SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 5 (Realschule)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Aufbau des Dezimalsystems

1. Erkläre, wie die jeweilige Zahlenfolge zustande gekommen ist und setze sie an den drei Punkten fort.
   (a) . . . ; 7; 9; 11; 13; . . .
   (b) 1; 2; 4; 7; 11; 16; . . .
   (c) 1; 1; 2; 3; 5; 8; . . .
   (d) . . . ; 128; 256; 512; . . .
   (e) . . . ; 36; 49; 64; 81; . . .
   (f) . . . ; 13; 17; 19; 23; 29; . . .

Lösung: (a) Es ist die Folge der ungeraden Zahlen.

(b) Die Differenz von einer Zahl zu deren Vorgänger erhöht sich stets um 1.

(c) Der Wert der Summe aus den beiden vorangehenden Folgegliedern ergibt das nächste Folgeglied. („FIBONACCI-Folge“)

(d) Die Folge wird durch den Term 2^n erzeugt.

(e) Es ist die Folge der Quadratzahlen.

(f) Es könnte die Folge der Primzahlen sein.

2. (a) Nenne die kleinste natürliche Zahl, die aus 5 verschiedenen Ziffern besteht.

   (b) Nenne die größte 4-stellige natürliche Zahl, die man aus 2 verschiedenen Ziffern erzeugen kann.

   (c) Untersuche, ob es eine größte 6-stellige natürliche Zahl gibt, die aus lauter verschiedenen geraden Ziffern besteht.

   (d) Nenne die kleinste 5-stellige Zahl, die sich aus vier verschiedenen Ziffern zusammensetzt.

   (e) Max behauptet: „Eine Zahl, die sich aus lauter gleichen Ziffern zusammensetzt, die größer als 1 sind, kann keine Primzahl sein.“ Hat er recht? Begründe deine Ansicht.

Lösung: (a) 10234 (b) 9998
(c) Nein, es gibt nur 5 verschiedenen Ziffern, die gerade Zahlen erzeugen können: 0; 2; 4; 6 und 8.
(d) 10023
(e) Er hat recht, denn solche Zahlen sind stets durch die jeweilige Ziffer, die sie erzeugt, ohne Rest teilbar. Ausgenommen sind dabei die einstelligen Zahlen 2, 3, 5 und 7, die selbst Primzahlen sind.

2 Die vier Grundrechenarten

1. Beschreibe, wie die folgenden Summen aufgebaut sind.
   Berechne in jeder Zeile den Summenwert. Schreibe dann an Stelle der drei Punkte passende Summenterme und ihre Summenwerte auf. Was stellst du fest?

   $$\begin{array}{ll} \ldots & = \\ 1+3 & = \\ 1+3+5 & = \\ 1+3+5+7 & = \\ 1+3+5+7+9 & = \\ \ldots & = \\ \ldots & = \end{array}$$

Lösung: Die Summen bestehen aus unmittelbar aufeinander folgenden ungeraden Zahlen. Sie beginnen stets mit 1.
Die Summenwerte ergeben stets Quadratzahlen. Z.B.: $1+3+5=9=3\cdot 3=3^2$. Die Basis gibt die Anzahl der Summanden wieder.

2. Die Zahl 5 lässt sich auf verschiedene Weise als Summe darstellen:

   $$\begin{array}{lll} 5 & = & 1+1+1+1+1 \\ 5 & = & 1+1+1+2 \\ 5 & = & 1+2+2 \\ 5 & = & 1+1+3 \\ 5 & = & 2+3 \\ 5 & = & 1+4 \end{array}$$

   Gib alle möglichen Summendarstellungen für die Zahl 10 an.

Lösung: Prinzip: Der kleinste Summand am Anfang jeder Darstellung bleibt so lange wie möglich erhalten.

3. Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Produkt $111\cdot 222\cdot 333\cdot 444$ hinzuschreiben? Den Produktwert selbst sollst du nicht ausrechnen.

Lösung: $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$ Möglichkeiten

4. Berechne jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen für $G=\mathbb{N}$:
   (a) $5+7\cdot x=54$

(b) $6 + 7 \cdot x = 55$

(c) $54 = 7 \cdot x + 5$

(d) $1 + 7 \cdot y + 4 = 54$

(e) $23 + 7 \cdot x - 18 = 2 \cdot (19 + 8)$

Was fällt dir auf? Hast du dafür eine Erklärung?

Lösung:
- Die Zahl 4 ist Lösung jeder Gleichung.
- Summanden darf man vertauschen.
- Es ist egal, welchen Namen der Platzhalter trägt.
- Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man beide Seiten der Gleichung vertauscht.
- Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung dasselbe addiert.

5. Berechne die Lösungsmenge der drei Ungleichungen sowohl für $G = \mathbb{N}$ als auch für $G = V_5$:

(a) $31 - 3 \cdot x \leqq 17$

(b) $35 - 3 \cdot x \leqq 20$

(c) $27 - 3 \cdot x \leqq 13$

Was fällt dir auf? Hast du dafür eine Erklärung?

Lösung:
- Es gilt in jedem Fall für $G = \mathbb{N}$: $L = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$
  und für $G = V_5$: $L = \emptyset$
- Die Lösungsmenge einer Ungleichung ändert sich nicht, wenn man auf beiden Seiten der Ungleichung dasselbe addiert bzw. subtrahiert.

6. Gegeben sind die Zahlenmengen $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ und $B = \{2;\ 4;\ 6\,;8\}$. Bilde die folgenden Mengen:

(a) $(A \cup B) \cap B$ (b) $(A \cap B) \cup B$
(c) $(B \cup A) \cap A$ (d) $(B \cup A) \cup A$
(e) $(A \cap B) \cap B$ (f) $(B \cap A) \cap A$

Lösung: (a): B (b): B (c): A (d): $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8\}$
(e) und (f): $\{2;\ 4; 6\}$

7. Gib alle natürlichen Zahlen an, die auf der Zahlengeraden nicht rechts von 37 liegen und die gleichzeitig sowohl durch 2 als auch durch 3 ohne Rest teilbar sind.

Lösung: $L = \{6;\ 12;\ ;\ \ldots\ ;\ 36\}$

8. Schreibe eine dreistellige Zahl hin, die aus lauter verschiedenen positiven Ziffern besteht. Erzeuge die „Spiegelzahl“ dadurch, dass du die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge hinschreibst.
Subtrahiere die kleinere von der größeren Zahl und bestimme den größten Teiler des Differenzwertes.
Wiederhole das Experiment mehrfach. Was stellst du fest? Hast du eine Erklärung dafür?

Lösung: Der größte Teiler des Differenzwertes ist stets 99.
Beispiel: 259 ist die Spiegelzahl von 952.
$952 - 259 = 100 \cdot 9 + 10 \cdot 5 + 2 - 100 \cdot 2 - 10 \cdot 5 - 9 = 99 \cdot 9 - 99 \cdot 2$
Allgemein: Wenn die Ziffernfolge abc heißt, dann gilt:
$100a + 10b + 1 \cdot c - 100c - 10b - 1 \cdot a = 99a - 99c$

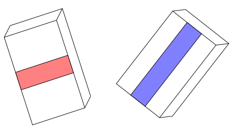
9. Aus der Zahl 157 lassen sich neue dreistellige Zahlen erzeugen, indem man ihre Ziffern vertauscht.
Schreibe alle Zahlen auf und addiere sie. Bestimme sämtliche Teiler des Summenwertes.
Erfinde selbst eine neue dreistellige Zahl, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und wiederhole das Experiment. Vergleiche die Teiler mit jenen der Einstiegsaufgabe. Was stellst du fest? Gilt das immer?

Lösung: $157 + 175 + 517 + 571 + 715 + 751 = 200 \cdot (1 + 5 + 7) + 20 \cdot (1 + 5 + 7) + 2 \cdot (1 + 5 + 7)$
$= 222 \cdot (1 + 5 + 7) = 222 \cdot 13$
Die Teilermenge enthält auf jeden Fall die Elemente: {2; 3; 37; „Quersumme“}

10. (a) Die 24 Stückchen einer Tafel Schokolade werden in einer Kindergartengruppe gleichmäßig verteilt. Wie viele davon bekommt jedes Kind?
(b) Beantworte die Frage (a), wenn es 25 oder 23 Stückchen wären.

Lösung: (a) Es können 2; 3; 4; 6; 8; 12 oder 24 Kinder gewesen sein.
(b1) Bei 25 Stückchen: 2; 5 oder 25 Kinder
(b2) Bei 23 Stückchen: nur 23 Kinder

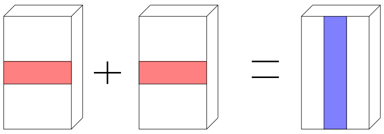
11.



(I) (II)

In jeder der beiden Streichholzschachteln (I) und (II) befinden sich Streichhölzer.

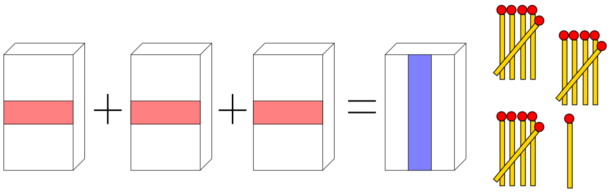
(a)
- Gleich aussehende Schachteln enthalten stets die gleiche Anzahl von Streichhölzern. Notiere, was die folgende Gleichung aussagt:



- Gib mindestens 5 verschiedene Lösungen für diese Gleichung in Tabellenform an, etwa so:

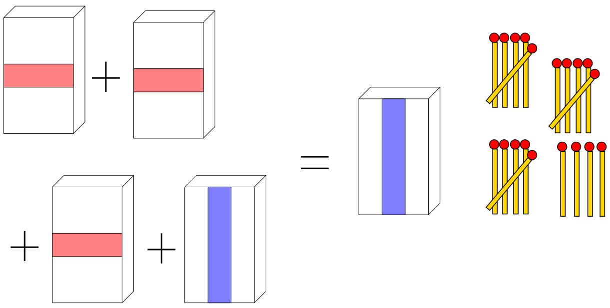
Anzahl in Schachtel (I)	...	...
Anzahl in Schachtel (II)	...	...

(b)



Ermittle die jeweilige Anzahl von Streichhölzern in jeder der beiden Schachteln vom Typ (I) und Typ (II), für welche die obige Darstellung zutrifft. Finde möglichst viele verschiedene Lösungen.

(c)



Fritz schaut sich die Gleichung an. Dann schüttelt er den Kopf und meint: „Hier stimmt doch etwas nicht!“ Begründe, dass Fritz recht hat.

Lösung: (a) Zwei Schachteln vom Typ (I) enthalten zusammen genau so viele Streichhölzer wie eine Schachtel vom Typ (II). Es ergibt sich z.B.:

Anzahl in Schachtel (I)	1	2	3	11	32	...
Anzahl in Schachtel (II)	2	4	6	22	64	...

(b) Rechts liegen 16 Streichhölzer lose herum. Befindet sich rechts in der Schachtel vom Typ (II) nur ein Streichholz, dann sind es insgesamt 17 Streichhölzer. Die kannst du aber nicht gleichmäßig auf die drei Schachteln links verteilen. Also müssen in der Schachtel vom Typ (II) mindestens zwei Streichhölzer liegen. Dann sind es rechts mindestens 18. Also liegen links in jeder Schachtel vom Typ (I) mindestens 6 Streichhölzer. Gibt man dann in die Schachtel rechts vom „=“ 3 dazu, dann sind es zusammen 21

Hölzer. Dann entfallen links auf jede Schachtel 7 Streichhölzer. Nun kannst du immer Vielfache von 3 in die Schachtel (II) dazugeben; die Division durch 3 geht dann für die rechte und damit auch für die linke Seite immer auf.
In Tabellenform erhältst du damit:

Anzahl in Schachtel (I)	6	7	8	19	10	11	...
Anzahl in Schachtel (II)	2	5	8	11	14	17	...

Der Inhalt der Streichholzschachteln kann jedoch nicht beliebig groß werden. Handelsübliche volle Schachteln enthalten meist weniger als 50 Streichhölzer.

(c) Die Anzahl der Streichhölzer in Schachtel (II) spielt keine Rolle, da sie ja auf beiden Seiten auftaucht. Deshalb enthalten die drei Schachteln vom Typ (I) zusammen 19 Streichhölzer, die sich aber nicht gleichmäßig auf drei diese drei Schachteln verteilen lassen. Also hat Fritz mit seiner kritischen Anmerkung recht.

12.

		☆
❁		

Melanie hat neun Spielkarten. Je drei davon sind „Rosette“ (❁), „Stern“ (☆) und „Pik“ (♠). Sie hat in dem quadratischen Muster bereits zwei Spielkarten platziert. Ihre Freundin Claudia soll jetzt die noch freien Felder in dem quadratischen Muster so mit den restlichen sieben Karten belegen, dass dann weder in einer Zeile noch in einer Spalte zwei gleiche Bilder liegen.

Lösung:

A	B	C
D	E	☆
❁	F	G

Die Felder „G“ und „D“ dürfen weder mit „Stern“ noch mit „Rosette“ belegt werden, den sonst lägen entweder in der 3. Spalte oder in der 3. Zeile bzw. in der 1. Spalte oder in der 2. Zeile zwei gleiche Symbole. Also muss „Pik“ auf „D“ und auf „G“ liegen. liegen.
Dann liegt auf „A“ ein „Stern“ und auf „C“ gehört eine „Rosette“ hin.
Der Rest ist klar. Claudia hat am Ende das folgende Muster erzeugt:

☆	♠	❀
♠	❀	☆
❀	☆	♠

Anregung: Beginne ein neues Muster aus drei gleichen Symbolen, die auf einer der beiden Diagonalen liegen und vervollständige es.

13.

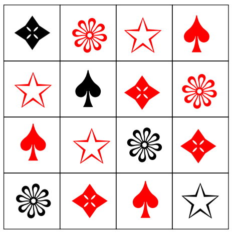
❖			
	♠		
		❀	
❀			☆

Hans hat 16 Spielkarten. Je vier davon sind „Rosette“ (❀), „Stern“ (☆), „Pik“ (♠) und „Karo“ (❖).
Er hat in dem quadratischen Muster bereits fünf Spielkarten platziert.
Sein Freund Helmut soll jetzt die noch freien Felder in dem quadratischen Muster so mit den restlichen 11 Karten belegen, dass dann weder in einer Zeile noch in einer Spalte zwei gleiche Bilder liegen.

Lösung:

❖	A	B	C
D	♠	E	F
G	H	❀	I
❀	J	K	☆

In der 1. Spalte müssen auf „D“ oder „G“ „Stern“ oder „Pik“ liegen. Da in der 2. Zeile jedoch schon „Pik“ liegt, muss auf „D“ der „Stern“ liegen. Dann liegt auf „G“ die Spielfarbe „Pik“.
In der 4. Zeile müssen auf „J“ oder „K“ „Karo“ oder „Pik“ liegen. Da in der 2. Spalte jedoch schon „Pik“ liegt, muss auf „J“ das „Karo“ liegen. Dann liegt auf „K“ die Spielfarbe „Pik“.
In der 2. Spalte müssen auf „A“ oder „H“ „Stern“ oder „Rosette“ liegen. Da in der 3. Zeile jedoch schon eine „Rosette“ liegt, muss auf „H“ der „Stern“ liegen. Dann liegt auf „A“ die „Rosette“.
Der Rest ist klar. Helmut hat am Ende das folgende Muster erzeugt:



14. Die Klasse 5c der Leonhard-Euler-Realschule bekommt von ihrem Mathematiklehrer, Herrn Lieret, die folgende Aufgabe:
„Schreibe eine zweiziffrige Zahl auf, in der keine Null vorkommt. Durch Vertauschen der beiden Ziffern erhältst du eine zweite Zahl, die ‚Spiegelzahl‘. Addiere zur Zahl ihre Spiegelzahl. Zerlege den Summenwert in Faktoren“.

    (a) Nach einer Weile bittet Herr Lieret Marie, Beate und Gregor, ihre Rechnungen an die Tafel zu schreiben, aber dabei nicht alles zu verraten.

Marie schreibt:	$74 + \bigcirc$	$=$	$11 \cdot 11$
Gregor und Beate haben zusammengearbeitet.			
Beate schreibt:	$67 + 76$	$=$	$13 \cdot \square$
Gregor schreibt:	$\blacksquare + \triangle$	$=$	$187 = \square \cdot \heartsuit$

    Berechne für $\bigcirc$, $\square$, $\blacksquare$, $\triangle$ und $\heartsuit$ die entsprechenden Zahlen. Beachte dabei: Gleiche Zeichen bedeuten gleiche Zahlen.

    (b) Da ruft Max: „Herr Lieret, der Summenwert hat immer den Teiler … .“ Die anderen bestätigen das auch für ihre Rechnung. Welchen Teiler meint Max?

    (c) Ursula meldet sich: „Der zweite Faktor neben der 11 an der Tafel ist zwar immer anders, aber beim Addieren der … kommt der zweite Faktor heraus. Was hat Ursula gemeint?“

    (d)
    - Jede zweiziffrige Zahl lässt sich in der Form $z \cdot 10 + e \cdot 1$ schreiben, wobei z die Anzahl der Zehner und e die Anzahl der Einer darstellt.
      Beispiel: $37 = 3 \cdot 10 + 7 \cdot 1$; also ist hier $z = 3$ und $e = 7$.
      Bestätige mit der Darstellung $z \cdot 10 + e \cdot 1$ für zweiziffige Zahlen, dass die Aussagen von Max und Ursula für alle möglichen Lösungen der Aufgabe richtig sind.
    - Was wäre, wenn Herr Lieret in seiner Aufgabe die Null bei der Bildung der zweiziffrigen Zahlen zugelassen hätte?

    (e)
    - Herr Lieret will wissen, wer in der Klasse den größten Summenwert erhalten hat. Lisa ist es; sie hat 209 herausbekommen. Doch Emil widerspricht: „Das kann nicht stimmen.“ Wie kannst du Lisa überzeugen, dass Emil recht hat?
    - Wie viele verschiedene Summenwerte gibt es überhaupt?
    - Wie viele zweiziffrige Zahlen (ohne die Ziffer Null) ergeben zusammen mit ihrer Spiegelzahl den Summenwert 143?

Lösung: (a) Marie:
$74 + \bigcirc = 121 \quad \Rightarrow \quad \bigcirc = 47$ und tatsächlich: $74 + 47 = 121$.
Beate:
$67 + 76 = 143 \quad \Rightarrow \quad 13 \cdot \Box = 143 \quad \Rightarrow \quad \Box = 11$.
Gregor hat es am schwersten gemacht:
Du weißt schon: $\Box = 11$. Also ist $187 = 11 \cdot \heartsuit \quad \Rightarrow \quad \heartsuit = 17$.
Jetzt muss also die Summe aus einer zweistelligen Zahl und ihrer Spiegelzahl 187 ergeben.
1. Versuch: $99 + 99 = 198$; das ist zuviel.
2. Versuch: $98 + 89 = 187$ oder $89 + 98 = 187$; beides passt.
Gregor hat zwei Möglichkeiten offen gelassen:
$\blacksquare = 8$ und $\triangle = 9$ oder $\blacksquare = 9$ und $\triangle = 8$.

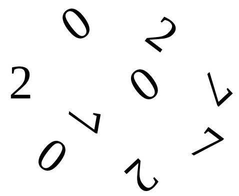
(b) Max meint den Teiler 11.

(c) Ursula meint: „Beim Addieren der beiden Ziffern der zweistelligen Zahl kommt an der Tafel immer der zweite Faktor heraus."

(d)
- Zweiziffrige Zahl: $z \cdot 10 + e \cdot 1$; ihre Spiegelzahl: $e \cdot 10 + z \cdot 1$
Summe: $z \cdot 10 + e \cdot 1 + e \cdot 10 + z \cdot 1$. In dieser Summe tauchen also 11 Zehner und 11 Einer auf. Also sind es $11 \cdot (\text{Zehner} \ + \ \text{Einer})$.
Für die Summe aus der zweiziffrigen Zahl und ihrer Spiegelzahl ergibt sich also: $11 \cdot z + 11 \cdot e = 11 \cdot (z + e)$.
Max hat somit recht: Der Summenwert hat stets den Teiler 11.
Die Summe $11 \cdot z + 11 \cdot e = 11 \cdot (z + e)$ enthält also einerseits immer den Faktor 11, andererseits auch stets den Faktor $(z + e)$, der aber gerade die Ziffernsumme der zweistelligen Zahl darstellt. Die Summe aus allen Ziffern einer Zahl heißt „**Quersumme**".
Ursula hat auch recht: Die Quersumme aus der zweiziffrigen Zahl ist stets Teiler des Summenwertes.
- Wenn Herr Lierte die Null zugelassen hätte, dann wären Max und Ursula dennoch im Recht. Probiere es an einigen Beispielen aus. Was wäre, wenn Du die „zweiziffrige Zahl" 00 verwenden würdest?

(e)
- $209 : 11 = 19$; insofern ist die Aussage von Max hier bestätigt. Nach der Aussage von Ursula muss jedoch die Summe der beiden Ziffern von Lisas Zahl (von der sie dann die Spiegelzahl erzeugt) den Wert 19 besitzen. Die größte Zffer ist die 9. Die größte zweistellige Zahl ist somit 99, die mit ihrer Spiegelzahl identisch ist:
$9 + 9 = 18 < 19$. Also muss ich Lisa verrechnet haben und Emil hat recht.
- $99 + 99 = 198$; das ist der größte Summenwert, der überhaupt auftauchen kann. Alle möglichen Summenwerte besitzen den Teiler 11 (angefangen von der Zahl 11 selbst). Also gibt es $198 : 11 = 18$ verschiedene Summenwerte.
- $143 : 11 = 13$; gesucht sind alle zweiziffrigen Zahlen mit der Quersumme 13:
Es kommen für das Paar (Zahl | Spiegelzahl) nur die Kombinationen
$$(49 \mid 94); (58 \mid 85); (67 \mid 76); (76 \mid 67); (85 \mid 58); (94 \mid 49)$$
in Frage.

15.



(a) Wie oft ist die Null in dem Zahlengiganten

$$\underbrace{207207207\ldots207}_{\text{2007 Ziffern}} \qquad \text{vertreten?}$$

(b) Berechne 207 : 9 $\qquad$ 207207 : 9 $\qquad$ 207207207 : 9.
Was stellst du fest?

(c) Wie viele Ziffern enthält der Wert des Quotienten aus diesem Zahlengiganten und 9?

(d)
- Wie oft ist die Ziffer 2 im Wert des Quotienten aus diesem Zahlengiganten und 9 vertreten?
- Wie oft ist die Null im Wert des Quotienten aus diesem Zahlengiganten und 9 vertreten?

(e) Wie viele Nullen sind im im Wert des Quotienten aus diesem Zahlengiganten und 23 enthalten?

Lösung: (a) Die Riesenzahl setzt sich aus $2007 : 3 = 669$ Dreier-Paketen „207“ zusammen. In jedem Paket steckt eine Null. Also enthält die Riesenzahl 669 Nullen.

(b) $207 : 9 = 23 \qquad 207207 : 9 = 23\,023 \qquad 207207207 : 9 = 23\,203\,203.$
Es tauchen nur die Ziffern 0,2 und 3 auf, die sich periodisch wiederholen.

(c) Nach dem, was du in (b) herausfinden solltest, beginnt der Wert des Quotienten mit dem Päckchen „23“. Dann folgen $669 - 1 = 668$ Dreier-Pakete mit „023“.
Also enthält der Wert des Quotienten $2 + 668 \cdot 3 = 2006$ Ziffern.

(d)
- Im ersten Päckchen und in allen folgenden Paketen ist die 2 enthalten. Also ist die Ziffer 2 669-mal im Wert des Quotienten enthalten.
- Die Null fehlt im ersten Zweierpäckchen „23“. In jedem Dreier-Paket mit „023“ kommt sie vor.
  Also enthält der Wert des Quotienten $669 - 1 = 668$-mal die Null.

(e) $207 : 23 = 9 \qquad 207207 : 23 = 9\,009 \qquad 207207207 : 23 = 9\,009\,009.$
Wie schon in (a) gezeigt, besteht der Zahlengigant aus 669 Dreierpaketen mit „207“.
Bei der Division durch 23 beginnt der Wert des Quotienten mit dem Minipaket „9“.
Dann folgen wieder 668 Dreier-Pakete mit „009“.
Also enthält dieser Wert des Quotienten $668 \cdot 2 = 1336$ Nullen.

16. Auf wie viele Nullen endet der Wert des folgenden Produktes?

$$(10^{117}+1)\cdot(10^{117}\cdot 100)\cdot(117^{10+1})\cdot(1^{117+10})\cdot(10+0^{117})$$

Lösung:

$$\underbrace{(10^{117}+1)}_{\text{1.Faktor}}\cdot\underbrace{(10^{117}\cdot 100)}_{\text{2.Faktor}}\cdot\underbrace{(117^{10+1})}_{\text{3.Faktor}}\cdot\underbrace{(1^{117+10})}_{\text{4.Faktor}}\cdot\underbrace{(10+0^{117})}_{\text{5.Faktor}}$$

Der **1. Faktor** endet auf die Ziffer 1.
Der **2. Faktor** besteht aus einer 1, auf die 119 Nullen folgen.
Die letzte Ziffer des **3. Faktors** ist sicher keine Null, da die letzte Ziffer der Basis eine 7 und keine 0 ist.
Der **4. Faktor** hat den Wert 1. Er ändert nichts am Produktwert.
Der **5. Faktor** hat den Wert 10. Dadurch erhöht sich die Anzal aller Nullen beim Wert des Produktes um 1.
Somit liefern der **2. Faktor** und der **5. Faktor** zusammen 120 Nullen, die am Ende des Produktwetes auftauchen.

17. 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512 512
Karin und Wolfgang betrachten den Zahlenriesen. Wolfgang meint:„Die Zahl ist durch 4 teilbar.“ Karin hat genauer hingeschaut: „Die Zahl ist sogar durch 36 teilbar.“
    (a) Woran hat Wolfgang die Teilbarkeit durch 4 erkannt?
    (b) Wie kannst du ohne längere Rechnung begründen, dass Karin Recht hat?

Lösung: (a) Die letzen beiden Ziffern ergeben die Zahl 12, die durch 4 teilbar ist. Also ist es auch die vollständige Zahl.
(b) Das Ungetüm besteht aus 18 „Dreierpaketen“ 512. Die Quersumme dieses Zahlenriesen berechnest du dann mit $18\cdot(5+2+1)=18\cdot 8$. Den Produktwert musst du jetzt gar nicht mehr ausrechnen, denn er ist durch 18 und damit auch durch 9 teilbar. Daher ist das Ungetüm sowohl durch 4 als auch durch 9, also auch durch $4\cdot 9=36$ teilbar.

18. Christian GOLDBACH (1690-1764) war Mathematiklehrer. Am 7. Juni 1742 schrieb er einen Brief an den berühmten Mathematiker Leonhard EULER (1707-1783). Darin steht eine Behauptung, die heute als die **Goldbachsche Vermutung** bekannt ist. Sie lautet:
Jede gerade natürliche Zahl, die größer als 3 ist, lässt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.
    (a) Zeige am Beispiel der Zahl 10, dass diese als Summe zweier Primzahlen dargestellt werden kann.
    (b) Weshalb stehen in der Goldbachschen Vermutung die Worte: „. . . , die größer als drei ist, . . . “?
    (c) Zeige, dass die Zahl 18 auf verschiedene Weise als Summe zweier Primzahlen dargestellt werden kann.

(d) Gib alle Möglichkeiten an, wie sich die Zahl 40 als Summe zweier Primzahlen darstellen lässt.

(e) In der Goldbachschen Vermutung sind ungerade natürliche Zahlen ausgenommen. Finde unter den ungeraden naürlichen Zahlen, die kleiner als 30 sind, alle diejenigen, die sich nicht als Summe zweier Primzahlen darstellen lassen.

(f) Der Mathematiker Jörg Richstein vom Institut für Informatik der Universität Gießen hat im Jahre 1998 mit Hilfe eines Rechenprogrammes am Computer alle geraden Zahlen bis 400 Billionen untersucht. Bei jeder einzelnen geraden Zahl hat sich die Goldbachsche Vermutung dabei als richtig herausgestellt.
Der britische Verlag „Faber and Faber“ hat demjenigen ein Preisgeld von einer Million Dollar versprochen, der die Goldbachsche Vermutung entweder beweisen oder widerlegen kann. Eigentlich dürfte doch Herr Richstein dann eine Million Dollar kassieren. Oder?

Lösung: (a) $10 = 7 + 3$.

(b) Es gibt nur eine gerade Zahl, die nicht größer als 3 ist, nämlich 2. Diese Zahl lässt sich aber nur mit $1 + 1$ als Summe dartsellen. Die Zahl 1 gehört jedoch nicht zu den Primzahlen.

(c) $18 = 13 + 5$ und $18 = 11 + 7$.

(d) Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin, von 40 nach und nach alle Primzahlen, die kleiner als 40 sind, zu subtrahieren und dann zu überprüfen, ob der Wert der jeweiligen Differenz eine Primzahl ist:

$40 - 2 = 38 \notin \mathbb{P}$	$\boxed{40 - 3 = 37 \in \mathbb{P}}$	$40 - 5 = 35 \notin \mathbb{P}$
$40 - 7 = 33 \notin \mathbb{P}$	$\boxed{40 - 11 = 29 \in \mathbb{P}}$	$40 - 13 = 27 \notin \mathbb{P}$
$\boxed{40 - 17 = 23 \in \mathbb{P}}$	$40 - 19 = 21 \notin \mathbb{P}$	Fertig.

(e) Die Darstellung einer ungeraden Zahl als Summe zweier natürlicher Zahlen ist nur möglich, wenn ein Summand gerade, der andere aber ungerade ist. Wenn die beiden Summanden Primzahlen sein sollen, dann muss einer der Summanden 2 sein, denn 2 ist die einzige gerade Primzahl. Beginne mit der Zahl 29, usw:

$\boxed{29 - 2 = 27 \notin \mathbb{P}}$	$\boxed{27 - 2 = 25 \notin \mathbb{P}}$	$25 - 2 = 23 \in \mathbb{P}$
$\boxed{23 - 2 = 21 \notin \mathbb{P}}$	$21 - 2 = 19 \in \mathbb{P}$	$19 - 2 = 17 \in \mathbb{P}$
$\boxed{17 - 2 = 15 \notin \mathbb{P}}$	$15 - 2 = 13 \in \mathbb{P}$	$\boxed{11 - 2 = 9 \notin \mathbb{P}}$
$9 - 2 = 7 \in \mathbb{P}$	$7 - 2 = 5 \in \mathbb{P}$	$5 - 2 = 3 \in \mathbb{P}$
Fertig.		

(f) Ein Computer mag noch so viele Zahlen durchprobieren, es bleiben immer noch unendlich viele Zahlen übrig, wo man noch nicht weiß, ob sich in diesen Fällen die Goldbachsche Vermutung als richtig oder falsch herausstellt.
Herr Richstein geht also zu Recht leer aus.

19. Susanne und Hans rechnen im Kopf:
    - $37 + (19 - 15)$ und $(37 + 19) - 15$
    - $(53 + 21) - 18$ und $53 + (21 - 18)$

    Sie stellen fest, dass die Ergebnisse in jeder Zeile die gleichen sind.

    (a) Susamme meint: „Das ist doch klar, denn …“.
    Wie hat es Susanne dem Hans erklärt?

    (b) Hans gibt zu bedenken: „Obwohl die Ergebnisse jeweils gleich sind, geht es dabei in einem Fall schneller.“ Begründe, weshalb es da schneller geht.

Lösung: (a) „… es ist egal, ob ich die 15 erst von 19 oder von der Summe aus 27 und 19 subtrahiere. Auf jeden Fall wird nur 15 subtrahiert und sonst nichts.“

(b) Der Wert der Differenz in der jeweiligen Klammer liefert eine kleine Zahl, die ich dann leicht addieren kann.

20. (a) Berechne im Kopf:
    - $39 - (27 + 4)$ und $(39 - 27) + 4$
    - $(87 - 53) - 14$ und $87 - (53 - 14)$

    (b) Erkläre, weshalb in jeder Zeile verschiedene Ergebnisse herauskommen, obwohl doch die gleichen Zahlen und die gleichen Rechenzeichen in unveränderter Reihenfolge dastehen.

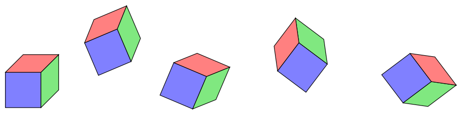
Lösung: (a) $39 - (27 + 4) = 8$ und $(39 - 27) + 4 = 16$.
$(87 - 53) - 14 = 20$ und $87 - (53 - 14) = 48$.

(b) 1. Zeile Aufgabe links: Von 39 wird mehr als 27 subtrahiert.
1. Zeile Aufgabe rechts: Von 39 wird 27 subtrahiert, dann aber 4 addiert. Also kommt hier mehr heraus.
2. Zeile Aufgabe links: Von 87 wird 53 subtrahiert und davon nochmals 14.
2. Zeile Aufgabe rechts: Von 87 wird um 14 weniger als 53 subtrahiert. Also kommt hier mehr heraus.

21. Gertrud, Helmut und Willy brüten über zwei Riesenaufgaben:
    Aufgabe 1: $3456789 - (12345 - 11)$ Aufgabe 2: $(3456789 - 12345) - 11$
    Willy war zuerst fertig: „Lauter gleiche Zahlen und Rechenzeichen - also sind die Ergebnisse gleich.“
    Gertrud widerspricht. „Meine beiden Ergebnisse unterscheiden sich um 22.“ Helmut mischt sich ein. „Gertrud hat recht. Dazu brauchen wir nur die Zahlen zu betrachten, die jeweils von 3456789 subtrahiert werden müssen“.
    Wie hat Helmut gerechnet?

Lösung: In der Aufgabe 1 wird von 3456789 nur $12345-11 = 12334$ abgezogen. In der Aufgabe 2 wird zunächst 12345, dann aber nochmals 11 abgezogen. Also wird insgesamt $12345+11 = 12356$ abgezogen.
Die Differenz beträgt hier $12356-12334 = 22$. Also wird in der 2. Aufgabe von 3456789 um 22 mehr subtrahiert als in der 1. Aufgabe. Helmut hat recht und Gertrud hat vermutlich richtig gerechnet. (Warum nur „vermutlich"?)

22.



Maria baut Würfel aus lauter kleinen Würfeln zusammen, deren Kantenlänge jeweils 3 cm beträgt. Sie hat einen Vorrat von 150 solcher kleinen Würfel.

(a) Wie viele kleine Würfel braucht sie, um einen größeren Würfel mit doppelter Kantenlänge zusammenzusetzen? Welches Volumen hat dieser große Würfel?

(b)
- Wie viele kleine Würfel bräuchte sie, um zwei größere Würfel, den einen mit dreifacher und den anderen mit vierfacher Kantenlänge zusammenzusetzen, wenn sie genügend viele kleine Würfel hätte?
- Berechne das Volumen des großen Würfels mit dreifacher Kantenlänge auf zwei verschiedene Arten.

(c) Könnte Maria auch einen Würfel zusammenfügen, dessen Volumen 100-Mal so groß wie der eines kleinen Würfels ist?

(d) Maria baut aus ihren 150 kleinen Würfeln solche mit der doppelten und solche mit der dreifachen Kantenlänge so dass kein kleiner Würfel übrig bleibt.
Wie viele größere Würfel hat sie?

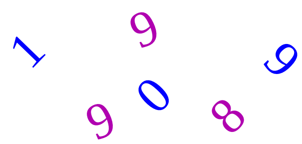
Lösung: (a) An jeder Kante stehen dann immer zwei kleine Würfel aufeinander: Sie braucht also $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ Würfel.
Das Volumen beträgt dann $(2 \cdot 3\,\text{cm})^3 = 216\,\text{cm}^3$.

(b)
- Anzahl bei dreifacher Kantenlänge $= 3^3 = 27$ Würfel
Anzahl bei vierfacher Kantenlänge $= 4^3 = 256$ Würfel
Insgesamt bräuchte sie 283 kleine Würfel.
- **1. Möglichkeit:**
Maria braucht also 27 Würfel.
Jeder davon hat ein Volumen von $3\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 27\,\text{cm}^3$.
$27 \cdot 27\,\text{cm}^3 = 729\,\text{cm}^3$.
2. Möglichkeit:
Der große Würfel hat eine Kantenlänge von $3 \cdot 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$.
Für dessen Volumen ergibt sich: $(9\,\text{cm})^3 = 729\,\text{cm}^3$.

(c) Sie bräuchte 100 kleine Würfel. Aber 100 kleine Würfel ergeben keinen großen Würfel, denn die dreifache Kantenlänge erfordert 27 Würfel und die vierfache Kantenlänge schon 256 Würfel. Dazwischen gibt es nichts.

(d) Für einen Würfel mit der dreifachen Kantenlänge braucht sie 27 kleine.
$150 - 27$ ist ungerade, also bleibt bei der Division durch 8 (doppelte Kantenlänge) ein Rest.
Für zwei Würfel mit der dreifachen Kantenlänge braucht sie 54 kleine.
$150 - 54 = 96$ und $96 : 8 = 12$
Aus 150 Bausteinen kann sie also 12 Würfel mit doppelter und zwei Würfel mit dreifacher Kantenlänge bauen.

23.



(a) Berechne jeweils die Ergebnisse und trage sie in die Tabelle ein:

$99 \cdot 11 =$	
$999 \cdot 11 \quad =$	$99 \cdot 111 \quad =$
$9999 \cdot 11 \quad =$	$99 \cdot 1111 \quad =$
$99999 \cdot 11 \quad =$	$99 \cdot 11111 \quad =$

(b) Wenn du richtig gerechnet hast, dann stimmen deine Ergebnisse ab der zweiten Zeile links und rechts überein.
Begründe, dass z.B. $9999 \cdot 11 = 99 \cdot 1111$ sein muss, indem du eine geeignete Zerlegung in Faktoren vornimmst.

(c) Dann könntest du doch auch die Ergebnisse von

$$9\,999\,999 \cdot 11 \text{ und } 99 \cdot 111\,111\,111$$

ganz leicht angeben.
Warum? Was kommt heraus?

Lösung: (a)

$99 \cdot 11 = 1\,089$	
$999 \cdot 11 \quad = 10\,989$	$99 \cdot 111 \quad = 10\,989$
$9999 \cdot 11 \quad = 109\,989$	$99 \cdot 1111 \quad = 109\,989$
$99999 \cdot 11 \quad = 1\,099\,989$	$99 \cdot 11111 \quad = 1\,099\,989$

Es ist $9\,999 \cdot 11 = 9 \cdot 1\,111 \cdot 11 = 9 \cdot 11 \cdot 1\,111 \cdot 11 = 99 \cdot 1\,111$.

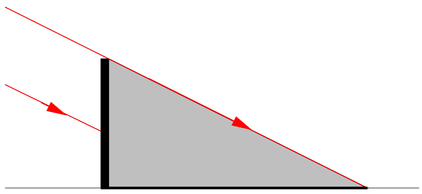
(b) Im Wert 1089 des Produktes $99 \cdot 11$ taucht mittendrin noch keine 9 auf.

Das nächste Produkt $999 \cdot 11$ hat eine 9 mehr. Gleichzeitig taucht im Produktwert die erste 9 in der Mitte auf:
$99\mathbf{9} \cdot 11 = 10\mathbf{9}89$.

Im folgenden Produkt $9999 \cdot 11$ stehen zwei Neuner mehr. Gleichzeitig tauchen im Produktwert zwei zusätzliche Neuner auf:
$99\mathbf{99} \cdot 11 = 10\mathbf{99}89$.

Das Produkt $99999 \cdot 11$ in der letzen Zeile enthält drei Neuner mehr. Also stehen im Produktwert drei Neuner mehr als in der ersten Aufgabe: $99\mathbf{999} \cdot 11 = 10\mathbf{999}89$.
Also folgt:
$999\mathbf{9999} \cdot 11 = 10\mathbf{9999}89$ und $99 \cdot 111111111 = 999999999 \cdot 11 = 10\mathbf{99999}89$.

24.



Der Schatten eines 1,50 m hohen Stabes ist 1,80 m lang.

(a) Wie lang ist jeweils zur gleichen Zeit der Schatten von Stäben, welche die folgenden Längen aufweisen:
(a1) 4,50 m (a2) 50 cm (a3) 2 m (a4) 25 cm
Weshalb steht in der Aufgabe „… jeweils zur gleichen Zeit …“?

(b) Wie lang sind jeweils die Stäbe, welche die folgenden Schattenlängen erzeugen?
(b1) 3,60 m (b2) 30 cm (b3) 1,50 m (b4) 18 cm

Lösung: Zunächst rechnest du am besten alle Längen, die in m angegeben sind, in cm um. Z.B.: 4,50 m = 450 cm. Dann erhältst du die folgenden Lösungen:

(a)

(a1)	(a2)	(a3)	(a4)
540 cm	60 cm	240 cm	30 cm

(b)

(b1)	(b2)	(b3)	(b4)
300 cm	36 cm	125 cm	15 cm

25. Es gibt vier zweistellige Zahlen, für die die erste Ziffer doppelt so groß ist wie die zweite.

(a) Schreibe alle diese Zahlen der Größe nach geordnet von oben nach unten in die Kästchen. Beginne mit der kleinsten.

(b) Wenn du in jeder Zahl die Ziffern vertauschst, so entsteht die „Spiegelzahl“.

- Subtrahiere von jeder Zahl ihre Spiegelzahl. Rechne oben in der betreffenden Zeile.
- Notiere, was dir alles auffällt.

Lösung: (a) mit (b)

$\boxed{21}$	$-$	12	$=$	9
$\boxed{42}$	$-$	24	$=$	18
$\boxed{63}$	$-$	36	$=$	27
$\boxed{84}$	$-$	48	$=$	36

(b)
- Siehe Rechnung oben.

→ Alle Zahlen sind durch 3 teilbar..

→ In der ersten Spalte nehmen die Zahlen von oben nach unten um jeweils 21 zu.

→ In der zweiten Spalte nehmen die Zahlen von oben nach unten um jeweils 12 zu.

→ In der dritten Spalte nehmen die Zahlen von oben nach unten um jeweils 9 zu.

→ In der ersten Spalte sind alle Zahlen durch 21 teilbar.

→ In der zweiten Spalte sind alle Zahlen durch 12 teilbar.

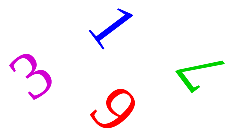
→ In der dritten Spalte sind alle Zahlen durch 9 teilbar.

26. Erzähle zu den beiden Gleichungen eine passende Geschichte:
Gleichung (1): $2 \cdot x - 4 = 32$ und
Gleichung (2): $2 \cdot (x - 4) = 32$.

Lösung: Z.B. Gleichung (1):
Michaela möchte gern einen Zwerghasen besitzen. Dafür bekommt sie von ihrem Onkel Herbert einen Geldbetrag geschenkt. Sie meint: „Jetzt habe ich doppelt so viel Geld wie vorher.“
Sie geht mit ihren Eltern in die Zoohandlung. Die Einstreu kostet 4 €. Der Zwerghase kostet 32 €. Michaela freut sich: „Auch wenn ich jetzt kein Geld mehr habe, wird es 'Maxi' bei mir gut haben.“
Welchen Betrag hat Michaela von Onkel Herbert erhalten?

Z.B. Gleichung (2):
Alfred hat sich für 4 € eine CD gekauft. Er zählt dann sein gesamtes „Barvermögen“ und meint: „Wenn ich nochmal den gleichen Betrag spare, den ich jetzt noch besitze, könnte ich mir im Sommer eine Karte zu 32 € für das Konzert der 'Glorious Angels' leisten.“
Wie viel Geld hatte Alfred vor dem Kauf der CD zur Verfügung?

27.



Du kannst zeigen, dass $3^{22} - 4$ keine Primzahl ist, ohne dass du den Wert der Potenz 3^{22} ausrechnen musst.

(a) Trage die Endziffern der Werte der betreffenden Potenzen in die Tabelle ein:

Potenz	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	...
Endziffer											...

(b) Was stellest du fest?

(c) Wie heißt demnach die letzte Ziffer des Wertes der Potenz 3^{22}?

(d) Wie begründest du also die Tatsache, dass der Wert der Differenz $3^{22} - 4$ keine Primzahl ist?

(e) Gib für das Fragezeichen im Exponenten drei verschiedene natürliche Zahlen an, die größer als 100 sind , so dass der Differenzwert $3^{?} - 4$ durch 5 teilbar ist. Erkläre, wie du deine Auswahl getroffen hast.

Lösung: (a)

Potenz	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	...
Endziffer	3	9	7	1	3	9	7	1	3	9	...

(b) Die Endziffern bilden offenbar Viererpakete in der Reihenfolge [3; 9; 7; 1].

(c) Aus dem Exponenten 22 lassen sich also 5 solche Viererpakete bis zum Exponenten $20 = 5 \cdot 4$ schnüren. Der Exponent 21 muss dann wieder die Endziffer 3 und der Exponent 22 die Endziffer 9 liefern.
Der Wert der Potenz 3^{22} endet also auf die Ziffer 9.

(d) Der Wert der Differenz $3^{22} - 4$ endet wegen $9 - 4 = 5$ auf die Ziffer 5. Der Wert dieser Differenz muss also durch 5 teilbar sein. Also stellt er keine Primzahl dar.
Hinweis: Es gibt Rechenprogramme, welche die Primfaktorzerlegung dieses Differenzwertes ausgeben: $3^{22} - 4 = 5 \cdot 7 \cdot 71 \cdot 499 \cdot 25\,307$. Die Rechenzeit dauert weniger als eine zehntel Sekunde.

(e) Für das Fragezeichen an Stelle des Exponenten könnten z.B. die Zahlen 102, 806 oder 99 998 stehen.
Du musst für den Exponenten nur Zahlen nehmen, die bei der Division durch 4 den Rest 2 ergeben.

28. (a) Hans behauptet: „Nicht jede dreistellige Zahl mit der Quersumme 6 muss durch 6 teilbar sein.“ Hat Hans Recht? Begründe deine Antwort.

(b) Maria behauptet: „Wenn du die Ziffern einer 35-stelligen Zahl, die durch 9 teilbar ist, vertauschst, kann es passieren, dass die abgeänderte Zahl nicht mehr durch 9 teilbar ist.“ Hat sie Recht? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) Hans hat Recht. Ein Beispiel genügt:
Die Zahl 123 besitzt die Quersumme 6. Weil 123 **ungerade** ist, kann diese Zahl aber nicht durch 6 teilbar sein.

(b) Maria hat Unrecht: Wenn du die Ziffern einer Zahl vertauschst, dann bleibt deren Quersumme unverändert. Wenn sie also vorher durch 9 teilbar war, ist sie es auch nach dem Zifferntausch.

29. Das „Querprodukt“ einer natürlichen Zahl erhältst du, wenn du alle Ziffern dieser Zahl miteinander multiplizierst.
Beispiel: Die Zahl 5346 hat das Querprodukt $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 360$.

(a) Gib eine zehnstellige Zahl an, deren Querprodukt den Wert 1 besitzt. Ist das die einzig mögliche Zahl? Begründe.

(b) Gib alle dreistelligen Zahlen an, deren Querprodukt den Wert 4 hat.

(c) Wie viele dreistellige Zahlen mit dem Querproduktwert 0 gibt es?

(d) Gibt es eine natürliche Zahl, deren Querprodukt durch 11 ohne Rest teilbar ist? Begründe.

Lösung: (a) Die Zahl heißt 1 111 111 111.
Gäbe es eine weitere Zahl mit dem Produktwert 1, dann müsste mindestens eine Ziffer von 1 verschieden sein. Dann wäre der Produktwert entweder 0 oder größer als 1. Also ist dies die einzige Möglichkeit.

(b) Es genügen zwei Darstellungen der Zahl vier als Produkt:
$4 = 4 \cdot 1$ und $4 = 2 \cdot 2$. Um daraus eine dreistellige natürliche Zahl zu erzeugen, muss jeweils mit dem Faktor 1 aufgefüllt und das Kommutativgesetz angewendet werden:

$$\begin{array}{llll} 411 & 141 & 114 & \text{und} \\ 221 & 212 & 122 & \end{array}$$

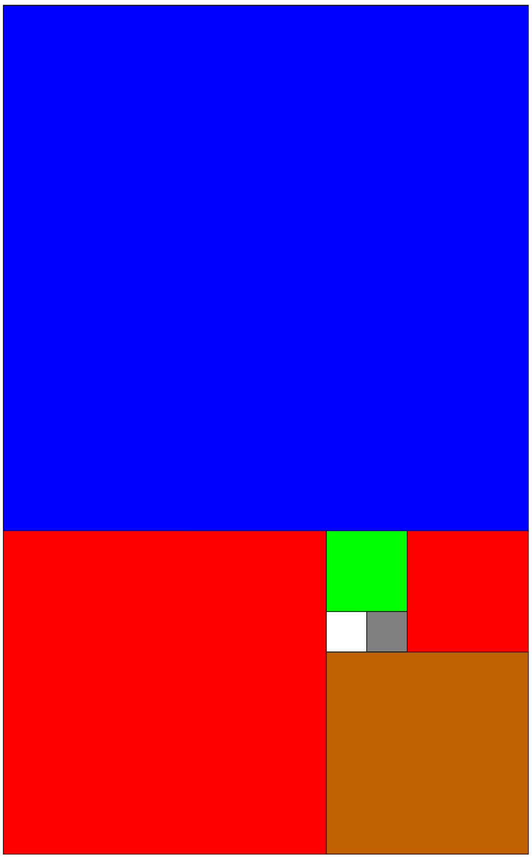
(c) Es gilt: Hat in einem Produkt mindestens ein Faktor den Wert 0, dann hat das Produkt den Wert 0.
Die Frage nach der Anzahl der dreistelligen natürlichen Zahlen mit dem Querproduktwert 0 ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Anzahl dreistelliger Zahlen, die mindestens eine 0 (nicht an der ersten Stelle) enthalten.
Wir probieren es zunächst im Bereich von 100 bis 199:

100	101	102	...	110	zusammen 11 Zahlen
120	130	140	...	190	zusammen 8 Zahlen
					zusammen 19 Zahlen

Dieselben Überlegungen gelten auch im Bereich von 200 bis 299: Auch hier sind es wieder 19 solche Zahlen, die mindestens eine 0 enthalten.
Diese Überlegungen lassen sich bis in den Berecih von 900 bis 999 fortsetzen. Also sind es zusammen 9 solche Bereiche mit je 19 Zahlen. Damit sind es $19 \cdot 9 = 171$ solche Zahlen, die mindestens eine 0 enthalten.

(d) Weil 11 eine Primzahl ist, müsste das Querprodukt diese Zahl als Faktor enthalten; d.h. es müsste eine zweistellige Ziffer 11 geben. Weil das aber nicht der Fall ist, musst du die gestellte Frage verneinen.

30.



Der Maler Eugen Jost aus der Schweiz hat ein rechteckiges Bild gemalt, das sich aus lauter Quadraten zusammenfügt. Er hat das Wort „Girasole“ (auf deutsch: „Sonnenblume“) darunter geschrieben.

(a) Zeichne das Bild mit deinem Geodreieck (du brauchst eine ganze Heftseite). Die Seitenlänge der beiden kleinsten Quadrate soll jeweils 1 cm betragen. Male die Quadrate noch nicht aus. Beschreibe, wie du vorgehst.

(b)

Quadrat Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
Seitenlänge in cm	1	1						

Ergänze die fehlenden Seitenlängen in der Tabelle in der Reihenfolge, wie du die Quadrate gezeichnet hast.
Welche Seitenlänge hätte das 8. Quadrat?
Wie kannst du die Seitenlänge des 9. Quadrates und damit auch die aller folgenden Quadrate berechnen? Erkläre.

(c) Berechne den Flächeninhalt deines Bildes in der Einheit „ dm^2“.

(d) Verbinde den Mittelpunkt des kleinsten grauen Quadrates mit dem des gleichgroßen weißen. Setze dann die Verbindungslinen zu den Quadratmittelpunkten in der Reihenfolge fort, in der du die Quadrate nacheinander gezeichnet hast.

Wie würdest du den Verlauf deines Streckenzuges beschreiben? Betrachte dazu das Foto des Blütenkörbchens einer Sonnenblume („Girasole“). Wenn du keine echte Sonnenblume betrachten kannst, dann versuche es im Internet.

(e) Male dein Bild nach eigenen Vorstellungen aus.

Lösung: (a) Klar.

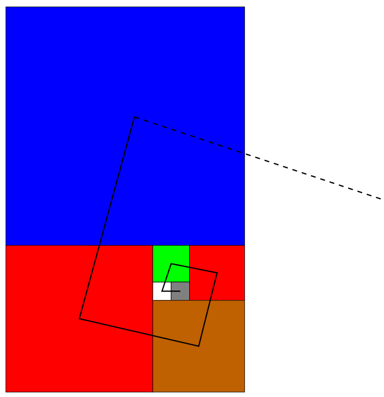
(b)

Quadrat Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
Seitenlänge in cm	1	1	2	3	5	8	13	

Das 8. Quadrat hätte eine Seitenlänge von $8\,\text{cm} + 13\,\text{cm} = 21\,\text{cm}$. Das 9. Quadrat hätte eine Seitenlänge von $13\,\text{cm} + 21\,\text{cm} = 34\,\text{cm}$. Die Seitenlänge des nachfolgenden Quadrates ergibt sich aus Summe der Seitenlängen seiner beiden Vorgänger.

(c) $A = 13\,\text{cm} \cdot 21\,\text{cm} = 273\,\text{cm}^2 = 2,73\,\text{dm}^2$

(d)

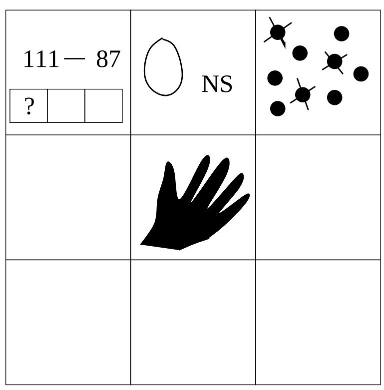


Es ergibt sich ein spiralförmiger Streckenzug. Solche Spiralen sind auch im Blütenkörbchen der Sonnenblumen erkennbar.

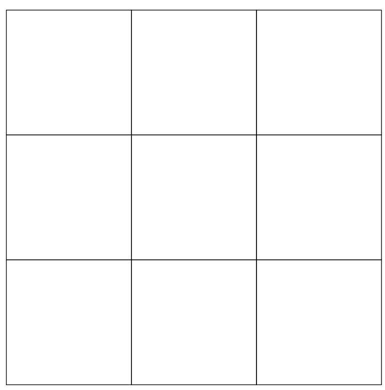
(e) Lass deinen Einfallsreichtum walten!

31.

Figur 1



Figur 2



Ein „Magisches Quadrat“ ist eine quadratisch angeordnete Zahlentafel, die in jeder Zeile, Spalte und Diagonalen die gleiche Summe ergibt.
In der Figur 1 ist ein solches magisches Quadrat verschlüsselt und unvollständig dargestellt.

(a) Trage die Zahlen, die sich in der Figur 1 in Rätseln verbergen, an die entsprechende Stelle in der Figur 2 ein.

(b) Vervollständige die noch leeren Felder in der Figur 2, so dass ein magisches Quadrat entsteht.

Lösung: (a) Das Feld oben links ergibt sich zunächst aus $111 - 87 = 24$.
Die drei Kästchen sollen darstellen, dass aus dem Ergebnis 24 drei gleiche Teile gemacht werden. Also steht das Fragezeichen für $24 : 3 = 8$.

(b)

Figur 2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

32.

❍	▼		
	⌘	❏	

Das Produkt der vier Zahlen an jedem Quadrat beträgt 120. Berechne A.

Lösung: Betrachte zunächst das linke Quadrat: $(3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot B = 120 \quad 60 \cdot B = 120$.
Also gilt: $B = 2$.
Am rechten Quadrat gilt dann: $(2 \cdot 5 \cdot 12) \cdot A = 120 \quad 120 \cdot A = 120$.
Also gilt: $A = 1$.

33.

❍	▼	⌘

Zeichne in jedes der freien Kästchen eines der Symbole „Kreis“, „Dreieck“ oder „Kreuz“ so ein, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes der drei Symbole nur einmal vorkommt. Gib alle Möglichkeiten an.

Lösung:

❍	▼	⌘
▼	⌘	❍
⌘	❍	▼

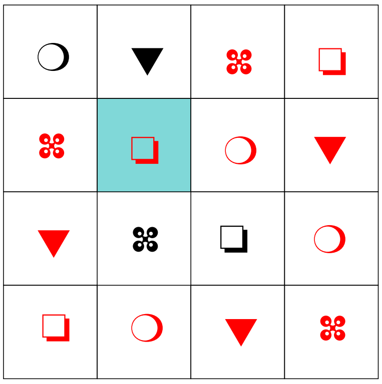
❍	▼	⌘
⌘	❍	▼
▼	⌘	❍

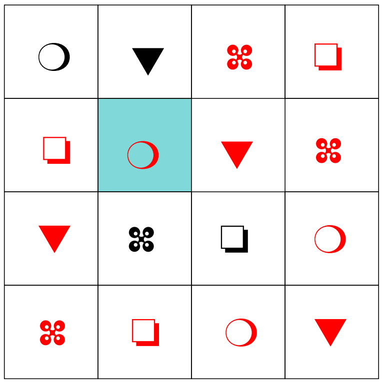
34.

❍	▼		
	⌘	❏	

Zeichne in jedes der freien Kästchen eines der Symbole „Kreis“, „Dreieck“, „Quadrat“ oder „Kreuz“ so ein, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes der vier Symbole nur einmal vorkommt. Gib zwei Möglichkeiten an.
Sind das alle Möglichkeiten?

Lösung:





Die erste und die dritte Zeile liegen eindeutig fest. Dann gibt es nur zwei Möglichkeiten, das getönte Quadrat zu belegen. Das ist alles.

35. Im Jahre 1963 ist Edwin 37 Jahre alt. Wie alt wäre er im Jahre 2026?

Lösung: Edwin wurde im Jahre 1926 geboren. Im Jahre 2026 wäre er dann gerade 100 Jahre alt.

36. Familie Reich hat vier Kinder. Im Jahre 2010 sind Arne 10, Bettina 12, Carsten 14 und Doris 16 Jahre alt.

    (a) Berechne das Gesamtalter der vier Kinder im Jahre 2013.

    (b) In welchem Jahr werden die Geschwister zusammen 100 Jahre alt sein?

    (c) Können die vier Kinder zusammen jemals 163 Jahre alt werden?

Lösung: (a) Im Jahre 2010 sind die vier Geschwister zusammen 52 Jahre alt. Bis zum Jahr 2013 sind für jedes Kind drei Jahre vergangen.
Also: $52 + 3 \cdot 4 = 64$. Die Kinder sind dann zusammen 64 Jahre alt.

(b) $(100 - 52) : 4 = 12 \quad 2010 + 12 = 2022\,.$
Im Jahre 2022 sind die vier Geschwister zusammen 100 Jahre alt.

(c) $(163 - 52) : 4 = 111 : 4 = 27$ Rest 3. Es kommt also keine ganze Jahreszahl heraus; die vier Kinder werden nicht zusammen 163 Jahre alt.

37. In der Klasse 5a ist ein neues Rechenzeichen, nämlich das „$\heartsuit$“ für natürliche Zahlen erfunden worden.
Für dieses Zeichen gilt die Rechenvorschrift

$x \heartsuit y = x^2 + x \cdot y$, wobei x und y Platzhalter für natürliche Zahlen sind.

Beispiel: $x = 8$ und $y = 5$: $8 \heartsuit 5 = 8^2 + 8 \cdot 5 = 64 + 40 = 104$.

(a) Berechne $1 \heartsuit 4$, $1 \heartsuit 5$, $1 \heartsuit 6$, ..., $1 \heartsuit 473589$.

(b) Untersuche, ob für das Rechenzeichen $\heartsuit$ das Kommutativgesetz gilt.

(c) $7 \heartsuit \square = 126$
Welche Zahl gehört in das Kästchen?

(d) Edwin hat etwas entdeckt: „$x \heartsuit x$ ergibt stets eine gerade Zahl!“ Begründe, dass Edwin Recht hat.

(e) Für welche Belegungen von x und y ergibt $x \heartsuit y$ stets eine ungerade Zahl? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) $1 \heartsuit 4 = 1^2 + 1 \cdot 4 = 5$,
$1 \heartsuit 5 = 1^2 + 1 \cdot 5 = 6$,
$1 \heartsuit 6 = 1^2 + 1 \cdot 6 = 7, \dots,\ 1 \heartsuit 473589 = 1^2 + 1 \cdot 473589 = 473590$.

(b) Verwende ein Zahlenbeispiel: $8 \heartsuit 5 = 104$. (Siehe oben.)
Aber $5 \heartsuit 8 = 5^2 + 5 \cdot 8 = 65$. Das Kommutativgesetz gilt in diesem Fall nicht, also gilt es für das Rechenziechen $\heartsuit$ nicht.

(c) $7 \heartsuit \square = 126$ bedeutet:
$7^2 + 7 \cdot \square = 126 \quad \Rightarrow \quad 7 \cdot \square = 77 \quad \Rightarrow \quad \square = 11$.

(d) $x \heartsuit x = x^2 + x^2$.
Rechts wird zweimal die gleiche Zahl addiert, egal, welche Belegung des Platzhalters x du gerade wählst. Wenn du aber zu einer Zahl die gleiche Zahl addierst, kommt stets eine gerade Zahl heraus.

(e)

x ist gerade:	Dann ergibt $x^2 + xy$ eine gerade Zahl.
x ist ungerade und y ist ungerade:	Dann ergibt $x^2 + xy$ eine gerade Zahl.
x ist **ungerade** und y ist **gerade**:	**Dann ist $x^2 + xy$ ungerade.**

38. (a) Gib die größte fünfstellige natürliche Zahl an, deren Quersumme 13 beträgt.

(b) Gib die kleinste fünfstellige natürliche Zahl an, deren Quersumme 13 beträgt.

Lösung: (a) 94 000

(b) 10 039

39. (a) Gib alle natürlichen Zahlen an, deren Ziffernprodukt 12 ergibt.

(b) Wie viele natürliche Zahlen gibt es, deren Ziffernprodukt 7 ergibt? Begründe deine Antwort.

(c) Wie viele natürliche Zahlen gibt es, deren Ziffernprodukt 13 ergibt? Begründe deine Antwort.

(d) Ermittle mit Hilfe einer Tabelle systematisch alle dreistelligen natürlichen Zahlen, deren Ziffernprodukt 0 ergibt. Wie viele sind es insgesamt?

Lösung: (a) Es sind die Zahlen 34, 43, 62 und 26.

(b) Solche Zahlen sind z.B. 17, 117, 1117, 11117, ...; d.h. die Ziffer 1 lässt sich beliebig oft einfügen, ohne dass sich am Wert des Ziffernproduktes etwas ändert. Also gibt es **unendlich** viele solche natürliche Zahlen.

(c) Die Zahl 13 ist eine Primzahl. D.h. die 13 lässt sich nicht in Faktoren (außer 1) zerlegen, die kleiner als 13 sind. Weil jede natürliche Zahl aus lauter einstelligen Ziffern besteht, die 13 aber zweistellig ist, gibt es **keine** solche natürliche Zahl.

(d) Deine Tabelle könnte z.B. so aussehen:

	100	110	200	210	...	800	810	900	910
	101	120	201	220	...	801	820	901	920
	102	130	202	230	...	802	830	902	930
	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	109	190	209	290	...	809	890	909	990
Anzahl:	10	9	10	9	...	10	9	10	9

Die Einhunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.
Die Zweihunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.
...
Die Achthunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.
Die Neunhunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.

Also sind es insgesamt $(10 + 9) \cdot 9 = 171$ solche natürliche Zahlen.

40.

$$2 \cdot 9\,089\,133 = 9\,089\,129 + \boxed{}$$

Welche Zahl gehört in das Kästchen, damit die Gleichung stimmt? Versuche, die Frage zu beantworten, ohne den Produktwert auf der linken Seite zu berechenen.

Lösung:

$$2 \cdot 9\,089\,133 = 9\,089\,129 + \boxed{9\,089\,137}$$

Begründung:
$2 \cdot 9\,089\,133 = 9\,089\,133 + 9\,089\,133$. Der erste Summand auf der rechten Seite der Aufgabe, nämlich $9\,089\,129$, hat einen um 4 geringeren Wert als $9\,089\,133$. Also muss der gesuchte Summand im Kästchen zum Ausgleich dafür einen um 4 höheren Wert als $9\,089\,133$ besitzen. Also muss im Kästchen die Zahl $9\,089\,137$ stehen.

41. (a)
- Schreibe alle natürlichen Zahlen zwischen 8 und 15 auf.
- Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen 8 und 15?
  Schreibe als Antwort einen vollständigen Satz.
- Notiere eine Regel, nach der du die Anzahl der natürlichen Zahlen zwischen 8 und 15 ausrechnen kannst, ohne alle in Frage kommenden Zahlen hinzuschreiben.

(b)
- Wende deine Regel auf die Anzahl der natürlichen Zahlen an, die zwischen 57 und 74 liegen.
- Überprufe deine Lösung durch Abzählen der betreffenden Zahlen.

(c) Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen 103 859 und 801 467? Formuliere als Antwort wieder einen vollständigen Satz.

Lösung: (a)
- $\{9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14\}$.
- Es sind sechs natürliche Zahlen.
- Z.B.: Bilde die Differenz der Randzahlen: $15 - 8 = 7$.
  Subtrahiere 1 vom Wert der Differenz: $7 - 1 = 6$.
  Also liegen sechs Zahlen dazwischen.

(b)
- $74 - 57 - 1 = 16$. Es liegen 16 natürliche Zahlen dazwischen.
- Klar.

(c) $801\,467 - 103\,859 - 1 = 697\,607$. Dazwischen liegen also 697 607 natürliche Zahlen.

42. Egon soll $5\,378 \cdot 2\,165$ ausrechnen. Er bekommt 9 643 375 heraus. Das ist jedoch falsch.

(a) Begründe auf verschiedene Weise, zunächst ohne das richtige Ergebnis auszurechen, weshalb sein Ergebnis fehlerhaft ist.

(b) Berechne das richige Ergebnis.

Lösung: (a) **1. Möglichkeit:**
Multipliziere die letzten Ziffern der zwei Faktoren: $8 \cdot 5 = 40$. Dann muss die letzte Ziffer des Produktwertes eine 0 werden und darf damit keine 5 sein.
2. Möglichkeit:
Eine Überschlagsrechnung zeigt: $5\,000 \cdot 2\,000 = 10\,000\,000$. Der richtige Produktwert muss also größer als 10 000 000 sein. Egon hat aber weniger als 10 000 000 errechnet.

(b) $5\,378 \cdot 2\,165 = 11\,643\,370$.

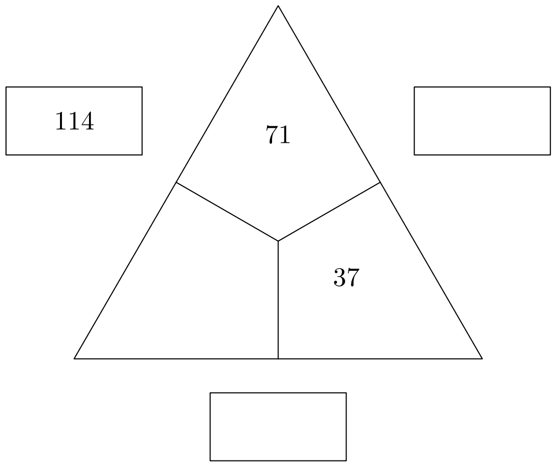
43. (a) Berechne die Summe aus allen zweistelligen Zahlen, wobei jeweils eine Ziffer doppelt so groß wie die andere ist.

(b) Berechne die Teilermenge des Summenwertes.

Lösung: (a) $12 + 21 + 24 + 42 + 36 + 63 + 48 + 84 = 330\,.$

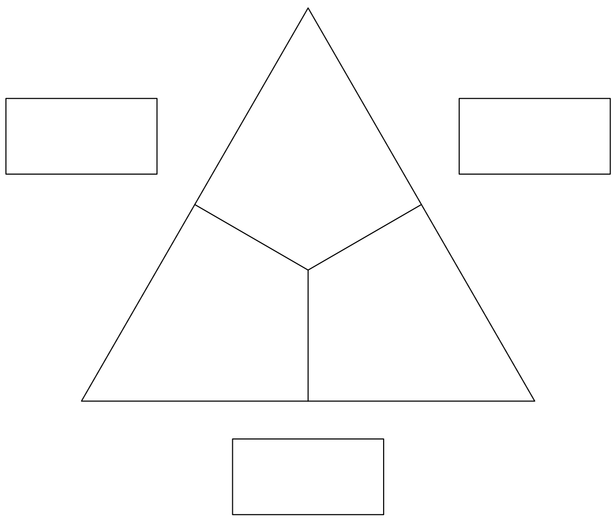
(b) $T_{330} = \{1;\ 3;\ 5;\ 6;\ 10;\ 11;\ 30;\ 33;\ 55;\ 66;\ 110;\ 330\}\,.$

44.



In jedem der Rechtecke soll der Wert der Summe aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck stehen.

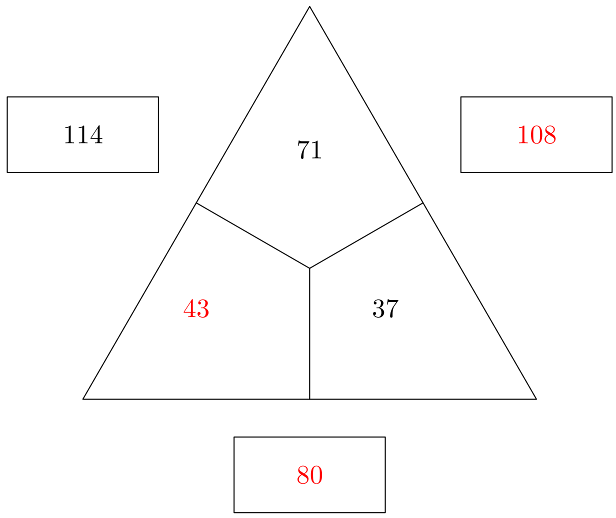
(a)
- Berechne die noch fehlenden Zahlen.
- Berechne den Wert der Summe aus den drei Zahlen im Dreieck.
- Berechne den Wert der Summe aus den drei Zahlen in den Rechtecken.
- Vergleiche die beiden Summenwerte. Notiere, was du feststellst.

(b)
- 

  Fülle die Figur nach obigen Regeln mit Zahlen aus.

- Gilt der Zusammenhang zwischen den beiden Summenwerten innerhalb des Dreiecks und in den drei Rechtecken. jetzt auch noch? Notiere deine Antwort. Vergleiche sie mit der deines Nachbarn.
- Gilt das, was du herausgefunden hast, immer? Begründe deine Antwort.

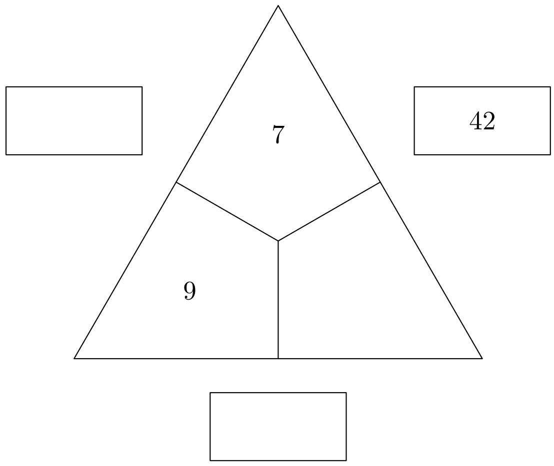
Lösung: (a) •



- Summe im Inneren des Dreiecks $S_1 = 43 + 37 + 71 = 151$.
- Summe der Zahlen in den drei Rechtecken: $S_2 = 80 + 108 + 114 = 302$.
- $S_2 = 2 \cdot S_1$.

(b)
- Es gibt beliebig viele verschiedene Möglichkeiten.
- Er gilt immer noch; auch dein Nachbar müsste das mit seinem Beispiel bestätigen.
- Beispiel: Die Zahl 114 in der Lösung (a) im Rechteck links oben. Dort ist die 71 gemäß der Regeln als Summand enthalten. Aber auch im Rechteck rechts oben ist die Zahl 71 als Summand in der Zahl 108 enthalten. Also taucht die Zahl 71 bei der Berechnung des Summenwertes aus dem Inhalt der drei Rechtecke doppelt auf.
  Dieses doppelte Auftreten gilt jeweils aber gleichermaßen für die Zahlen 37 und 43.
  Also besteht die Summe aus dem Inhalt der drei Rechtecke stets aus dem Doppelten der drei einzelnen Zahlen im Dreieck.

45.



In jedem der Rechtecke soll der Wert des Produktes aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck stehen.

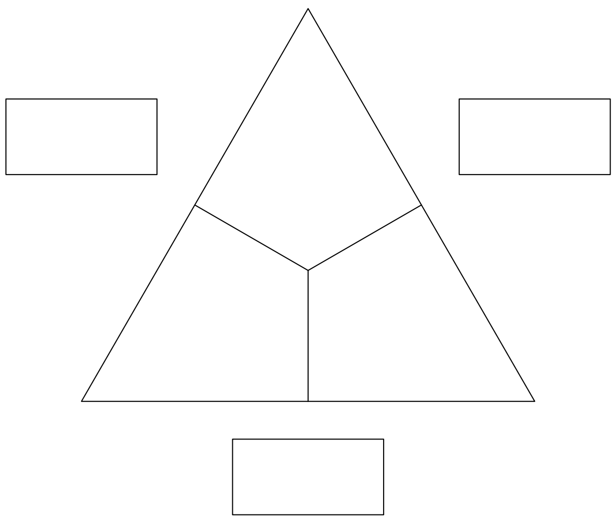
(a) • Berechne die noch fehlenden Zahlen.

• Berechne den Wert des Produktes aus den drei Zahlen im Dreieck.

• Berechne den Wert des Produktes aus den drei Zahlen in den Rechtecken.

• Dividiere den größeren Produktwert durch den kleineren. Notiere, was du feststellst.

(b) •

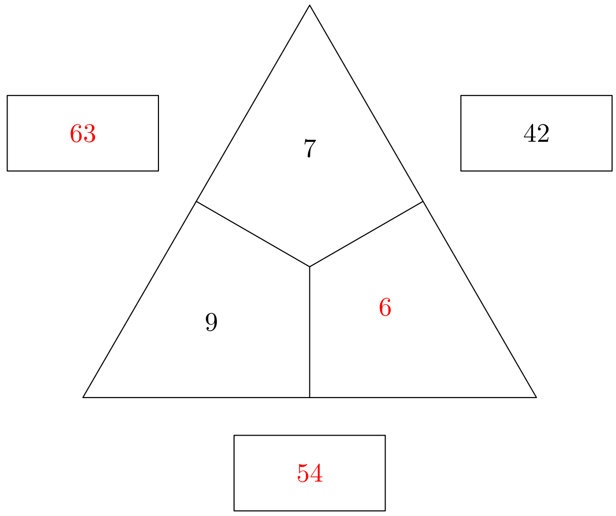


Fülle die Figur nach obigen Regeln mit Zahlen aus.

• Gilt der Zusammenhang zwischen den beiden Produktwerten innerhalb des Dreiecks und in den drei Rechtecken. jetzt auch noch? Notiere deine Antwort. Vergleiche sie mit der deines Nachbarn.

• Gilt das, was du herausgefunden hast, immer? Begründe deine Antwort.

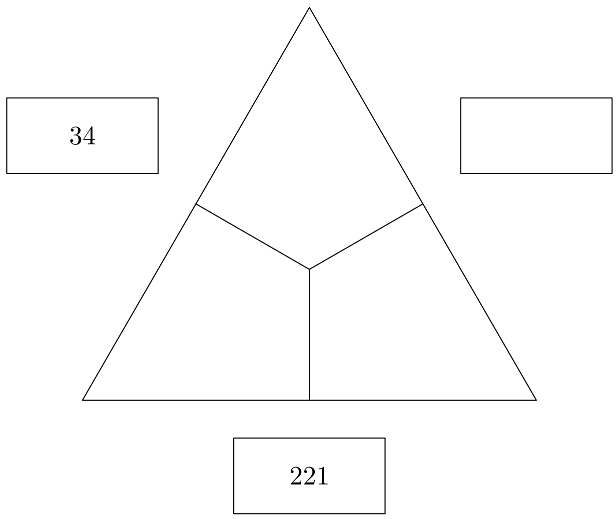
Lösung: (a) •



- Produkt im Inneren des Dreiecks $P_1 = 9 \cdot 6 \cdot 7 = 378$.
- Produkt der Zahlen in den drei Rechtecken: $P_2 = 54 \cdot 42 \cdot 63 = 142\,844$.
- $142\,844 : 378 = 378$; d.h. $P_2 : P_1 = P_1$ oder $P_2 = P_1^2$.

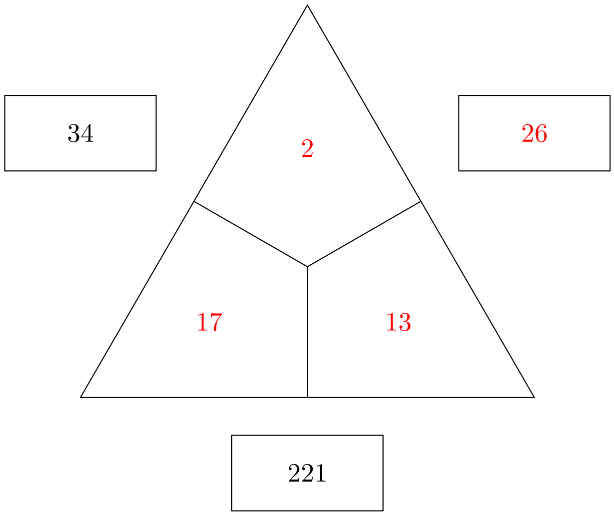
(b)
- Es gibt beliebig viele verschiedene Möglichkeiten.
- Er gilt immer noch; auch dein Nachbar müsste das mit seinem Beispiel bestätigen.
- Jede Zahl im Dreieck dient als Faktor für die Produktwerte in zwei Rechtecken. Also tauch jeder Faktor im Produkt der Zahlen aus den drei Rechtecken doppelt auf.

46.



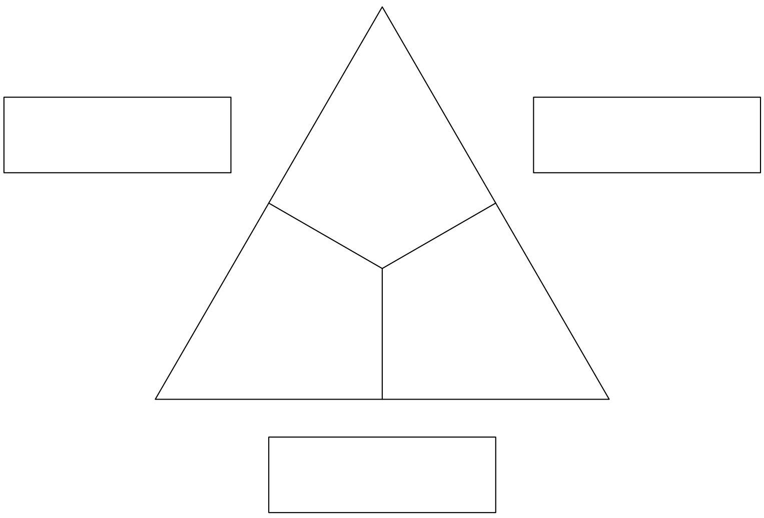
In die drei Felder im Dreieck gehören natürliche Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke der Wert des Produktes aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Zahlen.

Lösung:



Die Zahl 34 lässt sich sich nur auf eine Weise in Primfaktoren zerlegen :
$34 = 2 \cdot 17$. Weil aber 221 ungerade ist, darf nicht der Faktor 2 unten links im Dreieck stehen, sondern die 17. Der Rest ist klar.
Wenn du jedoch statt 34 zunächst 221 ins Auge fasst, ist die Zerlegung schwieriger, aber genauso eindeutig: $221 = 17 \cdot 13$.

47.



In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke das Produkt aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht.
Wir nennen die Plätze, die mit ganzen Zahlen zu belegen sind, „Zellen“. Das Dreieck enthält drei Zellen und die Rechtecke außen stellen drei weitere Zellen dar.
Untersuche, ob die folgenden Behauptungen wahr sind:

(a) Wenn eine Dreieckszelle mit null belegt ist, dann muss in zwei Außenzellen null stehen.

(b) Wenn eine Außenzelle mit null belegt ist, dann muss eine weitere Außenzelle null enthalten.

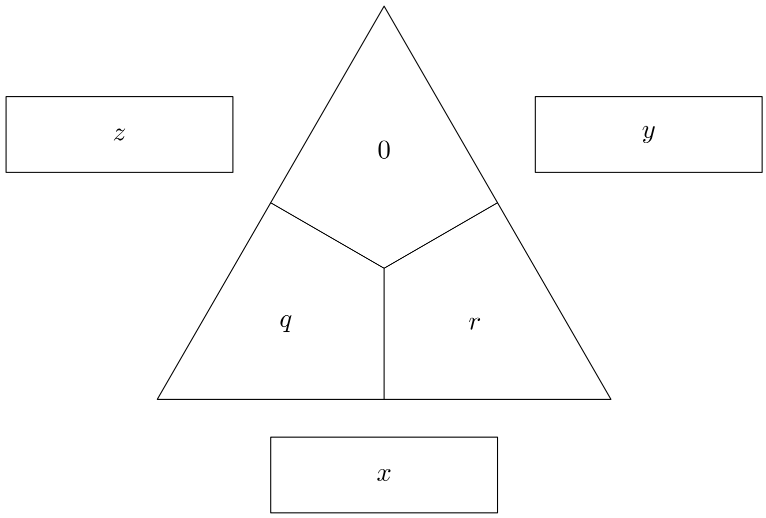
(c) Wenn in allen Außenzellen null steht, dann enthalten auch die inneren Dreieckszellen lauter Nullen.

Lösung: Du hast gelernt:

- **Wenn in einem Produkt ein Faktor null ist, dann ist der Produktwert null.**
- **Wenn der Produktwert null ist, dann muss ein Faktor dieses Produktes den Wert null besitzen.**

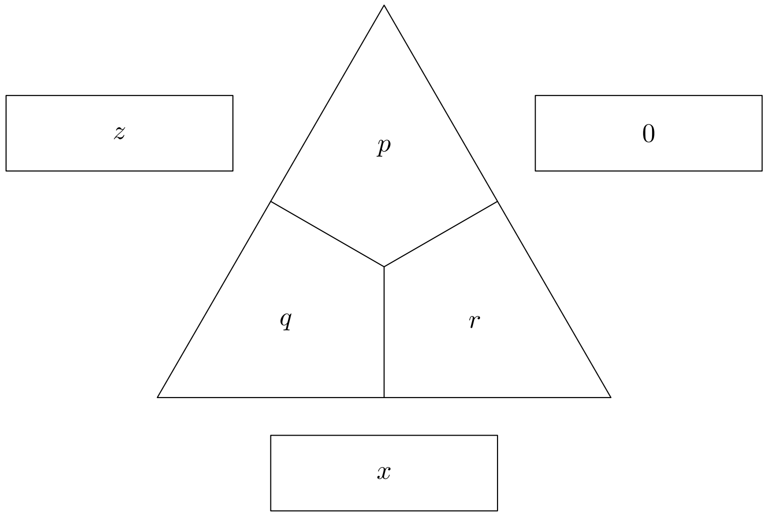
Mit der Anwendung dieser beiden Sätze kannst du die Behauptungen untersuchen:

(a)



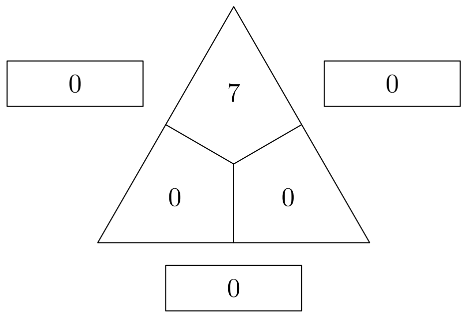
Angenommen, die Null steht oben in der Dreiecksspitze. Dann müssen die beiden Rechtecke oben rechts und links gemäß den eingangs festgelegten Regeln ebenfalls den Faktor null enthalten. Dann gilt aber $z = y = 0$. Die Behauptung ist richtig.

(b)



Angenommen, die Null steht im Rechteck oben rechts. Dann muss $p = 0$ oder auch $r = 0$ gelten. Die Behauptung ist richtig.

(c) Die Behauptung ist falsch. Zur Begründung genügt es, ein Gegenbeispiel zu finden.



48. Untersuche, ob die folgenden Behauptungen wahr sind:

(a) Wenn du in einer Summe aus zwei Summanden den ersten und gleichzeitig den zweiten Summanden verdoppelst, dann verdoppelt sich der Summenwert.

(b) Wenn du in einer Summe aus zwei Summanden den ersten Summanden halbierst und gleichzeitig den zweiten Summanden verdoppelst, dann bleibt der Summenwert unverändert..

Lösung: (a) Beispiel: Aus $13 + 17 = 30$ wird dann $2 \cdot 13 + 2 \cdot 17 = 60 = 2 \cdot 30 = 60 = 2 \cdot (13 + 17)$. Die Behauptung ist wahr.

(b) Beispiel: 1. Summand: 19 EURO. 19 EURO $: 2 = 9$ EURO und 50 Cent.
2. Summand: 17 EURO. 17 EURO $\cdot 2 = 34$ EURO.
19 EURO $+17$ EURO $= 34$ EURO $\neq 9$ EURO und 50 Cent$+34$ EURO.
Die Behauptung ist falsch.

49. (a) Fritz behauptet: „Wenn du in einem Produkt aus zwei Faktoren den ersten Faktor halbierst und gleichzeitig den zweiten Faktor verdoppelst, dann bleibt der Produktwert unverändert.“ Untersuche, ob Fritz Recht hat.

(b) Wie ändert sich der Wert des Produktes aus zwei Faktoren, wenn beide Faktoren gleichzeitig verdreifacht werden?

- Beantworte die Frage anhand eines Beispiels.
- Verwende $\square$ als Platzhalter für den ersten und $\bigcirc$ als Platzhalter für den zweiten Faktor.

(c) „Wenn in einem Produkt aus zwei Faktoren jeder Faktor gleichzeitig verzehnfacht wird, dann … “
Schreibe den vollständigen Satz hin.

Lösung: (a) Beispiel: 1. Faktor: 46 ; 2. Faktor: 50; $46 \cdot 50 = 2300$
$46 : 2 = 23$; $50 \cdot 2 = 100$; $23 \cdot 100 = 2300$. Die Behaupung ist immer richtig. Wenn ein Faktor halbiert wird, dann wird der ganze Produktwert halbiert. Wird aber gleichzeitig der zweite Faktor verdoppelt, dann wird es auch der halbe Produktwert. Also belibt alles beim alten. Fritz hat Recht.

(b)
- Beispiel: 1. Faktor: 11 ; 2. Faktor: 9; $11 \cdot 9 = 99$
$11 \cdot 3 = 33$; $9 \cdot 3 = 27$; $33 \cdot 27 = 891 = 99 \cdot 9$. Der Produktwert hat sich verneunfacht.
- Alter Produktwert: $\square \cdot \bigcirc$.
Verdreifachung des ersten Faktors: $3 \cdot \square$; Verdreifachung des zweiten Faktors: $3 \cdot \bigcirc$.
Neuer Produktwert: $3 \cdot \square \cdot 3 \cdot \bigcirc = 3 \cdot 3 \cdot \square \cdot \bigcirc = 9 \cdot \square \cdot \bigcirc$.

(c) „Wenn in einem Produkt aus zwei Faktoren jeder Faktor gleichzeitig verzehnfacht wird, dann verhundertfacht sich der Produktwert.“

50. (a) Addiere 36 zur doppelten Differenz aus 99 und 62 .

(b)
- Subtrahiere 124 von der Summe aus 198 und 36 .
- Vergleiche das Ergebnis mit dem der Aufgabe (a).
- Hast du eine Erklärung dafür?

Lösung: (a) $36 + 2 \cdot (99 - 62) = 36 + 2 \cdot 37 = 36 + 74 = 110$.

(b)
- $(198 + 36) - 124 = 234 - 124 = 110$.
- Du erhältst das gleiche Ergebnis wie in der Aufgabe (a).
- Die Klammern in der Lösung der Aufgabe (b) sind für das Rechenergebnis ohne Bedeutung.
Weil Summanden vertauschbar sind, ohne dass sich der Summenwert ändert, kannst du das Ergebnis auch so rechnen:
$36 + 198 - 124$.
Nun sind 198 das Doppelte von 99 und 124 das Doppelte von 62 . Das bedeutet,

dass auch hier der doppelte Inhalt der Klammern von der Aufgabe (a) ausgerechnet wird. Die Zahl 36 ist in beiden Aufgabe gleich. Also muss bei der Aufgabe (a) das gleiche herauskommen wie bei der Aufgabe (b).

51. Helmut rechnet eine Aufgabe:

$$(100 - 2 \cdot 10) \cdot (74 : 2 - 37) = 80 \cdot 0$$

(a) Überprüfe, ob seine Rechnung bis dahin stimmt.

(b) Helmut rechnet weiter: $80 \cdot 0 = 80$.
Beate hat zugeschaut. Sie meint: „Das kann aber nicht stimmen.“ Erkläre anhand eines Beispiels oder einer kleinen Geschichte, dass Beate Recht hat.

(c) Ursula rechnet anders, nämlich $80 \cdot 0 = 0$. Zur Probe rechnet sie die Umkehraufgabe: $0 : 0 = 80$. Notiere deine Überlegungen zu $0 : 0 = 80$.

Lösung: (a) $(100 - 2 \cdot 10) \cdot (74 : 2 - 37) = (100 - 20) \cdot (37 - 37) = 80 \cdot 0$. Bis dahin stimmt alles.

(b) Im Kino sitzen 80 Zuschauer. Während der Vorführung geht der Filmprojektor kaputt. Die Zuschauer können den Film nicht zu Ende sehen. Als Entschädigung bekommt jeder Besucher 0 EURO. Nach Helmuts Rechnung würden dann insgesamt 80 EURO ausgezahlt.

(c) Weshalb soll bei $0 : 0$ „ausgerechnet“ 80 herauskommen?
Bisher galt die Regel: Wenn in einem Quotienten der Dividend und der Divisor den gleichen Wert besitzen, dann hat der Quotient den Wert 1. Aber, ob das bei $0 : 0$ auch noch stimmt?

52. Fülle das Malkreuz vollständig aus:

$\cdot$		
	26	39
		51

Lösung:

$\cdot$	2	3
13	26	39
17	34	51

53. Die Schülerinnen und Schüler der 5a haben die folgenden Aufgaben bekommen:
$7 \cdot 101 =$ $\quad 53 \cdot 101 =$ $\quad 964 \cdot 101 =$ $\quad 1001 \cdot 101 =$ $\quad .$
Beim Berechnen der Ergebnisse meint Hans: „Das mit dem zweiten Faktor 101 ist doch eigentlich ganz einfach: Hänge jeweils an den ersten Faktor zwei Nullen an und addiere zu dieser neuen Zahl den ersten Faktor. Dann hast du den Wert des betreffenden Produktes.“

    (a) Berechne selbst die vier Produktwerte. Bestätige, dass Hans mit seiner Regel Recht hat.

    (b) Christian behauptet jedoch: „Ja aber wenn der erste Faktor größer als eine Million ist, dann funktioniert die Regel nicht mehr.“
    Hat Christian Recht? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) $7 \cdot 101 = 707 = 700 + 7$; seine Regel stimmt.
$53 \cdot 101 = 5353 = 5300 + 53$; seine Regel stimmt.
$964 \cdot 101 = 97364 = 96400 + 964$; seine Regel stimmt.
$1001 \cdot 101 = 101\,101 = 100\,100 + 1001$; seine Regel stimmt.

(b) Christian sollte die Regel von Hans zunächst an einem Beispiel testen:
$1\,234\,567 \cdot 101 = 124\,691\,267 = 123\,456\,700 + 1\,234\,567$; die Regel von Hans stimmt auch für dieses Beispiel.
Allerdings ist dieses eine Beispiel nur ein Hinweis, aber kein Beweis dafür, dass die Regel auch für so große oder noch größere oder sogar **alle natürlichen Zahlen** gilt.
Wir untersuchen die Regel genauer.
„Hänge jeweils ... zwei Nullen an ... “ bedeutet: Multipliziere (den ersten Faktor) mit 100. „Addiere zu dieser neuen Zahl den ersten Faktor.“ bedeutet: Dieser erste Faktor kommt noch einmal hinzu. Also hast du den ersten Faktor insgesamt mit 101 multipliziert. Das bedeutet: Die Regel von Hans bei der Multiplikation mit 101 gilt für alle natürlichen Zahlen.

54. Die Summe aus drei natürlichen Zahlen soll 10 ergeben. Notiere alle Möglichkeiten.

Lösung:

$1+1+8 = 10$	$2+2+6 = 10$	$3+3+4 = 10$
$1+2+7 = 10$	$2+3+5 = 10$	
$1+3+6 = 10$	$2+4+4 = 10$	
$1+4+5 = 10$		

55. Uwe rechnet:
$5183 + 4625 + 1078 + 500 = 11\,386$. Die Lehrerin bestätigt sein Ergebnis.
Doris soll die folgende Aufgabe rechnen:
$5183 - 500 + 1078 + 4625 = .$
Sie betrachtet das Ergebnis von Uwe und meint dann: „Da brauche ich doch nur ... ."

(a) Was hat Doris gemeint? Notiere ihre vollständige Antwort und begründe sie.

(b) Schreibe das Ergebnis ihrer Rechenaufgabe hin.

Lösung: (a) „Da brauche ich doch nur von Uwes Ergebnis 1000 zu subtrahieren. Dann habe ich mein Ergebnis."
Begründung: Bei sonst identischen Summanden steht in Uwes Aufgabe $+500$ und in der Aufgabe von Doris -500. Also unterscheiden sich die beiden Ergebnisse um den Wert 1000.

(b) Das Ergebnis von Doris ist dann $10\,386$.

56. Welche Zahl gehört in das Kästchen?
$6 \cdot 7 \cdot 15 = 10 \cdot \square \cdot 21$

Lösung: $6 \cdot 7 \cdot 15 = 10 \cdot 3 \cdot 21$.

57. Ein halkugelförmiges Glasgefäß mit einer Wandstärke von 5 mm hat ein Fassungsvermögen von 10 l.
Berechne den Außendruchmesser des Gefäßes in mm.

Lösung: (a) Damit der Differenzwert minimal wird, muss der Minuend möglichst klein und der Subtrahend möglichst groß werden:
$\square = 0$, $\heartsuit = 1$ und $\bigcirc = 9$.

(b) $8015 - 794 = 7221$.

58. Berechne die fehlenden Ziffern $\square$ und $\bigcirc$ in der folgenden Multiplikationsaufgabe:

$$\square 3 \cdot 19 \bigcirc = 4\,531$$

Lösung: Bei **jeder** Produktberechnung aus beliebig vielen Faktoren gilt:
Der Produktwert der **Endziffern** aus allen Faktoren hat selbst eine Endziffer. Diese stimmt mit der Endziffer des Produktwertes aus allen Faktoren überein.
Das bedeutet hier: $3 \cdot \bigcirc = \ldots 1$.
Der Produktwert aus 3 und der Ziffer $\bigcirc$ endet also auf 1. Dann muss $\bigcirc = 7$ gelten, denn im Dreiereinmaleins gibt es nur einen Produktwert, der auf 1 endet, nämlich $3 \cdot 7 = 21$.
Somit ergibt sich: $\square 3 \cdot 197 = 4\,531$ Umkehraufgabe: $4\,531 : 197 = 23$.
Also ist $\bigcirc = 2$, und $23 \cdot 197 = 4\,531$.

59. Ein Personenzug fährt von Cantorhausen über Abelstadt nach Besselheim.
In Cantorhausen befinden sich 306 Fahrgäste im Zug.
In Abelstadt steigt die Hälfte davon aus und 79 Fahrgäste steigen ein.
Die Anzahl der in Besselheim zugestiegenen Fahrgäste ist genauso groß wie die Hälfte der Fahrgäste, die sich bei der Ankunft im Bahnhof im Zug befunden haben. Außerdem steigen in Besselheim 120 Fahrgäste aus.
Wie viele Fahrgäste befinden sich im Zug, wenn dieser den Bahnhof in Besselheim verlässt?

Lösung: Abelstadt: Es steigen $306 : 2 = 153$ Fahrgäste aus und 79 Fahrgäste steigen ein. Dann sind $153 + 79 = 232$ Fahrgäste im Zug.
Besselheim: Es steigen $232 : 2 = 116$ Fahrgäste ein und 120 Personen aus. Dann sind 4 Fahrgäste weniger im Zug als vor der Ankunft in Besselheim.
Nach der Abfahrt in Besselheim sind dann also noch $232 - 4 = 228$ Fahrgäste im Zug.

60. a und b sind zwei natürliche Zahlen. Finde alle natürlichen Zahlen a und b, für die $a \cdot b + 3 = 42$ gilt.

Lösung: Aus $a \cdot b + 3 = 42$ folgt $a \cdot b = 39$. Es gilt $\mathbb{T}_{39} = \{1; ; 3; 13; 39\}$. Damit sind folgende Fälle möglich:

$$\begin{array}{rclcl} 1 \cdot 39 & = & 39 & \Rightarrow & a = 1 \text{ und } b = 39 \quad \text{oder } a = 39 \text{ und } b = 1 \\ 3 \cdot 13 & = & 39 & \Rightarrow & a = 3 \text{ und } b = 13 \quad \text{oder } a = 13 \text{ und } b = 3 \end{array}$$

61. Ein Produkt aus drei Faktoren hat den Wert 70. Jeder Faktor ist größer als eins.
Welchen Wert können die drei Faktoren haben? Gib alle Möglichkeiten an.

Lösung: Die Faktoren sollen a, b und c heißen. Es gilt: $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$.
Weil du Faktoren vertauschen kannst, ohne dass sich der betreffende Produktwert ändert, ergeben sich dann die folgenden Möglichkeiten:

a	b	c
2	5	7
2	7	5
5	2	7
5	7	2
7	2	5
7	5	2

Insgesamt gibt es also sechs Möglichkeiten.

62. Berechne die Platzhalter:

    (a) $11 \cdot 5 \cdot \square \cdot 3 \cdot 7 = 15\,015\,.$

    (b) $\{[(3\,000 : \bigcirc) : 10] : 25\} = 1\,.$

Lösung: Zur Lösung sind die jeweiligen Umkehraufgaben hilfreich:

(a)

$$\begin{aligned} \underbrace{11 \cdot 5}_{=55} \cdot \square \cdot \underbrace{3 \cdot 7}_{=21} &= 15\,015 \\ 55 \cdot \square \cdot 21 &= 15\,015 \\ 55 \cdot \square &= 15\,015 : 21 = 715 \\ \square &= 715 : 55 = 13 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 3\,000 : \bigcirc &= 1 \cdot 10 \cdot 25 = 250 \\ 3\,000 &= 250 \cdot \bigcirc \\ 3\,000 : 250 &= \bigcirc \\ 12 &= \bigcirc \end{aligned}$$

63.

$$\triangle \; \bigcirc \; \boxed{5} \; : \; 13 = ?$$

Der dreistellige Dividend soll aus lauter verschiedenen Ziffern bestehen.
Berechne alle möglichen Quotientenwerte.

Lösung: In der Umkehraufgabe muss $13 \cdot ?$ eine dreiziffrige Zahl ergeben, die einerseits aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und andererseits auf die Ziffer 5 endet. Notwendig dazu ist, dass anstelle des Fragezeichens eine natürliche Zahl steht, die auf die Ziffer 5 endet.
Das ergibt folgende Möglichkeiten:

Wert des Quotienten	Δ	$\bigcirc$	$\square$	
$13 \cdot 5 = 65$		6	5	keine dreiziffrige Zahl
$13 \cdot 15 = 195$	1	9	5	
$13 \cdot 25 = 325$	3	2	5	
$13 \cdot 35 = 455$	4	5	5	geht nicht: gleiche Ziffern
$13 \cdot 45 = 455$	5	8	5	geht nicht: gleiche Ziffern
$13 \cdot 55 = 715$	7	1	5	
$13 \cdot 65 = 845$	8	4	5	
$13 \cdot 75 = 975$	9	7	5	

Es sind also nur die Quotientenwerte $\{195; 325; 715; 845; 975\}$ möglich.

64. Egon ist 13 Jahre alt und er wäre 6 Jahre jünger als Emil, wenn dieser 1 Jahr älter wäre.
Wie alt ist Emil?

Lösung: Wenn Egon ohne weitere Vorbedingungen 6 Jahre jünger wäre als Emil, dann wäre Emil 19 Jahre alt.
Egon ist aber nur unter der Bedingung 6 Jahre jünger, dass Emil ein Jahr älter ist. Mit 19 Jahren ist er ein Jahr zu alt. Also muss Emil jetzt 18 Jahre alt sein.

65. Wenn du 31 durch 9 dividierst, bleibt der Rest 4.
Eine möglich Schreibweise dafür ist $31 = 3 \cdot 9 + 4$.

(a) Ermittle alle zweistelligen Zahlen, die bei der Division durch 13 den Rest 12 lassen.

(b) Ermittle die kleinste dreistellige Zahl, die bei der Division durch 13 den Rest 12 lässt.

(c) Ermittle die größte dreistellige Zahl, die bei der Division durch 13 den Rest 12 lässt.

Lösung: (a)

$1 \cdot 13 = 13$	$13 + 12 = 25$	gesuchte Zahl: **25**
$2 \cdot 13 = 26$	$26 + 12 = 38$	gesuchte Zahl: **38**
$3 \cdot 13 = 39$	$39 + 12 = 51$	gesuchte Zahl: **51**
$4 \cdot 13 = 52$	$52 + 12 = 64$	gesuchte Zahl: **64**
$5 \cdot 13 = 65$	$65 + 12 = 77$	gesuchte Zahl: **77**
$6 \cdot 13 = 78$	$78 + 12 = 90$	gesuchte Zahl: **90**
$7 \cdot 13 = 91$	$91 + 12 = 103$	Die Zahl 103 ist aber schon dreistellig.

(b) Die kleinste dreistellige Zahl ist 100. Aber hier gilt: $100 : 13 = 7\,R\,9$.
Die letze Zeile der Tabelle in der Lösung der Aufgabe (a) liefert damit die gesuchte kleinste Zahl **103** .

(c) 999 ist die größte dreistellige Zahl, aber es gilt: $999 : 13 = 76\,R\,11$.
Dann ist $998 : 13 = 76\,R\,10$. Du musst in deiner Suche also so weit zurück, bis der Rest auf 12 zugenommen hat.
$998 - 10 = 988$.Dann gilt $988 : 13 = 76$. Also ist $987 : 13 = 75\,R\,12$.
Damit heißt die gesuchte Zahl **987**.

66. Die Klasse 5b beschäftigt sich gerade mit natürlichen Zahlen, deren Quersumme 100 beträgt.

(a) Begründe: Solche Zahlen müssen mehr als 11 Stellen aufweisen.

(b)
- Ermittle die kleinste natürliche Zahl mit der Quersumme 100.
- Schreibe ihren Namen im Wortlaut hin.

(c) Untersuche, ob es eine größte natürliche Zahl mit der Quersumme 100 gibt.

Lösung: (a) Eine 11-stellige natürliche Zahl kann höchstens die Quersumme $11 \cdot 9 = 99$ erreichen. Für die Quersumme 100 muss also mindestens eine Stelle dazukommen.

(b)
- Die gesuchte Zahl muss mit einer „1“ beginnen. Dann muus die Quersumme 100 mit möglichst wenig weiteren Stellen erreicht werden. Also dürfen nur Neuner folgen, denn jede folgende Ziffer, die kleiner als 9 ist, hat eine Erhöhung der Stellenzahl und damit eine Vergrößerung des Zahlenwertes zur Folge.
  Mit der Lösung von (a) erhältst du die gesuchte Zahl $199\,999\,999\,999$.
- „Einhundertneunundneunzig Milliarden neunhundertneunundneunzig Millionen neunhundertneunundneunzig Tausend neunhundertneunundneunzig“.

(c) Du kannst eine natürliche Zahl zwischen der ersten und der letzten Ziffer mit beliebig vielen Nullen ausstatten, ohne dass sich der Wert der Quersumme 100 ändert. Mit immer mehr Stellen, die aussschließlich aus Nullen bestehen, kannst du den Zahlenwert immer weiter steigern, ohne dass du an eine Grenze stößt. Also gibt es keine größte natürliche Zahl mit der Quersumme 100.

67. Die Zahl 2013 ist durch 61 teilbar.

(a) Finde die restlichen Primfaktoren, die in 2013 enthalten sind.

(b) Wie viele verschiedene Primfaktoren enthält die Potenz 2013^{2013}? Begründe deine Antwort.

(c) Wie viele Primfaktoren enthält die Potenz 2013^{2013}? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) $2013 : 61 = 33$ und $33 = 11 \cdot 3$. Also gilt: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$.

(b) $2013^{2013} = (3 \cdot 11 \cdot 61)^{2013} = 3^{2013} \cdot 11^{2013} \cdot 61^{2013}$.
Durch das Potenzieren einer Primzahl kommen keine **neuen** Primzahlen hinzu.
Also enthält der Rechenausdruck 2013^{2013} auch wieder nur drei verschiedene Primfaktoren.

(c) 3^{2013} enthält 2013-mal den Primfaktor 3.
11^{2013} enthält 2013-mal den Primfaktor 11.
61^{2013} enthält 2013-mal den Primfaktor 61.
Also sind in der Potenz 2013^{2013} genau $3 \cdot 2013 = 6039$ Primfaktoren enthalten.

68. Eine Rechensoftware kann in Bruchteilen von Sekunden Summen berechnen, z.B.: Die Berechnung der Summe aller dreistelligen geraden Zahlen $S_g = 100 + 102 + \ldots ?$ und die Berechnung der Summe aller dreistelligen ungeraden Zahlen $S_u = ?$ sind für sie kein Problem.

    (a) Welche der beiden Summen hat den größeren Wert? Begründe deine Antwort.

    (b) Die Schüler/-innen der 5a bekommen die Aufgabe, den Wert der Differenz der beiden Summenwerte zu berechnen.
    Pauline seufzt: „Das ist ja Wahnsinn! Da sitzen wir ja ewig dran!“
    Doch Edwin meint: „Vielleicht könnten wir die geforderte Differenz auch ohne die Summenwerte berechnen. Pass auf: Ich vergleiche 100 mit 101 und dann 102 mit …“ Pauline unterbricht ihn: „Danke, ich weiß jetzt, wie es geht!“
    Berechne selbst den Wert der Differenz.

Lösung: (a) Jeder Summand in S_g hat einen Partner in S_u, der um 1 größer ist. Weil beide Summen jeweils 999 Summanden enthalten, muss $S_u > S_g$ gelten.

(b) $S_u - S_g = 999 \cdot 1 = 999$.

3 Größen aus dem Alltag

1. Hans arbeitet während der Ferien in einem Supermarkt. Dort soll er die vier Böden eines Regals mit Konservendosen auffüllen, weil dort nur noch 3 Dosen vorhanden sind. Man hat ihm 170 Dosen hingestellt, die er einräumt. Doch es fehlen immer noch 7 Dosen.

   Wie viele Dosen passen auf einen leeren Regalboden?

Lösung: $(170 + 3 + 7) : 4 = 45$

2. Herr Waller hat Karpfen aus seinem Weiher gefischt. Er will sie gleichmäßig auf drei Wasserbottiche verteilen; dabei stellt er fest, dass ein Fisch übrig bleibt.
   Weil die Fische zu dicht untergebracht sind, will er sie gleichmäßig auf vier Wasserbehälter verteilen., aber es bleibt wieder ein Fisch übrig. Auch mit 5 Bottichen passiert dasselbe.
   Wie viele Fische hat Herr Waller seinem Weiher entnommen?

Lösung: Es sei x die Anzahl der entnommenen Fische. Dann gilt:
$3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ und damit $x \in \{61; 121; 181; 241; \dots\}$

3. Ursula misst ein DIN-A4-Blatt aus: Breite 209 mm und Länge 296 mm.
   Berechne den Flächeninhalt in cm^2.

Lösung: $619\,\text{cm}^2$

4. Daniel hat in seinem Geldbeutel 9 Ein-Euro Stücke, 9 Zehn-Cent Stücke und 9 Ein-Cent Stücke. Wie viel Euro hat er im Geldbeutel?

Lösung: Daniel hat 10 Euro in seinem Geldbeutel.

5. Beate hat 2 € mehr als Klaus, der wiederum 3 € weniger als Helmut besitzt. Zusammen haben sie 20 €.
   Wie viele € hat jede Person?

Lösung: Betrag in €:

Klaus	Beate	Helmut	Summe = 20?
1	3	4	nein
2	4	5	nein
3	5	6	nein
4	6	7	nein
5	7	8	ja

Danach geht nichts mehr.

6. Der Zoohändler Grimbart kauft im Großhandel Goldhamster zu je 3 € und Meerschweinchen zu je 5 €. Er muss dafür genau 100 € bezahlen.
Wie viele Tiere von jeder Art hat er gekauft?

Lösung: Es gibt genau fünf Lösungen:

Goldhamster	25	20	15	10	5
Meerschweinchen	5	8	11	14	17

7. Ein Blauwal wiegt etwa 110 t, ein Hirsch dagegen ca. 220 kg.
Wie viele Hirsche sind dann so schwer wie 3 Blauwale?

Lösung: 1500

8. Die Henne „Berta“ legt jeden 2. Tag ein Ei, die Henne „Frieda“ jeden 3. Tag und ihre Kollegin „Paula“ legt jeden 5. Tag eines.
Bauer Mecke fand am 10. August, einem Montag, in jedem Nest ein frisch gelegtes Ei.
   (a) Wie viele Eier hatten die drei Hühner seit dem vorigen Dienstag gelegt?
   (b) An welchem Tag waren zuletzt 3 Eier gleichzeitig im Nest gelegen?
   Welcher Wochentag war das?

Lösung:

(a)

	Mo.	So.	Sa.	Fr.	Do.	Mi.	Di.	Gesamt
Berta	1	0	1	0	1	0	1	4
Frieda	1	0	0	1	0	0	1	3
Paula	1	0	0	0	0	1	0	2
Summe	3	0	1	1	1	1	2	**9**

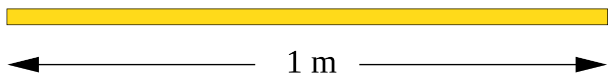
Die Hühner hatten seit dem Dienstag 9 Eier gelegt.

(b) Alle $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ Tage sind die Nester gleichzeitig belegt. Vor dem 10. August war das zuletzt am 11. Juli der Fall. Weil jede Woche 7 Tage dauert und $30 = 4 \cdot 7 + 2$ gilt, war es ein Samstag gewesen.

9. Sabrinas Uhr geht in jeder Stunde 30 Sekunden nach. Berechne wie viele Minuten die Uhr an einem Tag nachgeht.

Lösung: Die Uhr geht an einem Tag 12 Minuten nach.

10.



Sarah möchte aus einer 1 m lange Holzleiste, die sie in Stücke sägt, einen möglichst großen Würfel basteln. Sie misst die erforderliche Kantenlänge in ganzen Zentimetern ab.

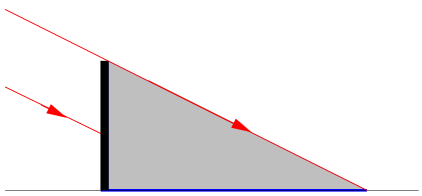
(a) Wie lang muss sie dann eine Seitenkante des Würfels wählen? Welchen Abfall hat sie?

(b) Welches Volumen hat ihr Würfel dann ungefähr?

Lösung: (a) Jeder Würfel hat 12 Kanten. $100\,\text{cm} : 12 = 8\,\text{cm}$ Rest $4\,\text{cm}$.
Eine Kante ist 8 cm lang. Es bleiben etwa (warum „etwa“?) 4 cm Rest.

(b) $V \approx 8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} \cdot = 512\,\text{cm}^3$.

11.

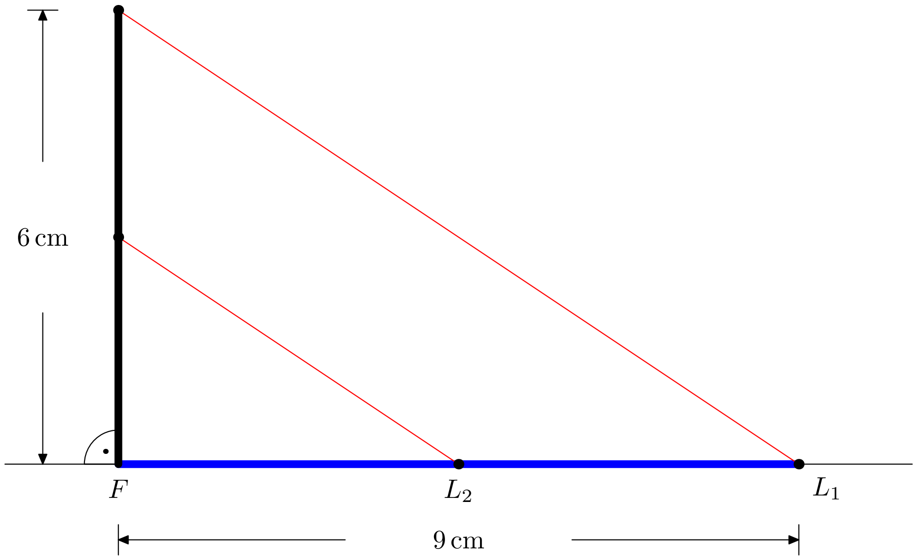


Der Schatten eines $1,20\,\text{m}$ hohen Stabes ist $1,80\,\text{m}$ lang.

(a) Zeichne wie in der Skizze oben den Stab und seinen Schatten im Maßstab $1 : 20$.

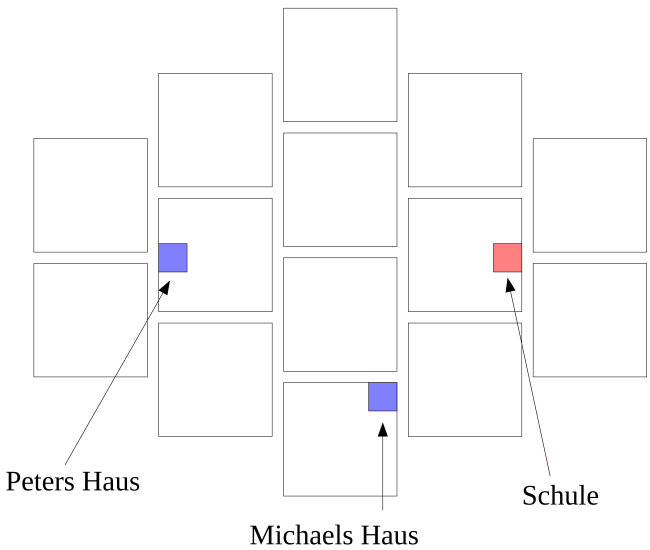
(b) Ermittle mit Hilfe deiner Zeichnung, wie lang der Schatten eines 60 cm hohen Stabes wäre.
Erkläre ohne deine Zeichnung, weshalb die Schattenlänge gerade so groß sein muss.

Lösung: (a) Zunächst rechnest du am besten die in m angegeben Längen in cm um:
$1,20\,\text{m} = 120\,\text{cm}$ und $1,80\,\text{m} = 180\,\text{cm}$.
Der Maßstab $1 : 20$ bedeutet eine Verkleinerung um das 20-Fache. Also musst du die Längen durch 20 dividieren.
Den Stab zeichnest du dann $120\,\text{cm} : 20$, also 6 cm hoch. Den Schatten zeichnest du dann $180\,\text{cm} : 20$, also 9 cm lang.



(b) Die zeichnerische Lösung ist schon in (a) dargestellt. Der Schatten ist in der Zeichnung $4,5\,\text{cm}$ lang. Diese Länge musst du dann noch mit 20 multiplizieren: $4,5\,\text{cm} \cdot 20 = 90\,\text{cm}$. So lang ist der Schatten in Wirklichkeit.
Wenn der Stab also halb so lang ist, dann wirft er auch nur einen halb so langen Schatten.

12.



Du siehst einen Plan von der Gegend, in der Peter wohnt. Jedes eingezäunte Grundstück ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $100\,\text{m}$. Dazwischen gibt es Straßen.

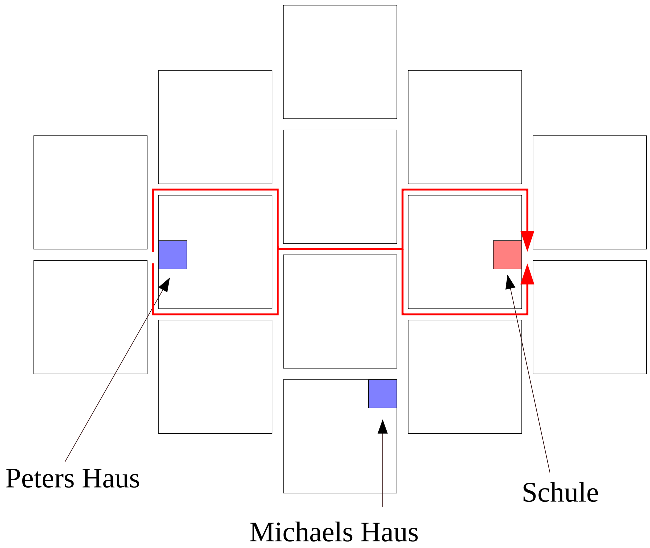
(a) Es gibt mehrere Möglichkeiten, wie Peter auf dem kürzesten Weg zur Schule gehen kann. Zeichne farbig zwei Möglichkeiten ein.
Welche Streckenlänge muss Peter also mindestens zur Schule zurücklegen?

(b) Muss Peter einen weiteren Weg zur Schule in Kauf nehmen, wenn er mit Michael gemeinsam zur Schule geht? begründe.

(c) Eva, Manfred und Ludwig haben einen genau so langen Schulweg wie Peter. Alle drei Kinder wohnen auf verschiedenen Grundstücken. Zeichne die Wohnhäuser der drei Kinder ein.

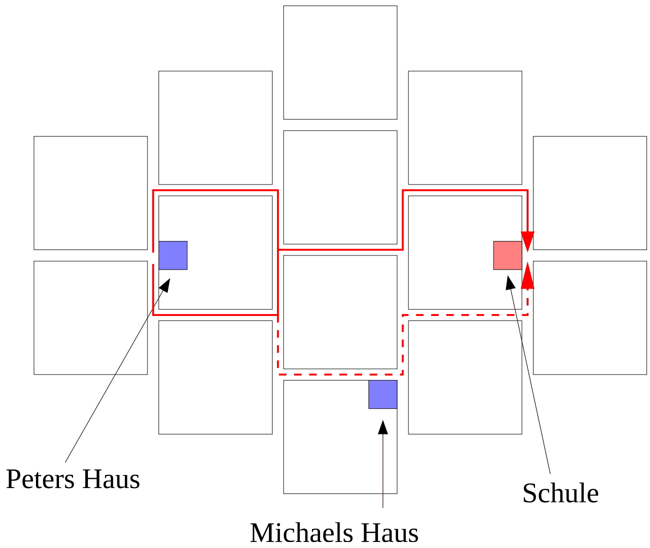
(d) Um wie viele Meter ist der Weg von Michael zur Schule kürzer als de Schulweg von Peter?

Lösung: (a) Z.B.:



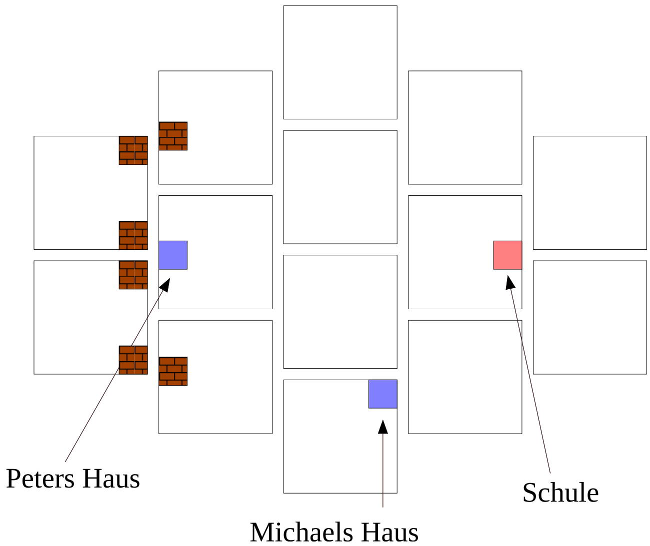
Die Streckenlänge ergibt sich aus:
$50\,\text{m} + 100\,\text{m} + 50\,\text{m} + 100\,\text{m} + 50\,\text{m} + 100\,\text{m} + 50\,\text{m} = 500\,\text{m}$.
Peter muss also mindestens einen halben Kilometer zur Schule zurücklegen.

(b)



Vergleiche die gestrichelte Linie mit den vorherigen Streckenabschnitten. Dann siehst du, dass auch jetzt Peters Weg die gleiche Länge besitzt.

(c)



Das Zuhause von Manfred, Eva und Ludwig könnte in den sechs Häusern sein, die Peters Wohnung am nächsten liegen. Es gibt also mehr als drei Möglichkeiten.

(d) Michael muss nur 300 m zur Schule zurücklegen.

13. In der Beschreibung eines Kaffee-Automaten heißt es: „Für 10 bis 12 Tassen; Fassungsvermögen $1,2$ Liter“.
Wie viele cl Kaffe enthält eine Tasse mindestens? Wie viele cl Kaffe enthält eine Tasse höchstens?

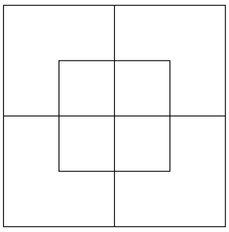
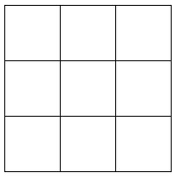
Lösung: $1,2\,\text{Liter} = 1200\,\text{cm}^3$
$1200\,\text{cm}^3 : 10 = 120\,\text{cm}^3 = 1,2\,\text{cl}$, so viel Kaffe enthält eine Tasse höchstens.
$1200\,\text{cm}^3 : 12 = 100\,\text{cm}^3 = 1,0\,\text{cl}$, so viel Kaffe enthält eine Tasse mindestens.

14. Frau Glück, Herr Stern und Frau Klee haben an Weihnachten für bedürftige Kinder zusammen 160 € gespendet.
Frau Glück und Frau Klee haben zusammen 85 € gespendet. Herr Stern und Frau Klee haben zusammen 110 € gespendet. Wie viele € hat jede Person gespendet?

Lösung: Herr Stern hat $160\,€ - 85\,€ = 80\,€$ gespendet.
Frau Glück hat $160\,€ - 110\,€ = 50\,€$ gespendet.
Frau Stern hat $160\,€ - 110\,€ = 30\,€$ gespendet.
Probe: $80\,€ + 50\,€ + 30\,€ = 160\,€$

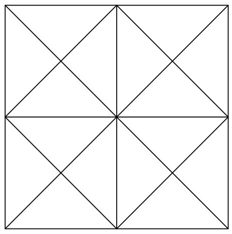
4 Geometrische Grundlagen

1. Wie viele Quadrate entdeckst du in jeder der beiden Figuren?

(a)  (b) 

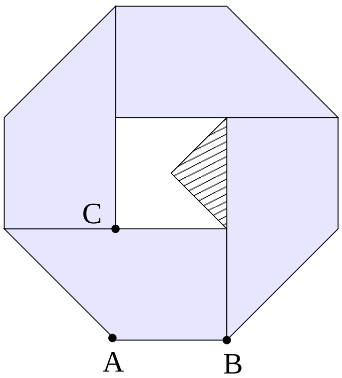
Lösung: (a) 10 (b) 14

2. Wie viele Dreiecke entdeckst du in der Figur?



Lösung: 44

3. Während der Übertragung der US-Tennismeisterschaften 2003 in New York war im Fernsehen ein Firmenlogo zu sehen, das so ähnlich aussah wie die Abbildung unten. Zusätzlich ist hier ein schraffiertes Dreieck im Inneren des weißen Quadrates eingezeichnet.



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = \overline{AC} = 2\,\text{cm}$. Du musst nicht am Punkt A oder B beginnen.

(b) Berechne den Flächeninhalt des weißen Quadrates in deiner Zeichnung.

(c) Berechne den Flächeninhalt der gesamten Figur.

(d) Wie oft kannst du das schraffierte Dreieck in der Figur unterbringen? Begründe deine Antwort.

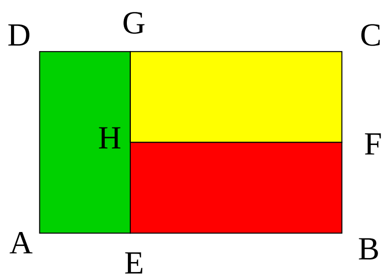
Lösung: (a) –

(b) $4\,\text{cm}^2$

(c) $28\,\text{cm}^2$

(d) Das schraffierte Dreieck ist 28-mal in der Figur enthalten. Begründung: In das halbe innere Quadrat passen 2 schraffierte Dreiecke. In die Figur passen 14 halbe Quadrate: $2 \cdot 14 = 28$.

4.



Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.

(a) Berechne den Flächeninhalt jedes Rechtecks in mm^2.

(b) Welche Länge hätte der Saum dieser Flagge, wenn sie $5\,\text{m}$ lang und $3\,\text{m}$ hoch wäre?
Wie viele m^2 Stoff bräuchte man für das Rechteck $AEGD$ in dieser Flagge, wenn alle Rechtecke im Inneren den gleichen Flächeninhalt hätten?

(c) Wie viele m^2 Stoff bräuchte man für eine Flagge in Originalgröße, wenn das obige Bild diese Flagge im Maßstab 1:200 darstellt?

(d) Die Fahne wird jetzt so gefaltet, dass der Punkt B auf A und der Punkt C auf D zu liegen kommt. Welche Abmessungen in m müsste die Fahne haben, damit sich auf diese Weise ein Quadrat ergibt?
Wie müsste die Fahne aussehen, damit sich erst nach zweimaligem Falten ein Quadrat ergibt?

Lösung:

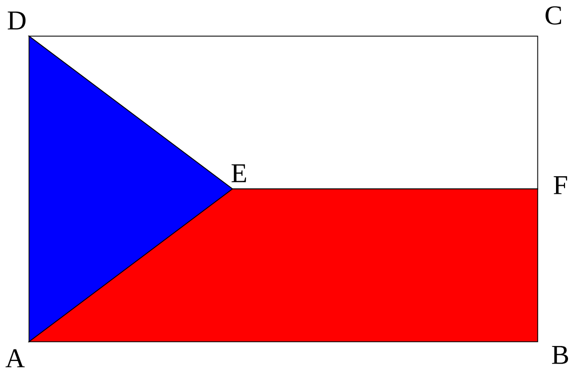
(a) Das Ergebnis fällt je nach Größe der Zeichnung aus.

(b) Der Saum wäre 16 m lang und die Fläche jedes Rechtecks wäre 5 m^2 groß.

(c) Je nach Größe der Zeichnung auf dem Blatt. Der Flächeninhalt der Originalfahne muss aber stets 400-mal so groß wie die Zeichnung sein.

(d) Es gibt beliebig viele Lösungen, aber jedes Rechteck muss dabei doppelt so breit wie hoch sein.
Im zweiten Fall müsste die Fahne selbst ein Quadrat oder viermal so breit wie hoch sein.

5. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



(a) In welche Figuren ist die rechteckige Fahne unterteilt?

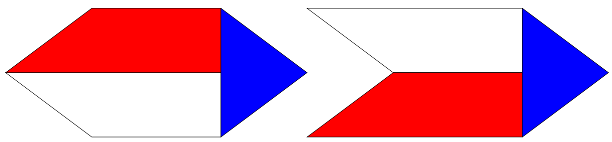
(b) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = \overline{EF} = 6\,\text{cm}$.
Zerschneide sie in ihre Teilflächen und setze sie dann auf verschiedene Weise zu einer anderen symmetrischen Figur wieder zusammen. Bei der Symmetrieeigenschaft soll auf Farben keine Rücksicht genommen werden.
Klebe die Figur, die dir besser gefällt, in dein Heft.

(c) Zeichne die Figur mit den gleichen Abmessungen wie in Aufgabe (b) in ein Gitternetz.
Gib die Koordinaten der Punkte A, B, C, D, E und F an.

Lösung:

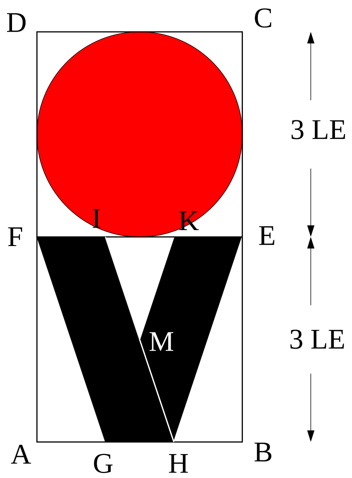
(a) Die Figur enthält ein symmetrisches Dreieck und zwei gleiche Vierecke (Trapeze).

(b) Z.B.:



(c) Z.B.: $A(1|1)$,$B(11|1)$,$C(11|7)$,$D(1|7)$,$E(5|4)$ und $F(11|4)$.

6. Das ist ein Bild des Logos der Firma MARABU, die Farben herstellt.



Es gilt: $\overline{AG} = \overline{GH} = \overline{HB} = 1\,\text{LE}$. Ebenso gilt: $\overline{FI} = \overline{IK} = \overline{KE} = 1\,\text{LE}$.

(a) Zeichne die Figur. 1LE entspricht dabei 2 cm.

(b) Wie viele Vierecke und wie viele Dreiecke endeckst du darin? Beschreibe ihre Eigenschaften möglichst genau mit den Begriffen „senkrecht“, „parallel“ und „symmetrisch“.

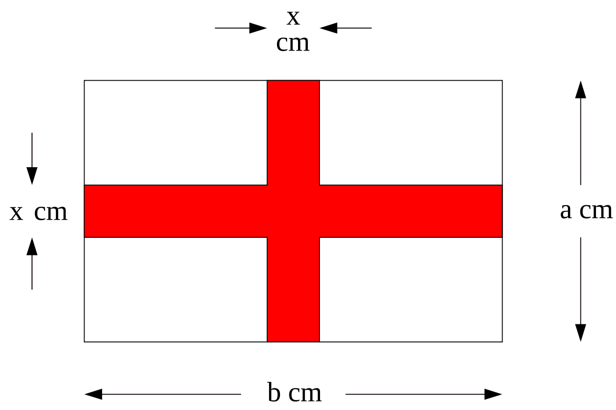
Lösung:

(a) –

(b) Die Figur enthält

- ein großes Rechteck und zwei gleiche Quadrate, also symmetrische Figuren; gegenüber liegende Seiten sind zueinander parallel, benachbarte Seiten stehen aufeinander senkrecht.
- Ein Parallelogramm (die gegenüber liegenden Seiten sind jeweils parallel) und ein Trapez (zwei gegenüber liegende Seiten sind zueinander parallel)
- ein kleines und ein größeres („gleichschenkliges“) Dreieck mit je einer Symmetrieachse
- zwei gleiche („kongruente“) rechtwinklige Dreiecke

7. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



(a) Zeichne die Figur für $b = 8$, $a = 5$ und $x = 1$.

(b) Wie viele Rechtecke sind in der Figur enthalten?

(c) Wie viele rechte Winkel entdeckst du?

(d) Berechne den Flächeninhalt des roten Kreuzes.

Lösung:

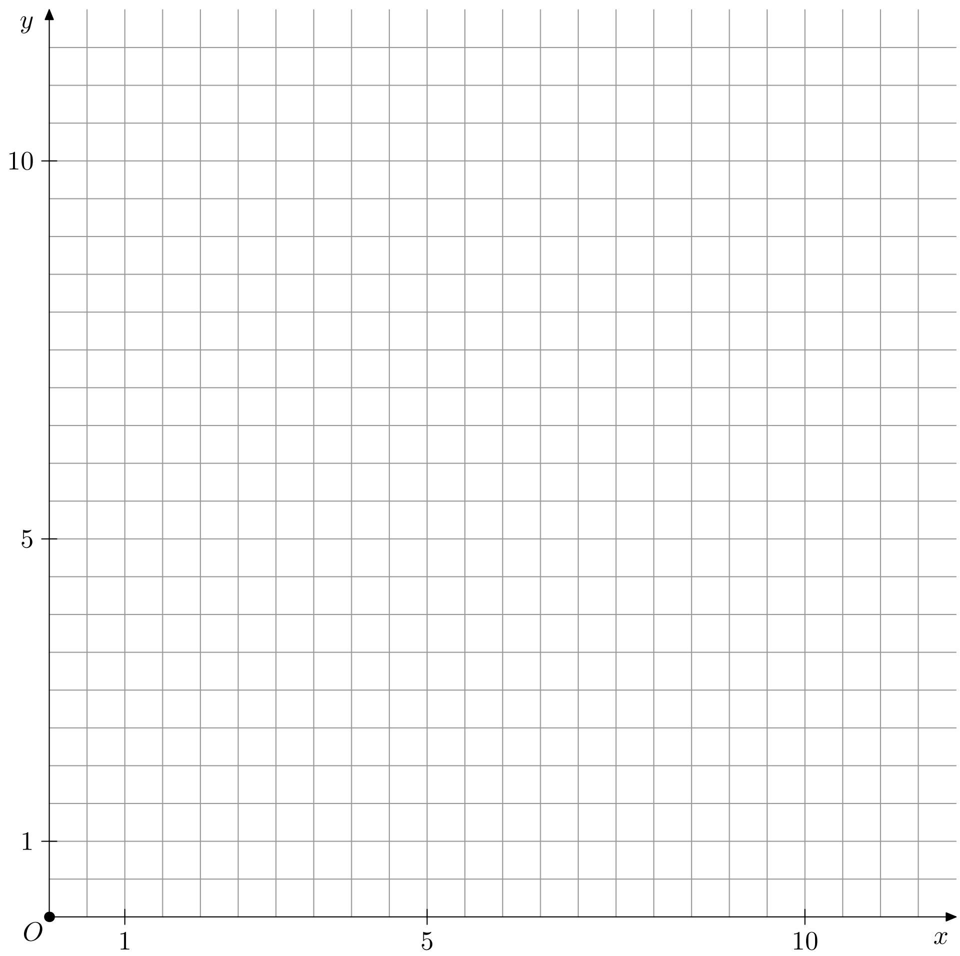
(a) –

(b) In der Figur sind 5 Rechtecke enthalten.

(c) In der Figur gibt es 16 rechte Winkel.

(d) Der Flächeninhalt beträgt $12\,\text{cm}^2$.

8.



(a) Zeichne die Punkte $A_1(1 \mid 2)$, $A_2(2 \mid 4)$, $A_3(3 \mid 6)$ und $A_4(4 \mid 8)$ in das Gitternetz.

(b) Notiere die Koordinaten des dazu passenden Punktes A_5. Zeichne diesen Punkt ein.

(c) Notiere jeweils für alle möglichen Punkte A_n einen Zusammenhang zwischen dem x-Wert und dem betreffenden y-Wert.

(d) Begründe: Der Punkt $N(x \mid 24689)$ passt nicht dazu, egal, welchen Wert die Variable x annimmt.

(e) Setze an die Stelle des Fragezeichens in $P(? \mid 0)$ eine Zahl ein, so dass der Punkt P passt. Begründe.

(f) Zeichne die Punkte $B_1(2 \mid 1)$, $B_2(4 \mid 2)$, $B_3(6 \mid 3)$, $B_4(8 \mid 4)$ und $B_5(10 \mid 5)$ in das Gitternetz.

(g) Notiere einen Zusammenhang zwischen dem x-Wert und dem y-Wert, der für alle Punkte B_n gilt.

(h) Vergleiche die Koordinaten der Punkte B_n mit denjenigen der Punkte A_n. Notiere, was Dir auffällt.

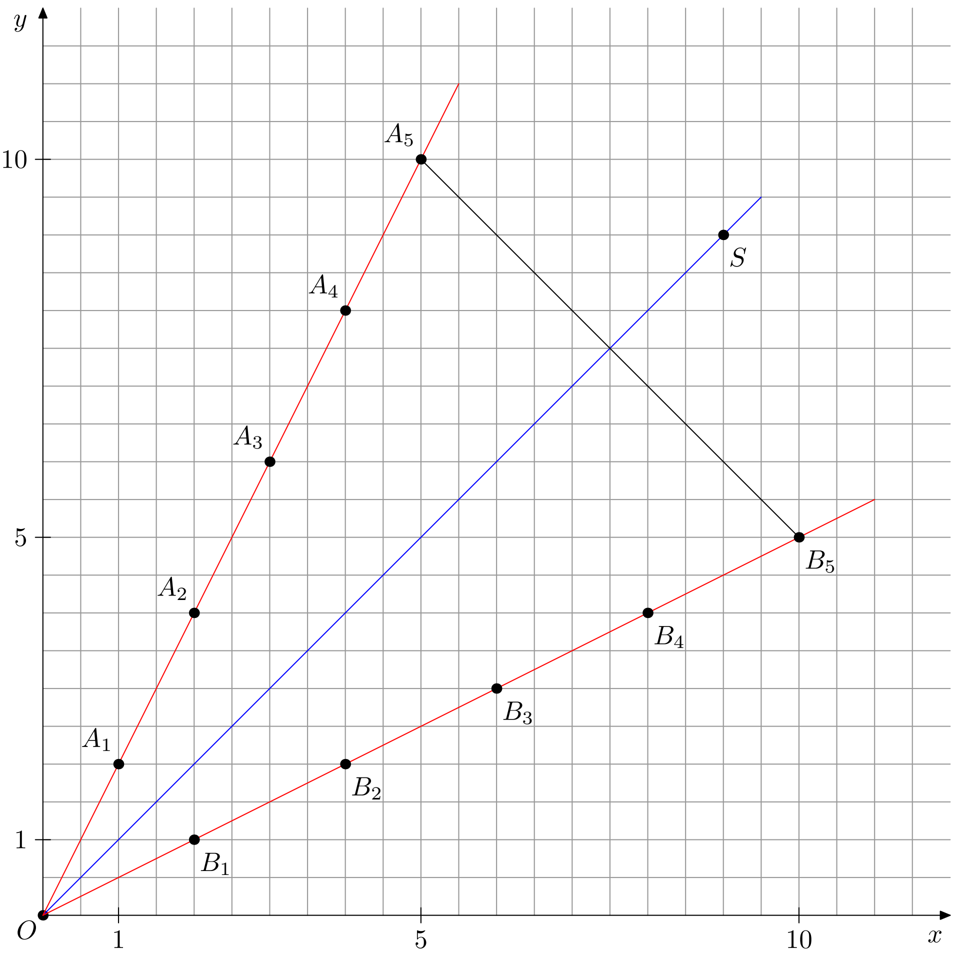
(i) Alle möglichen Punkte A_n und alle möglichen Punkte B_n liegen geordnet im Gitternetz. Setze jeweils den fehlenden Fachbegriff ein:

Alle möglichen Punkte A_n liegen auf einer ______________________________.

Alle möglichen Punkte B_n liegen auf einer ______________________________.
Ergänze deine Zeichnung entsprechend.

(j) Zeichne die Strecke $[A_5B_5]$ ein. Dadurch entsteht ein Dreieck.
Zeichne den Punkt $S(9 \mid 9)$ und die Halbgerade $[OS$ ein. Welche Rolle spielt die Halbgerade in diesem Dreieck?

Lösung: (a)



(b) $A_5(5 \mid 10)$. Siehe Zeichnung.

(c) „Der x-Wert der Punkte A_n ist stets halb so groß wie der y-Wert dieser Punkte.“
Oder:
„Der y-Wert der Punkte A_n ist stets doppelt so groß wie der x-Wert dieser Punkte.“

(d) Weil der y-Wert der Punkte A_n ist stets doppelt so groß wie der x-Wert dieser Punkte ist, muss der y-Wert stets gerade sein. Aber 24689 ist eine ungerade Zahl. Daher passt der Punkt N nicht.

(e) Der x-Wert der Punkte A_n ist stets halb so groß wie der y-Wert dieser Punkte. Wenn $y = 0$ gilt, dann muss $x = 0 : 2 = 0$ sein. Also gilt $? = 0$.
Oder: Alle Punkte A_n liegen auf einer Geraden, die durch den Ursprung verläuft. Also gilt $? = 0$.

(f) Siehe Zeichnung.

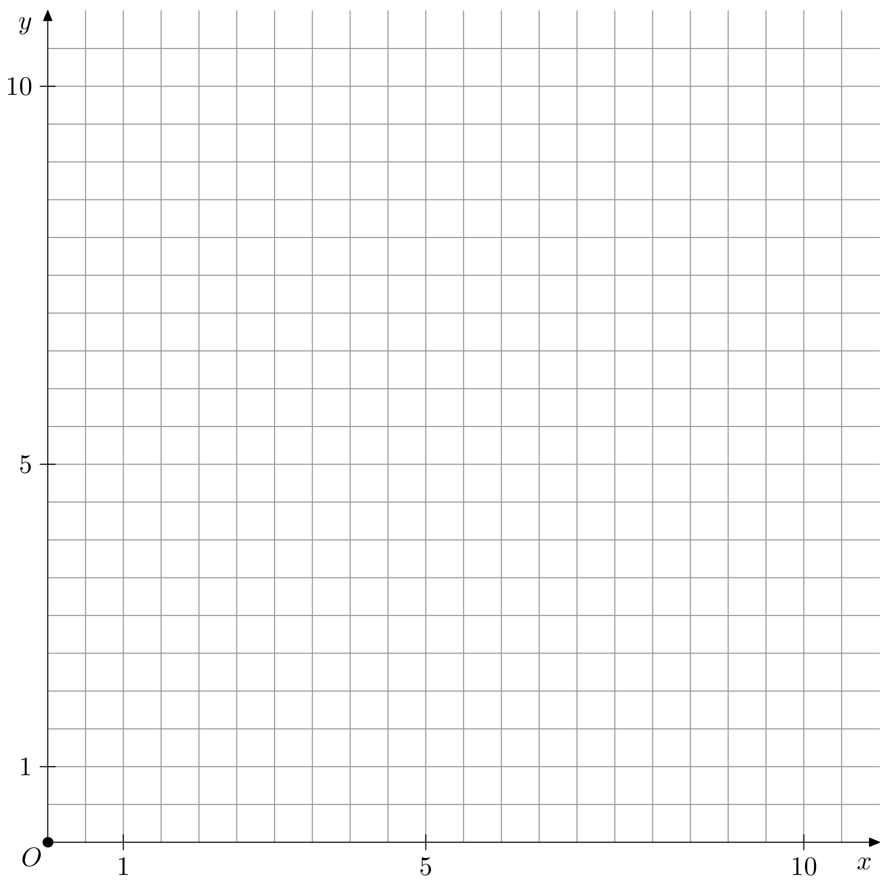
(g) „Der x-Wert der Punkte B_n ist stets doppelt so groß wie der y-Wert dieser Punkte.“
Oder:
„Der y-Wert der Punkte B_n ist stets halb so groß wie der x-Wert dieser Punkte.“

(h) Vertausche bei den Punkten A_n jeweils den x- mit dem y-Wert, dann erhältst du die Koordinaten der Punkte B_n.

(i) Alle Punkte A_n liegen auf einer Halbgeraden, weil die Reihe der Punkte A_n in der Zeichnung beliebig verlängert werden kann.
Alle Punkte B_n liegen ebenfalls auf einer Halbgeraden.
Siehe Zeichnung.

(j) Es entsteht das Dreieck OB_5A_5 (siehe Zeichnung). Die Halbgerade $[OS$ ist die Symmetrieachse dieses Dreiecks OB_5A_5.

9.



Gegeben sind die Punkte $A(2 \mid 1)$, $B(10 \mid 1)$, $C(10 \mid 9)$ und $D(2 \mid 9)$.

(a)
- Zeichne das Viereck $ABCD$ in das Gitternetz. Zeichne seine Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ein. Zeichne den Diagonalenschnittpunkt Z ein.
- Um welches besondere Viereck handelt es sich hier? Begründe.

(b) Die Mittelpunkte der Seiten $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ und $[DA]$ sind in dieser Reihenfolge die Punkte M_1, M_2, M_3 und M_4.
- Zeichne diese Seitenmittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 ein.
- Gib die Koordinaten von M_1 an.
  Welche besondere Lage besitzen die Punkte A, M_1 und B im Gitternetz?
  Welche Gemeinsamkeiten weisen die Koordinaten dieser drei Punkte auf?
  Notiere, wie du den x-Wert des Mittelpunktes M_1 aus den beiden x-Werten der Punkte A und B berechnen kannst.
- Gib die Koordinaten von M_2 an.
  Welche besondere Lage besitzen die Punkte B, M_2 und C im Gitternetz?
  Welche Gemeinsamkeiten weisen die Koordinaten dieser drei Punkte auf?
  Notiere, wie du den y-Wert des Mittelpunktes M_2 aus den beiden y-Werten der Punkte B und C berechnen kannst.

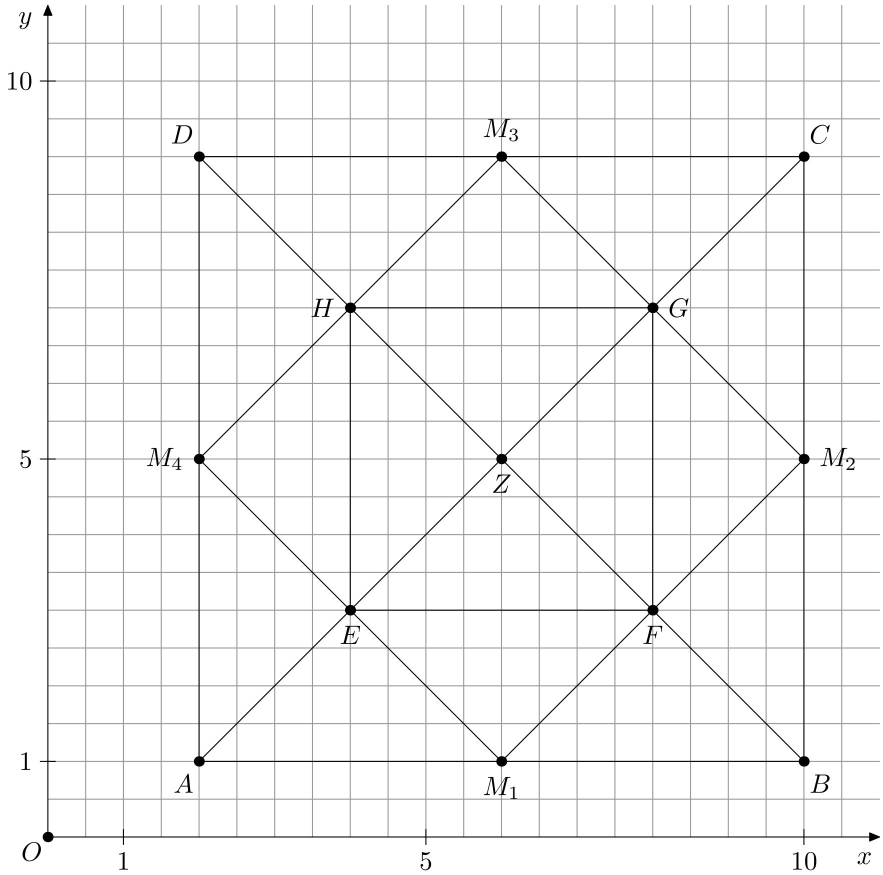
(c)
- Zeichne das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ ein. Um welches besondere Viereck handelt es sich?
  Verbinde die Seitenmittelpunkte des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ zu einem neuen Viereck $EFGH$, wobei der Punkt E links unten liegen soll. Was für ein besonderes Viereck ist das?
  Notiere, wie du die Koordinaten des Mittelpunktes E aus den Koordinaten der Punkte M_1 und M_4 berechnen kannst.
- Durch seine Diagonalen wird das Viereck $EFGH$ in vier gleiche Dreiecke zerlegt. Vergleiche den Flächeninhalt dieses Vierecks mit dem der Vierecke $M_1M_2M_3M_4$ und $ABCD$.

(d)
- In das Viereck $EFGH$ kannst du wieder ein Seitenmittenviereck einzeichnen, und in dieses wieder ein Seitenmittenviereck usw.
  Zeichne auf diese Weise fünf weitere Seitenmittenvierecke ein. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Flächeninhalten zweier unmittelbar aufeinander folgender Seitenmittenvierecke?
- Wie viele Seitenmittenvierecke könntest du theoretisch noch einzeichnen? Wo endet das Ganze?

(e)
- Nimm eine neue karierte Heftseite quer. Zeichne das Quadrat $ABCD$ mit den mittlerweile sieben Seitenmittenvierecken in seinem Inneren ohne Koordinatenachsen doppelt nebeneinander.
  Zeichne die Strecken $[M_1M_3]$ und $[M_2M_4]$ gestrichelt in beide Quadrate ein.
  Schneide das linke Quadrat $ABCD$ aus.

- Außerhalb des Seitenmittenvierecks $M_1M_2M_3M_4$ bleiben im Inneren des Quadrates $ABCD$ vier gleiche Dreiecke übrig. Male diese vier Dreiecke in der beiden Figuren grün aus.
  Schneide vom ausgeschnittenen Quadrat diese vier Dreiecke ab.
  Zeige am rechten Quadrat $ABCD$: Diese vier Dreiecke lassen sich zum Seitenmittenviereck $M_1M_2M_3M_4$ zusammenfügen.
- Außerhalb des Seitenmittenvierecks $EFGH$ bleiben im Inneren des Seitenmittenvierecks $M_1M_2M_3M_4$ vier gleiche Dreiecke übrig. Male diese vier Dreiecke in beiden Figuren orange aus.
  Schneide von der ausgeschnittenen Restfigur diese vier Dreiecke ab.
  Zeige am rechten Quadrat $ABCD$: Diese vier Dreiecke lassen sich zum Seitenmittenviereck $EFGH$ zusammenfügen.
- Außerhalb des nächsten Seitenmittenvierecks bleiben im Inneren des Seitenmittenvierecks $EFGH$ vier gleiche Dreiecke übrig. Male diese vier Dreiecke in beiden Figuren blau aus.
  Schneide von der ausgeschnittenen Restfigur diese vier Dreiecke ab.
  Zeige am rechten Quadrat $ABCD$: Diese vier Dreiecke lassen sich zu diesem nächsten Seitenmittenviereck zusammenfügen.
- Du kannst dir schon denken, wie es weitergeht: Färbe in der Reihenfolge grün- orange-blau immer wieder die folgenden vier gleichen Dreiecke ein, schneide sie aus und vergleiche ihren Flächeninhalt mit dem entsprechenden Seitenmittenviereck in der rechten Zeichnung.
  Nenne zwei Gründe, weshalb du mit deiner Schere diese Vorgehensweise nicht beliebig weit fortsetzen kannst.
  Bliebe etwas von der Restfigur übrig, wenn du dieses Verfahren „bis zum Ende hin“ fortsetzen könntest?
  Würde im Quadrat $ABCD$ rechts eine weiße Fläche übrig bleiben, wenn du dieses Verfahren „bis zum Ende hin“ fortsetzen könntest?
- Begründe: Die Summe der Flächeninhalte aller möglichen Seitenmittenvierecke ergibt $64\,\text{cm}^2$.

Lösung: (a)



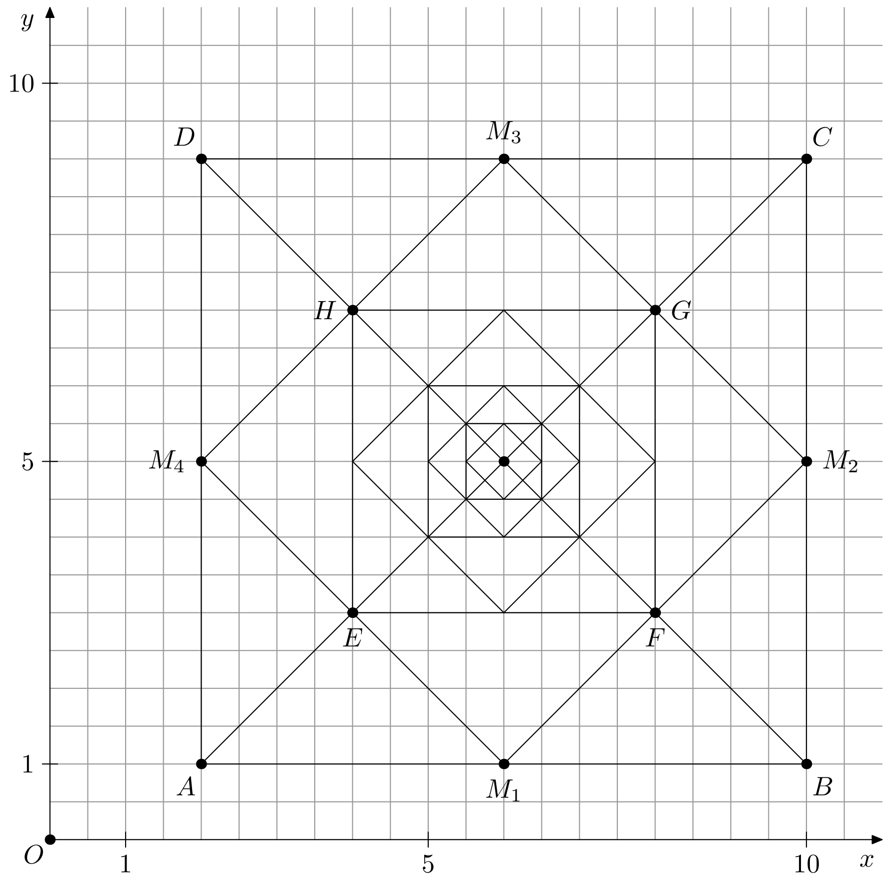
- Es handelt sich um ein Quadrat. Alle vier Seiten sind 8 cm lang und alle Innenwinkel haben das Maß 90°.

(b)
- Siehe Zeichnung.
- $M_1(6 \mid 1)$.
  Die Punkte A, M_1 und B liegen auf einer Parallelen zur x-Achse mit dem Abstand 1 cm.
  Alle drei Punkte haben den y-Wert 1.
  Addiere die x-Werte von A und B. Teile den Summenwert durch 2. $(2+10):2 = 12:2 = 6$.
- $M_2(10 \mid 5)$.
  Die Punkte B, M_2 und C liegen auf einer Parallelen zur y-Achse mit dem Abstand 10 cm.
  Alle drei Punkte haben den x-Wert 10.
  Addiere die y-Werte von B und C. Teile den Summenwert durch 2. $(1+9):2 = 10:2 = 5$.

(c)
- Siehe Zeichnung. Die Vierecke $M_1M_2M_3M_4$ und $EFGH$ sind Quadrate.
  Der x-Wert des Punktes E ist Hälfte der Summe aus den x-Werten der Punkte M_1 und M_4. Der y-Wert des Punktes E ist Hälfte der Summe aus den y-Werten der Punkte M_1 und M_4:
  $E((6+2):2 \mid (1+5):2) = (4 \mid 3)$.

- In das Viereck $EFGH$ passen 4 gleiche Dreiecke. Das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ setzt sich aus 8 solchen Dreiecken zusammen. Also ist der Flächeninhalt des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ doppelt so groß wie der des Vierecks $EFGH$.
  In das Viereck $ABCD$ passen 16 solche Dreiecke. Also ist der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ doppelt so groß wie der des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ und viermal so groß wie der Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$.

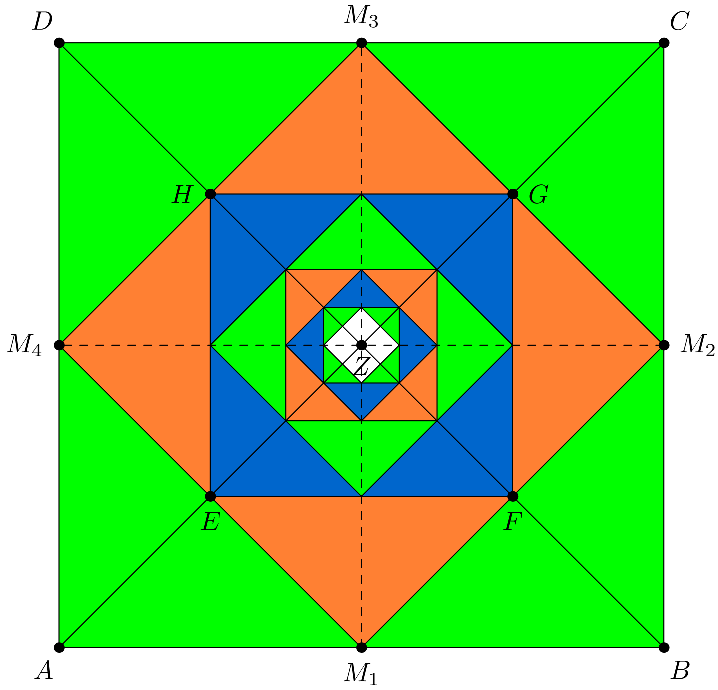
(d) •



Ein Seitenviereck ist stets halb so groß wie das vorhergehende.

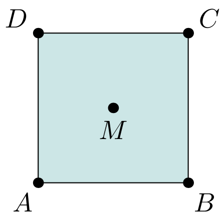
- Du könntest theoretisch noch unendlich viele Seitenmittenvierecke einzeichnen. Das Ganze endet im Punkt Z.

(e) • Dein Endprodukt müsste so aussehen:



- Siehe oben.
- Die vier grünen Dreiecke sind mit den vier Dreiecken, die im Inneren des Quadrates $M_1M_2M_3M_4$ durch die Strecken $[M_1M_3]$ und $[M_2M_4]$ entstehen, gleich.
- Wie vorher gilt: Die vier orangenen Dreiecke sind mit den vier Dreiecken, die im Inneren des Quadrates $EFGH$ durch die Strecken $[M_1M_3]$ und $[M_2M_4]$ entstehen, gleich.
- Wieder kannst du auf die gleiche Weise die Flächengleichheit zeigen.
- 1. Grund:
  Du kannst keine beliebig kleinen Dreiecke ausschneiden.
  2. Grund:
  Es wären unendlich viele Dreiecke auszuschneiden. Das kann kein Mensch bewältigen.
  Angenommen, es würde eine „weiße Fläche“ übrig bleiben. Dann muss diese Fläche aber ein winziges Quadrat sein, dessen Ecken du (wenigstens theoretisch) erneut abschneiden könntest, so dass ein noch winzigeres Quadrat als „weißen Fläche“ übrig bleibt. Dann könntest du von diesem noch winzigerem Quadrat wieder seine Ecken . . . . Du merkst, es bleibt am Ende (wann immer das auch sein mag) nichts Weißes übrig.
- Mit allen möglichen Dreiecken zusammen lässt sich das Quadrat $ABCD$ lückenlos bedecken. Nun stammen ja jeweils vier dieser Dreiecke von einem der Seitenmittenvierecke. Also ergibt der Flächeninhalt aller Seitenmittenvierecke den Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und der ist $8\,\text{cm} \cdot \text{cm} = 64\,\text{cm}^2$ groß.

10.



(a) Zeichne in die Mitte einer leeren karierten Heftseite ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 3 cm, so dass die Seite $[AB]$ waagrecht liegt. Zeichne die beiden Geraden ein, die jeweils durch zwei gegenüber liegende Eckpunkte des Quadrates und dem Quadratmittelpunkt M verlaufen. Nutze dabei den Platz auf deiner Heftseite voll aus.

(b) Zeichne durch die Eckpunkte des Quadrates jeweils eine Parallele zu einer Diagonalen.

(c) Die vier Parallelen schneiden sich in vier Punkten. Dadurch entsteht ein neues Viereck V_1. Um was für ein Viereck handelt es sich? Begründe.

(d)
- Zeichne durch die Eckpunkte dieses Vierecks V_1 erneut Parallelen zu dessen Diagonalen, so dass an deren Schnittpunkten ein neues Viereck V_2 entsteht. Wenn du richtig gezeichnet hast, müssen jetzt zwei Seiten dieses Vierecks V_2 wieder waagrecht liegen.
  Um was für ein Viereck handelt es sich?
- Wie oft ist das ursprüngliche Quadrat $ABCD$ im Viereck V_2 enthalten? Begründe.

(e)
- Zeichne auf die gleiche Weise wie vorhin mit Hilfe der Parallelen zu den Diagonalen des Vierecks V_2 das Viereck V_3. Um welche Art von Viereck handelt es sich wieder?
- Wie oft ist das ursprüngliche Quadrat $ABCD$ im Viereck V_3 enthalten? Begründe.

(f)
- Zeichne mit der gleichen Vorgehensweise das Viereck V_4 ein, wobei dann zwei Seiten wieder waagrecht liegen müssen.
- Vergleiche die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge des Vierecks V_4.
  Wie oft ist das ursprüngliche Quadrat im Viereck V_4 enthalten? Begründe.

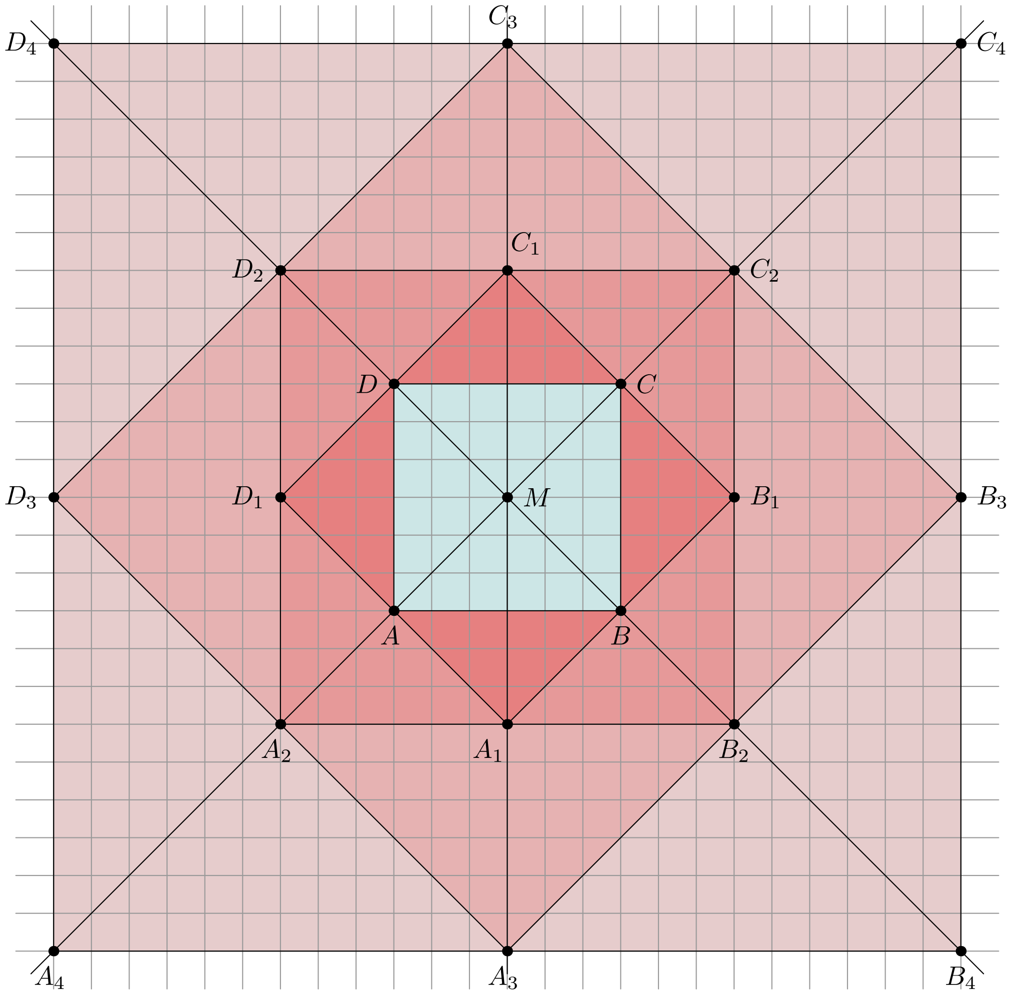
(g) Die nächsten auf diese Weise erzeugten Vierecke würden über deine Heftseite hinausragen.
- Notiere einen Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten zweier unmittelbar aufeinander folgender Quadate.
- Der Flächeninhalt A_0 des Vierecks $ABCD$ beträgt $3\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}^2$.
  Fülle die restlichen Zellen der folgenden Tabelle aus:

Viereck Nr.	Zusammenhang mit $A_0 = 9\,\text{cm}^2$
1	$A_{V_1} = 2 \cdot 9\,\text{cm}^2 = 2^1 \cdot A_0$
2	$A_{V_2} = 2 \cdot A_{V_1} = 2 \cdot 2 \cdot 9\,\text{cm}^2 = 2^{\,2} \cdot A_0$
3	$A_{V_3} = 2 \cdot A_{V_2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9\,\text{cm}^2 = 2^{\,3} \cdot A_0$
7	$A_{V_7} =$
?	$A_{V_?} = 2304\,\text{cm}^2$

- Kann eines der Vierecke einen Flächeninhalt von $624\,\text{cm}^2$ besitzen? Begründe deine Antwort auf verschiedene Weise.

(h) Male deine Zeichnung mit verschiedenen Farben aus.

Lösung: Wenn du alle Zeichenaufträge ausgeführt hast, ergibt sich das folgende Bild:



(a) Siehe Zeichnung.

(b) Siehe Zeichnung.

(c) Siehe Zeichnung.
Das Viereck $A_1B_1C_1D_1$ ist ein Quadrat. Alle vier Seiten sind gleich alng und alle Innenwinkel haben das Maß 90°.

(d)
- Siehe Zeichnung.
  Das Viereck $A_2B_2C_2D_2$ ist wieder ein Quadrat.
- Das ursprüngliche Quadrat $ABCD$ wird durch seine Diagonalen in vier deckungsgleiche Dreiecke zerlegt. Das Quadrat $A_2B_2C_2D_2$ besteht aus 16 dieser Dreiecke. $16 : 4 = 4$; also ist dieses Quadrat vier mal so groß wie das Quadrat $ABCD$.

(e)
- Siehe Zeichnung.
  Das Viereck $A_3B_3C_3D_3$ ist wieder ein Quadrat.
- Wenn Du die vier Teildreiecke A_2MD_2, A_2B_2M, MB_2C_2 und D_2MC_2 des Quadrates $A_2B_2C_2D_2$ jeweils nach außen klappst, dann erhältst du das Quadrat $A_3B_3C_3D_3$. Also ist dieses Quadrat doppelt so groß wie das Quadrat $A_2B_2C_2D_2$ und damit $2 \cdot 4 = 8$ mal so groß wie das Quadrat $ABCD$.

(f)
- Siehe Zeichnung.
- Das Quadrat $A_4B_4C_4D_4$ entsteht ebenso wie vorhin durch Ausklappen der Teildreiecke des Quadrates $A_3B_3C_3D_3$. Also ist das Quadrat $A_4B_4C_4D_4$ doppelt so groß wie sein Vorgänger und damit 16 mal so groß wie das ursprüngliche Quadrat $ABCD$.

(g)
- Der Nachfolger ist doppelt so groß wie sein Vorgänger.
- Vorletzte Zeile:
  $A_{V_7} = 2 \cdot A_{V_6} = 2^{6} \cdot A_0 = 64 \cdot 9\,\mathrm{cm}^2 = 576\,\mathrm{cm}^2$
  Letzte Zeile:
  $2304\,\mathrm{cm}^2 : 9\,\mathrm{cm}^2 = 256 = 2^{8}$. Also gilt: $? = 8$.
- 1. Möglicheit:
  624 ist nicht durch 9 teilbar, daher gibt es kein solches Quandrat.
  2. Möglichkeit:
  Es tauchen nur die folgenden Flächeninhalte auf: $9\,\mathrm{cm}^2$, $18\,\mathrm{cm}^2$, $36\,\mathrm{cm}^2$, $72\,\mathrm{cm}^2$, $144\,\mathrm{cm}^2$, $288\,\mathrm{cm}^2$, $576\,\mathrm{cm}^2$, $1152\,\mathrm{cm}^2$ ...
  Der Wert $624\,\mathrm{cm}^2$ ist nicht mit dabei, daher gibt es kein solches Quandrat.

(h) Deinem Einfallsreichtum sind keine Grenzen gesetzt.

11. Gegeben sind die beiden Gleichungen

$$\text{(I):}\quad 2 \cdot \triangle + \square = 6 \qquad \text{und} \qquad \text{(II):}\quad 2 \cdot \square - \triangle = 2.$$

(a) Zeige, dass $\triangle = 5$ und $\square = 3$ in beiden Gleichungen falsche Ergebnisse liefern.

(b) Setze für die Platzhalter $\triangle$ und $\square$ passende Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ ein. (Tipp: Es ist auch erlaubt, $\triangle$ und $\square$ mit gleichen Zahlen zu belegen.)
Übertrage diese Zahlen in zwei Tabellen, etwa so:

(I):

$\triangle$	...	...	...
$\square$	...	...	...

und (II):

$\triangle$	...	...	...
$\square$	...	...	...

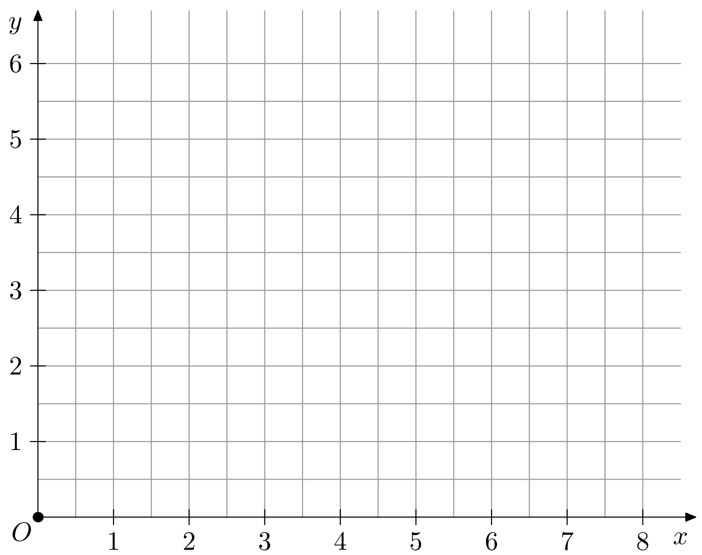
(c) Setze den angefangenen Satz fort:
„Wenn in der Tabelle (I) der $\triangle$-Wert um 1 zunimmt, dann nimmt der zugehörige $\square$-Wert ...“
Notiere einen entsprechenden Zusammenhang, der für die Tabelle (II) gilt.

(d) • Gib das Platzhalterpaar an, das sowohl in Tabelle (I) als auch in Tabelle (II) auftaucht.

• Worin unterscheidet sich die Tabelle (I) von der Tabelle (II), wenn du alle Möglichkeiten betrachtest, die sich für △ und □ ergeben?

(e) Wenn du richtig gerechnet hast, dann sind z. B. in der Tabelle (I) △ = 1 und □ = 4 vorhanden. Diese Werte lassen sich als ein **Zahlenpaar** (1 | 4) im Gitternetz darstellen.

• Trage dieses Zahlenpaar in das Gitternetz ein, wobei „△“ den x-Wert (Rechtswert) und „□“ den y-Wert (Hochwert) darstellen soll:



• Übertrage deine restlichen Werte aus beiden Tabellen auf die gleiche Weise in das Gitternetz. Benutze dabei für (I) und (II) verschiedene Farben.

• Betrachte die Lage der Punkte zueinander. Welche Zusammenhänge stellst du fest?

Lösung: (a) In (I) eingesetzt ergibt sich: $2 \cdot 5 + 3 = 6$ (f).
In (II) eingesetzt ergibt sich: $2 \cdot 3 - 5 = 6$ (f).

(b) (I):

△	0	1	2	3
□	6	4	2	0

(II):

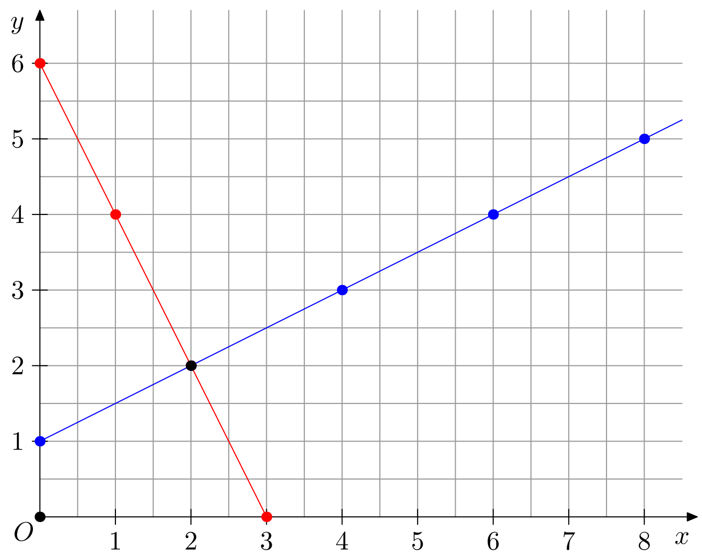
△	0	2	4	6	8	...
□	1	2	3	4	5	...

(c) „Wenn in der Tabelle (I) der △-Wert um 1 zunimmt, dann nimmt der zugehörige □-Wert jeweils um 2 ab.“
„Wenn in der Tabelle (II) der △-Wert um 2 zunimmt, dann nimmt der zugehörige □-Wert jeweils um 1 zu.“

(d) • Das gemeinsame Paar ist △ = 2 = □.

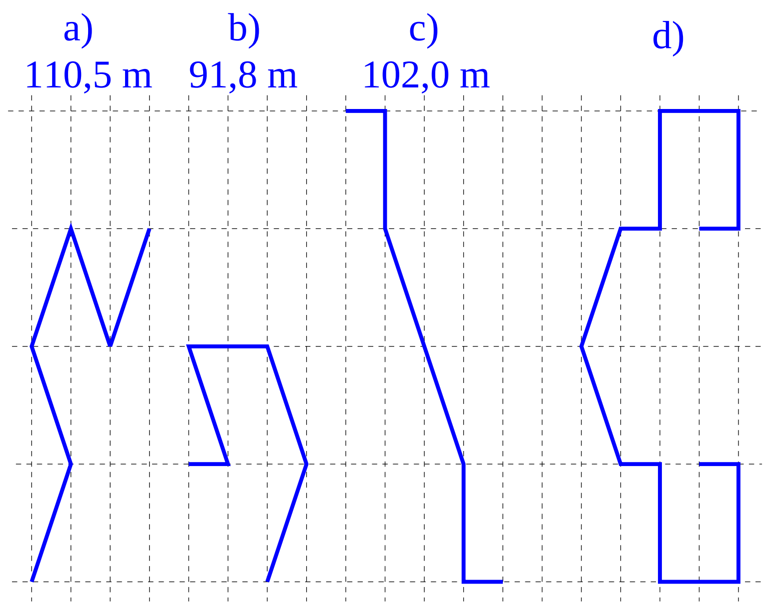
• Die Tabellenwerte in (I) haben ein Ende, die von (II) nicht.

(e) •



- Siehe Zeichnung.
- – Die Tabelle (I) liefert Punkte, die auf einer Strecke liegen.
  – Die Tabelle (II) liefert Punkte, die auf einer Halbgeraden liegen.
  – Die Strecke und die Halbgerade stehen aufeinader senkrecht.

12.



Die Längen der drei Wege a), b) und c) sind angegeben. Wie lang ist der Weg d)?

Lösung:

Weg a)

Er besteht aus 5 gleich langen Strecken, denn jede Strecke stellt die Diagonale eines rechteckigen Gitterkästchens dar:
$110,5\,\mathrm{m} : 5 = 22,1\,\mathrm{m}$. So lang ist die Diagonale eines Gitterkästchens.

Weg b)

Er enthält 3 gleich lange Rechtecksdiagonalen eines Gitterkästchens. Der Rest dieses Weges ist dreimal so lang wie Breite eines Gitterkästchens. Für die Breite eines Gitterkästchens gilt dann:
$(91,8\,\mathrm{m} - 3 \cdot 22,1\,\mathrm{m}) : 3 = 8,5\,\mathrm{m}$.

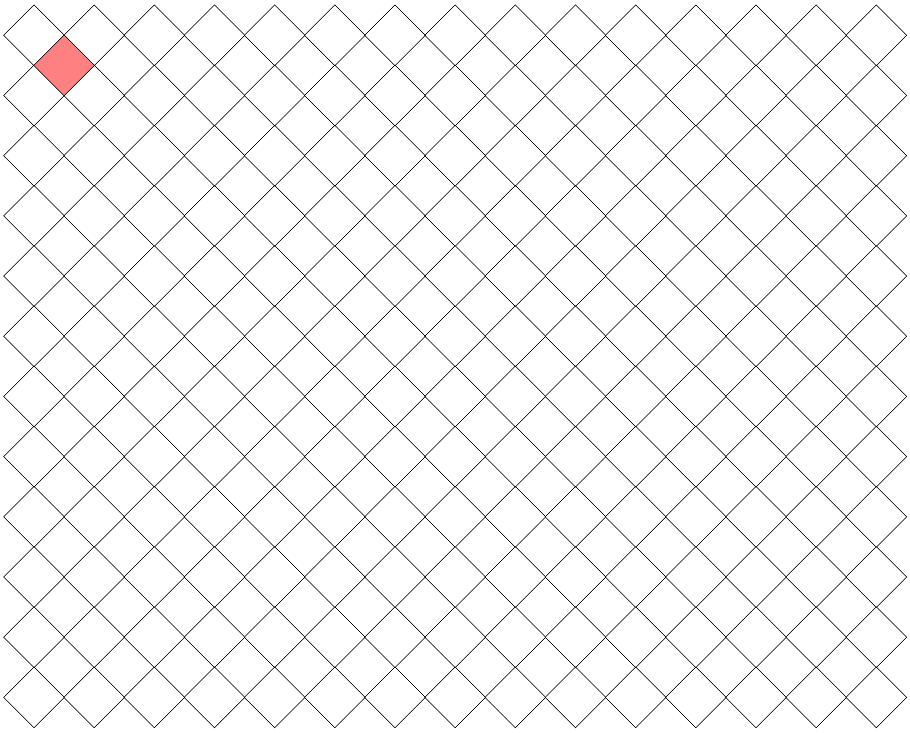
Weg c)

Dieser Weg verläuft punktsymmetrisch. Die $51,0\,\mathrm{m}$ lange Hälfte besteht aus einer Kästchendiagonalen, einer Kästchenhöhe und einer Kästchenbreite. Weil die Länge der Diagonalen und die Breite eines Kästchens schon bekannt sind, kannst du damit die Kästchenhöhe ausrechnen:
$51,0\,\mathrm{m} - 22,1\,\mathrm{m} - 8,5\,\mathrm{m} = 20,4\,\mathrm{m}$.

Weg d)

Dieser Weg verläuft achsensymmetrisch. In ihm sind die Längen aller Teilstrecken bekannt. Für die Länge des Weges d) ergibt sich also:
$(4 \cdot 8,5\,\mathrm{m} + 2 \cdot 20,4\,\mathrm{m} + 22,1\,\mathrm{m}) \cdot 2 = 193,8\,\mathrm{m}$.

13.



Das eingefärbte Quadrat im Gitternetz heißt „Einheitsquadrat“.
Male in das Gitternetz möglichst viele verschiedene achsensymmetrische Figuren, die sich aus Einheitsquadraten zusammensetzen. Vergleiche jeweils deine Figur mit der deines Banknachbarn.

(a) Die Figur soll nur aus zwei Einheitsquadraten bestehen.

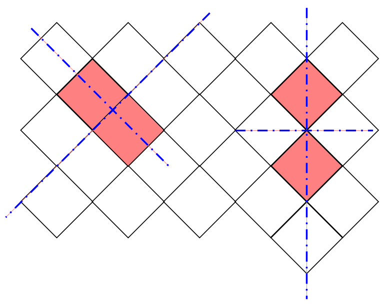
(b) Die Figur soll aus drei Einheitsquadraten bestehen.

(c) Die Figur soll aus vier Einheitsquadraten bestehen.

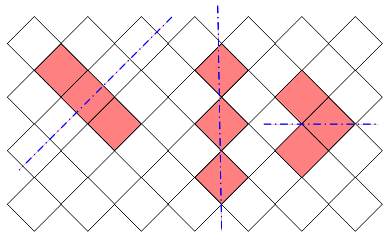
(d) Die Figur soll aus fünf Einheitsquadraten bestehen.

Lösung: Hier sind viele Beispiele, aber nicht alle Möglichkeiten dargestellt.

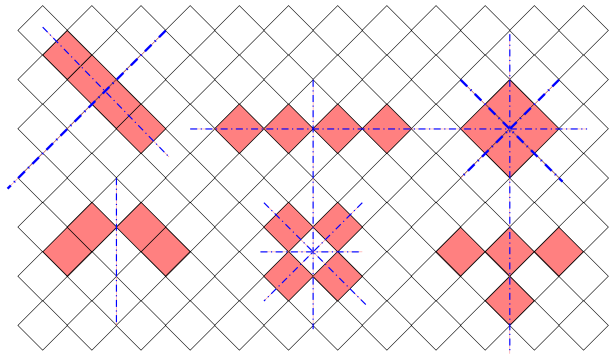
(a)



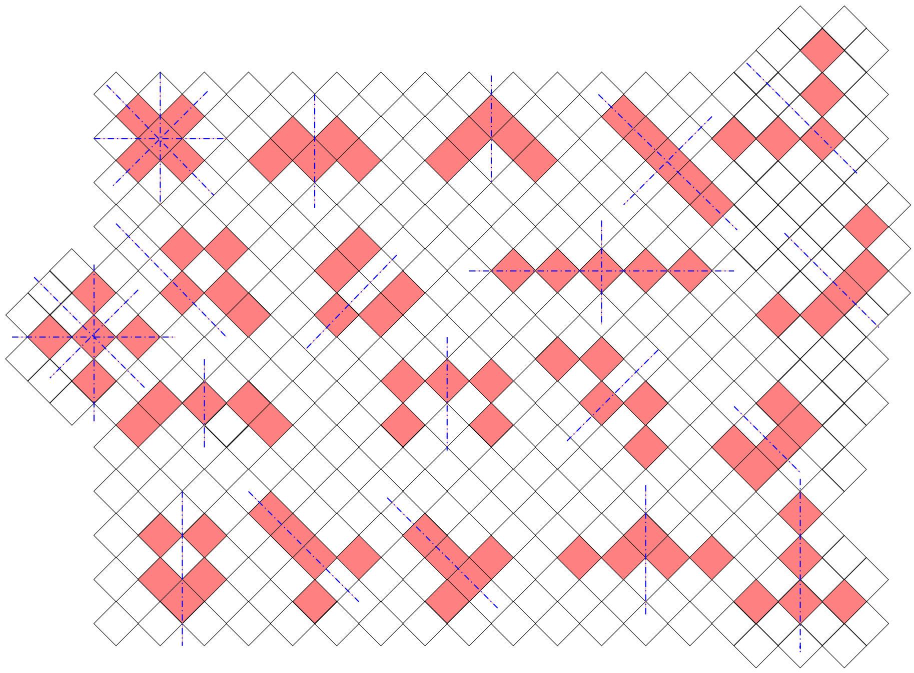
(b)



(c)

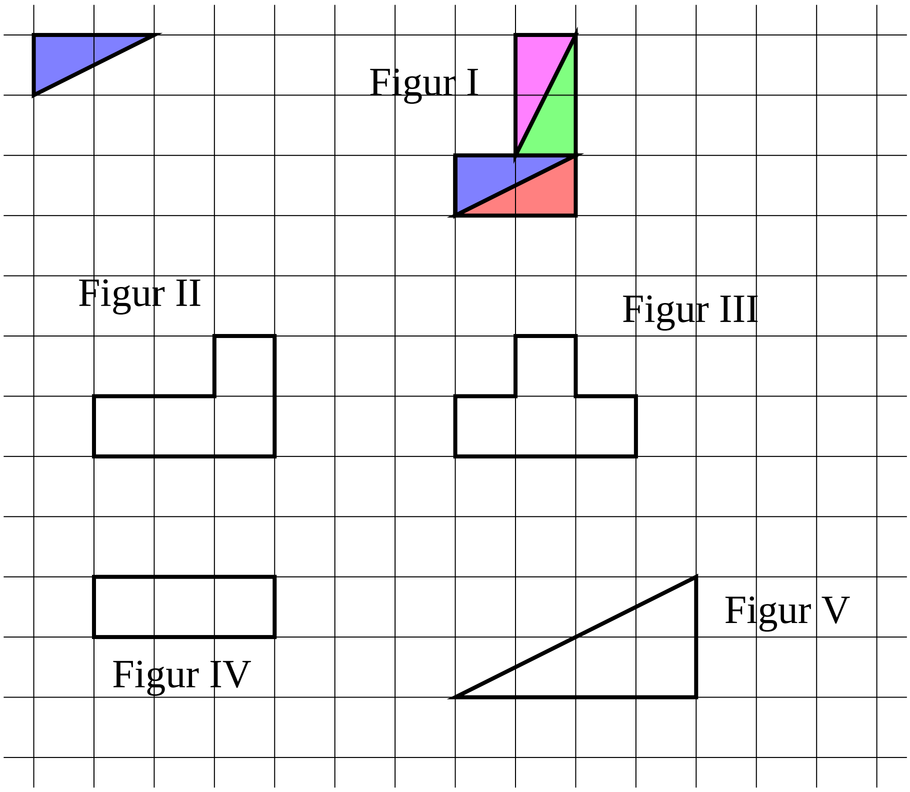


(d)



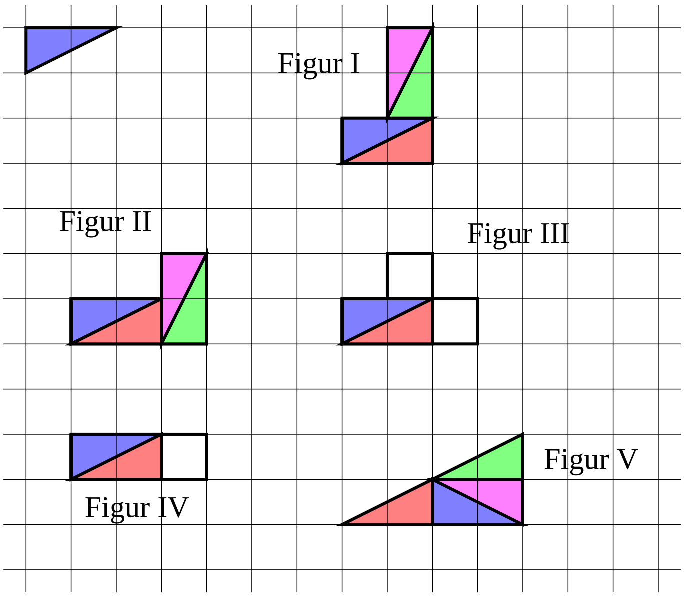
Anregung: Versuche die restlichen Möglichkeiten noch zu finden.

14.



Der Flächeninhalt der Figur I ist offenbar viermal so groß wie der des eingefärbten Dreiecks.
Wie oft passt der Flächeninhalt des eingefärbten Dreiecks in jede der Figuren II, III, IV und V? Arbeite wie im Beispiel mit Farben.

Lösung:



Zwei eingefärbte Dreiecke sind so groß wie zwei Kästchen. Also ist ein eingefärbtes Dreieck so groß wie ein Kästchen.

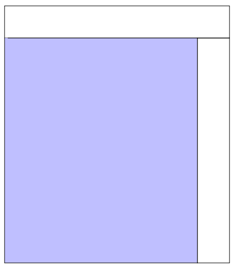
Figur II: Es passen vier Dreiecke hinein.

Figur III: Es passen ebenfalls vier Dreiecke hinein. Wenn du das obere Kästchen in der Figur II in die Mitte rückst, dann erhältst du die Figur III. Also passen genau so viele Dreiecke in die Figur III, nämlich vier.

Figur IV: Es passen drei Dreiecke hinein.

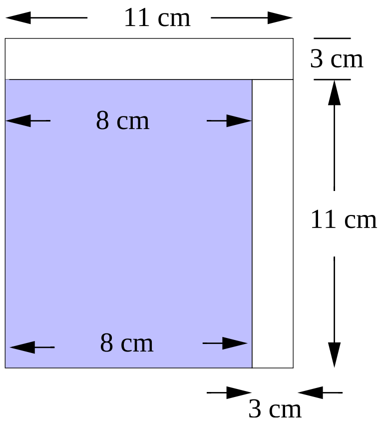
Figur V: Es passen vier Dreiecke hinein.

15.



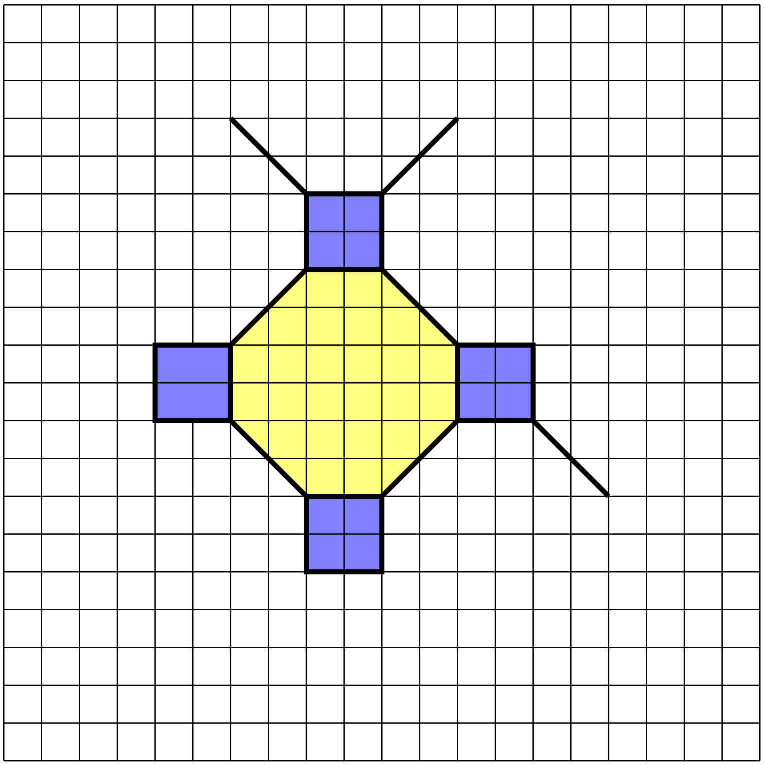
Zwei gleiche Papierstreifen, die jeweils 11 cm lang und 3 cm breit sind, werden so, wie es die Figur darstellt, aneinander gelegt.
Welchen Flächeninhalt hat das eingefärbte Rechteck?

Lösung:



Der Flächeninhalt des eingefärbten Rechtecks beträgt $8\,\text{cm} \cdot 11\,\text{cm} = 88\,\text{cm}^2$

16.

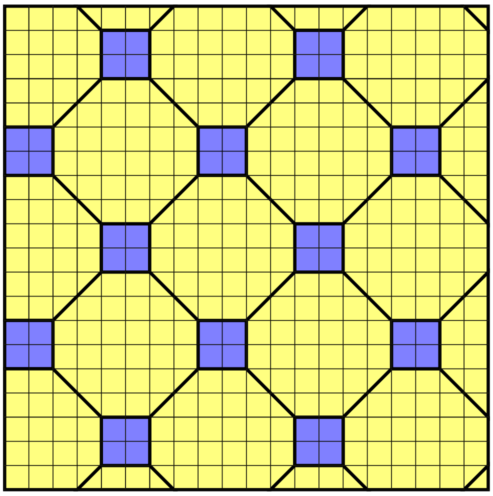


Familie Seifel möchte den Fußboden im Bad mit großen achteckigen und mit kleinen quadratischen Fliesen neu belegen lassen. Herr Seifel hat dazu schon einen Plan angefangen.

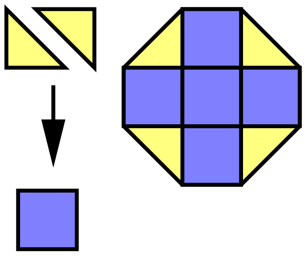
(a) Setze diesen Plan bis zum Rand lückenlos fort.

(b) Wie viel mal größer als eines der kleinen Quadrate ist das große Achteck?

Lösung: (a)

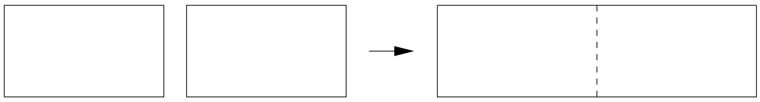


(b)



In das Achteck passen fünf kleine Quadrate. Dann bleiben noch 4 gleiche Dreiecke übrig. Je zwei davon lassen sich zu einem kleinen Quadrat zusammenfügen.
Also ist das große Achteck siebenmal so groß wie ein kleines Quadrat.

17.



Jedes der beiden Rechtecke soll $3,5\,\text{cm}$ lang und $2\,\text{cm}$ breit sein. Sie werden zu einem einzigen Rechteck lückenlos so zusammengefügt, wie es die Darstellung zeigt.

(a) Berechne den Umfang von einem der beiden kleinen Rechtecke.

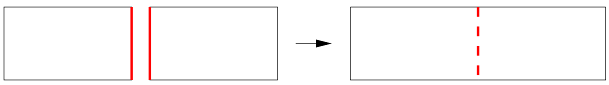
(b) Egon soll den Umfang des großen Rechtecks berechnen. Er meint: „Das ist doch ganz leicht. Das große Rechteck besteht aus zwei kleinen, die gleich sind. Also ist der Umfang des großen Rechtecks doppelt so groß wie der von einem kleinen.“ Sophia widerspricht ihm: „Erst, wenn du von deinem Ergebnis noch $4\,\text{cm}$ abziehst, kommt das richtige Ergebnis heraus.“ Was hat Sophia damit gemeint? Mache es an einer Skizze deutlich. Berechne den gesuchten Umfang.

(c) Jetzt werden drei dieser kleinen Rechtecke zu einem einzigen großen auf die gleiche Weise zusammengefügt. Wie oft musst du jetzt noch die $4\,\text{cm}$ abziehen, bis es stimmt? Berechne jetzt den Umfang des so entstandenen großen Rechtecks mit der Methode von Egon.

(d) Berechne nach der „Egon-Methode“ den Umfang des Rechtecks, das aus 100 kleinen Rechtecken zusammengefügt worden ist.

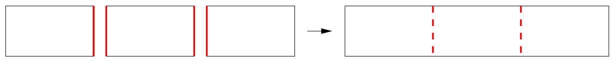
Lösung: (a) $u = 2 \cdot 3,5\,\text{cm} + 2 \cdot 2\,\text{cm} = 11\,\text{cm}$

(b)



Die zwei Breitseiten der beiden Rechtecke, die sich gegenüber liegen, verschwinden beim Zusammenfügen im Inneren des großen Rechtecks. Sie fallen also bei der Berechnung des Umfang des großen Rechtecks weg. Zusammen sind die beiden Seiten $4\,\text{cm}$ lang. Also: $u = 2 \cdot 11\,\text{cm} - 4\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$.

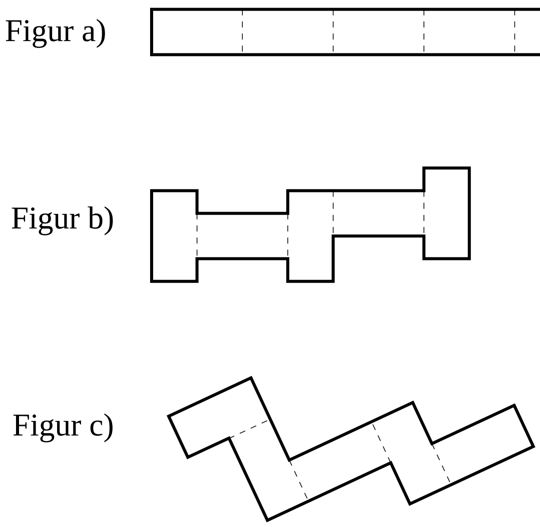
(c)



Du hast es bei drei kleinen Rechtecken mit zwei „Nahtstellen“ zu tun. Also musst du die 4 cm zwei Mal subtrahieren:
$u = 3 \cdot 11\,\text{cm} - 2 \cdot 4\,\text{cm} = 25\,\text{cm}$.

(d) Vom 100-fachen Umfang eines kleinen Rechtecks musst du jetzt noch 99 Nahtstellen subtrahieren:
$u = 100 \cdot 11\,\text{cm} - 99 \cdot 4\,\text{cm} = 704\,\text{cm}$. Das ist etwas mehr als 7 m.

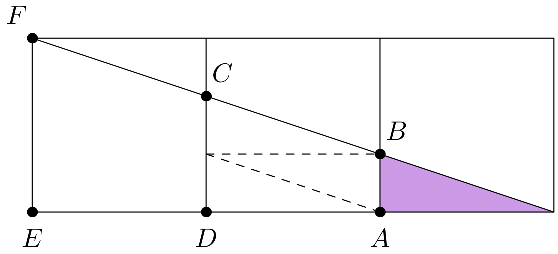
18.



Max und Elfi haben die drei Figuren aus 15 gleichen Bausteinen gelegt.
Jede der drei Figuren setzt sich aus fünf dieser Bausteine zusammen. Vergleiche die Umfänge der drei Figuren.

Lösung: Jede Figur weist an den gestrichelten Linien vier gleich lange Nahtstellen auf.
Jede Figur besteht aus zwei rechteckigen Endstücken. Bei jedem davon verschwindet eine Breitseite im Flächeninneren.
Jede Figur besteht aus drei rechteckigen Mittelstücken. Bei jedem davon verschwinden zwei Breitseiten im Flächeninneren. Also sind die drei Figuren umfangsgleich.

19.



Ruth soll im Kunstunterricht ein Muster für eine Ausstellung entwerfen. Sie hat schon drei Quadrate, mehrere gestrichelte Hilfslinien und ein getöntes Dreieck eingezeichnet. Das dunkel getönte Dreieck soll später in der Ausstellung $15\,\text{dm}^2$ groß werden.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AD} = 2\,\text{cm}$.

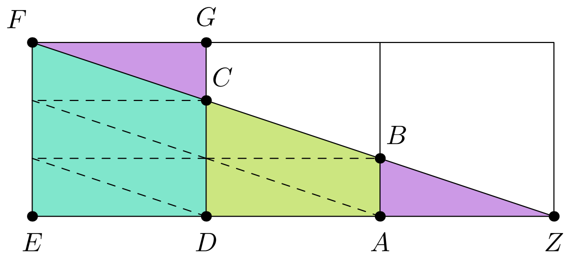
(b) Welchen Flächeninhalt bekommt dann das Viereck $ABCD$ in der Ausstellung? Begründe deine Antwort.

(c) Wie groß wird dann die Fläche des Vierecks $EDCF$ in der Ausstellung? Begründe deine Antwort. Zeichne dazu weitere Hilfslinien ein.

(d) Welche Fläche bedecken dann die drei Quadrate zusammen in der Ausstellung? Begründe deine Antwort.

(e) Entwirf selbst ein buntes Dreiecksmuster in Quadraten.

Lösung: (a)



(b) Das Viereck $ABCD$ nennt man auch „Trapez“, obwohl es nicht symmetrisch ist. Damit sich ein Viereck „Trapez“ nennen darf, genügt es, dass in ihm zwei Seiten parallel sind. In diesem Trapez steckt das Dreieck AZB dreimal. Das Trapez wird also $3 \cdot 15\,\text{dm}^2 = 45\,\text{dm}^2$ groß.

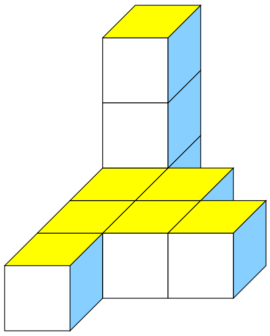
(c) Das Viereck $EDCF$ ist auch ein Trapez.
In diesem Trapez steckt das Dreieck AZB fünfmal. Das Trapez wird also $5 \cdot 15\,\text{dm}^2 = 75\,\text{dm}^2$ groß.

(d) Eines der Quadrate enthält sechs Dreiecke zu je $15\,\text{dm}^2$. Also hätten die drei Quadrate in der Ausstellung zusammen einen Flächeninhalt von

$$3 \cdot 6 \cdot 15\,\text{dm}^2 = 270\,\text{dm}^2.$$

(e) Deiner Phantasie sind keine Grenzen gesetzt.

20.



Klaus hat eine Plastiktüte voll von 87 gleichen kleinen Würfeln. Davon hat Marion welche genommen und die Figur aufgebaut. Diese Figur will sie zu einem großen Würfel vervollständigen.

(a) Wie viele Würfel aus der Plastiktüte braucht sie noch mindestens, damit aus der angefangenen Figur ein Würfel wird?

(b) Berechne, wie viele kleine Würfel dann noch in der Plastiktüte sind.

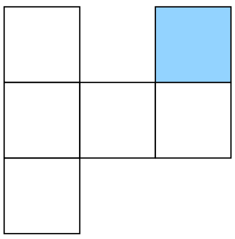
(c) Würden die 87 Würfel für einen großen Würfel reichen, der in jeder Schicht 25 Würfel enthält? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) Schräg nach hinten kannst du erkennen, dass in dieser Linie 4 Würfel enthalten sind. In allen anderen Reihen stehen weniger Würfel. Also braucht Marion insgesamt mindestens $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ Würfel.
Für die Figur hat sie schon 9 Würfel verwendet. Also braucht sie mindestens noch $64 - 9 = 55$ Würfel.

(b) In der Tüte sind dann noch $87 - 64 = 23$ Würfel.

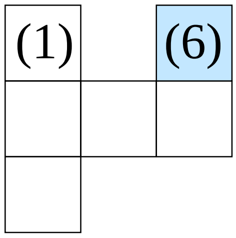
(c) Der große Würfel müsste 5 solcher Schichten enthalten.
Für den betreffenden Würfel bräuchte Marion $5 \cdot 25 = 125$ Würfel. Das sind mehr als in der Tüte waren.

21.



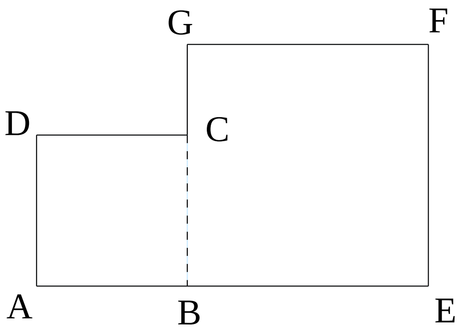
Lisa hat das dunkel getönte Quadrat noch hinzugefügt, damit ein Würfelnetz entsteht. Marcel meint dazu: „Da stimmt doch etwas nicht, denn …“
Wie würdest du Marcels angefangene Behauptung fortsetzen?

Lösung:



„. . . beim Zusammenfalten würden die beiden Quadrate (1) und (6) aufeinander liegen.“

22.

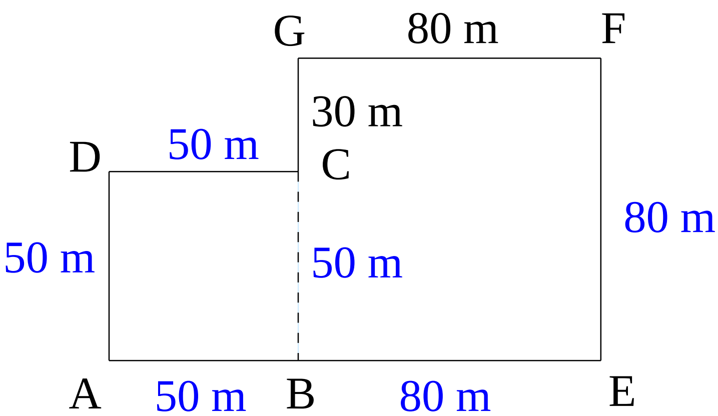


Das Grundstück $AEFGCD$ setzt sich aus den beiden Quadraten $ABCD$ und $BEFG$ zusammen. In der Planfigur gilt: $\overline{GC} = 30\,\text{m}$ und $\overline{GF} = 80\,\text{m}$.

(a) An der Grundstücksseite $[AE]$ wird der Zaun erneuert. Berechne die Länge dieses Zaunes.

(b) Berechne die Grundstücksfläche.

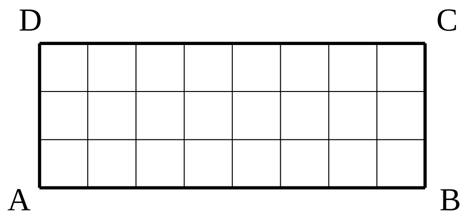
Lösung:



(a) Die Strecke $[GB]$ ist genau so lang wie die Strecke $[FE]$, nämlich $80\,\text{m}$, denn das Viereck $GBEF$ ist ein Quadrat.
Weil die Strecke $[GC]$ $30\,\text{m}$ lang ist, muss die Strecke $[CB]$ $50\,\text{m}$ lang sein.
Damit sind alle Seiten des Quadrates $ABCD$ $50\,\text{m}$ lang.
Der Zaun $[AE]$ ist also $80\,\text{m} + 50\,\text{m} = 130\,\text{m}$ lang.

(b) Die Grundstücksfläche beträgt $50\,\text{m} \cdot 50\,\text{m} + 80\,\text{m} \cdot 80\,\text{m} = 8900\,\text{m}^2$.

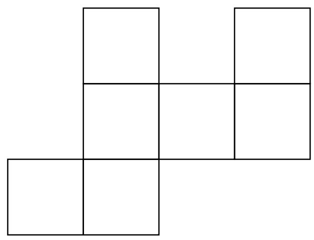
23.



Die rechteckige Fläche $ABCD$ in einem Bad wird gefliest. Jede Fliese hat eine Umfang von 20 cm. Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ in der Einheit dm^2.

Lösung: Wenn der Umfang einer quadratischen Fliese 20 cm beträgt, dann beträgt die Seitenlänge einer Fliese $20\,\text{m} : 4 = 5\,\text{cm}$.
Der Flächeninhalt einer Fliese beträgt damit $5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 25\,\text{cm}^2$.
Im Rechteck $ABCD$ befinden sich $3 \cdot 8 = 24$ Fliesen.
Also beträgt der Flächeninhalt des Rechtecks $24 \cdot 25\,\text{cm}^2 = 600\,\text{cm}^2 = 6\,\text{dm}^2$.

24.



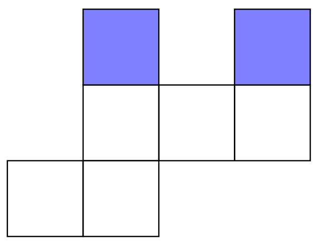
Erika soll die Figur ausschneiden, so dass ein Würfelnetz entsteht. Sie meint: „Die Figur ergibt kein Netz.“

(a) Woran hat sie das gemerkt?

(b) Zeichne die Figur und schneide sie so aus, dass ein Würfelnetz entsteht.

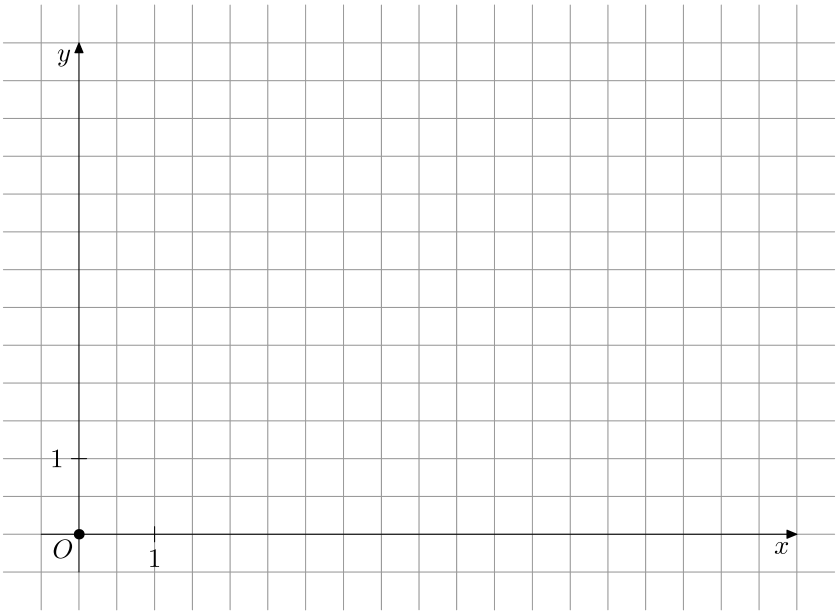
Lösung: (a) Jedes Würfelnetz besteht aus sechs Quadraten. Hier sind aber sieben aufgezeichnet.

(b)



Eines der beiden dunkel getönten Quadrate muss weggeschnitten werden..

25.



Gegeben sind die Punkte $A(0 \mid 3)$, $B(2 \mid 0)$, $C(4 \mid 3)$ und $D(2 \mid 6)$.

(a)
- Zeichne das Viereck $ABCD$ in das Gitternetz.
- Um welches besondere Viereck handelt es sich? Begründe.

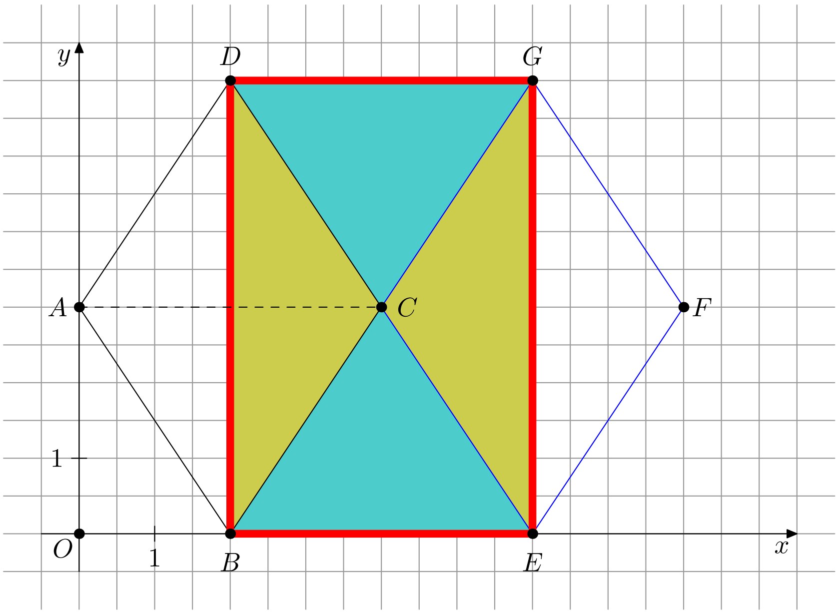
(b) Du erhältst ein neues Viereck $CEFG$, indem du die x-Werte aller Punkte A, B, C und D um jeweils 4 vergrößerst: A wandert dabei nach C, B nach E, C nach F und D nach G.
Zeichne das neue Viereck $CEFG$ in einer anderen Randfarbe ein. Male es nicht aus.

(c) Zeichne das Viereck $BEGD$ in einer neuen Randfarbe ein. Es muss ein Rechteck sein.

(d) Wie oft passt das Viereck $ABCD$ in das Viereck $BEGD$? Begründe deine Antwort sowohl mit Worten als auch durch Ausmalen entsprechender Teilflächen.

Lösung: Die Darstellung gehört zur zeichnerischen Lösung der Aufgaben (a), (b), (c) und (d).

(a)



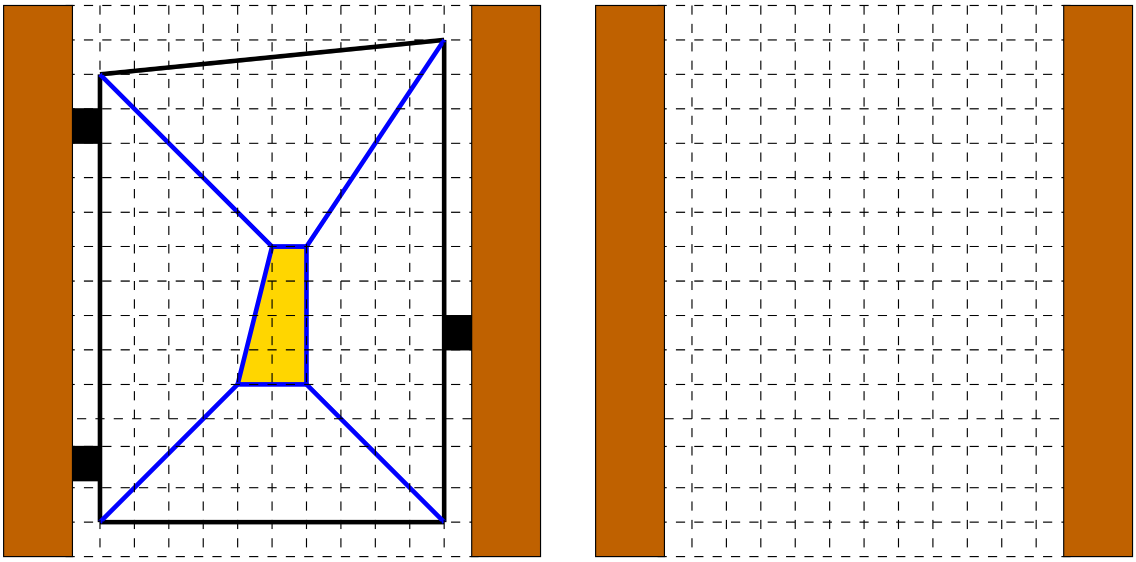
- Siehe oben.
- Das Viereck $ABCD$ ist nicht nur ein Parallelogramm, sondern sogar eine Raute, denn alle vier Seiten sind gleich lang.

(b) Siehe Zeichnung.

(c) Siehe Zeichnung.

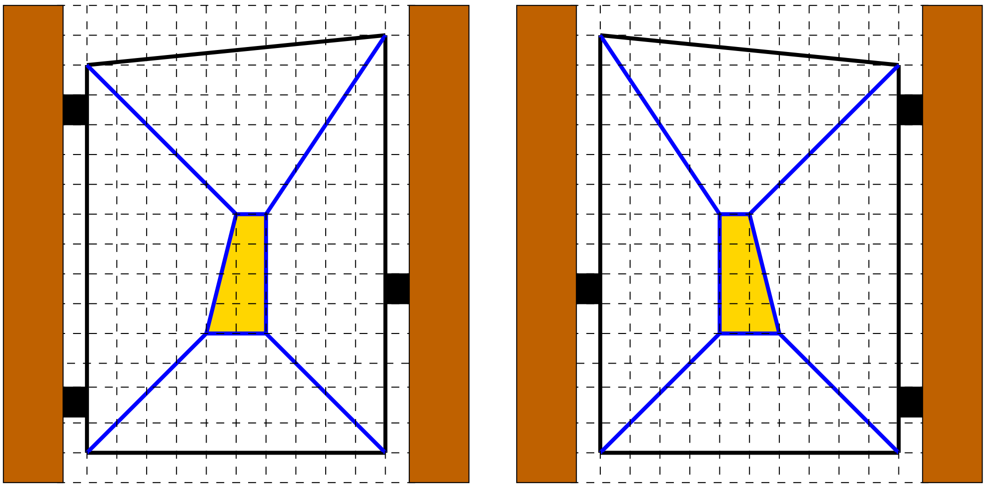
(d) In dem Rechteck $BEGD$ ergeben die beiden Teildreiecke BCD und CEG zusammen die Raute $ABCD$.
Die halbe Raute ACD ist genau so groß wie jedes der beiden Dreiecke BEC und CGD.
Also passt die Raute $ABCD$ zweimal in das Rechteck $BEGD$.

26.

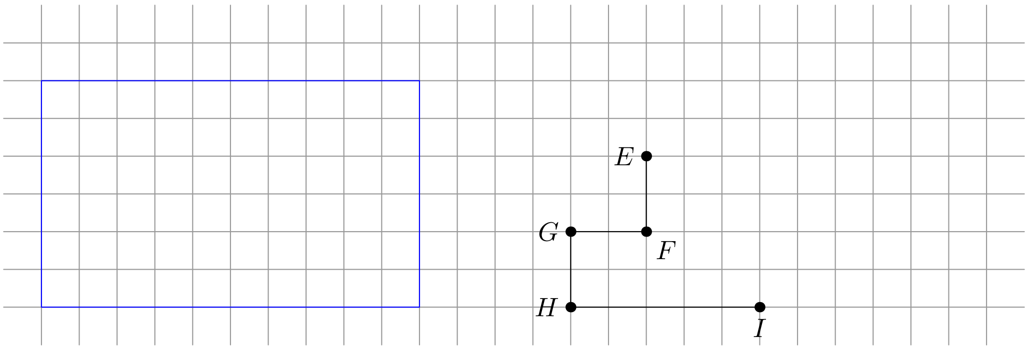


Das Tor zum Schloss Geostein ist in der linken Abbildung von vorne (Straßenseite) zu sehen. Zeichne in das rechte Gitternetz dieses Tor, wie man es von hinten (Schlossseite) sieht.
Quelle: Probeunterricht 2007 für bayerische Realschulen, 5. Jahrgangsstufe

Lösung:

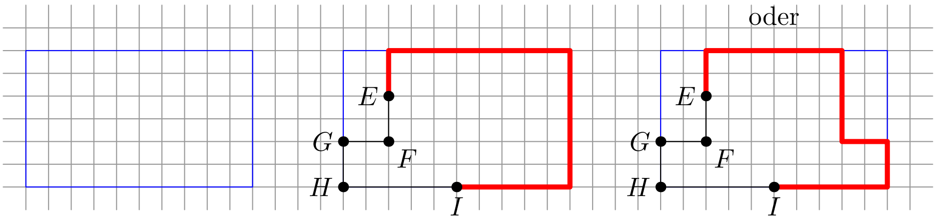


27.



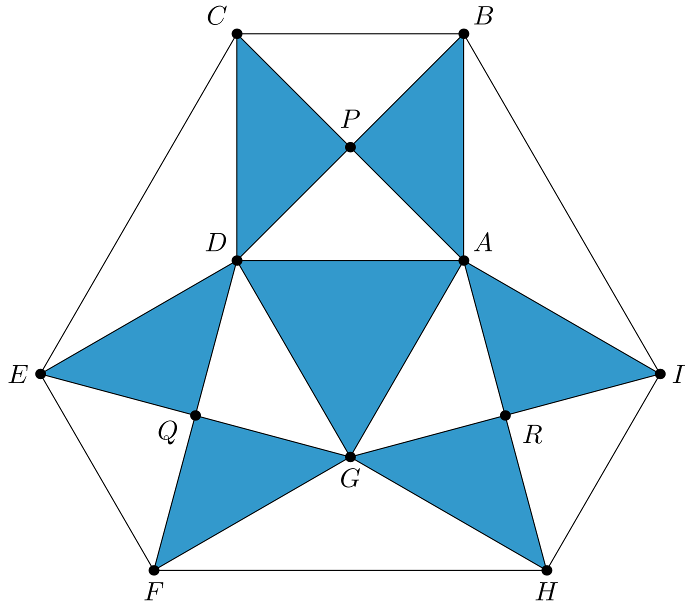
Setze den Streckenzug $E - F - G - H - I$ auf dem Gitter so fort, dass eine Fläche entsteht, deren Umfang genau so groß wie der des linken Rechtecks ist.

Lösung:



Hier sind zwei Möglichkeiten dargestellt. Es gibt noch viele weitere.

28.

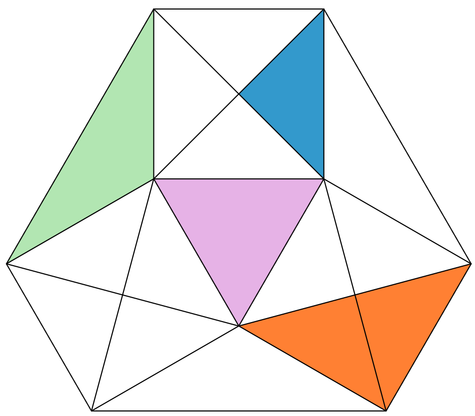


Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt.

(a) Welche Dreieckstypen entdeckst du in dem Wahrzeichen? Verwende zu deren Kennzeichnung jeweils drei Buchstaben.

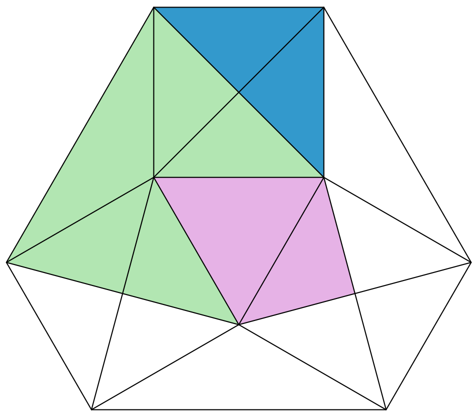
(b) Welche Vierecksteckstypen entdeckst du in dem Emblem? Verwende zu deren Kennzeichnung jeweils vier Buchstaben.

Lösung: (a)



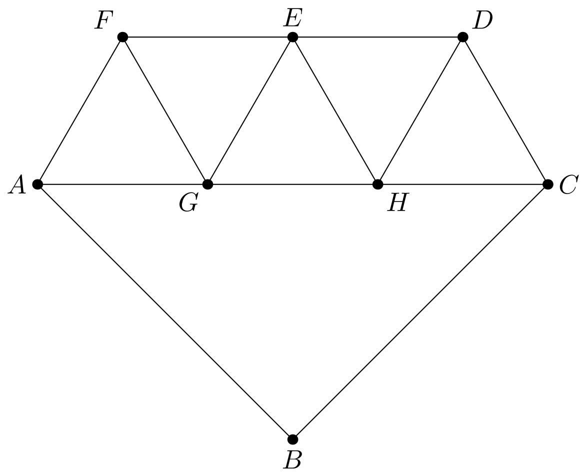
Es gibt ein gleichseitiges Dreieck vom Typ GAD.
Typ PAB: 12 gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke.
Typ EDC: 3 gleichschenklige Dreiecke.
Typ GHI: 12 gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, die jeweils doppelt so groß sind wie die vom Typ PAB.

(b)



Es gibt drei Quadrate vom Typ $ABCD$.
Es gibt drei achsensymmetrische Trapeze vom Typ $EGAC$.
Es gibt drei achsensymmetrische Drachenvierecke vom Typ $DGRA$.

29.



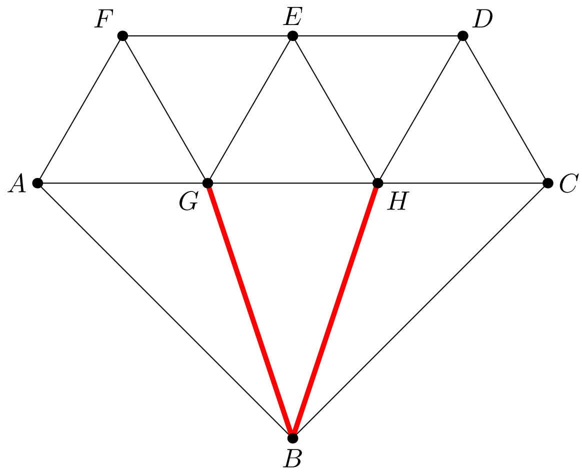
Über der Hypotenuse $[AC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt das Trapez $ACDF$, das sich aus fünf gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt.

(a) Wie viele Trapeze erkennst du außer dem Trapez $ACDF$ in der Figur? Verwende zum Aufzählen die Buchstaben.

(b) Zeichne farbig zwei Strecken so in die Figur, dass ein achsensymmetrisches Drachenviereck mit dem Eckpunkt E sichtbar wird.

(c) Woran erinnert dich die Figur jetzt?

Lösung:

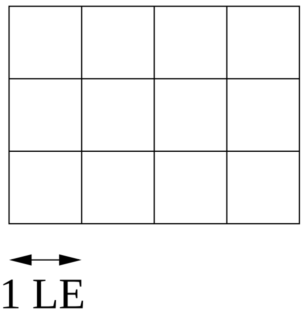


(a) Es sind **drei** Trapeze:
$AHEF$, $GCDF$ und $GHDF$.

(b) Siehe Zeichnung oben.

(c) Es könnte z.B. den Facettenschliff eines Brillinaten darstellen.

30.



Wie viele Quadrate entdeckst du in der Figur?

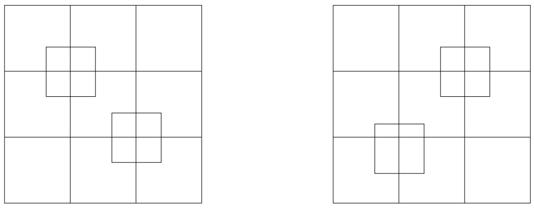
Lösung:

Zahl der Quadrate mit der Seitenlänge 1 LE:	12
Zahl der Quadrate mit der Seitenlänge 2 LE:	6
Zahl der Quadrate mit der Seitenlänge 3 LE:	2
Gesamtzahl der Quadrate :	20

31.

Figur 1

Figur 2



Beate betrachtet die beiden Figuren 1 und 2. Sie ist sich nicht sicher, ob die Anzahl der Quadate in beiden Darstellungen die gleiche ist. Wie würdest du diese Frage beantworten?

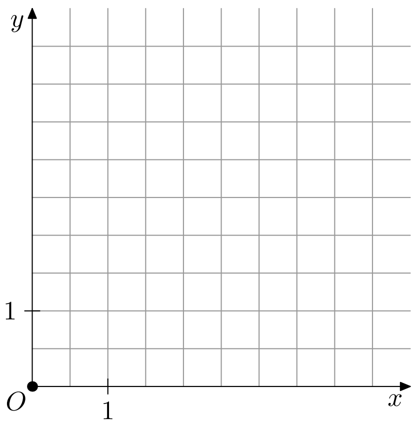
Lösung: In der Figur 1 werden die beiden „Extraquadrate“ durch die Gitterlinien in jeweils vier „Miniquadrate“ geteilt.
In der Figur 2 wird das „Extraquadrat“ links unten durch die Gitterlinien nur in vier Rechtecke, die keine Quadrate sind, geteilt.
Also enthält die Figur 1 mehr Quadrate als die Figur 2.

32. Zwei natürliche Zahlen x und y sollen zusammen 5 ergeben. In der Tabelle unten steht schon eine Möglichkeit: $x = 2$ und $y = 3$, so dass $x + y = 2 + 3 = 5$ gilt.

(a) Vervollständige die Tabelle entsprechend:

x		2			
y		3			
$(x \mid y)$		$(2 \mid 3)$			

(b) Die Zahlenpare in der dritten Zeile lassen sich als Punkte im Gitternetz deuten.



Trage alle Zahlenpaare der dritten Zeile in das Gitternetz ein.

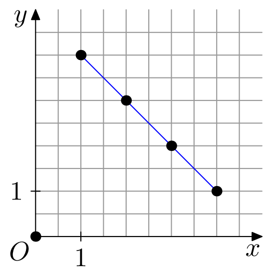
(c) • Die Punkte im Gitternetz liegen nicht wild in der Gegend herum. Beschreibe die Lage dieser Punkte:

- Mache deine Antwort auch im Gitternetz deutlich.

Lösung: (a) Vervollständige die Tabelle entsprechend:

x	1	2	3	4	
y	4	3	2	1	
$(x \mid y)$	$(1 \mid 4)$	$(2 \mid 3)$	$(3 \mid 2$	$(4 \mid 1)$	

(b)



(c)
- Alle Punkte liegen auf einer Strecke (oder Halbgeraden oder Geraden).
- Siehe Zeichnung.

33. In einer Plastiktüte befinden sich 100 gleiche Würfel, deren Kantenlänge jeweils 2 cm beträgt. Alfred will aus diesen Würfeln einen möglichst großen Würfel lückenlos zusammenfügen.

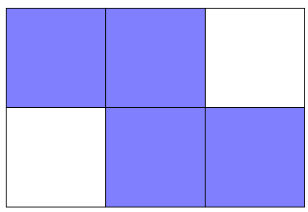
    (a) Wie viele kleine Würfel hat der dann übrig?

    (b) Wie hoch wäre der Turm aus kleinen Würfeln, die den großen Würfel ergeben?

Lösung: (a) Wenn in jeder Kante fünf kleine Würfel lägen, dann bräuchte Alfred $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ Würfel.
Also dürfen in jeder Kante nur 4 kleine Würfel liegen: $4^3 = 64$. Dann hat Alfred noch $100 - 64 = 36$ kleine Würfel übrig.

(b) Wenn Alfred die 64 kleinen Würfel zu einem Turm aufschichten könnte, dann wäre der Turm $64 \cdot 2\,\text{cm} = 128\,\text{cm}$ hoch.

34. Idee: Toni Chehlarova



Zähle die Rechtecke, deren eingefärbter Teil mehr als die Hälfte ihrer Fläche ausmacht.

Lösung: Unter den „kleinen Rechtecken“ können nur solche gezählt werden, die vollständig eingefärbt sind; das sind insgesamt 3 Rechtecke.
Das Rechteck jedoch, das alle Rechtecke umschließt, gehört auch dazu, denn vier von sechs seiner Teilflächen sind eingefärbt. Das ist mehr als die Hälfte.
Also sind es insgesamt 4 Rechtecke.

35. Idee: Fünfzehnte Fürther Mathematikolympiade, Klassenstufe 7 1. Runde Aufgabe 1
Fertige dir, z.B. aus Trinkhalmen, neun Stäbchen mit den Längen 1 cm, 2 cm bis 9 cm . Versuche dann, mit ihnen Quadrate zu legen, ohne ein Stäbchen zu zerstören.
(a) Begründe: Alle neun Stäbchen zusammen liefern kein Quadrat.
(b) Willy legt ein Quadrat, das an jeder Seite zwei Stäbchen enthält. Maria hat ihm zugeschaut. Sie meint: „Ich habe noch eine weitere Möglichkeit entdeckt.“
Gib alle Möglichkeiten an.

Lösung: (a) Die Summe der Längen der aneinandergereihten Stäbchen ergibt eine ungerade Zahl. Dieser Summenwert müsste die Maßzahl für den Umfang des gesuchten Quadrates sein.
Der Unfang eines Quadrates berechnet sich aus 4-mal die Länge einer Seite. Weil sich die Trinkhalm-Seitenlänge jedes Quadrates aus natürlichen Zahlen zusammensetzt, muss diese Seitenlänge in jedem Fall auch eine natürliche Zahl sein.
Wenn du jedoch die ungerade Umfangs-Maßzahl durch vier teilst, ergibt sich keine natürliche Zahl.

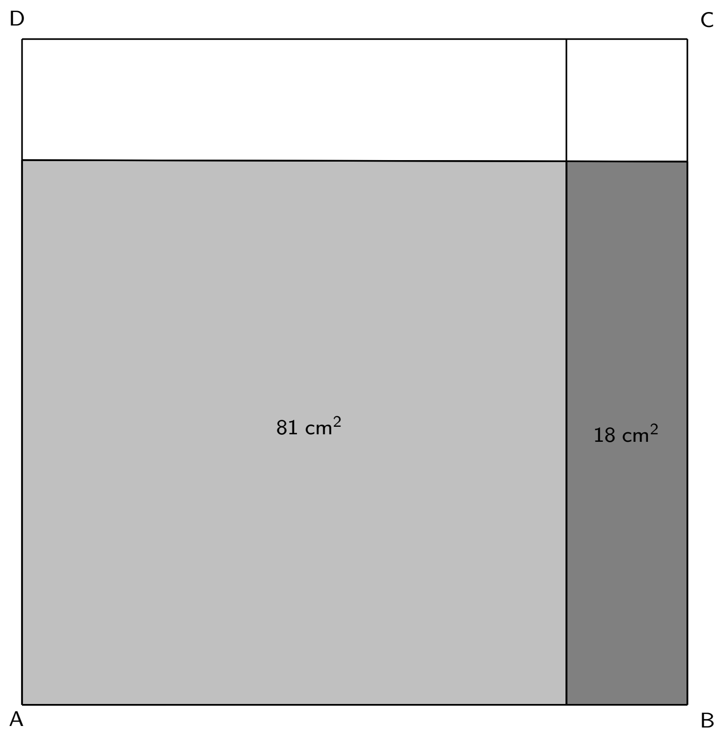
(b) Nachdem alle Stäbchen sich nicht zu einem Quadrat legen lassen, musst du mindestens eines weglassen. Dann sind noch acht Stäbchen übrig. Damit die Umfangsmaßahl gerade wird, muss das weggelassene Stäbchen eine ungerade Längenmaßzahl besitzen. Dann bleiben zum Aufbau von jeder Quadratseite jeweils zwei Stäbchen übrig.

	1. Sl. in cm	2. Sl. in cm	3. Sl. in cm	4. Sl. in cm
1. Mögl.	8+1=9	7+2=9	6+3=9	5+4=9
2. Mögl.	9+1 =10	8+2=10	7+3=10	6+4=10
3. Mögl.	9+2 =11	8+3=11	7+4=11	6+5=11

Das sind alle Möglichkeiten.

5 Flächenmessung

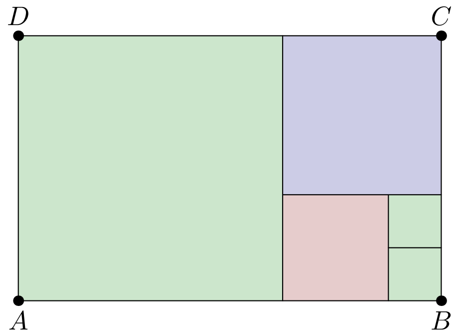
1.



Das einbeschriebene Quadrat hat einen Flächeninhalt von $81\,\text{cm}^2$ und das Rechteck einen Flächeninhalt von $18\,\text{cm}^2$. Berechne die Seitenlänge des Quadrats ABCD.

Lösung: Die Seitenlänge des Quadrats ABCD beträgt $11\,\text{cm}$.

2.



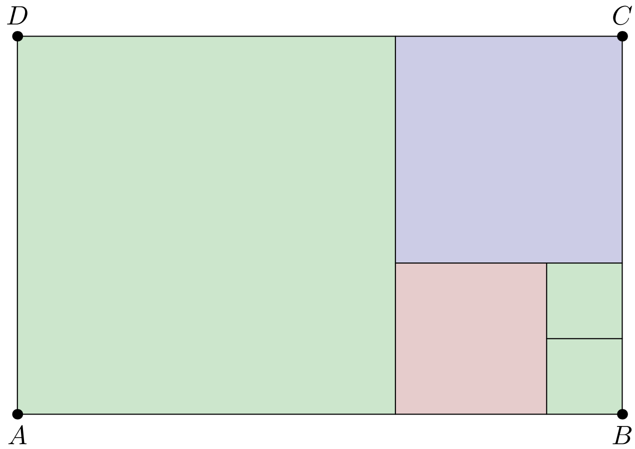
Das rechteckige Banner $ABCD$ ist aus lauter Quadraten zusammengefügt.

(a) Zeichne die Figur mit ihrem quadratischen Muster im Inneren für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$.

(b)
- Wie viele Quadrate sind es?
- Wie viele Rechtecke sind es?

(c) Das Banner wird aus Stoff zusammengenäht und mit einer goldenen Borte umsäumt.
Berechne die Mindestlänge des Saumes, wenn jedes der beiden kleinsten Quadrate einen Umfang von $24\,\text{cm}$ hat .

Lösung: (a)



(b)
- Es sind fünf Quadrate.
- Zunächst siehst du vier Rechtecke, die keine Quadrate sind.
  Weil sich jedes Quadrat aber gleichzeitig auch Rechteck nennen darf (da es in sich alle Eigenschaften eines Rechtecks vereinigt), enthält die Figur $5+4 = 9$ Rechtecke.

(c) Jedes der kleinsten Quadrate hat dann eine Seitenlänge von
$24\,\text{cm} : 4 = 6\,\text{cm}$.

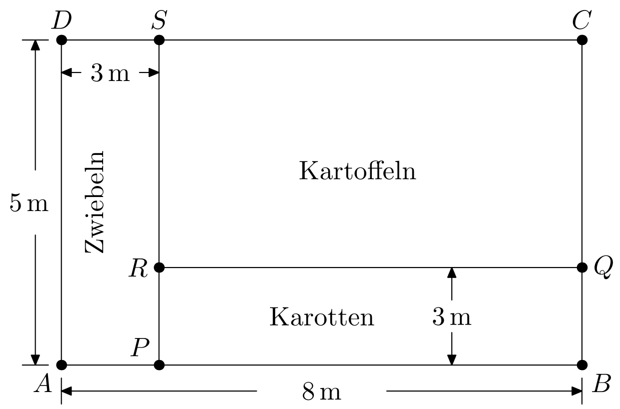
Das nächst größere Quadrat hat dann eine Seitenlänge von
$2 \cdot 6\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$.

Das Quadrat rechts oben hat dann eine Seitenlänge von
$12\,\text{cm} + 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$.

Das Quadrat links hat dann eine Seitenlänge von
$12\,\text{cm} + 18\,\text{cm} = 30\,\text{cm}$.

Somit erhältst du als Mindestlänge für den Goldsaum:
$u = 2 \cdot [(30 + 12 + 6) + (6 + 6 + 18)]\,\text{cm} = 156\,\text{cm}$.

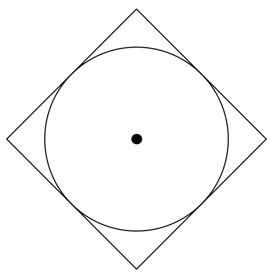
3.



Das rechteckige Feld $ABCD$ ist 8 m lang und 5 m breit.
Auf den drei rechteckigen Parzellen werden Karotten, Zwiebeln und Kartoffeln angebaut. Die beiden Streifen für Karotten und Zwiebeln sind jeweils 3 m breit.
Berechne den Flächeninhalt des Kartoffelfeldes. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

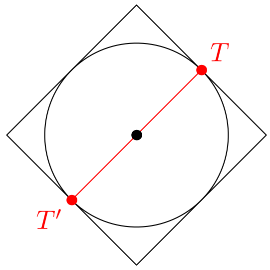
Lösung: Es gilt: $\overline{RQ} = 8\,\text{m} - 3\,\text{m} = 5\,\text{m}$ und $\overline{RS} = 5\,\text{m} - 3\,\text{m} = 2\,\text{m}$
$A_{\text{Kartoffelfeld}} = \overline{RQ} \cdot \overline{RS} = 5\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = 10\,\text{m}^2$.

4.



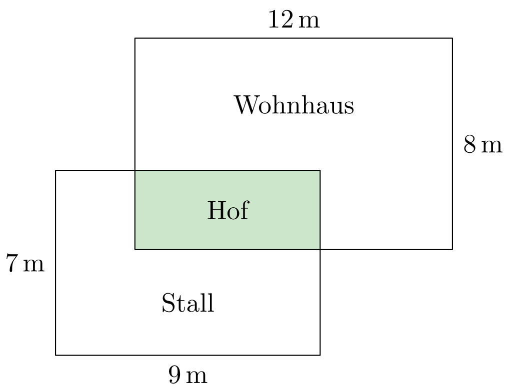
Eine kreisförmige Fensterscheibe ist von einem quadratischen hölzernen Rahmen eingefasst, dessen Gesamtlänge 5 m beträgt.
Welchen Durchmesser hat die Fensterscheibe?

Lösung:



Das Quadrat hat eine Seitenlänge von $5\,\mathrm{m} : 4 = 500\,\mathrm{cm} : 4 = 125\,\mathrm{cm}$.
Dann hat die Fensterscheibe ebenfalls einen Durchmesser von $125\,\mathrm{cm}$ (siehe Strecke $[TT']$) .

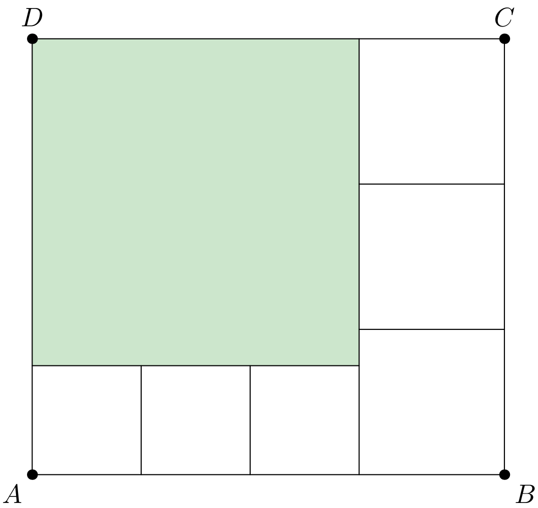
5.



Die Figur zeigt den Grundriss eines landwirtschaftlichen Anwesens. Die Grundfläche des Stalles beträgt $50\,\mathrm{m}^2$. Berechne die Grundfläche des Wohnhauses.

Lösung: Grundfläche des Stalles mit Hof: $9\,\mathrm{m} \cdot 7\,\mathrm{m} = 63\,\mathrm{m}^2$.
Grundfläche des Stalles: $50\,\mathrm{m}^2$.
Grundfläche des Hofes: $63\,\mathrm{m}^2 - 50\,\mathrm{m}^2 = 13\,\mathrm{m}^2$.
Grundfläche des Wohnhauses mit Hof: $12\,\mathrm{m} \cdot 8\,\mathrm{m} = 96\,\mathrm{m}^2$.
Grundfläche des Wohnhauses: $96\,\mathrm{m}^2 - 13\,\mathrm{m}^2 = 83\,\mathrm{m}^2$.

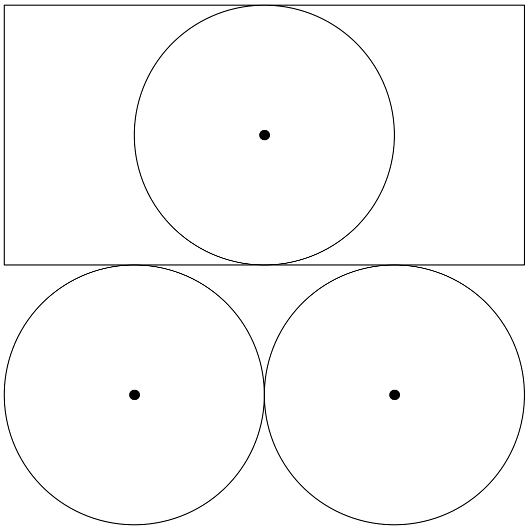
6.



Der eingefärbte Treppenabsatz ist ein Quadrat dessen Umfang 7m 2 dm beträgt.
Der Treppenabsatz ist von sechs quadratischen Betonplatten eingesäumt. Je drei davon haben die gleiche Größe.
Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$.

Lösung: $7\text{m}\,2\,\text{dm} = 72\,\text{dm}$.
Die Seitenlänge des quadratischen Treppenabsatzes beträgt dann
$72\,\text{dm} : 4 = 18\,\text{dm}$.
Dann beträgt die Seitenlänge eines der drei kleineren unteren Quadrate
$18\,\text{dm} : 3 = 6\,\text{dm}$.
Die Seite $[AD]$ des Rechtecks $ABCD$ ist dann $18\,\text{dm} + 6\,\text{dm} = 24\,\text{dm}$ lang.
Dann beträgt die Seitenlänge eines der drei größeren seitlichen Quadrate
$24\,\text{dm} : 3 = 8\,\text{dm}$.
Die Seite $[AB]$ des Rechtecks $ABCD$ ist dann $18\,\text{dm} + 8\,\text{dm} = 26\,\text{dm}$ lang.
Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ ergibt sich dann aus
$24\,\text{dm} \cdot 26\,\text{dm} = 624\,\text{dm}^2$.

7.



Welchen Flächeninhalt hat das Rechteck, wenn jeder Kreis einen Durchmesser von 10 cm hat? Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

Lösung: Länge des Rechtecks: $2 \cdot 10\,\text{cm} = 20\,\text{cm}$. Breite des Rechtecks: $10\,\text{cm}$.
Flächeninhalt des Rechtecks: $20\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} = 200\,\text{cm}^2$.

6 Teilbarkeit

1. Maria stellt zwei Behauptungen auf:
   (a) Die Zahl 123456789 ist durch 9 teilbar.
   (b) Wenn man die Ziffern einer 53-stelligen Zahl, die durch 9 teilbar ist, auf irgend eine Weise vertauscht, kann es passieren, dass die so entstandene neue Zahl nicht mehr durch 9 teilbar ist.

   Sind die beiden Behauptungen wahr? Begründe jeweils deine Antwort.

Lösung: (a) Das stimmt, denn die Quersumme ist 45.
(b) Das ist nicht wahr, denn die Vertauschung der Ziffern ändert nichts am Wert der Quersumme.

2. Finde eine möglichst große dreistellige Zahl, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und die nicht durch 3 teilbar ist.

Lösung: 986

3. Von den folgenden Zahlen fehlt eine Ziffer im Kästchen. Ergänze jeweils die Ziffer im Kästchen so, dass die Zahl dann durch 6 teilbar ist. Gib alle Möglichkeiten an.
   a) $244\boxed{?}$ b) $6\boxed{?}332$

Lösung:
a) $244\boxed{2}$ b) $6\boxed{1}332$
a) $244\boxed{8}$ b) $6\boxed{4}332$
b) $6\boxed{7}332$

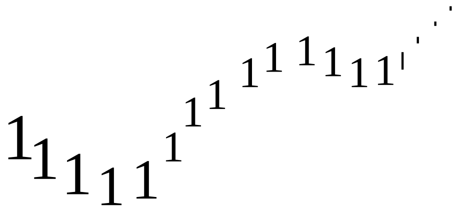
4. Schreibe die größte 5-stellige Zahl hin, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und die gleichzeitig durch 3 teilbar ist.

Lösung: 98 763

5. Schreibe die kleinste 9-stellige Zahl hin, die aus möglichst vielen gleichen Ziffern besteht und die gleichzeitig durch 5 aber nicht durch 10 teilbar ist.

Lösung: 100 000 005

6.



Erika und Paul sollen einen Zahlengiganten, der ausschließlich aus 2007 Einsen besteht, durch 9 teilen.

(a) Paul behauptet: „Bei dieser Division bleibt der Rest 1.“ Begründe dass Paul nicht Recht hat.

(b) Paul und Erika gehen bei der Division dieses Zahlengiganten systematisch vor: Sie rechnen zunächst $111\,111\,111 : 9$.
Dann rechnen sie $111\,111\,111\,111\,111\,111 : 9$ usw.
Berechne jeweils den Wert des Quotienten.

(c) Begründe: Der Wert des Quotienten aus der obigen Riesenzahl und 9 enthält nicht die Ziffer 8.

(d) Wie oft ist die „Sieben“ im Wert des Quotienten enthalten? Begründe deine Antwort.

(e) Wie oft ist die „Null“ im Wert des Quotienten enthalten? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) Ist die Quersumme einer natürlichen Zahl durch 9 teilbar, dann ist diese Zahl selbst durch 9 teilbar. Die Quersumme des Zahlengiganten beträgt $2007 \cdot 1 = 2007$ und $2 + 0 + 0 + 7 = 9$. Also ist der Zahlengigant ohne Rest durch 9 teilbar. Paul hat nicht Recht.

(b) $111\,111\,111 : 9 = 12\,345\,679$
$\underbrace{111\,111\,111}\,\underbrace{111\,111\,111} : 9 = \underbrace{12\,345\,679}\,\underbrace{012\,345\,679}$.

(c) In der Lösung (b) erkennst du, dass das erste Neunerbündel aus Einsen die Ziffernfolge 12 345 679 als Quotientenwert ergibt.
In der nächste Rechnung haben Paul und Erika zwei Neunerbündel aus Einsen geschnürt.
Wieder taucht im Ergebnis zunächst 12 345 679 und darauf folgend dieselbe Ziffernfolge mit einer vorangestellten Null auf.
2007 Einsen lassen sich zu $2007 : 9 = 223$ solcher Bündel aus jeweils 9 Einsen schnüren.
Jedes Bündel aus 9 Einsen (bis auf das erste) ergibt bei der Division durch 9 immer die gleiche Ziffernfolge, nämlich 012 345 679; d.h. die Ziffer 8 kommt niemals vor.

(d) Weil die Ziffernfolge 12 345 679 genau 223-mal erscheint, ist die 7 im Wert des Quotienten auch genau 223-mal vorhanden.

(e) Weil eine vorangestelle Null bei jeder natürlichen Zahl für deren Wert bedeutungslos ist, taucht die Null im Wert des Quotienten genau 222-mal auf.

7. (a)

$$3 \quad 5 \quad 7$$

Füge jeweils an die mit einem Pfeil gekennzeichnete Position eine Ziffer so ein, dass sich eine fünfstellige Zal ergibt, die durch 9 teilbar ist.

(b)

$$1 \quad 1 \quad 1$$

Löse die Aufgabe für die Zahl 111.

Lösung: (a) Wenn die Quersumme einer natürlichen Zahl; d.h. die Summe ihrer Ziffern durch 9 teilbar ist, dann ist diese natürliche Zahl durch 9 teilbar.
Die Quersumme von 357 beträgt $3 + 5 + 7 = 15$. Wenn der Wert der Summe aus den beiden einzufügenden Ziffern und 15 durch 9 teilbar ist, dann ist die Quersumme der gesuchten fünfstelligen Zahl ebenfalls durch 9 teilbar.
1. Möglichkeit:
Die Summe aus den beiden fehlenden Ziffern und 15 ergibt 18. Dann müssen die beiden fehlenden Ziffern zusammen 3 ergeben. Somit erhältst du die folgenden fünfstelligen Zahlen:
3**0**5**3**7, 3**3**5**0**7, 3**1**5**2**7, 3**2**5**1**7.
2. Möglichkeit:
Die Summe aus den beiden fehlenden Ziffern und 15 ergibt 27. Dann müssen die beiden fehlenden Ziffern zusammen 12 ergeben. Somit erhältst du die folgenden fünfstelligen Zahlen:
3**3**5**9**7, 3**9**5**3**7,
3**4**5**8**7, 3**8**5**4**7,
3**5**5**7**7, 3**7**5**5**7 und 3**6**5**6**7.
3. Möglichkeit:
Die Summe aus den beiden fehlenden Ziffern und 15 ergibt 36. Dann müssen die beiden fehlenden Ziffern zusammen 21 ergeben.
Es ist aber nur $9 + 9 = 18 < 21$ erreichbar. Somit erhältst du keine Zahlen mehr.

(b) Die Quersumme von 111 beträgt 3.
1. Möglichkeit:
Die Summe aus den beiden fehlenden Ziffern und 3 ergibt 9. Dann müssen die beiden fehlenden Ziffern zusammen 6 ergeben. Somit erhältst du die folgenden fünfstelligen Zahlen:
1**0**1**6**1, 1**6**1**0**1, 1**1**1**5**1, 1**5**1**1**1,
1**2**1**4**1, 1**4**1**2**1 und 1**3**1**3**1.
2. Möglichkeit:
Die Summe aus den beiden fehlenden Ziffern und 3 ergibt 18. Dann müssen die beiden

fehlenden Ziffern zusammen 15 ergeben. Somit erhältst du die folgenden fünfstelligen Zahlen:
1**7**1**8**1, 1**8**1**7**1, 1**6**1**9**1 und 1**9**1**6**1.
3. Möglichkeit:
Die Summe aus den beiden fehlenden Ziffern und 3 ergibt 27. Dann müssen die beiden fehlenden Ziffern zusammen 24 ergeben.
Es ist aber nur $9 + 9 = 18 < 24$ erreichbar. Somit erhältst du keine Zahlen mehr.

8. (a) Schreibe eine dreistellige Zahl hin, die durch 10 teilbar ist.
   (b) Streiche die letzte Ziffer dieser Zahl. Dadurch erhältst du eine neue, zweistellige Zahl.
   (c)
   - Subtrahiere die neue Zahl von der ursprünglichen (dreistelligen) Zahl.
   - Untersuche ohne Division, ob das Ergebnis durch 9 teilbar ist.
   - Durch welche Zahl, die größer als 10 ist, ist dein Ergebnis noch teilbar?

   (d)
   - Wiederhole alle obigen Rechenschritte mit einer weiteren dreistelligen Zahl. Gelten deine vorherigen Feststellungen jetzt auch noch?
   - Notiere eine Begründung dafür, was du entdeckt hast.

Lösung: (a) Z.B. 560.
(b) Die neue, zweistellige Zahl.heißt dann 56.
(c)
- $560 - 56 = 504$.
- Die Quersumme von 504 ergibt 9, also ist 504 durch 9 teilbar.
- $504 : 9 = 54$ also ist 504 auch durch 54, also durch die neue Zahl, teilbar.

(d)
- Die gemachten Feststellungen gelten stets.
- Die letzte Ziffer der ursprünglichen dreistelligen Zahl muss die Null sein. Wenn du die letze Ziffer streichst, dann entsteht eine Zahl, deren Zehnfaches die ursprüngleiche Zahl ist. Subtrahierst du von dieser ursprünglichen Zahl die neue Zahl, dann ergibt der Wert der Differenz das Neunfache der neuen Zahl. Also ist dieser Differenzwert nicht nur durch 9 sondern stets auch durch die neue (zweiziffrige) Zahl teilbar.

9. Untersuche, ob 2^{1400} durch 14 teilbar ist.

Lösung: Der Wert der Potenz 2^{1400} enthält (neben der Eins) ausschließlich gerade Zahlen als Teiler. Die Zahl 14 ist durch 7 teilbar. Wenn 2^{1400} durch 14 teilbar wäre, dann müsste der **Potenzwert** (nicht der Exponent!) auch durch 7 teilbar sein. Das ist ein Widerspruch: 2^{1400} ist nicht durch 7 und damit auch nicht durch 14 teilbar

10. Paul rechnet eine Aufgabe:

$$(3 \cdot 17 + 9) : (23 - 46 : 2) = 60 : 0$$

(a) Überprüfe, ob seine Rechnung bis dahin stimmt.

(b) Paul rechnet weiter: $60 : 0 = 60$.
Erika hat zugeschaut. Sie meint: „Das kann nicht sein, denn $60 : 1 = 60$.“ Paul entgenet: „Na und?“
Was hättest du Paul auf dessen Frage geantwortet?

(c) Erika probiert es anders. Sie rechnet $60 : 0 = 0$ und überprüft das Ergebnis mit der Umkehraufgabe.

- Schreibe die Umkehraufgabe hin. Stimmt Erikas Ergebnis?
- Notiere deine Überlegungen zur Aufgabe $60 : 0$.
- Wenn irgendeine natürliche Zahl durch null geteilt werden soll, dann … . Notiere eine logische Fortsetzung.

Lösung: (a) $(3 \cdot 17 + 9) : (23 - 46 : 2)) = (51 + 9) : (23 - 23) = 60 : 0$. Bis dahin stimmt alles.

(b) Nach Pauls Ansicht wäre sowohl $60 : 0 = 60$ als auch $60 : 1 = 60$.
Für die Umkehraufgabe als Probe würde einerseits gelten: $60 \cdot 0 = 60$, was falsch ist, andererseits wäre $60 \cdot 1 = 60$, was stimmt. Pauls Ergebnis kann nicht stimmen.

(c)
- UA: $0 \cdot 0 = 60$, was nicht stimmt. Erikas Ergebnis ist auch falsch.
- Z.B.: Wenn der Wert des Quotienten von $60 : 0$ irgendeine natürliche Zahl „$\square \in \mathbb{N}_0$“ wäre, dann müsste sich aus $60 : 0 = \square$ die UA $\square \cdot 0 = 60$ ergeben, was nicht stimmt, denn $60 \cdot 0 = 0$.
- Wenn irgendeine natürliche Zahl durch null geteilt werden soll, dann liefert die UA „Wert des Quotienten $\cdot\ 0 =$ natürliche Zahl“ stets ein falsches Ergebnis; d.h. ist der Divisor null, dann gibt es keinen vernünftigen Wert des Quotienten.

11.
- Notiere eine fünfstellige Zahl.
- Streiche die mittlere Ziffer. Dadurch entsteht eine neue, vierstellige Zahl.
- Subtrahiere die vierstellige von der fünfstelligen Zahl.

(a) Notiere einen möglichst großen Teiler des Differenzwertes.

(b)
- Wiederhole die Einzelschritte mit einer anderen fünfstelligen Zahl. Notiere wieder einen möglichst großen Teiler.
- Vergleiche dein Ergebnis mit dem deiner Banknachbarn.
- Ist das immer so? Begründe.

(c) Tim behauptet: „Da kannst du mit jeder beliebigen natürlichen Zahl experimentieren. Dieser Teiler stellt sich dann stets ein.“
Erna widerspricht: „Das stimmt nicht immer. Die Stellenzahl muss … . Wenn das aber der Fall ist, dann stoßen wir stets auf diesen großen Teiler.“

- Welcher Inhalt steckt in den drei Punkten? Notiere den vollständigen Satz.
- Begründe, dass Erna mit den Teiler Recht hat.

Lösung: (a) Nimm z.B. die Zahl 72 538. Daraus wird 7 238. $72\,538 - 7238 = 65\,300$.
Der möglichst große Teiler ist 100.

(b)
- Als möglichst großen Teiler erhältst du wieder 100..
- Auch Deine Banknachbarn müssten diesen Teiler in ihrem Ergebnis wiederfinden.
- Die letzten beiden Ziffern im Minuenden und im Subtrahenden stimmen stets überein. Dann müssen die letzten beiden Ziffern des Differenzwertes Nullen sein. Allso ist der Wert der Differenz immer durch 100 teilbar.

(c)
- „Die Stellenzahl muss **mindestens drei betragen und ungerade sein**.“ (Ist die Stellenzahl gerade, dann gibt es keine „mittlere Ziffer“.)
- Weil dann in jedem Fall wieder Minuend und Subtrahend auf die gleichen beiden Ziffern enden, stehen beim Differenzwert am Ende zwei Nullen. Also ist 100 stes ein Teiler des Ergebnisses.

12. Erfinde 10 Divisionsaufgaben, wobei jeweils nur die drei Ziffern 0, 5 und 7 mindestens einmal vorkommen. Bei der anschließenden Division darf kein Rest bleiben.

Lösung: Z.B. $700 : 5 = 140 \quad 7000 : 5 = 1400 \quad 70000 : 5 = 14000$ usw.

oder

$705 : 5 = 141 \quad 750 : 5 = 150 \quad 570 : 5 = 114$

oder

$7005 : 5 = 1401 \quad 7050 : 50 = 150 \quad 57500 : 500 = 15$ usw.

oder

$70 : 5 = 14 \quad 700 : 50 = 14 \quad 7000 : 500 = 14$ usw.

13. Karl rechnet: $374\,389 \cdot 9 = 3\,349\,501$.
    (a) Angela betrachtet das Ergebnis. Sie meint: „Du hast dich verrechnet.“
    Begründe ohne den richtigen Produktwert zu berechnen, dass Angela Recht hat.
    (b) Angela berechnet das korrekte Ergebnis. Sie entdeckt, dass sich Karl nur an der Zehntausenderstelle vertan hat.
    Ermittle die richtige Zehntausenderstelle ohne den ganzen Produktwert zu berechnen.

Lösung: (a) Da die Rechenaufgabe den Faktor 9 enthält, muss der Produktwert wiederum durch 9 teilbar sein, aber dessen Quersumme beträgt $3+3+4+9+5+0+1=25$. Weil 9 kein Teiler von 25 ist, kann Karls Ergebnis nicht stimmen.

(b) Du musst also Neunervielfache finden, die in der Nähe von 25 liegen.
Die Quersumme 18 kann mit Hilfe einer abgeänderten Zehntausenderstelle 4 nicht erreicht werden, denn dann müsste die richtige Ziffer um 7 kleinerer als 4 sein. Eine solche Ziffer gibt es nicht.
Also muss das richtige Ergebnis die Quersumme 27 besitzen. Das ist dann der Fall, wenn die falsche Ziffer 4 durch die Ziffer 6 ersetzt wird.
In der Tat ist dann $374\,389 \cdot 9 = 3\,369\,501$.

14. Unter der Quersumme QS einer natürlichen Zahl versteht man den Wert der Summe aus ihren Ziffern.
Beispiel: $QS(409) = 4+0+9 = 13$.

(a) Notiere alle natürlichen Zahlen zwischen 9 und 45, die durch ihre Quersumme teilbar sind.

(b) Emil betrachtet das Ergebnis und meint: „Hier stehen nur Zahlen, die durch 3 oder durch 10 teilbar sind. Das gilt auch bestimmt für alle Zahlen von 10 bis 100.“
Begründe, dass Emil Recht hat.

(c)
- Welche dreistelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 4 sind durch 4 teilbar?
- Welche dreistelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 7 sind durch 7 teilbar?
- Welche vierstelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 25 sind durch 25 teilbar?

Lösung: (a) $\{10; 12; 18; 20; 21; 24; 30; 36; 40; 42\}$.

(b) Es kommen nur Zahlen mit $QS \in \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 11; 13; 14; 16\}$ in Frage.
$QS = 1$ liefert $\{10; 100\}$: Beides sind aber ein Zehnervielfache.
$QS = 2$ liefert 11 und 20. Beide Möglichkeiten scheiden aus.
$QS = 4$ liefert $\{13; 31; 22; 40\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 5$ liefert $\{14; 23; 41; 32; 50\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 7$ liefert $\{16; 25; 34; 61; 52; 43; 70\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 8$ liefert $\{17, 26; 35; 44; 71; 62; 43; 80\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 11$: Die zugehörigen natürlichen Zahlen müssen zwei gleiche Ziffern besitzen. Damit kommt aber keine $QS = 11$ zustande.
$QS = 13$ liefert $\{49; 58; 67; 94; 85; 76\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 14$ liefert $\{59; 68; 77; 86; 95\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 16$ liefert $\{79; 88; 97\}$. Keine Möglichkeit.

(c)
- Auf jeden Fall gehört 400 mit der $QS = 4+0+0 = 4$ dazu.
  Nun ist $4 = 1+1+2$. Also: $112 : 4 = 28$: Daher ist 112 eine der gesuchten Zahlen.

Alle anderen dreistelligen Zahlen, die sich aus den Ziffern 1 und 2 zusammensetzen, sind ungerade und damit nicht durch 4 teilbar.
Weiter ist $4 = 2 + 2$. Das ergibt 202 (nicht durch 4 teilbar) und
$220 : 4 = 55$. Daher ist 220 eine weitere der gesuchten Zahlen, andere gibt es nicht.

- Wieder ist 700 mit der $QS = 7 + 0 + 0 = 7$ eine der gesuchten Zahlen.

1. Fall:
$7 = 1 + 0 + 6$ ergibt $\{106; 160; 610; 601\}$.
$106 : 7 = 15$ Rest 2.
$160 : 7 = 22$ Rest 6.
$610 : 7 = 87$ Rest 1.
$601 : 7 = 85$ Rest 6.

2. Fall:
$7 = 2 + 0 + 5$ ergibt $\{205; 250; 502; 520\}$.
$205 : 7 = 29$ Rest 2.
$250 : 7 = 35$ Rest 5.
$502 : 7 = 71$ Rest 5.
$520 : 7 = 74$ Rest 2.

3. Fall:
$7 = 3 + 0 + 4$ ergibt $\{304; 340; 403; 430\}$.
$304 : 7 = 43$ Rest 3.
$340 : 7 = 48$ Rest 4.
$403 : 7 = 57$ Rest 4.
$430 : 7 = 61$ Rest 3.

4. Fall:
$7 = 1 + 1 + 5$ ergibt $\{115; 151; 511\}$.
$115 : 7 = 16$ Rest 4.
$151 : 7 = 21$ Rest 4.
$511 : 7 = 73$ Rest 0. Also ist 511 eine der gesuchten Zahlen.

5. Fall:
$7 = 1 + 2 + 4$ ergibt $\{124; 142; 214; 241; 412; 421\}$.
$124 : 7 = 17$ Rest 5.
$142 : 7 = 20$ Rest 2.
$214 : 7 = 30$ Rest 4.
$241 : 7 = 34$ Rest 3.
$412 : 7 = 58$ Rest 6.
$421 : 7 = 60$ Rest 1.

6. Fall:
$7 = 1 + 3 + 3$ ergibt $\{133; 313; 331\}$.

$133 : 7 = 19$ Rest 0. Also ist 133 eine der gesuchten Zahlen.
$313 : 7 = 44$ Rest 5.
$331 : 7 = 47$ Rest 2.

7. Fall:
$7 = 2 + 2 + 3$ ergibt $\{223; 232; 322\}$.
$223 : 7 = 31$ Rest 6.
$232 : 7 = 33$ Rest 1.
$322 : 7 = 46$ Rest 0. Also ist 322 eine der gesuchten Zahlen.

Also kommen nur die Zahlen 133, 322, 511 und 700 in Frage.

- Eine natürliche Zahl ist durch 25 teilbar, wenn sie auf das Ziffernpaar ... 00 oder ... 25 oder ... 50 oder ... 75 endet.

  1. Fall: Die Zahl endet auf ... 00 .
  Dann müssten die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 25 ergeben. Das ist nicht möglich.

  2. Fall: Die Zahl endet auf ... 25 .
  Dann muss die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 18 ergeben. Das ergibt 9925 als einzige Zahl: $9 + 9 + 2 + 5 = 25$.

  3. Fall: Die Zahl endet auf ... 50 .
  Dann müssten die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 20 ergeben. Das ist nicht möglich.

  4. Fall: Die Zahl endet auf ... 75 .
  Dann muss die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 13 ergeben. Das ergibt die folgenden Möglichkeiten: 9475 , 4975, 8575, 5875, 6775 und 7675 .

15. (a) Überprüfe, ob die Zahl 1 213 145 durch 9 teilbar ist.
    (b) Streiche bestimmte Ziffern durch, so dass die übrig gebliebene Zahl (die Reihenfolge der restlichen Ziffern soll unverändert bleiben) durch 9 teilbar ist. Gib sieben Möglichkeiten an.

Lösung: (a) Ist der Wert der Quersumme einer Zahl durch 9 teilbar, dann ist die Zahl selbst durch 9 teilbar.
Der Wert der Quersumme der Zahl 1 213 145 beträgt 17. Also ist diese nicht durch 9 teilbar.

(b) Nach dem Streichen bestimmter Ziffern kann aus dem Wert 17 keine größere, sondern nur eine kleinere Quersumme werden. Der nächst kleinere Quersummenwert, der dann

durch 9 teilbar ist, ist die 9.
Durch Streichen von bestimmten Ziffern muss also der Wert der Quersumme von 17 auf 9 abgeändert werden; d.h. die Summe der zu streichenden Ziffern muss den Wert $17 - 9 = 8$ annehmen. Dann gibt es die folgenden Möglichkeiten:

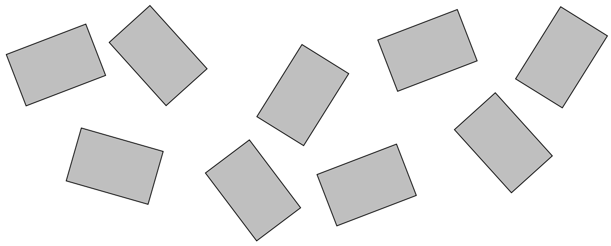
Ursprüngliche Zahl	Zu streichende Ziffern	Neue Zahl
1 213 145	5; 3	12 114
1 213 145	5; 2; 1	1 314
1 213 145	5; 2; 1	1 134
1 213 145	5; 1; 1; 1	234
1 213 145	4; 3; 1;	z.B. 1 215
1 213 145	4; 2; 1; 1;	z.B. 135
1 213 145	3; 2; 1; 1; 1;	45

16. Auf wie viele Nullen endet der Produktwert von $32 \cdot 10\,034\,300 \cdot 25$?

Lösung: $32 \cdot 10\,034\,300 \cdot 25 = 32 \cdot 25 \cdot 10\,034\,300 = 800 \cdot 1\,034\,300$.
Am Ende des Produktwertes stehen somit 4 Nullen.

7 Neue Aufgaben, Daten und Zufall

1.



Beate und Ursula spielen mit 9 verdeckten Karten: Zwei davon sind auf der Unterseite rot, drei davon grün und vier davon blau.
Zieht ein Mädchen eine rote Karte (r), bekommt sie 18 Punkte. Bei einer grünen Karte (g) bekommt sie zwölf und bei einer blauen Karte (b) 9 Punkte.

(a) Wie viele Karten müsste Beate höchstens umdrehen, damit eine grüne Karte aufgedeckt wird?

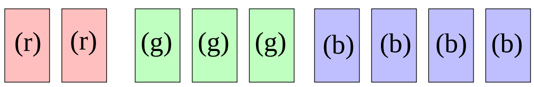
(b) Wie viele Karten müsste Beate von den 9 verdeckten Karten höchstens umdrehen, damit eine rote oder grüne Karte dabei ist?

(c) Wie viele Karten müsste Beate von den 9 verdeckten Karten höchstens umdrehen, damit eine rote und eine grüne Karte dabei ist?

(d) Ursula dreht nacheinander drei von den 9 verdeckten Karten um. Sie sagt: „Ich habe jetzt 36 Punkte.“
Welche Farben tragen ihre drei Karten?

(e) Beate schaut heimlich unter drei von den noch verbleibenden Karten und meint zu Ursula gewandt: „Wenn ich die drei Karten aufdecken würde, dann hätte ich 38 Punkte“. Doch Ursula entgegnet ohne hinzuschauen: „Das kann gar nicht sein, denn . . . “.
Wie begründet Ursula ihre Meinung?

Lösung:



(a) Du musst immer vom ungünstigsten Fall ausgehen: Nachdem du die vier blauen und die zwei roten Karten umgedreht hast, ist die 7. Karte sicher eine grüne. Also musst du höchstens 7 Karten umdrehen.

(b) Im ungünstisten Fall erwischst du zuerst die vier blauen. Dann muss aber die 5. Karte eine rote oder eine grüne Karte sein. Also musst du höchstens 5 Karten umdrehen.

(c) Im ungünstigsten Fall kann Folgendes passieren: Du erwischst zuerst die 4 blauen Karten. Dann ist die 5. Karte rot oder grün.
Ist die 5. Karte rot, dann kann die 6. Karte auch rot sein. Dann muss aber die 7. Karte grün sein, weil alle roten und blauen Karten schon gezogen sind. Ist aber die 5. Karte grün, dann gibt es noch zwei grüne Karten, die du anschließend erwischen könntest. Dann muss die 8. Karte aber rot sein, weil alle blauen und grünen Karten schon aufgedeckt sind. In diesem (extrem ungünstigen) Fall musst du tatsächlich 8 Karten ziehen.

(d) 1. Fall: $12 + 12 + 12 = 36$, dann hat Ursula 3 grüne Karten gezogen.
2. Fall: $18 + 9 + 9 = 36$, dann hat Ursula eine rote und zwei blaue Karten gezogen.

(e) Alle Punktezahlen zu den einzelnen Karten sind durch 3 teilbar. Dann muss auch jede Summe, die eine Auswahl aus den Einzelpunkten als Summanden enthält, durch 3 teilbar sein, aber die Zahl 38 ist es nicht. Beate hat falsch addiert.

2. In einem Saal befinden sich nur Personen, die entweder den Nachnamen „Müller“, „Becker“, „Schmidt“ oder „Küfner“ tragen. Außerdem heißt jede Person mit Vornamen entweder „Renate“, „Ursula“, „Hans“, „Paul“ oder „Egon“.
   (a) Wie viele Personen sind mindestens im Saal?
   (b) Kannst du auch feststellen, wie viele Personen höchstens im Saal sind? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) Es kann z.B. der Nachname „Müller“ mit jedem der 5 Vornamen kombiniert werden. Auch für die anderen Nachnamen gibt es jeweils die gleiche Kombination. Es gibt 4 verschiedene Nachnamen. Also gibt es mindestens $4 \cdot 5 = 20$ Personen im Saal.

(b) Weil nicht auszuschließen ist, dass zwei (oder mehr) Personen anwesend sind, die z.B. „Renate Schmidt“ heißen, ist die Angabe einer Höchstzahl nicht möglich. Nur die Abmessungen des Saales begrenzen die Personenzahl.

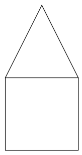
3. Heinz möchte sich für 30 € einen neuen Skater-Helm kaufen. Dazu „schlachtet“ er sein Sparschwein. Er stellt fest, dass nur 1 €- und 2 €-Münzen im Wert von 59 € darin sind.
   Wie viele Möglichkeiten hätte Heinz höchstens, diesen Helm ausschließlich mit den Münzen aus seinem Sparschwein zu bezahlen?

Lösung: Am besten stellst du eine Tabelle auf:

Anzahl der 2 €-Münzen	1	2	3	$\cdots$	14	15
Anzahl der 1 €-Münzen	28	26	24	$\cdots$	2	0
Gesamtbetrag in €	30	30	30	$\cdots$	30	30

Wie du aus der Tabelle erkennen kannst, gäbe es 15 Möglichkeiten. Diese Möglichkeiten müssen aber nicht alle eintreten: Wenn im Sparschwein 59 €enthalten sind, dann ist nur sicher, dass mindestens eine 1 €-Münze mit dabei ist. Ob genügend 1 €- und 2 €-Münzen vorhanden sind, um alle Möglichkeiten abzudecken, ist nicht geklärt.

4.



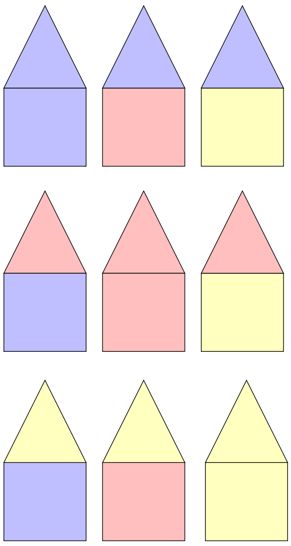
Material: je ein blaues, rotes und gelbes quadratisches Plättchen und je ein blaues, rotes und gelbes dreieckiges Plättchen.

(a) Wie viele Häuserfronten kannst du damit legen?

(b) Das blaue Quadrat wird durch ein grünes Dreieck ersetzt. Wie viele verschieden farbige Häuserfronten kannst du jetzt legen?

Lösung: Strategie: Lasse so lange wie möglich ein Objekt unverändert und kombiniere damit die restlichen Objekte.

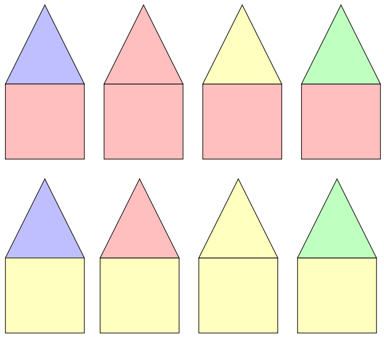
(a) Hier bleiben zunächst alle Dreiecke blau, dann rot und am Ende gelb:



Es gibt also $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten.

Zusatzaufgabe: Ordne die Häuserfronten auf eine andere Weise systematisch an.

(b) Hier wird z.B. das Quadrat einer Farbe so lange wie möglich beibehalten:



Es gibt also $4 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten.

5. (a) Anton, Bettina und Claudia sollen sich für ein Foto nebeneinander stellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
   (b) Doris soll noch mit auf das Foto. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?
   (c) Egon kommt als fünfte Person mit dazu. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten.
   (d) Formuliere eine Regel, wie sich die Anzahl der Möglichkeiten erhöht, wenn eine Person hinzukommt.

Lösung: (a) Eine mögliche Strategie: Anton steht entweder links oder in der Mitte oder rechts. Für jede Position von Anton gibt es für Bettina und Claudia zwei Möglichkeiten, sich hinzustellen. Am besten wird dies in einer Tabelle deutlich, in der nur die Anfangsbuchstaben der Vornamen hingeschrieben werden:

ABC	**A**CB
B**A**C	C**A**B
BC**A**	CB**A**

Es gibt also $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten.

(b) Doris kann (z.B. von links gesehen) an der 1., 2., 3., oder 4. Stelle (ganz rechts) stehen.

DABC	**D**ACB	**D**BAC	**D**CAB	**D**BCA	**D**CBA
A**D**BC	A**D**CB	B**D**AC	C**D**AB	B**D**CA	C**D**BA
AB**D**C	AC**D**B	BA**D**C	CA**D**B	BC**D**A	CB**D**A
ABC**D**	ACB**D**	BAC**D**	CAB**D**	BCA**D**	CBA**D**

Im Zusammenhang mit der Lösung der vorherigen Aufgabe sind das
$4 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten.

(c) Egon kann die 1., 2., 3., 4. oder 5. Stelle (ganz rechts) einnehmen.
Jede dieser Positionen kannst du mit den 24 Möglichkeiten der vorherigen Lösung kombinieren. Also gibt es
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ Möglichkeiten.
Noch deutlicher kannst du dafür auch $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ schreiben.
Für diese Schreibweise hat man in der Mathematik das Zeichen $5!$ (sprich „Fünf Fakultät“) vereinbart.

So hat also z.B. $53! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ \ldots\ \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53$ den Riesenwert 4274883284060025564298013753389399649690343788366813724672000000000000.

(d) Die Regel könnte also lauten: „Wenn zu der ursprünglichen Personengruppe eine Person hinzukommt, dann berechnest du die neue Anzahl von Möglichkeiten, indem du die ursprüngliche Zahl der Möglichkeiten mit der Personenzahl der neuen Gruppe multiplizierst.“

6.

Speisekarte

Tomatensuppe
Lauchcremesuppe

****

Schnitzel mit Pommes Frites
Hähnchen mit Reis
Gemüseauflauf

****

Eis
Obstsalat
Kuchen

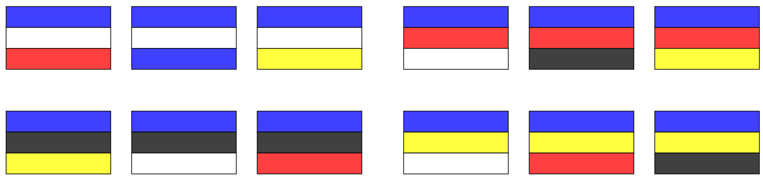
Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus der Speisekarte ein Menü aus Suppe, Hauptgericht und Nachspeise zusammenzustellen?

Lösung: Wir verwenden als Abküzungen für die Gerichte jeweils deren Anfangsbuchstaben.
Welche Gerichte kannst du mit einer Tomatensuppe (T) einnehmen?
Die Tomatensuppe wird zunächst mit dem Schnitzel (S) und dem Nachtisch kombiniert:
TSE, **TS**O und **TS**K. Das sind 3 Möglichkeiten.
Als nächstes wählen wir Tomatensuppe und Hähnchen (H) ins Menü:
THE, **TH**O und **TH**K. Das sind wieder 3 Möglichkeiten.
Ebenso liefert die Zusammenstellung (**T, G** + Nachtisch) 3 Möglichkeiten.
Somit lassen sich mit der Tomatensuppe 9 verschiedene Menüs zusammenstellen.
Was der Tomatensuppe recht ist, ist der Lauchcremesuppe billig: Auch hier gibt es 9 verschiedene Menükombinationen.
Also lassen sich aus dieser Speisekarte 18 verschiedene Menüs zusammenstellen.

7.

Harry Potter möchte für Hogwarts eine Fahne mit drei verschieden gefärbten Streifen entwerfen. Er hat fünf Farben zur Verfügung: blau, weiß, schwarz, rot und gelb.
Wie viele verschiedene Fahnen könnte er gestalten?

Lösung: Im Weiteren werden die Farben blau mit (b), weiß mit (w), schwarz mit (s), rot mit (r) und gelb mit (g) abgekürzt.
Als Vorgehensweise beim Abzählen empfiehlt es sich zunächst, die Farbe im obersten und im mittleren Streifen (z.B. blau und weiß) so lange unverändert zu lassen, bis damit alle restlichen Möglichkeiten ausgeschöpft sind:



Die obige Darstellung ergibt für den Fall, dass der oberste Streifen blau ist, 12 Möglichkeiten.
Nun gibt es ja 4 weitere verschiedene Möglichkeiten, den obersten Streifen einzufärben; insgesamt sind das 5 Möglichkeiten für den obersten Streifen. Zu jeder dieser 5 Möglichkeiten gibt es nun 12 Kombinationen.
Damit gibt es $5 \cdot 12 = 60$ mögliche Farbzusammenstellungen.

Wenn du nicht mit Farben arbeiten möchtest, kannst du auch die Anfangsbuchstaben der 5 Farben als Abkürzung verwenden und alle möglichen Farbzusammenstellungen in Form einer Tabelle aufschreiben:

b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
w	w	w	r	r	r	s	s	s	g	g	g
r	b	g	w	s	g	g	w	r	w	r	s

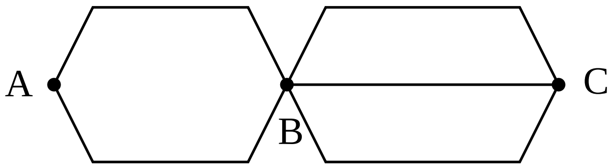
Hier ergeben sich wieder $3 \cdot 4 = 12$ Möglichkeiten. Nun kannst du erneut die Farbe in dem obersten Streifen noch vier Mal wechseln. Dann erhältst du $4 \cdot 12 = 48$ weitere Möglichkeiten. Zusammen sind das wieder $48 + 12 = 60$ Farbkombinationen.

Du kannst aber die Aufgabe auch nur rechnerisch lösen:

- Für die Farbe des obersten Streifens dieser Flagge gibt es 5 Möglichkeiten.
- Für **jede** dieser 5 Möglichkeiten gibt es für den mittleren Streifen 4 Möglichkeiten. Die beiden oberen Streifen lassen sich also auf $5 \cdot 4 = 20$ verschiedene Arten färben.
- Für **jede** dieser 20 Möglichkeiten kann der unterste Streifen noch auf 3 verschiedene Arten gefärbt werden. Insgesamt gibt es für die Farbanordnung in der Flagge also $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten.

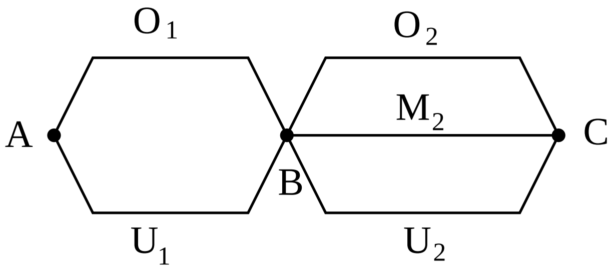
Zusatzaufgabe: Ermittle Länder, die in ihrer Nationalflagge tatsächlich eine der Farbkombinationen aufweisen.

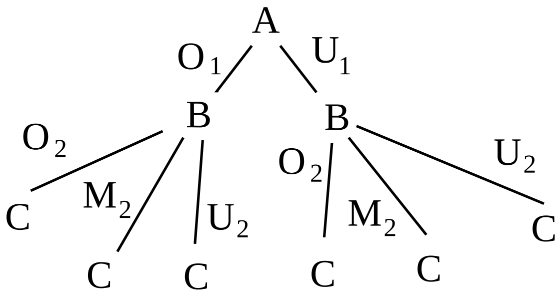
8.



Wie viele Möglichkeiten gibt es, um auf den gezeichneten Wegen von Abelstadt über Besselheim nach Cantorhausen zu gelangen?

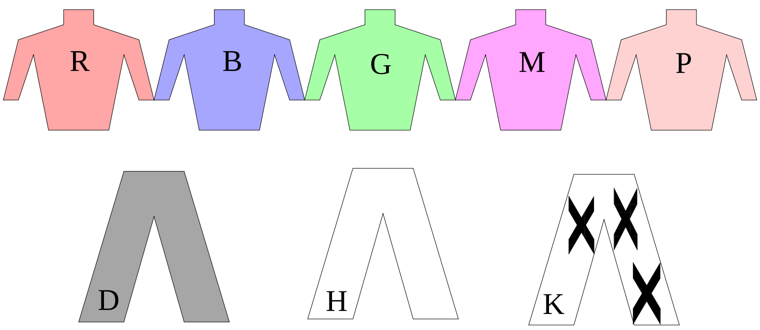
Lösung: Du kannst die Anzahl der Möglichkeiten in einem **Baumdiagramm** darstellen:





Also führen 6 verschiedene Wege nach Cantorhausen.

9.



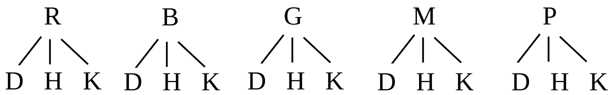
Elvira hat in ihrem Kleiderschrank fünf Pullover (von links: Rot, Blau, Grün, Magenta und Pink) und drei Hosen: eine dunkle (D), eine helle (H) und eine karierte (K). Auf wie viele Arten kann sie sich damit anziehen?

Lösung: Kombiniere jede Hose mit allen Pullovern:
1. Möglichkeit: Fertige mit den abkürzenden Buchstaben eine Tabelle an.

Hosen	Pullover				
D	R	B	G	M	P
H	R	B	G	M	P
K	R	B	G	M	P

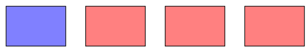
Zu jeder Hose kann Elvira fünf verschiedene Pullover anziehen. Sie hat drei verschiedene Hosen, also hat sie $3 \cdot 5 = 15$ verschiedene Möglichkeiten, sich anzuziehen.
Oder: Zum Pullover einer Farbe kann sie drei verschiedene Hosen anziehen. Sie besitzt fünf verschiedene Pullober. Also hat sie $5 \cdot 3 = 15$ verschiedene Möglichkeiten, sich anzuziehen.

2. Möglichkeit: Fertige mit den abkürzenden Buchstaben Baumdiagramme an.



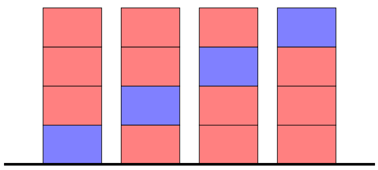
Wieder ergeben sich 15 verschiedene Möglichkeiten.

10.



Du hast einen blauen und drei rote Legosteine. Wie viele verschiedene Türme aus vier Steinen kannst du damit bauen?

Lösung: Eine mögliche Strategie besteht darin, den blauen Legostein zunächst zuunterst zu legen und ihn dann Etage für Etage nach oben wandern zu lassen:



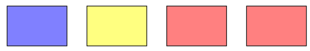
Du kannst also vier verschiedene Türme bauen.

Dasselbe kannst du auch in einer Tabelle aus den Anfangsbuchstaben „r“ für „rot“ und „b“ für „blau“ darstellen:

r	r	r	b
r	r	b	r
r	b	r	r
b	r	r	r

Auch hier gibt es wieder vier Möglichkeiten.

11.

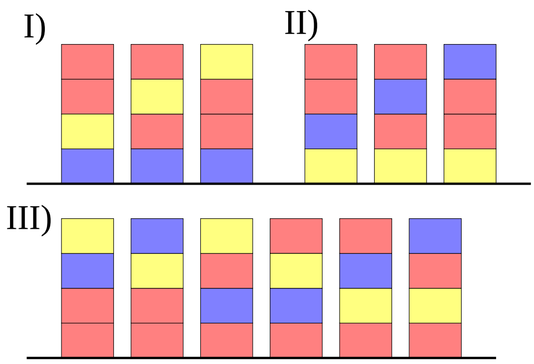


Du hast einen blauen, einen gelben und zwei rote Legosteine.

(a) Wie viele verschiedene Türme aus vier Steinen kannst du damit bauen?

(b) Wie viele verschiedene Türme aus drei Steinen gibt es?

Lösung: (a) Eine mögliche Strategie besteht darin, den blauen Legostein zunächst zuunterst zu legen und dann den gelben Stein Etage für Etage vom 1. in den 3. Stock nach oben wandern zu lassen. (siehe I)
Dann legst du den gelben Stein zuunterst und lässt dann den blauen Stein Etage für Etage vom 1. in den 3. Stock nach oben wandern. (siehe II)
Schließlich legst du zwei rote Steine zuunterst, dann blau, dann gelb bzw. erst gelb und dann blau.
Am Ende liegt ein roter Stein unten und darüber entweder entweder ein blauer oder ein gelber (siehe III).



Du kannst also zwölf verschiedene Türme bauen.

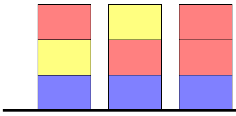
Dasselbe kannst du auch in einer Tabelle aus den Anfangsbuchstaben „b“ für „blau“, „g“ für „gelb“ und „r“ für „rot“ darstellen:

Figur I)			Figur II)			Figur III)					
r	r	g	r	r	b	g	b	g	r	r	b
r	g	r	r	b	r	b	g	r	g	b	r
g	r	r	b	r	r	r	r	b	b	g	g
b	b	b	g	g	g	r	r	r	r	r	r

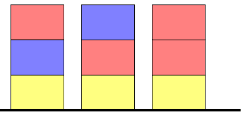
Auch hier gibt es wieder zwölf Möglichkeiten.

(b) Am einfachsten ist es, von den Vierertürmen der Lösung (a) den obersten Stein wegzunehmen. Dann ergibt sich das folgende Bild:

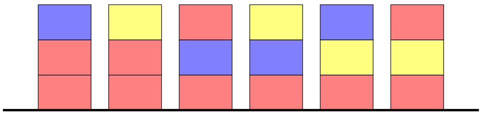
IV)



V)



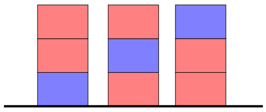
VI)



Du kannst also wieder zwölf verschiedene Türme bauen.

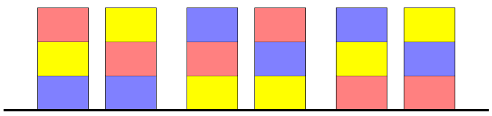
Doch du kannst auch die Lösung Aufgabe (b) unabhängig von der Lösung der Aufgabe (a) finden.

1. Fall:
Du hast zwei rote Steine und einen blauen.



Du kannst jetzt nur drei verschiedene Türme bauen. Natürlich ändert sich die Anzahl der Möglichkeiten nicht, wenn du neben den zwei roten einen gelben Stein nimmst. Das sind aber nochmals drei Möglichkeiten, weil in der Aufgabenstellung (b) nicht festgelegt ist, welche Farben unter den vorgegebenen im Turm vorkommen sollen. Also gibt es in diesem Fall 6 Möglichkeiten.

2. Fall:
Du hast einen blauen, einen gelben und einen roten Stein.



Du kannst jetzt sechs verschiedene Türme bauen.
Nimmst du z.B. den blauen Stein als untersten, dann gibt es darüber zwei Kombinationen: entweder gelb-rot oder rot-gelb. Genau so ergeben sich jeweils zwei Kombinationen wenn der gelbe oder der rote Stein zuunterst liegt. Weil es drei verschiedene Farben sind, ergeben sich also $2 \cdot 3 = 6$ verschiedene Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es wieder diese 12 Möglichkeiten.

12. In der Tierhandlung „Katz & Maus“ sind 4 schwarze, 13 weiße und 9 graue Mäuse aus einem Käfig geflüchtet.

Der Chef, Herr Samtpfote, stellt eine Lebendfalle mit Ködern auf. Noch in der Nacht finden sich darin einige der Ausreißer wieder ein. Am Morgen stellt sich heraus, dass von jeder Farbe mindestens eine Maus wieder eingefangen ist. Der Rest rennt noch frei umher.

Notiere im Folgenden für jede Antwort eine Begründung.

(a) Gib die Mindestzahl der Mäuse an, die bis dahin eingefangen waren.

(b) Gib die Höchstzahl der Mäuse an, die bis dahin eingefangen waren.

(c) Wie viele Mäuse mussten mindestens wieder eingefangen worden sein, damit sich Herr Samtpfote sicher sein kann, dass von jeder Farbe mindestens eine Maus dabei ist? Welche Farbe(n) tragen dann die noch in Freiheit befindlichen Tiere?

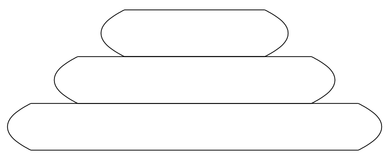
Lösung: Wichtig ist, dass (wie aus dem obigen Text ersichtlich) alle drei Farben bei den wieder eingefangenen Mäusen vertreten sind.

(a) Es saßen mindestens 3 Mäuse in der Falle: eine schwarze, eine weiße und eine graue.

(b) Gesamtzahl der Mäuse: $4 + 13 + 9 = 26$.
Weil es aber einen Rest gibt, der sich noch auf der Flucht befindet, können höchstens 25 Tiere gefangen worden sein.

(c) Im ungünstigsten Fall gehen zuerst die 13 weißen Mäuse und die 9 grauen Mäuse in die Falle. Dann muss die nächste Maus, die sich fangen lässt, aber schwarz ein. Also sind noch drei schwarze Nager frei.

13.



Im Küchenschrank sind drei verschieden große Holzbrettchen rwie in der Zeichnung übereinander gestapelt.
Es handelt sich um ein weißes (w), einen grünes (g) und einen rotes (r) Brettchen. Das weiße Brettchen ist größer als das rote. Wie könnte der Stapel aussehen?

Lösung: Das weiße Brettchen muss in jedem Fall unter dem roten liegen. Dann gibt es drei Möglichkeiten:

b	r	r
r	b	w
w	w	b