SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Neue Aufgaben (Realschule)

herausgegeben vom

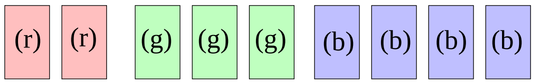
Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

19. Oktober 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Daten und Zufall

1.



(a) Du musst immer vom ungünstigsten Fall ausgehen: Nachdem du die vier blauen und die zwei roten Karten umgedreht hast, ist die 7. Karte sicher eine grüne. Also musst du höchstens 7 Karten umdrehen.

(b) Im ungünstisten Fall erwischst du zuerst die vier blauen. Dann muss aber die 5. Karte eine rote oder eine grüne Karte sein. Also musst du höchstens 5 Karten umdrehen.

(c) Im ungünstigsten Fall kann Folgendes passieren: Du erwischst zuerst die 4 blauen Karten. Dann ist die 5. Karte rot oder grün.
Ist die 5. Karte rot, dann kann die 6. Karte auch rot sein. Dann muss aber die 7. Karte grün sein, weil alle roten und blauen Karten schon gezogen sind. Ist aber die 5. Karte grün, dann gibt es noch zwei grüne Karten, die du anschließend erwischen könntest. Dann muss die 8. Karte aber rot sein, weil alle blauen und grünen Karten schon aufgedeckt sind. In diesem (extrem ungünstigen) Fall musst du tatsächlich 8 Karten ziehen.

(d) 1. Fall: $12 + 12 + 12 = 36$, dann hat Ursula 3 grüne Karten gezogen.
2. Fall: $18 + 9 + 9 = 36$, dann hat Ursula eine rote und zwei blaue Karten gezogen.

(e) Alle Punktezahlen zu den einzelnen Karten sind durch 3 teilbar. Dann muss auch jede Summe, die eine Auswahl aus den Einzelpunkten als Summanden enthält, durch 3 teilbar sein, aber die Zahl 38 ist es nicht. Beate hat falsch addiert.

2. (a) Es kann z.B. der Nachname „Müller“ mit jedem der 5 Vornamen kombiniert werden. Auch für die anderen Nachnamen gibt es jeweils die gleiche Kombination. Es gibt 4 verschiedene Nachnamen. Also gibt es mindestens $4 \cdot 5 = 20$ Personen im Saal.

(b) Weil nicht auszuschließen ist, dass zwei (oder mehr) Personen anwesend sind, die z.B. „Renate Schmidt“ heißen, ist die Angabe einer Höchstzahl nicht möglich. Nur die Abmessungen des Saales begrenzen die Personenzahl.

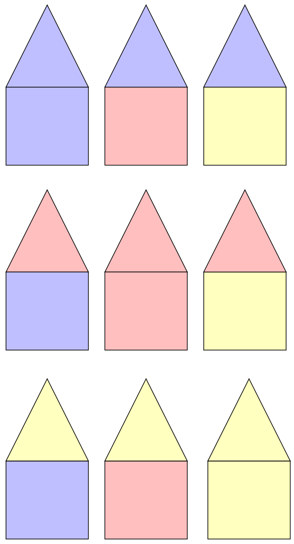
3. Am besten stellst du eine Tabelle auf:

Anzahl der 2 €-Münzen	1	2	3	⋯	14	15
Anzahl der 1 €-Münzen	28	26	24	⋯	2	0
Gesamtbetrag in €	30	30	30	⋯	30	30

Wie du aus der Tabelle erkennen kannst, gäbe es 15 Möglichkeiten. Diese Möglichkeiten müssen aber nicht alle eintreten: Wenn im Sparschwein 59 €enthalten sind, dann ist nur sicher, dass mindestens eine 1 €-Münze mit dabei ist. Ob genügend 1 €- und 2 €-Münzen vorhanden sind, um alle Möglichkeiten abzudecken, ist nicht geklärt.

4. Strategie: Lasse so lange wie möglich ein Objekt unverändert und kombiniere damit die restlichen Objekte.

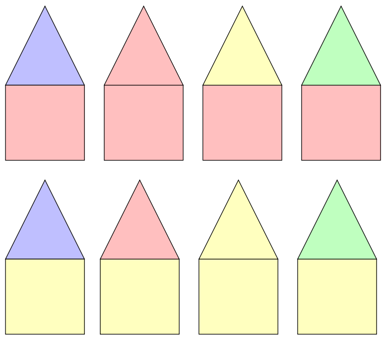
   (a) Hier bleiben zunächst alle Dreiecke blau, dann rot und am Ende gelb:

   Es gibt also $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten.

   Zusatzaufgabe: Ordne die Häuserfronten auf eine andere Weise systematisch an.

   (b) Hier wird z.B. das Quadrat einer Farbe so lange wie möglich beibehalten:

   Es gibt also $4 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten.

5. (a) Eine mögliche Strategie: Anton steht entweder links oder in der Mitte oder rechts. Für jede Position von Anton gibt es für Bettina und Claudia zwei Möglichkeiten, sich hinzustellen. Am besten wird dies in einer Tabelle deutlich, in der nur die Anfangsbuchstaben der Vornamen hingeschrieben werden:

ABC	**A**CB
B**A**C	C**A**B
BC**A**	CB**A**

Es gibt also $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten.

(b) Doris kann (z.B. von links gesehen) an der 1., 2., 3., oder 4. Stelle (ganz rechts) stehen.

DABC	**D**ACB	**D**BAC	**D**CAB	**D**BCA	**D**CBA
A**D**BC	A**D**CB	B**D**AC	C**D**AB	B**D**CA	C**D**BA
AB**D**C	AC**D**B	BA**D**C	CA**D**B	BC**D**A	CB**D**A
ABC**D**	ACB**D**	BAC**D**	CAB**D**	BCA**D**	CBA**D**

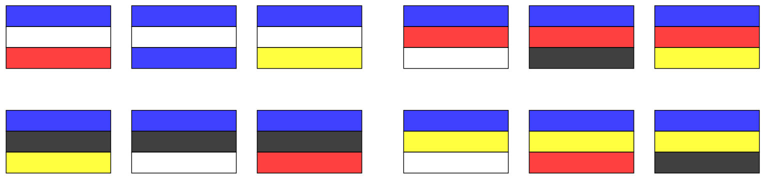
Im Zusammenhang mit der Lösung der vorherigen Aufgabe sind das
$4 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten.

(c) Egon kann die 1., 2., 3., 4. oder 5. Stelle (ganz rechts) einnehmen.
Jede dieser Positionen kannst du mit den 24 Möglichkeiten der vorherigen Lösung kombinieren. Also gibt es
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ Möglichkeiten.
Noch deutlicher kannst du dafür auch $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ schreiben.
Für diese Schreibweise hat man in der Mathematik das Zeichen $5\,!$ (sprich „Fünf Fakultät“) vereinbart.
So hat also z.B. $53\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ \ldots\ \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53$ den Riesenwert
42748832840600255642980137533893996496903437883668137246720000000000000.

(d) Die Regel könnte also lauten: „Wenn zu der ursprünglichen Personengruppe eine Person hinzukommt, dann berechnest du die neue Anzahl von Möglichkeiten, indem du die ursprüngliche Zahl der Möglichkeiten mit der Personenzahl der neuen Gruppe multiplizierst.“

6. Wir verwenden als Abküzungen für die Gerichte jeweils deren Anfangsbuchstaben.
Welche Gerichte kannst du mit einer Tomatensuppe (T) einnehmen?
Die Tomatensuppe wird zunächst mit dem Schnitzel (S) und dem Nachtisch kombiniert:
TSE, **TS**O und **TS**K. Das sind 3 Möglichkeiten.
Als nächstes wählen wir Tomatensuppe und Hähnchen (H) ins Menü:
THE, **TH**O und **TH**K. Das sind wieder 3 Möglichkeiten.
Ebenso liefert die Zusammenstellung (**T, G** + Nachtisch) 3 Möglichkeiten.
Somit lassen sich mit der Tomatensuppe 9 verschiedene Menüs zusammenstellen.
Was der Tomatensuppe recht ist, ist der Lauchcremesuppe billig: Auch hier gibt es 9 verschiedene Menükombinationen.
Also lassen sich aus dieser Speisekarte 18 verschiedene Menüs zusammenstellen.

7. Im Weiteren werden die Farben blau mit (b), weiß mit (w), schwarz mit (s), rot mit (r) und gelb mit (g) abgekürzt.
   Als Vorgehensweise beim Abzählen empfiehlt es sich zunächst, die Farbe im obersten und im mittleren Streifen (z.B. blau und weiß) so lange unverändert zu lassen, bis damit alle restlichen Möglichkeiten ausgeschöpft sind:



Die obige Darstellung ergibt für den Fall, dass der oberste Streifen blau ist, 12 Möglichkeiten.
Nun gibt es ja 4 weitere verschiedene Möglichkeiten, den obersten Streifen einzufärben; insgesamt sind das 5 Möglichkeiten für den obersten Streifen. Zu jeder dieser 5 Möglichkeiten gibt es nun 12 Kombinationen.
Damit gibt es $5 \cdot 12 = 60$ mögliche Farbzusammenstellungen.

Wenn du nicht mit Farben arbeiten möchtest, kannst du auch die Anfangsbuchstaben der 5 Farben als Abkürzung verwenden und alle möglichen Farbzusammenstellungen in Form einer Tabelle aufschreiben:

b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
w	w	w	r	r	r	s	s	s	g	g	g
r	b	g	w	s	g	g	w	r	w	r	s

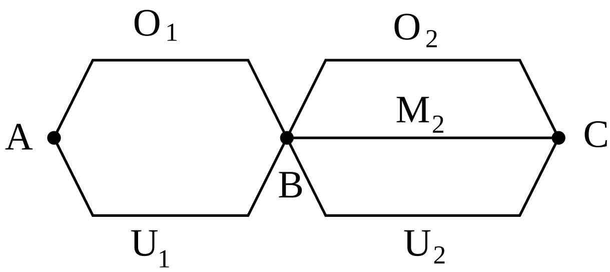
Hier ergeben sich wieder $3 \cdot 4 = 12$ Möglichkeiten. Nun kannst du erneut die Farbe in dem obersten Streifen noch vier Mal wechseln. Dann erhältst du $4 \cdot 12 = 48$ weitere Möglichkeiten. Zusammen sind das wieder $48 + 12 = 60$ Farbkombinationen.

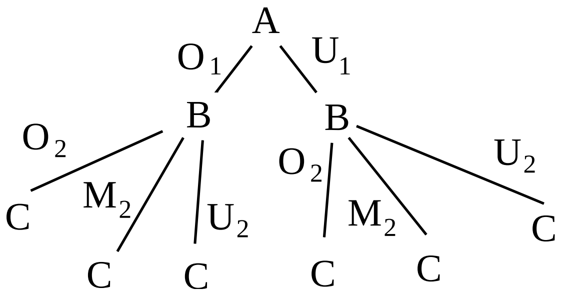
Du kannst aber die Aufgabe auch nur rechnerisch lösen:

- Für die Farbe des obersten Streifens dieser Flagge gibt es 5 Möglichkeiten.
- Für **jede** dieser 5 Möglichkeiten gibt es für den mittleren Streifen 4 Möglichkeiten. Die beiden oberen Streifen lassen sich also auf $5 \cdot 4 = 20$ verschiedene Arten färben.
- Für **jede** dieser 20 Möglichkeiten kann der unterste Streifen noch auf 3 verschiedene Arten gefärbt werden. Insgesamt gibt es für die Farbanordnung in der Flagge also $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten.

Zusatzaufgabe: Ermittle Länder, die in ihrer Nationalflagge tatsächlich eine der Farbkombinationen aufweisen.

8. Du kannst die Anzahl der Möglichkeiten in einem **Baumdiagramm** darstellen:





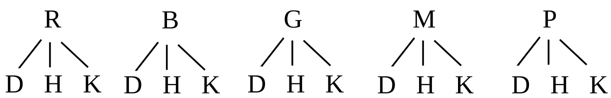
Also führen 6 verschiedene Wege nach Cantorhausen.

9. Kombiniere jede Hose mit allen Pullovern:
   1. Möglichkeit: Fertige mit den abkürzenden Buchstaben eine Tabelle an.

Hosen	Pullover				
D	R	B	G	M	P
H	R	B	G	M	P
K	R	B	G	M	P

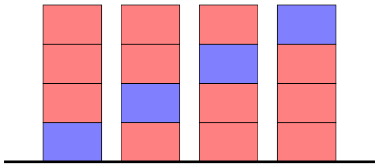
Zu jeder Hose kann Elvira fünf verschiedene Pullover anziehen. Sie hat drei verschiedene Hosen, also hat sie $3 \cdot 5 = 15$ verschiedene Möglichkeiten, sich anzuziehen.
Oder: Zum Pullover einer Farbe kann sie drei verschiedene Hosen anziehen. Sie besitzt fünf verschiedene Pullober. Also hat sie $5 \cdot 3 = 15$ verschiedene Möglichkeiten, sich anzuziehen.

2. Möglichkeit: Fertige mit den abkürzenden Buchstaben Baumdiagramme an.



Wieder ergeben sich 15 verschiedene Möglichkeiten.

10. Eine mögliche Strategie besteht darin, den blauen Legostein zunächst zuunterst zu legen und ihn dann Etage für Etage nach oben wandern zu lassen:



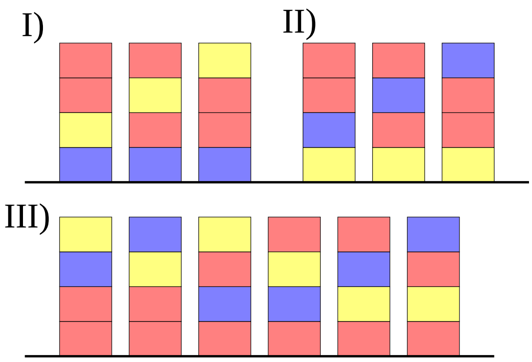
Du kannst also vier verschiedene Türme bauen.

Dasselbe kannst du auch in einer Tabelle aus den Anfangsbuchstaben „r“ für „rot“ und „b“ für „blau“ darstellen:

r	r	r	b
r	r	b	r
r	b	r	r
b	r	r	r

Auch hier gibt es wieder vier Möglichkeiten.

11. (a) Eine mögliche Strategie besteht darin, den blauen Legostein zunächst zuunterst zu legen und dann den gelben Stein Etage für Etage vom 1. in den 3. Stock nach oben wandern zu lassen. (siehe I)
Dann legst du den gelben Stein zuunterst und lässt dann den blauen Stein Etage für Etage vom 1. in den 3. Stock nach oben wandern. (siehe II)
Schließlich legst du zwei rote Steine zuunterst, dann blau, dann gelb bzw. erst gelb und dann blau.
Am Ende liegt ein roter Stein unten und darüber entweder entweder ein blauer oder ein gelber (siehe III).



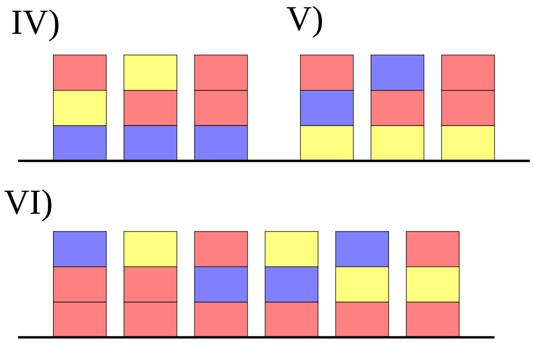
Du kannst also zwölf verschiedene Türme bauen.

Dasselbe kannst du auch in einer Tabelle aus den Anfangsbuchstaben „b“ für „blau“, „g“ für „gelb“ und „r“ für „rot“ darstellen:

Figur I)			Figur II)			Figur III)					
r	r	g	r	r	b	g	b	g	r	r	b
r	g	r	r	b	r	b	g	r	g	b	r
g	r	r	b	r	r	r	r	b	b	g	g
b	b	b	g	g	g	r	r	r	r	r	r

Auch hier gibt es wieder zwölf Möglichkeiten.

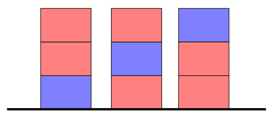
(b) Am einfachsten ist es, von den Vierertürmen der Lösung (a) den obersten Stein wegzunehmen. Dann ergibt sich das folgende Bild:



Du kannst also wieder zwölf verschiedene Türme bauen.

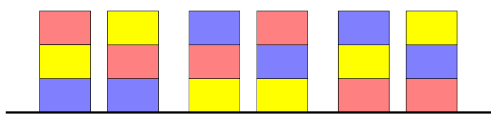
Doch du kannst auch die Lösung Aufgabe (b) unabhängig von der Lösung der Aufgabe (a) finden.

1. Fall:
Du hast zwei rote Steine und einen blauen.



Du kannst jetzt nur drei verschiedene Türme bauen. Natürlich ändert sich die Anzahl der Möglichkeiten nicht, wenn du neben den zwei roten einen gelben Stein nimmst. Das sind aber nochmals drei Möglichkeiten, weil in der Aufgabenstellung (b) nicht festgelegt ist, welche Farben unter den vorgegebenen im Turm vorkommen sollen. Also gibt es in diesem Fall 6 Möglichkeiten.

2. Fall:
Du hast einen blauen, einen gelben und einen roten Stein.



Du kannst jetzt sechs verschiedene Türme bauen.
Nimmst du z.B. den blauen Stein als untersten, dann gibt es darüber zwei Kombinationen: entweder gelb-rot oder rot-gelb. Genau so ergeben sich jeweils zwei Kombinationen wenn der gelbe oder der rote Stein zuunterst liegt. Weil es drei verschiedene Farben sind, ergeben sich also $2 \cdot 3 = 6$ verschiedene Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es wieder diese 12 Möglichkeiten.

12.

$$
\begin{array}{rclcrclcrcl}
1+1+8 & = & 10 & \quad & 2+2+6 & = & 10 & \quad & 3+3+4 & = & 10 \\
1+2+7 & = & 10 & & 2+3+5 & = & 10 & & & & \\
1+3+6 & = & 10 & & 2+4+4 & = & 10 & & & & \\
1+4+5 & = & 10 & & & & & & & &
\end{array}
$$

2 Neue Aufgaben, Oktober 2011

1. (a) Im Jahre 2010 sind die vier Geschwister zusammen 52 Jahre alt. Bis zum Jahr 2013 sind für jedes Kind drei Jahre vergangen.
   Also: $52 + 3 \cdot 4 = 64$. Die Kinder sind dann zusammen 64 Jahre alt.

   (b) $(100 - 52) : 4 = 12 \quad 2010 + 12 = 2022\,.$
   Im Jahre 2022 sind die vier Geschwister zusammen 100 Jahre alt.

   (c) $(163 - 52) : 4 = 111 : 4 = 27$ Rest 3. Es kommt also keine ganze Jahreszahl heraus; die vier Kinder werden nicht zusammen 163 Jahre alt.

2. (a) $1 \heartsuit 4 = 1^2 + 1 \cdot 4 = 5,$
   $1 \heartsuit 5 = 1^2 + 1 \cdot 5 = 6,$
   $1 \heartsuit 6 = 1^2 + 1 \cdot 6 = 7, \ldots\,, \; 1 \heartsuit 473589 = 1^2 + 1 \cdot 473589 = 473590.$

   (b) Verwende ein Zahlenbeispiel: $8 \heartsuit 5 = 104$. (Siehe oben.)
   Aber $5 \heartsuit 8 = 5^2 + 5 \cdot 8 = 65$. Das Kommutativgesetz gilt in diesem Fall nicht, also gilt es für das Rechenziechen $\heartsuit$ nicht.

   (c) $7 \heartsuit \square = 126$ bedeutet:
   $7^2 + 7 \cdot \square = 126 \quad \Rightarrow \quad 7 \cdot \square = 77 \quad \Rightarrow \quad \square = 11.$

   (d) $x \heartsuit x = x^2 + x^2$.
   Rechts wird zweimal die gleiche Zahl addiert, egal, welche Belegung des Platzhalters x du gerade wählst. Wenn du aber zu einer Zahl die gleiche Zahl addierst, kommt stets eine gerade Zahl heraus.

   (e)

x ist gerade:	Dann ergibt $x^2 + xy$ eine gerade Zahl.
x ist ungerade und y ist ungerade:	Dann ergibt $x^2 + xy$ eine gerade Zahl.
x ist **ungerade** und y ist **gerade**:	**Dann ist $x^2 + xy$ ungerade.**

3. (a) 94 000

   (b) 10 039

4. (a) Es sind die Zahlen 34, 43, 62 und 26.

   (b) Solche Zahlen sind z.B. 17, 117, 1117, 11117, ...; d.h. die Ziffer 1 lässt sich beliebig oft einfügen, ohne dass sich am Wert des Ziffernproduktes etwas ändert. Also gibt es **unendlich** viele solche natürliche Zahlen.

(c) Die Zahl 13 ist eine Primzahl. D.h. die 13 lässt sich nicht in Faktoren (außer 1) zerlegen, die kleiner als 13 sind. Weil jede natürliche Zahl aus lauter einstelligen Ziffern besteht, die 13 aber zweistellig ist, gibt es **keine** solche natürliche Zahl.

(d) Deine Tabelle könnte z.B. so aussehen:

	100	110	200	210	...	800	810	900	910
	101	120	201	220	...	801	820	901	920
	102	130	202	230	...	802	830	902	930
	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	109	190	209	290	...	809	890	909	990
Anzahl:	10	9	10	9	...	10	9	10	9

Die Einhunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.
Die Zweihunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.
...
Die Achthunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.
Die Neunhunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.

Also sind es insgesamt $(10 + 9) \cdot 9 = 171$ solche natürliche Zahlen.

5.

$$2 \cdot 9\,089\,133 = 9\,089\,129 + \boxed{9\,089\,137}$$

Begründung:
$2 \cdot 9\,089\,133 = 9\,089\,133 + 9\,089\,133$. Der erste Summand auf der rechten Seite der Aufgabe, nämlich $9\,089\,129$, hat einen um 4 geringeren Wert als $9\,089\,133$. Also muss der gesuchte Summand im Kästchen zum Ausgleich dafür einen um 4 höheren Wert als $9\,089\,133$ besitzen. Also muss im Kästchen die Zahl $9\,089\,137$ stehen.

6. (a)
- $\{9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14\}$.
- Es sind sechs natürliche Zahlen.
- Z.B.: Bilde die Differenz der Randzahlen: $15 - 8 = 7$.
  Subtrahiere 1 vom Wert der Differenz: $7 - 1 = 6$.
  Also liegen sechs Zahlen dazwischen.

(b)
- $74 - 57 - 1 = 16$. Es liegen 16 natürliche Zahlen dazwischen.
- Klar.

(c) $801\,467 - 103\,859 - 1 = 697\,607$. Dazwischen liegen also $697\,607$ natürliche Zahlen.

7. (a) **1. Möglichkeit:**
Multipliziere die letzten Ziffern der zwei Faktoren: $8 \cdot 5 = 40$. Dann muss die letzte

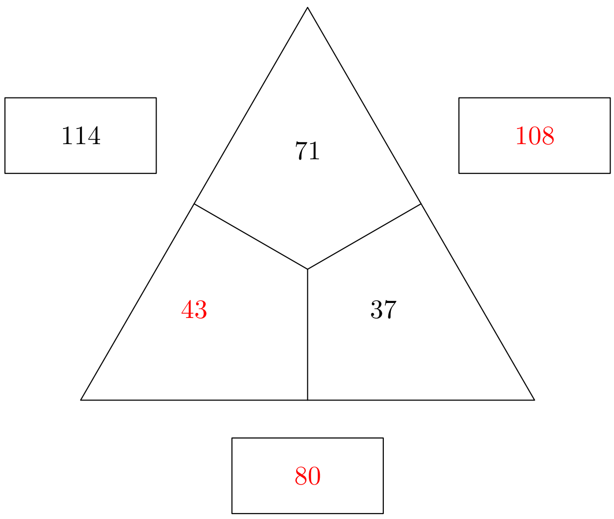
Ziffer des Produktwertes eine 0 werden und darf damit keine 5 sein.
2. Möglichkeit:
Eine Überschlagsrechnung zeigt: $5\,000 \cdot 2\,000 = 10\,000\,000$. Der richtige Produktwert muss also größer als $10\,000\,000$ sein. Egon hat aber weniger als $10\,000\,000$ errechnet.

(b) $5\,378 \cdot 2\,165 = 11\,643\,370$.

8. (a) $12 + 21 + 24 + 42 + 36 + 63 + 48 + 84 = 330$.
   (b) $T_{330} = \{1;\ 3;\ 5;\ 6;\ 10;\ 11;\ 30;\ 33;\ 55;\ 66;\ 110;\ 330\}$.

9. (a) Z.B. 560 .
   (b) Die neue, zweistellige Zahl.heißt dann 56 .
   (c)
   - $560 - 56 = 504$.
   - Die Quersumme von 504 ergibt 9, also ist 504 durch 9 teilbar.
   - $504 : 9 = 54$ also ist 504 auch durch 54, also durch die neue Zahl, teilbar.

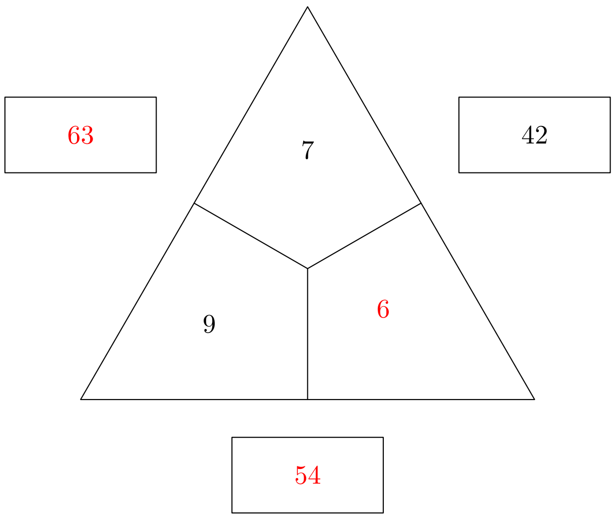
   (d)
   - Die gemachten Feststellungen gelten stets.
   - Die letzte Ziffer der ursprünglichen dreistelligen Zahl muss die Null sein. Wenn du die letze Ziffer streichst, dann entsteht eine Zahl, deren Zehnfaches die ursprüngleiche Zahl ist. Subtrahierst du von dieser ursprünglichen Zahl die neue Zahl, dann ergibt der Wert der Differenz das Neunfache der neuen Zahl. Also ist dieser Differenzwert nicht nur durch 9 sondern stets auch durch die neue (zweiziffrige) Zahl teilbar.

10. (a)
   - 

   - Summe im Inneren des Dreiecks $S_1 = 43 + 37 + 71 = 151$.
   - Summe der Zahlen in den drei Rechtecken: $S_2 = 80 + 108 + 114 = 302$.

- $S_2 = 2 \cdot S_1$.

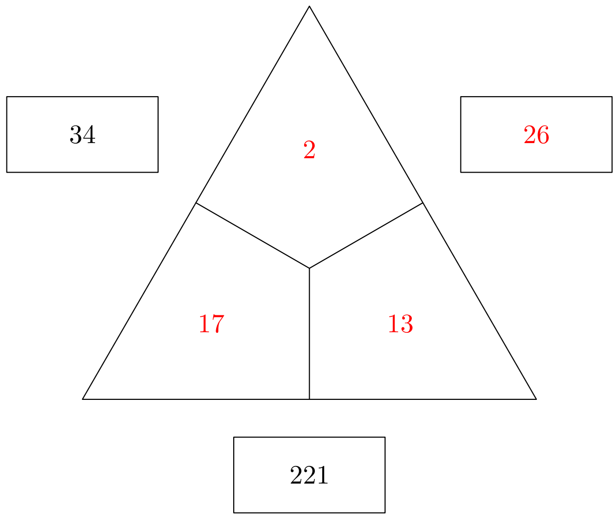
(b)
- Es gibt beliebig viele verschiedene Möglichkeiten.
- Er gilt immer noch; auch dein Nachbar müsste das mit seinem Beispiel bestätigen.
- Beispiel: Die Zahl 114 in der Lösung (a) im Rechteck links oben. Dort ist die 71 gemäß der Regeln als Summand enthalten. Aber auch im Rechteck rechts oben ist die Zahl 71 als Summand in der Zahl 108 enthalten. Also taucht die Zahl 71 bei der Berechnung des Summenwertes aus dem Inhalt der drei Rechtecke doppelt auf.
  Dieses doppelte Auftreten gilt jeweils aber gleichermaßen für die Zahlen 37 und 43.
  Also besteht die Summe aus dem Inhalt der drei Rechtecke stets aus dem Doppelten der drei einzelnen Zahlen im Dreieck.

11. (a)
- 

- Produkt im Inneren des Dreiecks $P_1 = 9 \cdot 6 \cdot 7 = 378$.
- Produkt der Zahlen in den drei Rechtecken: $P_2 = 54 \cdot 42 \cdot 63 = 142\,844$.
- $142\,844 : 378 = 378$; d.h. $P_2 : P_1 = P_1$ oder $P_2 = P_1^2$.

(b)
- Es gibt beliebig viele verschiedene Möglichkeiten.
- Er gilt immer noch; auch dein Nachbar müsste das mit seinem Beispiel bestätigen.
- Jede Zahl im Dreieck dient als Faktor für die Produktwerte in zwei Rechtecken. Also tauch jeder Faktor im Produkt der Zahlen aus den drei Rechtecken doppelt auf.

12.

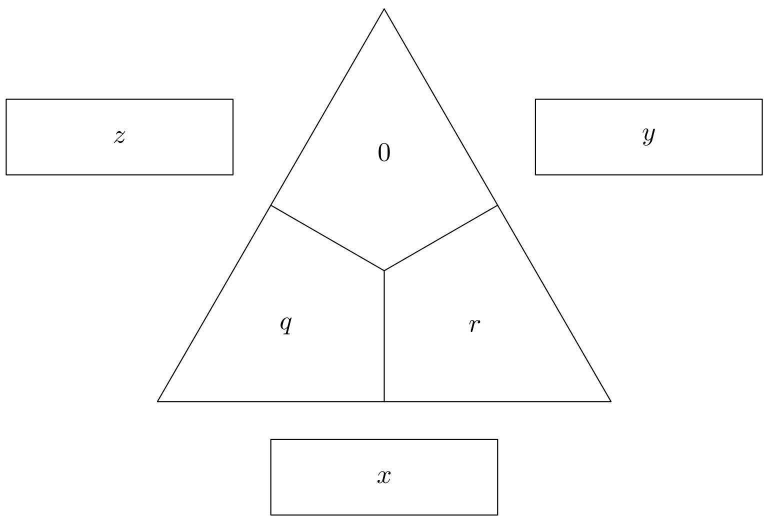


Die Zahl 34 lässt sich sich nur auf eine Weise in Primfaktoren zerlegen :
$34 = 2 \cdot 17$. Weil aber 221 ungerade ist, darf nicht der Faktor 2 unten links im Dreieck stehen, sondern die 17. Der Rest ist klar.
Wenn du jedoch statt 34 zunächst 221 ins Auge fasst, ist die Zerlegung schwieriger, aber genauso eindeutig: $221 = 17 \cdot 13$.

13. Du hast gelernt:
    - **Wenn in einem Produkt ein Faktor null ist, dann ist der Produktwert null.**
    - **Wenn der Produktwert null ist, dann muss ein Faktor dieses Produktes den Wert null besitzen.**

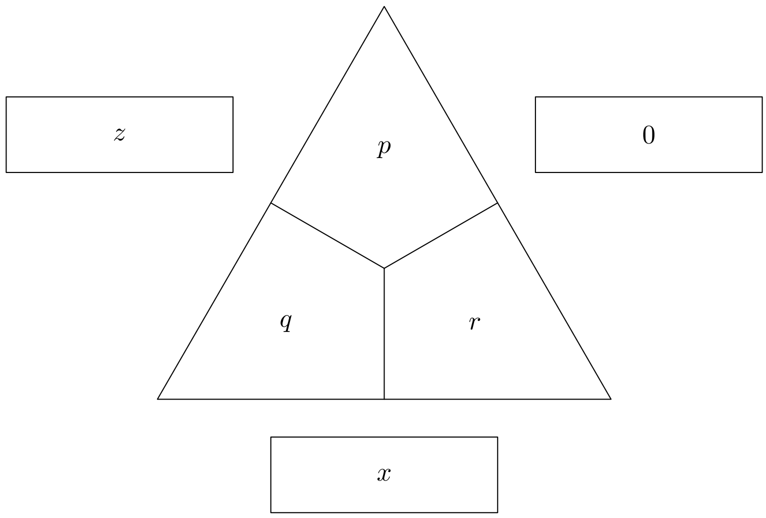
    Mit der Anwendung dieser beiden Sätze kannst du die Behauptungen untersuchen:

    (a)



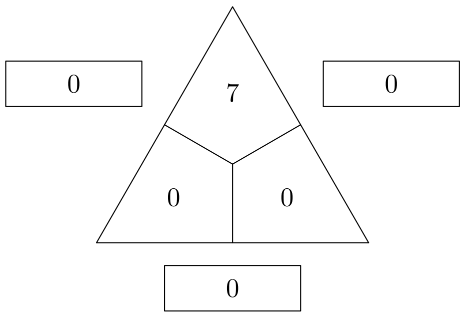
Angenommen, die Null steht oben in der Dreiecksspitze. Dann müssen die beiden Rechtecke oben rechts und links gemäß den eingangs festgelegten Regeln ebenfalls den Faktor null enthalten. Dann gilt aber $z = y = 0$. Die Behauptung ist richtig.

(b)



Angenommen, die Null steht im Rechteck oben rechts. Dann muss $p = 0$ oder auch $r = 0$ gelten. Die Behauptung ist richtig.

(c) Die Behauptung ist falsch. Zur Begründung genügt es, ein Gegenbeispiel zu finden.



14. (a) Beispiel: Aus $13 + 17 = 30$ wird dann $2 \cdot 13 + 2 \cdot 17 = 60 = 2 \cdot 30 = 60 = 2 \cdot (13 + 17)$.
Die Behauptung ist wahr.

(b) Beispiel: 1. Summand: 19 EURO. 19 EURO $: 2 =$ 9 EURO und 50 Cent.
2. Summand: 17 EURO. 17 EURO $\cdot 2 =$ 34 EURO.
19 EURO +17 EURO = 34 EURO $\neq$ 9 EURO und 50 Cent+34 EURO.
Die Behauptung ist falsch.

15. (a) Beispiel: 1. Faktor: 46 ; 2. Faktor: 50; $46 \cdot 50 = 2300$
$46 : 2 = 23$; $50 \cdot 2 = 100$; $23 \cdot 100 = 2300$. Die Behaupung ist immer richtig. Wenn ein Faktor halbiert wird, dann wird der ganze Produktwert halbiert. Wird aber gleichzeitig der zweite Faktor verdoppelt, dann wird es auch der halbe Produktwert. Also belibt alles beim alten. Fritz hat Recht.

(b)
- Beispiel: 1. Faktor: 11 ; 2. Faktor: 9; $11 \cdot 9 = 99$
$11 \cdot 3 = 33$; $9 \cdot 3 = 27$; $33 \cdot 27 = 891 = 99 \cdot 9$. Der Produktwert hat sich verneunfacht.

- Alter Produktwert: $\square \cdot \bigcirc$.
  Verdreifachung des ersten Faktors: $3 \cdot \square$; Verdreifachung des zweiten Faktors: $3 \cdot \bigcirc$.
  Neuer Produktwert: $3 \cdot \square \cdot 3 \cdot \bigcirc = 3 \cdot 3 \cdot \square \cdot \bigcirc = 9 \cdot \square \cdot \bigcirc$.

(c) „Wenn in einem Produkt aus zwei Faktoren jeder Faktor gleichzeitig verzehnfacht wird, dann verhundertfacht sich der Produktwert.“

16. (a) $36 + 2 \cdot (99 - 62) = 36 + 2 \cdot 37 = 36 + 74 = 110$.

(b)
- $(198 + 36) - 124 = 234 - 124 = 110$.
- Du erhältst das gleiche Ergebnis wie in der Aufgabe (a).
- Die Klammern in der Lösung der Aufgabe (b) sind für das Rechenergebnis ohne Bedeutung.
  Weil Summanden vertauschbar sind, ohne dass sich der Summenwert ändert, kannst du das Ergebnis auch so rechnen:
  $36 + 198 - 124$.
  Nun sind 198 das Doppelte von 99 und 124 das Doppelte von 62 . Das bedeutet, dass auch hier der doppelte Inhalt der Klammern von der Aufgabe (a) ausgerechnet wird. Die Zahl 36 ist in beiden Aufgabe gleich. Also muss bei der Aufgabe (a) das gleiche herauskommen wie bei der Aufgabe (b).

17. Der Wert der Potenz 2^{1400} enthält (neben der Eins) ausschließlich gerade Zahlen als Teiler. Die Zahl 14 ist durch 7 teilbar. Wenn 2^{1400} durch 14 teilbar wäre, dann müsste der **Potenzwert** (nicht der Exponent!) auch durch 7 teilbar sein. Das ist ein Widerspruch: 2^{1400} ist nicht durch 7 und damit auch nicht durch 14 teilbar

18. (a) $(3 \cdot 17 + 9) : (23 - 46 : 2)) = (51 + 9) : (23 - 23) = 60 : 0$. Bis dahin stimmt alles.

(b) Nach Pauls Ansicht wäre sowohl $60 : 0 = 60$ als auch $60 : 1 = 60$.
Für die Umkehraufgabe als Probe würde einerseits gelten: $60 \cdot 0 = 60$, was falsch ist, andererseits wäre $60 \cdot 1 = 60$, was stimmt. Pauls Ergebnis kann nicht stimmen.

(c)
- UA: $0 \cdot 0 = 60$, was nicht stimmt. Erikas Ergebnis ist auch falsch.
- Z.B.: Wenn der Wert des Quotienten von $60 : 0$ irgendeine natürliche Zahl „$\square \in \mathbb{N}_0$“ wäre, dann müsste sich aus $60 : 0 = \square$ die UA $\square \cdot 0 = 60$ ergeben, was nicht stimmt, denn $60 \cdot 0 = 0$.
- Wenn irgendeine natürliche Zahl durch null geteilt werden soll, dann liefert die UA „Wert des Quotienten $\cdot\ 0 =$ natürliche Zahl“ stets ein falsches Ergebnis; d.h. ist der Divisor null, dann gibt es keinen vernünftigen Wert des Quotienten.

19. (a) $(100 - 2 \cdot 10) \cdot (74 : 2 - 37) = (100 - 20) \cdot (37 - 37) = 80 \cdot 0$. Bis dahin stimmt alles.

(b) Im Kino sitzen 80 Zuschauer. Während der Vorführung geht der Filmprojektor kaputt. Die Zuschauer können den Film nicht zu Ende sehen. Als Entschädigung bekommt jeder Besucher 0 EURO. Nach Helmuts Rechnung würden dann insgesamt 80 EURO ausgezahlt.

(c) Weshalb soll bei 0 : 0 „ausgerechnet“ 80 herauskommen?
Bisher galt die Regel: Wenn in einem Quotienten der Dividend und der Divisor den gleichen Wert besitzen, dann hat der Quotient den Wert 1. Aber, ob das bei 0 : 0 auch noch stimmt?

20.

•	2	3
13	26	39
17	34	51

21. (a) Nimm z.B. die Zahl 72 538. Daraus wird 7 238. $72\,538 - 7238 = 65\,300$.
Der möglichst große Teiler ist 100.

(b)
- Als möglichst großen Teiler erhältst du wieder 100..
- Auch Deine Banknachbarn müssten diesen Teiler in ihrem Ergebnis wiederfinden.
- Die letzten beiden Ziffern im Minuenden und im Subtrahenden stimmen stets überein. Dann müssen die letzten beiden Ziffern des Differenzwertes Nullen sein. Allso ist der Wert der Differenz immer durch 100 teilbar.

(c)
- „Die Stellenzahl muss **mindestens drei betragen und ungerade sein.**“ (Ist die Stellenzahl gerade, dann gibt es keine „mittlere Ziffer“.)
- Weil dann in jedem Fall wieder Minuend und Subtrahend auf die gleichen beiden Ziffern enden, stehen beim Differenzwert am Ende zwei Nullen. Also ist 100 stes ein Teiler des Ergebnisses.

22. (a) Es bekämen neun Personen fast ein ganzes Brot, die zehnte Person aber erhielte neun einzelne Scheiben, die im Laufe der Zeit eher austrocknen als ein großes Stück Brot.

(b)
- $\frac{9}{10} = \frac{27}{30} = \bigcirc + \frac{6}{30} + \frac{1}{30} \qquad \frac{27}{30} = \bigcirc + \frac{7}{30}$.

  $\bigcirc = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

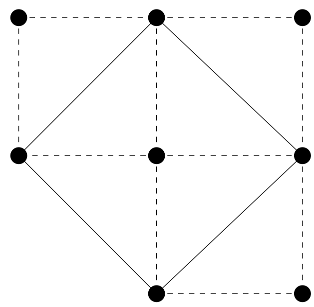
- Neun Personen bekämen jeweils folgende Brotabschnitte:

  $\frac{2}{3}$ von 30 cm + $\frac{1}{5}$ von 30 cm + $\frac{1}{30}$ von 30 cm =

  $20\,\text{cm} + 6\,\text{cm} + 1\,\text{cm} = 27\,\text{cm}\,.$

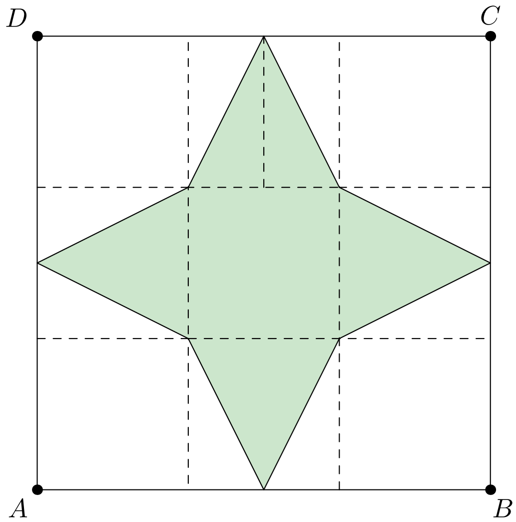
  Die zehnte Person bekommt neun Abschnitte, die jeweils 3 cm lang sind:
  $9 \cdot 3\,\text{cm} = 27\,\text{cm}\,.$
  Diese Aufteilung erfordert zunächst mehr Arbeit, weil jedes Brot nicht nur in zwei, sondern in vier Teile zerschnitten werden muss. Neun Personen bekommen dabei neben zwei größeren Stücken jeweils eine 1 cm dünne Scheibe. Die zehnte erhält lauter gleiche Abschnitte, die jeweils 3 cm lang sind. Diese Aufteilung scheint etwas gerechter zu sein.

23.



Die acht Punkte scheinen nur drei Quadrate herzugeben, aber die vier schrägen Strecken liefern ein weiteres Quadrat. Also sind es insgesamt vier Quadrate, die du so erzeugen kannst.
Das große Quadrat hat den gleichen Flächeninhalt wie zwei kleine Quadrate.

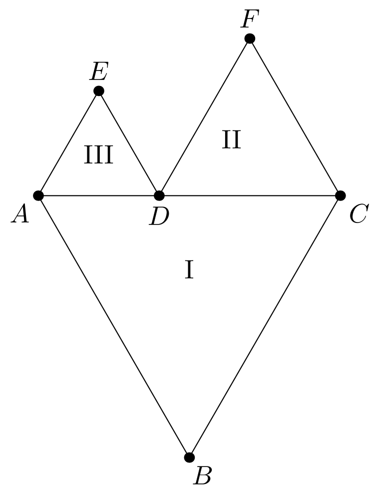
24. (a)



(b) Das Quadrat $ABCD$ fügt sich aus neun gleich großen gestrichelten Quadraten zusammen.Also bedeckt eines dieser kleinen Quadrate $\frac{1}{9}$ der Fläche des großen Quadrates $ABCD$.
Das kleine Quadrat oben in der Mitte wird in zwei kongruente Rechtecke geteilt. Der Rand des Sterns teilt dort jedes dieser Rechtecke in zwei gleiche Hälften. Also nimmt die Sternspitze im obigen kleinen Quadrat gerade dessen halbe Fläche ein. Die vier Sternspitzen sind also genau so groß wie zwei kleine Quadrate.
Das Zentrum des Sterns ist wiederum ein kleines Quadrat.
Somit ist der Stern genauso groß wie drei kleine gestrichelte Quadrate.

$$A_{Stern} = \frac{3}{9} \cdot A_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABCD}\,.$$

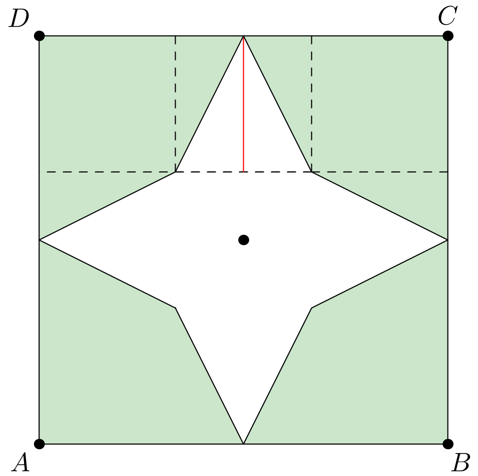
25.



Den Umfang u eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a berechnest du mit $u = 3 \cdot a$.

Aus $u_{\mathrm{I}} = 16,8\,\mathrm{cm}$ folgt $\overline{AC} = 16,8\,\mathrm{cm} : 3 = 5,6\,\mathrm{cm}$.
Aus $u_{\mathrm{II}} = 14,1\,\mathrm{cm}$ folgt $\overline{DC} = 14,1\,\mathrm{cm} : 3 = 4,7\,\mathrm{cm}$.
Dann folgt $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{DC} = 5,6\,\mathrm{cm} - 4,7\,\mathrm{cm} = 0,9\,\mathrm{cm}$.
$\Rightarrow \quad u_{II} = 3 \cdot 0,9\,\mathrm{cm} = 2,7\,\mathrm{cm}$.

26. (a)



(b) Das Quadrat $ABCD$ fügt sich aus neun gleich großen gestrichelten Quadraten zusammen.Also bedeckt eines dieser kleinen Quadrate $\frac{1}{9}$ der Fläche des großen Quadrates $ABCD$.
Das kleine Quadrat oben in der Mitte wird in zwei kongruente Rechtecke geteilt. Der Rand des Sterns teilt dort jedes dieser Rechtecke in zwei gleiche Hälften. Also nimmt die Sternspitze im obigen kleinen Quadrat gerade dessen halbe Fläche ein. Die vier Sternspitzen sind also genau so groß wie zwei kleine Quadrate.
Das Zentrum des Sterns ist wiederum ein kleines Quadrat.
Somit ist der Stern genauso groß wie drei kleine gestrichelte Quadrate.

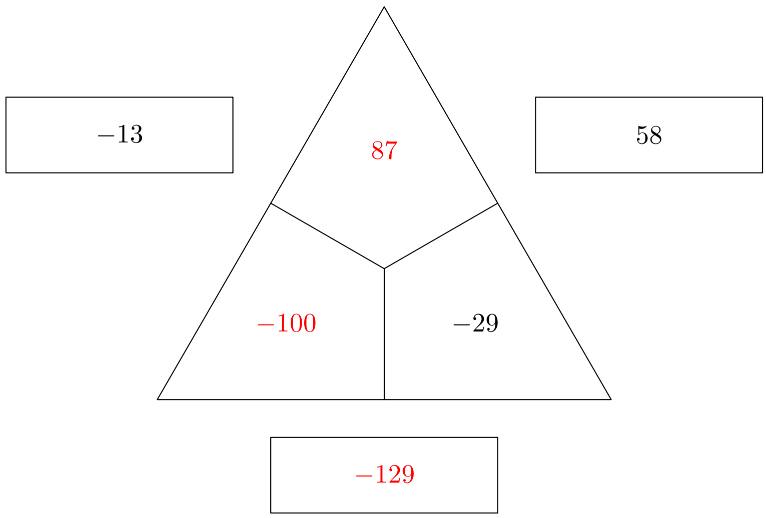
$$A_{Stern} = \frac{3}{9} \cdot A_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABCD}.$$

27. (a) 1386: Ja.
1814: Nein.
4648: Ja.
4873: Nein.
5096: Ja.
4473: Ja.
44 730: Ja. Klar, denn, wenn 4473 durch 7 teilbar ist, dann ist es auch 44 730 .

1 000 007: Nein. Nur, wenn 1 000 00 durch 7 teilbar wäre, dann wäre es auch 1 000 007 . Aber 1 000 00 ist wegen der sechs Nullen am Ende nicht durch 7 teilbar. Also ist es auch 1 000 007 nicht.

(b) Diese Teilbarkeitsregel ist in den allermeisten Fällen umständlich zu handhaben. Meist kommt man durch direktes Dividieren genauso schnell oder sogar schneller, wie das Beispiel 1 000 007 zeigt, zum Ziel.

28.

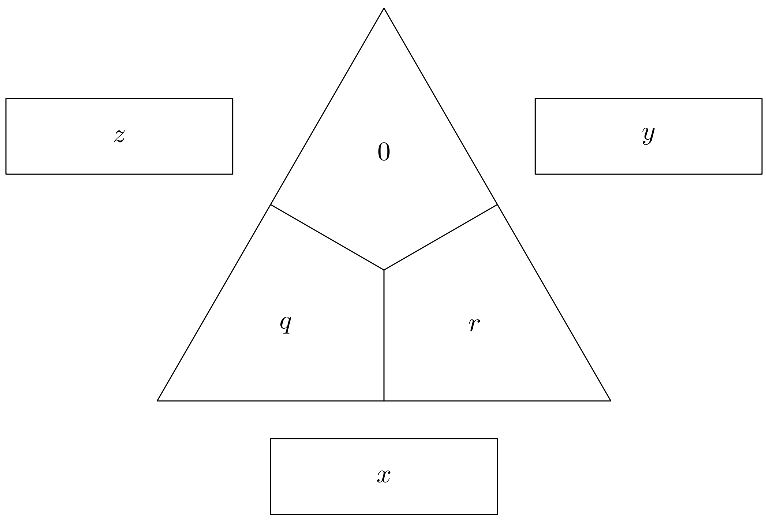


29. Du hast gelernt:

- **Wenn in einem Produkt ein Faktor null ist, dann ist der Produktwert null.**
- **Wenn der Produktwert null ist, dann muss ein Faktor dieses Produktes den Wert null besitzen.**

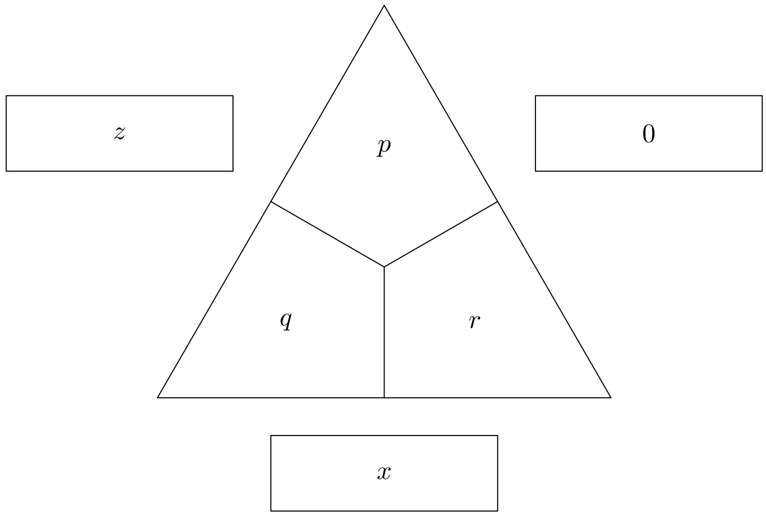
Mit der Anwendung dieser beiden Sätze kannst du die Behauptungen untersuchen:

(a)



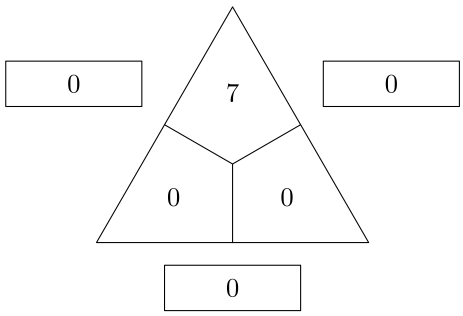
Angenommen, die Null steht oben in der Dreiecksspitze. Dann müssen die beiden Rechtecke oben rechts und links gemäß den eingangs festgelegten Regeln ebenfalls den Faktor null enthalten. Dann gilt aber $z = y = 0$. Die Behauptung ist richtig.

(b)



Angenommen, die Null steht im Rechteck oben rechts. Dann muss $p = 0$ oder auch $r = 0$ gelten. Die Behauptung ist richtig.

(c) Die Behauptung ist falsch. Zur Begründung genügt es, ein Gegenbeispiel zu finden.



30. (a)

$$\begin{aligned}
O_{ganz} &= 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2 \cdot (5\,\mathrm{dm}^2 + 6\,\mathrm{dm}^2 + 7,5\,\mathrm{dm}^2) \\
O_{ganz} &= 37\,\mathrm{dm}^2 \\
2 \cdot O_{Hälfte} &= 2 \cdot 2 \cdot (2,5\,\mathrm{dm}^2 + 3\,\mathrm{dm}^2 + 7,5\,\mathrm{dm}^2) \\
O_{Teile} &= 52\,\mathrm{dm}^2
\end{aligned}$$

$$\frac{52\,\mathrm{dm}^2 - 37\,\mathrm{dm}^2}{37\,\mathrm{dm}^2} = \frac{15}{37} = 0,40540\ldots \approx 40,54\%$$

(b) Die Oberfläche der beiden Teile wäre auch hier nur um den doppelten Betrag einer rechteckigen Seitenfläche mit den Längen b und c angewachsen. Das ändert am Ergebnis nichts.

31. **1. Möglichkeit:** Rechne mit einem Zahlenbeispiel.

Früher:	1500 g kosteten z.B. 12 EURO .	$\Rightarrow$	100 g kosteten dann 80 Cent .
Jetzt :	1200 g kosten auch 12 EURO .	$\Rightarrow$	100 g kosten dann 1 EURO .

100 g Lebkuchen sind also um 20 Cent teurer geworden.

$$\frac{20\,\text{Cent}}{80\,\text{Cent}} = 0,25 = 25\%$$

Die Lebkuchen sind also um 25% teurer geworden.

2. Möglichkeit: Die Lebkuchen kosten x EURO.

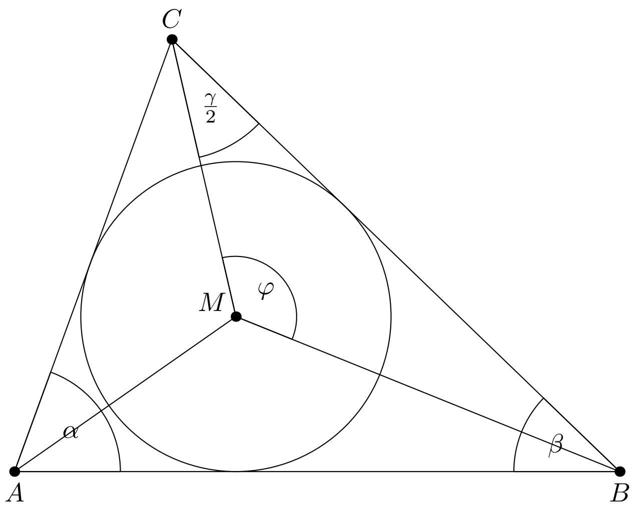
Früher:	1500 g kosteten x EURO .	$\Rightarrow$	100 g kosteten dann $\frac{x}{15}$ EURO .
Jetzt :	1200 g kosten auch x EURO .	$\Rightarrow$	100 g kosten dann $\frac{x}{12}$ EURO .

100 g Lebkuchen sind also um $\frac{x}{12}$ EURO $-$ $\frac{x}{15}$ EURO teurer geworden.

$$\left(\frac{x}{12} - \frac{x}{15}\right) \text{EURO} = \frac{x}{60}\,\text{EURO}$$
$$\frac{x}{60}\,\text{EURO} : \frac{x}{15}\,\text{EURO} = \frac{15}{60} = 0,25 = 25\%$$

Das Ergebnis ist das gleiche wie oben.

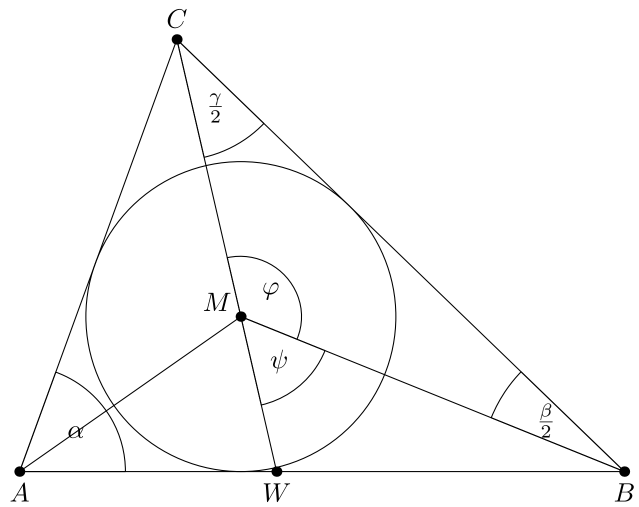
32. (a)



(b) $\gamma = 180° - 70° - 44° = 66°$.
Die drei Winkelhabierenden des Dreiecks ABC schneiden sich im Inkreismittelpunkt M.
Also folgt: $\varphi = 180° - 0,5 \cdot 44° - 0.5 \cdot 66° = 125°$.

(c) • $\gamma = 180° - 70° - 60° = 50°$.
$\varphi = 180° - 0,5 \cdot 60° - 0.5 \cdot 50° = 125°$.
Das Winkelmaß φ hängt gar nicht vom Winkelmaß β ab.

•



Der Winkel mit dem Maß ψ ist ein Außenwinkel am Dreieck MBC: $\Rightarrow \quad \psi = \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2}$.

Gleichzeitig gilt $\varphi = 180° - \psi$.

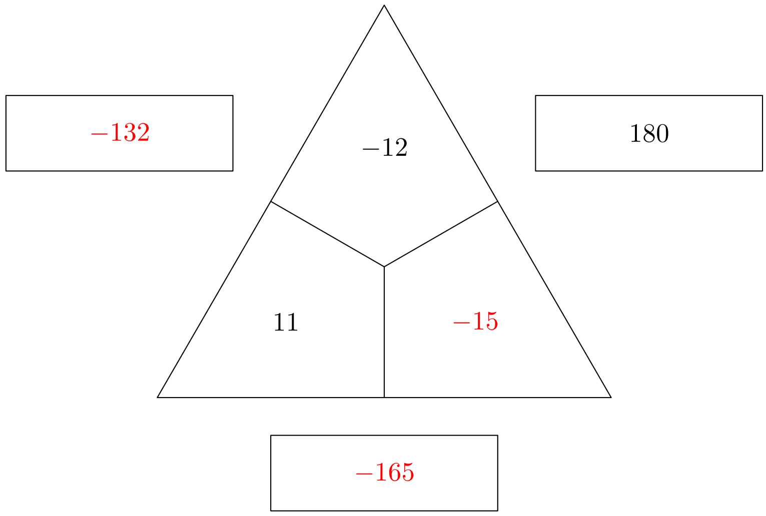
Wegen $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ folgt $\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$.

Also ergibt sich: $\varphi = 180° - \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

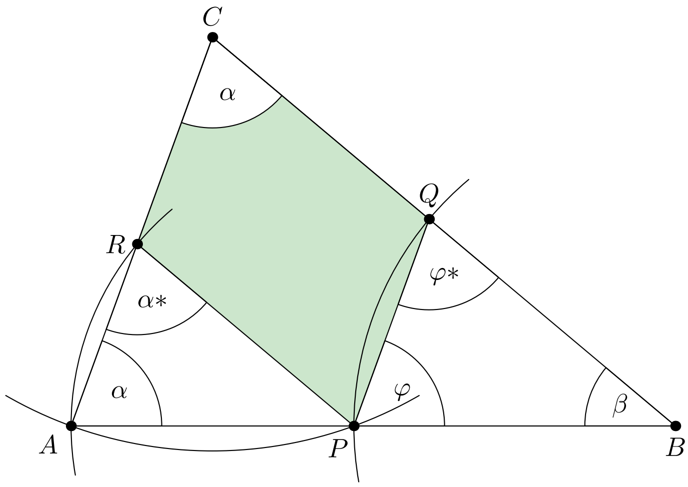
Und damit $\varphi = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$.

(d) $90° + \dfrac{\alpha}{2} = 135,68° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 91,36°$.

33.



34. (a)



(b) Wegen $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt $\sphericalangle ACB = \alpha$.
Das Dreieck APR ist gleichschenklig mit der Basis $[AR]$
$\Rightarrow \quad \alpha = \alpha*$ und damit auch $\alpha* = \sphericalangle ACB$.
Damit sind α und $\sphericalangle ACB$ F-Winkel. $\Rightarrow \quad [PR] \parallel [CQ] \quad (1)$.
Im gleichschenkligen Dreieck ABC glt: $\alpha = (180° - \beta) : 2$.
Im gleichschenkligen Dreieck PBQ glt: $\varphi = (180° - \beta) : 2 = \alpha$.
Damit sind α und $\sphericalangle BPQ$ F-Winkel. $\Rightarrow \quad [PQ] \parallel [RC] \quad (2)$.
Also sind im Viereck $PQCR$ wegen (1) und (2) jeweils die beiden gegenüber liegenden Seiten parallel. Also handelt es sich um ein Parallelogramm.

35. (a) Z.B.: $97 + 79 = 176$ oder $56 + 65 = 121$ oder ...

(b) • Die Summe aus der ersten und der letzen Ziffer des Sumenwertes ergibt jeweils die mittlere Ziffer.

-
  - $(10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11 \cdot (a + b)$.
    Der Summenwert enthält also stets den Faktor 11.
  - Der zweite Teiler entsteht aus dem Summenwert der beiden Ziffern der zweistelligen Zahl. Begründung siehe Lösung oben.

(c) Es gilt $11(a + b) = 143 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 13$. Gesucht sind also Ziffernpaare $(a \mid b)$, so dass $a + b = 13$ wird. Das ergibt folgende Zahlenpaare:
$\{(9 \mid 4)\,; (8 \mid 5)\,; (7 \mid 6)\,(6 \mid 7)\,; (5 \mid 8)\,; (4 \mid 9)\,.$

36. (a) $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}}$.

(b) Wenn du die Ungleichung in Aufgabe (a) auf beiden Seiten mit 3 multiplizerst, dann erhältst du die Ungleichung (b). Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

(c) Wenn du Ungleichung (a) auf beiden Seiten mit 1387 multiplizerst, dann erhältst du die Ungleichung (c). Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

(d) Weil $x^2 + 1$ stets positiv ist, muss $2x - 4$ auch positiv (also > 0) bleiben. An der Lösungsmenge ändert sich nichts.

(e) Weil $x^2 + 1$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ positiv ist, folgt aus den gleichen Gründen wie oben $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}}$.

(f) Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob die Lösungsmenge zu den vorigen unverändert bleibt. Doch du musst hier vorsichtiger sein: Der Faktor $(x - 11)^2$ ist nicht für alle Belegungen von x positiv, denn $x = 11$ ist eine Nullstelle dieses Terms; d.h. für $x = 11$ ergibt sich $(11 - 11)^2 \cdot (2 \cdot 11 - 4) = 0$ und nicht > 0 .Das bedeutet: $x = 11$ gehört nicht zur Lösungsmenge.
Damit gilt hier $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}} \setminus \{11\}$.

37. (a)
- $75 - 12 = 63$.
- $T_{63} = 1; 3; 7; 9; 21; 63$.

(b)
- $59 - 14 = 45._{45} = 1; 3; 5; 9; 15; 45$.
- $ggT(45; 63) = 9$

(c)
-
- Der Wert der Differenz aus der Zahl und ihrer Quersume ist wieder durch 9 teilbar.
- Zweistellige Zahl $10a + b$; $q = a + b$.
  Differenzwert: $10a + b - (a + b) = 9a$; also ist der Differenzwert stets durch 9 teilbar.

(d)
-
- Dreistellige Zahl: $100a + 10b + c$; $q = a + b + c$.
  Differenzwert: $100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9 \cdot (11a + b)$; also ist auch dieser Differenzwert stets durch 9 teilbar.

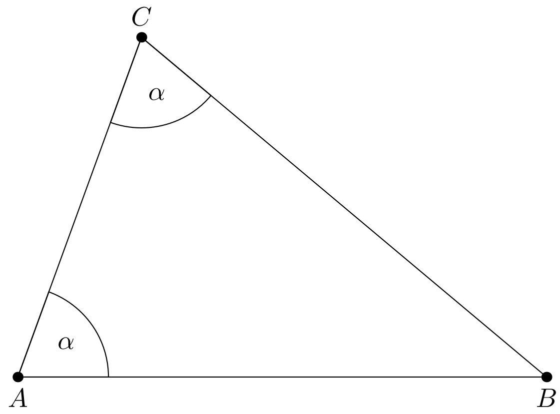
(e) Ja, denn $10^n \cdot a - a$ liefert ausschließlich Neuner als Ziffern.

38. (a) Im Dreieck ABC gilt: $\alpha = \sphericalangle BAC = \delta + \varepsilon = \sphericalangle ACB = \gamma$.
Also haben zwei Innenwinkel des Dreiecks ABC gleiches Maß; damit ist das Dreieck ABC gleichschenklig. Es besitzt die Basis $[AC]$.

(b) Um das Dreieck zeichnen zu können, brauchst du neben der Streckenlänge $\overline{AB}$ und dem 40°-Winkel noch ein weiteres Bestimmungsstück:
Du kannst entweder $\overline{BC} = 7\,\text{cm}$ verwenden oder das Winkelmaß

$$\alpha = (180° - 40°) : 2 = 70°$$

berechnen.



(c) Es gilt $\alpha = \delta + \varepsilon = 70°$.
Dann folgt im Dreieck ASC: $\underbrace{\delta + \varepsilon}_{=70°} + \varphi = 180° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 110°$.

39. $u_{\Delta BEC} = 10\,\text{cm} + b + c \quad u_{ABCD} = 4 \cdot 10\,\text{cm} = 40\,\text{cm}$
$u_{\Delta BEC} = 2 \cdot u_{ABCD}$. Also: $10\,\text{cm} + b + c = 2 \cdot 40\,\text{cm} = 80\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad b + c = 70\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad u_{ABECD} = 3 \cdot 10\,\text{cm} + 70\,\text{cm} = 100\,\text{cm}$.

40. (a)
- $n = 83 - 69 - 1 = 13$.
- $\{70; 71; 72; 73; 74; 75; 76; 77; 78; 79; 80; 81; 82\}$.
  Die Lösungsmenge enthält 13 Zahlen.

(b) $n = 803\,102 - 513\,799 - 1 = 289\,302$.

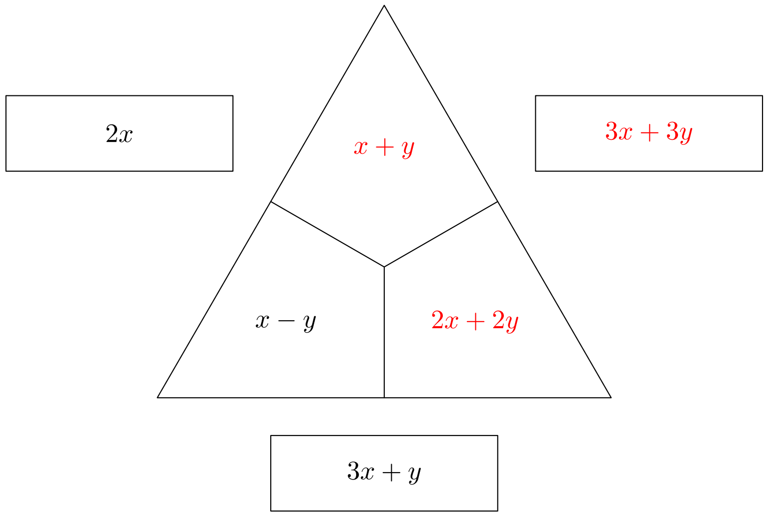
(c)
- Für x und y gilt dann $y = x + 1$.
  $n = (x + 1) - x - 1 = 0$. In der Tat gibt es keine natürlichen Zahlen zwischen zwei Zahlennachbarn. Die Formel (*) gilt auch in diesem Fall.
- $n_1 = 3 - (-11) - 1 = 3 + 11 - 1 = 13$.
  Wenn du alle in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst, bestätigt sich die Formel.
  $n_2 = -23 - (-39) - 1 = -23 + 39 - 1 = 15$.
  Wenn du auch in diesem Fall alle in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst, bestätigt sich die Formel erneut.

41. (a) Z.B. 470: Die neue (zweistellige) natürliche Zahl heißt dann 47.
$470 - 47 = 423$. $423 : 47 = 9$: Stimmt.

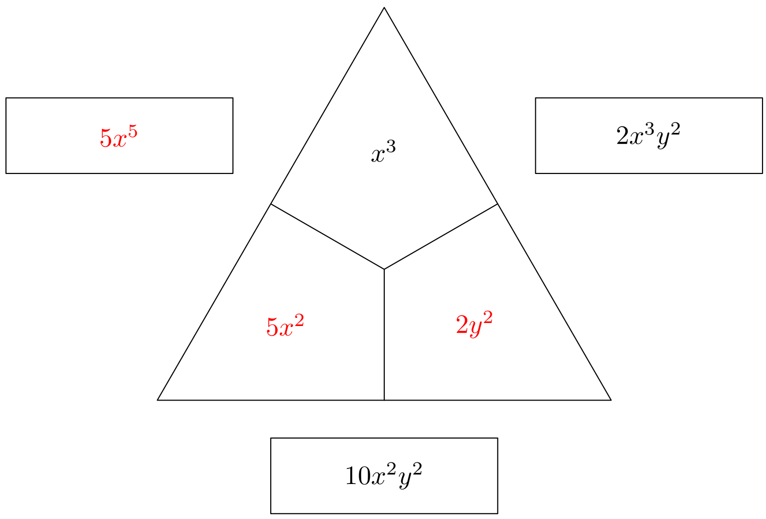
(b) Z.B. 5730: Die neue (dreistellige) natürliche Zahl heißt dann 573.
$5730 - 573 = 5157$. $5157 : 573 = 9$: Stimmt auch.

(c) Die neue Zahl ist x. Wenn deren zugehörige ursprüngliche Zahl durch 10 teilbar sein soll muss diese auf 0 enden. Dann ist diese aber zehnmal so groß wie die neue Zahl. Also kannst du für die alte Zahl $10x$ schreiben. Somit ergibt sich:
$10x - x = 9x$. Der Wert der Differnz ist also $9x$ und damit sowohl durch 9 als auch durch x, also die neue Zahl, teilbar.

42.



43.



44. Preis pro T-Shirt im September 2011: x EURO.
Preis pro T-Shirt im Oktober 2011: $(x+1)$ EURO.
Wir rechnen im Folgenden nur mit Maßzahlen.
$76 \cdot x = 72 \cdot (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 72 \quad \Leftrightarrow \quad x = 18\,.$
Im September 2011 kostete eines dieser T-Shirts 18 EURO.

45. **1. Möglichkeit:**
Um von der ersten zur zweiten Zeile zu kommen, hat Carsten offenbar auf beiden Seiten der Gleichung im Buch die Zahl 16 addiert. Dadurch fällt das Kästchen in der zweiten Zeile weg. Also stand die unleserliche Zahl 16 anstelle des Kästchens da.
2. Möglichkeit:
Der Lehrer hat $x = 7$ als richtige Lösung bestätigt. Setze diese Lösung in die erste Zeile ein:
$2 \cdot 7 - \square = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 14 - \square = -2 \mid -14 \quad \Leftrightarrow \quad -\square = -16 \mid \cdot(-1)$
$\Leftrightarrow \quad \square = 16\,.$

46. (a) Hier gilt: $63\,\mathrm{cm} = 2 \cdot h + t$.

(b) Z.B.:
$h_1 = 20\,\mathrm{cm} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 23\,\mathrm{cm}$
$h_1 = 18\,\mathrm{cm} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 27\,\mathrm{cm}\,.$

(c) Es gilt: $h = (63\,\mathrm{cm} - t) : 2$

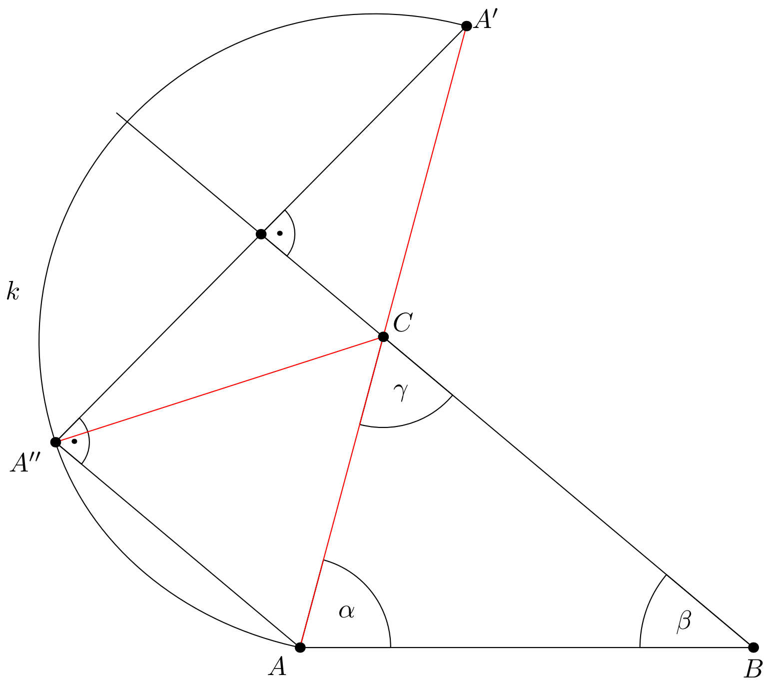
$$\begin{aligned} h = (63\,\mathrm{cm} - t) : 2 &\leqq 16\,\mathrm{cm} \mid \cdot 2 \\ 63\,\mathrm{cm} - t &\leqq 32\,\mathrm{cm} \mid -63\,\mathrm{cm} \\ -t &\leqq -31\,\mathrm{cm} \mid \cdot(-1) \\ t &\geqq 31\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Die Stufentiefe muss also mindestens 31 cm betragen.

(d) In der Formelgleichung gilt dann $h = t$: $\quad 63\,\mathrm{cm} = 3t \quad t = 21\,\mathrm{cm}\,.$
Eine Stufentiefe von nur 21 cm wäre für ältere Leute zu gefährlich.

(e) Es werden $1{,}20\,\mathrm{m} : 15 = 120\,\mathrm{cm} : 15\,\mathrm{cm} = 8$ Stufen benötigt.
$63\,\mathrm{cm} = 2 \cdot 15\,\mathrm{cm} + t \quad \Rightarrow \quad t = 33\,\mathrm{cm}\,.$
$33\,\mathrm{cm} \cdot 8 = 264\,\mathrm{cm} = 2{,}64\,\mathrm{m}\,.$
Die gesamte Treppenlänge beträgt also $2{,}64\,\mathrm{m}$.

47. (a)



- Siehe Zeichnung.
- Siehe Zeichnung.

(b) Begründe:

- Jede Punktspiegelung ist längentreu. Also gilt: $\overline{CA} = \overline{CA'}$.
  Jede Achsenspiegelung ist längentreu. Also gilt: $\overline{CA'} = \overline{CA''}$.
  $\Rightarrow \quad \overline{CA} = \overline{CA''}$. Also ist das Dreieck ACA'' gleichschenklig.
- Es gilt: $\overline{CA} = \overline{CA''} = \overline{CA'}$. Das bedeutet, dass die drei Punkte A, A' und A'' vom Punkt C gleich weit entfernt sind. Folglich müssen die Punkte A, A' und A'' auf einer Kreislinie k mit dem Mittelpunkt C liegen. Diese Kreislinie ist nun der THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AA']$. Also ist das Dreieck $AA''A'$ wegen $A'' \in k$ rechtwinklig.

48. (a) Klar.

(b) Das Dreieck APD ist ein halbes Quadrat. $\quad\Rightarrow\quad \varphi = 45°$.
Die drei Winkel mit dem Scheitel P ergeben einen gestreckten Winkel:
$\varphi + 90° + \psi = 180° \quad\Rightarrow\quad \psi = 45°$.

(c) **Wir rechnen im Folgenden ab und zu nur mit Maßzahlen.**

$\overline{PB} = 8 - 5 = 3\,\text{cm}. \quad 3 = \dfrac{\overline{PQ}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \quad \overline{PQ} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = 1,5 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} = \overline{SR} = \overline{DS}$.

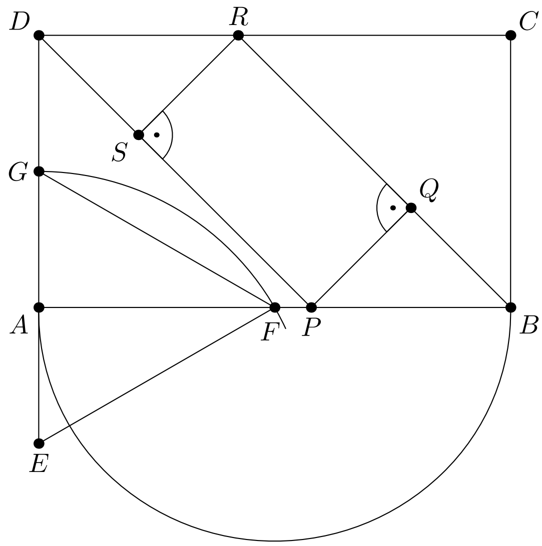
$\overline{PD} = 5 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \quad\Rightarrow\quad \overline{PS} = 5\sqrt{2} - 1,5\sqrt{2} = 3,5\sqrt{2}\,\text{cm}$.

$A_{PQRS} = \overline{PQ} \cdot \overline{RS} = 1,5\sqrt{2} \cdot 3,5\sqrt{2} = 10,5\,\text{cm}^2$.

$A_{ABCD} = 40\,\text{cm}^2\,.$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{10,5\,\text{cm}^2}{40\,\text{cm}^2} = 0,2625 = 26,25\%\,.$$

(d)



- Klar.
- Die Strecke $[AF]$ stellt die Höhe des gleichseitigen Dreiecks EFG mit einer Seitenlänge von 6 cm dar. Also gilt:
  $\overline{AF} = 3\sqrt{3}\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad a = 2 \cdot \overline{AF} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}\,.$
  $\overline{PB} = 6\sqrt{3} - 6 = 6 \cdot (\sqrt{3} - 1)\,\text{cm}\,.$

  $$\overline{PQ} = \frac{\overline{PB}}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})\,\text{cm} = \overline{DS}\,.$$

  $\overline{PS} = 6\sqrt{2} - 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = (9\sqrt{2} - 3\sqrt{6})\,\text{cm}\,.$
  $A_{PQRS} = 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot (9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}) = (72\sqrt{3} - 108)\,\text{cm}^2\,.$

  $A_{ABCD} = 6 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\,\text{cm}^2\,.$

  $$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(72\sqrt{3} - 108)\,\text{cm}^2}{36\sqrt{3}\,\text{cm}^2} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,26795 \approx 26,80\%\,.$$

(e) Es gilt allgemein: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot (a-b) \cdot (3b-a)}{ab} = -\dfrac{1}{2} \cdot \left(3\dfrac{b}{a} - 4 + \dfrac{a}{b}\right).$

Setzen wir $\dfrac{b}{a} = k$, so ergibt sich weiter: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = -\dfrac{1}{2} \cdot \left(3k - 4 + \dfrac{1}{k}\right) = T(k)\,.$

- $$\begin{aligned} T^*(k) &= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\sqrt{3k}\right)^2+2-\sqrt{3} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}-2\sqrt{3}+3k\right)+2-\sqrt{3} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}-2\sqrt{3}+3k-4+2\sqrt{3}\right) \\ T^*(k) &= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}+3k-4\right)=T(k) \end{aligned}$$

- $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\sqrt{3k}\right)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k}}-\sqrt{3k}=0$

  $\Leftrightarrow \quad 1=k\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad k=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{b}{a}.$

  $T(k)_{max}=T\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2-\sqrt{3}\approx 0,26795\approx 26,80\%.$

- Es gilt $\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad a=b\sqrt{3}$

  In der Aufgabe (d) hattest du mit $b=6\,\text{cm}$ konstruiert. Für die Höhe im gleichseitigen Dreieck EFG der Konstruktion (d) ergibt sich dann $\overline{AF}=3\sqrt{3}\,\text{cm}$. Weil der Punkt F gleichzeitig Mittelpunkt des Halbkreises ist, gilt $a=2\cdot 3\sqrt{3}\,\text{cm}=6\sqrt{3}\,\text{cm}$. Also ergibt sich:

  $k=\frac{b}{a}=\frac{6\,\text{cm}}{6\sqrt{3}\,\text{cm}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, wie in der Lösung (e) schon errechnet.

49. (a) Klar.

    (b) $x\in]0,5[_{\mathbb{R}}$.

    (c) Wir rechnen mit der Formel: $A_{Dreieck}=\frac{1}{2}\cdot$ Grundlinie $\cdot$ Höhe: In den Dreiecken AP_nQ_n bzw AQ_nS_n gilt:

$$A_{AP_nQ_n}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(b-x) \quad =\frac{1}{2}bx-\frac{1}{2}x^2 \tag{2.1}$$

$$A_{AQ_nS_n}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(a-x) \quad =\frac{1}{2}ax-\frac{1}{2}x^2 \tag{2.2}$$

$$(1)+(2): \quad A_{AP_nQ_nS_n}=\frac{1}{2}(a+b)\cdot x-x^2 \tag{2.3}$$

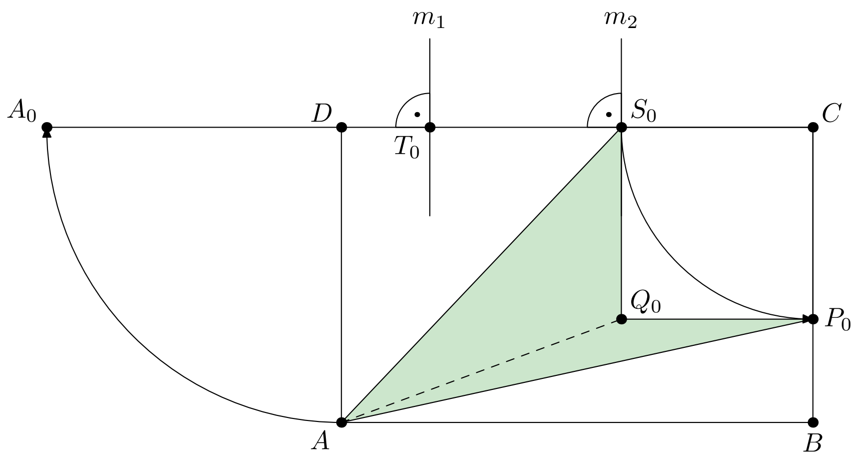
Die Gleichung (3) ist die geforderte.

(d)

$$\begin{aligned}
A(x) &= -x^2 + \frac{1}{2}(a+b)\cdot x \\
&= -\left[x^2 - \frac{1}{2}(a+b)\cdot x + \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2\right] \\
&= -\left[\left(x - \frac{1}{4}(a+b)\right)^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2\right] \\
A(x) &= -\left(x - \frac{1}{4}(a+b)\right)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2
\end{aligned}$$

$x = \frac{1}{4}(a+b)$ liefert $A_{max} = \frac{(a+b)^2}{16}$.

(e)



Hier gilt $\overline{A_0C} = a+b$.

Der Punkt T_0 halbiert die Strecke $[A_0C]$: $\overline{T_0C} = \frac{a+b}{2}$.

Der Punkt S_0 halbiert die Strecke $[T_0C]$: $\overline{S_0C} = \frac{a+b}{4} = x$.

50. (a) Gleicher Umfang: $5a = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{3}a$.

(b) $A_{\text{Trapez}} = 3\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.

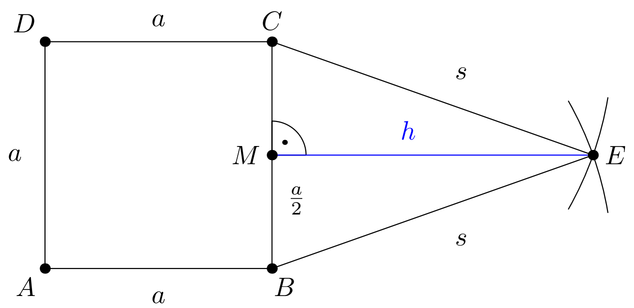
$$A_{\Delta\,PQR} = \frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\left(\frac{5}{3}a\right)^2}{4}\sqrt{3} = \frac{25}{36}a^2\sqrt{3}.$$

$$\frac{A_{\Delta\,PQR}}{A_{\text{Trapez}}} = \frac{\frac{25}{36}a^2\sqrt{3}}{\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}} = \frac{25}{36}\cdot\frac{4}{3} = \frac{100}{108}\left(= \frac{25}{27}\right).$$

(c) $A_{\Delta\,PQR} \mathrel{\widehat{=}} 100\%$.
Nach Lösung (b) gilt $A_{\text{Trapez}} \mathrel{\widehat{=}} 108\%$.
Dann ist also der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ um 8% größer als der des Dreiecks PQR.

51. (a) $u_{BEC} = a + s + s = 2s + a \qquad u_{ABCD} = 4a$
$2s + a = 4a \quad \Leftrightarrow \quad s = 1,5a$.

(b)



Die beiden Kreisbögen mit dem Radius $r = 1,5{\cdot}3\,\text{cm} = 4,5\,\text{cm}$ und den Mittelpunkten B bzw. C schneiden sich im Punkt E.

(c) ΔBEM: $\quad h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (1,5a) - (0.5a)^2 = 2.25a^2 - 0.25a^2 = 2a^2$
$\Rightarrow \quad h = a\sqrt{2}$

$$A_{\Delta BEC} = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2}{2}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad A_{ABCD} = a^2 .$$

$$\frac{A_{\Delta BEC}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{a^2}{2}\sqrt{2}}{a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071 = 70,71\%$$

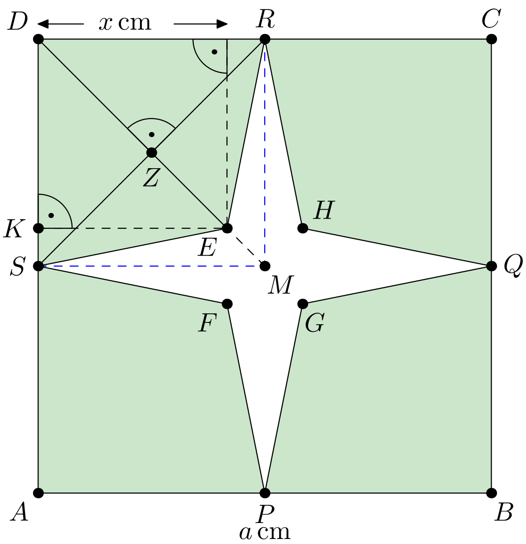
(d) $h^2 = s^2 - \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}}$.

$$A_{\Delta BEC} = A_{ABCD} \quad : \quad \frac{a}{2}\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} = a^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} = a \quad \Big|^{2}$$

$$\Rightarrow \quad s^2 - \frac{a^2}{4} = 4a^2 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 = \frac{16a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{a}{2}\sqrt{17} \approx 2,06 \cdot a\ .$$

52. (a)



(b) Das Viereck $SMRD$ ist ein Quadrat, dessen Diagonalen $[DM]$ und $[SR]$ folgende Eigenschaften besitzen:

- $[SR] \perp [DM]$. Wegen $E \in [DM]$ folgt $[SR] \perp [DE]$.
- DM ist sowohl die Symmetrieachse des Quadrates $SMRD$ als auch die des Vierecks $SERD$.

Also ist das Viereck $SERD$ ein achsensymmetrischer Drachen.

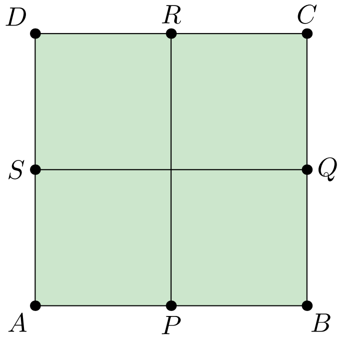
(c) $A_{SERD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SR} \cdot \overline{DE}$. (*)

$[SR]$ ist eine Diagonale des Quadrates $SMRD$ mit der Seitenlänge 3 cm: $\Rightarrow \quad \overline{SR} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.
$[DE]$ ist eine Diagonale des Quadrates mit der Seitenlänge $\overline{KD} = x\,\text{cm}$ und der Diagonale $[DE]$: $\Rightarrow \quad \overline{DE} = x\sqrt{2}\,\text{cm}$.
Mit (*) folgt dann:

$$A_{SERD} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2}\,\text{cm}^2 = 3x\,\text{cm}^2 .$$

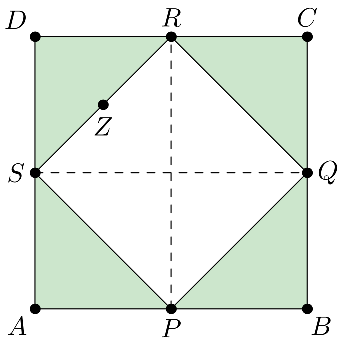
$$A_{\text{Stern}} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{SERD} = 36\,\text{cm}^2 - 4 \cdot 3x\,\text{cm}^2 = (36 - 12x)\,\text{cm}^2 .$$

(d)
- $A(3) = (36 - 12 \cdot 3)\,\text{cm}^2 = 0\,\text{cm}^2$.
  Für $x = 3$ deckt sich das Drachenviereck $SERD$ mit dem Quadrat $SMRD$. Das geschieht auf die gleiche Weise mit den drei restlichen Drachenvierecken. Dann sieht die Figur so aus:



D.h. der Stern entartet zu zwei gekreuzten Strecken $[PR]$ und $[SQ]$, deren Flächeninhalt 0 ist.

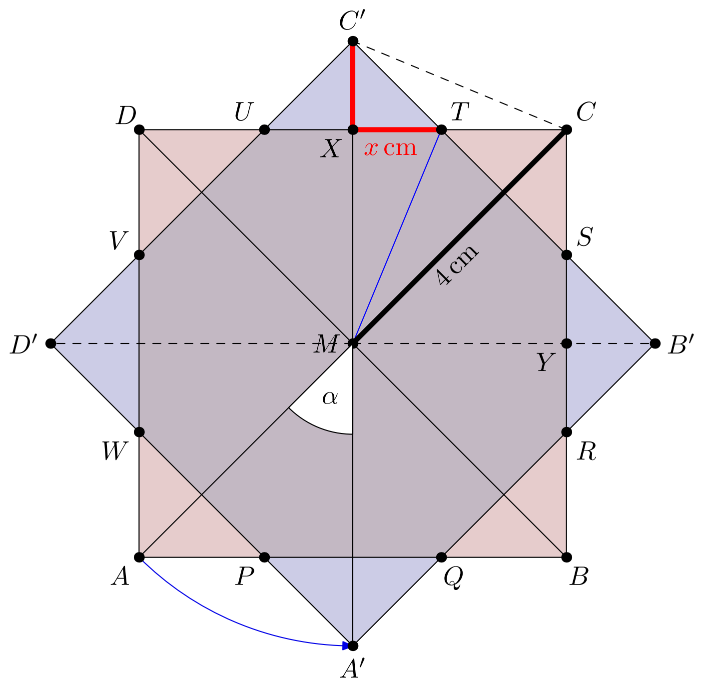
- $A(1,5) = (36 - 12 \cdot 1,5)\,\text{cm}^2 = 18\,\text{cm}^2$.
  Für $x = 1,5$ kommt der Punkt E auf den Diagonalenschnittpunkt Z des Drachenvierecks $SERD$ zu liegen; d.h. das Drachenviereck entartet zum gleichschenkligrechtwinkligen Dreieck SRD. Damit wird der Stern zu einem einbeschriebenen Quadrat dessen Eckpunkte jeweils auf einem Mittelpunkt der Seiten des Quadrates $ABCD$ fallen. Dann sieht die Figur so aus:



Anhand der gestrichelten Diagonalen des zum Quadrat $PQRS$ entarteten Sterns erkennst du, dass dieses Quadrat halb so groß wie das äußere Quadrat $ABCD$ ausfällt, was auch die obige Rechnung bestätigt.

(e) $36 - 12x = 3,6 \quad \Leftrightarrow \quad 32,4 = 12x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,7.$

53. (a)



(b) $\alpha = 45°$.
Es gilt z.B.: $MD' \perp MA'$. Die Diagonale $[AC]$ halbiert diesen rechten Winkel.

(c)
- Aus Symmetriegründen sind die vier Dreiecke, die über das Quadrat $ABCD$ hinausragen und die vier Dreiecke, die über das gedrehte Quadrat $A'B'C'D'$ hinausragen, alle kongruent. Also sind alle Seiten des fraglichen Achtecks geich lang.
  Die Diagonalen der Quadrate $ABCD$ und $A'B'C'D'$ schließen paarweise einen 45°-Winkel ein. Also haben alle Innenwinkel des Achtecks das Maß $180° - 45° = 135°$. Also ist das Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig.
- Subtrahierst du vom gedrehten Quadrat $A'B'C'D'$ die Flächen der vier Dreiecke, die über das Quadrat $ABCD$ hinausragen, dann erhältst du den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUVW$.
  Betrachte z.B. das Dreieck UTC'. Aus Symmetriegründen muss es gleichschenklig-rechtwinklig sein. Also gilt: $\overline{XT} = \overline{XC'} = x\,\text{cm}$. .
  Das Dreieck $MCXC'$ ist gleichschenklig: $\overline{MC} = \overline{MC'} = 4\,\text{cm}$˙
  Damit gilt einerseits: $\overline{MX} = (4 - x)\,\text{cm}$. (*)
  Das Viereck $MYCX$ ist ein Quadrat, dessen Diagonale 4 cm lang ist. Damit gilt andererseits: $\overline{MX} = \frac{4}{\sqrt{2}}\,\text{cm}$.

  Mit (*) ergibt sich:

$$4 - x = \frac{4}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = 4 - \frac{4}{\sqrt{2}} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} .$$

  Das Dreieck UTC' ist genauso groß wie ein Quadrat mit der Seitenlänge $x\,\text{cm}$.

$$A_{UTC'} = x^2\,\text{cm}^2 = \left(4 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{cm}^2 = 16 \cdot \frac{2-2\sqrt{2}+1}{2}\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{UTC'} = 8 \cdot (3-2\sqrt{2})\,\text{cm}^2\,.$$

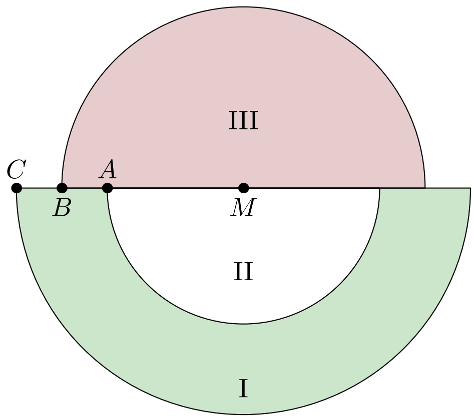
Wegen $A_{PQRSTUVW} = A_{A'B'C'D'} - 4 \cdot A_{UTC'}$ folgt:

$$A_{PQRSTUVW} = \frac{1}{2} \cdot 8^2\,\text{cm}^2 - 4 \cdot 8 \cdot (3-2\sqrt{2})\,\text{cm}^2$$

$$A_{PQRSTUVW} = 32 \cdot [1-(3-2\sqrt{2})]\,\text{cm}^2 = 32 \cdot [2\sqrt{2}-2]\,\text{cm}^2$$
$$A_{PQRSTUVW} = 64 \cdot (\sqrt{2}-1)\,\text{cm}^2 \approx 26{,}51\,\text{cm}^2\,.$$

54. (a) Die Figur 1 ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

Figur 1



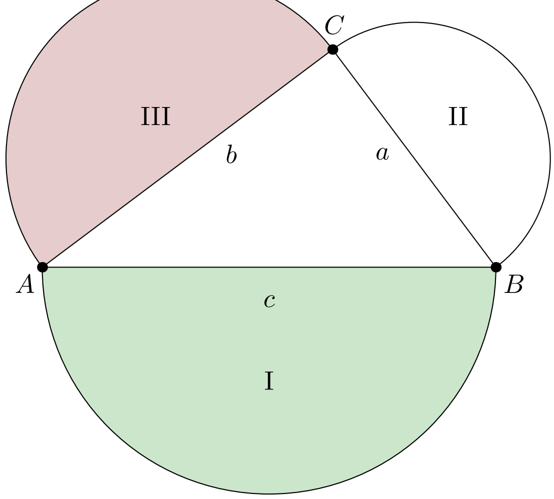
(b) Du hast die drei Halbkreise I, II und III vor dir.
Es müsste gelten: $A_{III} = A_I - A_{II}$. Es wird in der Einheit cm^2 gerechnet.

Also: $\frac{1}{2} \cdot 4{,}8^2\pi = \frac{1}{2} \cdot 6^2\pi - \frac{1}{2} \cdot 3{,}6^2\pi \;\Big|\; : \frac{1}{2}\pi$

$4{,}8^2 = 6^2 - 3{,}6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 23{,}04 = 36 - 12{,}96$. Das stimmt, also ist die Behauptung bewiesen.

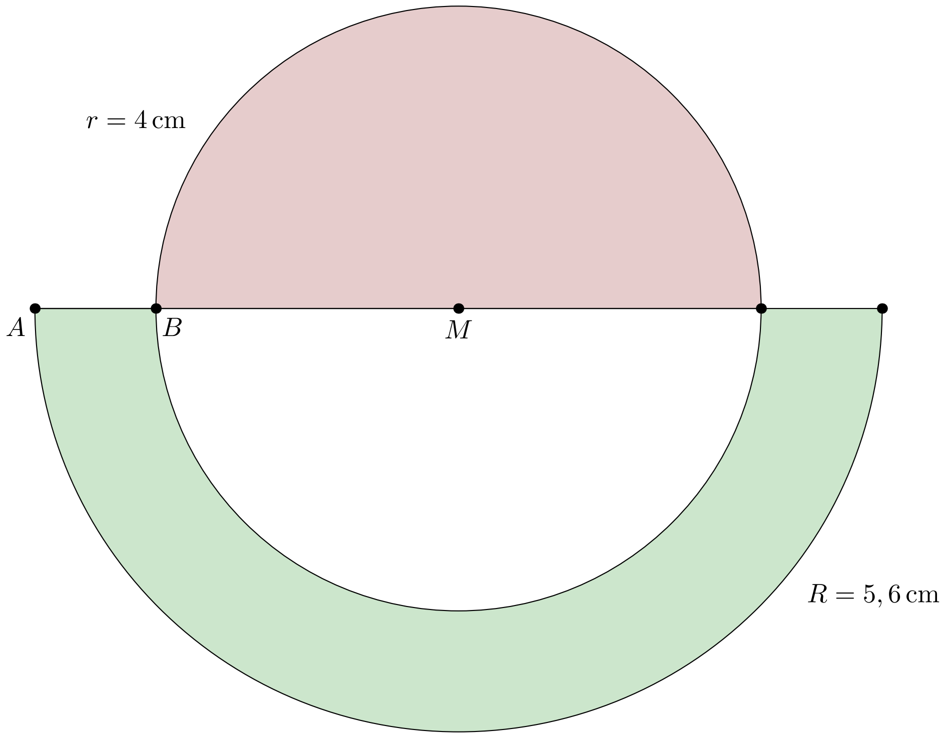
(c) • Die Figur 2 ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

Figur 2



- Für die Maßzahlen müsste gelten:
  $12^2 = 7,2^2 + 9,6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 144 = 51,84 + 92,16$. Das stimmt, also ist das Dreieck ABC rechtwinklig.
- Es gilt: $c^2 = a^2 + b^2 \,\Big|\, \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi$
  $$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \pi\,.$$
  Das bedeutet: Der Halbreis I hat den gleichen Flächeninhalt wie die beiden Halbkreise II und III zusammen.
- In der Figur 1 siehst du einen gleich gelagerten Fall: Wenn du den Halbkreis II aus dem Halbkreis I entfernst, ergibt sich: Der Halbkreis I muss genauso groß sein wie die beiden Halbkreise II und III zusammen.
  In der Figur 1 und der Figur 2 haben gleich nummerierte Halbkreise den gleichen Durchmesser; d.h. sie sind kongruent.

55. (a)



(b) **Anmerkung: Zu allen Flächenmaßzahlen gehört die Einheit „cm²“.** Es gilt: $A_{\text{Halbkreis(klein)}} = \frac{1}{2} \cdot 4^2\pi$ und $A_{\text{Kreisring}} = \frac{1}{2} \cdot 5,6^2\pi - A_{\text{Halbkreis(klein)}}$.

Es muss also gelten: $A_{\text{Halbkreis(groß)}} = 2 \cdot A_{\text{Halbkreis(klein)}}$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 5,6^2\pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2\pi \quad \Big| : \pi \quad \Leftrightarrow \quad 15,68 \neq 16\,.$$

(c) $\frac{1}{2} \cdot R^2\,\pi = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{18}^{\;2}\pi\,\text{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 = 36\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad R = 6\,\text{cm}\,.$

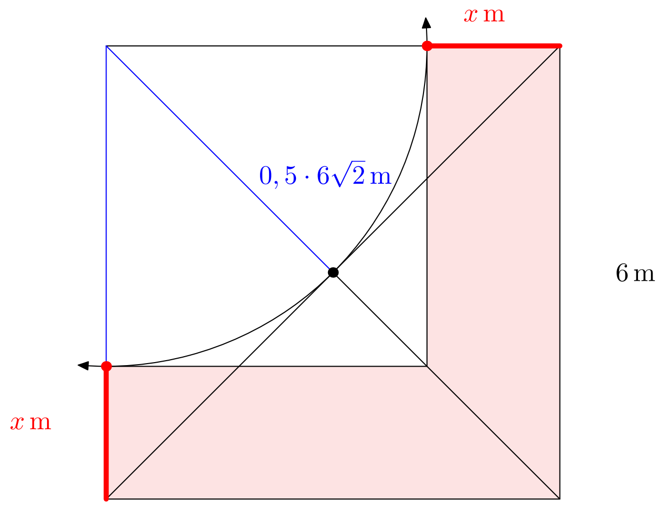
(d) Es muss gelten: $\frac{1}{2} \cdot R^2\,\pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^{\,2}\pi \quad \Rightarrow \quad R = r\sqrt{2}\,.$

Du könntest das auch mit Hilfe der Eigenschaften der zentrischen Streckung begründen:

- Alle Kreise sind zueinander ähnlich.
- Wenn du eine Kreisfläche verdoppelst, dann gilt für den Streckungsfaktor k: $k^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{2}\,.$

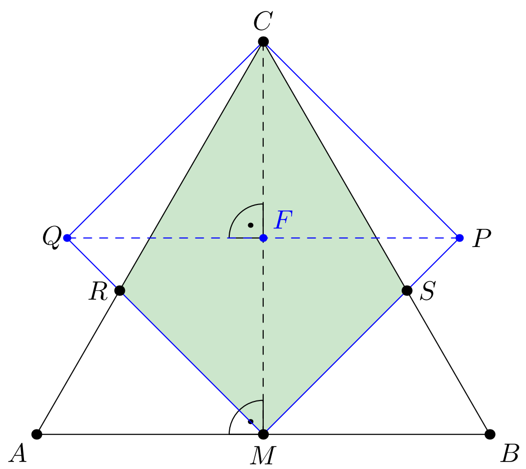
56. (a) Wenn das „L“ überall x m dick ist, dann ist die geflieste Fläche ein Quadrat mit der Seitenlänge $(6 - x)\,\text{m}$.
Wenn das „L“ die Hälfte der Gesamtfläche ausmacht, dann muss die quadratische geflieste Fläche die andere Hälfte einnehmen. Als Maßzahlengleichung ergibt sich dann: $(6 - x)^2 = 0.5 \cdot (6 \cdot 6) = 18$, mit $x \in \,]0,\,6[_{\mathbb{R}}$.

$\Leftrightarrow \quad |\, 6 - x \,| = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}\,.$
$\Leftrightarrow \quad 6 - x = 3\sqrt{2} \quad \vee \quad 6 - x = -3\sqrt{2}\,.$
$\Leftrightarrow \quad x = 6 - 3\sqrt{2} \quad \vee \quad x = 6 + 3\sqrt{2}\,.$
Wegen $x \in\ ]0,\, 6[_{\mathbb{R}}$ folgt $x = 6 - 3\sqrt{2}\,.$

(b)
- Der Grundriss ist im Maßstab $1 : 100$ dargestellt. $(1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm})$.
- 

  Ein Quadrat, dessen Seitenlänge 6 cm beträgt, hat eine Diagonalenlänge von $6\sqrt{2}$ cm.
  $0,5 \cdot 6\sqrt{2}$ cm ist dann gerade die halbe Diagonalenlänge dieses Quadrates.
  Du erhältst x, wenn du mit Hilfe des Kreisbogens die Differenz aus der Seitenlänge des großen Quadrates und seiner halben Diagonalenlänge abträgst.
- Der Rest ist klar.

57. (a)



(b) Flächeninhalt A_Δ des Dreiecks ABC: $A_\Delta = \dfrac{6^2}{4} \cdot \sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2 = 9\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2\,.$

Jedes Quadrat darf sich auch „Drachenviereck“ nennen. Am einfachsten kommst du mit der Flächenformel für das Drachenviereck zum Ziel:

Hier: $A_{MPCQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MC}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2 \text{ cm}^2 = 13{,}5\,\text{cm}^2$.

$\frac{13{,}5\,\text{cm}^2}{9\sqrt{3}} \text{ cm}^2 \approx 0{,}8660 = 86{,}60\%$

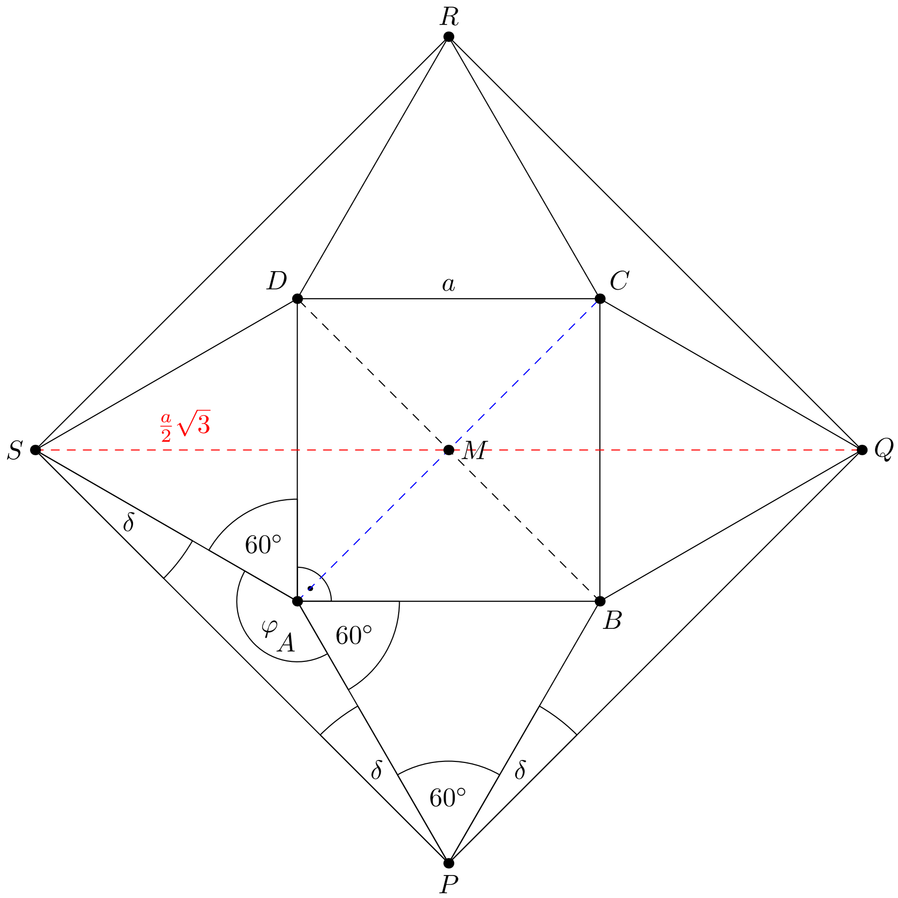
$100\% - 86{,}60\% = 13{,}40\%$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist etwa um $13{,}40\%$ größer als der des Quadrates $MPCQ$.

(c) Das Viereck $MSCR$ ist ein achsensymmetrisches Drachenviereck.
Begründung:

- Seine Diagonalen stehen (wie auch die des Quadrates $MPCQ$) aufeinander senkrecht.
- Die Gerade MC ist die Sysmmetrieachse des Drachenvierecks.

(d) $u = 4 \cdot \overline{MP} = 4 \cdot \overline{MF}\sqrt{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} = 6\sqrt{6}\,\text{cm}$.

58. (a)



(b) Die vier Dreiecke SPA, PQB, QRC und RSD sind aus Symmetriegründen kongruent. Also handelt es sich bei dem Viereck $PQRS$ mindestens um eine Raute.
Am Punkt A gilt: $\varphi = 360° - 90° - 2 \cdot 60° = 150°$.
Aus Symmetriegründen sind die vier Dreiecke SPA, PQB, QRC und RSD gleichschenklig.
$\Rightarrow \quad \delta = (180° - 150°) : 2 = 15°$.
Dann siehst du z.B. am Punkt P: $\sphericalangle QPS = 2 \cdot 15° + 60° = 90°$. Also ist die Raute sogar ein Quadrat.

(c) **1. Möglichkeit:** Die Summe aller Teilflächen
$$A_{PQRS} = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 150° = a^2 + a^2\sqrt{3} + a^2 = a^2(2 + \sqrt{3}) \, .$$

2. Möglichkeit: Alle Quadrate sind zueinander ähnlich
Wenn du das kleine Quadrat $ABCD$ mit einem Faktor k streckst, erhältst du das große Quadrat. (Erst eine anschließende Drehung des gestreckten Quadrates um 45° brächte dieses Zwischenbild zur Deckung mit dem großen Quadrat $PQRS$. Aber das spielt bei der Ermittlung des Flächeninhaltes des großen Quadrates $PQRS$ keine Rolle, weil ja die Drehung einer Fläche deren Inhalt unverändert lässt.)

Den Streckungsfaktor k ermittelst du über die Diagonalenlängen:. Es gilt z.B.: $k =$

$\dfrac{\overline{SQ}}{\overline{AC}}$.

$\overline{SQ} = 2 \cdot \dfrac{a}{2}\sqrt{3} + a = a \cdot (\sqrt{3}+1)$ und $\overline{AC} = a\sqrt{2}$.

Dann gilt: $k = \dfrac{a \cdot (\sqrt{3}+1)}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$.

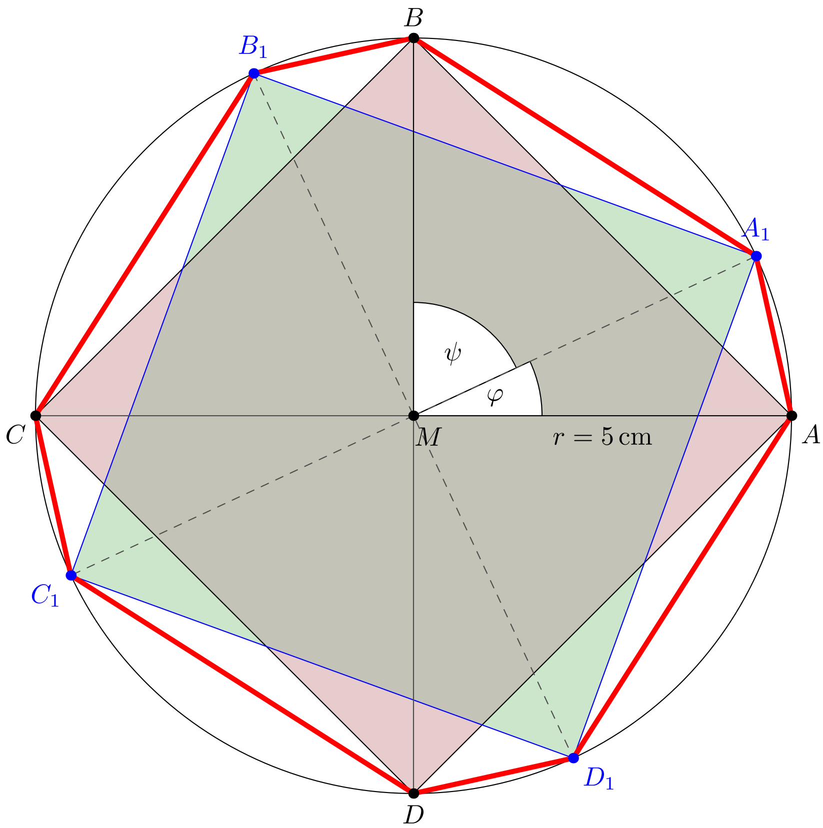
Weiter folgt:

$$A_{PQRS} = k^2 \cdot A_{ABCD} = \left[\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}\right]^2 \cdot a^2 = \frac{2(3+2\sqrt{3}+1)}{4} \cdot a^2 .$$

$\Rightarrow \quad A_{PQRS} = (2+\sqrt{3}) \cdot a^2$.

(d) $\dfrac{A_{ABCD}}{A_{PQRS}} = \dfrac{a^2}{(2+\sqrt{3}) \cdot a^2} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} \approx 0,2679 = 26,79\%$.

59. (a) Alle verlangten Zeichnungen:



(b) Die roten Achtecke setzen sich aus je vier kongruenten Dreiecken vom Typ MAA_n

und vom Typ MA_nB zusammen. Weiter gilt: $\psi = 90° - \varphi$.

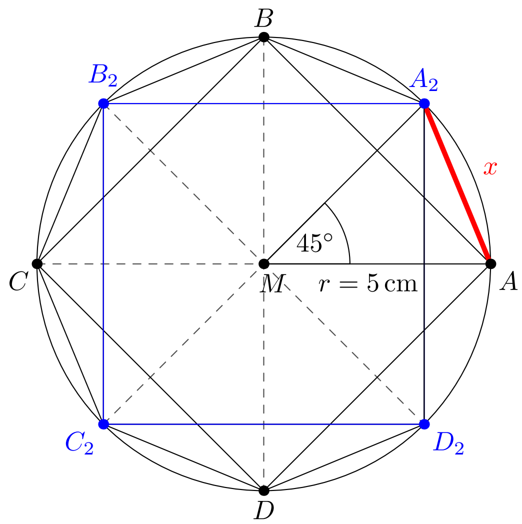
$$\begin{aligned} A(\varphi) &= 4 \cdot A_{MAA_n} + 4 \cdot A_{MA_nB} \\ &= \left(4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \sin\varphi + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \sin\psi\right)\ \mathrm{cm}^2 \\ &= [50 \cdot \sin\varphi + 50 \cdot \sin(90° - \varphi)]\ \mathrm{cm}^2 \\ A(\varphi) &= 50 \cdot (\sin\varphi + \cos\varphi)\ \mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

(c)
- $$\begin{aligned} A(\varphi) = \frac{50}{\cos 45°}(\sin\varphi \sin 45° + \sin 45° \cos\varphi)\,\mathrm{cm}^2 &= \\ 50 \cdot \left(\sin\varphi \cdot \frac{\sin 45°}{\cos 45°} + \frac{\sin 45°}{\cos 45°} \cdot \cos\varphi\right)\ \mathrm{cm}^2 &= \\ 50 \cdot (\sin\varphi \tan 45° + \cos\varphi \tan 45°)\ \mathrm{cm}^2 . \end{aligned}$$

  Wegen $\tan 45° = 1$ ergibt sich die Lösung von (b).

- $$\begin{aligned} A(\varphi) &= \frac{50}{\cos 45°} \cdot (\sin\varphi \sin 45° + \sin 45° \cos\varphi)\,\mathrm{cm}^2 \\ &= \frac{50}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \sin(45° + \varphi)\,\mathrm{cm}^2 . \\ \text{Also gilt:}\quad A(\varphi) &= 50 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(45° + \varphi)\,\mathrm{cm}^2 . \end{aligned}$$

- $A(\varphi)$ wird maximal, wenn $\sin(45° + \varphi)$ maximal wird;
  d.h. wenn $\sin(45° + \varphi)$ den Wert 1 annimmt. Das ist im Definitonsbereich der Fall, wenn $\varphi = 45°$ gilt.
  Der maximale Flächeninhalt beträgt dann $50 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2 \approx 70,71\,\mathrm{cm}^2$.

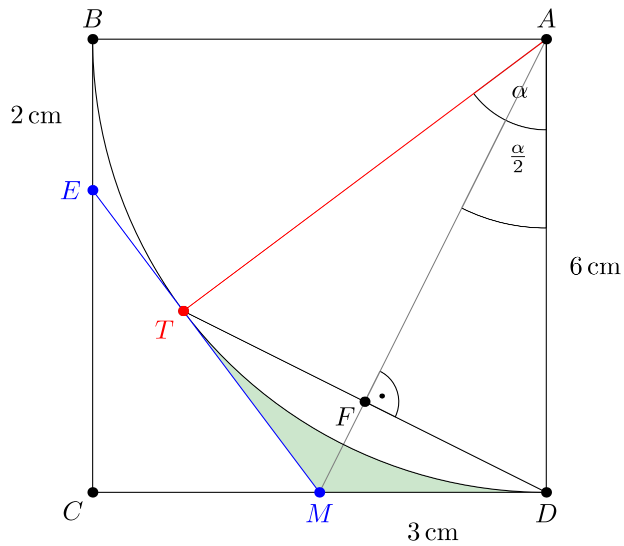
- 

Kosinussatz im Dreieck MAA_2: $x^2 = \left(5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 45°\right)\ \text{cm}^2$.

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \left[25 \cdot (2 - \sqrt{2})\right]\ \text{cm} \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}\ \text{cm}\,.$$

Aus Symmetriegründen gilt: $u = 8x = 40 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}\,\text{cm} \quad (\approx 30{,}61\ \text{cm})$.

60. (a) Die Zeichnung enthält bereits alle Elemente.



(b)
- Im rechtwinkligen Dreieck CME gilt:
  $\overline{EM}^{\,2} = [3^2 + (6-2)^2]\,\text{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{EM} = 5\,\text{cm}$.
- Wenn der Punkt T der Berührpunkt sein soll, dann müssen die beiden Vierecke $MDAT$ und $BETA$ achsensymmetrische Drachenvierecke sein.
  Dann muss aber $\overline{MD} = \overline{MT} = 3\,\text{cm}$ und $\overline{EB} = \overline{ET} = 2\,\text{cm}$ gelten.
  Dann muss also $\overline{MT} + \overline{ET} = 5\,\text{cm}$ gelten. Das hast du aber vorhin gerade mit dem Satz des PYTHAGORAS gezeigt. Also gibt es den Punkt T als Berührpunkt.
- Siehe Zeichnung.

(c) Im Dreieck MDA gilt:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{3\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} \approx 26{,}57° \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 53{,}14°\,.$$

- Siehe Zeichnung.
- Im Dreieck FDA gilt:

$$\sin 26{,}57° \approx \frac{\overline{FD}}{6\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{FD} \approx 2{,}68\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{TD} \approx 5{,}36\,\text{cm}\,.$$

$$\Delta MDA: \quad \overline{AM}^2 = (6^2 + 3^2)\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AM} \approx 6{,}71\,\text{cm}\,.$$

$$A_{\text{getönt}} = A_{MDAT} - A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{TD} - A_{\text{Sektor}} \,.$$

$$A_{\text{getönt}} \approx \frac{1}{2} \cdot 6,71 \cdot 5,36\,\text{cm}^2 - \frac{53,14^\circ}{360^\circ} \cdot 6^2\pi\,\text{cm}^2 \approx 1,29\,\text{cm}^2$$

3 Neue Aufgaben, Oktober 2012

1. Z.B. $700 : 5 = 140$ $\quad 7000 : 5 = 1400$ $\quad 70000 : 5 = 14000$ usw.

   oder

   $705 : 5 = 141$ $\quad 750 : 5 = 150$ $\quad 570 : 5 = 114$

   oder

   $7005 : 5 = 1401$ $\quad 7050 : 50 = 150$ $\quad 57500 : 500 = 15$ usw.

   oder

   $70 : 5 = 14$ $\quad 700 : 50 = 14$ $\quad 7000 : 500 = 14$ usw.

2. (a) $7 \cdot 101 = 707 = 700 + 7$; seine Regel stimmt.
   $53 \cdot 101 = 5353 = 5300 + 53$; seine Regel stimmt.
   $964 \cdot 101 = 97364 = 96400 + 964$; seine Regel stimmt.
   $1001 \cdot 101 = 101\,101 = 100\,100 + 1001$; seine Regel stimmt.

   (b) Christian sollte die Regel von Hans zunächst an einem Beispiel testen:
   $1\,234\,567 \cdot 101 = 124\,691\,267 = 123\,456\,700 + 1\,234\,567$; die Regel von Hans stimmt auch für dieses Beispiel.
   Allerdings ist dieses eine Beispiel nur ein Hinweis, aber kein Beweis dafür, dass die Regel auch für so große oder noch größere oder sogar **alle natürlichen Zahlen** gilt.
   Wir untersuchen die Regel genauer.
   „Hänge jeweils … zwei Nullen an … “ bedeutet: Multipliziere (den ersten Faktor) mit 100. „Addiere zu dieser neuen Zahl den ersten Faktor.“ bedeutet: Dieser erste Faktor kommt noch einmal hinzu. Also hast du den ersten Faktor insgesamt mit 101 multipliziert. Das bedeutet: Die Regel von Hans bei der Multiplikation mit 101 gilt für alle natürlichen Zahlen.

3. Wichtig ist, dass (wie aus dem obigen Text ersichtlich) alle drei Farben bei den wieder eingefangenen Mäusen vertreten sind.

   (a) Es saßen mindestens 3 Mäuse in der Falle: eine schwarze, eine weiße und eine graue.

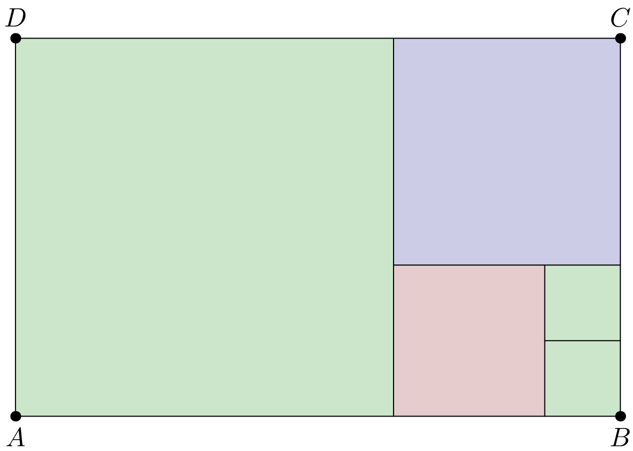
   (b) Gesamtzahl der Mäuse: $4 + 13 + 9 = 26$.
   Weil es aber einen Rest gibt, der sich noch auf der Flucht befindet, können höchstens 25 Tiere gefangen worden sein.

(c) Im ungünstigsten Fall gehen zuerst die 13 weißen Mäuse und die 9 grauen Mäuse in die Falle. Dann muss die nächste Maus, die sich fangen lässt, aber schwarz ein. Also sind noch drei schwarze Nager frei.

4. (a) Da die Rechenaufgabe den Faktor 9 enthält, muss der Produktwert wiederum durch 9 teilbar sein, aber dessen Quersumme beträgt $3+3+4+9+5+0+1=25$. Weil 9 kein Teiler von 25 ist, kann Karls Ergebnis nicht stimmen.

(b) Du musst also Neunervielfache finden, die in der Nähe von 25 liegen.
Die Quersumme 18 kann mit Hilfe einer abgeänderten Zehntausenderstelle 4 nicht erreicht werden, denn dann müsste die richtige Ziffer um 7 kleinerer als 4 sein. Eine solche Ziffer gibt es nicht.
Also muss das richtige Ergebnis die Quersumme 27 besitzen. Das ist dann der Fall, wenn die falsche Ziffer 4 durch die Ziffer 6 ersetzt wird.
In der Tat ist dann $374\,389 \cdot 9 = 3\,369\,501$.

5. (a)



(b)
- Es sind fünf Quadrate.
- Zunächst siehst du vier Rechtecke, die keine Quadrate sind.
  Weil sich jedes Quadrat aber gleichzeitig auch Rechteck nennen darf (da es in sich alle Eigenschaften eines Rechtecks vereinigt), enthält die Figur $5+4=9$ Rechtecke.

(c) Jedes der kleinsten Quadrate hat dann eine Seitenlänge von
$24\,\text{cm} : 4 = 6\,\text{cm}$.

Das nächst größere Quadrat hat dann eine Seitenlänge von
$2 \cdot 6\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$.

Das Quadrat rechts oben hat dann eine Seitenlänge von
$12\,\text{cm} + 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$.

Das Quadrat links hat dann eine Seitenlänge von
$12\,\text{cm} + 18\,\text{cm} = 30\,\text{cm}$.

Somit erhältst du als Mindestlänge für den Goldsaum:
$u = 2 \cdot [(30 + 12 + 6) + (6 + 6 + 18)]\,\text{cm} = 156\,\text{cm}$.

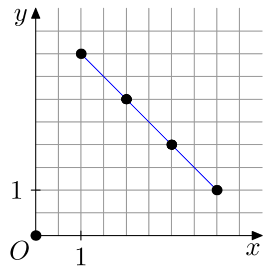
6.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl@{\qquad\qquad}rcl} 1+1+8 & = & 10 & 2+2+6 & = & 10 & 3+3+4 & = & 10 \\ 1+2+7 & = & 10 & 2+3+5 & = & 10 & & & \\ 1+3+6 & = & 10 & 2+4+4 & = & 10 & & & \\ 1+4+5 & = & 10 & & & & & & \end{array}$$

7. (a) Vervollständige die Tabelle entsprechend:

x	1	2	3	4	
y	4	3	2	1	
$(x \mid y)$	$(1 \mid 4)$	$(2 \mid 3)$	$(3 \mid 2$	$(4 \mid 1)$	

(b)



(c)
- Alle Punkte liegen auf einer Strecke (oder Halbgeraden oder Geraden).
- Siehe Zeichnung.

8. (a) „Da brauche ich doch nur von Uwes Ergebnis 1000 zu subtrahieren. Dann habe ich mein Ergebnis.“
Begründung: Bei sonst identischen Summanden steht in Uwes Aufgabe +500 und in der Aufgabe von Doris −500. Also unterscheiden sich die beiden Ergebnisse um den Wert 1000.

(b) Das Ergebnis von Doris ist dann 10 386 .

9. Es gilt: $\overline{RQ} = 8\,\text{m} - 3\,\text{m} = 5\,\text{m}$ und $\overline{RS} = 5\,\text{m} - 3\,\text{m} = 2\,\text{m}$
$A_{\text{Kartoffelfeld}} = \overline{RQ} \cdot \overline{RS} = 5\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = 10\,\text{m}^2$.

10. (a) $\{10; 12; 18; 20; 21; 24; 30; 36; 40; 42\}$.

(b) Es kommen nur Zahlen mit $QS \in \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 11; 13; 14; 16\}$ in Frage.
$QS = 1$ liefert $\{10; 100\}$: Beides sind aber ein Zehnervielfache.
$QS = 2$ liefert 11 und 20 . Beide Möglichkeiten scheiden aus.
$QS = 4$ liefert $\{13; 31; 22; 40\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 5$ liefert $\{14; 23; 41; 32; 50\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 7$ liefert $\{16; 25; 34; 61; 52; 43; 70\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 8$ liefert $\{17, 26; 35; 44; 71; 62; 43; 80\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 11$: Die zugehörigen natürlichen Zahlen müssen zwei gleiche Ziffern besitzen. Damit kommt aber keine $QS = 11$ zustande.
$QS = 13$ liefert $\{49; 58; 67; 94; 85; 76\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 14$ liefert $\{59; 68; 77; 86; 95\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 16$ liefert $\{79; 88; 97\}$. Keine Möglichkeit.

(c)
- Auf jeden Fall gehört 400 mit der $QS = 4 + 0 + 0 = 4$ dazu.
  Nun ist $4 = 1+1+2$. Also: $112 : 4 = 28$: Daher ist 112 eine der gesuchten Zahlen. Alle anderen dreistelligen Zahlen, die sich aus den Ziffern 1 und 2 zusammensetzen, sind ungerade und damit nicht durch 4 teilbar.
  Weiter ist $4 = 2 + 2$. Das ergibt 202 (nicht durch 4 teilbar) und
  $220 : 4 = 55$. Daher ist 220 eine weitere der gesuchten Zahlen, andere gibt es nicht.
- Wieder ist 700 mit der $QS = 7 + 0 + 0 = 7$ eine der gesuchten Zahlen.

  1. Fall:
  $7 = 1 + 0 + 6$ ergibt $\{106; 160; 610; 601\}$.
  $106 : 7 = 15$ Rest 2.
  $160 : 7 = 22$ Rest 6.
  $610 : 7 = 87$ Rest 1.
  $601 : 7 = 85$ Rest 6.

  2. Fall:
  $7 = 2 + 0 + 5$ ergibt $\{205; 250; 502; 520\}$.
  $205 : 7 = 29$ Rest 2.
  $250 : 7 = 35$ Rest 5.
  $502 : 7 = 71$ Rest 5.
  $520 : 7 = 74$ Rest 2.

  3. Fall:
  $7 = 3 + 0 + 4$ ergibt $\{304; 340; 403; 430\}$.
  $304 : 7 = 43$ Rest 3.
  $340 : 7 = 48$ Rest 4.
  $403 : 7 = 57$ Rest 4.
  $430 : 7 = 61$ Rest 3.

  4. Fall:
  $7 = 1 + 1 + 5$ ergibt $\{115; 151; 511\}$.

$115 : 7 = 16$ Rest 4.
$151 : 7 = 21$ Rest 4.
$511 : 7 = 73$ Rest 0. Also ist 511 eine der gesuchten Zahlen.

5. Fall:
$7 = 1 + 2 + 4$ ergibt $\{124; 142; 214; 241; 412; 421\}$.
$124 : 7 = 17$ Rest 5.
$142 : 7 = 20$ Rest 2.
$214 : 7 = 30$ Rest 4.
$241 : 7 = 34$ Rest 3.
$412 : 7 = 58$ Rest 6.
$421 : 7 = 60$ Rest 1.

6. Fall:
$7 = 1 + 3 + 3$ ergibt $\{133; 313; 331\}$.
$133 : 7 = 19$ Rest 0. Also ist 133 eine der gesuchten Zahlen.
$313 : 7 = 44$ Rest 5.
$331 : 7 = 47$ Rest 2.

7. Fall:
$7 = 2 + 2 + 3$ ergibt $\{223; 232; 322\}$.
$223 : 7 = 31$ Rest 6.
$232 : 7 = 33$ Rest 1.
$322 : 7 = 46$ Rest 0. Also ist 322 eine der gesuchten Zahlen.

Also kommen nur die Zahlen 133, 322, 511 und 700 in Frage.

- Eine natürliche Zahl ist durch 25 teilbar, wenn sie auf das Ziffernpaar $\ldots 00$ oder $\ldots 25$ oder $\ldots 50$ oder $\ldots 75$ endet.

1. Fall: Die Zahl endet auf $\ldots 00$.
Dann müssten die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 25 ergeben. Das ist nicht möglich.

2. Fall: Die Zahl endet auf $\ldots 25$.
Dann muss die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 18 ergeben. Das ergibt 9925 als einzige Zahl: $9 + 9 + 2 + 5 = 25$.

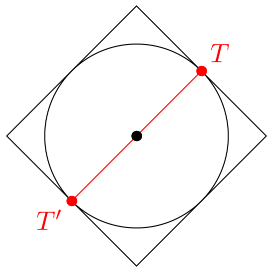
3. Fall: Die Zahl endet auf $\ldots 50$.
Dann müssten die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 20 ergeben. Das ist nicht möglich.

4. Fall: Die Zahl endet auf $\ldots 75$.
Dann muss die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 13 ergeben. Das ergibt

die folgenden Möglichkeiten: 9475 , 4975, 8575, 5875, 6775 und 7675 .

11. $6 \cdot 7 \cdot 15 = 10 \cdot 3 \cdot 21$.

12.



Das Quadrat hat eine Seitenlänge von $5\,\text{m} : 4 = 500\,\text{cm} : 4 = 125\,\text{cm}$.
Dann hat die Fensterscheibe ebenfalls einen Durchmesser von $125\,\text{cm}$ (siehe Strecke $[TT']$) .

13. Das weiße Brettchen muss in jedem Fall unter dem roten liegen. Dann gibt es drei Möglichkeiten:

b	r	r
r	b	w
w	w	b

14. (a) Wenn in jeder Kante fünf kleine Würfel lägen, dann bräuchte Alfred $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ Würfel.
Also dürfen in jeder Kante nur 4 kleine Würfel liegen: $4^3 = 64$. Dann hat Alfred noch $100 - 64 = 36$ kleine Würfel übrig.
(b) Wenn Alfred die 64 kleinen Würfel zu einem Turm aufschichten könnte, dann wäre der Turm $64 \cdot 2\,\text{cm} = 128\,\text{cm}$ hoch.

15. (a) Damit der Differenzwert minimal wird, muss der Minuend möglichst klein und der Subtrahend möglichst groß werden:
$\square = 0$, $\heartsuit = 1$ und $\bigcirc = 9$.
(b) $8015 - 794 = 7221$.

16. Grundfläche des Stalles mit Hof: $9\,\text{m} \cdot 7\,\text{m} = 63\,\text{m}^2$.
Grundfläche des Stalles: $50\,\text{m}^2$.
Grundfläche des Hofes: $63\,\text{m}^2 - 50\,\text{m}^2 = 13\,\text{m}^2$.
Grundfläche des Wohnhauses mit Hof: $12\,\text{m} \cdot 8\,\text{m} = 96\,\text{m}^2$.
Grundfläche des Wohnhauses: $96\,\text{m}^2 - 13\,\text{m}^2 = 83\,\text{m}^2$.

17. $7\text{m}\,2\,\text{dm} = 72\,\text{dm}$.
Die Seitenlänge des quadratischen Treppenabsatzes beträgt dann
$72\,\text{dm} : 4 = 18\,\text{dm}$.
Dann beträgt die Seitenlänge eines der drei kleineren unteren Quadrate
$18\,\text{dm} : 3 = 6\,\text{dm}$.
Die Seite $[AD]$ des Rechtecks $ABCD$ ist dann $18\,\text{dm} + 6\,\text{dm} = 24\,\text{dm}$ lang.
Dann beträgt die Seitenlänge eines der drei größeren seitlichen Quadrate
$24\,\text{dm} : 3 = 8\,\text{dm}$.
Die Seite $[AB]$ des Rechtecks $ABCD$ ist dann $18\,\text{dm} + 8\,\text{dm} = 26\,\text{dm}$ lang.
Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ ergibt sich dann aus
$24\,\text{dm} \cdot 26\,\text{dm} = 624\,\text{dm}^2$.

18. Bei **jeder** Produktberechnung aus beliebig vielen Faktoren gilt:
Der Produktwert der **Endziffern** aus allen Faktoren hat selbst eine Endziffer. Diese stimmt mit der Endziffer des Produktwertes aus allen Faktoren überein.
Das bedeutet hier: $3 \cdot \bigcirc = \ldots 1$.
Der Produktwert aus 3 und der Ziffer $\bigcirc$ endet also auf 1 . Dann muss $\bigcirc = 7$ gelten, denn im Dreiereinmaleins gibt es nur einen Produktwert, der auf 1 endet, nämlich $3 \cdot 7 = 21$.
Somit ergibt sich: $\square 3 \cdot 197 = 4\,531$ Umkehraufgabe: $4\,531 : 197 = 23$.
Also ist $\bigcirc = 2$, und $23 \cdot 197 = 4\,531$.

19. (a) Ist der Wert der Quersumme einer Zahl durch 9 teilbar, dann ist die Zahl selbst durch 9 teilbar.
Der Wert der Quersumme der Zahl 1 213 145 beträgt 17. Also ist diese nicht durch 9 teilbar.
(b) Nach dem Streichen bestimmter Ziffern kann aus dem Wert 17 keine größere, sondern nur eine kleinere Quersumme werden. Der nächst kleinere Quersummenwert, der dann durch 9 teilbar ist, ist die 9.
Durch Streichen von bestimmten Ziffern muss also der Wert der Quersumme von 17 auf 9 abgeändert werden; d.h. die Summe der zu streichenden Ziffern muss den Wert $17 - 9 = 8$ annehmen. Dann gibt es die folgenden Möglichkeiten:

Ursprüngliche Zahl	Zu streichende Ziffern	Neue Zahl
1 213 145	5; 3	12 114
1 213 145	5; 2; 1	1 314
1 213 145	5; 2; 1	1 134
1 213 145	5; 1; 1; 1	234
1 213 145	4; 3; 1;	z.B. 1 215
1 213 145	4; 2; 1; 1;	z.B. 135
1 213 145	3; 2; 1; 1; 1;	45

20. Abelstadt: Es steigen $306 : 2 = 153$ Fahrgäste aus und 79 Fahrgäste steigen ein. Dann sind $153 + 79 = 232$ Fahrgäste im Zug.
    Besselheim: Es steigen $232 : 2 = 116$ Fahrgäste ein und 120 Personen aus. Dann sind 4 Fahrgäste weniger im Zug als vor der Ankunft in Besselheim.
    Nach der Abfahrt in Besselheim sind dann also noch $232 - 4 = 228$ Fahrgäste im Zug.

21. Aus $a \cdot b + 3 = 42$ folgt $a \cdot b = 39$. Es gilt $\mathbb{T}_{39} = \{1; ; 3; 13; 39\}$. Damit sind folgende Fälle möglich:

$$\begin{array}{rcccl} 1 \cdot 39 & = & 39 & \Rightarrow & a = 1 \text{ und } b = 39 \quad \text{oder } a = 39 \text{ und } b = 1 \\ 3 \cdot 13 & = & 39 & \Rightarrow & a = 3 \text{ und } b = 13 \quad \text{oder } a = 13 \text{ und } b = 3 \end{array}$$

22. Die Faktoren sollen a, b und c heißen. Es gilt: $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$.
    Weil du Faktoren vertauschen kannst, ohne dass sich der betreffende Produktwert ändert, ergeben sich dann die folgenden Möglichkeiten:

a	b	c
2	5	7
2	7	5
5	2	7
5	7	2
7	2	5
7	5	2

Insgesamt gibt es also sechs Möglichkeiten.

23. Zur Lösung sind die jeweiligen Umkehraufgaben hilfreich:
    (a)

$$\begin{aligned} \underbrace{11 \cdot 5}_{=55} \cdot \Box \cdot \underbrace{3 \cdot 7}_{=21} &= 15\,015 \\ 55 \cdot \Box \cdot 21 &= 15\,015 \\ 55 \cdot \Box &= 15\,015 : 21 = 715 \\ \Box &= 715 : 55 = 13 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 3\,000 : \bigcirc &= 1 \cdot 10 \cdot 25 = 250 \\ 3\,000 &= 250 \cdot \bigcirc \\ 3\,000 : 250 &= \bigcirc \\ 12 &= \bigcirc \end{aligned}$$

24. Länge des Rechtecks: $2 \cdot 10\,\text{cm} = 20\,\text{cm}$. Breite des Rechtecks: $10\,\text{cm}$.
Flächeninhalt des Rechtecks: $20\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} = 200\,\text{cm}^2$.

25. In der Umkehraufgabe muss $13 \cdot ?$ eine dreiziffrige Zahl ergeben, die einerseits aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und andererseits auf die Ziffer 5 endet. Notwendig dazu ist, dass anstelle des Fragezeichens eine natürliche Zahl steht, die auf die Ziffer 5 endet.
Das ergibt folgende Möglichkeiten:

Wert des Quotienten	Δ	$\bigcirc$	$\square$	
$13 \cdot 5 = 65$		6	5	keine dreiziffrige Zahl
$13 \cdot 15 = 195$	1	9	5	
$13 \cdot 25 = 325$	3	2	5	
$13 \cdot 35 = 455$	4	5	5	geht nicht: gleiche Ziffern
$13 \cdot 45 = 455$	5	8	5	geht nicht: gleiche Ziffern
$13 \cdot 55 = 715$	7	1	5	
$13 \cdot 65 = 845$	8	4	5	
$13 \cdot 75 = 975$	9	7	5	

Es sind also nur die Quotientenwerte $\{195; 325; 715; 845; 975\}$ möglich.

26. Wenn Egon ohne weitere Vorbedingungen 6 Jahre jünger wäre als Emil, dann wäre Emil 19 Jahre alt.
Egon ist aber nur unter der Bedingung 6 Jahre jünger, dass Emil ein Jahr älter ist. Mit 19 Jahren ist er ein Jahr zu alt. Also muss Emil jetzt 18 Jahre alt sein.

27. $32 \cdot 10\,034\,300 \cdot 25 = 32 \cdot 25 \cdot 10\,034\,300 = 800 \cdot 1\,034\,300$.
Am Ende des Produktwertes stehen somit 4 Nullen.

28. (a)

$1 \cdot 13 = 13$	$13 + 12 = 25$	gesuchte Zahl: **25**
$2 \cdot 13 = 26$	$26 + 12 = 38$	gesuchte Zahl: **38**
$3 \cdot 13 = 39$	$39 + 12 = 51$	gesuchte Zahl: **51**
$4 \cdot 13 = 52$	$52 + 12 = 64$	gesuchte Zahl: **64**
$5 \cdot 13 = 65$	$65 + 12 = 77$	gesuchte Zahl: **77**
$6 \cdot 13 = 78$	$78 + 12 = 90$	gesuchte Zahl: **90**
$7 \cdot 13 = 91$	$91 + 12 = 103$	Die Zahl 103 ist aber schon dreistellig.

(b) Die kleinste dreistellige Zahl ist 100. Aber hier gilt: $100 : 13 = 7\,R\,9$.
Die letze Zeile der Tabelle in der Lösung der Aufgabe (a) liefert damit die gesuchte kleinste Zahl **103** .

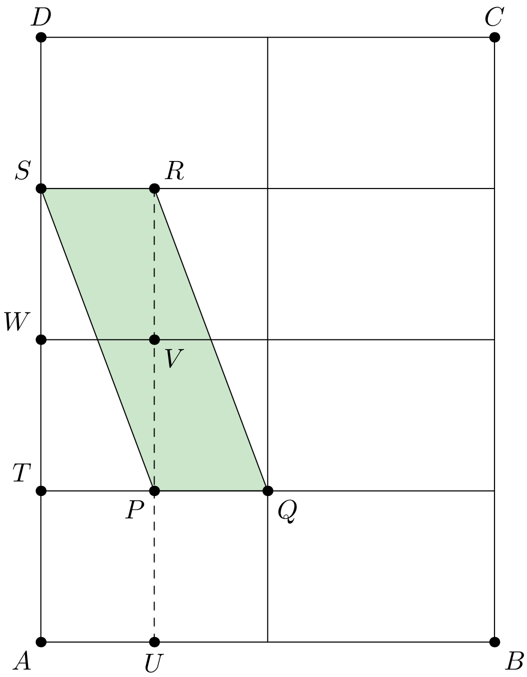
(c) 999 ist die größte dreistellige Zahl, aber es gilt: $999 : 13 = 76\,R\,11$.
Dann ist $998 : 13 = 76\,R\,10$. Du musst in deiner Suche also so weit zurück, bis der Rest auf 12 zugenommen hat.
$998 - 10 = 988$ .Dann gilt $988 : 13 = 76$. Also ist $987 : 13 = 75\,R\,12$.
Damit heißt die gesuchte Zahl **987**.

29. (a) Eine 11-stellige natürliche Zahl kann höchstens die Quersumme $11 \cdot 9 = 99$ erreichen. Für die Quersumme 100 muss also mindestens eine Stelle dazukommen.

(b)
- Die gesuchte Zahl muss mit einer „1“ beginnen. Dann muus die Quersumme 100 mit möglichst wenig weiteren Stellen erreicht werden. Also dürfen nur Neuner folgen, denn jede folgende Ziffer, die kleiner als 9 ist, hat eine Erhöhung der Stellenzahl und damit eine Vergrößerung des Zahlenwertes zur Folge.
  Mit der Lösung von (a) erhältst du die gesuchte Zahl 199 999 999 999 .
- „Einhundertneunundneunzig Milliarden neunhundertneunundneunzig Millionen neunhundertneunundneunzig Tausend neunhundertneunundneunzig“.

(c) Du kannst eine natürliche Zahl zwischen der ersten und der letzten Ziffer mit beliebig vielen Nullen ausstatten, ohne dass sich der Wert der Quersumme 100 ändert. Mit immer mehr Stellen, die aussschließlich aus Nullen bestehen, kannst du den Zahlenwert immer weiter steigern, ohne dass du an eine Grenze stößt. Also gibt es keine größte natürliche Zahl mit der Quersumme 100.

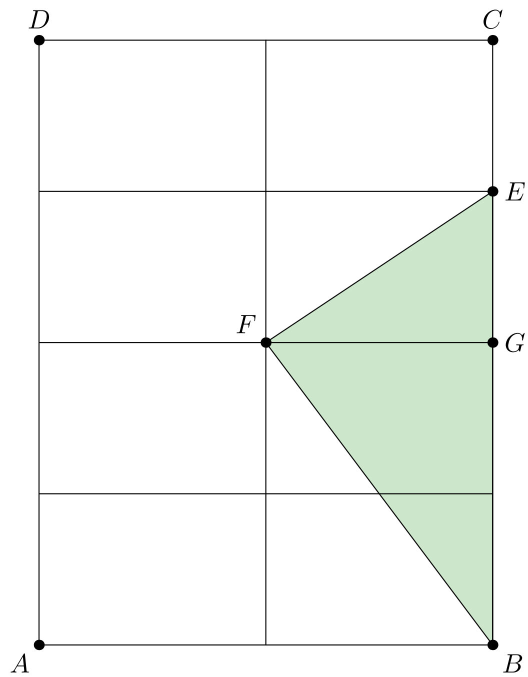
30. (a)



(b) Das Rechteck $TPRS$ hat den gleichen Flächeninhalt wie das Viereck $PQRS$ (Übrigens: Das Viereck $PQRS$ heißt „Parallelogramm“.)
Das Viereck $PQRS$ wiederum hat den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck $AUVW$.
In das Rechteck $ABCD$ passt das Viereck $AUVW$ 8-mal hinein. Also gilt:

$$\frac{A_{AUVW}}{A_{ABCD}} = \frac{1}{8} = \frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}}.$$

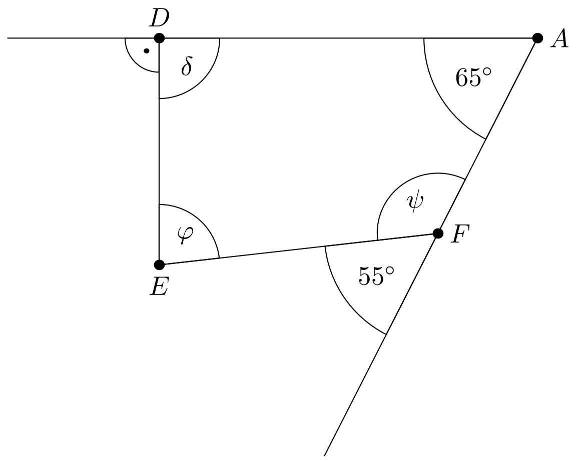
31. (a)



(b) Das Rechteck $ABCD$ setzt sich aus acht kleinen kongruenten Rechtecken zusammen. Das Dreieck FGE ist halb so groß wie eines dieser kleinen Rechtecke. Also nimmt das Dreieck FGE $\frac{1}{16}$ der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ein.
Das Dreieck BGF wiederum nimmt die Hälfte von zwei dieser kleinen Rechtecke ein.Also nimmt das Dreieck BGF $\frac{1}{8}$ der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ein.
Daraus folgt::

$$\frac{A_{BEF}}{A_{ABCD}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16} = 0,1875 = 18,75\% \,.$$

32.



Nach der Beziehung zwischen Nebenwinkeln gilt: $\delta = 180° - 90° = 90°$ und $\psi = 180° - 55° = 125°$.
Die Innenwinkelsumme betr“agt in jedem Viereck 360° .
Also gilt im Viereck $ADEF$: $65° + 90° + \varphi + 125° = 360° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 80°$.

33. (a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{4 \cdot 3} = \frac{7}{12}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5+4}{5 \cdot 4} = \frac{9}{20}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6+5}{6 \cdot 5} = \frac{11}{30}$

(b)
- Der Nenner des Ergebnisses ist das Produkt aus den Nennern der beiden Stammbrüche.
- Der Zähler des Ergebnisses ist die Summe aus den Nennern der beiden Stammbrüche.

(c) Es gilt $31 = 15 + 16$ und $16 \cdot 15 = 240$. Also folgt $\dfrac{31}{240} = \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{16}$.

(d) Der Zähler 293 lässt sich nur auf eine Weise als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender natürlicher Zahlen darstellen: $293 = 146 + 147$. 146 und 147 müssen gleichzeitig die beiden gesuchten Nenner der Stammbrüche sein, deren Produkt 21467 ergeben müsste.
Es gilt jedoch $146 \cdot 147 = 21462 \neq 21467$. Die Darstellung als Summe zweier solcher Stammbrüche ist also nicht möglich.

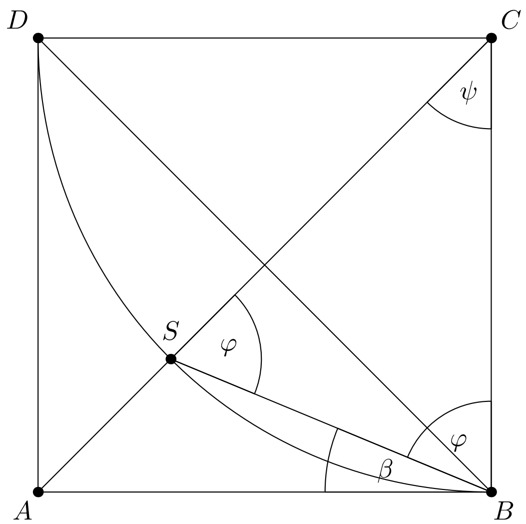
(e) Der Zähler 123008 müsste sich als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender natürlicher Zahlen darstellen lassen. Von zwei unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen muss eine ungerade und die andere gerade sein. Die Summe aus einer geraden und ungeraden natürlichen Zahl ist aber stets ungerade. Der Zähler 123008 ist jedoch eine gerade Zahl. Die Darstellung als Summe zweier solcher Stammbrüche ist also nicht möglich.

34. Es gilt z.B. $\dfrac{7}{4} = 1,75 < 2$.

Dann ist aber auch $\dfrac{6}{4} = 1,5 < 2$, $\quad \dfrac{5}{4} = 1,25 < 2$, $\quad \ldots \quad$, $\quad \dfrac{1}{4} < 2$.

Wenn dann $x < 1$ ist, stimmt die Ungleichung immer.
Also gilt insgesamt z.B. $x \in \{6;\ 5;\ 4;\ 3;\ 2;\ 1;\ 0,98;\ 0,97;\ 0,96;\ 0,95\}$
oder $x \in \{0,25;\ 0,15;\ 0,05;\ 0,03;\ 0,02;\ 0,01;\ 0,098;\ 0,097;\ 0,096;\ 0,095\}$
oder $x \in \{-17;\ -20;\ -30;\ -300;\ -5678;\ -10^6;\ -10^8;\ -10^7;\ -3,146;\ 0\}$.

35. (a)

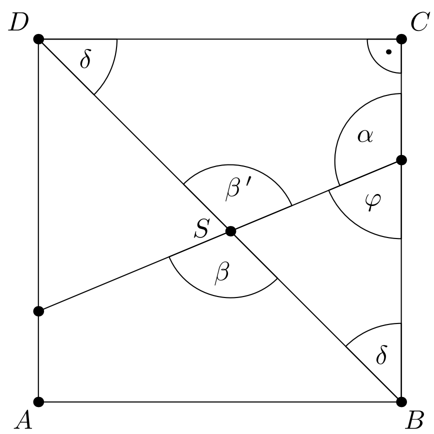


(b) Im Quadrat $ABCD$ halbiert die Diagonale $[AC]$ den rechten Winkel DCB. Also gilt: $\psi = 45°$.

Das Dreieck SBC ist gleichschenklig. $\Rightarrow \quad \varphi = (180° - 45°) : 2 = 67,5°$.
$\Rightarrow \quad \beta = 90° - \varphi = 22,5°$.

36. $x \cdot y \cdot x = x^2 \cdot y = 284$.
Die Zahl 284 muss also einen quadratischen Teiler besitzen. Nun ist $284 = 1 \cdot 4 \cdot 71$.
1. Fall:
$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \vee x = -1$ zusammen mit $b = 284$.
2. Fall:
$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \vee x = -2$ zusammen mit $b = 71$.
Weil $71 \in \mathbb{P}$ gilt, gibt es nur die Lösungen
$\{(-1 \mid 284); (1 \mid 284); (-2 \mid 71); (2 \mid 71)\}$.

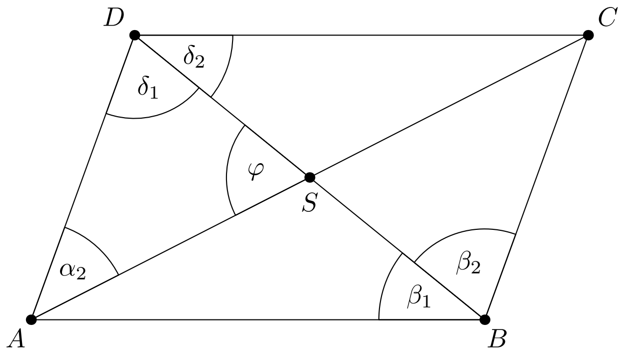
37.



1. Möglichkeit: Über die Innenwinkelsumme im Viereck $SQCD$
Weil jede Quadratdiagonale Winkelhalbierende von zwei rechten Winkeln ist, folgt $\delta = 45°$.
Dann gilt im Viereck $SQCD$: $45° + \beta' + 123,4° + 90° = 360°$
$\Rightarrow \quad \beta' = 101,6°$.
Weil β' und β Scheitelwinkel sind, folgt $\beta' = \beta = 101,6°$.

2. Möglichkeit: Über den Satz vom Außenwinkel
φ ist der Nebenwinkel von α. Also gilt: $\varphi = 180° - 123,4° = 56,6°$.
β ist ein Außenwinkel am Dreieck BQS: $\beta = \delta + \varphi = 45° + 56,6° = 101,6°$.

38. (a)



(b) Es gibt mehrere Möglichkeiten, z.B.:
$\Delta\, ASD$: $\delta_1 = 180° - 42{,}1° - 65{,}3° = 72{,}6° = \beta_2$ (Z-Winkel) .
$\beta_1 = \delta_2 = 38{,}7°$ (Z-Winkel) $\quad\Rightarrow\quad \beta = \delta_1 + \delta_2 = 111{,}3°$.

39. Es müsste gelten: $\beta = \sphericalangle CBA = 180° - \beta^* = 180° - 77{,}6° = 102{,}4°$.
Weil aber α^* und β zwei zugehörige F-Winkel sind, müssten beide Winkel gleiches Maß besitzen.
Aber in der Angabe steht: „$\alpha^* = 109{,}2° \neq 102{,}4°$.“ Das geht nicht.

40. Angenommen, der Käse wird in 100 g-Stücken angeboten.
Dann sind davon 40 g Wasser.
Die Trockenmasse beträgt 60 g . 40% davon sind Fett, das sind 24 g .
Also sind 24 g Fett in 100 g Käse enthalten. Der Fettgehalt dieser Käsesorte beträgt somit 24%.
Dieser Prozentsatz ist für jede Käsemenge dieser Sorte die gleiche.

41.

$$\begin{aligned}
21\,000 &= 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \\
21\,000 &= (21 \cdot 8) \cdot 125 &&= 168 \cdot 125 \\
&= (21 \cdot 125) \cdot 8 &&= 2625 \cdot 8 \\
&= (3 \cdot 8) \cdot (7 \cdot 125) &&= 24 \cdot 875 \\
&= (7 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 125) &&= 56 \cdot 375
\end{aligned}$$

42. **1. Möglichkeit:**
Um von der ersten zur zweiten Zeile zu kommen, hat Carsten offenbar auf beiden Seiten der Gleichung im Buch die Zahl 16 addiert. Dadurch fällt das Kästchen in der zweiten Zeile weg. Also stand die unleserliche Zahl 16 anstelle des Kästchens da.
2. Möglichkeit:
Der Lehrer hat $x = 7$ als richtige Lösung bestätigt. Setze diese Lösung in die erste Zeile ein:
$2 \cdot 7 - \square = -2 \quad\Leftrightarrow\quad 14 - \square = -2 \mid -14 \quad\Leftrightarrow\quad -\square = -16 \mid \cdot(-1)$
$\Leftrightarrow\quad \square = 16$.

43. (a) Es gilt: $\overline{RQ} = (8 - x)\,\mathrm{m}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.
Dann folgt: $x \cdot (8 - x)\,\mathrm{m}^2 = 5 \cdot x\,\mathrm{m}^2 \;\; | : \; (x\,\mathrm{m}^2)$ mit $x > 0$
$\Leftrightarrow \quad 8 - x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$.

(b) $A_{\text{Kartoffelfeld}} = \overline{RQ} \cdot \overline{RS} = 5\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{m}^2$.

$$\frac{A_{\text{Kartoffelfeld}}}{A_{ABCD}} = \frac{10\,\mathrm{m}^2}{40\,\mathrm{m}^2} = 0,25 = 25\% \,.$$

44. In jedem all gilt: $n = 9 \cdot x$ und $QS = 9 \cdot y$.

Zu Frage (1):
$n + QS = 9x + 9y = 9 \cdot (x + y)$. Die Antwort heißt „Ja“.

Zu Frage (2):
$n \cdot QS = 9x \cdot 9y = 81 \cdot (xy) = 27 \cdot 3 \cdot (x \cdot y)$. Die Antwort heißt wieder „Ja“.

Zu Frage (3):

$\dfrac{n}{QS} = \dfrac{9x}{9y} = \dfrac{x}{y}$. Nun müsste y ein Teiler von x sein. Aber ist das immer so?

1. Beispiel:
$n = 648 \quad \Rightarrow \quad QS = 18 \quad 648 : 18 = 36$. Dieses Beispiel liefert eine Bestätigung.

2. Beispiel:
$n = 927 \quad \Rightarrow \quad QS = 18 \quad 917 : 18 = 50$ Rest 17 . Dieses Beispiel verneint die Frage (3).

Also ist der Wert des Quotienten aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme nicht immer ganz.

45. (a) Klar.

(b)

$$\begin{aligned} A(x) &= [6^2 - 4 \cdot x^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (6 - 2x) \cdot (3 - x)]\,\mathrm{cm}^2 \\ &= [36 - 4x^2 - 2 \cdot (18 - 6x - 6x + 2x^2)]\,\mathrm{cm}^2 \\ &= [36 - 4x^2 - 36 + 12x + 12x - 4x^2]\,\mathrm{cm}^2 \\ A(x) &= (-8x^2 + 24x)\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

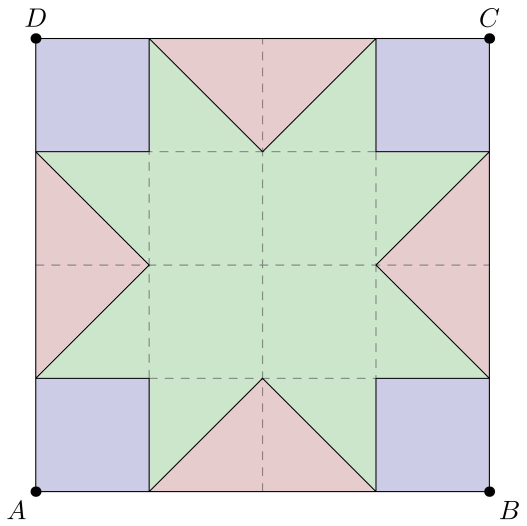
(c) $A(0) = 0\,\mathrm{cm}^2$. Das zugehörige Kreuz entartet zu den beiden Diagonalen des Quadrates $ABCD$.
$A(3) = 0\,\mathrm{cm}^2$. Es entsteht ein Kreuz das aus den Seitenmittelpunkten des Quadrates $ABCD$ erzeugt worden ist.

(d) •

$$\begin{aligned} A(x) &= (-8x^2 + 24x)\,\mathrm{cm}^2 \\ &= -8 \cdot (x^2 - 3x + 1,5^2 - 2,25)\,\mathrm{cm}^2 \\ &= -8 \cdot [(x - 1,5)^2 - 2,25)\,\mathrm{cm}^2 \\ A(x) &= [(-8(x - 1,5)^2 + 18]\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

$x = 1,5$ liefert $A_{\max} = 18\,\mathrm{cm}^2$.

•



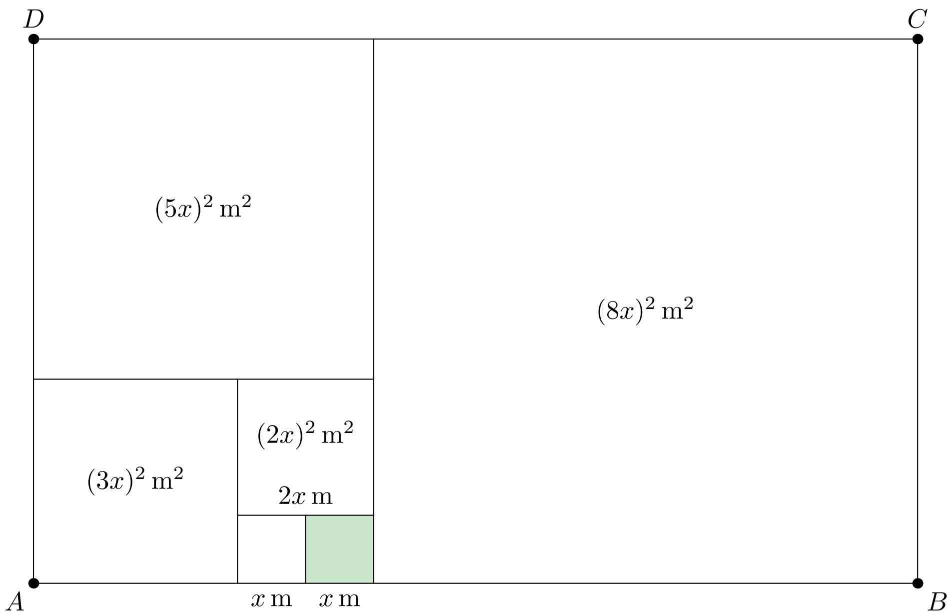
Zeichne das Quadrat $ABCD$ erneut mit dem größten Kreuz.

• 1. Möglichkeit: mit Hilfe der Lösung oben

$$\frac{A_{\text{Kreuz}}}{A_{\text{ABCD}}} = \frac{18\,\mathrm{cm}^2}{36\,\mathrm{cm}^2} = 0,5 = 50\%\,.$$

2. Möglichkeit: Die gestrichelten Hilfslinien zerlegen das Quadrat $ABCD$ in 16 kongruente kleine Quadrate.
Im Zentrum des Kreuzes befinden sich 4 gleich große Quadrate. Der Rest des Kreuzes setzt sich aus 8 kongruenten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken zusammen, wobei jedes halb so groß wie ein Quadrat im Zenrtrum ist. Diese 8 Dreiecke ergeben wiederum 4 Quadrate. Also nimmt das Kreuz insgesamt den gleichen Flächeninhalt ein, wie die 8 Quadrate.
Das sind aber zusammen 50% der Fläche des Quadrates $ABCD$.

46.

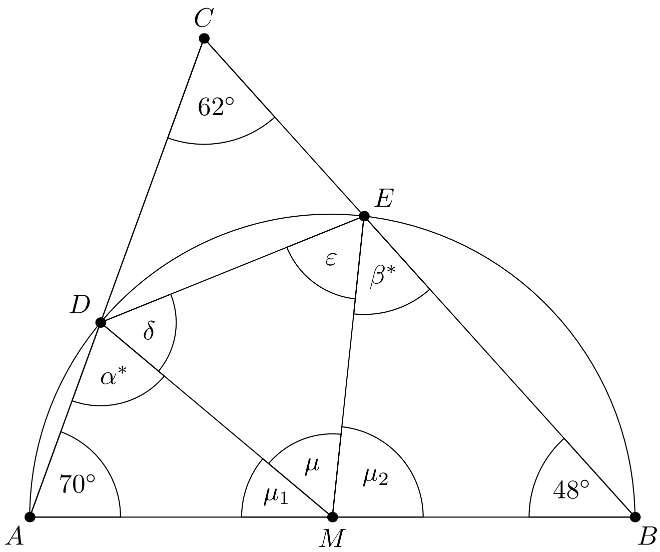


$2,34\,\mathrm{ha} = 23\,400\,\mathrm{m}^2$.
Die beiden kleinsten Parzellen haben eine Breite von $(x + x)\,\mathrm{m} = 2x\,\mathrm{m}$.
Diese Seitenlänge geht dann auf das nächst größere Quadrat über.
Dessen Flächeninhalt beträgt dann $(2x)^2\,\mathrm{m}^2$.
Auf diese Weise ermittelst du die Flächeninhalte der nächsten Quadrate (siehe Lösungsskizze).
Am Ende ergibt sich für die Maßzahlen:

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + (2x)^2 + (3x)^2 + (5x)^2 + (8x)^2 &= 23\,400 \\ 2x^2 + 4x^2 + 9x^2 + 25x^2 + 64x^2 &= 23\,400 \\ 104x^2 &= 23\,400 \qquad |:104 \\ x^2 &= 225 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Der Umfang eines dieser kleinsten Quadrate beträgt $4 \cdot 15\,\mathrm{m} = 60\,\mathrm{m}$. Das ist dann die gesuchte Zaunlänge.

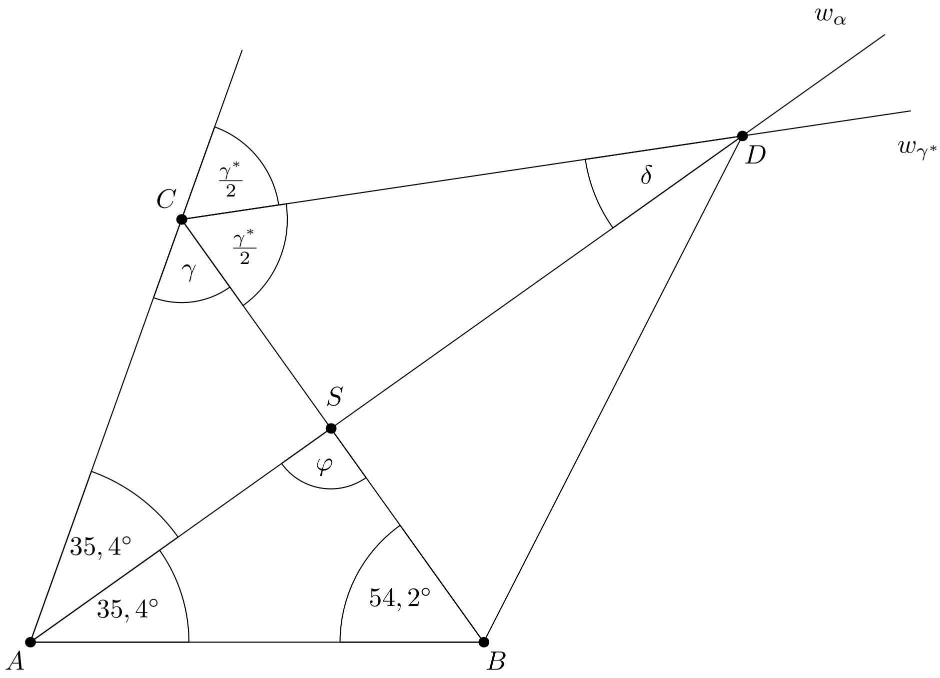
47. (a)



Berechne zunächst das Winkelmaß $\beta = 180° - 70° - 62° = 48°$ und zeichne dann das Dreieck ABC (w,s,w), dann den Halbkreis . . . .

(b) Für den Kreiradius r gilt: $r = \overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MD} = \overline{ME}$.
Das Dreieck AMD ist daher gleichschenklig.
Also gilt: $\alpha^* = \alpha$ und damit $\mu_1 = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$.
Das Dreieck MBE ist ebenfalls gleichschenklig.
Also gilt: $\beta^* = \beta$ und damit $\mu_2 = 180° - 2 \cdot 48° = 84°$.
$\Rightarrow \quad \mu = 180° - 40° - 84° = 56°$.
Auch das Dreieck MED ist gleichschenklig.
Also gilt: $\delta = \varepsilon = (180° - 56°) : 2 = 62°$.

48. (a)



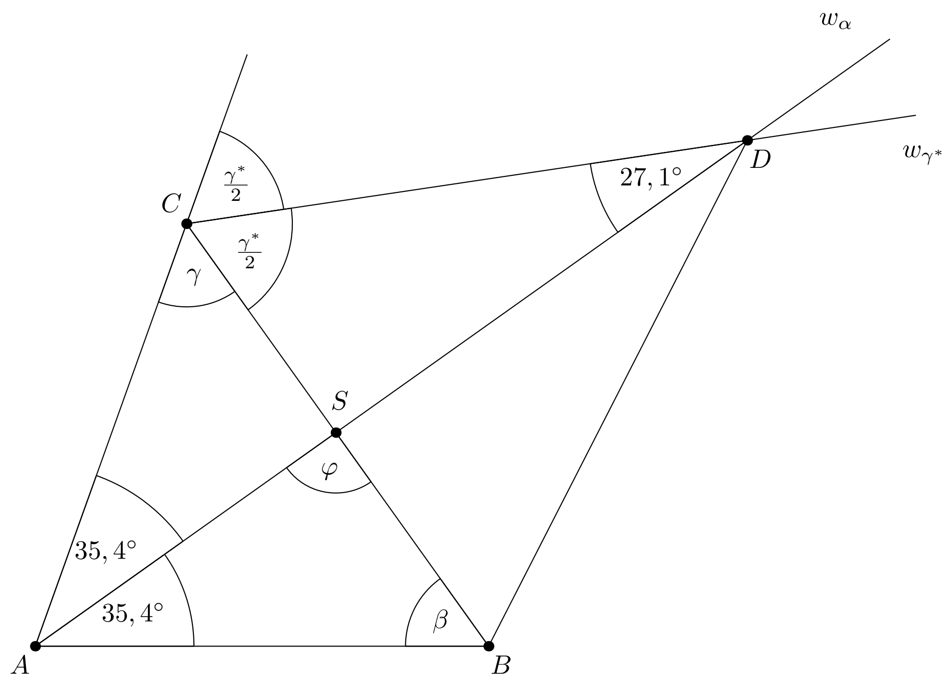
(b) Es gilt: $\gamma = 180° - 70,8° - 54,2° = 55°$.

$$\Rightarrow \quad \gamma^* = 180° - 55° = 125° \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma^*}{2} = 62,5° .$$

Im Dreieck ADC gilt dann $\delta = 180° - 35,4° - 55° - 62,5° = 27,2°$.

(c) In jedem (achsensymmetrischen) Drachenviereck müssen die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck ABS gilt: $\varphi = 180° - 35,4° - 54,2° = 90,4° \neq 90°$.
Das Viereck $ABDC$ ist also kein (achsensymmetrisches) Drachenviereck.

49. (a)



Im Dreieck ADC gilt: $35,4° + 27,1° + \dfrac{\gamma^*}{2} + \gamma = 180° \quad (1)\,.$
Weiter gilt: $\gamma^* = 180° - \gamma\,.$
In (1): $35,4° + 27,1° + (180° - \gamma) : 2 + \gamma = 180°\,.$
$\Leftrightarrow \quad 62,5° + 90° - 0,5\gamma + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 62,5° + 0,5\gamma = 90°$
$\Leftrightarrow \quad \gamma = 55°\,.$
Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck ABC ergibt sich:
$70,8° + 55° + \beta = 180° \Rightarrow \quad \beta = 54,2°\,.$

Eine andere Möglichkeit:

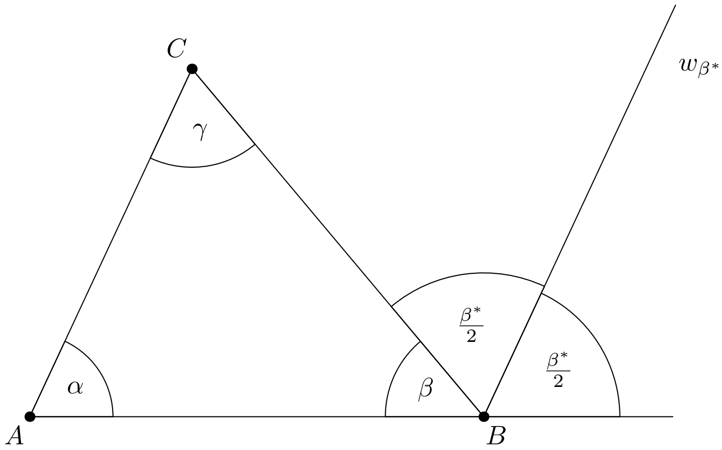
$\frac{\gamma^*}{2}$ ist ein Außenwinkel am Dreieck ADC. Jeder Außenwinkel an einem Dreieck ist genau so groß wie die Summe der Maße der beiden nicht anliegenden Innenwinkel. Das bedeutet hier:

$$\frac{\gamma^*}{2} = 35,4° + 27,1° = 62,5° \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^* = 125°\,.$$

$\gamma = 180° - 125° = 55° \quad \ldots \quad \beta = 54,2°\,.$

(b) In jedem (achsensymmetrischen) Drachenviereck müssen die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck ABS gilt: $\varphi = 180° - 35,4° - 54,2° = 90,4° \neq 90°\,.$
Das Viereck $ABDC$ ist also kein (achsensymmetrisches) Drachenviereck.

50. (a)

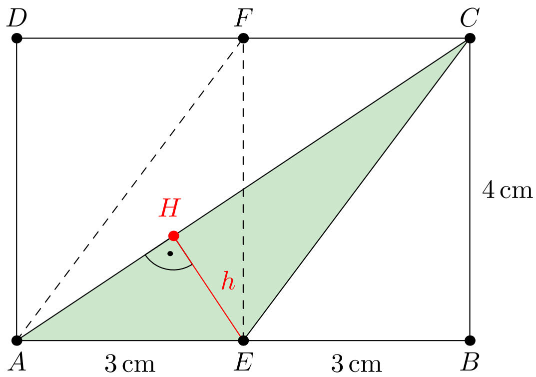


(b) In der Figur gilt: $\gamma = \dfrac{\beta^*}{2}$ (Z-Winkel).

Ebenso gilt: $\alpha = \dfrac{\beta^*}{2}$ (F-Winkel).

$\Rightarrow \quad \alpha = \gamma$; also ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

51. (a)



(b) **1. Möglichkeit:**
Die Dreiecke AEC und AEF haben die gleiche Grundlinie $[AE]$ und gleichlange Höhen $[BC]$ bzw. $[EF]$. Also besitzen sie den gleichen Flächeninhalt.
Das Dreick AEF nimmt ein Viertel der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ein, also trifft dies auch für das Dreieck AEC zu.
2. Möglichkeit:
$A_{AEC} = A_{ABCD} - A_{EBC} - A_{ACD}$.

$A_{\Delta\,EBC} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2$ und $A_{\Delta\,ACD} = 6 \cdot 4\,\text{cm}^2 : 2 = 12\,\text{cm}^2$

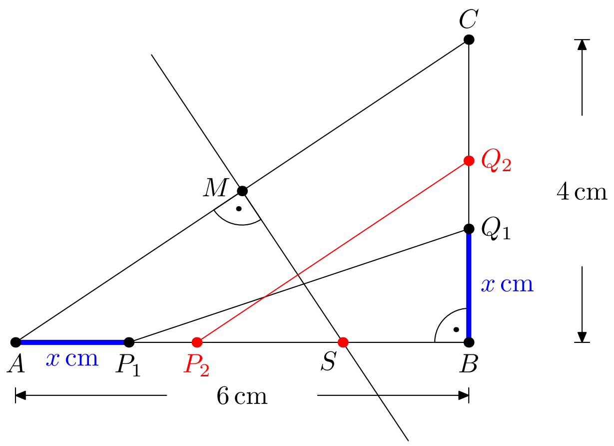
$\Rightarrow \quad A_{AEC} = 24\,\text{cm}^2 - 6\,\text{cm}^2 - 12\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2$.
Das ist aber ein Viertel der Fläche des Rechtecks $ABCD$.

(c) Der Abstand eine Punktes zu einer Strecke (oder Geraden) ist immer die kürzeste Entfernung dieses Punktes zur Strecke. Sie wird durch das **Lot** vom Punkt E auf die Strecke $[AC]$ dargestellt.
Wir wissen schon, dass $A_{\Delta\, AEC} = 6\,\text{cm}^2$ gilt.
Der gesuchte Abstand h ist die Höhe im Dreieck AEC mit der Grundlinie $[AC]$: $A_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h\,.$

$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 4^2}\,\text{cm} = \sqrt{52}\,\text{cm}\,.$$

$$6\,\text{cm}^2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{52}\,\text{cm} \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{12\,\text{cm}^2}{\sqrt{52}\,\text{cm}} \approx 1,66\,\text{cm}\,.$$

52. (a)



(b) Siehe Zeichnung.

(c) Auf der Kathete $[BC]$ kann x nicht länger als 4 cm. werden. Für $x = 0$ und $x = 4$ gibt es kein Viereck. Also: $x \in\,]0;\, 4[_{\mathbb{R}}$.

(d)
- Ein Viereck, darf sich dann Trapez nennen, wenn es zwei parallele Seiten besitzt. In der Zeichnung ist das Trapez AP_2Q_2C vorhanden. Du siehst, dass die Dreiecke P_2BQ_2 und ABC dann zueinander ähnlich sind. Wende den Vierstreckensatz an, wobei die Variable x mit eingebunden sein muss:

$$\frac{6-x}{x} = \frac{6}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 24 - 4x = 6x \quad \Leftrightarrow \quad 24 = 10x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,4\,.$$

- Siehe Zeichnung.
- $A_{\Delta\, P_2BQ_2} = 0.5 \cdot 3,6 \cdot 2,4\,\text{cm}^2 = 4,32\,\text{cm}^2\,.$
  $A_{\Delta\, ABC} = 0.5 \cdot 6 \cdot 4\,\text{cm}^2 = 12\,\text{cm}^2\,.$
  $A_{AP_2Q_2C} = A_{\Delta\, ABC} - A_{\Delta\, P_2BQ_2} = 12\,\text{cm}^2 - 4,32\,\text{cm}^2 = 7,68\,\text{cm}^2\,.$
- $\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 4^2}\,\text{cm} = \sqrt{52}\,\text{cm}\,(\approx 7,21\,\text{cm})\,.$
  $\overline{P_2Q_2} = \sqrt{3,6^2 + 2,4^2} = \sqrt{18,72}\,\text{cm}\,(\approx 4,33\,\text{cm})\,.$

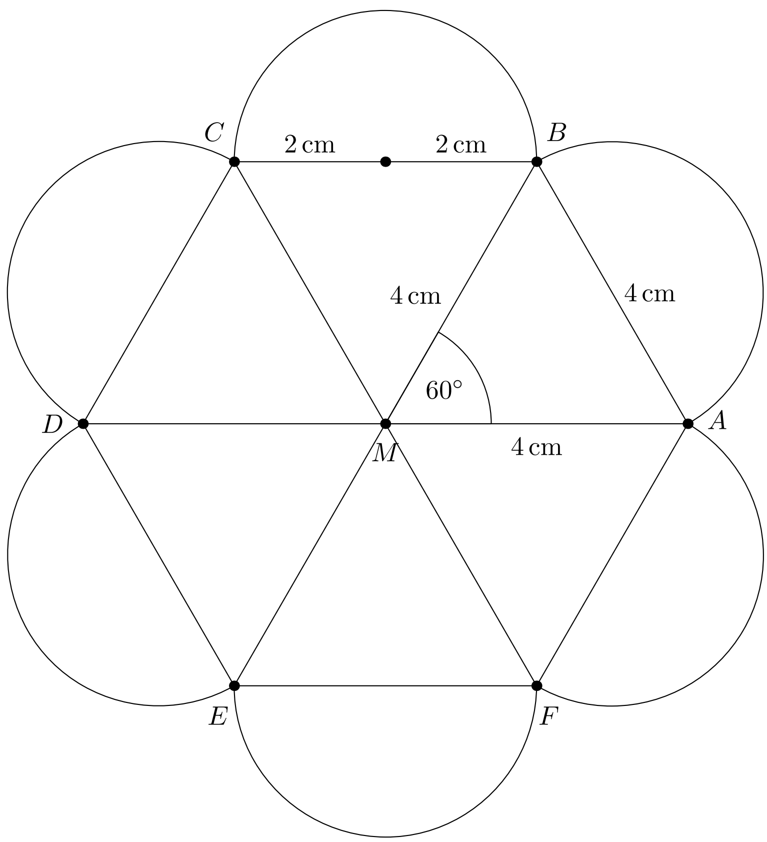
$$A_{AP_2Q_2C} = \frac{\sqrt{52}\,\text{cm} + \sqrt{18,72}}{2} \cdot h = 7,68\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad h \approx 1,33\,\text{cm}\,.$$

(e) $A(x) = A_{AP_nQ_nC} = 0.5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} - 0.5 \cdot \overline{P_nB} \cdot \overline{BQ_n}$
$A(x) = 12\,\text{cm}^2 - 0.5 \cdot (6 - x) \cdot x\,\text{cm}^2 = (12 - 3x + 0,5x^2)\,\text{cm}^2\,.$
Also gilt: $A(x) = (0,5x^2 - 3x + 12)\,\text{cm}^2\;.$

(f) $A(x) = (0,5x^2 - 3x + 12)\,\text{cm}^2 = 0.5 \cdot (x^2 - 6x + 3^3 - 9 + 24)\,\text{cm}^2$
$= 0.5 \cdot [(x-3)^2 + 15]\,\text{cm}^2 = [-0.5 \cdot (x-3)^2 + 7,5]\,\text{cm}^2\,.$
$x = 3$ liefert $A_{\min} = 7,5\,\text{cm}^2\,.$

(g) Die Symmetrieachse müsste entweder durch zwei Eckpunkte des fraglichen Vierecks oder durch zwei seiner Seitemittelpunkte verlaufen. Der Verlauf durch zwei Eckpunkte ist offensichtlich ausgeschlossen.
Im anderen Fall müsste die Symmetrieachse die gemeinsame Mittelsenkrechte zweier Vierecksseiten sein. Diese Vierecksseiten müssten dann aber zueinader parallel sein. Also wäre das gesuchte achsensymmetrische Viereck ein gleichschenkliges Trapez.
Da es aber nur nur ein Trapez, nämlich AP_2Q_2C, gibt und $\overline{AP_2} = 2,4\,\text{cm} \neq \overline{CQ_2} = 1,6\,\text{cm}$ gilt, gibt es unter allen Vierecken AP_nQ_nC kein achsensymmetrisches.

53. (a)

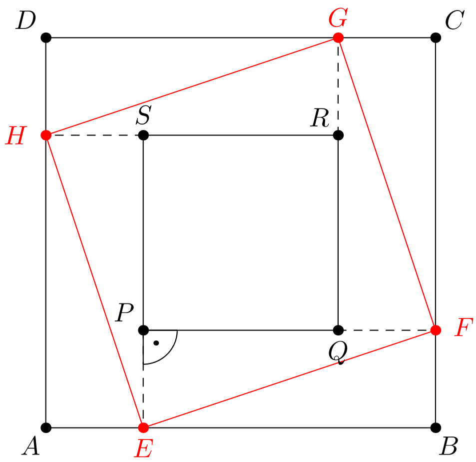


(b) Die drei Diagonalen zerlegen jedes regelmäßige Sechseck in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke. In unserem Fall hat jedes dieser gleichseitigen Dreiecke eine Seitenlänge

von 4 cm .
Die sechs kongruenten Halbkreise lassen sich paarweise zu drei Vollkreisen mit dem Radius $r = 2\,\text{cm}$ zusammenfügen .

Also: $A = \left(6 \cdot \frac{4^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2^2 \cdot \pi\right)\ \text{cm}^2 \approx 79{,}27\,\text{cm}^2$.

54.

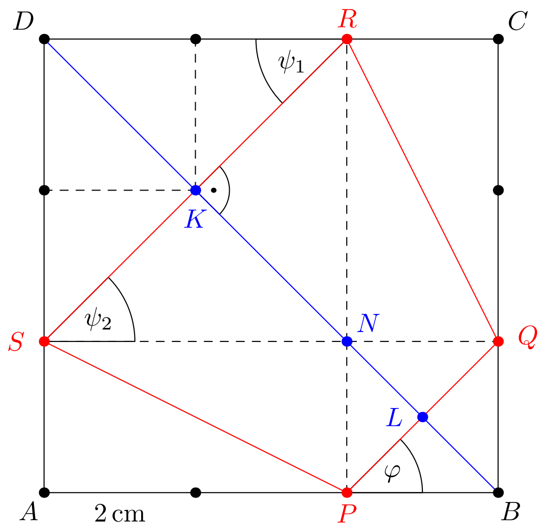


- Es gilt: $\overline{AB} = 81{,}6\,\text{cm} : 4 = 20{,}4\,\text{cm}$ und $\overline{PQ} = 34\,\text{cm} : 4 = 8{,}5\,\text{cm}$.
  Dann folgt: $\overline{QF} = \overline{PE} = (20{,}4\,\text{cm} - 8{,}5\,\text{cm}) : 2 = 5{,}95\,\text{cm}$.
  Weiter folgt: $\overline{PF} = 8{,}5\,\text{cm} + 5{,}95\,\text{cm} = 14{,}45\,\text{cm}$.
  $\Delta\, EFP$: $\overline{EF}^2 = A_{EFGH} = \overline{PF}^2 + \overline{PE}^2 = (14{,}45\,\text{cm})^2 + (5{,}95\,\text{cm})^2$
  $\Rightarrow \quad A_{EFGH} = 244{,}205\,\text{cm}^2$.
- **1. Möglichkeit:** $A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{\Delta\, EBF}$
  $A_{EFGH} = (20{,}4\,\text{cm})^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 14{,}45\,\text{cm} \cdot 5{,}95\,\text{cm} = 244{,}205\,\text{cm}^2$.

  2. Möglichkeit: $A_{EFGH} = A_{PQRS} + 4 \cdot A_{\Delta\, EFP}$
  $A_{EFGH} = (8{,}5\,\text{cm})^2 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot 14{,}45\,\text{cm} \cdot 5{,}95\,\text{cm} = 244{,}205\,\text{cm}^2$.

  Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

55. (a)



(b) Das Dreieck SRD ist gleichschenklig-rechtwinklig . $\Rightarrow$ $\psi_1 = 45°$.
Dann gilt auch $\psi_2 = 45°$ (Z-Winkel) .
Das Dreieck PBQ ist gleichschenklig-rechtwinklig . $\Rightarrow$ $\varphi = 45°$.
Also folgt: $[PQ] \parallel [SR]$.
Das Viereck $PQRS$ ist ein (achsensymmetrisches) Trapez..

(c) •

Für die Trapezfläche A gilt: $A_{PQRS} = \dfrac{\overline{SR} + \overline{PQ}}{2} \cdot \overline{KL}$.

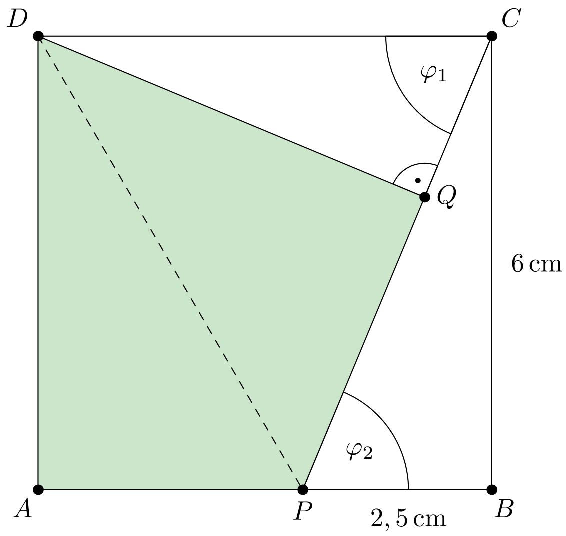
Die Strecke $[SR]$ ist die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 4 cm .
Also folgt: $\overline{SR} = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.
$[DK]$, $[NB]$ und $[PQ]$ sind jeweils Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge 2 cm .
Also folgt: $\overline{DK} = \overline{NB} = \overline{PQ} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ und $\overline{LB} = \sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.
Im Quadrat $ABCD$ gilt: $\overline{DB} = 6\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.
Damit gilt: $\overline{KL} = 6\sqrt{2}\,\mathrm{cm} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm} - \sqrt{2}\,\mathrm{cm} = 3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

Und damit gilt: $A_{PQRS} = \dfrac{4\sqrt{2}\,\mathrm{cm} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}}{2} \cdot 3\sqrt{2}\,\mathrm{cm} = 18\,\mathrm{cm}^2$.

• Das Trapez $PQRS$ ist von vier rechtwinkligen Dreiecken eingeschlossen. Zwei von ihnen sind kongruent.
$A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta\,APS} - A_{\Delta\,SRD} - A_{\Delta\,PBQ}$.

$A_{PQRS} = 36\,\mathrm{cm}^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\,\mathrm{cm}^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\,\mathrm{cm}^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 = 18\,\mathrm{cm}^2$.

56. (a)



(b) Die Kathete $\overline{AD}$ im rechtwinkligen Dreieck APD besitzt die Länge a. Die Hypotenuse $\overline{DC}$ im rechtwinkligen Dreieck DQC hat ebenfalls die Länge a. Weil aber in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite darstellt, gilt: $\overline{DQ} < a = \overline{AD}$. Somit kann die Diagonale $\overline{DP}$ im Viereck $APQD$ nicht Symmetrieachse dieses Vierecks sein.

(c) In den beiden rechtwinkligen Dreiecken DQC und PBC gilt: $\varphi_1 = \varphi_2$ (Z-Winkel). Damit stimmen die beiden Dreiecke paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck stimmen diese beiden Dreiecke in allen drei Innenwinkelmaßen überein. Also gilt: $\Delta\, PBC \sim \Delta\, DQC$.

(d) Strategie: $A_{APQD} = A_{ABCD} - (A_{\Delta\, PBC} + A_{\Delta\, DQC})$.

$$A_{\Delta\, PBC} = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 6\,\text{cm}^2 = 7,5\,\text{cm}^2\,.$$

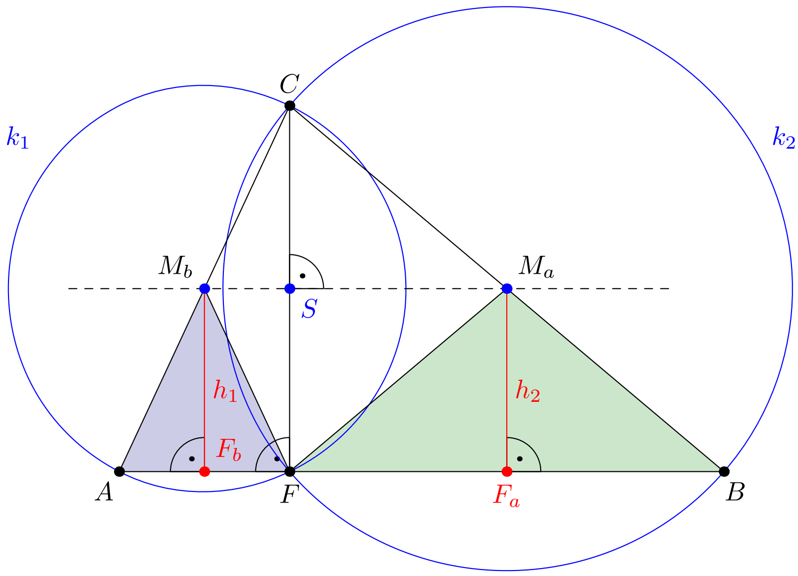
Wegen (c) folgt: $A_{\Delta\, DQC} = k^2 \cdot A_{\Delta\, PBC}$ mit dem Streckungsfaktor k.

$$\text{Mit } k = \frac{\overline{DC}}{\overline{PC}} \quad \text{folgt:} \quad k = \frac{6\,\text{cm}}{\sqrt{2,5^2 + 6^2}\,\text{cm}} = \frac{12}{13}\,.$$

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\, DQC} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot 7,5\,\text{cm}^2 = \frac{144}{169} \cdot 7,5\,\text{cm}^2\,.$$

$$\begin{aligned} A_{APQD} &= 36\,\text{cm}^2 - \left(7,5\,\text{cm}^2 + \frac{144}{169} \cdot 7,5\,\text{cm}^2\right) \\ &= 36\,\text{cm}^2 - \frac{313}{169} \cdot 7,5\,\text{cm}^2 \\ \frac{A_{APQD}}{A_{ABCD}} &= \frac{6084 - 2374,5}{169 \cdot 36} = \frac{3707,5}{6084} \approx 0,6094 = 60,94\%\,. \end{aligned}$$

57. (a)



(b) **1. Möglichkeit:**
Im Kreis k_1 gilt: $\overline{M_bA} = \overline{M_bF} = \overline{M_bC}$.
Im Kreis k_2 gilt: $\overline{M_aB} = \overline{M_aF} = \overline{M_aC}$.
Also sind im Viereck FM_aCM_b zweimal zwei benachbarte Seiten gleich lang. Also handelt es sich um ein achsensymmetrisches Drachenviereck.
2. Möglichkeit:
In jedem rechtwinkligen Dreieck fällt dessen Umkreismittelpunkt mit dem Hypotenusenmittelpunkt zusammen. Also sind die Kreismittelpunkte M_a und M_b gleichzeitig die Mittelpunkte der Seiten $a = [BC]$ bzw. $b = [AC]$.
Die Dreiecke FBC und F_aBM_a sind zueinander ähnlich.
Wegen $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM_a}$ folgt dann $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{F_aM_a} = 2 \cdot \overline{F_bM_b}$.
Also gilt: $h_1 = h_2 = \overline{SF} = \overline{FC}$. Daher liegt die Gerade M_aM_b zur Grundlinie $[AB]$ des Dreiecks ABC parallel. Diese Parallele steht damit auf der Diagonalen des Vierecks FM_aCM_b senkrecht. Gleichzeitig halbiert der Punkt S die Höhe $[CF]$ des Dreiecks ABC. Also ist das Viereck FM_aCM_b ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Die in der 2. Möglichkeit verwendete Argumentation ergibt nun Folgendes:

- Die vier Dreiecke F_aBM_a, FF_aM_a, FM_aS und SM_aC sind kongruent. Das Dreieck FBM_a besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
  Also ist das Dreieck FBM_a halb so groß wie das Teildreieck FBC .
- Die vier Dreiecke AF_bM_b, F_bFM_b, FSM_b und M_bSC sind kongruent. Das Dreieck AFM_b besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
  Also ist das Dreieck AFM_b halb so groß wie das Teildreieck AFC .

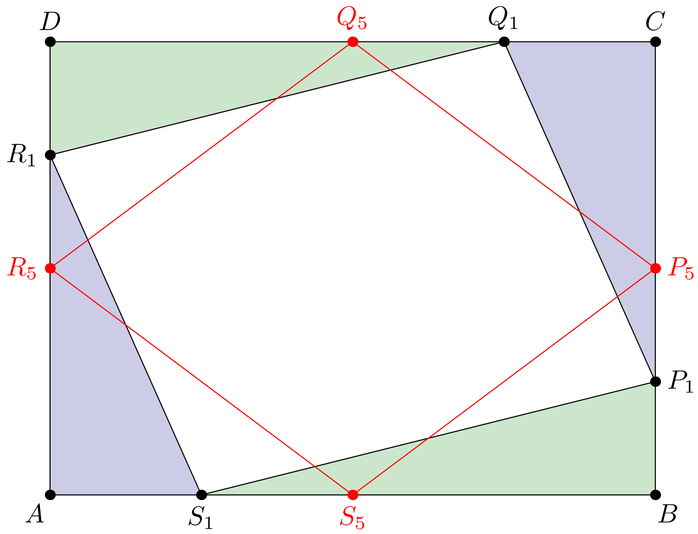
Also sind die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a zusammen halb so groß wie das Dreieck ABC .

Oder:
Weil der Schnittpunkt S auf halber Höhe im Dreieck ABC liegt, gilt:
$A_{\Delta\, M_bM_aC} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta\, ABC}$ (zentrische Streckung mit $k = \frac{1}{2}$) .
Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen mit der Diagonalen

$[M_aM_b]$ als Symmetrieachse.
$\Rightarrow \quad A_{FM_aCM_b} = 2 \cdot \frac{1}{4} A_{\Delta\,ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta\,ABC}\,.$
Dann muss der Rest, nämlich derjenige, der aus den beiden Dreiecken AFM_b und FBM_a besteht, ebenfalls die Hälfte des Dreiecks ABC einnehmen.

58. $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right)^{444} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^{444} = \left(\frac{(\sqrt{5}-1)\cdot(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right)^{444} = \left(\frac{\sqrt{5}^{\,2}-1^2}{\sqrt{2}^{\,2}}\right)^{444} =$
$= \left(\frac{4}{2}\right)^{444} = 2^{\,444} = 2^{\,4\cdot 111} = \left(2^4\right)^{111} = 16^{\,111}\,.$

59. (a)



(b) Es gilt $\Delta\,S_nBP_n \cong \Delta\,R_nQ_nD$ und $\Delta\,P_nCQ_n \cong \Delta\,AS_nR_n\,.$
$A_{ABCD} = 48\,\mathrm{cm}^2$
$A_{P_nQ_nR_nS_n} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta\,S_nBP_n} - 2 \cdot A_{\Delta\,P_nCQ_n}\,.$
$2 \cdot A_{\Delta\,S_nBP_n} = 2 \cdot 0{,}5 \cdot \overline{S_nB} \cdot \overline{BP_n} = (1-k)\cdot 8\,\mathrm{cm} \cdot 6k\,\mathrm{cm} = 48\,\mathrm{cm}^2 \cdot (1-k)\cdot k\,.$
$2 \cdot A_{\Delta\,P_nCQ_n} = 2 \cdot 0{,}5 \cdot \overline{P_nC} \cdot \overline{CQ_n} = (1-k)\cdot 6\,\mathrm{cm} \cdot 8k\,\mathrm{cm} = 48\,\mathrm{cm}^2 \cdot (1-k)\cdot k\,.$

$$\begin{aligned} A_{P_nQ_nR_nS_n} &= 48\,\mathrm{cm}^2 - 2 \cdot 48\,\mathrm{cm}^2 \cdot (1-k)\cdot k \\ A_{P_nQ_nR_nS_n} &= 48\,\mathrm{cm}^2 \cdot [1 - 2k(1-k)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad q(k) = \frac{A_{P_nQ_nR_nS_n}}{A_{ABCD}} = \frac{48\,\mathrm{cm}^2 \cdot [1-2k(1-k)]}{48\,\mathrm{cm}^2} = 1 - 2k(1-k)\,.$$

(c) $q(0{,}4) = 1 - 2 \cdot 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}4) = 0{,}52 = 52\%$

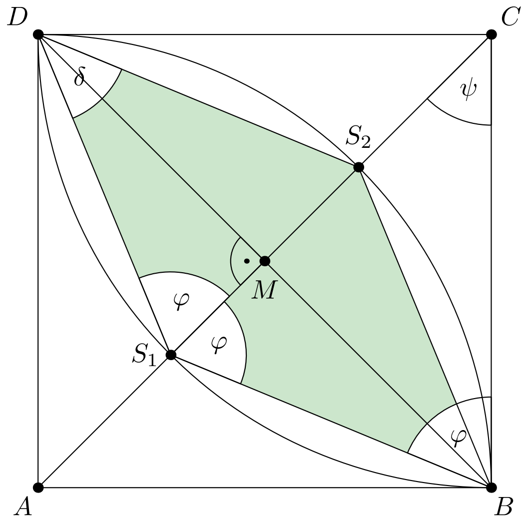
(d)

$$\begin{aligned} 1 - 2k(1-k) &= 0{,}58 \\ 2k^2 - 2k + 1 &= 0{,}58 \\ 2k^2 - 2k + 0{,}42 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad k_1 = 0,3 \quad \text{und} \quad k_2 = 0,7$

(e)
- Siehe Zeichnung.
- Es handelt sich um eine Raute.
  Begründung: Die vier rechtwinkligen Dreiecke S_5BP_5, P_5CQ_5, R_5Q_5D und AS_5R_5 sind kongruent, denn die besitzen jeweils Katheten, die jeweils 3 cm bzw. 4 cm lang sind. Also sind auch ihre Hypotenusen, die die Seiten des Parallelogramms $P_5Q_5R_5S_5$ bilden, gleich lang. Also ist dieses Viereck eine Raute.
- $q(k) = 1-2k(1-k) = 2k^2-2k+1 = 2(k^2-k+0,5^2-0,25)+1 = 2[(k-0,5)^2 - 0,25)+1] = 2(k-0,5)^2+0,5$
  $k = 0,5$ liefert den minimalen Flächenanteil von $0,5 = 50\%$.

60. (a)



Das Viereck S_1BS_2D ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(b) Im Quadrat $ABCD$ halbiert die Diagonale $[AC]$ den rechten Winkel DCB. Also gilt: $\psi = 45°$.
Das Dreieck S_1BC ist gleichschenklig. $\quad \Rightarrow \quad \varphi = (180° - 45°) : 2 = 67,5°$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle BS_1D = 2 \cdot \varphi = 135° = \sphericalangle DS_2B$.
$\Rightarrow \quad \delta = \sphericalangle S_1DS_2 = \sphericalangle S_2BS_1 = (360° - 4 \cdot 67,5°) : 2 = 45°$.

(c) $A_{\text{Drachen}} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{S_1S_2}$.

$\overline{BD} = 6 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm}\ (\approx 8,49\,\text{cm})$.

Wegen $\overline{S_1C} = 6\,\text{cm}$ folgt $\overline{AS_1} = \overline{CS_2} = (6 \cdot \sqrt{2} - 6)\,\text{cm}\ (\approx 2,49\,\text{cm})$.

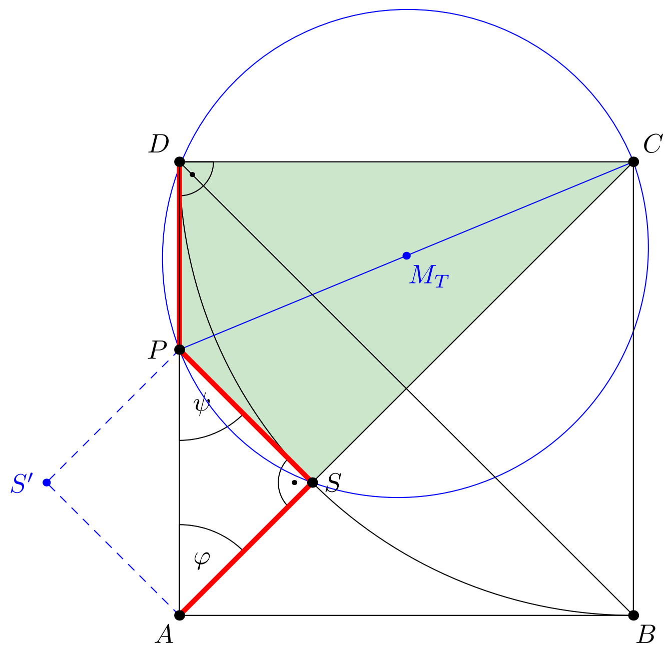
Dann ist $\overline{S_1S_2} = \left[6 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \left(6 \cdot \sqrt{2} - 6\right)\right]\ \text{cm} = \left(12 - 6\sqrt{2}\right)\ \text{cm}\ (\approx 3,51\,\text{cm})$.

$$A_{\text{Drachen}} = \frac{1}{2} \cdot \left[6\sqrt{2} \cdot \left(12 - 6\sqrt{2}\right)\right] \text{ cm}^2 .$$

$$A_{\text{Drachen}} = \left(36\sqrt{2} - 36\right) \text{ cm}^2 (\approx 14{,}91 \text{ cm}^2) .$$

$$\frac{A_{\text{Drachen}}}{A_{\text{Quadrat}}} = \frac{(36\sqrt{2} - 36) \text{ cm}^2}{36 \text{ cm}^2} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4142 = 41{,}42\% .$$

61. (a)

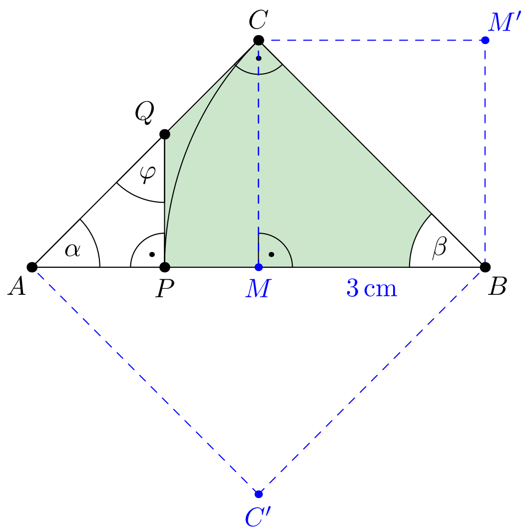


(b)

- Es gilt: $\overline{CS} = \overline{CD}$. **(*)**
  Die Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ sind Halbierende der betreffenden rechten Innenwinkel.
  Also folgt $\varphi = 45°$.
  Wegen der Innenwinkelsumme im rechtwinkligen Dreieck ASP gilt dann $\psi = 45°$.
  Also ist das Dreieck ASP gleichschenklig. Damit gilt:
  $\overline{AS} = \overline{AC} - \overline{SC} = \overline{SP} = (6\sqrt{2} - 6)\,\text{cm}$.

  Der Punkt S' ist das Spiegelbild des Punktes S an der Strecke $[AP]$. Das Dreieck ASP ist somit die Hälfte eines Quadrates mit der Diagonalen $[AP]$.
  Somit gilt: $\overline{AP} = \overline{AS} \cdot \sqrt{2} = (12 - 6\sqrt{2})\,\text{cm}$.
  $\Rightarrow \quad \overline{DP} = \overline{AD} - \overline{AS} = [6 - (12 - 6\sqrt{2})]\,\text{cm} = (6\sqrt{2} - 6)\,\text{cm} = \overline{PS} = \overline{AS}$.
  Mit **(*)** ist erwiesen, dass es sich um einen achsensymmetrischen Drachen handelt.
- Die Diagonale $[PC]$ des Drachens $SCDP$ zerlegt dieses Viereck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke. Somit liegen die Eckpunkte S, C, D und P dieses Vierecks auf dem THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[SC]$. Dieser Kreis ist also der Umkreis des Drachenvierecks.

62. (a)



(b) Es gilt $\alpha = \beta = 45°$. Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck APQ gilt aber auch $\alpha = \varphi = 45°$. Also stimmen die beiden Dreiecke ABC und APQ paarweise in ihren Innenwinkelmaßen überein. Damit sind sie zueinander ähnlich.

(c) Weil die beiden Dreiecke ABC und APQ zueinander ähnlich sind, gilt für den Ähnlichkeitsfaktor k z.B. :

$$k = \frac{\overline{AP}}{\overline{BC}} .$$

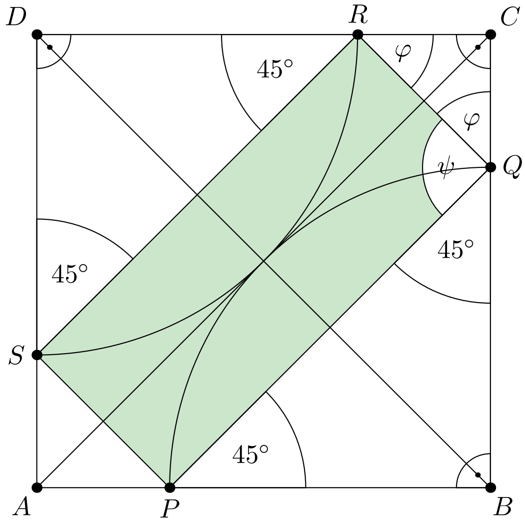
Das Dreieck MBC ist ein halbes Quadrat mit der Daigonalenlänge $\overline{BC} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.

$\overline{AP} = \overline{BA} - \overline{BP} = \overline{BA} - \overline{BC} = (6 - 3\sqrt{2})\,\text{cm}$.

Damit folgt $k = \dfrac{(6 - 3\sqrt{2})\,\text{cm}}{6\,\text{cm}}$.

Und $\quad \dfrac{A_{\Delta\,APQ}}{A_{\Delta\,ABC}} = k^2 = \left[\dfrac{(6 - 3\sqrt{2})\,\text{cm}}{(3\sqrt{2})\,\text{cm}}\right]^2 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,1716 = 17,16\%$.

63. (a)



(b) Die beiden Dreiecke PBQ und SRD sind gleichschenklig-rechtwinklig. Also haben ihre spitzen Innenwinkel das Maß 45° .
Weiter gilt: $\overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{BQ} = \overline{DC} - \overline{DR} = \overline{CR}$. Also ist auch das Dreieck RQC gleichschenklig-rechtwinklig. Dann gilt $\varphi = 45^\circ$.
Am Punkt Q gilt somit: $45^\circ + \psi + 45^\circ = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \psi = 90^\circ$. .
Aus Symmetriegründen sind dann auch die drei restlichen Innenwinkel des Vierecks $PQRS$ rechte Winkel. Also handelt es sich hierbei um ein Rechteck.

(c) Eine mögliche Strategie: $A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot (A_{\Delta\, PBQ} + A_{\Delta\, RQC})$

$$A_{\Delta\, PBQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 \text{ cm}^2 = 9\,\text{cm}^2 .$$

$$A_{\Delta\, RQC} = \frac{1}{2} \cdot \left(6 - 3\sqrt{2}\right)^2 \text{ cm}^2 = (27 - 18\sqrt{2})\,\text{cm}^2 .$$

$$A_{PQRS} = 36\,\text{cm}^2 - 2 \cdot [9\,\text{cm}^2 + (27 - 18\sqrt{2})\,\text{cm}^2] = (36\sqrt{2} - 36)\,\text{cm}^2 .$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(36\sqrt{2} - 36)\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = \frac{(36(\sqrt{2} - 1)\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2}$$

$$= \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142 = 41,42\%$$

64. (a) Wegen $\mathbb{T}_{77} = \{1;\ 7;\ 11;\ 77\}$ folgt
entweder:

$$\begin{array}{cccccccc} & & a & + & b & = & 11 & (1) \\ \wedge & & a & - & b & = & 7 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & & = & 18 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 9 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 2$
Probe: $9^2 - 2^2 = 81 - 4 = 77$, stimmt.

oder:

$$\begin{array}{rrcrcrl} & a & + & b & = & 77 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 1 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 78 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 39 \quad$ z.B. in (2): $\; b = 38$

Probe: $39^2 - 38^2 = 1521 - 1444 = 77$, stimmt.

$$\Rightarrow \quad L = \{(9 \mid 2);\ (39 \mid 38)\}$$

(b) 83 ist eine Primzahl. Wegen $\mathbb{T}_{83} = \{1;\ 83\}$ folgt

$$\begin{array}{rrcrcrl} & a & + & b & = & 83 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 1 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 84 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 42 \quad$ z.B. in (2): $\; b = 41$

Probe: $42^2 - 41^2 = 1764 - 1681 = 83$, stimmt.

(c) Wegen $\mathbb{T}_{38} = \{1;\ 2;\ 19;\ 38\}$ folgt z.B.

$$\begin{array}{rrcrcrcccl} & a & + & b & = & 19 & & & & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 2 & & & & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 21 & \Rightarrow & a \notin \mathbb{N} & \Rightarrow & b \notin \mathbb{N} \end{array}$$

Damit folgt: $\quad L = \emptyset$.

(d) Das folgende Gegenbeispiel zeigt, dass Edwin Unrecht hat:
$a^2 - b^2 = 44$. Daraus wird z.B.:

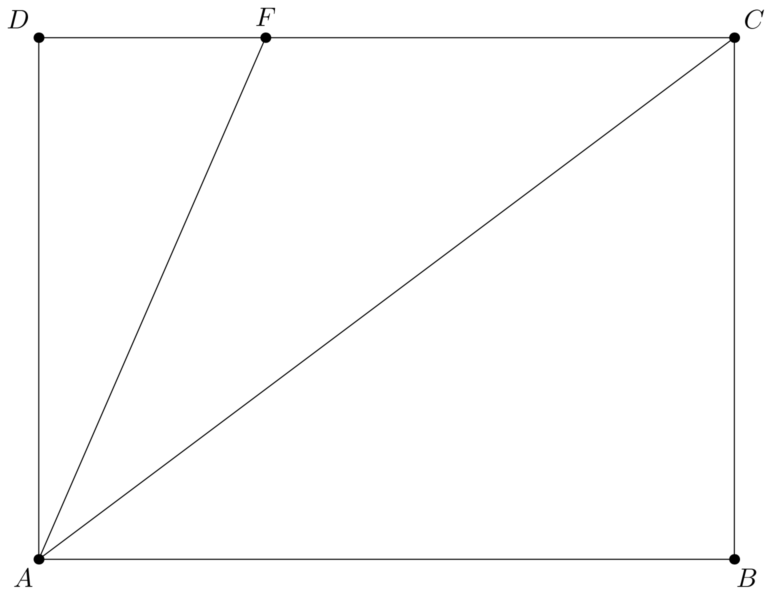
$$\begin{array}{rrcrcrl} & a & + & b & = & 22 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 2 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 24 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 12$ und $\quad b = 10$.

In der Tat ist $12^2 - 10^2 = 144 - 100 = 44$.

Für $a^2 - b^2 = 2^n \cdot p$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $p \in \mathbb{P}$ ist die Lösungsmenge nie leer.

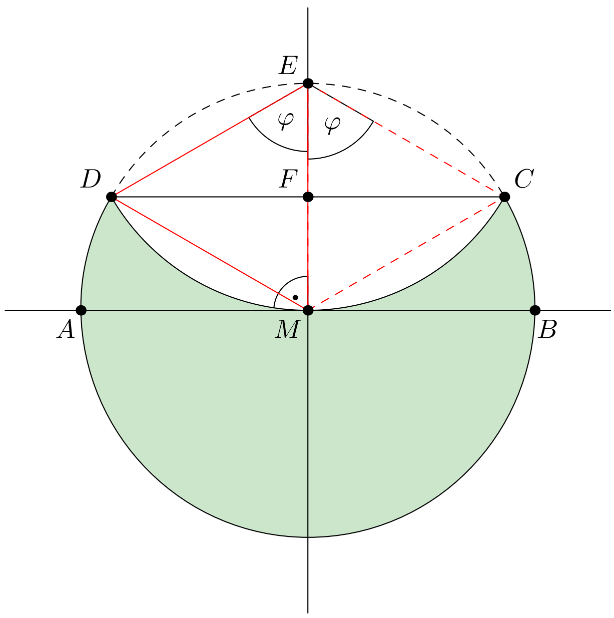
65. (a)



(b) Im Dreieck ACF gilt die Dreiecksungleichung: Zwei Seitenlängen müssen zusammen mehr ergeben als die Länge der dritten Dreiecksseite; d.h. hier gilt: $\overline{AF} + \overline{FC} > \overline{AC}$.

(c) $\overline{DF} = 32\,\text{m}$.
Im Dreieck AFD gilt: $\overline{AF} = \sqrt{32^2 + 69^2}\,\text{m} = \sqrt{5785}\,\text{m}$.
Im Dreieck ABC gilt: $\overline{AC} = \sqrt{92^2 + 69^2}\,\text{m} = 115\,\text{m}$.
Wegunterschied: $\sqrt{5785}\,\text{m} - 115\,\text{m} \approx 21\,\text{m}$.

66. (a)



(b) Von der Kreisscheibe hat Erwin das Kreissegment $CDMC$ heruntergeklappt.
Den Flächeninhalt dieses Kreissegmentes erhältst du, indem du vom Flächeninhalt des Kreissektors $EDMCE$ den Flächeninhalt des Dreiecks DCE subtrahierst.

Im Dreieck DME gilt: $\overline{ME} = \overline{MD} = \overline{DE} = 3\,\text{cm}$.
Also ist das Dreieck DME gleichseitig, und es gilt: $\varphi = 60°$.
Das Dreieck DCE hat den gkeichen Flächeninhalt wie dieses Dreieck DME.

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{120°}{360°} \cdot 3^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 9,42\,\text{cm}^2\,.$$

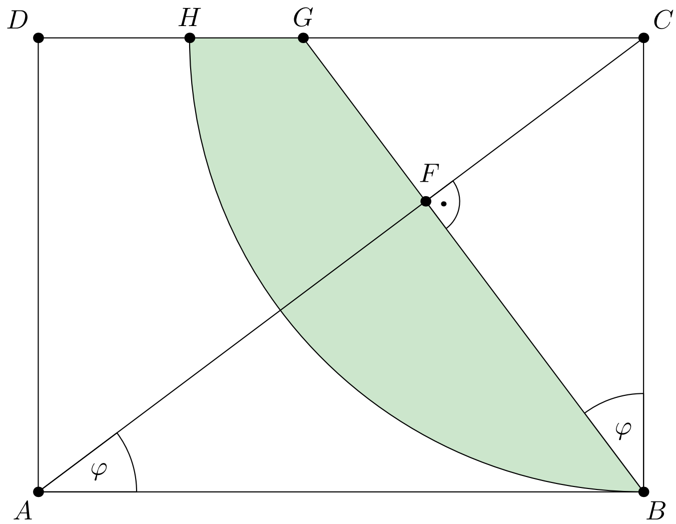
$$A_{\Delta\,DCE} = \frac{3^2}{4}\,\text{cm}^2 \cdot \sqrt{3} \approx 3,90\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{\text{Segment}} \approx 9,42\,\text{cm}^2 - 3,90\,\text{cm}^2 = 5,52\,\text{cm}^2\,.$$

Diese Segmentfläche musst du zwei Mal von der Fläche der Kreisscheibe subtrahieren:
$A_{\text{gefärbt}} \approx 3^2\pi\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 5,52\,\text{cm}^2 \approx 17,23\,\text{cm}^2$.

$$\frac{A_{\text{gefärbt}}}{A_{\bigcirc}} = \frac{17,23\,\text{cm}^2}{28,27\,\text{cm}^2} \approx 0,6945 = 69,54\%\,.$$

67. (a)



(b) Strategie: Subtrahiere den Flächeninhalt des Dreiecks BCG vom Flächeninhalt des Viertelkreises mit dem Mittelpunkt C und dem Radius $r = 6\,\text{cm}$.

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{4} \cdot 6^2\pi\,\text{cm}^2 = 9\pi\,\text{cm}^2\,.$$

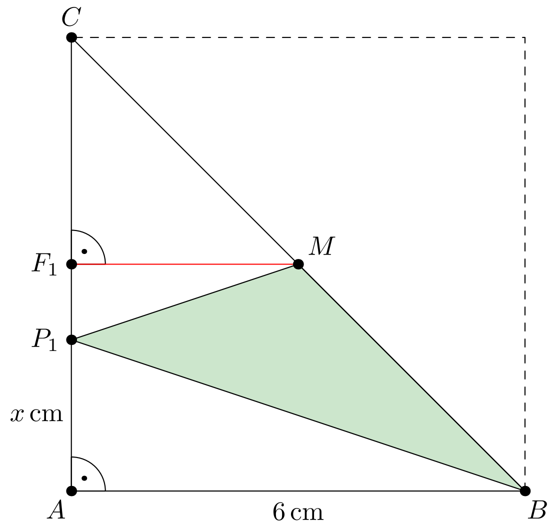
Weil sie z.B. im Winkelmaß φ übereinstimmen, sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABC und BCG zueinander ähnlich:

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{CG} = \frac{36\,\text{cm}^2}{8\,\text{cm}} = 4,5\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\, BCG} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 4,5\,\text{cm} = 13,5\,\text{cm}^2\,.$$

$$\Rightarrow \quad A = (9\pi - 13,5)\,\text{cm}^2 \approx 14,77\,\text{cm}^2\,.$$

68. (a)



(b) Für $x = 0$ ergibt sich das maximale Dreieck. Für $x = 6$ entartet das betreffende Dreieck zur Doppelstrecke $[BC]$.
Also gibt es Dreiecke für $x \in [0;\, 6[_{\mathbb{R}}$.

(c) Eine mögliche Strategie: Berechne jeweils den Flächeninhalt der Dreiecke ABP_n und P_nMC in Abhängigkeit von x. Subtrahiere die beiden Flächeninhalte dann vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

$$A_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{\Delta\, ABP_n} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot x\,\text{cm} = 3x\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{\Delta\, P_nMC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_nC} \cdot \overline{F_nM} = \frac{1}{2} \cdot (6-x)\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = (9 - 1,5x)\,\text{cm}^2\,.$$

$$A(x) = [18 - 3x - (9 - 1,5x)]\,\text{cm}^2 = (9 - 1,5x)\,\text{cm}^2 = A_{\Delta\, P_nMC}\,.$$

Kommentar: Die Flächeninhalte der Dreiecke BCP_n werden ständig durch deren Seitenhalbierende $[P_nM]$ halbiert.

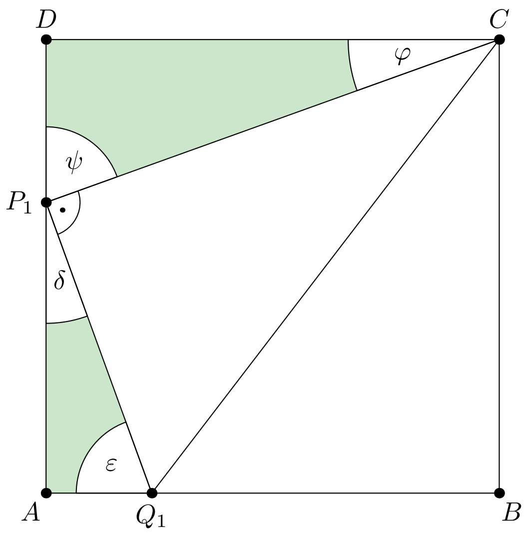
(d) $9 - 1,5x = 6,6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,6\,.$

(e) Es muss gelten: $\overline{CP_n} = \overline{CM}$.
$\overline{CP_n} = (6 - x)\,\text{cm}$.

Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck ABC ist ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $\overline{BC} = 6\sqrt{2}\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{CM} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.
Damit muss gelten: $6 - x = 3\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 - 3\sqrt{2} \approx 1,76$.

(f) $20\% = 0,2$.
$(9 - 1,5x)\,\text{cm}^2 = 0.2 \cdot 18\,\text{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - 1,5x = 3,6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3,6$.

69. (a)



(b) Im rechtwinkligen Dreieck PCD gilt: $\varphi + \psi = 90°$ (*).
Am Punkt P gilt: $\psi + 90° + \delta = 180°$ also: $\delta + \psi = 90°$, und mit (*) folgt: $\varphi = \delta$ (**).
Im rechtwinkligen Dreieck AQP gilt: $\delta + \varepsilon = 90°$. Mit (*) und (**) folgt: $\psi = \varepsilon$.
Damit stimmen die Dreiecke AQP und QCP paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Also sind sie zueinander ähnlich.

(c) $\Delta\, PCD: \quad \cos 20° = \dfrac{6\,\text{cm}}{\overline{PC}} \quad \Rightarrow \quad \overline{PC} \approx 6,39\,\text{cm}$.

Und weiter (z.B.): $\overline{PD}^2 = \left(6,39^2 - 6^2\right)\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PD} \approx 2,20\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad \overline{AP} \approx 6\,\text{cm} - 2,20\,\text{cm} = 3,80\,\text{cm}$.

$\Delta\, AQP: \quad \cos 20° \approx \dfrac{3,80\,\text{cm}}{\overline{PQ}} \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \approx 4,04\,\text{cm}$.

$A_{\Delta\, QCP} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PQ} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 6,39\,\text{cm} \cdot 4,04\,\text{cm} \approx 12,91\,\text{cm}^2$.

70. $10\,\text{l} = 10\,\text{dm}^3 = 10^4\,\text{cm}^3 = 10^7\,\text{mm}^3$.
Für den Innenradius r_i des Gefäßes gilt dann:

$$\frac{2}{3} r_i^3 = 10^7\,\mathrm{mm}^3 \quad \Rightarrow \quad r_i \approx 168{,}4\,\mathrm{mm}\,.$$

$$\Rightarrow \quad d_i \approx 337\,\mathrm{mm} \quad \Rightarrow \quad d_a \approx 347\,\mathrm{mm}\,.$$