist. Wie würdest du diese Frage beantworten?

32. Zwei natürliche Zahlen x und y sollen zusammen 5 ergeben. In der Tabelle unten steht schon eine Möglichkeit: $x = 2$ und $y = 3$, so dass $x + y = 2 + 3 = 5$ gilt.

(a) Vervollständige die Tabelle entsprechend:

x		2			
y		3			
$(x \mid y)$		$(2 \mid 3)$			

(b) Die Zahlenpare in der dritten Zeile lassen sich als Punkte im Gitternetz deuten.



Trage alle Zahlenpaare der dritten Zeile in das Gitternetz ein.

(c)
- Die Punkte im Gitternetz liegen nicht wild in der Gegend herum. Beschreibe die Lage dieser Punkte:

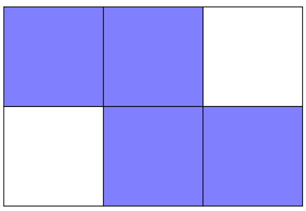
  ____

  ____

- Mache deine Antwort auch im Gitternetz deutlich.

33. In einer Plastiktüte befinden sich 100 gleiche Würfel, deren Kantenlänge jeweils 2 cm beträgt. Alfred will aus diesen Würfeln einen möglichst großen Würfel lückenlos zusammenfügen.
    (a) Wie viele kleine Würfel hat der dann übrig?
    (b) Wie hoch wäre der Turm aus kleinen Würfeln, die den großen Würfel ergeben?

34. Idee: Toni Chehlarova

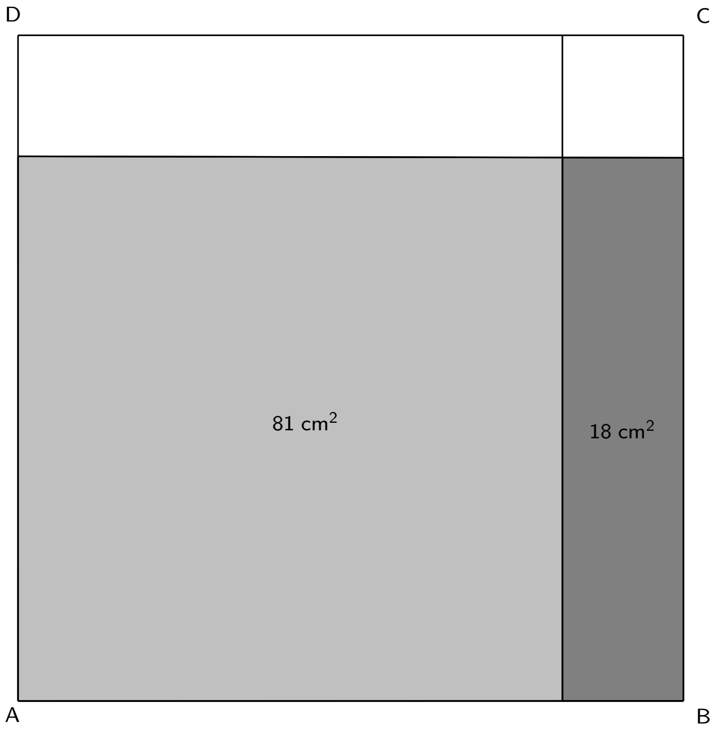


Zähle die Rechtecke, deren eingefärbter Teil mehr als die Hälfte ihrer Fläche ausmacht.

35. Idee: Fünfzehnte Fürther Mathematikolympiade, Klassenstufe 7 1. Runde Aufgabe 1
Fertige dir, z.B. aus Trinkhalmen, neun Stäbchen mit den Längen 1 cm, 2 cm bis 9 cm . Versuche dann, mit ihnen Quadrate zu legen, ohne ein Stäbchen zu zerstören.
    (a) Begründe: Alle neun Stäbchen zusammen liefern kein Quadrat.
    (b) Willy legt ein Quadrat, das an jeder Seite zwei Stäbchen enthält. Maria hat ihm zugeschaut. Sie meint: „Ich habe noch eine weitere Möglichkeit entdeckt.“
    Gib alle Möglichkeiten an.

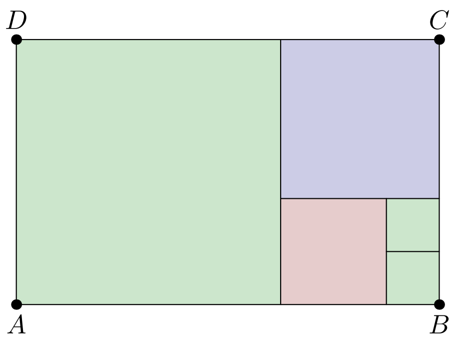
5 Flächenmessung

1.



Das einbeschriebene Quadrat hat einen Flächeninhalt von $81\,\text{cm}^2$ und das Rechteck einen Flächeninhalt von $18\,\text{cm}^2$. Berechne die Seitenlänge des Quadrats ABCD.

2.



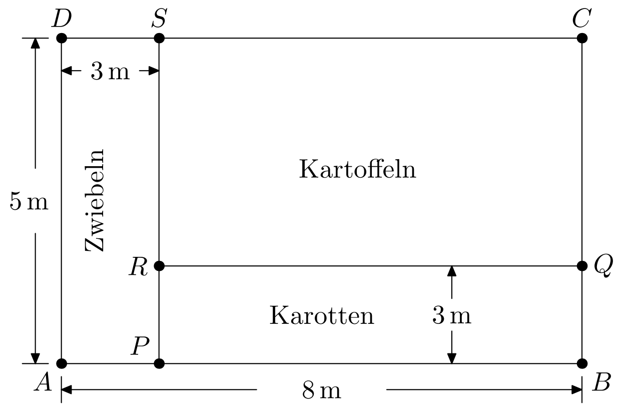
Das rechteckige Banner $ABCD$ ist aus lauter Quadraten zusammengefügt.

(a) Zeichne die Figur mit ihrem quadratischen Muster im Inneren für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$.

(b)
- Wie viele Quadrate sind es?
- Wie viele Rechtecke sind es?

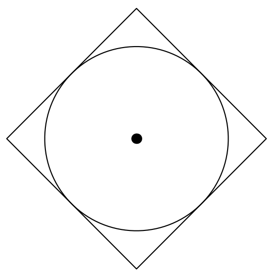
(c) Das Banner wird aus Stoff zusammengenäht und mit einer goldenen Borte umsäumt.
Berechne die Mindestlänge des Saumes, wenn jedes der beiden kleinsten Quadrate einen Umfang von 24 cm hat.

3.



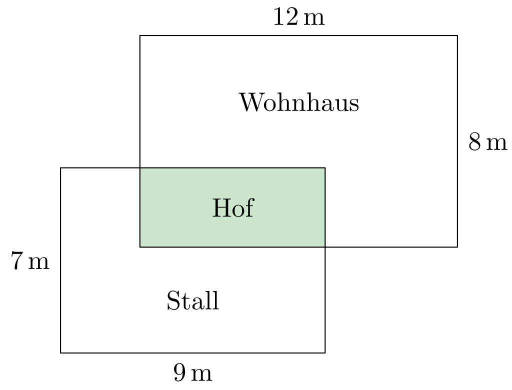
Das rechteckige Feld $ABCD$ ist 8 m lang und 5 m breit.
Auf den drei rechteckigen Parzellen werden Karotten, Zwiebeln und Kartoffeln angebaut. Die beiden Streifen für Karotten und Zwiebeln sind jeweils 3 m breit.
Berechne den Flächeninhalt des Kartoffelfeldes. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

4.



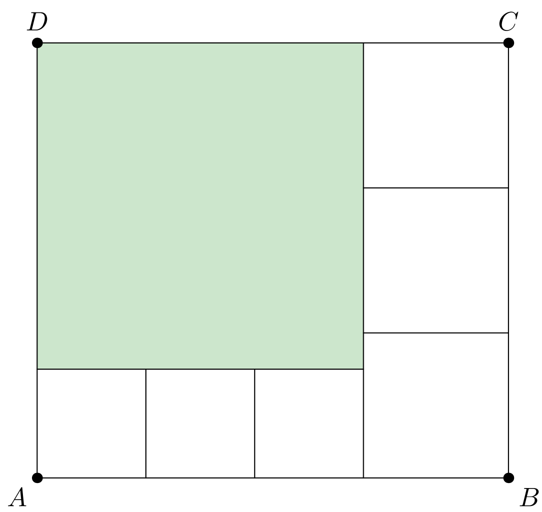
Eine kreisförmige Fensterscheibe ist von einem quadratischen hölzernen Rahmen eingefasst, dessen Gesamtlänge 5 m beträgt.
Welchen Durchmesser hat die Fensterscheibe?

5.



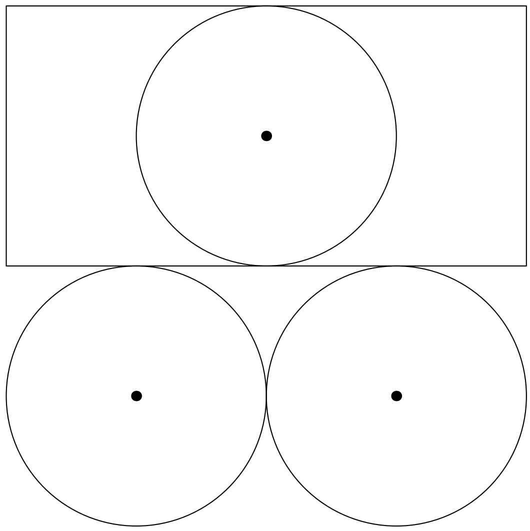
Die Figur zeigt den Grundriss eines landwirtschaftlichen Anwesens. Die Grundfläche des Stalles beträgt $50\,\mathrm{m}^2$. Berechne die Grundfläche des Wohnhauses.

6.



Der eingefärbte Treppenabsatz ist ein Quadrat dessen Umfang 7m 2 dm beträgt.
Der Treppenabsatz ist von sechs quadratischen Betonplatten eingesäumt. Je drei davon haben die gleiche Größe.
Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$.

7.



Welchen Flächeninhalt hat das Rechteck, wenn jeder Kreis einen Durchmesser von 10 cm hat? Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

6 Teilbarkeit

1. Maria stellt zwei Behauptungen auf:
   (a) Die Zahl 123456789 ist durch 9 teilbar.
   (b) Wenn man die Ziffern einer 53-stelligen Zahl, die durch 9 teilbar ist, auf irgend eine Weise vertauscht, kann es passieren, dass die so entstandene neue Zahl nicht mehr durch 9 teilbar ist.

   Sind die beiden Behauptungen wahr? Begründe jeweils deine Antwort.

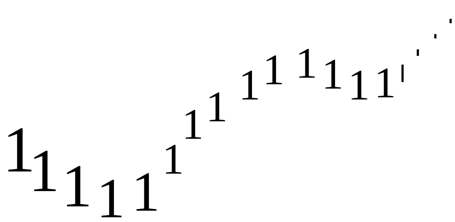
2. Finde eine möglichst große dreistellige Zahl, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und die nicht durch 3 teilbar ist.

3. Von den folgenden Zahlen fehlt eine Ziffer im Kästchen. Ergänze jeweils die Ziffer im Kästchen so, dass die Zahl dann durch 6 teilbar ist. Gib alle Möglichkeiten an.
   a) $244\boxed{?}$ b) $6\boxed{?}332$

4. Schreibe die größte 5-stellige Zahl hin, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und die gleichzeitig durch 3 teilbar ist.

5. Schreibe die kleinste 9-stellige Zahl hin, die aus möglichst vielen gleichen Ziffern besteht und die gleichzeitig durch 5 aber nicht durch 10 teilbar ist.

6.



   Erika und Paul sollen einen Zahlengiganten, der ausschließlich aus 2007 Einsen besteht, durch 9 teilen.

(a) Paul behauptet: „Bei dieser Division bleibt der Rest 1.“ Begründe dass Paul nicht Recht hat.

(b) Paul und Erika gehen bei der Division dieses Zahlengiganten systematisch vor:
Sie rechnen zunächst 111 111 111 : 9.
Dann rechnen sie 111 111 111 111 111 111 : 9 usw.
Berechne jeweils den Wert des Quotienten.

(c) Begründe: Der Wert des Quotienten aus der obigen Riesenzahl und 9 enthält nicht die Ziffer 8.

(d) Wie oft ist die „Sieben“ im Wert des Quotienten enthalten? Begründe deine Antwort.

(e) Wie oft ist die „Null“ im Wert des Quotienten enthalten? Begründe deine Antwort.

7. (a)

$$3 \quad 5 \quad 7$$

Füge jeweils an die mit einem Pfeil gekennzeichnete Position eine Ziffer so ein, dass sich eine fünfstellige Zal ergibt, die durch 9 teilbar ist.

(b)

$$1 \quad 1 \quad 1$$

Löse die Aufgabe für die Zahl 111.

8. (a) Schreibe eine dreistellige Zahl hin, die durch 10 teilbar ist.

(b) Streiche die letzte Ziffer dieser Zahl. Dadurch erhältst du eine neue, zweistellige Zahl.

(c)
- Subtrahiere die neue Zahl von der ursprünglichen (dreistelligen) Zahl.
- Untersuche ohne Division, ob das Ergebnis durch 9 teilbar ist.
- Durch welche Zahl, die größer als 10 ist, ist dein Ergebnis noch teilbar?

(d)
- Wiederhole alle obigen Rechenschritte mit einer weiteren dreistelligen Zahl. Gelten deine vorherigen Feststellungen jetzt auch noch?
- Notiere eine Begründung dafür, was du entdeckt hast.

9. Untersuche, ob 2^{1400} durch 14 teilbar ist.

10. Paul rechnet eine Aufgabe:

$$(3 \cdot 17 + 9) : (23 - 46 : 2) = 60 : 0$$

(a) Überprüfe, ob seine Rechnung bis dahin stimmt.

(b) Paul rechnet weiter: $60 : 0 = 60$.
Erika hat zugeschaut. Sie meint: „Das kann nicht sein, denn $60 : 1 = 60$.“ Paul entgenet: „Na und?“
Was hättest du Paul auf dessen Frage geantwortet?

(c) Erika probiert es anders. Sie rechnet $60 : 0 = 0$ und überprüft das Ergebnis mit der Umkehraufgabe.

- Schreibe die Umkehraufgabe hin. Stimmt Erikas Ergebnis?
- Notiere deine Überlegungen zur Aufgabe $60 : 0$.
- Wenn irgendeine natürliche Zahl durch null geteilt werden soll, dann … .
Notiere eine logische Fortsetzung.

11.
- Notiere eine fünfstellige Zahl.
- Streiche die mittlere Ziffer. Dadurch entsteht eine neue, vierstellige Zahl.
- Subtrahiere die vierstellige von der fünfstelligen Zahl.

(a) Notiere einen möglichst großen Teiler des Differenzwertes.

(b)
- Wiederhole die Einzelschritte mit einer anderen fünfstelligen Zahl. Notiere wieder einen möglichst großen Teiler.
- Vergleiche dein Ergebnis mit dem deiner Banknachbarn.
- Ist das immer so? Begründe.

(c) Tim behauptet: „Da kannst du mit jeder beliebigen natürlichen Zahl experimentieren. Dieser Teiler stellt sich dann stets ein.“
Erna widerspricht: „Das stimmt nicht immer. Die Stellenzahl muss … . Wenn das aber der Fall ist, dann stoßen wir stets auf diesen großen Teiler.“

- Welcher Inhalt steckt in den drei Punkten? Notiere den vollständigen Satz.
- Begründe, dass Erna mit den Teiler Recht hat.

12. Erfinde 10 Divisionsaufgaben, wobei jeweils nur die drei Ziffern 0, 5 und 7 mindestens einmal vorkommen. Bei der anschließenden Division darf kein Rest bleiben.

13. Karl rechnet: $374\,389 \cdot 9 = 3\,349\,501$.
    (a) Angela betrachtet das Ergebnis. Sie meint: „Du hast dich verrechnet.“
    Begründe ohne den richtigen Produktwert zu berechnen, dass Angela Recht hat.
    (b) Angela berechnet das korrekte Ergebnis. Sie entdeckt, dass sich Karl nur an der Zehntausenderstelle vertan hat.
    Ermittle die richtige Zehntausenderstelle ohne den ganzen Produktwert zu berechnen.

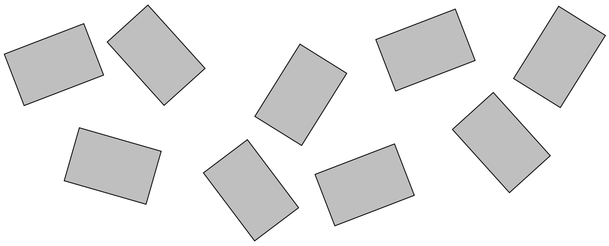
14. Unter der Quersumme QS einer natürlichen Zahl versteht man den Wert der Summe aus ihren Ziffern.
    Beispiel: $QS(409) = 4 + 0 + 9 = 13$.
    (a) Notiere alle natürlichen Zahlen zwischen 9 und 45, die durch ihre Quersumme teilbar sind.
    (b) Emil betrachtet das Ergebnis und meint: „Hier stehen nur Zahlen, die durch 3 oder durch 10 teilbar sind. Das gilt auch bestimmt für alle Zahlen von 10 bis 100.“
    Begründe, dass Emil Recht hat.
    (c)
    - Welche dreistelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 4 sind durch 4 teilbar?
    - Welche dreistelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 7 sind durch 7 teilbar?
    - Welche vierstelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 25 sind durch 25 teilbar?

15. (a) Überprüfe, ob die Zahl $1\,213\,145$ durch 9 teilbar ist.
    (b) Streiche bestimmte Ziffern durch, so dass die übrig gebliebene Zahl (die Reihenfolge der restlichen Ziffern soll unverändert bleiben) durch 9 teilbar ist. Gib sieben Möglichkeiten an.

16. Auf wie viele Nullen endet der Produktwert von $32 \cdot 10\,034\,300 \cdot 25$?

7 Neue Aufgaben, Daten und Zufall

1.



Beate und Ursula spielen mit 9 verdeckten Karten: Zwei davon sind auf der Unterseite rot, drei davon grün und vier davon blau.
Zieht ein Mädchen eine rote Karte (r), bekommt sie 18 Punkte. Bei einer grünen Karte (g) bekommt sie zwölf und bei einer blauen Karte (b) 9 Punkte.

(a) Wie viele Karten müsste Beate höchstens umdrehen, damit eine grüne Karte aufgedeckt wird?

(b) Wie viele Karten müsste Beate von den 9 verdeckten Karten höchstens umdrehen, damit eine rote oder grüne Karte dabei ist?

(c) Wie viele Karten müsste Beate von den 9 verdeckten Karten höchstens umdrehen, damit eine rote und eine grüne Karte dabei ist?

(d) Ursula dreht nacheinander drei von den 9 verdeckten Karten um. Sie sagt: „Ich habe jetzt 36 Punkte.“
Welche Farben tragen ihre drei Karten?

(e) Beate schaut heimlich unter drei von den noch verbleibenden Karten und meint zu Ursula gewandt: „Wenn ich die drei Karten aufdecken würde, dann hätte ich 38 Punkte“. Doch Ursula entgegnet ohne hinzuschauen: „Das kann gar nicht sein, denn …“.
Wie begründet Ursula ihre Meinung?

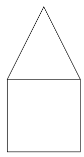
2. In einem Saal befinden sich nur Personen, die entweder den Nachnamen „Müller“, „Becker“, „Schmidt“ oder „Küfner“ tragen. Außerdem heißt jede Person mit Vornamen entweder „Renate“, „Ursula“, „Hans“, „Paul“ oder „Egon“.

(a) Wie viele Personen sind mindestens im Saal?

(b) Kannst du auch feststellen, wie viele Personen höchstens im Saal sind? Begründe deine Antwort.

3. Heinz möchte sich für 30 € einen neuen Skater-Helm kaufen. Dazu „schlachtet“ er sein Sparschwein. Er stellt fest, dass nur 1 €- und 2 €-Münzen im Wert von 59 € darin sind.
   Wie viele Möglichkeiten hätte Heinz höchstens, diesen Helm ausschließlich mit den Münzen aus seinem Sparschwein zu bezahlen?

4.



   Material: je ein blaues, rotes und gelbes quadratisches Plättchen und je ein blaues, rotes und gelbes dreieckiges Plättchen.
   (a) Wie viele Häuserfronten kannst du damit legen?
   (b) Das blaue Quadrat wird durch ein grünes Dreieck ersetzt. Wie viele verschieden farbige Häuserfronten kannst du jetzt legen?

5. (a) Anton, Bettina und Claudia sollen sich für ein Foto nebeneinander stellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
   (b) Doris soll noch mit auf das Foto. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?
   (c) Egon kommt als fünfte Person mit dazu. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten.
   (d) Formuliere eine Regel, wie sich die Anzahl der Möglichkeiten erhöht, wenn eine Person hinzukommt.

6.

Speisekarte

Tomatensuppe

Lauchcremesuppe

****

Schnitzel mit Pommes Frites

Hähnchen mit Reis

Gemüseauflauf

****

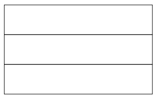
Eis

Obstsalat

Kuchen

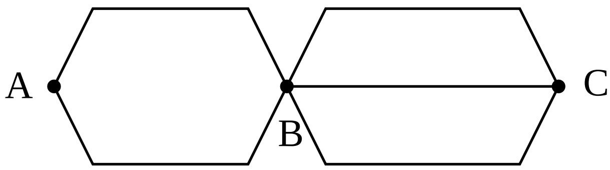
Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus der Speisekarte ein Menü aus Suppe, Hauptgericht und Nachspeise zusammenzustellen?

7.



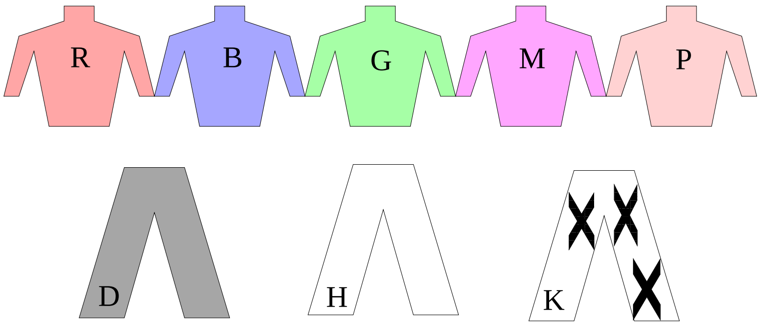
Harry Potter möchte für Hogwarts eine Fahne mit drei verschieden gefärbten Streifen entwerfen. Er hat fünf Farben zur Verfügung: blau, weiß, schwarz, rot und gelb.
Wie viele verschiedene Fahnen könnte er gestalten?

8.



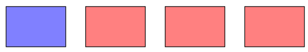
Wie viele Möglichkeiten gibt es, um auf den gezeichneten Wegen von Abelstadt über Besselheim nach Cantorhausen zu gelangen?

9.



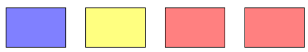
Elvira hat in ihrem Kleiderschrank fünf Pullover (von links: Rot, Blau, Grün, Magenta und Pink) und drei Hosen: eine dunkle (D), eine helle (H) und eine karierte (K). Auf wie viele Arten kann sie sich damit anziehen?

10.



Du hast einen blauen und drei rote Legosteine. Wie viele verschiedene Türme aus vier Steinen kannst du damit bauen?

11.



Du hast einen blauen, einen gelben und zwei rote Legosteine.

(a) Wie viele verschiedene Türme aus vier Steinen kannst du damit bauen?

(b) Wie viele verschiedene Türme aus drei Steinen gibt es?

12. In der Tierhandlung „Katz & Maus“ sind 4 schwarze, 13 weiße und 9 graue Mäuse aus einem Käfig geflüchtet.
Der Chef, Herr Samtpfote, stellt eine Lebendfalle mit Ködern auf. Noch in der Nacht finden sich darin einige der Ausreißer wieder ein. Am Morgen stellt sich heraus, dass von jeder Farbe mindestens eine Maus wieder eingefangen ist. Der Rest rennt noch frei umher.

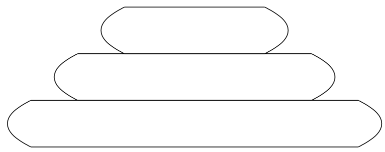
Notiere im Folgenden für jede Antwort eine Begründung.

(a) Gib die Mindestzahl der Mäuse an, die bis dahin eingefangen waren.

(b) Gib die Höchstzahl der Mäuse an, die bis dahin eingefangen waren.

(c) Wie viele Mäuse mussten mindestens wieder eingefangen worden sein, damit sich Herr Samtpfote sicher sein kann, dass von jeder Farbe mindestens eine Maus dabei ist? Welche Farbe(n) tragen dann die noch in Freiheit befindlichen Tiere?

13.



Im Küchenschrank sind drei verschieden große Holzbrettchen rwie in der Zeichnung übereinander gestapelt.
Es handelt sich um ein weißes (w), einen grünes (g) und einen rotes (r) Brettchen. Das weiße Brettchen ist größer als das rote. Wie könnte der Stapel aussehen?