SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Neue Aufgaben (Realschule)

herausgegeben vom

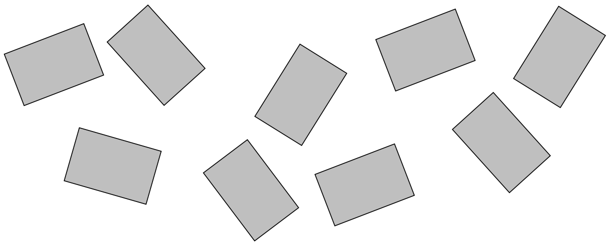
Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

19. Oktober 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Daten und Zufall

1.



Beate und Ursula spielen mit 9 verdeckten Karten: Zwei davon sind auf der Unterseite rot, drei davon grün und vier davon blau.
Zieht ein Mädchen eine rote Karte (r), bekommt sie 18 Punkte. Bei einer grünen Karte (g) bekommt sie zwölf und bei einer blauen Karte (b) 9 Punkte.

(a) Wie viele Karten müsste Beate höchstens umdrehen, damit eine grüne Karte aufgedeckt wird?

(b) Wie viele Karten müsste Beate von den 9 verdeckten Karten höchstens umdrehen, damit eine rote oder grüne Karte dabei ist?

(c) Wie viele Karten müsste Beate von den 9 verdeckten Karten höchstens umdrehen, damit eine rote und eine grüne Karte dabei ist?

(d) Ursula dreht nacheinander drei von den 9 verdeckten Karten um. Sie sagt: „Ich habe jetzt 36 Punkte.“
Welche Farben tragen ihre drei Karten?

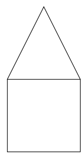
(e) Beate schaut heimlich unter drei von den noch verbleibenden Karten und meint zu Ursula gewandt: „Wenn ich die drei Karten aufdecken würde, dann hätte ich 38 Punkte“. Doch Ursula entgegnet ohne hinzuschauen: „Das kann gar nicht sein, denn … “.
Wie begründet Ursula ihre Meinung?

2. In einem Saal befinden sich nur Personen, die entweder den Nachnamen „Müller“, „Becker“, „Schmidt“ oder „Küfner“ tragen. Außerdem heißt jede Person mit Vornamen entweder „Renate“, „Ursula“, „Hans“, „Paul“ oder „Egon“.

(a) Wie viele Personen sind mindestens im Saal?

(b) Kannst du auch feststellen, wie viele Personen höchstens im Saal sind? Begründe deine Antwort.

3. Heinz möchte sich für 30 € einen neuen Skater-Helm kaufen. Dazu „schlachtet“ er sein Sparschwein. Er stellt fest, dass nur 1 €- und 2 €-Münzen im Wert von 59 € darin sind.
   Wie viele Möglichkeiten hätte Heinz höchstens, diesen Helm ausschließlich mit den Münzen aus seinem Sparschwein zu bezahlen?

4. 

   Material: je ein blaues, rotes und gelbes quadratisches Plättchen und je ein blaues, rotes und gelbes dreieckiges Plättchen.

   (a) Wie viele Häuserfronten kannst du damit legen?

   (b) Das blaue Quadrat wird durch ein grünes Dreieck ersetzt. Wie viele verschieden farbige Häuserfronten kannst du jetzt legen?

5. (a) Anton, Bettina und Claudia sollen sich für ein Foto nebeneinander stellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

   (b) Doris soll noch mit auf das Foto. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?

   (c) Egon kommt als fünfte Person mit dazu. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten.

   (d) Formuliere eine Regel, wie sich die Anzahl der Möglichkeiten erhöht, wenn eine Person hinzukommt.

6.

Speisekarte

Tomatensuppe
Lauchcremesuppe

****

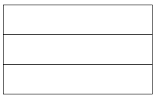
Schnitzel mit Pommes Frites
Hähnchen mit Reis
Gemüseauflauf

****

Eis
Obstsalat
Kuchen

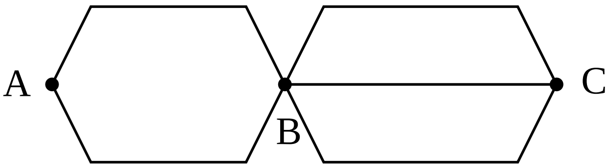
Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus der Speisekarte ein Menü aus Suppe, Hauptgericht und Nachspeise zusammenzustellen?

7.



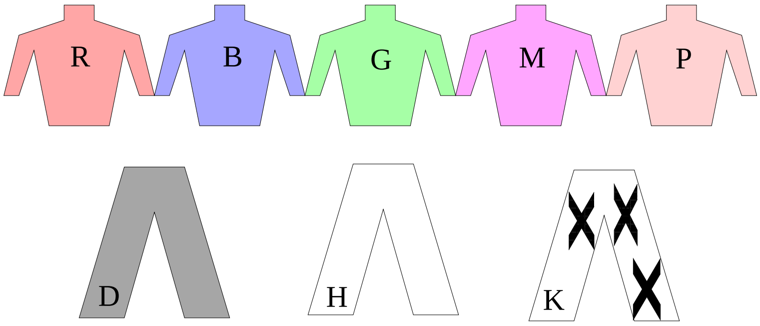
Harry Potter möchte für Hogwarts eine Fahne mit drei verschieden gefärbten Streifen entwerfen. Er hat fünf Farben zur Verfügung: blau, weiß, schwarz, rot und gelb.
Wie viele verschiedene Fahnen könnte er gestalten?

8.

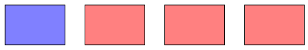


Wie viele Möglichkeiten gibt es, um auf den gezeichneten Wegen von Abelstadt über Besselheim nach Cantorhausen zu gelangen?

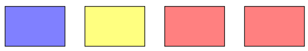
9.



Elvira hat in ihrem Kleiderschrank fünf Pullover (von links: Rot, Blau, Grün, Magenta und Pink) und drei Hosen: eine dunkle (D), eine helle (H) und eine karierte (K). Auf wie viele Arten kann sie sich damit anziehen?

10. 

    Du hast einen blauen und drei rote Legosteine. Wie viele verschiedene Türme aus vier Steinen kannst du damit bauen?

11. 

    Du hast einen blauen, einen gelben und zwei rote Legosteine.

    (a) Wie viele verschiedene Türme aus vier Steinen kannst du damit bauen?

    (b) Wie viele verschiedene Türme aus drei Steinen gibt es?

12. Die Summe aus drei natürlichen Zahlen soll 10 ergeben. Notiere alle Möglichkeiten.

2 Neue Aufgaben, Oktober 2011

1. Familie Reich hat vier Kinder. Im Jahre 2010 sind Arne 10, Bettina 12, Carsten 14 und Doris 16 Jahre alt.
   (a) Berechne das Gesamtalter der vier Kinder im Jahre 2013.
   (b) In welchem Jahr werden die Geschwister zusammen 100 Jahre alt sein?
   (c) Können die vier Kinder zusammen jemals 163 Jahre alt werden?

2. In der Klasse 5a ist ein neues Rechenzeichen, nämlich das „$\heartsuit$“ für natürliche Zahlen erfunden worden.
   Für dieses Zeichen gilt die Rechenvorschrift

   $x \heartsuit y = x^2 + x \cdot y$, wobei x und y Platzhalter für natürliche Zahlen sind.

   Beispiel: $x = 8$ und $y = 5:$ $8 \heartsuit 5 = 8^2 + 8 \cdot 5 = 64 + 40 = 104$.
   (a) Berechne $1 \heartsuit 4$, $1 \heartsuit 5$, $1 \heartsuit 6$, ... , $1 \heartsuit 473589$.
   (b) Untersuche, ob für das Rechenzeichen $\heartsuit$ das Kommutativgesetz gilt.
   (c) $7 \heartsuit \square = 126$
   Welche Zahl gehört in das Kästchen?
   (d) Edwin hat etwas entdeckt: „$x \heartsuit x$ ergibt stets eine gerade Zahl!“ Begründe, dass Edwin Recht hat.
   (e) Für welche Belegungen von x und y ergibt $x \heartsuit y$ stets eine ungerade Zahl? Begründe deine Antwort.

3. (a) Gib die größte fünfstellige natürliche Zahl an, deren Quersumme 13 beträgt.
   (b) Gib die kleinste fünfstellige natürliche Zahl an, deren Quersumme 13 beträgt.

4. (a) Gib alle natürlichen Zahlen an, deren Ziffernprodukt 12 ergibt.
   (b) Wie viele natürliche Zahlen gibt es, deren Ziffernprodukt 7 ergibt? Begründe deine Antwort.
   (c) Wie viele natürliche Zahlen gibt es, deren Ziffernprodukt 13 ergibt? Begründe deine Antwort.

(d) Ermittle mit Hilfe einer Tabelle systematisch alle dreistelligen natürlichen Zahlen, deren Ziffernprodukt 0 ergibt. Wie viele sind es insgesamt?

5.

$$2 \cdot 9\,089\,133 = 9\,089\,129 + \boxed{}$$

Welche Zahl gehört in das Kästchen, damit die Gleichung stimmt? Versuche, die Frage zu beantworten, ohne den Produktwert auf der linken Seite zu berechenen.

6. (a)
   - Schreibe alle natürlichen Zahlen zwischen 8 und 15 auf.
   - Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen 8 und 15?
     Schreibe als Antwort einen vollständigen Satz.
   - Notiere eine Regel, nach der du die Anzahl der natürlichen Zahlen zwischen 8 und 15 ausrechnen kannst, ohne alle in Frage kommenden Zahlen hinzuschreiben.

   (b)
   - Wende deine Regel auf die Anzahl der natürlichen Zahlen an, die zwischen 57 und 74 liegen.
   - Überprufe deine Lösung durch Abzählen der betreffenden Zahlen.

   (c) Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen 103 859 und 801 467? Formuliere als Antwort wieder einen vollständigen Satz.

7. Egon soll $5\,378 \cdot 2\,165$ ausrechnen. Er bekommt 9 643 375 heraus. Das ist jedoch falsch.
   (a) Begründe auf verschiedene Weise, zunächst ohne das richtige Ergebnis auszurechen, weshalb sein Ergebnis fehlerhaft ist.
   (b) Berechne das richige Ergebnis.

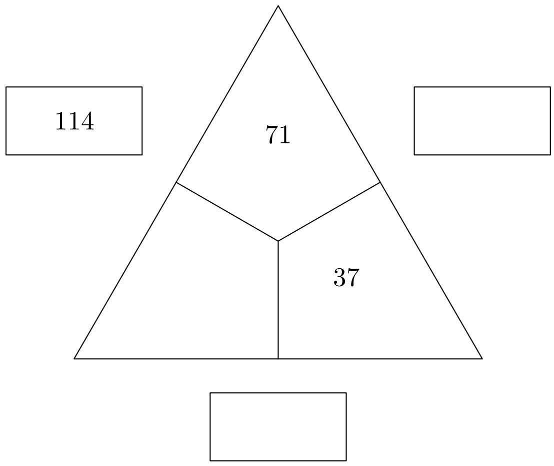
8. (a) Berechne die Summe aus allen zweistelligen Zahlen, wobei jeweils eine Ziffer doppelt so groß wie die andere ist.
   (b) Berechne die Teilermenge des Summenwertes.

9. (a) Schreibe eine dreistellige Zahl hin, die durch 10 teilbar ist.
   (b) Streiche die letzte Ziffer dieser Zahl. Dadurch erhältst du eine neue, zweistellige Zahl.

(c)
- Subtrahiere die neue Zahl von der ursprünglichen (dreistelligen) Zahl.
- Untersuche ohne Division, ob das Ergebnis durch 9 teilbar ist.
- Durch welche Zahl, die größer als 10 ist, ist dein Ergebnis noch teilbar?

(d)
- Wiederhole alle obigen Rechenschritte mit einer weiteren dreistelligen Zahl. Gelten deine vorherigen Feststellungen jetzt auch noch?
- Notiere eine Begründung dafür, was du entdeckt hast.

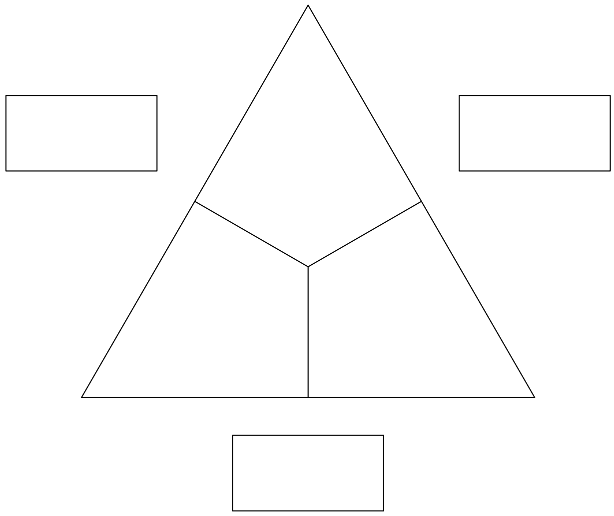
10.



In jedem der Rechtecke soll der Wert der Summe aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck stehen.

(a)
- Berechne die noch fehlenden Zahlen.
- Berechne den Wert der Summe aus den drei Zahlen im Dreieck.
- Berechne den Wert der Summe aus den drei Zahlen in den Rechtecken.
- Vergleiche die beiden Summenwerte. Notiere, was du feststellst.

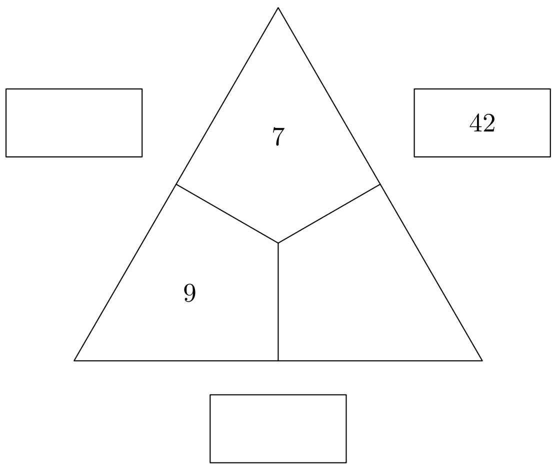
(b)
-



Fülle die Figur nach obigen Regeln mit Zahlen aus.

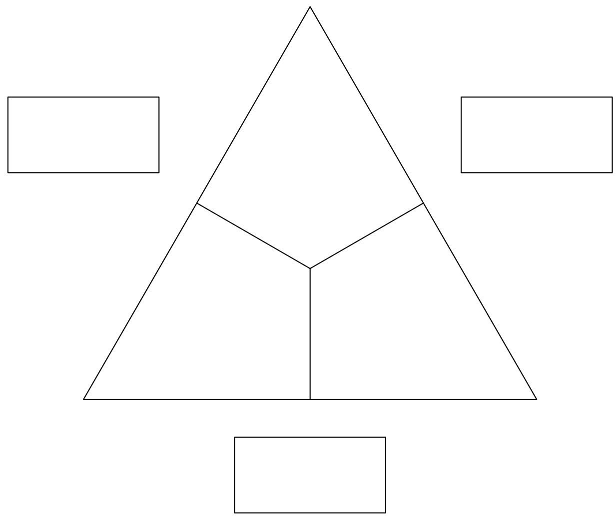
- Gilt der Zusammenhang zwischen den beiden Summenwerten innerhalb des Dreiecks und in den drei Rechtecken. jetzt auch noch? Notiere deine Antwort. Vergleiche sie mit der deines Nachbarn.
- Gilt das, was du herausgefunden hast, immer? Begründe deine Antwort.

11.



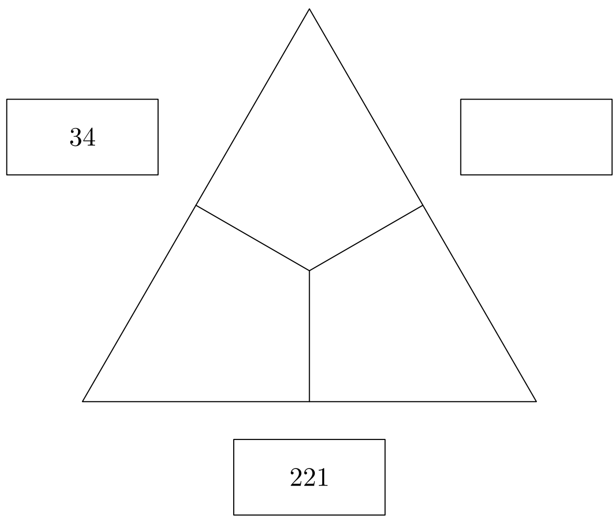
In jedem der Rechtecke soll der Wert des Produktes aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck stehen.

(a)
- Berechne die noch fehlenden Zahlen.
- Berechne den Wert des Produktes aus den drei Zahlen im Dreieck.
- Berechne den Wert des Produktes aus den drei Zahlen in den Rechtecken.
- Dividiere den größeren Produktwert durch den kleineren. Notiere, was du feststellst.

(b)
- 

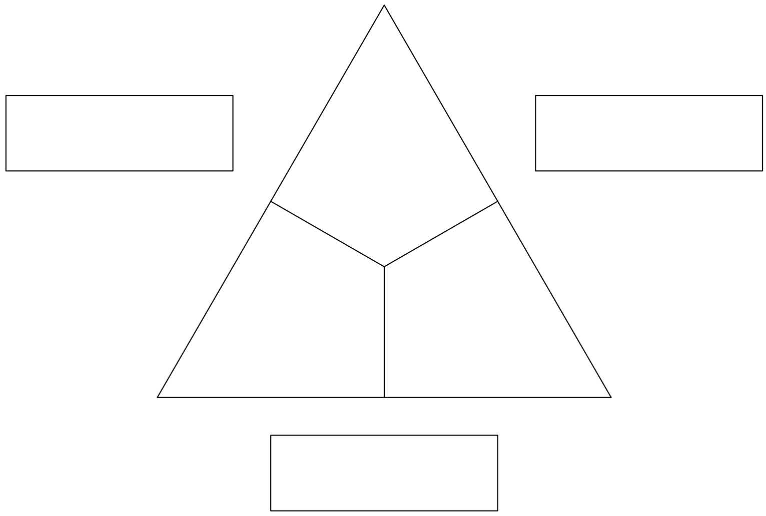
  Fülle die Figur nach obigen Regeln mit Zahlen aus.
- Gilt der Zusammenhang zwischen den beiden Produktwerten innerhalb des Dreiecks und in den drei Rechtecken. jetzt auch noch? Notiere deine Antwort. Vergleiche sie mit der deines Nachbarn.
- Gilt das, was du herausgefunden hast, immer? Begründe deine Antwort.

12.



In die drei Felder im Dreieck gehören natürliche Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke der Wert des Produktes aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Zahlen.

13.



In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke das Produkt aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Wir nennen die Plätze, die mit ganzen Zahlen zu belegen sind, „Zellen". Das Dreieck enthält drei Zellen und die Rechtecke außen stellen drei weitere Zellen dar. Untersuche, ob die folgenden Behauptungen wahr sind:

(a) Wenn eine Dreieckszelle mit null belegt ist, dann muss in zwei Außenzellen null stehen.

(b) Wenn eine Außenzelle mit null belegt ist, dann muss eine weitere Außenzelle null enthalten.

(c) Wenn in allen Außenzellen null steht, dann enthalten auch die inneren Dreieckszellen lauter Nullen.

14. Untersuche, ob die folgenden Behauptungen wahr sind:

(a) Wenn du in einer Summe aus zwei Summanden den ersten und gleichzeitig den zweiten Summanden verdoppelst, dann verdoppelt sich der Summenwert.

(b) Wenn du in einer Summe aus zwei Summanden den ersten Summanden halbierst und gleichzeitig den zweiten Summanden verdoppelst, dann bleibt der Summenwert unverändert..

15. (a) Fritz behauptet: „Wenn du in einem Produkt aus zwei Faktoren den ersten Faktor halbierst und gleichzeitig den zweiten Faktor verdoppelst, dann bleibt der Produktwert unverändert." Untersuche, ob Fritz Recht hat.

(b) Wie ändert sich der Wert des Produktes aus zwei Faktoren, wenn beide Faktoren gleichzeitig verdreifacht werden?

- Beantworte die Frage anhand eines Beispiels.
- Verwende $\square$ als Platzhalter für den ersten und $\bigcirc$ als Platzhalter für den zweiten Faktor.

(c) „Wenn in einem Produkt aus zwei Faktoren jeder Faktor gleichzeitig verzehnfacht wird, dann … “
Schreibe den vollständigen Satz hin.

16. (a) Addiere 36 zur doppelten Differenz aus 99 und 62 .
    (b)
    - Subtrahiere 124 von der Summe aus 198 und 36 .
    - Vergleiche das Ergebnis mit dem der Aufgabe (a).
    - Hast du eine Erklärung dafür?

17. Untersuche, ob 2^{1400} durch 14 teilbar ist.

18. Paul rechnet eine Aufgabe:

$$(3 \cdot 17 + 9) : (23 - 46 : 2) = 60 : 0$$

(a) Überprüfe, ob seine Rechnung bis dahin stimmt.

(b) Paul rechnet weiter: $60 : 0 = 60$.
Erika hat zugeschaut. Sie meint: „Das kann nicht sein, denn $60 : 1 = 60$.“ Paul entgenet: „Na und?“
Was hättest du Paul auf dessen Frage geantwortet?

(c) Erika probiert es anders. Sie rechnet $60 : 0 = 0$ und überprüft das Ergebnis mit der Umkehraufgabe.

- Schreibe die Umkehraufgabe hin. Stimmt Erikas Ergebnis?
- Notiere deine Überlegungen zur Aufgabe $60 : 0$.
- Wenn irgendeine natürliche Zahl durch null geteilt werden soll, dann … .
  Notiere eine logische Fortsetzung.

19. Helmut rechnet eine Aufgabe:

$$(100 - 2 \cdot 10) \cdot (74 : 2 - 37) = 80 \cdot 0$$

(a) Überprüfe, ob seine Rechnung bis dahin stimmt.

(b) Helmut rechnet weiter: $80 \cdot 0 = 80$.
Beate hat zugeschaut. Sie meint: „Das kann aber nicht stimmen.“ Erkläre anhand eines Beispiels oder einer kleinen Geschichte, dass Beate Recht hat.

(c) Ursula rechnet anders, nämlich $80 \cdot 0 = 0$. Zur Probe rechnet sie die Umkehraufgabe: $0 : 0 = 80$. Notiere deine Überlegungen zu $0 : 0 = 80$.

20. Fülle das Malkreuz vollständig aus:

•		
	26	39
		51

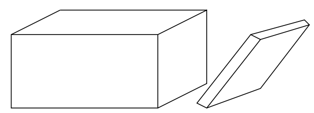
21.
- Notiere eine fünfstellige Zahl.
- Streiche die mittlere Ziffer. Dadurch entsteht eine neue, vierstellige Zahl.
- Subtrahiere die vierstellige von der fünfstelligen Zahl.

(a) Notiere einen möglichst großen Teiler des Differenzwertes.

(b)
- Wiederhole die Einzelschritte mit einer anderen fünfstelligen Zahl. Notiere wieder einen möglichst großen Teiler.
- Vergleiche dein Ergebnis mit dem deiner Banknachbarn.
- Ist das immer so? Begründe.

(c) Tim behauptet: „Da kannst du mit jeder beliebigen natürlichen Zahl experimentieren. Dieser Teiler stellt sich dann stets ein.“
Erna widerspricht: „Das stimmt nicht immer. Die Stellenzahl muss … . Wenn das aber der Fall ist, dann stoßen wir stets auf diesen großen Teiler.“
- Welcher Inhalt steckt in den drei Punkten? Notiere den vollständigen Satz.
- Begründe, dass Erna mit den Teiler Recht hat.

22.



Im altägyptischen „Papyrus Rhind“ (ca. 1650 v.Chr.) wird die Frage aufgeworfen, wie neun Brote auf zehn Personen gerecht aufgeteilt werden können.

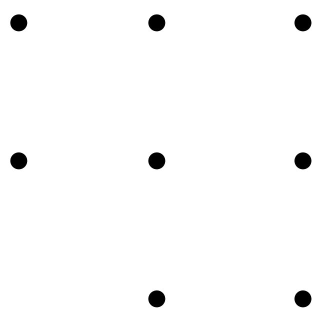
(a) Egon meint: „Das ist doch nicht schwer; man muss halt $\frac{9}{10}$ eine jeden Brotes abmessen und dann alles verteilen.“ Edwin hat jedoch Einwände: „Dann bekäme am Ende eine Person . . . .“
Welches Problem hat Edwin erkannt?

(b) Die Alten Ägypter zerlegten $\frac{9}{10}$ in eine Summe aus verschiedenen Brüchen:

$$\frac{9}{10} = \bigcirc + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}$$

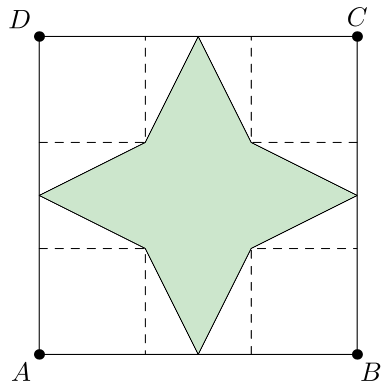
- Welcher Bruchteil muss an Stelle des Kreises eingesetzt werden?
- Angenommen, jedes der neun Brote hat die Form eines 30 cm langen Quaders.
  Wie würden solche Brote dann zerlegt? Hältst du diese Teilung für besser als den Vorschlag von Egon? Begründe deine Anwort.

23.



Wie viele Quadrate kannst du erzeugen, wenn du Punkte im Gitter durch Strecken verbindest?
Aus: Känguru der Mathematik 2008, Gruppe Kadett, Österreich 31.03.2008

24.

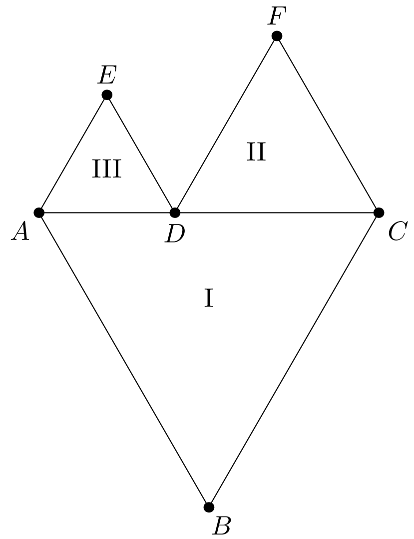


Jede Seite des Quadrates $ABCD$ ist in drei gleiche Teile geteilt worden. Dadurch ist der symmetrische vierzackige Stern entstanden.

(a) Zeichne den Stern in ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm.

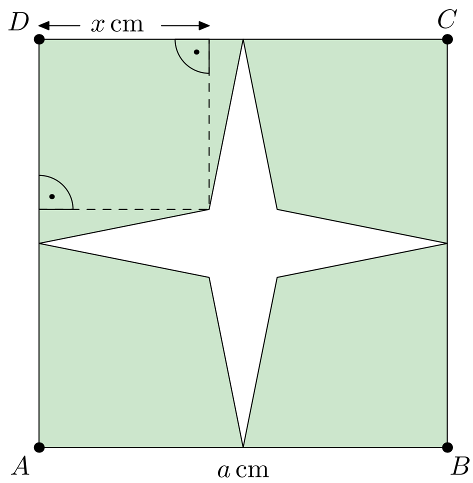
(b) Welchen Bruchteil der Quadratfläche nimmt der Stern ein?

25.



Die Figur setzt sich aus drei jeweils gleichseitigen Dreiecken zusammen.
Der Umfang u_{I} des Dreiecks ABC beträgt $16,8\,\mathrm{cm}$ und der Umfang u_{II} des Dreiecks DCF beträgt $14,1\,\mathrm{cm}$. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Berechne den Umfang u_{III} des Dreiecks ADE.

26.



Der Stern in der Mitte entsteht, wenn du wie am Punkt D gezeigt, auch anden drei anderen Eckpunkten ein Qadrat mit den gestrichelten Hilfslinien einzeichnest.

(a) Zeichne für $x = 2$ den Stern in ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 6 cm.

(b) Welchen Bruchteil der Quadratfläche nimmt der Stern ein?

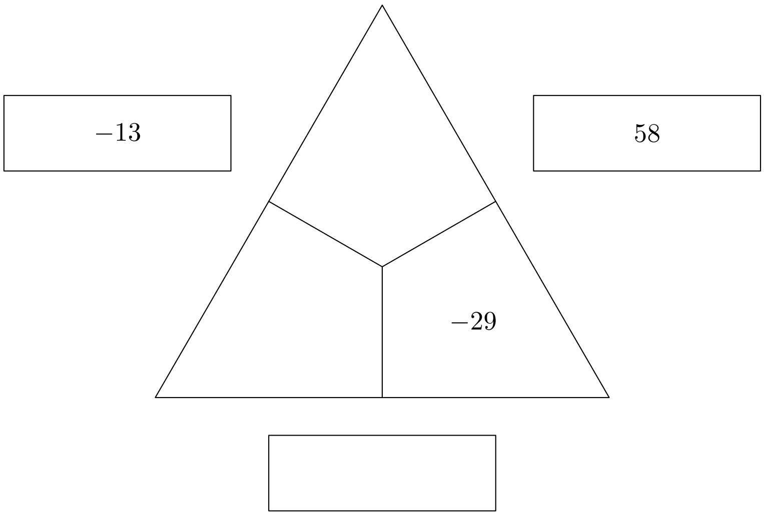
27. Dr. Stuart Savory hat eine Regel veröffentlicht, wie man überprüfen kann, ob eine natürliche Zahl (z.B. 1295) durch 7 teilbar ist:

- Streiche die letzte Ziffer (im Beispiel die „5“, das ergibt 129).
- Subtrahiere das Doppelte der gestrichenen Zahl von der Restzahl: $129 - 2 \cdot 5 = 119$.
- Wenn 119 durch 7 teilbar ist dann ist auch 1295 durch 7 teilbar. Das ist hier der Fall.
- Wenn du nicht mit einer gewöhnlichen Division ausrechenen willst, ob 119 durch 7 teilbar ist, kannst du jetzt das Experiment wiederholen:
  $11 - 2 \cdot 9 = 11 - 18 = -7$ und $\mid -7 \mid = 7$ ist durch 7 teilbar. (Für negative Zahlen ist die Division durch 7 kaum in Gebrauch; daher die Betragsstriche.)

(a) Überprüfe mit dieser Regel die folgenden Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 7: 1386; 1814; 4648; 4873; 5096; 4473; 44 730 und schließlich 1 000 007.
Für die beiden letzten Zahlen kannst du auch ohne die Regel eine Entscheidung treffen.

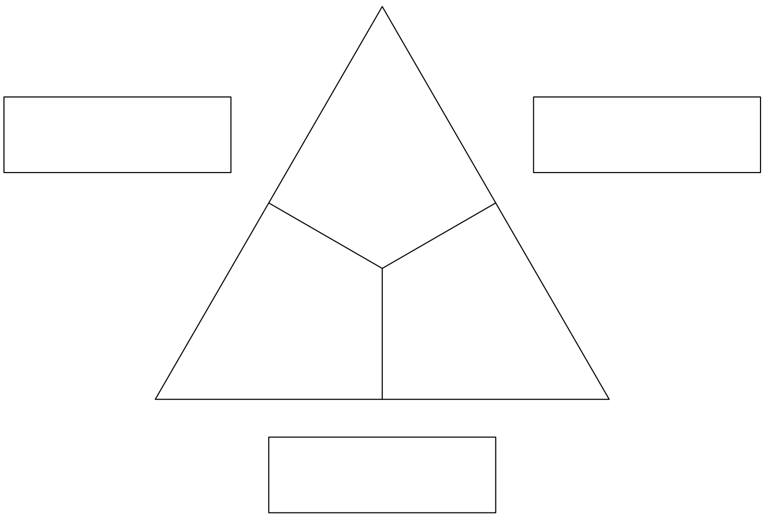
(b) Diese Teilbarkeitsregel von Dr. Savory zu lernen, ist im Schullehrplan nicht vorgesehen. Welchen Grund könnte das haben? Formuliere eine Antwort.

28.



In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke der Wert der Summe aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Zahlen.

29.



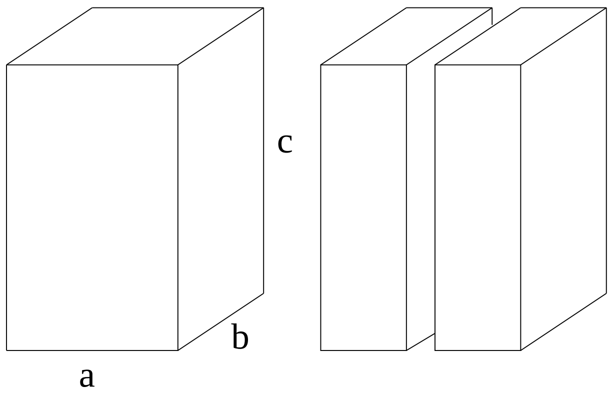
In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke das Produkt aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Wir nennen die Plätze, die mit ganzen Zahlen zu belegen sind, „Zellen“. Das Dreieck enthält drei Zellen und die Rechtecke außen stellen drei weitere Zellen dar.
Untersuche, ob die folgenden Behauptungen wahr sind:

(a) Wenn eine Dreieckszelle mit null belegt ist, dann muss in zwei Außenzellen null stehen.

(b) Wenn eine Außenzelle mit null belegt ist, dann muss eine weitere Außenzelle null enthalten.

(c) Wenn in allen Außenzellen null steht, dann enthalten auch die inneren Dreieckszellen lauter Nullen.

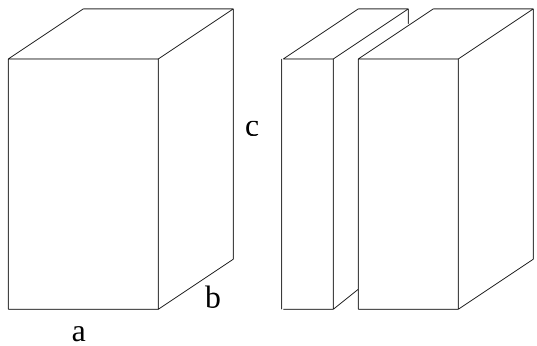
30.



Ein quaderförmiger Holzklotz mit $a = 2\,\mathrm{dm}$, $b = 2,5\,\mathrm{dm}$ und $c = 3\,\mathrm{dm}$ wird mit einer Axt so halbiert, wie es die obige Darstellung zeigt.

(a) Um wie viel Prozent hat sich jetzt die Oberfläche der beiden Hälften im Vergleich zu der des massiven Holzklotzes vergrößert? Gib den Prozentsatz auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet an.

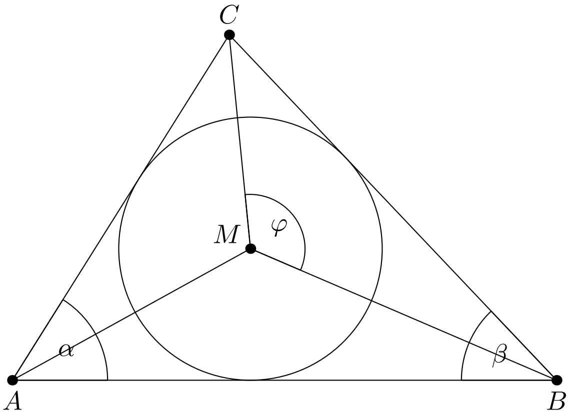
(b)



Hätte sich am Rechenergebnis der Aufgabe (a) etwas geändert, wenn die Axt nicht die Mitte getroffen hätte? Begründe deine Antwort.

31. Früher hatte eine Schachtel Lebkuchen der Firma „Timz“ 1500 g Inhalt.
Für das kommende Weihnachtsgeschäft kommen nur noch 1200 g in eine Schachtel, die aber das Gleiche kostet wie früher die mit 1500 g Inhalt.
Um wie viel Prozent hat die Firma „Timz“ ihre Lebkuchen verteuert?

32.



Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist der Punkt M.

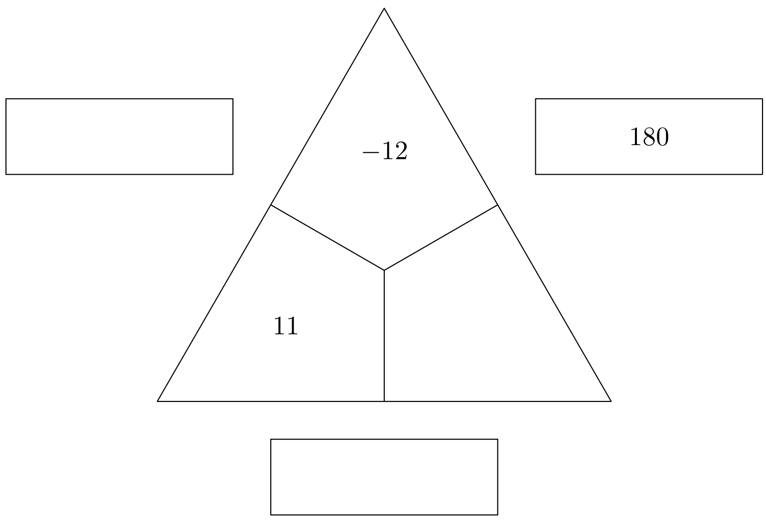
(a) Zeichne die Figur für $\alpha = 70°$, $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 44°$.

(b) Berechne das Maß φ des Winkels BMC.

(c)
- Berechne für $\beta = 60°$ erneut das Winkelmaß φ.
  Was fällt dir auf?
- Zeige: $\varphi = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$.

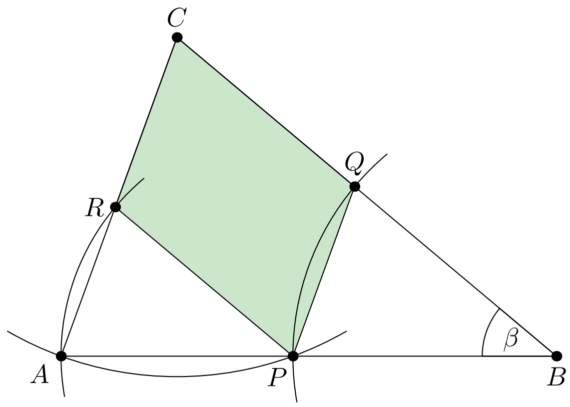
(d) Berechne α für $\varphi = 135,68°$.

33.



In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke der Wert des Produktes aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Zahlen.

34.



In der obigen Figur gilt: $\overline{AB} = \overline{BC}$. Die Punkte C, P und B sind jeweils die Mittelpunkte der betreffenden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe: das Viereck $PCQR$ ist ein Parallelogramm.

35. Egon bildet die Spiegelzahlen von zweiziffrigen Zahlen, indem er deren Ziffern jeweils vertauscht. Dann errechnet er vom jeweilgen Zahlenpaar die Summe, z.B. so:
$13 + 34 = 44$ oder $81 + 18 = 99$ oder $25 + 52 = 77$.
„Komisch, der Summenwert besteht stets aus zwei gleichen Ziffern. Ist das immer so?“, fragt er seinen Vater. Der antwortet: „Nein, finde selbst ein Gegenbeispiel.“
Egon rechnet und entdeckt sogar mehrere Gegenbeispiele.

(a) Finde zwei Beispiele dafür, dass der Summenwert nicht aus lauter gleichen Ziffern bestehen muss.

(b)
- Egon betrachtet die Summenwerte seiner Beispiele in der Aufgabe (a) genauer und entdeckt einen Zusammenhang zwischen den Ziffern. Welcher ist das?
- Jede zweiziffrige Zahl lässt sich als Term in der Form $10a + b$ darstellen, wobei $a \in \{1; 2; \ldots 9\}$ und $b \in \{0; 1; 2; \ldots 9\}$ gilt.
  - Zeige mit Hilfe des obigen Terms, dass jeder Summenwert aus einer zweiziffrigen Zahl und ihrer Spiegelzahl stets durch 11 teilbar ist.
  - Wenn du die beiden Ziffern der ursprünglichen zweiziffrigen Zahl auf geeignete Weise kombiniertst, dann erhältst du neben der 11 einen weiteren Teiler des Summenwertes.

(c) Ermittle alle Paare aus einer zweistelligen Zahl und ihrer Spiegelzahl, deren Summenwert 143 beträgt.

36. Für alle Ungleichungen gilt: $G = \mathbb{Q}$.
    (a) Berechne die Lösungsmenge von $2x - 4 > 0$.
    (b) Beründe ohne nach x aufzulösen: Die Ungleichung $6x - 12 > 0$ hat die gleiche Lösungsmenge wie die Ungleichung in der Aufgabe (a).
    (c) Bestimme die Lösungsmenge von $1387 \cdot (2x - 4) > 0$.
    (d) Bestimme die Lösungsmenge von $(x^2 + 1) \cdot (2x - 4) > 0$.
    (e) Bestimme die Lösungsmenge von $(x - 11)^2 \cdot (2x - 4) > 0$.

37. Jede zweistellige natürliche Zahl lässt sich durch den Term $10a + b$ darstellen, wobei a und b die Ziffern sind.
    Beispiel: $75 = 10 \cdot 7 + 5$; also gilt $a = 7$ und $b = 5$.
    Unter der Quersumme q einer natürlichen Zahl versteht man die Summe aus ihren einzelnen Ziffern. In unserem Beispiel ist $q = 7 + 5 = 12$.
    (a)
    - Subrahiere von der Zahl 75 deren Quersumme.
    - Notiere die Menge aller Teiler des Differenzwertes.

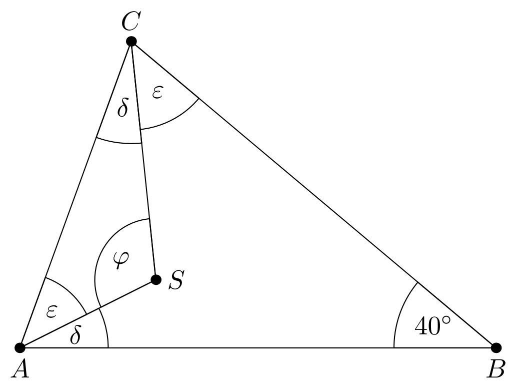
    (b)
    - Wiederhole die vorigen Schritte mit der Zahl 59.
    - Bestimme den ggT aus beiden Teilermengen.

    (c)
    - Wiederhole die Rechenschritte mit einemr selbst gewählten zweistelligen Zahl.
    - Was stellst du fest?
    - Gilt deine Feststellung für alle zweistelligen Zahlen? Begründe deine Antwort.

    (d)
    - Experimentiere mit dreistelligen Zahlen.
    - Begründe: Subtrahiert man von einer dreistelligen deren Quersumme, so ist der Differnzwert stets durch 9 teilbar.

    (e) Gilt das für jede beliebige natürliche Zahl? Begründe.

38.

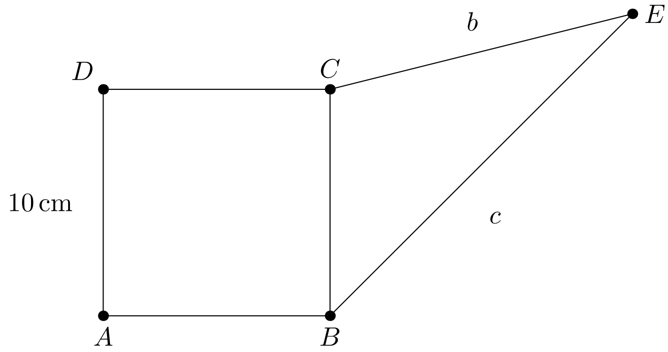


(a) Begründe: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

(b) Zeichne das Dreieck ABC für $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$.

(c) Berechne das Maß φ des Winkels CSA im Dreieck ABC.

39.



Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Der Umfang des Dreiecks BEC ist doppelt so groß wie der Umfang des Quadrates $ABCD$.
Berechne den Umfang der Gesamtfigur.

40. Franz soll die Anzahl n von natürlichen Zahlen bestimmen, die zwischen zwei natürlichen zahlen x und y mit $y > x$ liegen.
Nach einigen Rechenbeispielen findet er eine Formel: $n = y - x - 1$. (*)

(a)
- Bestimme mit Hilfe von (*) alle natürlichen Zahlen, die zwischen 69 und 83 liegen.
- Bestätige dein Ergebnis, indem du die in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst.

(b) Berechne die Anzahl der natürlichen Zahlen, die größer als 513 799 und gleichzeitig kleiner als 803 102 sind.

(c) Franz überprüft die Formel (*) jetzt an folgenden Sonderfällen:
- x und y sind unmittelbare Nachbarn.
Gilt die Formel (*) auch hierfür?
- x und y sind ganze Zahlen.
Berechne n für $x = -11$ und $y = 3$ sowie für $x = -39$ und $y = -23$.
Stimmt die Formel auch in diesen beiden Fällen?

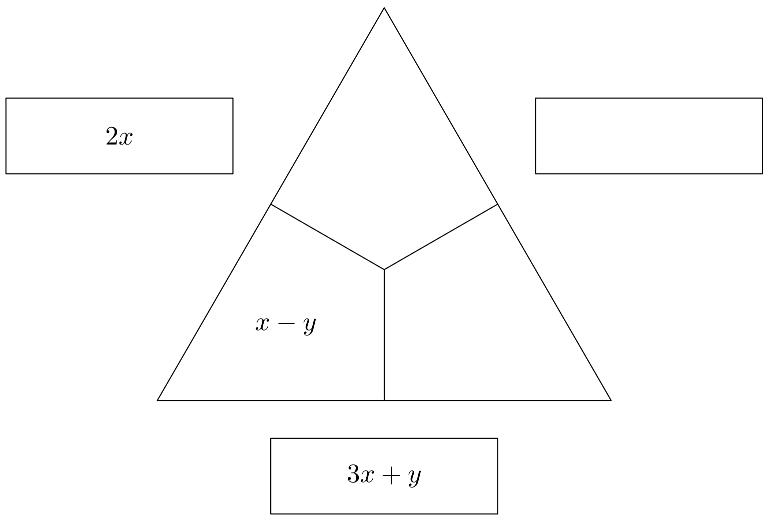
41. Edwin entdeckt in einem Rechenbuch ein Zahlenrätsel:
„Denke dir eine dreistellige Zahl, die durch 10 teilbar ist. Streiche deren letzte Ziffer. Subtrahiere diese neue Zahl von der ursprünglichen dreistelligen Zahl. Dann ist der Differenzwert stets durch die neue Zahl teilbar."

    (a) Bestätige die obige Behauptung an einem selbst gewählten Beispiel.

    (b) Untersuche an einem weiteren Beispiel, ob die Behauptung auch für vierstellige Zahlen gilt.

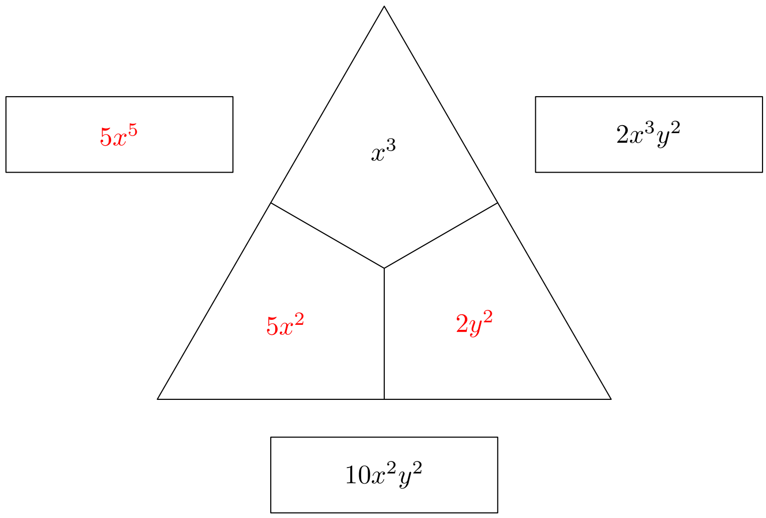
    (c) Edwin hat vieles durchprobiert. Alle seine Rechnungen haben die obige Behauptung bestätigt. Schließlich setzt er für die neue Zahl den Platzhalter x und probiert es allgemein mit x. Er kommt zu dem Schluss „Die Behauptung gilt sogar für alle natürlichen durch 10 teilbaren Zahlen!" Begründe, dass Edwin Recht hat.

42.



In die drei Felder im Dreieck gehören Terme, wobei in jedem der Rechtecke die Summe aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Termen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Terme.

43.



In die drei Felder im Dreieck gehören Terme, wobei in jedem der Rechtecke das Produkt aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Termen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Terme.

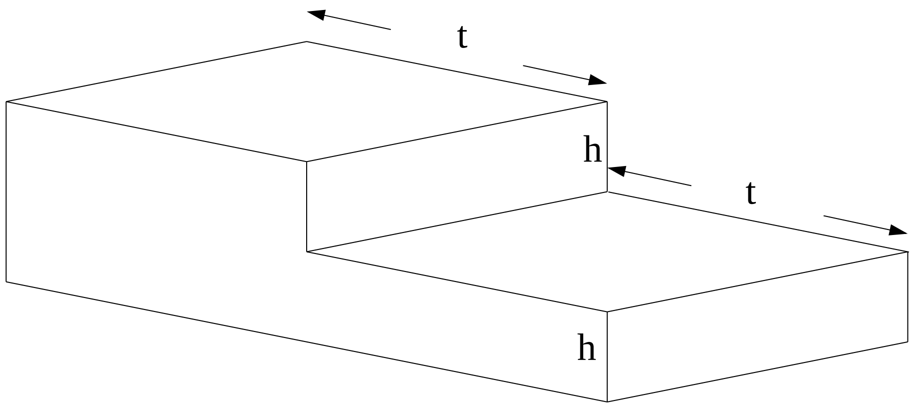
44. Im September 2011 orderte das Kaufhaus X&Y 200 T-Shirts. Davon wurden im gleichen Monat 76 Stück verkauft.
Einen Monat später verteuerte sich dieser Artikel um je einen EURO. In diesem Zeitraum wurden jedoch nur 72 Exemplare verkauft. Es stellte sich heraus, dass die Einnahmen aus dem Verkauf von diesen T-Shirts im Oktober die gleichen waren wie die im September 2011 .
Berechne den Verkaufpreis eines T-Shirts im September 2011 .

45. Carsten rechnet eine Gleichung aus, die er aus dem Buch übertragen hat. Der Lehrer betrachtet seinen Hefteintrag: „Deine Schrift ist wie schon so oft zum Teil unleserlich, aber dein Ergebnis ist richtig."
In seinem Heft steht (der unleserliche Teil ist durch ein Kästchen ersetzt):

$$\begin{aligned} 2x - \square &= -2 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Ermittle auf zwei verschiedene Arten, was im Buch anstelle des Kästchens stand.

46.



„Die magische Zahl für Treppen lautet 63 Zenimeter. So viel beträgt das Schrittmaß, das für eine gute Begehbarkeit steht. ... Das Schrittmaß errechnet sich nach folgender Formel: Zweimal die Stufenhöhe h plus einmal die Stufentiefe t gleich 63 Zentimeter.“
Quelle: Nordbayerischer Kurier vom 12. Sept 2010, S. 22

(a) Stelle eine Formelgleichung auf, die das Schrittmaß von 63 cm im Zusammenhang mit der Stufenhöhe h und der Stufentiefe t beschreibt.

(b) Herr Feust will nach dieser Formelgleichung eine Steintreppe vom Haus zum Garten anlegen. Er meint: „Je niedriger die Stufenhöhe wird, desto länger fällt nach dieser Formelgleichung die Stufentiefe aus.“
Bestätige diesen Sachverhalt mit einem Zahlenbeispiel.

(c) Im Haus der Familie Feust wohnen auch die schon etwas gebrechlichen Eltern von Frau Feust. Daher wird festgelegt, dass die Stufenhöhe 16 cm nicht überschreiten darf. Berechne das zugehörige Mindestmaß der Stufentiefe.

(d) Während der Arbeiten schaut Nachbar Tufes, der alles besser weiß, interessiert zu: „Ich hätte einfach Stufentiefe = Stufenhöhe gewählt.“ Was meinst du dazu? Begründe deine Antwort.

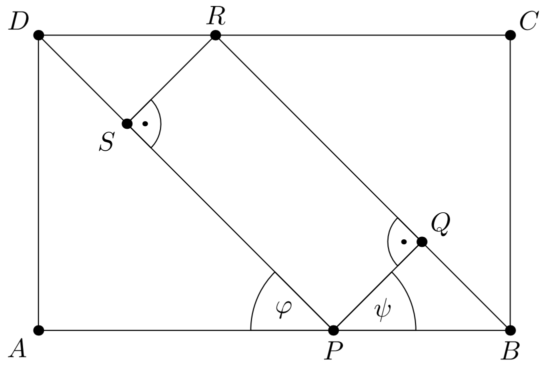
(e) Wie lang wird die gesamte Treppe, wenn sie bei einer Stufenhöhe von 15 cm vom Haus bis in den Garten eine Höhendifferenz von 1, 20 m überwindet?

47. (a) Zeichne ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 75°$ und $\beta = 40°$.

(b)
- Spiegle den Punkt A am Punkt C. Sein Spiegelbild ist der Punkt A' .
- Spiegle den Punkt A' an der Halbgeraden $[BC$. Sein Spiegelbild ist der Punkt A'' .

(c) Begründe:
- Das Dreieck ACA'' ist gleichschenklig.
- Das Dreieck $AA'A''$ ist rechtwinklig.

48.



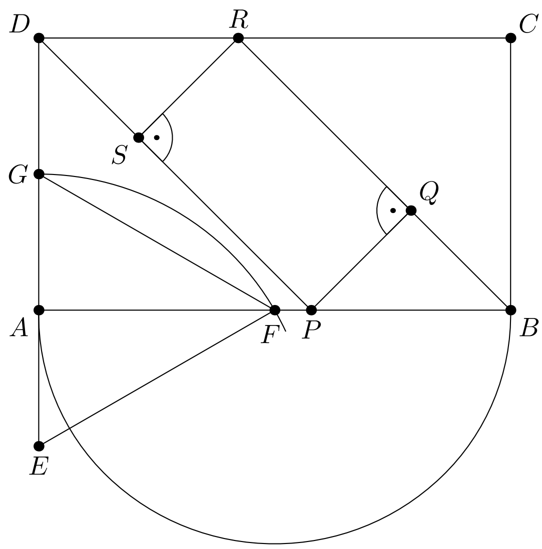
Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ und $\overline{BC} = \overline{AD} = b$. Für das einbeschriebene Rechteck $PQRS$ gilt: $\overline{AP} = \overline{RC} = b$.

(a) Zeichne die Figur für $a = 8\,\text{cm}$, und $b = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: $\varphi = \psi = 45°$.

(c) Berechne in deiner Zeichnung den Anteil der Fläche des Rechtecks $PQRS$ am Rechteck $ABCD$ in Prozent.

(d)



In der obigen Figur gilt:
– Der Punkt G halbiert die Seite $[AD]$.
– Das Dreieck EFG ist gleichseitig.
– Der Punkt E ist der Mittelpunkt des Kreisbogens durch den Punkt F.
– Der Punkt F ist der Mittelpunkt des Halbkreises mit dem Durchmesser $[AB]$.

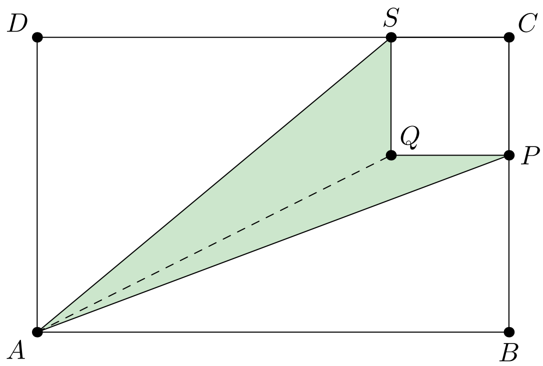
- Zeichne die Figur für $b = 6\,\text{cm}$.
- Berechne erneut den Flächenanteil des Rechtrecks $PQRS$ am Rechteck $ABCD$ in Prozent.

(e) Es gilt allgemein: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot(a-b)\cdot(3b-a)}{ab} = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(3\dfrac{b}{a}-4+\dfrac{a}{b}\right)$.

Setzen wir $\dfrac{b}{a}=k$, so ergibt sich weiter: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(3k-4+\dfrac{1}{k}\right) = T(k)$.

- Zeige, dass der Term $T^*(k) = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\sqrt{3k}\right)^2 + 2-\sqrt{3}$ und $T(k)$ äquivalent sind.
- Berechne diejenige Belegung von k, für die das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Rechtecke $PQRS$ und $ABCD$ maximal wird. Gib das maximale Flächenverhältnis in Prozent an.
- Begründe: Die Konstruktion in der Aufgabe (d) liefert dieses Maximum.

49.



Aus dem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ und $\overline{BC}=\overline{AD}=b$ werden Quadrate mit der Seitenlänge x herausgeschnitten. Dadurch entstehen Vierecke $AP_nQ_nS_n$.

(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ für $a=8\,\text{cm}$, $b=5\,\text{cm}$ und das Viereck $AP_1Q_1S_1$ für $x=2\,\text{cm}$.

(b) Gib alle Belegungen von x an, für die es solche Vierecke $AP_nQ_nS_n$ gibt.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Vierecke $AP_nQ_nS_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

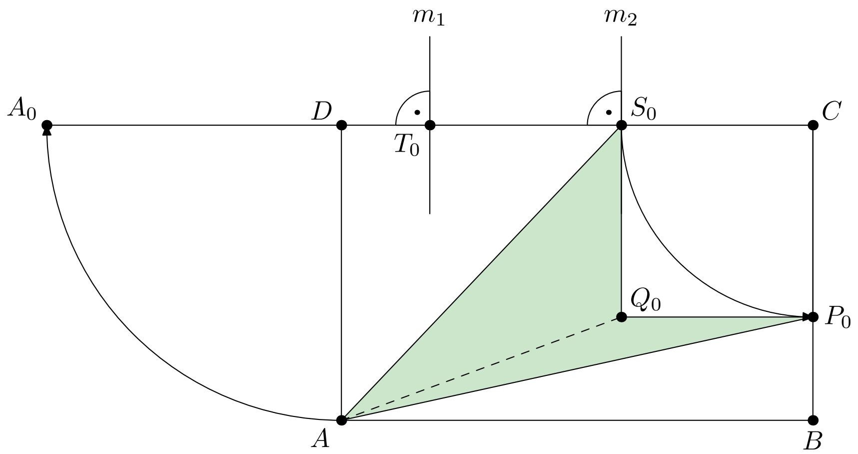
$$A(x) = -x^2+\frac{1}{2}(a+b)\cdot x$$

Tipp: Deute die Strecken $[P_nQ_n]$ und $[Q_nS_n]$ jeweils als Grundlinien der Teildreiecke AP_nQ_n bzw. AQ_nS_n.

(d) Unter allen Vierecken $AP_nQ_nS_n$ gibt es das Viereck $AP_0Q_0S_0$, dessen Flächeninhalt maximal ist.

Zeige, dass $x=\dfrac{1}{4}(a+b)$ das Viereck $AP_0Q_0S_0$ liefert.

(e)

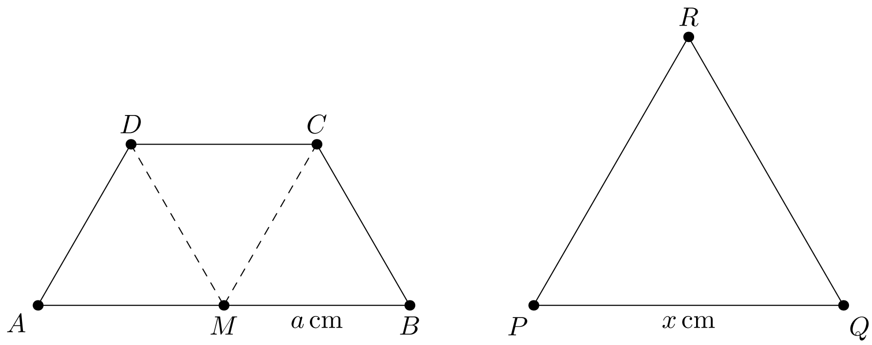


In der obigen Figur gilt:

- Der Punkt D ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von Punkt A zum Punkt A_0.
- Der Punkt C ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von Punkt P_0 zum Punkt S_0.
- Der Punkt T_0 ist der Mittelpunkt der Strecke $[A_0C]$.
- Der Punkt S_0 ist der Mittelpunkt der Strecke $[T_0C]$.

Begründe anhand dieser Konstruktion, dass das Viereck $AP_0Q_0S_0$ dasjenige mit dem maximalen Flächeninhalt ist.

50.



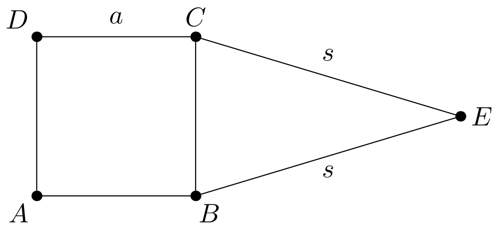
Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ ist aus drei kongruenten gleichseitigen Dreiecken mit der jeweiligen Seitenlänge von $a\,\text{cm}$ zusammengefügt worden. Dieses Trapez und das gleichseitige Dreieck PQR mit der Seitenlänge $x\,\text{cm}$ sollen den gleichen Umfang besitzen.

(a) Zeige, dass dann $x = \dfrac{5}{3}a$ gilt.

(b) Berechne das Verhältnis der Flächen der beiden Figuren.

(c) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ größer als der des Dreiecks PQR?

51.



Die Figur $ABECD$ setzt sich aus dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a und dem gleichschenkligen Dreieck BEC mit $\overline{BE} = \overline{CE} = s$ zusammen. Das Dreieck BEC und das Quadrat $ABCD$ haben den gleichen Umfang.

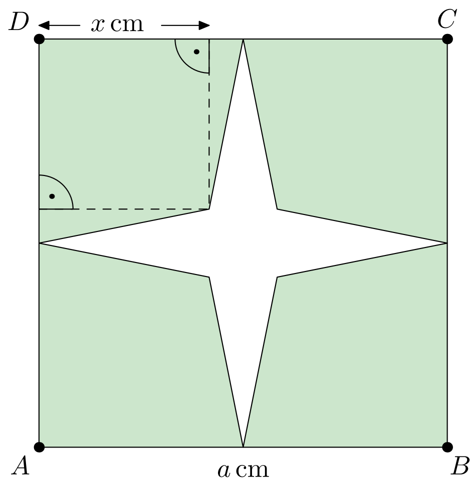
(a) Zeige: Es muss $s = 1,5a$ gelten.

(b) Zeichne die Fgur für $a = 3\,\text{cm}$.

(c) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte des Dreiecks BEC und des Quadrates $ABCD$ in Prozent.

(d) Wie lang müsste die Schenkellänge s sein, damit die Flächeninhalte des Quadrates $ABCD$ und des Dreiecks BEC gleich groß werden?

52.



Schneidet man aus dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a\,\text{cm}$ die vier getönten kongruenten Vierecke weg, so bleibt der weiße Stern im Zentrum übrig.

(a) Zeichne die obige Figur für $a = 6$ und $x = 2,5$.

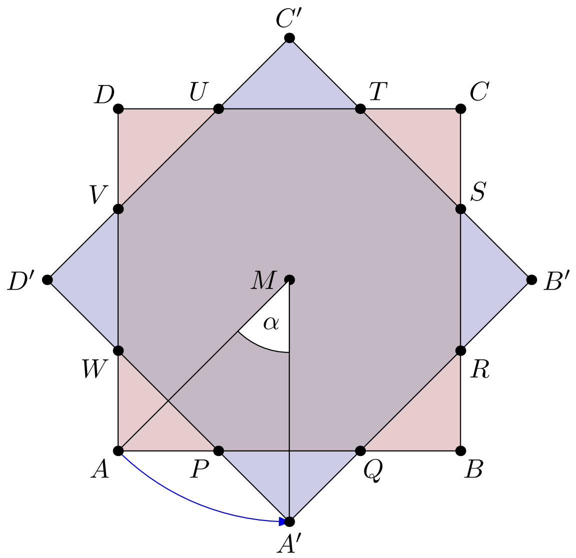
(b) Begründe: Jedes dieser vier getönten kongruenten Vierecke ist ein Drachenviereck.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A des weißen Sterns gilt in Abhängigkeit von x:
$$A(x) = (36 - 12x)\,\mathrm{cm}^2$$
.

(d)
- Berechne $A(3)$ und deute dein Ergebnis mit Hilfe der Zeichnung.
- Berechne $A(1,5)$ und deute dein Ergebnis mit Hilfe der Zeichnung.

(e) Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Sterns $3,6\,\mathrm{cm}^2$ beträgt.

53.



Das Quadrat $A'B'C'D'$ ist dadurch entstanden, dass das Quadrat $ABCD$ um seinen Mittelpunkt M um einen Winkel mit dem Maß α so gedreht worden ist, dass bestimmte Symmetrieachsen vom Ur- und vom Bildquadrat zur Deckung kommen.

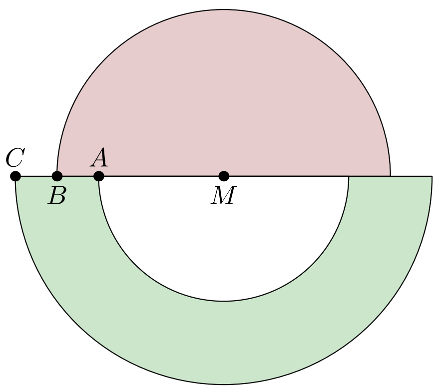
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 8\,\mathrm{cm}$.

(b) Wie groß ist α? Begründe deine Antwort.

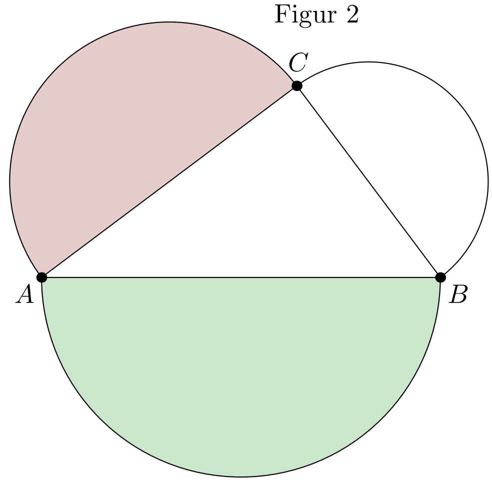
(c)
- Ist das Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig?
- Berechne den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUVW$.

54.

Figur 1



Figur 2

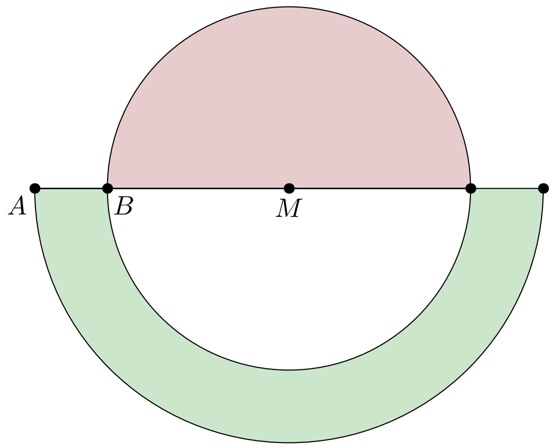


(a) Zeichne die Figur 1 für $\overline{MA} = 3,6\,\text{cm}$, $\overline{MB} = 4,8\,\text{cm}$ und $\overline{MC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Zeige ohne zu runden, dass der untere Kreisring und der obere Halbkreis den gleichen Flächeninhalt besitzen.

(c)
- Zeichne die Figur 2 für $c = \overline{AB} = 12\,\text{cm}$, $a = \overline{BC} = 7,2\,\text{cm}$ und $b = \overline{AC} = 9,6\,\text{cm}$.
- Begründe: Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.
- Notiere den Zusammenhang zwischen den drei Halbkreisflächen in der Figur 2 in Form einer Gleichung.
- Was hat die Figur 2 mit der Figur 1 zu tun? Beschreibe deine Idee.

55.



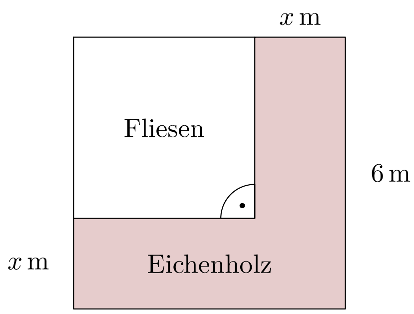
(a) Zeichne die Figur für $R = \overline{MA} = 5,6\,\text{cm}$ und $r = \overline{MB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Zeige, dass der untere Kreisring und der obere Halbkreis nicht denselben Flächeninhalt besitzen.

(c) Jetzt sei $r = \sqrt{18}\,\text{cm}$.
Berechne R so, dass der Inhalt der beiden getönten Flächen gleich ist.

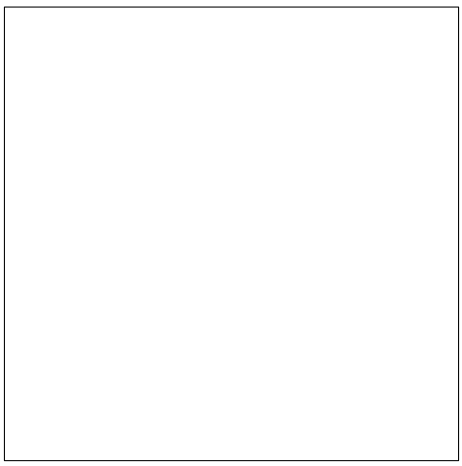
(d) Welcher Zusammenhang muss zwischen R und r bestehen, damit die getönten Flächen gleichen Inhalt besitzen?

56.



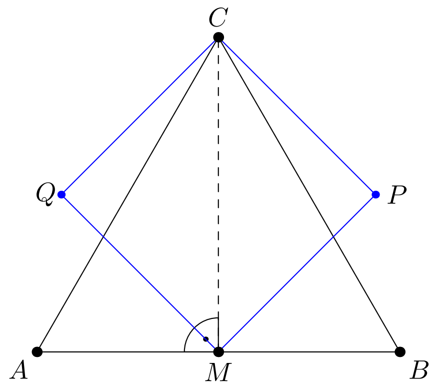
Der quadratische Boden eines Badezimmers mit einer Seitenlänge von 6 m ist einerseits gefliest, anderserseits mit Eichenbrettern L-förmig verlegt worden. Das „L“ hat eine Breite von $x\,\text{m}$.
Die Fläche aus Holz ist halb so groß wie die gesamte Bodenfläche.

(a) Zeige: $x = 6 - 3\sqrt{2}$.

(b)
- 

  In welchem Maßstab ist der Grundriss des Badezimmers in der obigen Figur dargestellt?
- Konstruiere mit Zirkel und Lineal in diesen Grundriss maßstabgerecht die Streckenlänge $x\,\text{m} = (6 - 3\sqrt{2})\,\text{m}$.
  Tipp: $6 - 3\sqrt{2} = 6 - 0,5 \cdot 6\sqrt{2}$.
- Vervollständige damit die Flächenaufteilung des Badezimmers.

57.



Das Dreieck ABC ist gleichseitig. Das Viereck $MPCQ$ ist ein Quadrat.

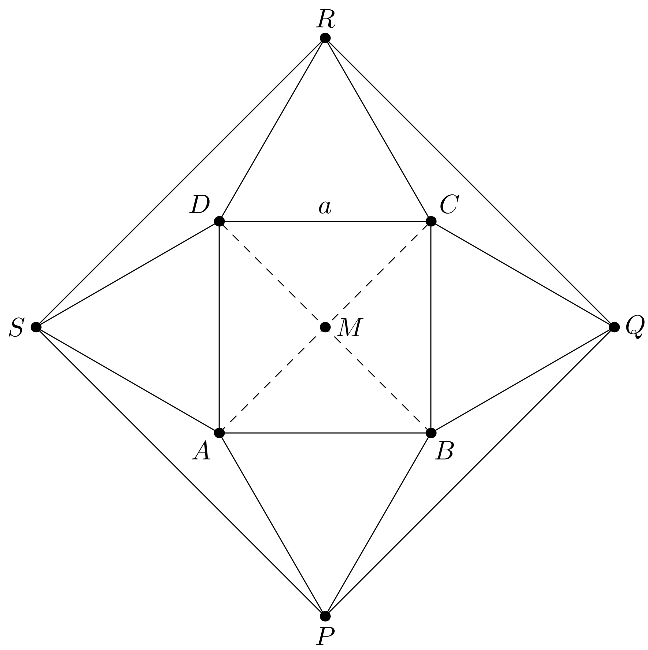
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\mathrm{cm}$.

(b) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC größer als der des Quadrates $MPCQ$?

(c) Im Inneren des Dreiecks ABC liegt ein Viereck.
Um welches besondere Viereck handelt es sich? Begründe deine Antwort.

(d) Zeige: Für den Umfang u des gezeichneten Quadrates $MPCQ$ gilt:
$u = 6\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$.

58.



Das Viereck $PQRS$ ist dadurch entstanden, dass man über den vier Seiten des Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a jeweils gleichseitige Dreiecke errichtet hat.

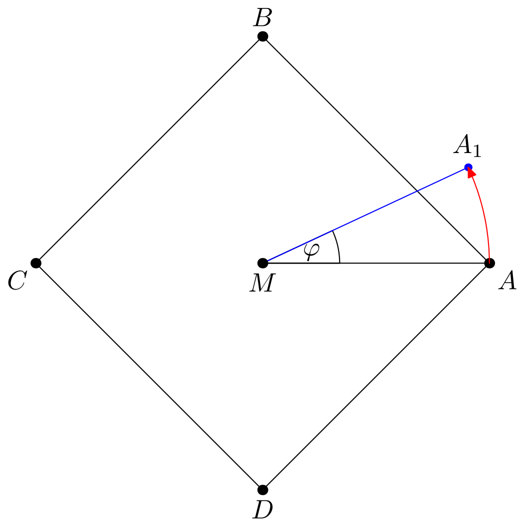
(a) Zeichne die Fgur für $a = 4\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat.
Hinweis: Zeige, dass z.B. $\sphericalangle APS = 15°$ gilt.

(c) Zeige auf verschiedene Weise: Für den Flächeninhalt A des Vierecks $PQRS$ gilt:
$$A_{PQRS} = a^2(2 + \sqrt{3})$$

(d) Berechne den prozentualen Flächenanteil des Quadrates $ABCD$ am Viereck $PQRS$.

59.



Gegeben ist das Quadrat $ABCD$ mit dem Mittelpunkt M und der Diagonalenlänge $d = 10\,\text{cm}$.
Dieses Quadrat wird nun um den Mittelpunkt M mit dem Winkel φ gedreht, wobei $\varphi \in]0°; 90°[_{\mathbb{R}}$ gilt.
Dadurch entstehen zum einen Quadrate $A_nB_nC_nD_n$ und zum anderen Achtecke $AA_nBB_nCC_nDD_n$.

(a)
- Zeichne das Quadrat $ABCD$ und seinen Umkreis.
- Zeichne für $\varphi = 25°$ das Quadrat $A_1B_1C_1D_1$ farbig ein.
- Zeichne dazu das Achteck $AA_1BB_1CC_1DD_1$ in einer anderen Farbe.

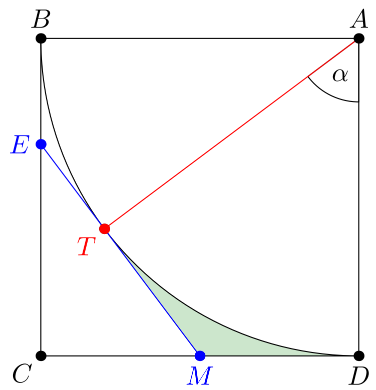
(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Achtecke $AA_nBB_nCC_nDD_n$ gilt in Anbhängigkeit von φ:
$$A(\varphi) = 50 \cdot (\sin\varphi + \cos\varphi)\,\text{cm}^2$$

(c)
- Begründe rechnerisch: Es gilt ebenfalls

$$A(\varphi) = \frac{50}{\cos 45^\circ}\,(\sin\varphi \sin 45^\circ + \sin 45^\circ \cos\varphi)\,\mathrm{cm}^2$$

- Vereinfache den in der obigen Zeile dargestellten Term für $A(\varphi)$ so weit wie möglich. Der Nenner vor der Klammer soll dabei rational werden.
- Unter allen Achtecken $AA_nBB_nCC_nDD_n$ gibt es das Achteck $AA_2BB_2CC_2DD_2$, dessen Flächeninhalt maximal wird.
  Berechne dieses Maximum und die zugehörige Belegung von φ.
- Berechne den Umfang u des flächengrößten Achtecks ohne zu runden.
  Zeige: $u = 40 \cdot \sqrt{\ldots}$ cm

60.



Dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 6\,\mathrm{cm}$ ist ein Viertelkreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius a einbeschreiben worden. Der Mittelpunkt der Seite $[CD]$ ist M.
Weiter gilt: $\overline{BE} = 2\,\mathrm{cm}$.
Hinweis: Alle Rechenergebnisse sind auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne das Quadrat $ABCD$, den Viertelkreis und die Strecke $[EM]$.

(b)
- Zeige durch Rechnung: $\overline{EM} = 5\,\mathrm{cm}$.
- Begründe: Die Strecke $[ME]$ berührt den Kreisbogen in einem Punkt T.
  Tipp: Wenn der Punkt T Berührpunkt sein soll, dann müssen gleichzeitig die beiden Vierecke $MDAT$ und $BETA$ besondere Vierecke sein.
- Zeichne die Strecke $[AT]$ ein.

(c) Berechne das Maß α des Winkels TAD.

[Teilergebnis: $\frac{\alpha}{2} \approx 26{,}57^\circ$]

- Zeichne den Diagonalenschnittpunkt F des Vierecks $MDAT$ ein.
- Berechne den Inhalt der in der Eingangsfigur getönten Fläche.

[Teilergebnis: $\overline{FD} \approx 2{,}68\,\mathrm{cm}$]

3 Neue Aufgaben, Oktober 2012

1. Erfinde 10 Divisionsaufgaben, wobei jeweils nur die drei Ziffern 0, 5 und 7 mindestens einmal vorkommen. Bei der anschließenden Division darf kein Rest bleiben.

2. Die Schülerinnen und Schüler der 5a haben die folgenden Aufgaben bekommen:
   $7 \cdot 101 =$ $\quad$ $53 \cdot 101 =$ $\quad$ $964 \cdot 101 =$ $\quad$ $1001 \cdot 101 =$ $\quad$.
   Beim Berechnen der Ergebnisse meint Hans: „Das mit dem zweiten Faktor 101 ist doch eigentlich ganz einfach: Hänge jeweils an den ersten Faktor zwei Nullen an und addiere zu dieser neuen Zahl den ersten Faktor. Dann hast du den Wert des betreffenden Produktes."
   (a) Berechne selbst die vier Produktwerte. Bestätige, dass Hans mit seiner Regel Recht hat.
   (b) Christian behauptet jedoch: „Ja aber wenn der erste Faktor größer als eine Million ist, dann funktioniert die Regel nicht mehr."
   Hat Christian Recht? Begründe deine Antwort.

3. In der Tierhandlung „Katz & Maus" sind 4 schwarze, 13 weiße und 9 graue Mäuse aus einem Käfig geflüchtet.
   Der Chef, Herr Samtpfote, stellt eine Lebendfalle mit Ködern auf. Noch in der Nacht finden sich darin einige der Ausreißer wieder ein. Am Morgen stellt sich heraus, dass von jeder Farbe mindestens eine Maus wieder eingefangen ist. Der Rest rennt noch frei umher.

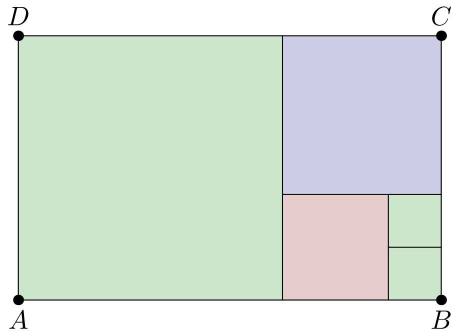
   Notiere im Folgenden für jede Antwort eine Begründung.
   (a) Gib die Mindestzahl der Mäuse an, die bis dahin eingefangen waren.
   (b) Gib die Höchstzahl der Mäuse an, die bis dahin eingefangen waren.
   (c) Wie viele Mäuse mussten mindestens wieder eingefangen worden sein, damit sich Herr Samtpfote sicher sein kann, dass von jeder Farbe mindestens eine Maus dabei ist? Welche Farbe(n) tragen dann die noch in Freiheit befindlichen Tiere?

4. Karl rechnet: $374\,389 \cdot 9 = 3\,349\,501$.

(a) Angela betrachtet das Ergebnis. Sie meint: „Du hast dich verrechnet.“
Begründe ohne den richtigen Produktwert zu berechnen, dass Angela Recht hat.

(b) Angela berechnet das korrekte Ergebnis. Sie entdeckt, dass sich Karl nur an der Zehntausenderstelle vertan hat.
Ermittle die richtige Zehntausenderstelle ohne den ganzen Produktwert zu berechnen.

5.



Das rechteckige Banner $ABCD$ ist aus lauter Quadraten zusammengefügt.

(a) Zeichne die Figur mit ihrem quadratischen Muster im Inneren für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$.

(b)
- Wie viele Quadrate sind es?
- Wie viele Rechtecke sind es?

(c) Das Banner wird aus Stoff zusammengenäht und mit einer goldenen Borte umsäumt.
Berechne die Mindestlänge des Saumes, wenn jedes der beiden kleinsten Quadrate einen Umfang von $24\,\text{cm}$ hat.

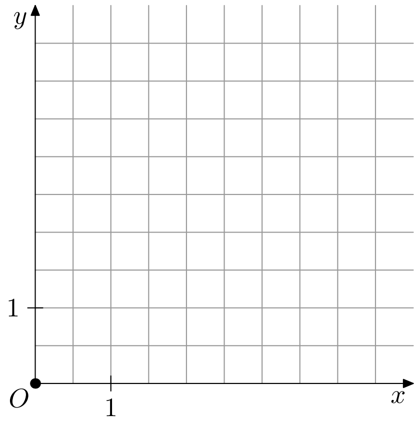
6. Die Summe aus drei natürlichen Zahlen soll 10 ergeben. Notiere alle Möglichkeiten.

7. Zwei natürliche Zahlen x und y sollen zusammen 5 ergeben. In der Tabelle unten steht schon eine Möglichkeit: $x = 2$ und $y = 3$, so dass $x + y = 2 + 3 = 5$ gilt.

(a) Vervollständige die Tabelle entsprechend:

x		2			
y		3			
$(x \mid y)$		$(2 \mid 3)$			

(b) Die Zahlenpare in der dritten Zeile lassen sich als Punkte im Gitternetz deuten.



Trage alle Zahlenpaare der dritten Zeile in das Gitternetz ein.

(c)
- Die Punkte im Gitternetz liegen nicht wild in der Gegend herum. Beschreibe die Lage dieser Punkte:

  ____

  ____

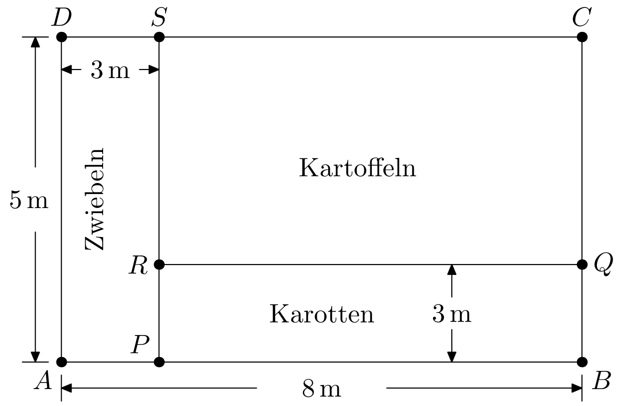
- Mache deine Antwort auch im Gitternetz deutlich.

8. Uwe rechnet:
   $5183 + 4625 + 1078 + 500 = 11\,386$. Die Lehrerin bestätigt sein Ergebnis.
   Doris soll die folgende Aufgabe rechnen:
   $5183 - 500 + 1078 + 4625 =$.
   Sie betrachtet das Ergebnis von Uwe und meint dann: „Da brauche ich doch nur ... ."

   (a) Was hat Doris gemeint? Notiere ihre vollständige Antwort und begründe sie.

   (b) Schreibe das Ergebnis ihrer Rechenaufgabe hin.

9.

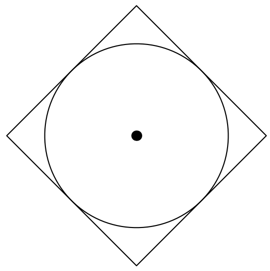


Das rechteckige Feld $ABCD$ ist 8 m lang und 5 m breit.
Auf den drei rechteckigen Parzellen werden Karotten, Zwiebeln und Kartoffeln angebaut. Die beiden Streifen für Karotten und Zwiebeln sind jeweils 3 m breit.
Berechne den Flächeninhalt des Kartoffelfeldes. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

10. Unter der Quersumme QS einer natürlichen Zahl versteht man den Wert der Summe aus ihren Ziffern.
    Beispiel: $QS(409) = 4 + 0 + 9 = 13$.
    (a) Notiere alle natürlichen Zahlen zwischen 9 und 45, die durch ihre Quersumme teilbar sind.
    (b) Emil betrachtet das Ergebnis und meint: „Hier stehen nur Zahlen, die durch 3 oder durch 10 teilbar sind. Das gilt auch bestimmt für alle Zahlen von 10 bis 100.“
    Begründe, dass Emil Recht hat.
    (c)
    - Welche dreistelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 4 sind durch 4 teilbar?
    - Welche dreistelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 7 sind durch 7 teilbar?
    - Welche vierstelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 25 sind durch 25 teilbar?

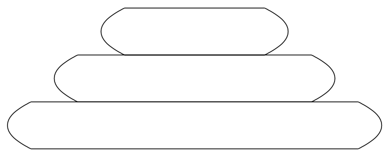
11. Welche Zahl gehört in das Kästchen?
    $6 \cdot 7 \cdot 15 = 10 \cdot \square \cdot 21$

12.



Eine kreisförmige Fensterscheibe ist von einem quadratischen hölzernen Rahmen eingefasst, dessen Gesamtlänge 5 m beträgt.
Welchen Durchmesser hat die Fensterscheibe?

13.

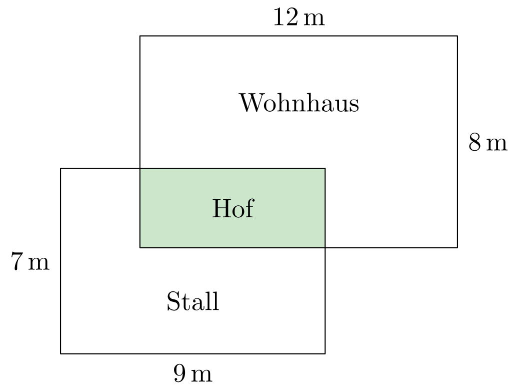


Im Küchenschrank sind drei verschieden große Holzbrettchen rwie in der Zeichnung übereinander gestapelt.
Es handelt sich um ein weißes (w), einen grünes (g) und einen rotes (r) Brettchen. Das weiße Brettchen ist größer als das rote. Wie könnte der Stapel aussehen?

14. In einer Plastiktüte befinden sich 100 gleiche Würfel, deren Kantenlänge jeweils 2 cm beträgt. Alfred will aus diesen Würfeln einen möglichst großen Würfel lückenlos zusammenfügen.
    (a) Wie viele kleine Würfel hat der dann übrig?
    (b) Wie hoch wäre der Turm aus kleinen Würfeln, die den großen Würfel ergeben?

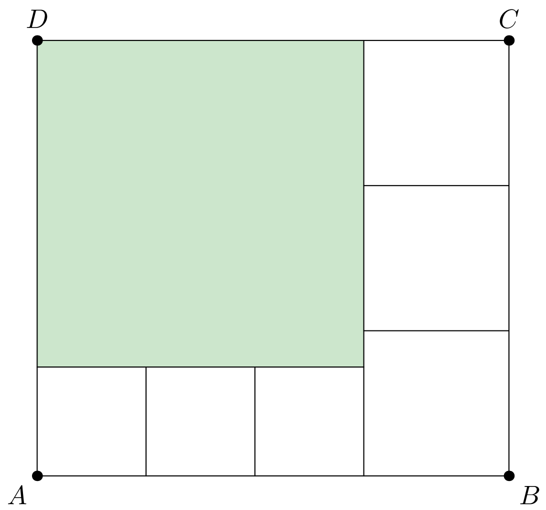
15. Ein halkugelförmiges Glasgefäß mit einer Wandstärke von 5 mm hat ein Fassungsvermögen von 10 l.
    Berechne den Außendruchmesser des Gefäßes in mm.

16.



Die Figur zeigt den Grundriss eines landwirtschaftlichen Anwesens. Die Grundfläche des Stalles beträgt $50\,\mathrm{m}^2$. Berechne die Grundfläche des Wohnhauses.

17.



Der eingefärbte Treppenabsatz ist ein Quadrat dessen Umfang 7m 2 dm beträgt. Der Treppenabsatz ist von sechs quadratischen Betonplatten eingesäumt. Je drei davon haben die gleiche Größe.
Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$.

18. Berechne die fehlenden Ziffern $\square$ und $\bigcirc$ in der folgenden Multiplikationsaufgabe:

$$\square 3 \cdot 19 \bigcirc = 4\,531$$

19. (a) Überprüfe, ob die Zahl 1 213 145 durch 9 teilbar ist.

(b) Streiche bestimmte Ziffern durch, so dass die übrig gebliebene Zahl (die Reihenfolge der restlichen Ziffern soll unverändert bleiben) durch 9 teilbar ist. Gib sieben Möglichkeiten an.

20. Ein Personenzug fährt von Cantorhausen über Abelstadt nach Besselheim.
In Cantorhausen befinden sich 306 Fahrgäste im Zug.
In Abelstadt steigt die Hälfte davon aus und 79 Fahrgäste steigen ein.
Die Anzahl der in Besselheim zugestiegenen Fahrgäste ist genauso groß wie die Hälfte der Fahrgäste, die sich bei der Ankunft im Bahnhof im Zug befunden haben. Außerdem steigen in Besselheim 120 Fahrgäste aus.
Wie viele Fahrgäste befinden sich im Zug, wenn dieser den Bahnhof in Besselheim verlässt?

21. a und b sind zwei natürliche Zahlen. Finde alle natürlichen Zahlen a und b, für die $a \cdot b + 3 = 42$ gilt.

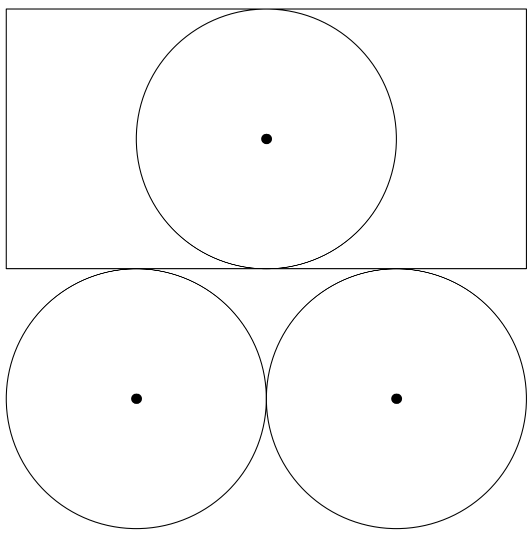
22. Ein Produkt aus drei Faktoren hat den Wert 70. Jeder Faktor ist größer als eins. Welchen Wert können die drei Faktoren haben? Gib alle Möglichkeiten an.

23. Berechne die Platzhalter:

(a) $11 \cdot 5 \cdot \square \cdot 3 \cdot 7 = 15\,015\,.$

(b) $\{[(3\,000 : \bigcirc) : 10] : 25\} = 1\,.$

24.



Welchen Flächeninhalt hat das Rechteck, wenn jeder Kreis einen Durchmesser von 10 cm hat? Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

25.

$$\triangle \; \bigcirc \; \boxed{5} \; : \; 13 \; = \; ?$$

Der dreistellige Dividend soll aus lauter verschiedenen Ziffern bestehen.
Berechne alle möglichen Quotientenwerte.

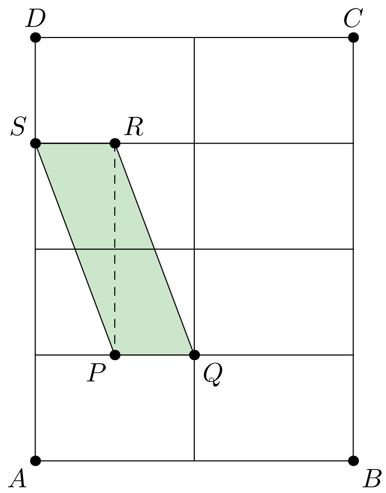
26. Egon ist 13 Jahre alt und er wäre 6 Jahre jünger als Emil, wenn dieser 1 Jahr älter wäre.
Wie alt ist Emil?

27. Auf wie viele Nullen endet der Produktwert von $32 \cdot 10\,034\,300 \cdot 25$?

28. Wenn du 31 durch 9 dividierst, bleibt der Rest 4.
Eine möglich Schreibweise dafür ist $31 = 3 \cdot 9 + 4$.
   (a) Ermittle alle zweistelligen Zahlen, die bei der Division durch 13 den Rest 12 lassen.
   (b) Ermittle die kleinste dreistellige Zahl, die bei der Division durch 13 den Rest 12 lässt.
   (c) Ermittle die größte dreistellige Zahl, die bei der Division durch 13 den Rest 12 lässt.

29. Die Klasse 5b beschäftigt sich gerade mit natürlichen Zahlen, deren Quersumme 100 beträgt.
   (a) Begründe: Solche Zahlen müssen mehr als 11 Stellen aufweisen.
   (b) • Ermittle die kleinste natürliche Zahl mit der Quersumme 100.
       • Schreibe ihren Namen im Wortlaut hin.
   (c) Untersuche, ob es eine größte natürliche Zahl mit der Quersumme 100 gibt.

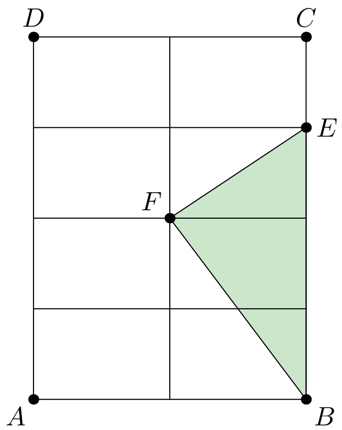
30.



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 8\,\text{cm}$.

(b) Welchen Bruchteil der Fläche des Rechtecks $ABCD$ nimmt das Viereck $PQRS$ ein?

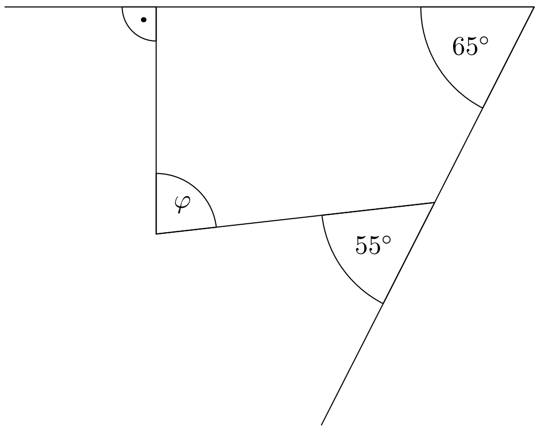
31.



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 8\,\text{cm}$.

(b) Wie viel Prozent der Fläche des Rechtecks $ABCD$ nimmt das Dreieck BEF ein?

32.



Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht. Berechne das Winkelmaß φ.

33. Gegeben ist die Menge M von unmittelbar aufeinander folgenden Stammbrüchen:

$$M = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \ldots \right\}$$

(a) Berechne:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} =$

(b)
- Notiere eine Regel, die beschreibt, wie du den Nenner des Ergebnisses berechnest.
- Notiere eine Regel, die beschreibt, wie du den Zähler des Ergebnisses berechnest.

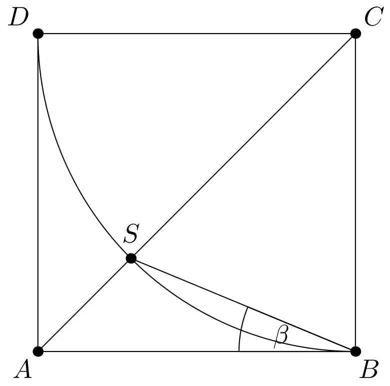
(c) Stelle $\frac{31}{240}$ als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender Stammbrüche dar.

(d) Untersuche, ob sich $\frac{293}{21467}$ als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender Stammbrüche darstellen lässt.

(e) Begründe, weshalb sich $\frac{123008}{3782742016}$ nicht als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender Stammbrüche darstellen lässt.

34. Gib zehn Belegungen für $x \in \mathbb{Q}$ an, so dass $\frac{x}{4} < 2$ gilt.

35.



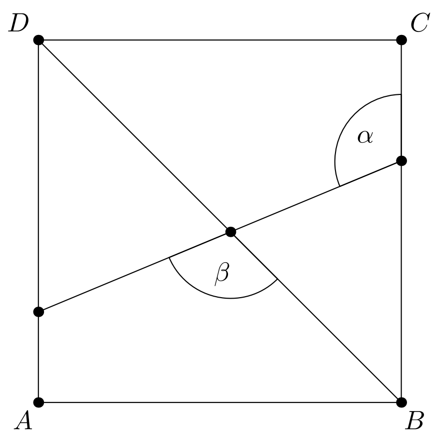
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne das Maß β des Winkels SBA.

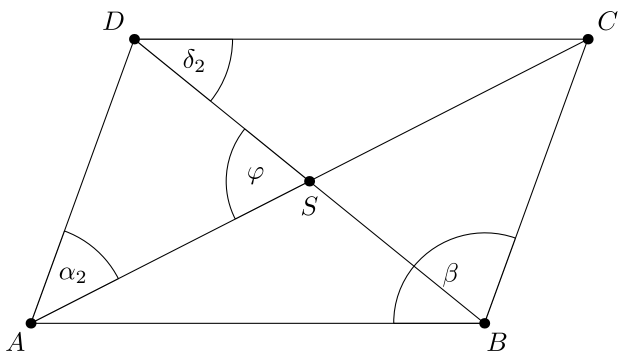
36. Gegeben ist die Gleichung $x \cdot y \cdot x = 284$, wobei x und y ganze Zahlen sein sollen. Ermittle alle Lösungen für x und y.

37.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Es gilt $\alpha = 123,4°$. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.
Berechne β auf zwei verschiedene Arten.

38.

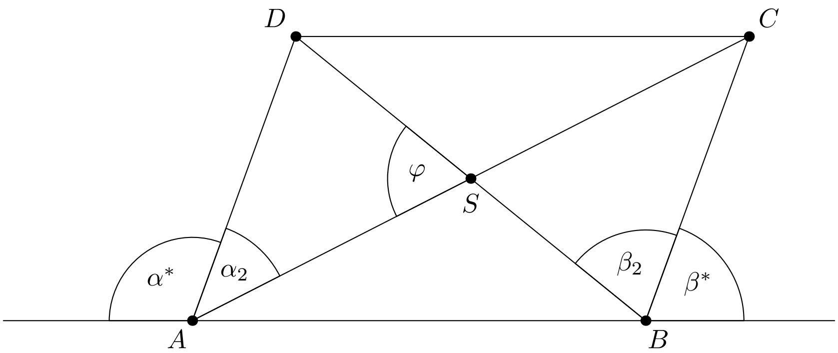


Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
Es soll gelten: $\alpha_2 = 42,1°$, $\delta_2 = 38,7°$ und $\varphi = 65,3°$. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.

(a) Skizziere das Parallelogramm.

(b) Berechne β .

39.



Die Klasse 7a bekommt vom Mathematiklehrer die folgende Aufgabe gestellt:
„Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
Es soll gelten: $\alpha_2 = 38,9°$, $\alpha^* = 109,2°$, $\varphi = 67,5°$ und $\beta^* = 77,6°$.
Berechne β_2 . Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.“
Erwin meint nach mehreren Rechenversuchen: „In der Angabe kann etwas nicht stimmen.“ Wo liegt der Fehler?

40. Die Käsesorte „Bergglück“ besteht zu 40% aus Wasser. Die Trockenmasse besteht zu 40% aus Fett.
Wie viel Prozent Fett sind in der Käsesorte „Bergglück“ enthalten?

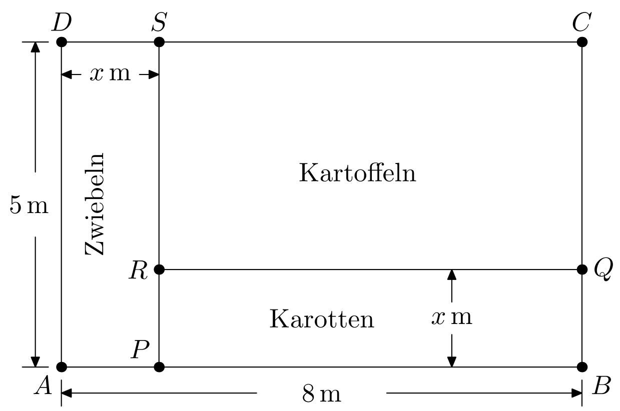
41. Es gilt: $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125$.
Die Zahl 1000 lässt sich also in zwei Faktoren zerlegen, wobei keiner der beiden durch 10 teilbar ist; d.h. keiner der beiden endet auf 0.
Zerlege 21 000 so in zwei Faktoren, dass keiner der beiden auf 0 endet. Gib alle Möglichkeiten an.

42. Carsten rechnet eine Gleichung aus, die er aus dem Buch übertragen hat. Der Lehrer betrachtet seinen Hefteintrag: „Deine Schrift ist wie schon so oft zum Teil unleserlich, aber dein Ergebnis ist richtig.“
In seinem Heft steht (der unleserliche Teil ist durch ein Kästchen ersetzt):

$$\begin{array}{lcr} 2x - \square & = & -2 \\ 2x & = & 14 \\ x & = & 7 \end{array}$$

Ermittle auf zwei verschiedene Arten, was im Buch anstelle des Kästchens stand.

43.



Das rechteckige Feld $ABCD$ ist 8 m lang und 5 m breit.
Auf den drei rechteckigen Parzellen werden Karotten, Zwiebeln und Kartoffeln angebaut. Die beiden Streifen für Karotten und Zwiebeln sind jeweils x m breit. Sie besitzen den gleichen Flächeninhalt. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

(a) Berechne x. [Ergebnis: x=3]

(b) Wie viel Prozent der Gesamtfläche nimmt dann das Kartoffelfeld ein?

44. Lisa weiß, dass eine natürliche Zahl n dann durch 9 teilbar ist, wenn ihre Quersumme QS durch 9 teilbar ist.
Sie stellt sich nun folgende Fragen:

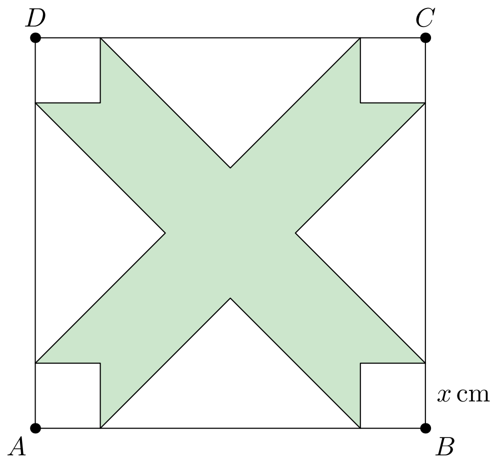
(1) „Ist der Wert der Summe aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme auch durch 9 teilbar?“

(2) „Ist der Wert des Produktes aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme durch 27 teilbar?“

(3) „Ist der Wert des Quotienten aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme durch 9 teilbar?“

Was meinst du? Begründe jeweils deine Ansicht.

45.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat.
An seinen Eckpunkten befinden sich vier kleine Quadrate, deren Seitenlänge jeweils x m beträgt.
Die vier Dreiecke an den Quadratseiten sind jeweils gleichschenklig-rechtwinkig.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $x = 1$.

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A des eingefärbten Kreuzes gilt in Anhängigkeit von x:

$$A(x) = (-8x^2 + 24x)\,\text{cm}^2 .$$

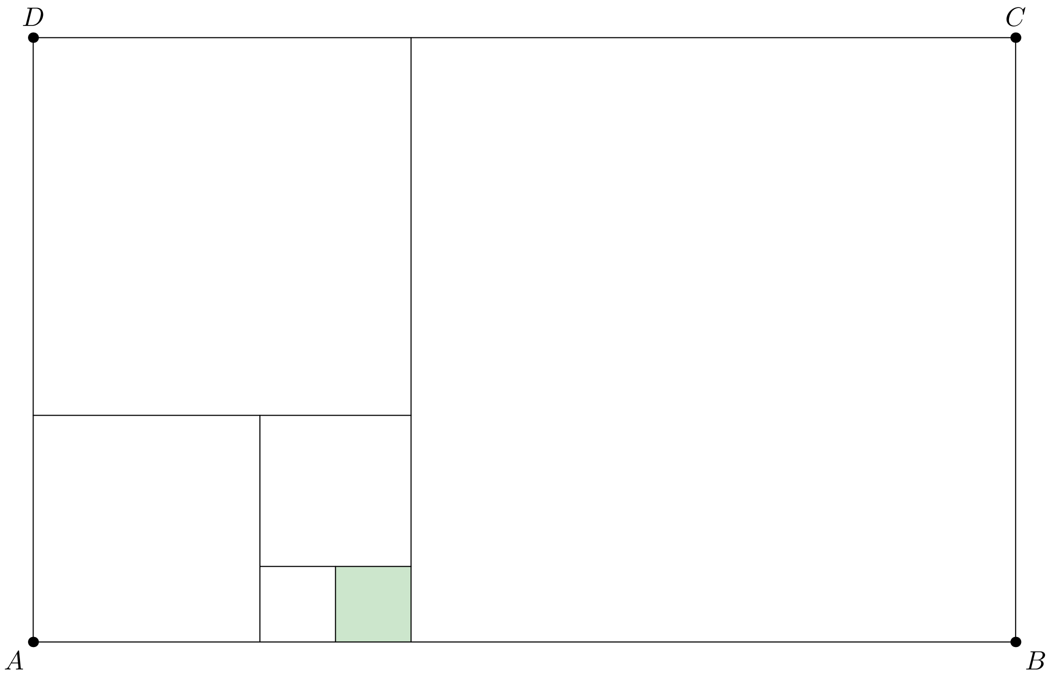
(c) Berechne $A(0)$ und $A(3)$. Deute dein Ergebnis mit Hilfe deiner Zeichnung.

(d) Unter allen Kreuzen gibt es eines, dessen Flächeninhalt maximal ist.

- Berechne dieses Maximum sowie die zugehörige Belegung von x .
- Zeichne erneut das Quadrat $ABCD$ mit dem einbeschriebenen größten Kreuz.

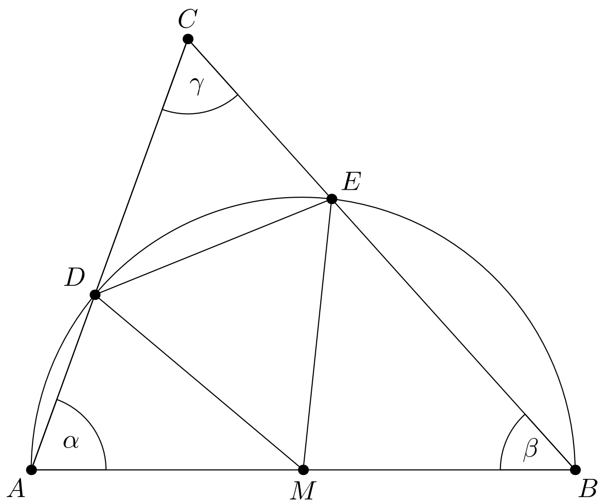
- Wie viel Prozent der Fläche des Quadrates $ABCD$ nimmt das größte Kreuz ein? Löse das Problem auf zwei verschiedene Arten.

46.



Ein rechteckiges Grundstück $ABCD$, dessen Flächeninhalt $2,34\,\text{ha}$ beträgt, ist in lauter quadratische Parzellen eingeteilt. Eine der beiden kleinsten Parzellen, die im Plan farbig gekennzeichent ist, wird eingezäunt.
Berechne die Länge des Zaunes.

47.

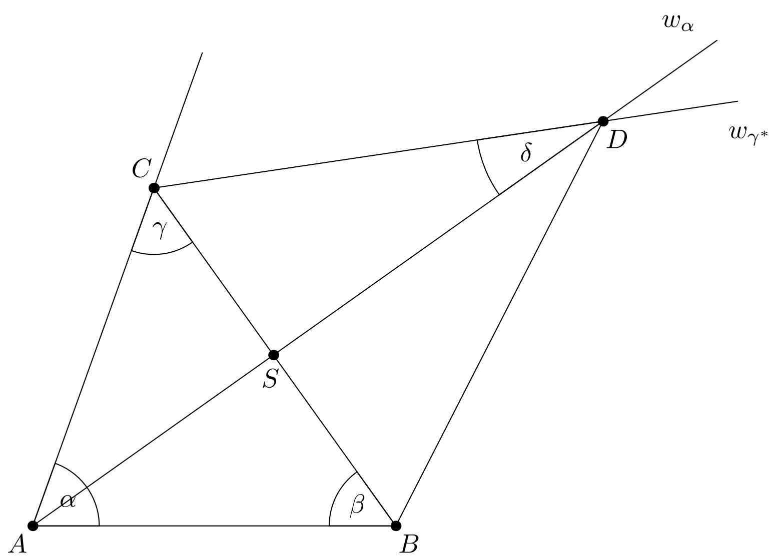


Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 70°$ und $\gamma = 62°$.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks MED.

48.



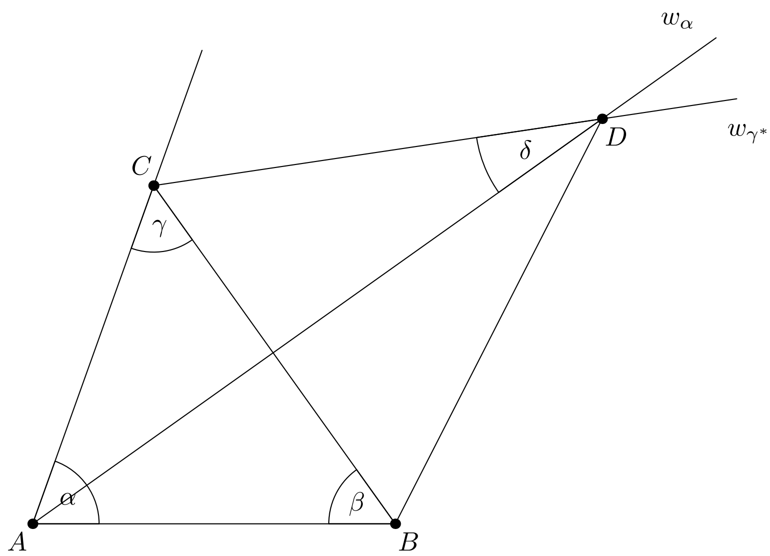
Die Halbgerade w_α halbiert den Winkel α und die Halbgerade w_{γ^*} halbiert den Nebenwinkel von γ.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 70{,}8°$ und $\beta = 54{,}2°$.

(b) Berechne das Winkelmaß δ.

(c) Untersuche, ob es sich bei dem Viereck $ABDC$ um ein achsensymmetrisches Drachenviereck handelt.

49.

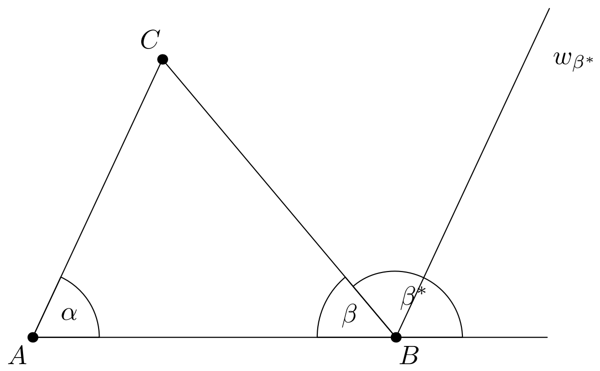


Die Halbgerade w_α halbiert den Winkel α und die Halbgerade w_{γ^*} halbiert den Nebenwinkel von γ. Weiter gilt: $\alpha = 70,8°$ und $\delta = 27,1°$.
Das Viereck $ABDC$ ist nicht achsensymmetrisch.

(a) Berechne die Winkelmaße γ und β. [Teilergebnis: $\beta = 54,2°$]

(b) Begründe, dass es sich bei dem Viereck $ABDC$ nicht um ein achsensymmetrisches Drachenviereck handelt.

50.

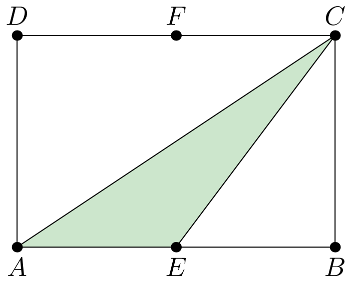


In der Figur halbiert die Halbgerade w_{β^*} den Außenwinkel von β. Gleichzeitig gilt: $w_{\beta^*} \parallel [AC]$.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\beta = 50°$.

(b) Begründe: Das Dreieck ABC muss gleichschenklig sein.

51.



Für das Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.
Die Punkte E und F sind die Mittelpunkte der Seite $[AB]$ bzw. $[CD]$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Welchen Bruchteil der Rechtecksfläche nimmt das Dreieck AEC ein? Löse die Aufgabe auf zwei verschiedene Arten.

(c) Berechne den Abstand des Punktes E von der Strecke $[AC]$. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

52. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.

(a) Zeichne dieses Dreieck, so dass die Kathete $[AB]$ waagrecht liegt.

(b) Punkte P_n wandern auf der Seite $[AB]$ und Punkte Q_n wandern gleichzeitig auf der Seite $[BC]$, wobei $\overline{AP_n} = \overline{BQ_n} = x\,\text{cm}$ gilt. Dadurch entstehen Vierecke AP_nQ_nC.
Zeichne für $x = 1{,}5$ das Viereck AP_1Q_1C ein.

(c) Gib die Menge aller möglichen Belegungen von x an.

(d) Unter allen Vierecken AP_nQ_nC gibt es das Trapez AP_2Q_2C.

- Berechne die zugehörige Belegung von x.

  [Ergebnis: $x = 2{,}4$]

- Zeichne dieses Trapez in anderer Farbe ein.
- Berechne den Flächeninhalt dieses Trapezes. **Tipp:** Berechne zunächst den Flächeninhalt des Dreiecks P_2BQ_2.
- Berechne die Höhe h dieses Trapezes AP_2Q_2C. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

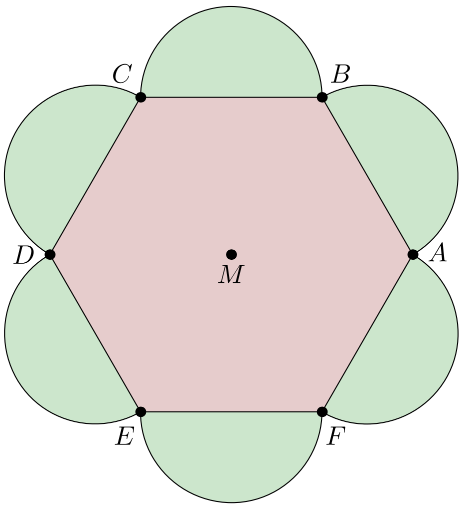
(e) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Vierecke AP_nQ_nC gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = (0{,}5x^2 - 3x + 12)\,\text{cm}^2\,.$$

(f) Unter allen Vierecken AP_nQ_nC gibt es das Viereck AP_2Q_2C, das den minimalen Flächeninhalt besitzt.
Berechne dieses Minimum und die zugehörige Belegung von x.

(g) Untersuche, ob es unter allen Vierecken AP_nQ_nC achsensymmetrische gibt.

53.

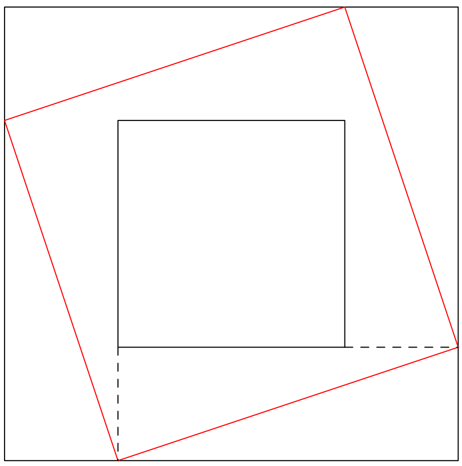


Das Sechseck $ABCDEF$ mit dem Mittelpunkt M ist regelmäßig.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AD} = 8\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A der Figur. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

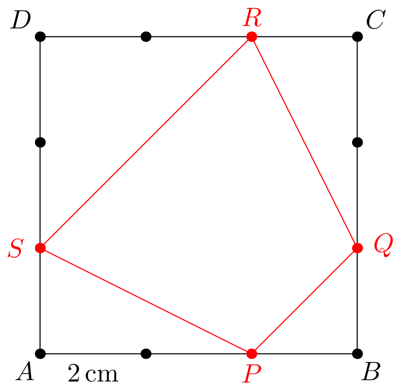
54.



Das große Quadrat hat einen Umfang von $81,6\,\text{cm}$ und das kleine Quadrat hat einen Umfang von $34\,\text{cm}$. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Berechne den Flächeninhalt des mittleren Quadrates auf verschiedene Weise:

- Mit Hilfe der Berechnung der Seitenlänge des mittleren Quadrates
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

55.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Jede Quadratseite ist in drei Abschnitte eingeteilt, die jeweils 2cm lang sind. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

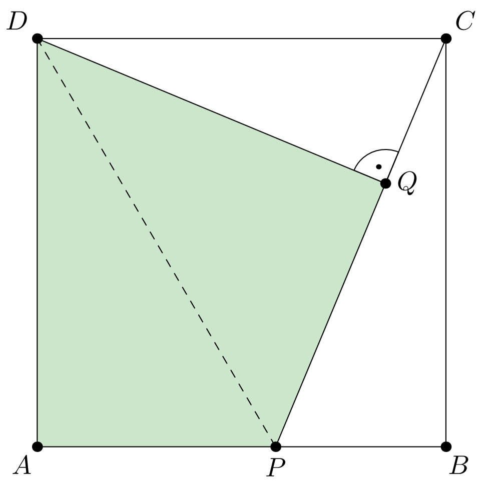
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ besitzt zwei parallele Seiten.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ auf zwei verschiedene Arten:

- Mit Hilfe der Berechnung der zugehörigen Formelgleichung
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

56.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a .

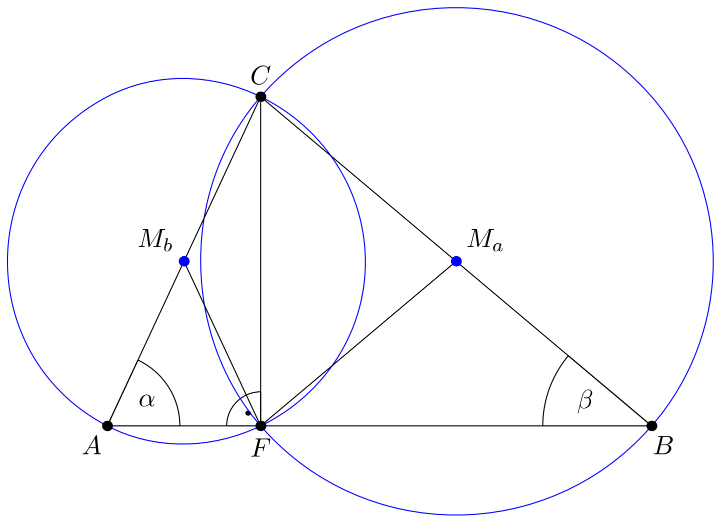
(a) Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{PB} = 2,5\,\text{cm}$.

(b) Begründe ohne Messung: Die Diagonale $[DP]$ ist keine Symmetrieachse im Viereck $APQD$.

(c) Begründe: Die beiden Dreiecke PBC und DQC sind zueinander ähnlich.

(d) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $APQD$ an der Fläche des Quadrates $ABCD$ in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

57.



Im Dreieck ABC mit der Höhe $[CF]$ sind die Punkte M_a und M_b die Mittelpunkte der Umkreise der Teildreiecke FBC bzw. AFC.

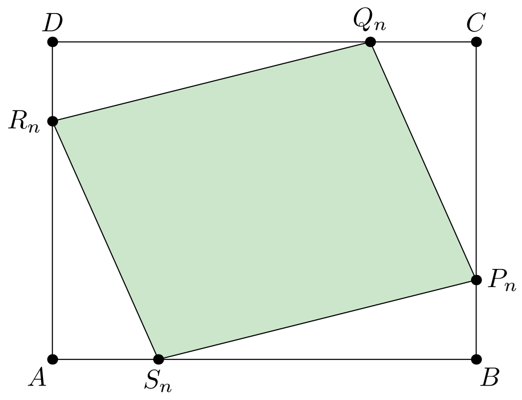
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe auf verschiedene Weise: Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Begründe: Zusammen bedecken die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a die Hälfte des Dreiecks ABC.

58. Begründe: $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right)^{444} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^{444} = 16^{111}$.

59.



In das Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$ werden Parallelogramme $P_nQ_nR_nS_n$ einbeschrieben, wobei gilt: $\overline{BP_n} = \overline{DR_n} = 6k\,\text{cm}$ und $\overline{AS_n} = \overline{CQ_n} = 8k\,\text{cm}$ mit $k \in]0;1[_{\mathbb{R}}$.

(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ und für $k = 0,25$ das Parallelogramm $P_1Q_1R_1S_1$.

(b) Zeige: Für das Verhältnis q der Flächeninhalte der Parallelogramme $P_nQ_nR_nS_n$ zum Rechteck $ABCD$ gilt in Abhängigkeit von k:
$$q(k) = \frac{A_{P_nQ_nR_nS_n}}{A_{ABCD}} = 1 - 2k(1-k)\,.$$

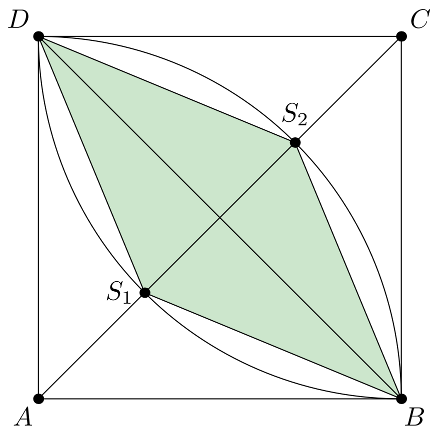
(c) $k = 0,4$ erzeugt das Parallelogramm $P_2Q_2R_2S_2$. Wie viel Prozent der Fläche des Rechtecks $ABCD$ wird von diesem Parallelogramm eingenommen?

(d) Unter allen Parallelogrammen $P_nQ_nR_nS_n$ gibt es die Parallelogramme $P_3Q_3R_3S_3$ und $P_4Q_4R_4S_4$, die jeweils 58% der Fläche des Rechtecks $ABCD$ einnehmen. Berechne die zugehörigen Belegungen von k.

(e) Für $k = 0,5$ wird das Parallelogramm $P_5Q_5R_5S_5$ erzeugt.

- Zeichne dieses Parallelogramm in einer anderen Farbe ein.
- Um welches besondere Parallelogramm handelt es sich hier? Begründe deine Antwort.
- Zeige: Unter allen Parallelogrammen $P_nQ_nR_nS_n$ besitzt dieses Parallelogramm $P_5Q_5R_5S_5$ den kleinsten Flächeninhalt.

60.



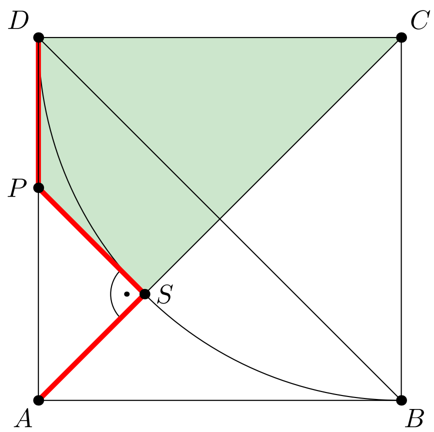
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte A und C.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Vierecks S_1BS_2D.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck S_1BS_2D ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

61.

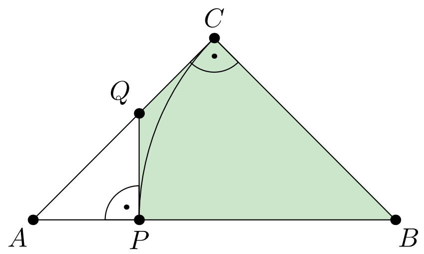


Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b)
- Begründe rechnerisch: Das Viereck $SCDP$ ist ein achsensymmetrischer Drachen.
- Besitzt dieses Drachenviereck einen Umkreis? Begründe deine Antwort.

62.



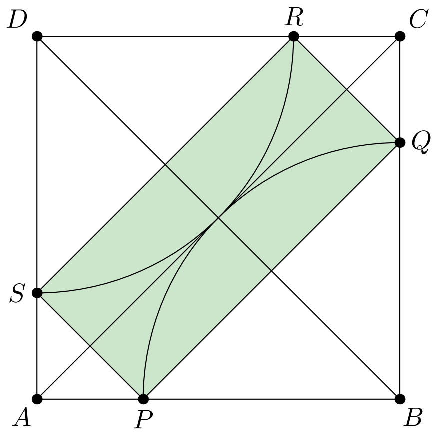
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt B.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke ABC und APQ sind zueinander ähnlich.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC nimmt das Dreieck APQ ein? Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

63.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte B und D.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Rechteck.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck $PQRS$ ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

64. In einem Lehrbuch steht zum Thema „Gleichungssysteme“ eine Aufgabe mit der Musterlösung:
„Es sind a und b natürliche Zahlen. Berechne a und b so, dass $a^2 - b^2 = 15$ gilt.“

Musterlösung

$$a^2 - b^2 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)(a+b) = 15\,.$$

Wegen $\mathbb{T}_{15} = \{1;\ 3;\ 5;\ 15\}$ und $a + b > a - b$ folgt

entweder:

$$\begin{array}{rccccccl} & a & + & b & = & 15 & & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 1 & & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 16 & & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 8 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 7$

Probe: $8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$, stimmt.

oder:

$$\begin{array}{rccccccl} & a & + & b & = & 5 & & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 3 & & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 8 & & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 4 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 1$

Probe: $4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$, stimmt.

$$\Rightarrow \quad L = \{(4 \mid 1);\ (8 \mid 7)\}$$

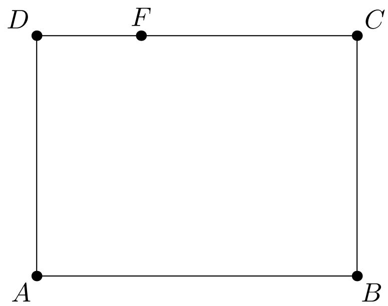
(a) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 77$ und mache die Probe..

(b) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 83$ und mache die Probe..

(c) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 38$ und mache die Probe..

(d) Edwin behauptet: „Wenn der Wert der Differenz aus den Quadraten von a und b gerade ist, dann ist die Lösungsmeng leer.“
Begründe, dass Edwin nicht Recht hat.

65.



Die beiden Freunde Hans und Michael wollen ein Bundesligaspiel besuchen. Auf ihrem Weg dorthin gelangen sie vor dem Stadion an einen rechteckigen Parkplatz $ABCD$.

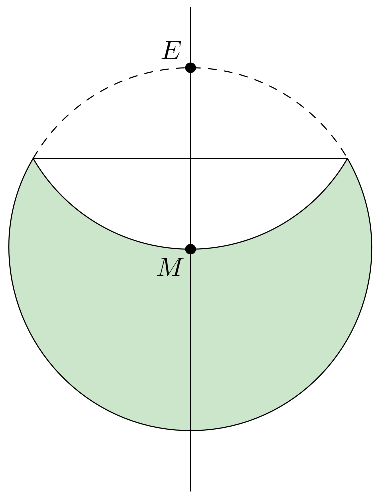
Sie befinden sich am Punkt A und wollen den Platz diagonal zum Punkt C überqueren. Michael entdeckt jedoch einen Kameraden, der am Punkt F steht und läuft erst geradewegs zu ihm. Dann begeben sich die beiden direkt zum Punkt C, an dem schon Hans wartet.

(a) Es soll gelten $\overline{AB} = 92\,\text{m}$, $\overline{BC} = 69\,\text{m}$ und $\overline{FC} = 60\,\text{m}$.
Fertige eine Zeichnung im Maßstab 1 : 1000 an.

(b) Begründe ohne Messung: Michael muss einen längeren Weg von A über F nach C zurücklegen als Hans.

(c) Berechne die Streckenlänge, die Michael mehr als Hans zurücklegen muss. Runde auf ganze Meter.

66.

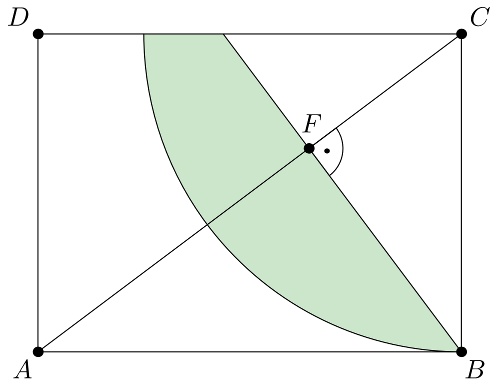


Erwin hat einen Kreis aus Papier ausgeschnitten. Er faltet nun die Kreisscheibe so, dass der Punkt E auf den Kreismittelpunkt M zu liegen kommt.

(a) Zeichne die Figur mit einem Kreisdurchmesser von $6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Anteil der eingefärbten Fläche an der gesamten Kreisfläche in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

67.

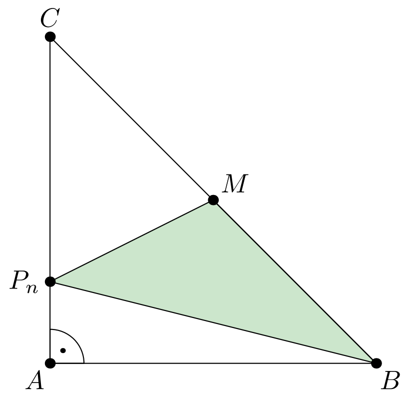


Der Punkt C des Rechtecks $ABCD$ ist der Mittelpunkt des Kreisbogens.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt A der eingefärbten Fläche. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

68.



Der Punkt M halbiert die Hypotenuse $[BC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC.
Punkte P_n mit $\overline{AP_n} = x\,\text{cm}$ wandern auf der Kathete $[AC]$, so dass laufend Dreiecke BMP_n erzeugt werden.

(a) Zeichne das Dreieck ABC für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ zusammen mit dem Dreieck BMP_1 für $x = 2$.

(b) Für welche Belegungen von x gibt es solche Dreiecke BMP_n?

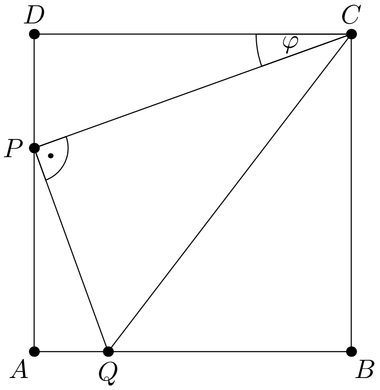
(c) Berechne den Flächeninhalt A der Dreiecke BMP_n in Abhängigkeit von x.
Ergebnis: $A(x) = (9 - 1,5x)\,\text{cm}^2$
Tipp: Fälle das Lot von M auf $[AC]$.

(d) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das Dreieck BMP_2, dessen Flächeninhalt $6,6\,\text{cm}^2$ beträgt. Berechne die zugehörige Belegung von x.

(e) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das gleichschenklige Dreieck BMP_3 mit der Basis $[MP_3]$. Berechne die zugehörige Belegung von x. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

(f) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das Dreieck BMP_3, dessen Flächeninhalt 20% der Fläche des Dreiecks ABC einnimmt. Berechne die zugehörige Belegung von x.

69.



Dem Quadrat $ABCD$ ist das rechtwinklige Dreieck QCP einbeschrieben worden. Dabei gilt: $\sphericalangle\, DCP = \varphi$.
Hinweis: Gegebenenfalls sind alle Ergebnissse auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne das Quadrat für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und für $\varphi = 20°$ das Dreieck QCP.

(b) Begründe: Die Dreiecke AQP und PCD sind zueinander ähnlich.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks QCP.

70. Ein halbkugelförmiges Glasgefäß mit einer Wandstärke von 5 mm hat ein Fassungsvermögen von $10\,\text{l}$.
Berechne den Außendurchmesser des Gefäßes in mm.