SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Neue Aufgaben (Realschule)

herausgegeben vom

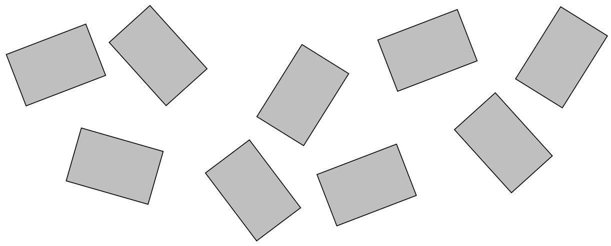
Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

19. Oktober 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Daten und Zufall

1.



Beate und Ursula spielen mit 9 verdeckten Karten: Zwei davon sind auf der Unterseite rot, drei davon grün und vier davon blau.
Zieht ein Mädchen eine rote Karte (r), bekommt sie 18 Punkte. Bei einer grünen Karte (g) bekommt sie zwölf und bei einer blauen Karte (b) 9 Punkte.

(a) Wie viele Karten müsste Beate höchstens umdrehen, damit eine grüne Karte aufgedeckt wird?

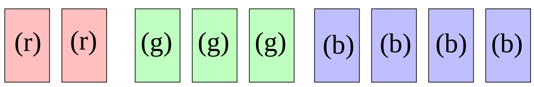
(b) Wie viele Karten müsste Beate von den 9 verdeckten Karten höchstens umdrehen, damit eine rote oder grüne Karte dabei ist?

(c) Wie viele Karten müsste Beate von den 9 verdeckten Karten höchstens umdrehen, damit eine rote und eine grüne Karte dabei ist?

(d) Ursula dreht nacheinander drei von den 9 verdeckten Karten um. Sie sagt: „Ich habe jetzt 36 Punkte.“
Welche Farben tragen ihre drei Karten?

(e) Beate schaut heimlich unter drei von den noch verbleibenden Karten und meint zu Ursula gewandt: „Wenn ich die drei Karten aufdecken würde, dann hätte ich 38 Punkte“. Doch Ursula entgegnet ohne hinzuschauen: „Das kann gar nicht sein, denn . . . “.
Wie begründet Ursula ihre Meinung?

Lösung:



(a) Du musst immer vom ungünstigsten Fall ausgehen: Nachdem du die vier blauen und die zwei roten Karten umgedreht hast, ist die 7. Karte sicher eine grüne. Also musst du höchstens 7 Karten umdrehen.

(b) Im ungünstisten Fall erwischst du zuerst die vier blauen. Dann muss aber die 5. Karte eine rote oder eine grüne Karte sein. Also musst du höchstens 5 Karten umdrehen.

(c) Im ungünstigsten Fall kann Folgendes passieren: Du erwischst zuerst die 4 blauen Karten. Dann ist die 5. Karte rot oder grün.
Ist die 5. Karte rot, dann kann die 6. Karte auch rot sein. Dann muss aber die 7. Karte grün sein, weil alle roten und blauen Karten schon gezogen sind. Ist aber die 5. Karte grün, dann gibt es noch zwei grüne Karten, die du anschließend erwischen könntest. Dann muss die 8. Karte aber rot sein, weil alle blauen und grünen Karten schon aufgedeckt sind. In diesem (extrem ungünstigen) Fall musst du tatsächlich 8 Karten ziehen.

(d) 1. Fall: $12 + 12 + 12 = 36$, dann hat Ursula 3 grüne Karten gezogen.
2. Fall: $18 + 9 + 9 = 36$, dann hat Ursula eine rote und zwei blaue Karten gezogen.

(e) Alle Punktezahlen zu den einzelnen Karten sind durch 3 teilbar. Dann muss auch jede Summe, die eine Auswahl aus den Einzelpunkten als Summanden enthält, durch 3 teilbar sein, aber die Zahl 38 ist es nicht. Beate hat falsch addiert.

2. In einem Saal befinden sich nur Personen, die entweder den Nachnamen „Müller“, „Becker“, „Schmidt“ oder „Küfner“ tragen. Außerdem heißt jede Person mit Vornamen entweder „Renate“, „Ursula“, „Hans“, „Paul“ oder „Egon“.
   (a) Wie viele Personen sind mindestens im Saal?
   (b) Kannst du auch feststellen, wie viele Personen höchstens im Saal sind? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) Es kann z.B. der Nachname „Müller“ mit jedem der 5 Vornamen kombiniert werden. Auch für die anderen Nachnamen gibt es jeweils die gleiche Kombination. Es gibt 4 verschiedene Nachnamen. Also gibt es mindestens $4 \cdot 5 = 20$ Personen im Saal.

(b) Weil nicht auszuschließen ist, dass zwei (oder mehr) Personen anwesend sind, die z.B. „Renate Schmidt“ heißen, ist die Angabe einer Höchstzahl nicht möglich. Nur die Abmessungen des Saales begrenzen die Personenzahl.

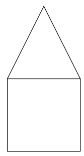
3. Heinz möchte sich für 30 € einen neuen Skater-Helm kaufen. Dazu „schlachtet“ er sein Sparschwein. Er stellt fest, dass nur 1 €- und 2 €-Münzen im Wert von 59 € darin sind.
   Wie viele Möglichkeiten hätte Heinz höchstens, diesen Helm ausschließlich mit den Münzen aus seinem Sparschwein zu bezahlen?

Lösung: Am besten stellst du eine Tabelle auf:

Anzahl der 2 €-Münzen	1	2	3	$\cdots$	14	15
Anzahl der 1 €-Münzen	28	26	24	$\cdots$	2	0
Gesamtbetrag in €	30	30	30	$\cdots$	30	30

Wie du aus der Tabelle erkennen kannst, gäbe es 15 Möglichkeiten. Diese Möglichkeiten müssen aber nicht alle eintreten: Wenn im Sparschwein 59 €enthalten sind, dann ist nur sicher, dass mindestens eine 1 €-Münze mit dabei ist. Ob genügend 1 €- und 2 €-Münzen vorhanden sind, um alle Möglichkeiten abzudecken, ist nicht geklärt.

4.



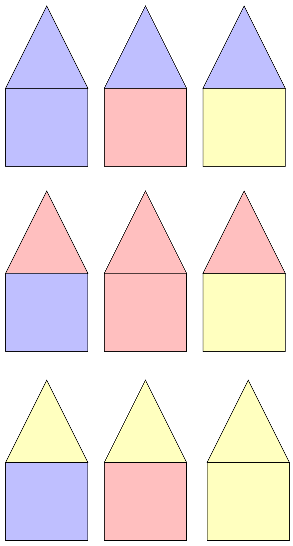
Material: je ein blaues, rotes und gelbes quadratisches Plättchen und je ein blaues, rotes und gelbes dreieckiges Plättchen.

(a) Wie viele Häuserfronten kannst du damit legen?

(b) Das blaue Quadrat wird durch ein grünes Dreieck ersetzt. Wie viele verschieden farbige Häuserfronten kannst du jetzt legen?

Lösung: Strategie: Lasse so lange wie möglich ein Objekt unverändert und kombiniere damit die restlichen Objekte.

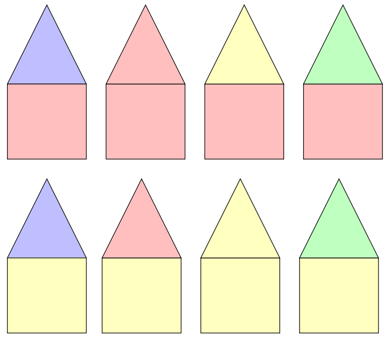
(a) Hier bleiben zunächst alle Dreiecke blau, dann rot und am Ende gelb:



Es gibt also $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten.

Zusatzaufgabe: Ordne die Häuserfronten auf eine andere Weise systematisch an.

(b) Hier wird z.B. das Quadrat einer Farbe so lange wie möglich beibehalten:



Es gibt also $4 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten.

5. (a) Anton, Bettina und Claudia sollen sich für ein Foto nebeneinander stellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
   (b) Doris soll noch mit auf das Foto. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?
   (c) Egon kommt als fünfte Person mit dazu. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten.
   (d) Formuliere eine Regel, wie sich die Anzahl der Möglichkeiten erhöht, wenn eine Person hinzukommt.

Lösung: (a) Eine mögliche Strategie: Anton steht entweder links oder in der Mitte oder rechts. Für jede Position von Anton gibt es für Bettina und Claudia zwei Möglichkeiten, sich hinzustellen. Am besten wird dies in einer Tabelle deutlich, in der nur die Anfangsbuchstaben der Vornamen hingeschrieben werden:

ABC	**A**CB
B**A**C	C**A**B
BC**A**	CB**A**

Es gibt also $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten.

(b) Doris kann (z.B. von links gesehen) an der 1., 2., 3., oder 4. Stelle (ganz rechts) stehen.

DABC	**D**ACB	**D**BAC	**D**CAB	**D**BCA	**D**CBA
A**D**BC	A**D**CB	B**D**AC	C**D**AB	B**D**CA	C**D**BA
AB**D**C	AC**D**B	BA**D**C	CA**D**B	BC**D**A	CB**D**A
ABC**D**	ACB**D**	BAC**D**	CAB**D**	BCA**D**	CBA**D**

Im Zusammenhang mit der Lösung der vorherigen Aufgabe sind das
$4 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten.

(c) Egon kann die 1., 2., 3., 4. oder 5. Stelle (ganz rechts) einnehmen.
Jede dieser Positionen kannst du mit den 24 Möglichkeiten der vorherigen Lösung kombinieren. Also gibt es
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ Möglichkeiten.
Noch deutlicher kannst du dafür auch $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ schreiben.
Für diese Schreibweise hat man in der Mathematik das Zeichen $5!$ (sprich „Fünf Fakultät“) vereinbart.

So hat also z.B. $53! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53$ den Riesenwert 4274883284060025564298013753389399649690343788366813724672000000000000.

(d) Die Regel könnte also lauten: „Wenn zu der ursprünglichen Personengruppe eine Person hinzukommt, dann berechnest du die neue Anzahl von Möglichkeiten, indem du die ursprüngliche Zahl der Möglichkeiten mit der Personenzahl der neuen Gruppe multiplizierst.“

6.

Speisekarte

Tomatensuppe
Lauchcremesuppe

****

Schnitzel mit Pommes Frites
Hähnchen mit Reis
Gemüseauflauf

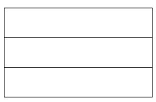
****

Eis
Obstsalat
Kuchen

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus der Speisekarte ein Menü aus Suppe, Hauptgericht und Nachspeise zusammenzustellen?

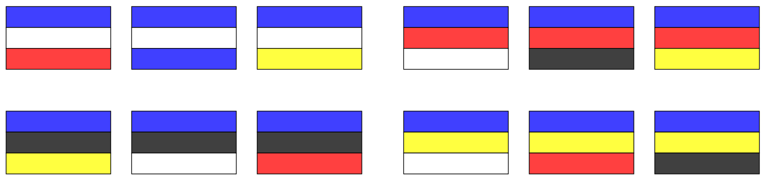
Lösung: Wir verwenden als Abküzungen für die Gerichte jeweils deren Anfangsbuchstaben.
Welche Gerichte kannst du mit einer Tomatensuppe (T) einnehmen?
Die Tomatensuppe wird zunächst mit dem Schnitzel (S) und dem Nachtisch kombiniert:
TSE, **TS**O und **TS**K. Das sind 3 Möglichkeiten.
Als nächstes wählen wir Tomatensuppe und Hähnchen (H) ins Menü:
THE, **TH**O und **TH**K. Das sind wieder 3 Möglichkeiten.
Ebenso liefert die Zusammenstellung (**T, G** + Nachtisch) 3 Möglichkeiten.
Somit lassen sich mit der Tomatensuppe 9 verschiedene Menüs zusammenstellen.
Was der Tomatensuppe recht ist, ist der Lauchcremesuppe billig: Auch hier gibt es 9 verschiedene Menükombinationen.
Also lassen sich aus dieser Speisekarte 18 verschiedene Menüs zusammenstellen.

7.



Harry Potter möchte für Hogwarts eine Fahne mit drei verschieden gefärbten Streifen entwerfen. Er hat fünf Farben zur Verfügung: blau, weiß, schwarz, rot und gelb.
Wie viele verschiedene Fahnen könnte er gestalten?

Lösung: Im Weiteren werden die Farben blau mit (b), weiß mit (w), schwarz mit (s), rot mit (r) und gelb mit (g) abgekürzt.
Als Vorgehensweise beim Abzählen empfiehlt es sich zunächst, die Farbe im obersten und im mittleren Streifen (z.B. blau und weiß) so lange unverändert zu lassen, bis damit alle restlichen Möglichkeiten ausgeschöpft sind:



Die obige Darstellung ergibt für den Fall, dass der oberste Streifen blau ist, 12 Möglichkeiten.
Nun gibt es ja 4 weitere verschiedene Möglichkeiten, den obersten Streifen einzufärben; insgesamt sind das 5 Möglichkeiten für den obersten Streifen. Zu jeder dieser 5 Möglichkeiten gibt es nun 12 Kombinationen.
Damit gibt es $5 \cdot 12 = 60$ mögliche Farbzusammenstellungen.

Wenn du nicht mit Farben arbeiten möchtest, kannst du auch die Anfangsbuchstaben der 5 Farben als Abkürzung verwenden und alle möglichen Farbzusammenstellungen in Form einer Tabelle aufschreiben:

b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
w	w	w	r	r	r	s	s	s	g	g	g
r	b	g	w	s	g	g	w	r	w	r	s

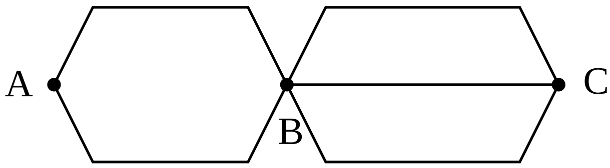
Hier ergeben sich wieder $3 \cdot 4 = 12$ Möglichkeiten. Nun kannst du erneut die Farbe in dem obersten Streifen noch vier Mal wechseln. Dann erhältst du $4 \cdot 12 = 48$ weitere Möglichkeiten. Zusammen sind das wieder $48 + 12 = 60$ Farbkombinationen.

Du kannst aber die Aufgabe auch nur rechnerisch lösen:

- Für die Farbe des obersten Streifens dieser Flagge gibt es 5 Möglichkeiten.
- Für **jede** dieser 5 Möglichkeiten gibt es für den mittleren Streifen 4 Möglichkeiten. Die beiden oberen Streifen lassen sich also auf $5 \cdot 4 = 20$ verschiedene Arten färben.
- Für **jede** dieser 20 Möglichkeiten kann der unterste Streifen noch auf 3 verschiedene Arten gefärbt werden. Insgesamt gibt es für die Farbanordnung in der Flagge also $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten.

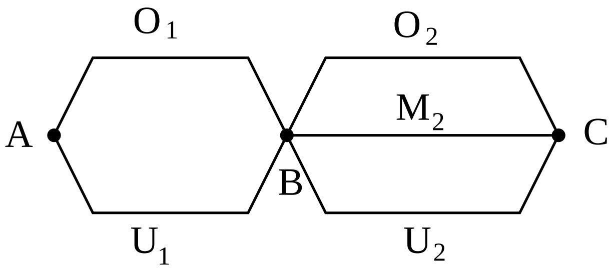
Zusatzaufgabe: Ermittle Länder, die in ihrer Nationalflagge tatsächlich eine der Farbkombinationen aufweisen.

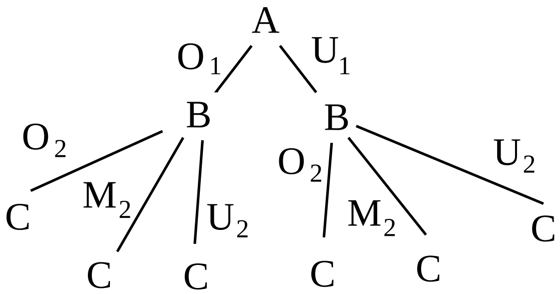
8.



Wie viele Möglichkeiten gibt es, um auf den gezeichneten Wegen von Abelstadt über Besselheim nach Cantorhausen zu gelangen?

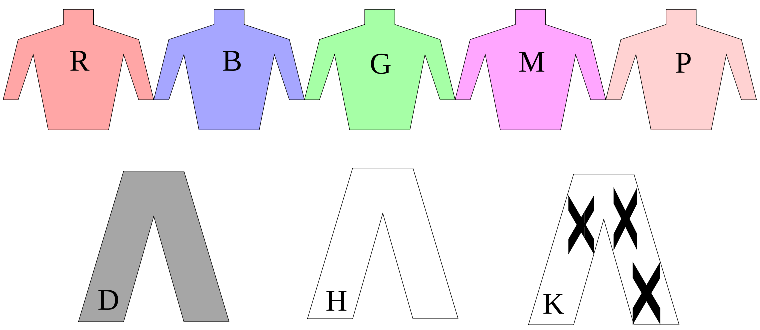
Lösung: Du kannst die Anzahl der Möglichkeiten in einem **Baumdiagramm** darstellen:





Also führen 6 verschiedene Wege nach Cantorhausen.

9.



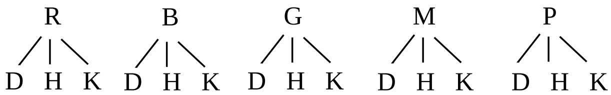
Elvira hat in ihrem Kleiderschrank fünf Pullover (von links: Rot, Blau, Grün, Magenta und Pink) und drei Hosen: eine dunkle (D), eine helle (H) und eine karierte (K). Auf wie viele Arten kann sie sich damit anziehen?

Lösung: Kombiniere jede Hose mit allen Pullovern:
1. Möglichkeit: Fertige mit den abkürzenden Buchstaben eine Tabelle an.

Hosen	Pullover				
D	R	B	G	M	P
H	R	B	G	M	P
K	R	B	G	M	P

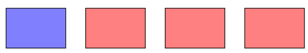
Zu jeder Hose kann Elvira fünf verschiedene Pullover anziehen. Sie hat drei verschiedene Hosen, also hat sie $3 \cdot 5 = 15$ verschiedene Möglichkeiten, sich anzuziehen.
Oder: Zum Pullover einer Farbe kann sie drei verschiedene Hosen anziehen. Sie besitzt fünf verschiedene Pullober. Also hat sie $5 \cdot 3 = 15$ verschiedene Möglichkeiten, sich anzuziehen.

2. Möglichkeit: Fertige mit den abkürzenden Buchstaben Baumdiagramme an.



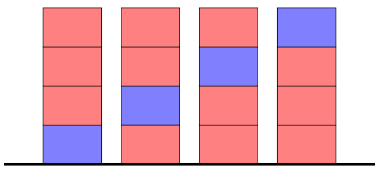
Wieder ergeben sich 15 verschiedene Möglichkeiten.

10.



Du hast einen blauen und drei rote Legosteine. Wie viele verschiedene Türme aus vier Steinen kannst du damit bauen?

Lösung: Eine mögliche Strategie besteht darin, den blauen Legostein zunächst zuunterst zu legen und ihn dann Etage für Etage nach oben wandern zu lassen:



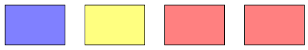
Du kannst also vier verschiedene Türme bauen.

Dasselbe kannst du auch in einer Tabelle aus den Anfangsbuchstaben „r“ für „rot“ und „b“ für „blau“ darstellen:

r	r	r	b
r	r	b	r
r	b	r	r
b	r	r	r

Auch hier gibt es wieder vier Möglichkeiten.

11.

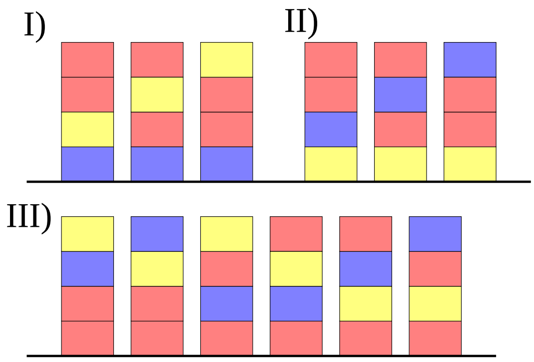


Du hast einen blauen, einen gelben und zwei rote Legosteine.

(a) Wie viele verschiedene Türme aus vier Steinen kannst du damit bauen?

(b) Wie viele verschiedene Türme aus drei Steinen gibt es?

Lösung: (a) Eine mögliche Strategie besteht darin, den blauen Legostein zunächst zuunterst zu legen und dann den gelben Stein Etage für Etage vom 1. in den 3. Stock nach oben wandern zu lassen. (siehe I)
Dann legst du den gelben Stein zuunterst und lässt dann den blauen Stein Etage für Etage vom 1. in den 3. Stock nach oben wandern. (siehe II)
Schließlich legst du zwei rote Steine zuunterst, dann blau, dann gelb bzw. erst gelb und dann blau.
Am Ende liegt ein roter Stein unten und darüber entweder entweder ein blauer oder ein gelber (siehe III).



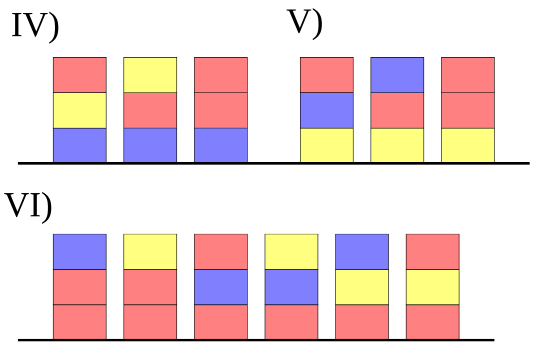
Du kannst also zwölf verschiedene Türme bauen.

Dasselbe kannst du auch in einer Tabelle aus den Anfangsbuchstaben „b“ für „blau“, „g“ für „gelb“ und „r“ für „rot“ darstellen:

Figur I)			Figur II)			Figur III)					
r	r	g	r	r	b	g	b	g	r	r	b
r	g	r	r	b	r	b	g	r	g	b	r
g	r	r	b	r	r	r	r	b	b	g	g
b	b	b	g	g	g	r	r	r	r	r	r

Auch hier gibt es wieder zwölf Möglichkeiten.

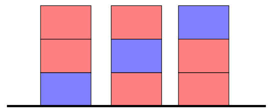
(b) Am einfachsten ist es, von den Vierertürmen der Lösung (a) den obersten Stein wegzunehmen. Dann ergibt sich das folgende Bild:



Du kannst also wieder zwölf verschiedene Türme bauen.

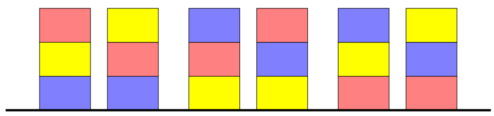
Doch du kannst auch die Lösung Aufgabe (b) unabhängig von der Lösung der Aufgabe (a) finden.

1. Fall:
Du hast zwei rote Steine und einen blauen.



Du kannst jetzt nur drei verschiedene Türme bauen. Natürlich ändert sich die Anzahl der Möglichkeiten nicht, wenn du neben den zwei roten einen gelben Stein nimmst. Das sind aber nochmals drei Möglichkeiten, weil in der Aufgabenstellung (b) nicht festgelegt ist, welche Farben unter den vorgegebenen im Turm vorkommen sollen. Also gibt es in diesem Fall 6 Möglichkeiten.

2. Fall:
Du hast einen blauen, einen gelben und einen roten Stein.



Du kannst jetzt sechs verschiedene Türme bauen.
Nimmst du z.B. den blauen Stein als untersten, dann gibt es darüber zwei Kombinationen: entweder gelb-rot oder rot-gelb. Genau so ergeben sich jeweils zwei Kombinationen wenn der gelbe oder der rote Stein zuunterst liegt. Weil es drei verschiedene Farben sind, ergeben sich also $2 \cdot 3 = 6$ verschiedene Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es wieder diese 12 Möglichkeiten.

12. Die Summe aus drei natürlichen Zahlen soll 10 ergeben. Notiere alle Möglichkeiten.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
1+1+8 &= 10 \qquad & 2+2+6 &= 10 \qquad & 3+3+4 &= 10\\
1+2+7 &= 10 & 2+3+5 &= 10 & &\\
1+3+6 &= 10 & 2+4+4 &= 10 & &\\
1+4+5 &= 10 & & & &
\end{aligned}
$$

2 Neue Aufgaben, Oktober 2011

1. Familie Reich hat vier Kinder. Im Jahre 2010 sind Arne 10, Bettina 12, Carsten 14 und Doris 16 Jahre alt.
   (a) Berechne das Gesamtalter der vier Kinder im Jahre 2013.
   (b) In welchem Jahr werden die Geschwister zusammen 100 Jahre alt sein?
   (c) Können die vier Kinder zusammen jemals 163 Jahre alt werden?

Lösung: (a) Im Jahre 2010 sind die vier Geschwister zusammen 52 Jahre alt. Bis zum Jahr 2013 sind für jedes Kind drei Jahre vergangen.
Also: $52 + 3 \cdot 4 = 64$. Die Kinder sind dann zusammen 64 Jahre alt.

(b) $(100 - 52) : 4 = 12 \quad 2010 + 12 = 2022\,.$
Im Jahre 2022 sind die vier Geschwister zusammen 100 Jahre alt.

(c) $(163 - 52) : 4 = 111 : 4 = 27$ Rest 3. Es kommt also keine ganze Jahreszahl heraus; die vier Kinder werden nicht zusammen 163 Jahre alt.

2. In der Klasse 5a ist ein neues Rechenzeichen, nämlich das „$\heartsuit$" für natürliche Zahlen erfunden worden.
   Für dieses Zeichen gilt die Rechenvorschrift

   $x \heartsuit y = x^2 + x \cdot y$, wobei x und y Platzhalter für natürliche Zahlen sind.

   Beispiel: $x = 8$ und $y = 5$: $8 \heartsuit 5 = 8^2 + 8 \cdot 5 = 64 + 40 = 104$.
   (a) Berechne $1 \heartsuit 4$, $1 \heartsuit 5$, $1 \heartsuit 6$, ... , $1 \heartsuit 473589$.
   (b) Untersuche, ob für das Rechenzeichen $\heartsuit$ das Kommutativgesetz gilt.
   (c) $7 \heartsuit \square = 126$
   Welche Zahl gehört in das Kästchen?
   (d) Edwin hat etwas entdeckt: „$x \heartsuit x$ ergibt stets eine gerade Zahl!" Begründe, dass Edwin Recht hat.
   (e) Für welche Belegungen von x und y ergibt $x \heartsuit y$ stets eine ungerade Zahl? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) $1 \heartsuit 4 = 1^2 + 1 \cdot 4 = 5$,
$1 \heartsuit 5 = 1^2 + 1 \cdot 5 = 6$,
$1 \heartsuit 6 = 1^2 + 1 \cdot 6 = 7, \ldots,\; 1 \heartsuit 473589 = 1^2 + 1 \cdot 473589 = 473590$.

(b) Verwende ein Zahlenbeispiel: $8 \heartsuit 5 = 104$. (Siehe oben.)
Aber $5 \heartsuit 8 = 5^2 + 5 \cdot 8 = 65$. Das Kommutativgesetz gilt in diesem Fall nicht, also gilt es für das Rechenziechen $\heartsuit$ nicht.

(c) $7 \heartsuit \square = 126$ bedeutet:
$7^2 + 7 \cdot \square = 126 \quad \Rightarrow \quad 7 \cdot \square = 77 \quad \Rightarrow \quad \square = 11.$

(d) $x \heartsuit x = x^2 + x^2$.
Rechts wird zweimal die gleiche Zahl addiert, egal, welche Belegung des Platzhalters x du gerade wählst. Wenn du aber zu einer Zahl die gleiche Zahl addierst, kommt stets eine gerade Zahl heraus.

(e)

x ist gerade:	Dann ergibt $x^2 + xy$ eine gerade Zahl.
x ist ungerade und y ist ungerade:	Dann ergibt $x^2 + xy$ eine gerade Zahl.
x ist **ungerade** und y ist **gerade**:	**Dann ist $x^2 + xy$ ungerade.**

3. (a) Gib die größte fünfstellige natürliche Zahl an, deren Quersumme 13 beträgt.
   (b) Gib die kleinste fünfstellige natürliche Zahl an, deren Quersumme 13 beträgt.

Lösung: (a) 94 000
(b) 10 039

4. (a) Gib alle natürlichen Zahlen an, deren Ziffernprodukt 12 ergibt.
   (b) Wie viele natürliche Zahlen gibt es, deren Ziffernprodukt 7 ergibt? Begründe deine Antwort.
   (c) Wie viele natürliche Zahlen gibt es, deren Ziffernprodukt 13 ergibt? Begründe deine Antwort.
   (d) Ermittle mit Hilfe einer Tabelle systematisch alle dreistelligen natürlichen Zahlen, deren Ziffernprodukt 0 ergibt. Wie viele sind es insgesamt?

Lösung: (a) Es sind die Zahlen 34, 43, 62 und 26.
(b) Solche Zahlen sind z.B. 17, 117, 1117, 11117, ...; d.h. die Ziffer 1 lässt sich beliebig oft einfügen, ohne dass sich am Wert des Ziffernproduktes etwas ändert. Also gibt es **unendlich** viele solche natürliche Zahlen.
(c) Die Zahl 13 ist eine Primzahl. D.h. die 13 lässt sich nicht in Faktoren (außer 1) zerlegen, die kleiner als 13 sind. Weil jede natürliche Zahl aus lauter einstelligen Ziffern besteht, die 13 aber zweistellig ist, gibt es **keine** solche natürliche Zahl.
(d) Deine Tabelle könnte z.B. so aussehen:

	100	110	200	210	...	800	810	900	910
	101	120	201	220	...	801	820	901	920
	102	130	202	230	...	802	830	902	930
	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	109	190	209	290	...	809	890	909	990
Anzahl:	10	9	10	9	...	10	9	10	9

Die Einhunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.
Die Zweihunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.
...
Die Achthunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.
Die Neunhunderter liefern $10 + 9 = 19$ Zahlen.

Also sind es insgesamt $(10 + 9) \cdot 9 = 171$ solche natürliche Zahlen.

5.

$$2 \cdot 9\,089\,133 = 9\,089\,129 + \boxed{}$$

Welche Zahl gehört in das Kästchen, damit die Gleichung stimmt? Versuche, die Frage zu beantworten, ohne den Produktwert auf der linken Seite zu berechenen.

Lösung:

$$2 \cdot 9\,089\,133 = 9\,089\,129 + \boxed{9\,089\,137}$$

Begründung:
$2 \cdot 9\,089\,133 = 9\,089\,133 + 9\,089\,133$. Der erste Summand auf der rechten Seite der Aufgabe, nämlich $9\,089\,129$, hat einen um 4 geringeren Wert als $9\,089\,133$. Also muss der gesuchte Summand im Kästchen zum Ausgleich dafür einen um 4 höheren Wert als $9\,089\,133$ besitzen. Also muss im Kästchen die Zahl $9\,089\,137$ stehen.

6. (a)
   - Schreibe alle natürlichen Zahlen zwischen 8 und 15 auf.
   - Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen 8 und 15?
     Schreibe als Antwort einen vollständigen Satz.
   - Notiere eine Regel, nach der du die Anzahl der natürlichen Zahlen zwischen 8 und 15 ausrechnen kannst, ohne alle in Frage kommenden Zahlen hinzuschreiben.

   (b)
   - Wende deine Regel auf die Anzahl der natürlichen Zahlen an, die zwischen 57 und 74 liegen.
   - Überprufe deine Lösung durch Abzählen der betreffenden Zahlen.

   (c) Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen $103\,859$ und $801\,467$? Formuliere als Antwort wieder einen vollständigen Satz.

Lösung: (a)
- $\{9; 10; 11; 12; 13; 14\}$.
- Es sind sechs natürliche Zahlen.

- Z.B.: Bilde die Differenz der Randzahlen: $15 - 8 = 7$.
  Subtrahiere 1 vom Wert der Differenz: $7 - 1 = 6$.
  Also liegen sechs Zahlen dazwischen.

(b)
- $74 - 57 - 1 = 16$. Es liegen 16 natürliche Zahlen dazwischen.
- Klar.

(c) $801\,467 - 103\,859 - 1 = 697\,607$. Dazwischen liegen also 697 607 natürliche Zahlen.

7. Egon soll $5\,378 \cdot 2\,165$ ausrechnen. Er bekommt 9 643 375 heraus. Das ist jedoch falsch.
   (a) Begründe auf verschiedene Weise, zunächst ohne das richtige Ergebnis auszurechen, weshalb sein Ergebnis fehlerhaft ist.
   (b) Berechne das richige Ergebnis.

Lösung: (a) **1. Möglichkeit:**
Multipliziere die letzten Ziffern der zwei Faktoren: $8 \cdot 5 = 40$. Dann muss die letzte Ziffer des Produktwertes eine 0 werden und darf damit keine 5 sein.
2. Möglichkeit:
Eine Überschlagsrechnung zeigt: $5\,000 \cdot 2\,000 = 10\,000\,000$. Der richtige Produktwert muss also größer als 10 000 000 sein. Egon hat aber weniger als 10 000 000 errechnet.

(b) $5\,378 \cdot 2\,165 = 11\,643\,370$.

8. (a) Berechne die Summe aus allen zweistelligen Zahlen, wobei jeweils eine Ziffer doppelt so groß wie die andere ist.
   (b) Berechne die Teilermenge des Summenwertes.

Lösung: (a) $12 + 21 + 24 + 42 + 36 + 63 + 48 + 84 = 330$.

(b) $T_{330} = \{1; 3; 5; 6; 10; 11; 30; 33; 55; 66; 110; 330\}$.

9. (a) Schreibe eine dreistellige Zahl hin, die durch 10 teilbar ist.
   (b) Streiche die letzte Ziffer dieser Zahl. Dadurch erhältst du eine neue, zweistellige Zahl.
   (c)
   - Subtrahiere die neue Zahl von der ursprünglichen (dreistelligen) Zahl.
   - Untersuche ohne Division, ob das Ergebnis durch 9 teilbar ist.
   - Durch welche Zahl, die größer als 10 ist, ist dein Ergebnis noch teilbar?

   (d)
   - Wiederhole alle obigen Rechenschritte mit einer weiteren dreistelligen Zahl. Gelten deine vorherigen Feststellungen jetzt auch noch?
   - Notiere eine Begründung dafür, was du entdeckt hast.

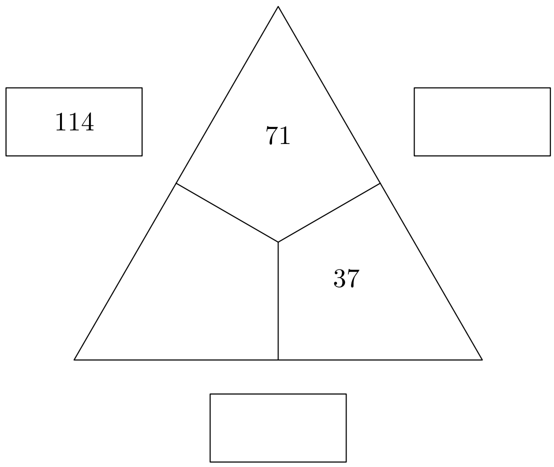
Lösung: (a) Z.B. 560 .

(b) Die neue, zweistellige Zahl.heißt dann 56 .

(c)
- $560 - 56 = 504$.
- Die Quersumme von 504 ergibt 9, also ist 504 durch 9 teilbar.
- $504 : 9 = 54$ also ist 504 auch durch 54, also durch die neue Zahl, teilbar.

(d)
- Die gemachten Feststellungen gelten stets.
- Die letzte Ziffer der ursprünglichen dreistelligen Zahl muss die Null sein. Wenn du die letze Ziffer streichst, dann entsteht eine Zahl, deren Zehnfaches die ursprüngleiche Zahl ist. Subtrahierst du von dieser ursprünglichen Zahl die neue Zahl, dann ergibt der Wert der Differenz das Neunfache der neuen Zahl. Also ist dieser Differenzwert nicht nur durch 9 sondern stets auch durch die neue (zweiziffrige) Zahl teilbar.

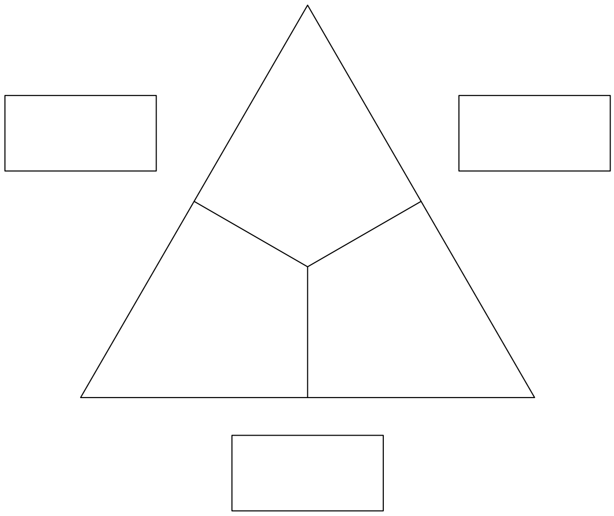
10.



In jedem der Rechtecke soll der Wert der Summe aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck stehen.

(a)
- Berechne die noch fehlenden Zahlen.
- Berechne den Wert der Summe aus den drei Zahlen im Dreieck.
- Berechne den Wert der Summe aus den drei Zahlen in den Rechtecken.
- Vergleiche die beiden Summenwerte. Notiere, was du feststellst.

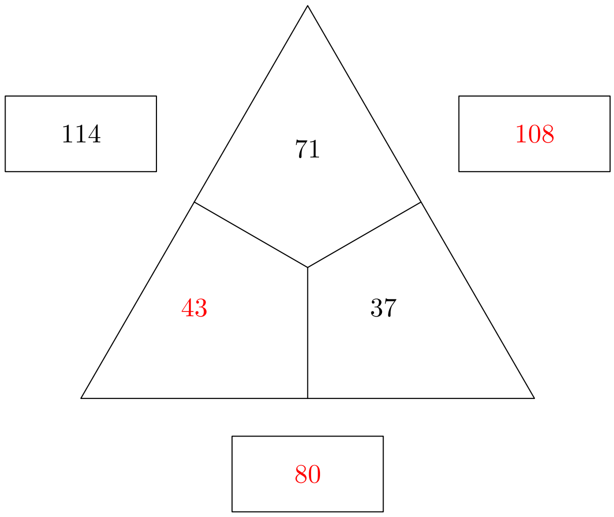
(b)
-



Fülle die Figur nach obigen Regeln mit Zahlen aus.

- Gilt der Zusammenhang zwischen den beiden Summenwerten innerhalb des Dreiecks und in den drei Rechtecken. jetzt auch noch? Notiere deine Antwort. Vergleiche sie mit der deines Nachbarn.
- Gilt das, was du herausgefunden hast, immer? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) •

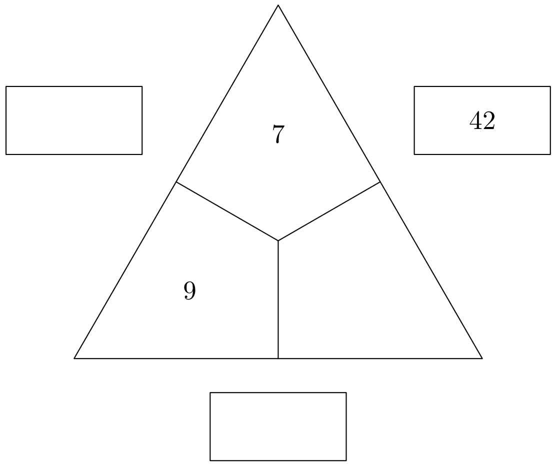


- Summe im Inneren des Dreiecks $S_1 = 43 + 37 + 71 = 151$.
- Summe der Zahlen in den drei Rechtecken: $S_2 = 80 + 108 + 114 = 302$.
- $S_2 = 2 \cdot S_1$.

(b)
- Es gibt beliebig viele verschiedene Möglichkeiten.
- Er gilt immer noch; auch dein Nachbar müsste das mit seinem Beispiel bestätigen.
- Beispiel: Die Zahl 114 in der Lösung (a) im Rechteck links oben. Dort ist die 71 gemäß der Regeln als Summand enthalten. Aber auch im Rechteck rechts oben

ist die Zahl 71 als Summand in der Zahl 108 enthalten. Also taucht die Zahl 71 bei der Berechnung des Summenwertes aus dem Inhalt der drei Rechtecke doppelt auf.
Dieses doppelte Auftreten gilt jeweils aber gleichermaßen für die Zahlen 37 und 43.
Also besteht die Summe aus dem Inhalt der drei Rechtecke stets aus dem Doppelten der drei einzelnen Zahlen im Dreieck.

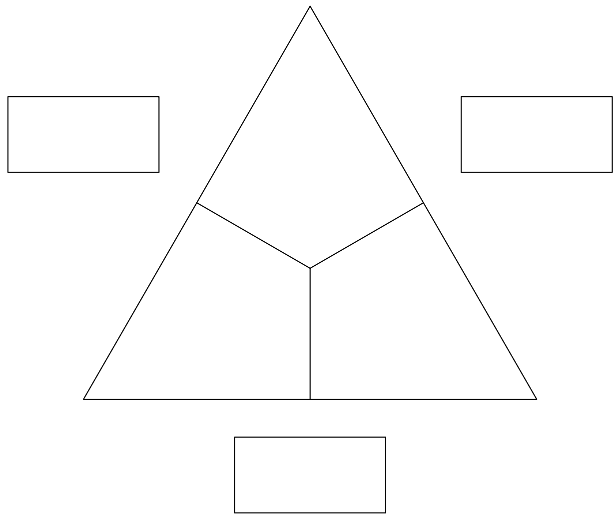
11.



In jedem der Rechtecke soll der Wert des Produktes aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck stehen.

(a)
- Berechne die noch fehlenden Zahlen.
- Berechne den Wert des Produktes aus den drei Zahlen im Dreieck.
- Berechne den Wert des Produktes aus den drei Zahlen in den Rechtecken.
- Dividiere den größeren Produktwert durch den kleineren. Notiere, was du feststellst.

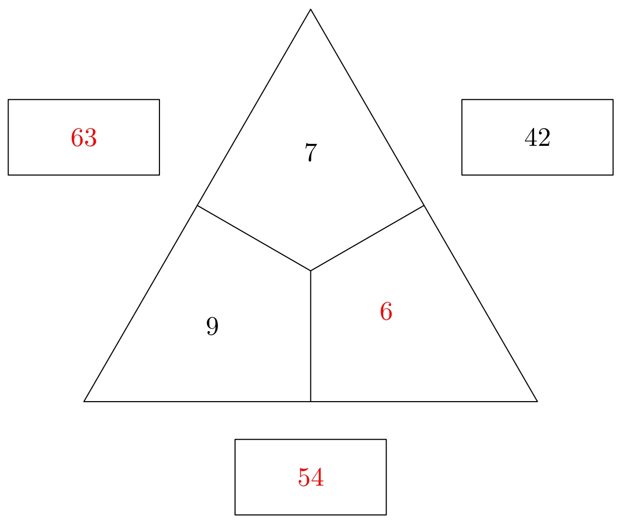
(b)
-



Fülle die Figur nach obigen Regeln mit Zahlen aus.

- Gilt der Zusammenhang zwischen den beiden Produktwerten innerhalb des Dreiecks und in den drei Rechtecken. jetzt auch noch? Notiere deine Antwort. Vergleiche sie mit der deines Nachbarn.
- Gilt das, was du herausgefunden hast, immer? Begründe deine Antwort.

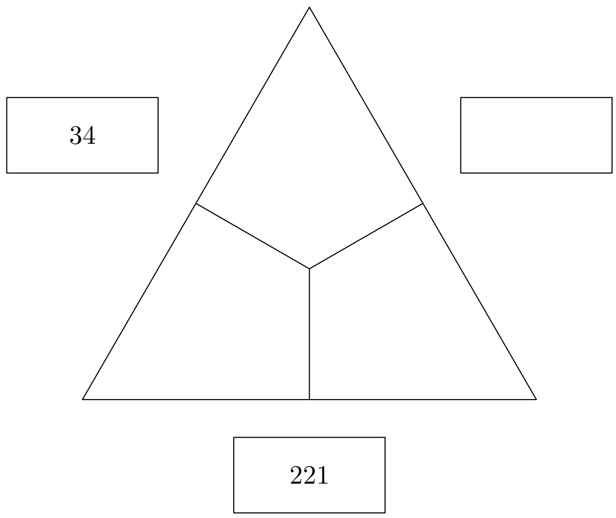
Lösung: (a) •



- Produkt im Inneren des Dreiecks $P_1 = 9 \cdot 6 \cdot 7 = 378\,.$
- Produkt der Zahlen in den drei Rechtecken: $P_2 = 54 \cdot 42 \cdot 63 = 142\,844\,.$
- $142\,844 : 378 = 378$; d.h. $P_2 : P_1 = P_1$ oder $P_2 = P_1^2\,.$

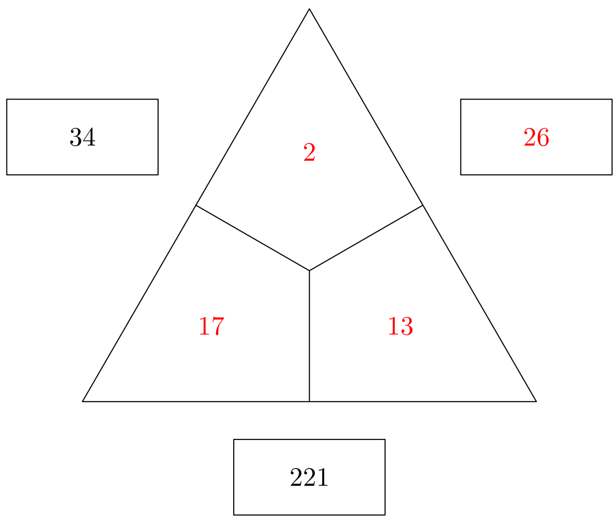
(b)
- Es gibt beliebig viele verschiedene Möglichkeiten.
- Er gilt immer noch; auch dein Nachbar müsste das mit seinem Beispiel bestätigen.
- Jede Zahl im Dreieck dient als Faktor für die Produktwerte in zwei Rechtecken. Also tauch jeder Faktor im Produkt der Zahlen aus den drei Rechtecken doppelt auf.

12.



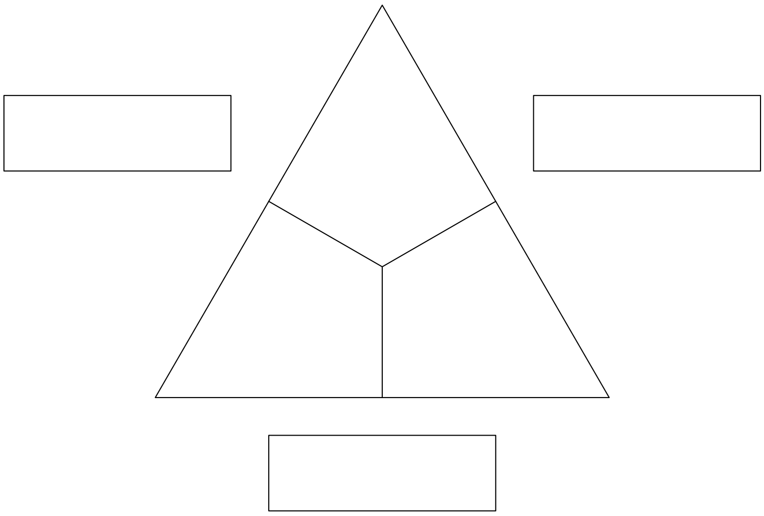
In die drei Felder im Dreieck gehören natürliche Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke der Wert des Produktes aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Zahlen.

Lösung:



Die Zahl 34 lässt sich sich nur auf eine Weise in Primfaktoren zerlegen :
$34 = 2 \cdot 17$. Weil aber 221 ungerade ist, darf nicht der Faktor 2 unten links im Dreieck stehen, sondern die 17. Der Rest ist klar.
Wenn du jedoch statt 34 zunächst 221 ins Auge fasst, ist die Zerlegung schwieriger, aber genauso eindeutig: $221 = 17 \cdot 13$.

13.



In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke das Produkt aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Wir nennen die Plätze, die mit ganzen Zahlen zu belegen sind, „Zellen“. Das Dreieck enthält drei Zellen und die Rechtecke außen stellen drei weitere Zellen dar. Untersuche, ob die folgenden Behauptungen wahr sind:

(a) Wenn eine Dreieckszelle mit null belegt ist, dann muss in zwei Außenzellen null stehen.

(b) Wenn eine Außenzelle mit null belegt ist, dann muss eine weitere Außenzelle null enthalten.

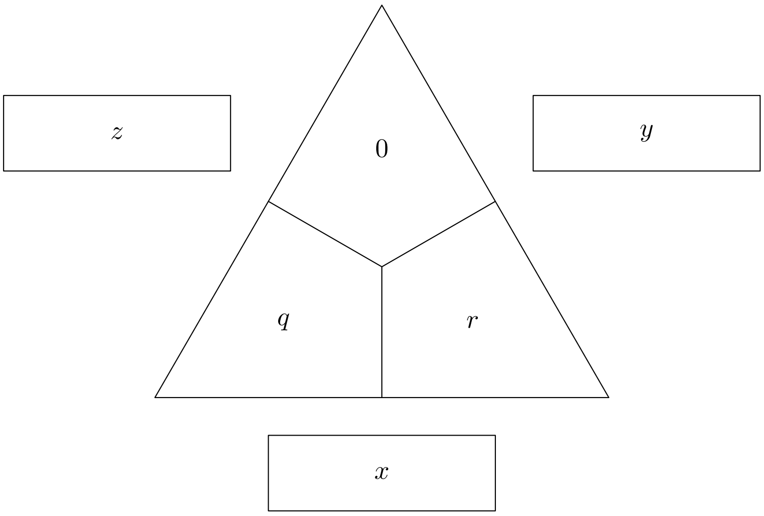
(c) Wenn in allen Außenzellen null steht, dann enthalten auch die inneren Dreieckszellen lauter Nullen.

Lösung: Du hast gelernt:

- **Wenn in einem Produkt ein Faktor null ist, dann ist der Produktwert null.**
- **Wenn der Produktwert null ist, dann muss ein Faktor dieses Produktes den Wert null besitzen.**

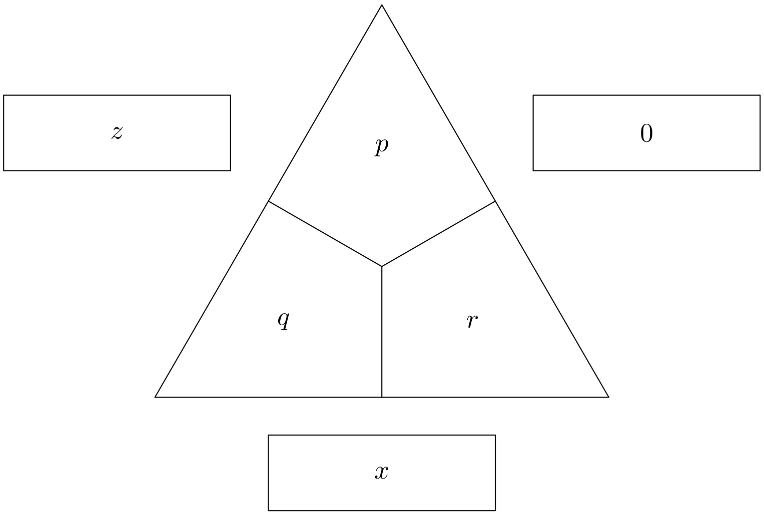
Mit der Anwendung dieser beiden Sätze kannst du die Behauptungen untersuchen:

(a)



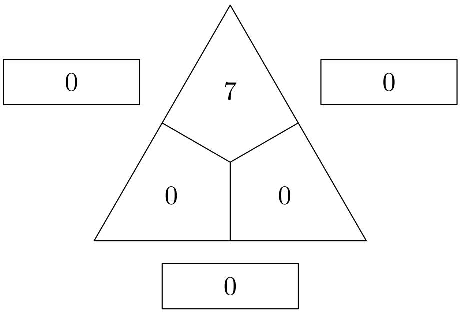
Angenommen, die Null steht oben in der Dreiecksspitze. Dann müssen die beiden Rechtecke oben rechts und links gemäß den eingangs festgelegten Regeln ebenfalls den Faktor null enthalten. Dann gilt aber $z = y = 0$. Die Behauptung ist richtig.

(b)



Angenommen, die Null steht im Rechteck oben rechts. Dann muss $p = 0$ oder auch $r = 0$ gelten. Die Behauptung ist richtig.

(c) Die Behauptung ist falsch. Zur Begründung genügt es, ein Gegenbeispiel zu finden.



14. Untersuche, ob die folgenden Behauptungen wahr sind:
   (a) Wenn du in einer Summe aus zwei Summanden den ersten und gleichzeitig den zweiten Summanden verdoppelst, dann verdoppelt sich der Summenwert.
   (b) Wenn du in einer Summe aus zwei Summanden den ersten Summanden halbierst und gleichzeitig den zweiten Summanden verdoppelst, dann bleibt der Summenwert unverändert..

Lösung: (a) Beispiel: Aus $13 + 17 = 30$ wird dann $2 \cdot 13 + 2 \cdot 17 = 60 = 2 \cdot 30 = 60 = 2 \cdot (13 + 17)$. Die Behauptung ist wahr.

(b) Beispiel: 1. Summand: 19 EURO. 19 EURO : 2 = 9 EURO und 50 Cent.
2. Summand: 17 EURO. 17 EURO $\cdot 2 = 34$ EURO.
19 EURO +17 EURO = 34 EURO $\neq$ 9 EURO und 50 Cent+34 EURO.
Die Behauptung ist falsch.

15. (a) Fritz behauptet: „Wenn du in einem Produkt aus zwei Faktoren den ersten Faktor halbierst und gleichzeitig den zweiten Faktor verdoppelst, dann bleibt der Produktwert unverändert.“ Untersuche, ob Fritz Recht hat.
   (b) Wie ändert sich der Wert des Produktes aus zwei Faktoren, wenn beide Faktoren gleichzeitig verdreifacht werden?
   - Beantworte die Frage anhand eines Beispiels.
   - Verwende $\square$ als Platzhalter für den ersten und $\bigcirc$ als Platzhalter für den zweiten Faktor.

   (c) „Wenn in einem Produkt aus zwei Faktoren jeder Faktor gleichzeitig verzehnfacht wird, dann ... “
   Schreibe den vollständigen Satz hin.

Lösung: (a) Beispiel: 1. Faktor: 46 ; 2. Faktor: 50; $46 \cdot 50 = 2300$
$46 : 2 = 23$; $50 \cdot 2 = 100$; $23 \cdot 100 = 2300$. Die Behaupung ist immer richtig. Wenn ein Faktor halbiert wird, dann wird der ganze Produktwert halbiert. Wird aber gleichzeitig der zweite Faktor verdoppelt, dann wird es auch der halbe Produktwert. Also belibt alles beim alten. Fritz hat Recht.

(b)
- Beispiel: 1. Faktor: 11 ; 2. Faktor: 9; $11 \cdot 9 = 99$
  $11 \cdot 3 = 33$; $9 \cdot 3 = 27$; $33 \cdot 27 = 891 = 99 \cdot 9$. Der Produktwert hat sich verneunfacht.
- Alter Produktwert: $\square \cdot \bigcirc$.
  Verdreifachung des ersten Faktors: $3 \cdot \square$; Verdreifachung des zweiten Faktors: $3 \cdot \bigcirc$.
  Neuer Produktwert: $3 \cdot \square \cdot 3 \cdot \bigcirc = 3 \cdot 3 \cdot \square \cdot \bigcirc = 9 \cdot \square \cdot \bigcirc$.

(c) „Wenn in einem Produkt aus zwei Faktoren jeder Faktor gleichzeitig verzehnfacht wird, dann verhundertfacht sich der Produktwert.“

16. (a) Addiere 36 zur doppelten Differenz aus 99 und 62 .
    (b)
    - Subtrahiere 124 von der Summe aus 198 und 36 .
    - Vergleiche das Ergebnis mit dem der Aufgabe (a).
    - Hast du eine Erklärung dafür?

Lösung: (a) $36 + 2 \cdot (99 - 62) = 36 + 2 \cdot 37 = 36 + 74 = 110$.

(b)
- $(198 + 36) - 124 = 234 - 124 = 110$.
- Du erhältst das gleiche Ergebnis wie in der Aufgabe (a).
- Die Klammern in der Lösung der Aufgabe (b) sind für das Rechenergebnis ohne Bedeutung.
  Weil Summanden vertauschbar sind, ohne dass sich der Summenwert ändert, kannst du das Ergebnis auch so rechnen:
  $36 + 198 - 124$.
  Nun sind 198 das Doppelte von 99 und 124 das Doppelte von 62 . Das bedeutet, dass auch hier der doppelte Inhalt der Klammern von der Aufgabe (a) ausgerechnet wird. Die Zahl 36 ist in beiden Aufgabe gleich. Also muss bei der Aufgabe (a) das gleiche herauskommen wie bei der Aufgabe (b).

17. Untersuche, ob 2^{1400} durch 14 teilbar ist.

Lösung: Der Wert der Potenz 2^{1400} enthält (neben der Eins) ausschließlich gerade Zahlen als Teiler. Die Zahl 14 ist durch 7 teilbar. Wenn 2^{1400} durch 14 teilbar wäre, dann müsste der **Potenzwert** (nicht der Exponent!) auch durch 7 teilbar sein. Das ist ein Widerspruch: 2^{1400} ist nicht durch 7 und damit auch nicht durch 14 teilbar

18. Paul rechnet eine Aufgabe:

$$(3 \cdot 17 + 9) : (23 - 46 : 2) = 60 : 0$$

(a) Überprüfe, ob seine Rechnung bis dahin stimmt.

(b) Paul rechnet weiter: $60 : 0 = 60$.
Erika hat zugeschaut. Sie meint: „Das kann nicht sein, denn $60 : 1 = 60$.“ Paul entgegnet: „Na und?“
Was hättest du Paul auf dessen Frage geantwortet?

(c) Erika probiert es anders. Sie rechnet $60 : 0 = 0$ und überprüft das Ergebnis mit der Umkehraufgabe.
- Schreibe die Umkehraufgabe hin. Stimmt Erikas Ergebnis?
- Notiere deine Überlegungen zur Aufgabe $60 : 0$.

- Wenn irgendeine natürliche Zahl durch null geteilt werden soll, dann ... . Notiere eine logische Fortsetzung.

Lösung: (a) $(3 \cdot 17 + 9) : (23 - 46 : 2)) = (51 + 9) : (23 - 23) = 60 : 0$. Bis dahin stimmt alles.

(b) Nach Pauls Ansicht wäre sowohl $60 : 0 = 60$ als auch $60 : 1 = 60$.
Für die Umkehraufgabe als Probe würde einerseits gelten: $60 \cdot 0 = 60$, was falsch ist, andererseits wäre $60 \cdot 1 = 60$, was stimmt. Pauls Ergebnis kann nicht stimmen.

(c)
- UA: $0 \cdot 0 = 60$, was nicht stimmt. Erikas Ergebnis ist auch falsch.
- Z.B.: Wenn der Wert des Quotienten von $60 : 0$ irgendeine natürliche Zahl „$\square \in \mathbb{N}_0$" wäre, dann müsste sich aus $60 : 0 = \square$ die UA $\square \cdot 0 = 60$ ergeben, was nicht stimmt, denn $60 \cdot 0 = 0$.
- Wenn irgendeine natürliche Zahl durch null geteilt werden soll, dann liefert die UA „Wert des Quotienten $\cdot\ 0 =$ natürliche Zahl" stets ein falsches Ergebnis; d.h. ist der Divisor null, dann gibt es keinen vernünftigen Wert des Quotienten.

19. Helmut rechnet eine Aufgabe:

$$(100 - 2 \cdot 10) \cdot (74 : 2 - 37) = 80 \cdot 0$$

(a) Überprüfe, ob seine Rechnung bis dahin stimmt.

(b) Helmut rechnet weiter: $80 \cdot 0 = 80$.
Beate hat zugeschaut. Sie meint: „Das kann aber nicht stimmen." Erkläre anhand eines Beispiels oder einer kleinen Geschichte, dass Beate Recht hat.

(c) Ursula rechnet anders, nämlich $80 \cdot 0 = 0$. Zur Probe rechnet sie die Umkehraufgabe: $0 : 0 = 80$. Notiere deine Überlegungen zu $0 : 0 = 80$.

Lösung: (a) $(100 - 2 \cdot 10) \cdot (74 : 2 - 37) = (100 - 20) \cdot (37 - 37) = 80 \cdot 0$. Bis dahin stimmt alles.

(b) Im Kino sitzen 80 Zuschauer. Während der Vorführung geht der Filmprojektor kaputt. Die Zuschauer können den Film nicht zu Ende sehen. Als Entschädigung bekommt jeder Besucher 0 EURO. Nach Helmuts Rechnung würden dann insgesamt 80 EURO ausgezahlt.

(c) Weshalb soll bei $0 : 0$ „ausgerechnet" 80 herauskommen?
Bisher galt die Regel: Wenn in einem Quotienten der Dividend und der Divisor den gleichen Wert besitzen, dann hat der Quotient den Wert 1. Aber, ob das bei $0 : 0$ auch noch stimmt?

20. Fülle das Malkreuz vollständig aus:

•		
	26	39
		51

Lösung:

•	2	3
13	26	39
17	34	51

21.
- Notiere eine fünfstellige Zahl.
- Streiche die mittlere Ziffer. Dadurch entsteht eine neue, vierstellige Zahl.
- Subtrahiere die vierstellige von der fünfstelligen Zahl.

(a) Notiere einen möglichst großen Teiler des Differenzwertes.

(b)
- Wiederhole die Einzelschritte mit einer anderen fünfstelligen Zahl. Notiere wieder einen möglichst großen Teiler.
- Vergleiche dein Ergebnis mit dem deiner Banknachbarn.
- Ist das immer so? Begründe.

(c) Tim behauptet: „Da kannst du mit jeder beliebigen natürlichen Zahl experimentieren. Dieser Teiler stellt sich dann stets ein.“
Erna widerspricht: „Das stimmt nicht immer. Die Stellenzahl muss … . Wenn das aber der Fall ist, dann stoßen wir stets auf diesen großen Teiler.“
- Welcher Inhalt steckt in den drei Punkten? Notiere den vollständigen Satz.
- Begründe, dass Erna mit den Teiler Recht hat.

Lösung: (a) Nimm z.B. die Zahl 72 538. Daraus wird 7 238. $72\,538 - 7238 = 65\,300$.
Der möglichst große Teiler ist 100.

(b) • Als möglichst großen Teiler erhältst du wieder 100 ..

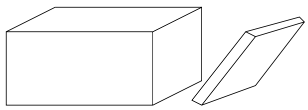
• Auch Deine Banknachbarn müssten diesen Teiler in ihrem Ergebnis wiederfinden.

• Die letzten beiden Ziffern im Minuenden und im Subtrahenden stimmen stets überein. Dann müssen die letzten beiden Ziffern des Differenzwertes Nullen sein. Allso ist der Wert der Differenz immer durch 100 teilbar.

(c) • „Die Stellenzahl muss **mindestens drei betragen und ungerade sein**.“ (Ist die Stellenzahl gerade, dann gibt es keine „mittlere Ziffer“.)

• Weil dann in jedem Fall wieder Minuend und Subtrahend auf die gleichen beiden Ziffern enden, stehen beim Differenzwert am Ende zwei Nullen. Also ist 100 stes ein Teiler des Ergebnisses.

22.



Im altägyptischen „Papyrus Rhind“ (ca. 1650 v.Chr.) wird die Frage aufgeworfen, wie neun Brote auf zehn Personen gerecht aufgeteilt werden können.

(a) Egon meint: „Das ist doch nicht schwer; man muss halt $\frac{9}{10}$ eine jeden Brotes abmessen und dann alles verteilen.“ Edwin hat jedoch Einwände: „Dann bekäme am Ende eine Person ....“
Welches Problem hat Edwin erkannt?

(b) Die Alten Ägypter zerlegten $\frac{9}{10}$ in eine Summe aus verschiedenen Brüchen:

$$\frac{9}{10} = \bigcirc + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}$$

• Welcher Bruchteil muss an Stelle des Kreises eingesetzt werden?

• Angenommen, jedes der neun Brote hat die Form eines 30 cm langen Quaders.
Wie würden solche Brote dann zerlegt? Hältst du diese Teilung für besser als den Vorschlag von Egon? Begründe deine Anwort.

Lösung: (a) Es bekämen neun Personen fast ein ganzes Brot, die zehnte Person aber erhielte neun einzelne Scheiben, die im Laufe der Zeit eher austrocknen als ein großes Stück Brot.

(b) • $\frac{9}{10} = \frac{27}{30} = \bigcirc + \frac{6}{30} + \frac{1}{30} \qquad \frac{27}{30} = \bigcirc + \frac{7}{30}$.

$\bigcirc = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

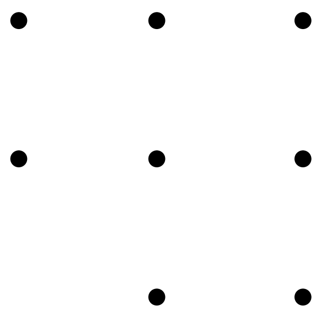
• Neun Personen bekämen jeweils folgende Brotabschnitte:

$\frac{2}{3}$ von $30\,\text{cm} + \frac{1}{5}$ von $30\,\text{cm} + \frac{1}{30}$ von $30\,\text{cm} =$

$20\,\text{cm} + 6\,\text{cm} + 1\,\text{cm} = 27\,\text{cm}\,.$

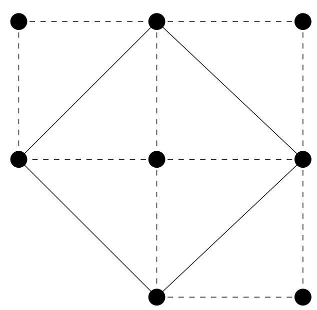
Die zehnte Person bekommt neun Abschnitte, die jeweils 3 cm lang sind:
$9 \cdot 3\,\text{cm} = 27\,\text{cm}\,.$
Diese Aufteilung erfordert zunächst mehr Arbeit, weil jedes Brot nicht nur in zwei, sondern in vier Teile zerschnitten werden muss. Neun Personen bekommen dabei neben zwei größeren Stücken jeweils eine 1 cm dünne Scheibe. Die zehnte erhält lauter gleiche Abschnitte, die jeweils 3 cm lang sind. Diese Aufteilung scheint etwas gerechter zu sein.

23.



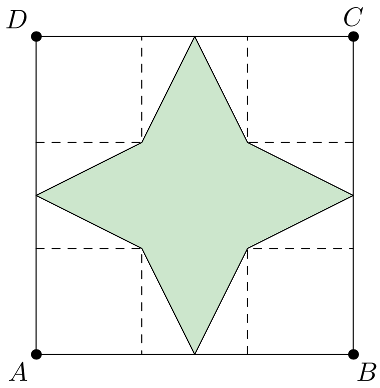
Wie viele Quadrate kannst du erzeugen, wenn du Punkte im Gitter durch Strecken verbindest?
Aus: Känguru der Mathematik 2008, Gruppe Kadett, Österreich 31.03.2008

Lösung:



Die acht Punkte scheinen nur drei Quadrate herzugeben, aber die vier schrägen Strecken liefern ein weiteres Quadrat. Also sind es insgesamt vier Quadrate, die du so erzeugen kannst.
Das große Quadrat hat den gleichen Flächeninhalt wie zwei kleine Quadrate.

24.

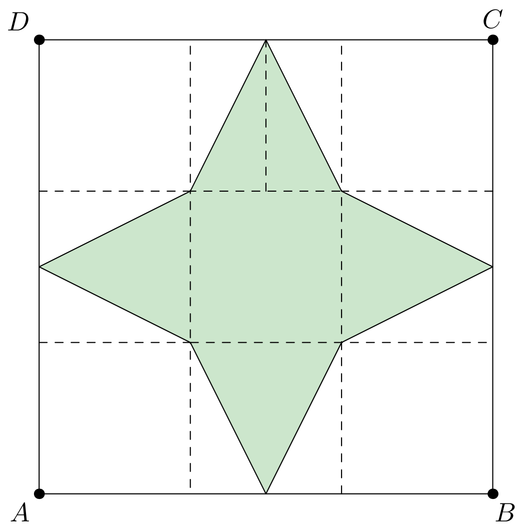


Jede Seite des Quadrates $ABCD$ ist in drei gleiche Teile geteilt worden. Dadurch ist der symmetrische vierzackige Stern entstanden.

(a) Zeichne den Stern in ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm.

(b) Welchen Bruchteil der Quadratfläche nimmt der Stern ein?

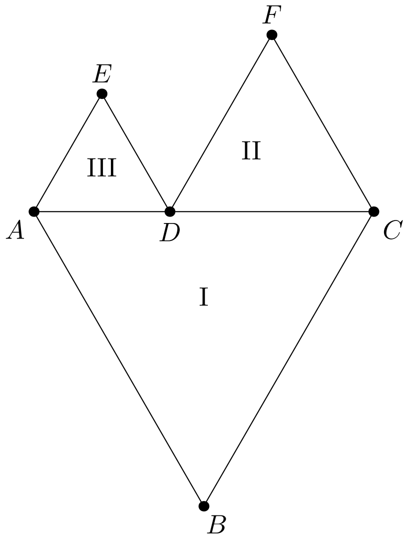
Lösung: (a)



(b) Das Quadrat $ABCD$ fügt sich aus neun gleich großen gestrichelten Quadraten zusammen.Also bedeckt eines dieser kleinen Quadrate $\frac{1}{9}$ der Fläche des großen Quadrates $ABCD$.
Das kleine Quadrat oben in der Mitte wird in zwei kongruente Rechtecke geteilt. Der Rand des Sterns teilt dort jedes dieser Rechtecke in zwei gleiche Hälften. Also nimmt die Sternspitze im obigen kleinen Quadrat gerade dessen halbe Fläche ein. Die vier Sternspitzen sind also genau so groß wie zwei kleine Quadrate.
Das Zentrum des Sterns ist wiederum ein kleines Quadrat.
Somit ist der Stern genauso groß wie drei kleine gestrichelte Quadrate.

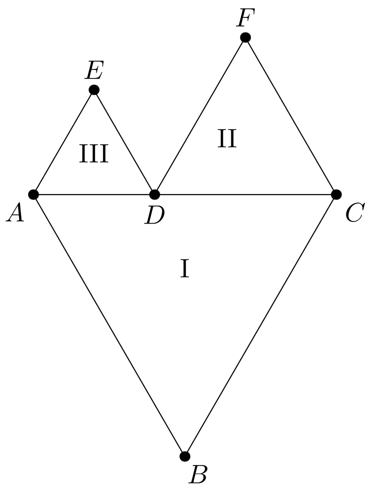
$$A_{Stern} = \frac{3}{9} \cdot A_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABCD} \,.$$

25.



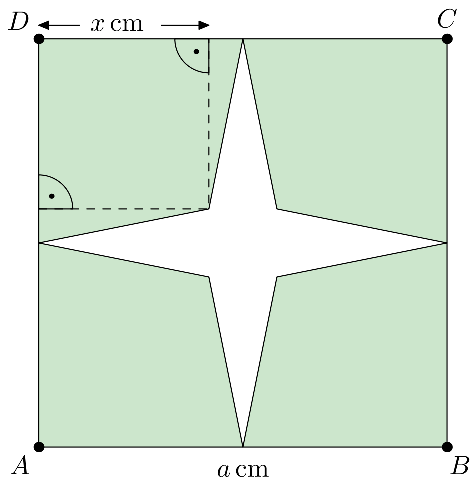
Die Figur setzt sich aus drei jeweils gleichseitigen Dreiecken zusammen.
Der Umfang u_{I} des Dreiecks ABC beträgt $16,8\,\mathrm{cm}$ und der Umfang u_{II} des Dreiecks DCF beträgt $14,1\,\mathrm{cm}$. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Berechne den Umfang u_{III} des Dreiecks ADE.

Lösung:



Den Umfang u eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a berechnest du mit $u = 3 \cdot a$.
Aus $u_{\mathrm{I}} = 16,8\,\mathrm{cm}$ folgt $\overline{AC} = 16,8\,\mathrm{cm} : 3 = 5,6\,\mathrm{cm}$.
Aus $u_{\mathrm{II}} = 14,1\,\mathrm{cm}$ folgt $\overline{DC} = 14,1\,\mathrm{cm} : 3 = 4,7\,\mathrm{cm}$.
Dann folgt $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{DC} = 5,6\,\mathrm{cm} - 4,7\,\mathrm{cm} = 0,9\,\mathrm{cm}$.
$\Rightarrow \quad u_{II} = 3 \cdot 0,9\,\mathrm{cm} = 2,7\,\mathrm{cm}$.

26.

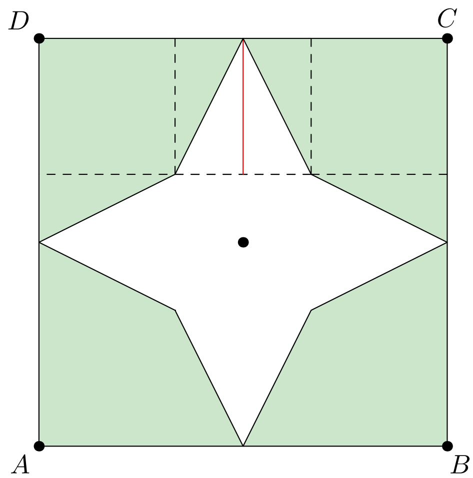


Der Stern in der Mitte entsteht, wenn du wie am Punkt D gezeigt, auch anden drei anderen Eckpunkten ein Qadrat mit den gestrichelten Hilfslinien einzeichnest.

(a) Zeichne für $x = 2$ den Stern in ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 6 cm.

(b) Welchen Bruchteil der Quadratfläche nimmt der Stern ein?

Lösung: (a)



(b) Das Quadrat $ABCD$ fügt sich aus neun gleich großen gestrichelten Quadraten zusammen.Also bedeckt eines dieser kleinen Quadrate $\frac{1}{9}$ der Fläche des großen Quadrates $ABCD$.
Das kleine Quadrat oben in der Mitte wird in zwei kongruente Rechtecke geteilt. Der Rand des Sterns teilt dort jedes dieser Rechtecke in zwei gleiche Hälften. Also nimmt die Sternspitze im obigen kleinen Quadrat gerade dessen halbe Fläche ein. Die vier Sternspitzen sind also genau so groß wie zwei kleine Quadrate.
Das Zentrum des Sterns ist wiederum ein kleines Quadrat.
Somit ist der Stern genauso groß wie drei kleine gestrichelte Quadrate.

$$A_{Stern} = \frac{3}{9} \cdot A_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABCD} \,.$$

27. Dr. Stuart Savory hat eine Regel veröffentlicht, wie man überprüfen kann, ob eine natürliche Zahl (z.B. 1295) durch 7 teilbar ist:

- Streiche die letzte Ziffer (im Beispiel die „5“, das ergibt 129).
- Subtrahiere das Doppelte der gestrichenen Zahl von der Restzahl: $129 - 2 \cdot 5 = 119$.
- Wenn 119 durch 7 teilbar ist dann ist auch 1295 durch 7 teilbar. Das ist hier der Fall.
- Wenn du nicht mit einer gewöhnlichen Division ausrechenen willst, ob 119 durch 7 teilbar ist, kannst du jetzt das Experiment wiederholen:
  $11 - 2 \cdot 9 = 11 - 18 = -7$ und $\mid -7 \mid = 7$ ist durch 7 teilbar. (Für negative Zahlen ist die Division durch 7 kaum in Gebrauch; daher die Betragsstriche.)

(a) Überprüfe mit dieser Regel die folgenden Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 7: 1386; 1814; 4648; 4873; 5096; 4473; 44 730 und schließlich 1 000 007.
Für die beiden letzten Zahlen kannst du auch ohne die Regel eine Entscheidung treffen.

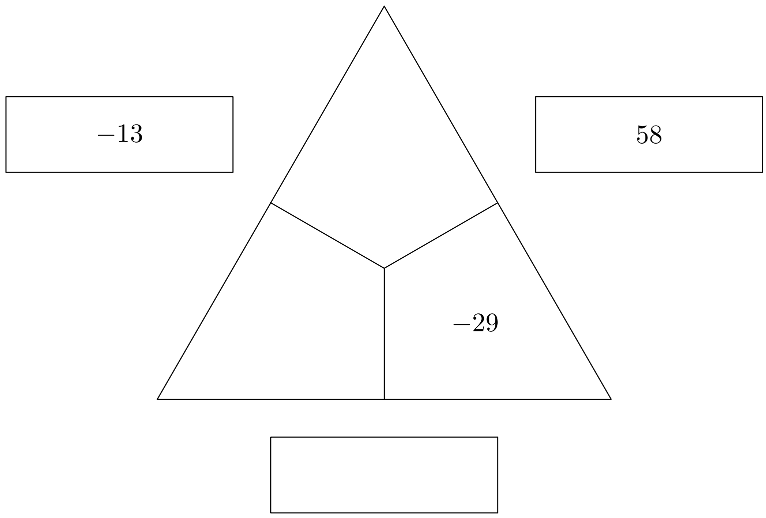
(b) Diese Teilbarkeitsregel von Dr. Savory zu lernen, ist im Schullehrplan nicht vorgesehen. Welchen Grund könnte das haben? Formuliere eine Antwort.

Lösung: (a) 1386: Ja.
1814: Nein.
4648: Ja.
4873: Nein.
5096: Ja.
4473: Ja.
44 730: Ja. Klar, denn, wenn 4473 durch 7 teilbar ist, dann ist es auch 44 730.

1 000 007: Nein. Nur, wenn 1 000 00 durch 7 teilbar wäre, dann wäre es auch 1 000 007. Aber 1 000 00 ist wegen der sechs Nullen am Ende nicht durch 7 teilbar. Also ist es auch 1 000 007 nicht.

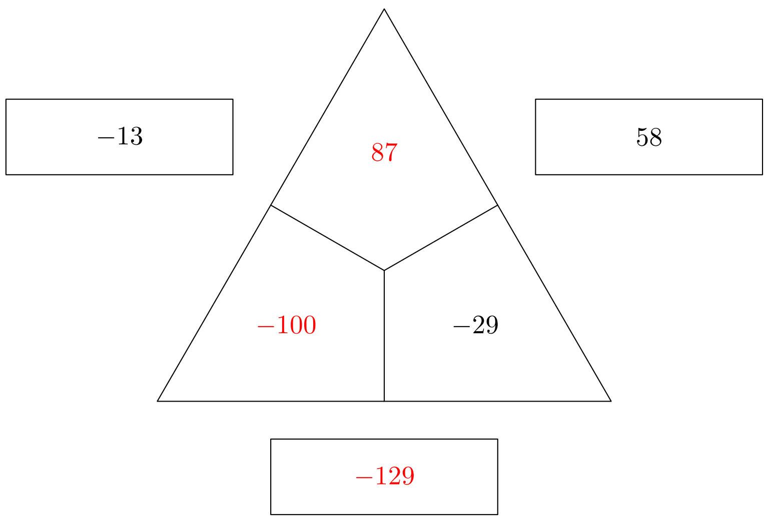
(b) Diese Teilbarkeitsregel ist in den allermeisten Fällen umständlich zu handhaben. Meist kommt man durch direktes Dividieren genauso schnell oder sogar schneller, wie das Beispiel 1 000 007 zeigt, zum Ziel.

28.

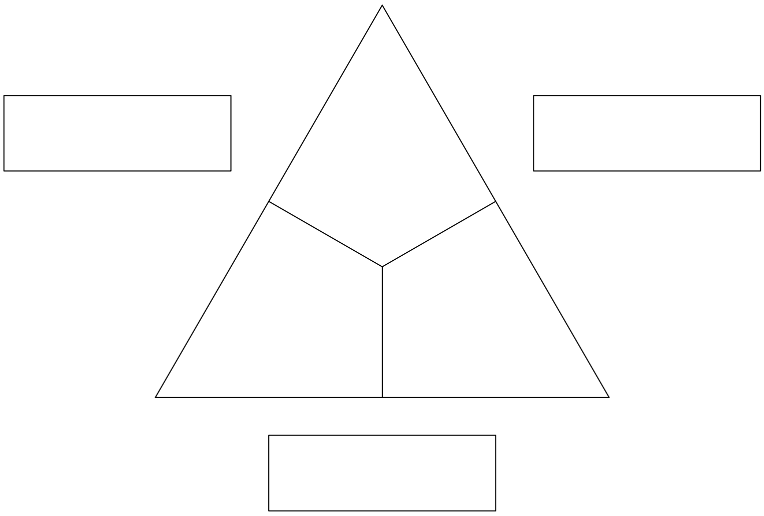


In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke der Wert der Summe aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Zahlen.

Lösung:



29.



In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke das Produkt aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Wir nennen die Plätze, die mit ganzen Zahlen zu belegen sind, „Zellen“. Das Dreieck enthält drei Zellen und die Rechtecke außen stellen drei weitere Zellen dar. Untersuche, ob die folgenden Behauptungen wahr sind:

(a) Wenn eine Dreieckszelle mit null belegt ist, dann muss in zwei Außenzellen null stehen.

(b) Wenn eine Außenzelle mit null belegt ist, dann muss eine weitere Außenzelle null enthalten.

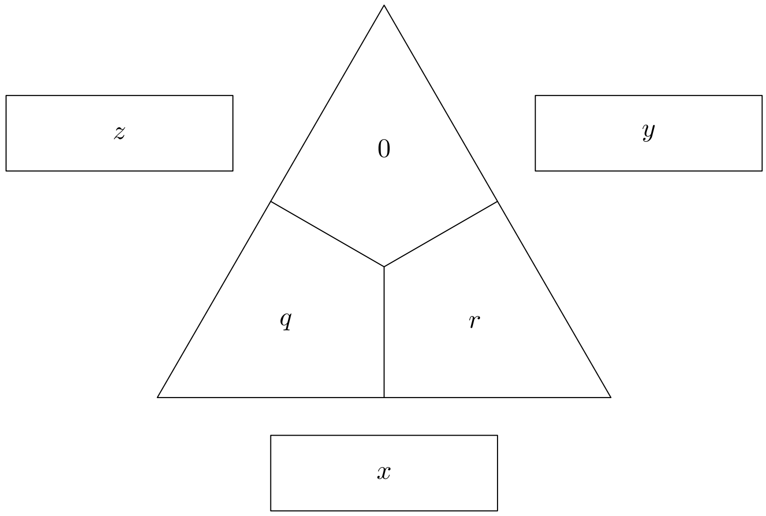
(c) Wenn in allen Außenzellen null steht, dann enthalten auch die inneren Dreieckszellen lauter Nullen.

Lösung: Du hast gelernt:

- **Wenn in einem Produkt ein Faktor null ist, dann ist der Produktwert null.**
- **Wenn der Produktwert null ist, dann muss ein Faktor dieses Produktes den Wert null besitzen.**

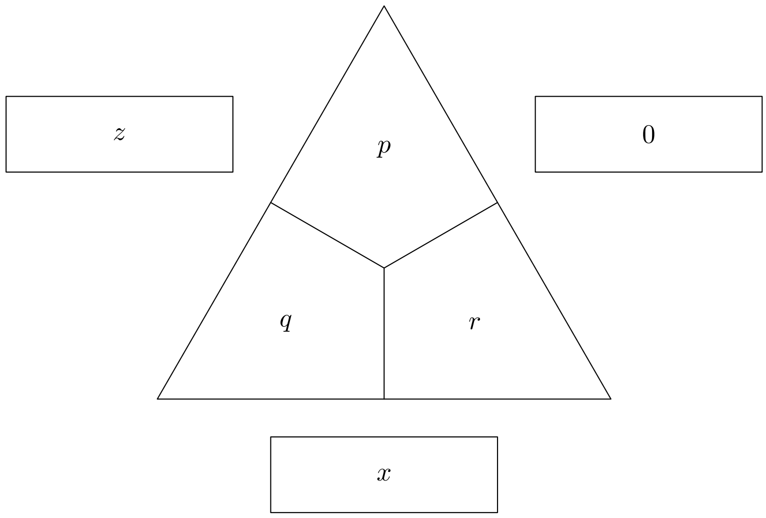
Mit der Anwendung dieser beiden Sätze kannst du die Behauptungen untersuchen:

(a)



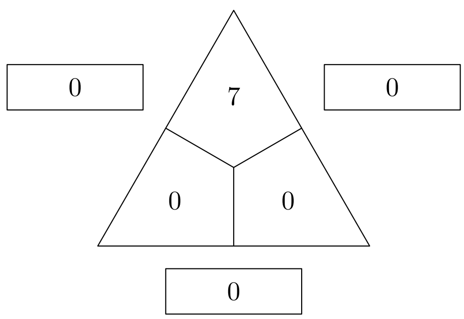
Angenommen, die Null steht oben in der Dreiecksspitze. Dann müssen die beiden Rechtecke oben rechts und links gemäß den eingangs festgelegten Regeln ebenfalls den Faktor null enthalten. Dann gilt aber $z = y = 0$. Die Behauptung ist richtig.

(b)

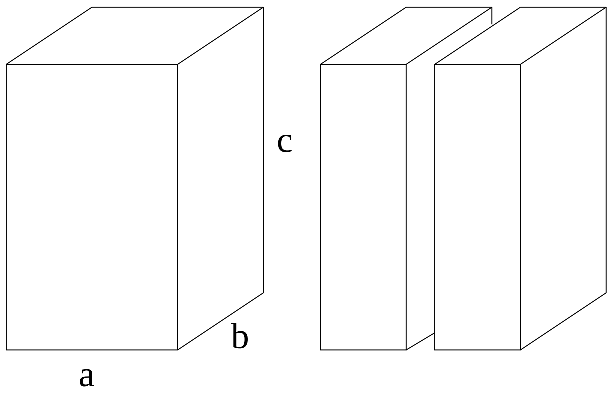


Angenommen, die Null steht im Rechteck oben rechts. Dann muss $p = 0$ oder auch $r = 0$ gelten. Die Behauptung ist richtig.

(c) Die Behauptung ist falsch. Zur Begründung genügt es, ein Gegenbeispiel zu finden.



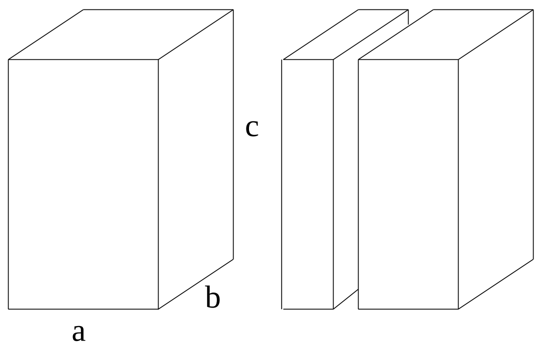
30.



Ein quaderförmiger Holzklotz mit $a = 2\,\mathrm{dm}$, $b = 2{,}5\,\mathrm{dm}$ und $c = 3\,\mathrm{dm}$ wird mit einer Axt so halbiert, wie es die obige Darstellung zeigt.

(a) Um wie viel Prozent hat sich jetzt die Oberfläche der beiden Hälften im Vergleich zu der des massiven Holzklotzes vergrößert? Gib den Prozentsatz auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet an.

(b)



Hätte sich am Rechenergebnis der Aufgabe (a) etwas geändert, wenn die Axt nicht die Mitte getroffen hätte? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a)

$$\begin{aligned} O_{ganz} &= 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2 \cdot (5\,\mathrm{dm}^2 + 6\,\mathrm{dm}^2 + 7{,}5\,\mathrm{dm}^2) \\ O_{ganz} &= 37\,\mathrm{dm}^2 \\ 2 \cdot O_{Hälfte} &= 2 \cdot 2 \cdot (2{,}5\,\mathrm{dm}^2 + 3\,\mathrm{dm}^2 + 7{,}5\,\mathrm{dm}^2) \\ O_{Teile} &= 52\,\mathrm{dm}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{52\,\mathrm{dm}^2 - 37\,\mathrm{dm}^2}{37\,\mathrm{dm}^2} = \frac{15}{37} = 0{,}40540\ldots \approx 40{,}54\%$$

(b) Die Oberfläche der beiden Teile wäre auch hier nur um den doppelten Betrag einer rechteckigen Seitenfläche mit den Längen b und c angewachsen. Das ändert am Ergebnis nichts.

31. Früher hatte eine Schachtel Lebkuchen der Firma „Timz“ 1500 g Inhalt.
Für das kommende Weihnachtsgeschäft kommen nur noch 1200 g in eine Schachtel, die aber das Gleiche kostet wie früher die mit 1500 g Inhalt.
Um wie viel Prozent hat die Firma „Timz“ ihre Lebkuchen verteuert?

Lösung: **1. Möglichkeit:** Rechne mit einem Zahlenbeispiel.

Früher:	1500 g kosteten z.B. 12 EURO .	$\Rightarrow$	100 g kosteten dann 80 Cent .
Jetzt :	1200 g kosten auch 12 EURO .	$\Rightarrow$	100 g kosten dann 1 EURO .

100 g Lebkuchen sind also um 20 Cent teurer geworden.

$$\frac{20\,\text{Cent}}{80\,\text{Cent}} = 0,25 = 25\%$$

Die Lebkuchen sind also um 25% teurer geworden.

2. Möglichkeit: Die Lebkuchen kosten x EURO.

Früher:	1500 g kosteten x EURO .	$\Rightarrow$	100 g kosteten dann $\frac{x}{15}$ EURO .
Jetzt :	1200 g kosten auch x EURO .	$\Rightarrow$	100 g kosten dann $\frac{x}{12}$ EURO .

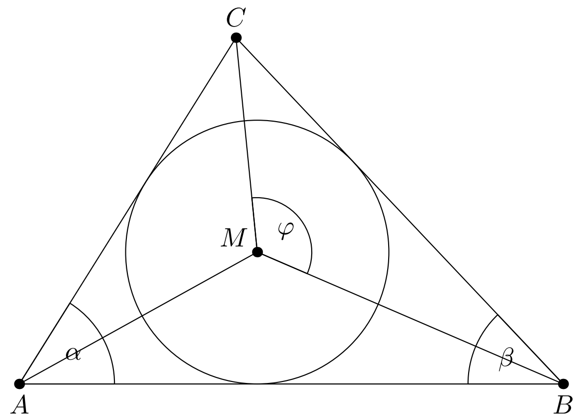
100 g Lebkuchen sind also um $\frac{x}{12}$ EURO $-$ $\frac{x}{15}$ EURO teurer geworden.

$$\left(\frac{x}{12} - \frac{x}{15}\right)\,\text{EURO} = \frac{x}{60}\,\text{EURO}$$

$$\frac{x}{60}\,\text{EURO} : \frac{x}{15}\,\text{EURO} = \frac{15}{60} = 0,25 = 25\%$$

Das Ergebnis ist das gleiche wie oben.

32.



Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist der Punkt M.

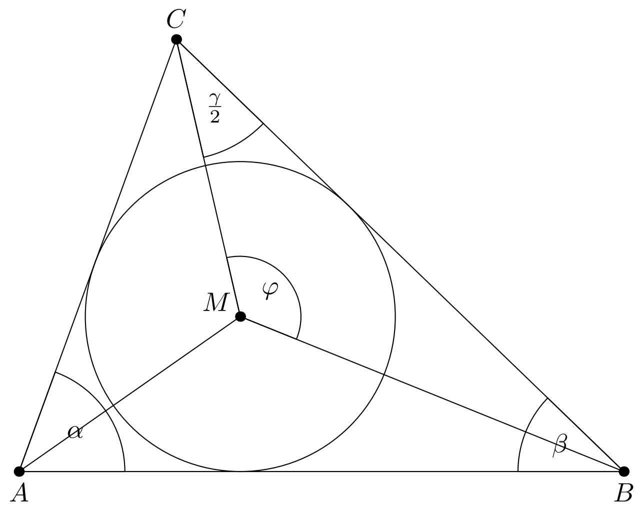
(a) Zeichne die Figur für $\alpha = 70°$, $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 44°$.

(b) Berechne das Maß φ des Winkels BMC.

(c)
- Berechne für $\beta = 60°$ erneut das Winkelmaß φ.
  Was fällt dir auf?
- Zeige: $\varphi = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$.

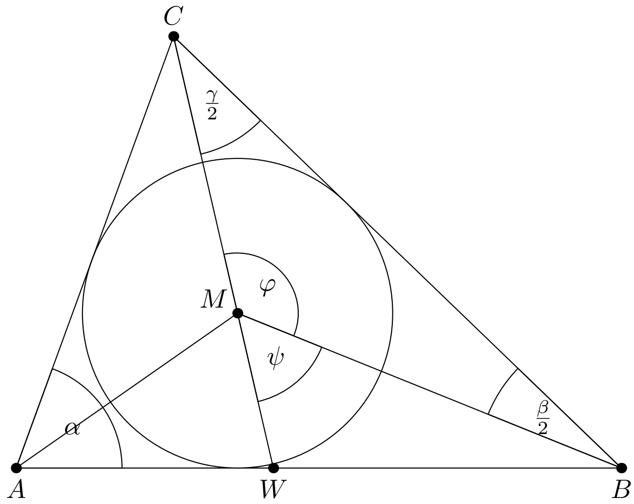
(d) Berechne α für $\varphi = 135,68°$.

Lösung: (a)



(b) $\gamma = 180° - 70° - 44° = 66°$.
Die drei Winkelhabierenden des Dreiecks ABC schneiden sich im Inkreismittelpunkt M.
Also folgt: $\varphi = 180° - 0,5 \cdot 44° - 0.5 \cdot 66° = 125°$.

(c)
- $\gamma = 180° - 70° - 60° = 50°$.
  $\varphi = 180° - 0,5 \cdot 60° - 0.5 \cdot 50° = 125°$.
  Das Winkelmaß φ hängt gar nicht vom Winkelmaß β ab.
-



Der Winkel mit dem Maß ψ ist ein Außenwinkel am Dreieck MBC: $\Rightarrow \quad \psi = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

Gleichzeitig gilt $\varphi = 180° - \psi$.

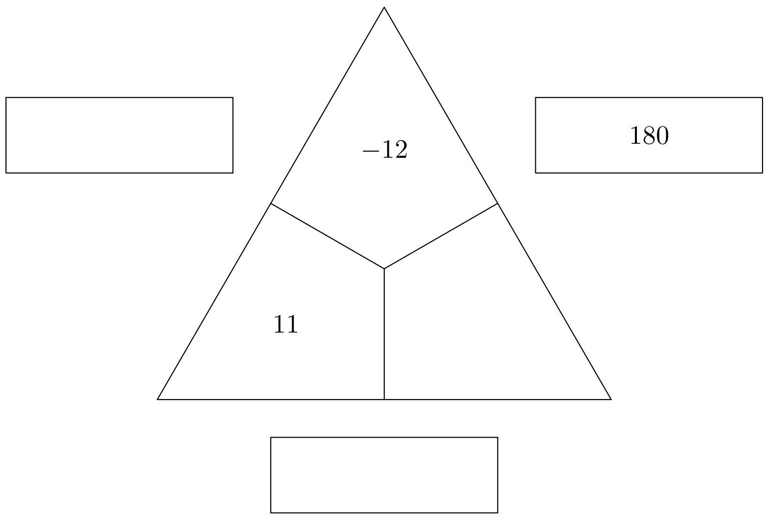
Wegen $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ folgt $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Also ergibt sich: $\varphi = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Und damit $\varphi = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

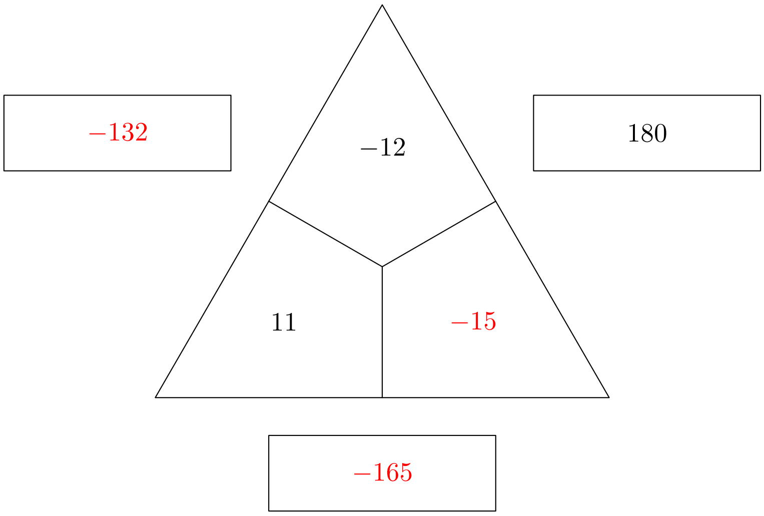
(d) $90° + \frac{\alpha}{2} = 135,68° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 91,36°$.

33.

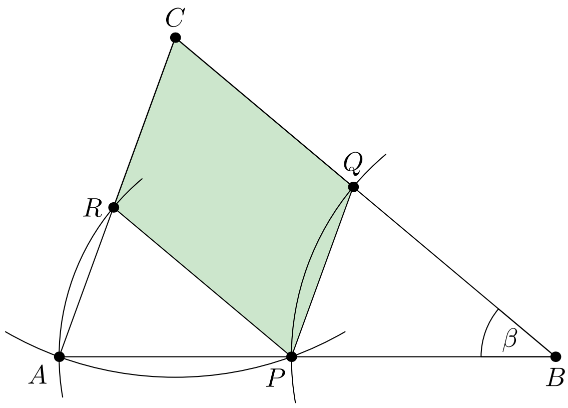


In die drei Felder im Dreieck gehören ganze Zahlen, wobei in jedem der Rechtecke der Wert des Produktes aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Zahlen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Zahlen.

Lösung:



34.

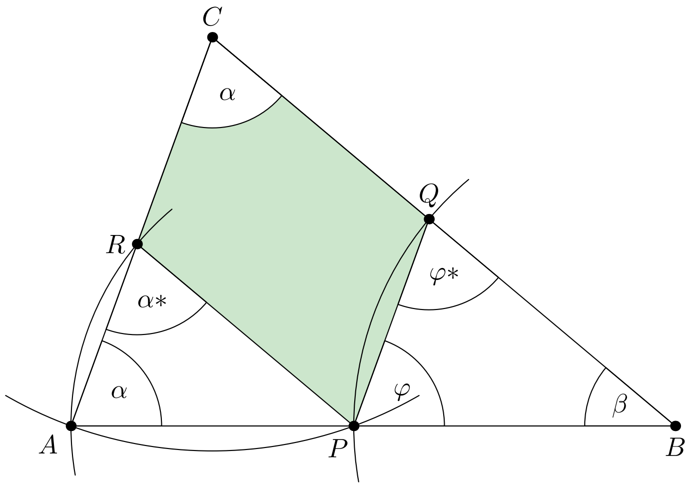


In der obigen Figur gilt: $\overline{AB} = \overline{BC}$. Die Punkte C, P und B sind jeweils die Mittelpunkte der betreffenden Kreisbögen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe: das Viereck $PCQR$ ist ein Parallelogramm.

Lösung: (a)



(b) Wegen $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt $\sphericalangle ACB = \alpha$.
Das Dreieck APR ist gleichschenklig mit der Basis $[AR]$
$\Rightarrow \quad \alpha = \alpha*$ und damit auch $\alpha* = \sphericalangle ACB$.
Damit sind α und $\sphericalangle ACB$ F-Winkel. $\Rightarrow \quad [PR] \parallel [CQ] \quad (1)$.
Im gleichschenkligen Dreieck ABC glt: $\alpha = (180° - \beta) : 2$.
Im gleichschenkligen Dreieck PBQ glt: $\varphi = (180° - \beta) : 2 = \alpha$.
Damit sind α und $\sphericalangle BPQ$ F-Winkel. $\Rightarrow \quad [PQ] \parallel [RC] \quad (2)$.
Also sind im Viereck $PQCR$ wegen (1) und (2) jeweils die beiden gegenüber liegenden Seiten parallel. Also handelt es sich um ein Parallelogramm.

35. Egon bildet die Spiegelzahlen von zweiziffrigen Zahlen, indem er deren Ziffern jeweils vertauscht. Dann errechnet er vom jeweilgen Zahlenpaar die Summe, z.B. so:
$13 + 34 = 44$ oder $81 + 18 = 99$ oder $25 + 52 = 77$.
„Komisch, der Summenwert besteht stets aus zwei gleichen Ziffern. Ist das immer so?“, fragt er seinen Vater. Der antwortet: „Nein, finde selbst ein Gegenbeispiel.“
Egon rechnet und entdeckt sogar mehrere Gegenbeispiele.

(a) Finde zwei Beispiele dafür, dass der Summenwert nicht aus lauter gleichen Ziffern bestehen muss.

(b) • Egon betrachtet die Summenwerte seiner Beispiele in der Aufgabe (a) genauer und entdeckt einen Zusammenhang zwischen den Ziffern. Welcher ist das?

• Jede zweiziffrige Zahl lässt sich als Term in der Form $10a + b$ darstellen, wobei $a \in \{1; 2; \ldots 9\}$ und $b \in \{0; 1; 2; \ldots 9\}$ gilt.

– Zeige mit Hilfe des obigen Terms, dass jeder Summenwert aus einer zweiziffrigen Zahl und ihrer Spiegelzahl stets durch 11 teilbar ist.

– Wenn du die beiden Ziffern der ursprünglichen zweiziffrigen Zahl auf geeignete Weise kombiniertst, dann erhältst du neben der 11 einen weiteren Teiler des Summenwertes.

(c) Ermittle alle Paare aus einer zweistelligen Zahl und ihrer Spiegelzahl, deren Summenwert 143 beträgt.

Lösung: (a) Z.B.: $97 + 79 = 176$ oder $56 + 65 = 121$ oder ...

(b)
- Die Summe aus der ersten und der letzen Ziffer des Sumenwertes ergibt jeweils die mittlere Ziffer.
-
  - $(10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11 \cdot (a + b)$.
    Der Summenwert enthält also stets den Faktor 11.
  - Der zweite Teiler entsteht aus dem Summenwert der beiden Ziffern der zweistelligen Zahl. Begründung siehe Lösung oben.

(c) Es gilt $11(a + b) = 143 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 13$. Gesucht sind also Ziffernpaare $(a \mid b)$, so dass $a + b = 13$ wird. Das ergibt folgende Zahlenpaare:
$\{(9 \mid 4)\,; (8 \mid 5)\,; (7 \mid 6)\, (6 \mid 7)\,; (5 \mid 8)\,; (4 \mid 9)\,.$

36. Für alle Ungleichungen gilt: $G = \mathbb{Q}$.

(a) Berechne die Lösungsmenge von $2x - 4 > 0$.

(b) Beründe ohne nach x aufzulösen: Die Ungleichung $6x - 12 > 0$ hat die gleiche Lösungsmenge wie die Ungleichung in der Aufgabe (a).

(c) Bestimme die Lösungsmenge von $1387 \cdot (2x - 4) > 0$.

(d) Bestimme die Lösungsmenge von $(x^2 + 1) \cdot (2x - 4) > 0$.

(e) Bestimme die Lösungsmenge von $(x - 11)^2 \cdot (2x - 4) > 0$.

Lösung: (a) $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}}$.

(b) Wenn du die Ungleichung in Aufgabe (a) auf beiden Seiten mit 3 multiplizerst, dann erhältst du die Ungleichung (b). Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

(c) Wenn du Ungleichung (a) auf beiden Seiten mit 1387 multiplizerst, dann erhältst du die Ungleichung (c). Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

(d) Weil $x^2 + 1$ stets positiv ist, muss $2x - 4$ auch positiv (also > 0) bleiben. An der Lösungsmenge ändert sich nichts.

(e) Weil $x^2 + 1$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ positiv ist, folgt aus den gleichen Gründen wie oben $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}}$.

(f) Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob die Lösungsmenge zu den vorigen unverändert bleibt. Doch du musst hier vorsichtiger sein: Der Faktor $(x - 11)^2$ ist nicht für alle Belegungen von x positiv, denn $x = 11$ ist eine Nullstelle dieses Terms; d.h. für $x = 11$ ergibt sich $(11 - 11)^2 \cdot (2 \cdot 11 - 4) = 0$ und nicht > 0 .Das bedeutet: $x = 11$ gehört nicht zur Lösungsmenge.
Damit gilt hier $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}} \setminus \{11\}$.

37. Jede zweistellige natürliche Zahl lässt sich durch den Term $10a + b$ darstellen, wobei a und b die Ziffern sind.
Beispiel: $75 = 10 \cdot 7 + 5$; also gilt $a = 7$ und $b = 5$.
Unter der Quersumme q einer natürlichen Zahl versteht man die Summe aus ihren einzelnen Ziffern. In unserem Beispiel ist $q = 7 + 5 = 12$.

(a) • Subrahiere von der Zahl 75 deren Quersumme.
• Notiere die Menge aller Teiler des Differenzwertes.

(b) • Wiederhole die vorigen Schritte mit der Zahl 59.
• Bestimme den ggT aus beiden Teilermengen.

(c) • Wiederhole die Rechenschritte mit einemr selbst gewählten zweistelligen Zahl.
• Was stellst du fest?
• Gilt deine Feststellung für alle zweistelligen Zahlen? Begründe deine Antwort.

(d) • Experimentiere mit dreistelligen Zahlen.
• Begründe: Subtrahiert man von einer dreistelligen deren Quersumme, so ist der Differnzwert stets durch 9 teilbar.

(e) Gilt das für jede beliebige natürliche Zahl? Begründe.

Lösung: (a) • $75 - 12 = 63$.
• $T_{63} = 1; 3; 7; 9; 21; 63$.

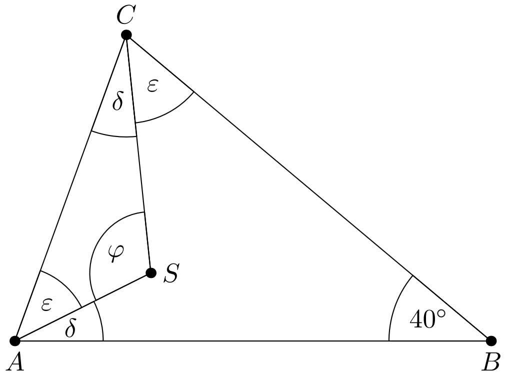
(b) • $59 - 14 = 45._{45} = 1; 3; 5; 9; 15; 45$.
• $ggT(45; 63) = 9$

(c) •
• Der Wert der Differenz aus der Zahl und ihrer Quersume ist wieder durch 9 teilbar.
• Zweistellige Zahl $10a + b$; $q = a + b$.
Differenzwert: $10a+b-(a+b) = 9a$; also ist der Differenzwert stets durch 9 teilbar.

(d) •
• Dreistellige Zahl: $100a + 10b + c$; $q = a + b + c$.
Differenzwert: $100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9 \cdot (11a + b)$; also ist auch dieser Differenzwert stets durch 9 teilbar.

(e) Ja, denn $10^n \cdot a - a$ liefert ausschließlich Neuner als Ziffern.

38.



(a) Begründe: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

(b) Zeichne das Dreieck ABC für $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$.

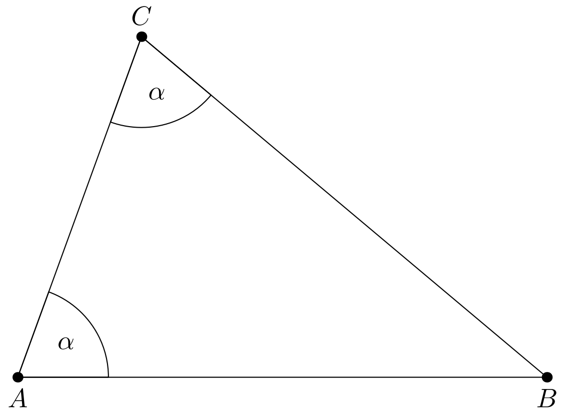
(c) Berechne das Maß φ des Winkels CSA im Dreieck ABC.

Lösung: (a) Im Dreieck ABC gilt: $\alpha = \sphericalangle BAC = \delta + \varepsilon = \sphericalangle ACB = \gamma$.
Also haben zwei Innenwinkel des Dreiecks ABC gleiches Maß; damit ist das Dreieck ABC gleichschenklig. Es besitzt die Basis $[AC]$.

(b) Um das Dreieck zeichnen zu können, brauchst du neben der Streckenlänge $\overline{AB}$ und dem 40°-Winkel noch ein weiteres Bestimmungsstück:
Du kannst entweder $\overline{BC} = 7\,\text{cm}$ verwenden oder das Winkelmaß

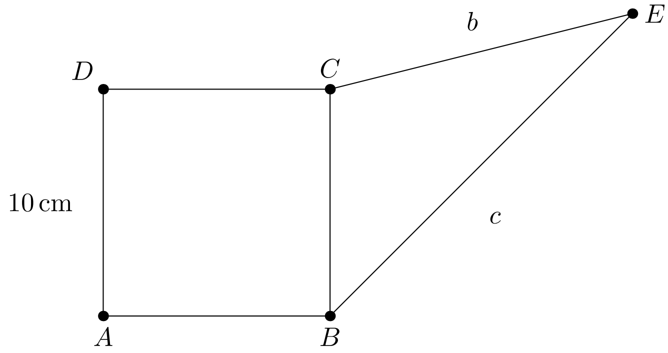
$$\alpha = (180° - 40°) : 2 = 70°$$

berechnen.



(c) Es gilt $\alpha = \delta + \varepsilon = 70°$.
Dann folgt im Dreieck ASC: $\underbrace{\delta + \varepsilon}_{=70°} + \varphi = 180° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 110°$.

39.



Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Der Umfang des Dreiecks BEC ist doppelt so groß wie der Umfang des Quadrates $ABCD$.
Berechne den Umfang der Gesamtfigur.

Lösung: $u_{\Delta BEC} = 10\,\text{cm} + b + c \quad u_{ABCD} = 4 \cdot 10\,\text{cm} = 40\,\text{cm}$
$u_{\Delta BEC} = 2 \cdot u_{ABCD}\,.$ Also: $10\,\text{cm} + b + c = 2 \cdot 40\,\text{cm} = 80\,\text{cm}$
$\Rightarrow \quad b + c = 70\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad u_{ABECD} = 3 \cdot 10\,\text{cm} + 70\,\text{cm} = 100\,\text{cm}\,.$

40. Franz soll die Anzahl n von natürlichen Zahlen bestimmen, die zwischen zwei natürlichen zahlen x und y mit $y > x$ liegen.
Nach einigen Rechenbeispielen findet er eine Formel: $n = y - x - 1\,.$ **(*)**

(a)
- Bestimme mit Hilfe von **(*)** alle natürlichen Zahlen, die zwischen 69 und 83 liegen.
- Bestätige dein Ergebnis, indem du die in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst.

(b) Berechne die Anzahl der natürlichen Zahlen, die größer als 513 799 und gleichzeitig kleiner als 803 102 sind.

(c) Franz überprüft die Formel **(*)** jetzt an folgenden Sonderfällen:
- x und y sind unmittelbare Nachbarn.
  Gilt die Formel **(*)** auch hierfür?
- x und y sind ganze Zahlen.
  Berechne n für $x = -11$ und $y = 3$ sowie für $x = -39$ und $y = -23$.
  Stimmt die Formel auch in diesen beiden Fällen?

Lösung: (a)
- $n = 83 - 69 - 1 = 13\,.$
- $\{70;\ 71;\ 72;\ 73;\ 74;\ 75;\ 76;\ 77;\ 78;\ 79;\ 80;\ 81;\ 82\}\,.$
  Die Lösungsmenge enthält 13 Zahlen.

(b) $n = 803\,102 - 513\,799 - 1 = 289\,302\,.$

(c)
- Für x und y gilt dann $y = x + 1$.
  $n = (x + 1) - x - 1 = 0$. In der Tat gibt es keine natürlichen Zahlen zwischen zwei Zahlennachbarn. Die Formel **(*)** gilt auch in diesem Fall.

- $n_1 = 3 - (-11) - 1 = 3 + 11 - 1 = 13$.
  Wenn du alle in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst, bestätigt sich die Formel.
  $n_2 = -23 - (-39) - 1 = -23 + 39 - 1 = 15$.
  Wenn du auch in diesem Fall alle in Frage kommenden natürlichen Zahlen aufschreibst, bestätigt sich die Formel erneut.

41. Edwin entdeckt in einem Rechenbuch ein Zahlenrätsel:
„Denke dir eine dreistellige Zahl, die durch 10 teilbar ist. Streiche deren letzte Ziffer. Subtrahiere diese neue Zahl von der ursprünglichen dreistelligen Zahl. Dann ist der Differenzwert stets durch die neue Zahl teilbar.“

(a) Bestätige die obige Behauptung an einem selbst gewählten Beispiel.

(b) Untersuche an einem weiteren Beispiel, ob die Behauptung auch für vierstellige Zahlen gilt.

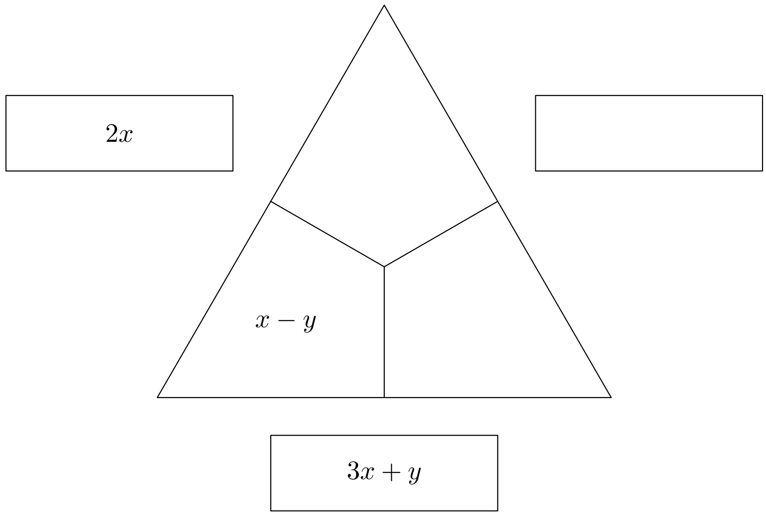
(c) Edwin hat vieles durchprobiert. Alle seine Rechnungen haben die obige Behauptung bestätigt. Schließlich setzt er für die neue Zahl den Platzhalter x und probiert es allgemein mit x. Er kommt zu dem Schluss „Die Behauptung gilt sogar für alle natürlichen durch 10 teilbaren Zahlen!“ Begründe, dass Edwin Recht hat.

Lösung: (a) Z.B. 470: Die neue (zweistellige) natürliche Zahl heißt dann 47.
$470 - 47 = 423$. $423 : 47 = 9$: Stimmt.

(b) Z.B. 5730: Die neue (dreistellige) natürliche Zahl heißt dann 573.
$5730 - 573 = 5157$. $5157 : 573 = 9$: Stimmt auch.

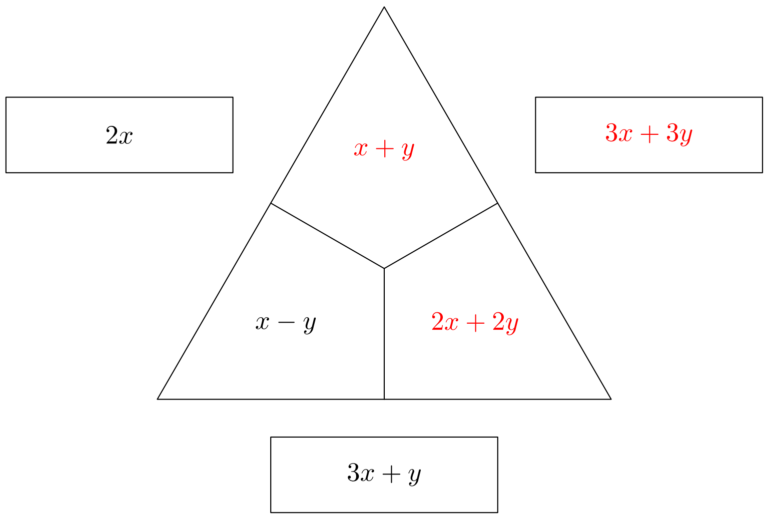
(c) Die neue Zahl ist x. Wenn deren zugehörige ursprüngliche Zahl durch 10 teilbar sein soll muss diese auf 0 enden. Dann ist diese aber zehnmal so groß wie die neue Zahl. Also kannst du für die alte Zahl $10x$ schreiben. Somit ergibt sich:
$10x - x = 9x$. Der Wert der Differnz ist also $9x$ und damit sowohl durch 9 als auch durch x, also die neue Zahl, teilbar.

42.

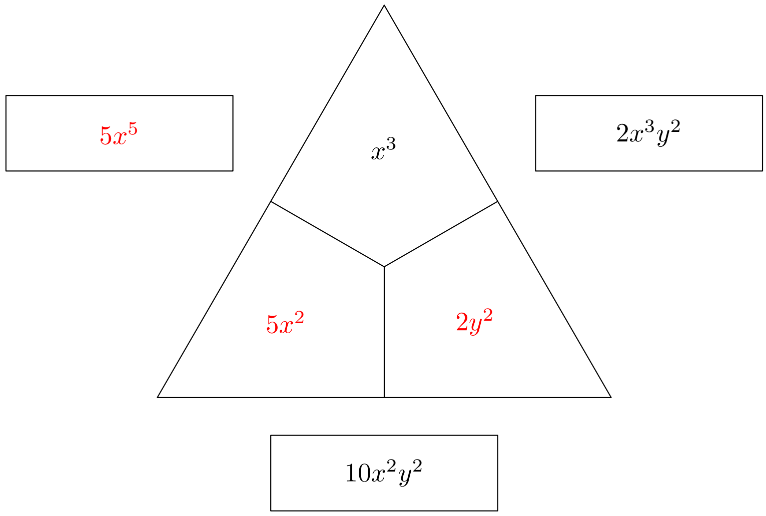


In die drei Felder im Dreieck gehören Terme, wobei in jedem der Rechtecke die Summe aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Termen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Terme.

Lösung:

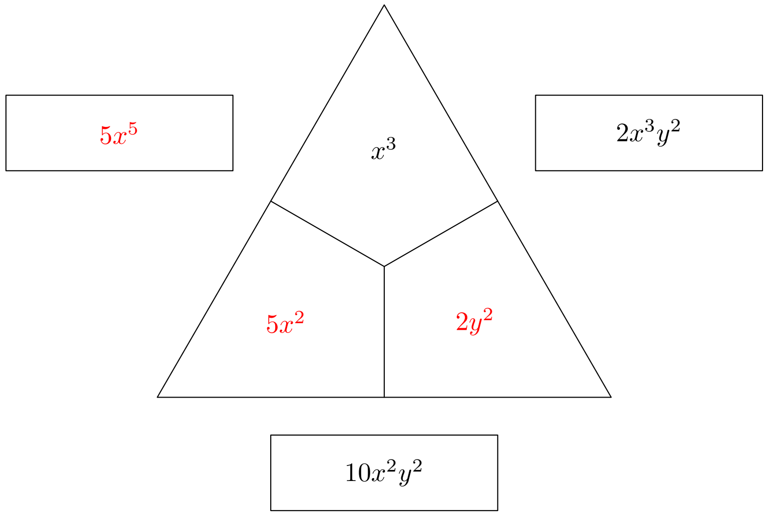


43.



In die drei Felder im Dreieck gehören Terme, wobei in jedem der Rechtecke das Produkt aus den beiden jeweils gegenüberliegenden Termen im Dreieck steht. Berechne die noch fehlenden Terme.

Lösung:



44. Im September 2011 orderte das Kaufhaus X&Y 200 T-Shirts. Davon wurden im gleichen Monat 76 Stück verkauft.
Einen Monat später verteuerte sich dieser Artikel um je einen EURO. In diesem Zeitraum wurden jedoch nur 72 Exemplare verkauft. Es stellte sich heraus, dass die Einnahmen aus dem Verkauf von diesen T-Shirts im Oktober die gleichen waren wie die im September 2011 .
Berechne den Verkaufpreis eines T-Shirts im September 2011 .

Lösung: Preis pro T-Shirt im September 2011: x EURO .
Preis pro T-Shirt im Oktober 2011: $(x+1)$ EURO .

Wir rechnen im Folgenden nur mit Maßzahlen.
$76 \cdot x = 72 \cdot (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 72 \quad \Leftrightarrow \quad x = 18\,.$
Im September 2011 kostete eines dieser T-Shirts 18 EURO.

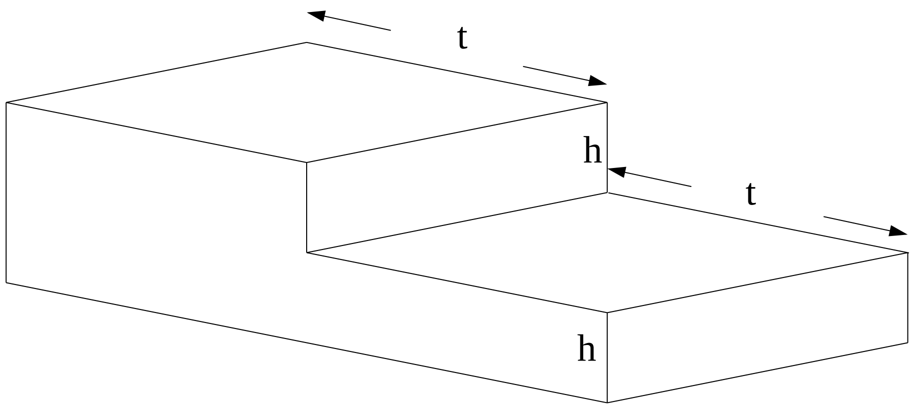
45. Carsten rechnet eine Gleichung aus, die er aus dem Buch übertragen hat. Der Lehrer betrachtet seinen Hefteintrag: „Deine Schrift ist wie schon so oft zum Teil unleserlich, aber dein Ergebnis ist richtig.“
In seinem Heft steht (der unleserliche Teil ist durch ein Kästchen ersetzt):

$$\begin{aligned} 2x - \square &= -2 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Ermittle auf zwei verschiedene Arten, was im Buch anstelle des Kästchens stand.

Lösung: **1. Möglichkeit:**
Um von der ersten zur zweiten Zeile zu kommen, hat Carsten offenbar auf beiden Seiten der Gleichung im Buch die Zahl 16 addiert. Dadurch fällt das Kästchen in der zweiten Zeile weg. Also stand die unleserliche Zahl 16 anstelle des Kästchens da.
2. Möglichkeit:
Der Lehrer hat $x = 7$ als richtige Lösung bestätigt. Setze diese Lösung in die erste Zeile ein:
$2 \cdot 7 - \square = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 14 - \square = -2 \mid -14 \quad \Leftrightarrow \quad -\square = -16 \mid \cdot(-1)$
$\Leftrightarrow \quad \square = 16\,.$

46.



„Die magische Zahl für Treppen lautet 63 Zenimeter. So viel beträgt das Schrittmaß, das für eine gute Begehbarkeit steht. ... Das Schrittmaß errechnet sich nach folgender Formel: Zweimal die Stufenhöhe h plus einmal die Stufentiefe t gleich 63 Zentimeter.“
Quelle: Nordbayerischer Kurier vom 12. Sept 2010, S. 22

(a) Stelle eine Formelgleichung auf, die das Schrittmaß von 63 cm im Zusammenhang mit der Stufenhöhe h und der Stufentiefe t beschreibt.

(b) Herr Feust will nach dieser Formelgleichung eine Steintreppe vom Haus zum Garten anlegen. Er meint: „Je niedriger die Stufenhöhe wird, desto länger fällt nach dieser Formelgleichung die Stufentiefe aus.“
Bestätige diesen Sachverhalt mit einem Zahlenbeispiel.

(c) Im Haus der Familie Feust wohnen auch die schon etwas gebrechlichen Eltern von Frau Feust. Daher wird festgelegt, dass die Stufenhöhe 16 cm nicht überschreiten darf. Berechne das zugehörige Mindestmaß der Stufentiefe.

(d) Während der Arbeiten schaut Nachbar Tufes, der alles besser weiß, interessiert zu: „Ich hätte einfach Stufentiefe = Stufenhöhe gewählt.“ Was meinst du dazu? Begründe deine Antwort.

(e) Wie lang wird die gesamte Treppe, wenn sie bei einer Stufenhöhe von 15 cm vom Haus bis in den Garten eine Höhendifferenz von 1,20 m überwindet?

Lösung: (a) Hier gilt: $63\,\text{cm} = 2 \cdot h + t$.

(b) Z.B.:
$h_1 = 20\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 23\,\text{cm}$
$h_1 = 18\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 27\,\text{cm}\,.$

(c) Es gilt: $h = (63\,\text{cm} - t) : 2$

$$\begin{aligned} h = (63\,\text{cm} - t) : 2 &\leqq 16\,\text{cm} \mid \cdot 2 \\ 63\,\text{cm} - t &\leqq 32\,\text{cm} \mid -63\,\text{cm} \\ -t &\leqq -31\,\text{cm} \mid \cdot(-1) \\ t &\geqq 31\,\text{cm} \end{aligned}$$

Die Stufentiefe muss also mindestens 31 cm betragen.

(d) In der Formelgleichung gilt dann $h = t$: $\quad 63\,\text{cm} = 3t \quad t = 21\,\text{cm}\,.$
Eine Stufentiefe von nur 21 cm wäre für ältere Leute zu gefährlich.

(e) Es werden $1{,}20\,\text{m} : 15 = 120\,\text{cm} : 15\,\text{cm} = 8$ Stufen benötigt.
$63\,\text{cm} = 2 \cdot 15\,\text{cm} + t \quad \Rightarrow \quad t = 33\,\text{cm}\,.$
$33\,\text{cm} \cdot 8 = 264\,\text{cm} = 2{,}64\,\text{m}\,.$
Die gesamte Treppenlänge beträgt also 2,64 m.

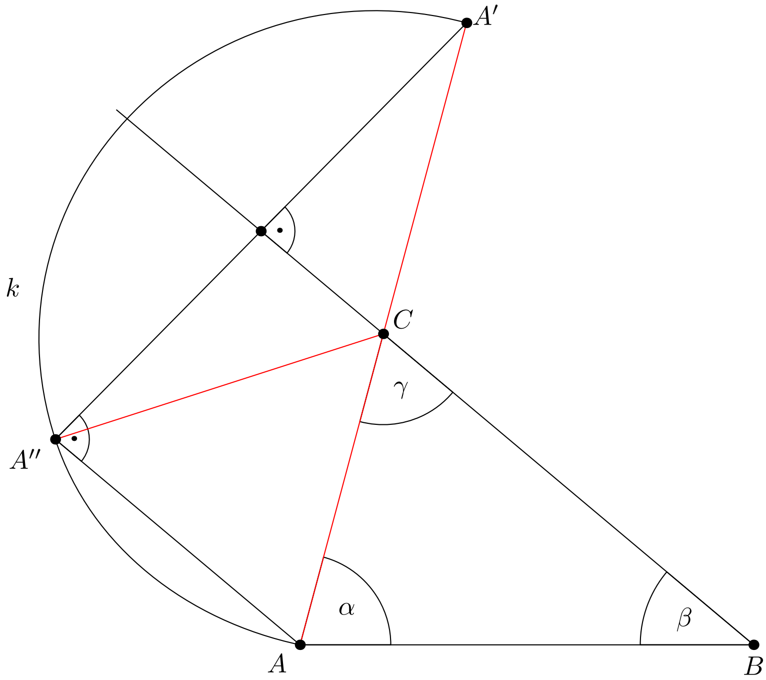
47. (a) Zeichne ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 75°$ und $\beta = 40°$.

(b)
- Spiegle den Punkt A am Punkt C. Sein Spiegelbild ist der Punkt A' .
- Spiegle den Punkt A' an der Halbgeraden $[BC$. Sein Spiegelbild ist der Punkt A'' .

(c) Begründe:
- Das Dreieck ACA'' ist gleichschenklig.

- Das Dreieck $AA'A''$ ist rechtwinklig.

Lösung: (a)

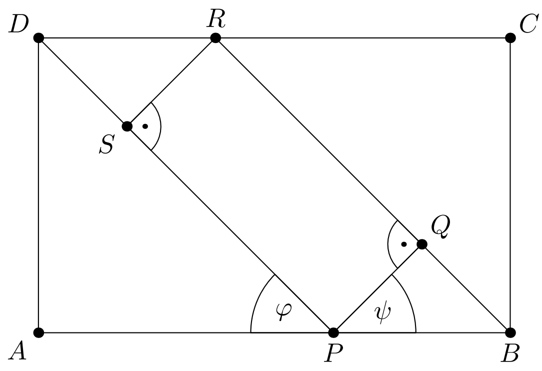


- Siehe Zeichnung.
- Siehe Zeichnung.

(b) Begründe:

- Jede Punktspiegelung ist längentreu. Also gilt: $\overline{CA} = \overline{CA'}$.
  Jede Achsenspiegelung ist längentreu. Also gilt: $\overline{CA'} = \overline{CA''}$.
  $\Rightarrow \quad \overline{CA} = \overline{CA''}$. Also ist das Dreieck ACA'' gleichschenklig.
- Es gilt: $\overline{CA} = \overline{CA''} = \overline{CA'}$. Das bedeutet, dass die drei Punkte A, A' und A'' vom Punkt C gleich weit entfernt sind. Folglich müssen die Punkte A, A' und A'' auf einer Kreislinie k mit dem Mittelpunkt C liegen. Diese Kreislinie ist nun der THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[AA']$. Also ist das Dreieck $AA''A'$ wegen $A'' \in k$ rechtwinklig.

48.



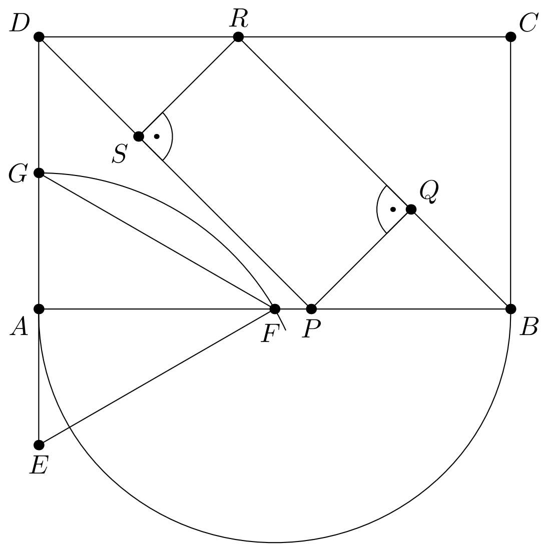
Im Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ und $\overline{BC} = \overline{AD} = b$. Für das einbeschriebene Rechteck $PQRS$ gilt: $\overline{AP} = \overline{RC} = b$.

(a) Zeichne die Figur für $a = 8\,\text{cm}$, und $b = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: $\varphi = \psi = 45°$.

(c) Berechne in deiner Zeichnung den Anteil der Fläche des Rechtecks $PQRS$ am Rechteck $ABCD$ in Prozent.

(d)



In der obigen Figur gilt:
– Der Punkt G halbiert die Seite $[AD]$.
– Das Dreieck EFG ist gleichseitig.
– Der Punkt E ist der Mittelpunkt des Kreisbogens durch den Punkt F.
– Der Punkt F ist der Mittelpunkt des Halbkreises mit dem Durchmesser $[AB]$.

- Zeichne die Figur für $b = 6\,\text{cm}$.
- Berechne erneut den Flächenanteil des Rechtrecks $PQRS$ am Rechteck $ABCD$ in Prozent.

(e) Es gilt allgemein: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot(a-b)\cdot(3b-a)}{ab} = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(3\dfrac{b}{a} - 4 + \dfrac{a}{b}\right).$

Setzen wir $\dfrac{b}{a} = k$, so ergibt sich weiter: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(3k - 4 + \dfrac{1}{k}\right) = T(k)\,.$

- Zeige, dass der Term $T^*(k) = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{3k}\right)^2 + 2 - \sqrt{3}$ und $T(k)$ äquivalent sind.
- Berechne diejenige Belegung von k, für die das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Rechtecke $PQRS$ und $ABCD$ maximal wird. Gib das maximale Flächenverhältnis in Prozent an.
- Begründe: Die Konstruktion in der Aufgabe (d) liefert dieses Maximum.

Lösung: (a) Klar.

(b) Das Dreieck APD ist ein halbes Quadrat. $\Rightarrow \quad \varphi = 45°$.
Die drei Winkel mit dem Scheitel P ergeben einen gestreckten Winkel:
$\varphi + 90° + \psi = 180° \quad \Rightarrow \quad \psi = 45°\,.$

(c) **Wir rechnen im Folgenden ab und zu nur mit Maßzahlen.**

$\overline{PB} = 8 - 5 = 3\,\text{cm}. \quad 3 = \dfrac{\overline{PQ}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \quad \overline{PQ} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = 1,5\cdot\sqrt{2}\,\text{cm} = \overline{SR} = \overline{DS}\,.$

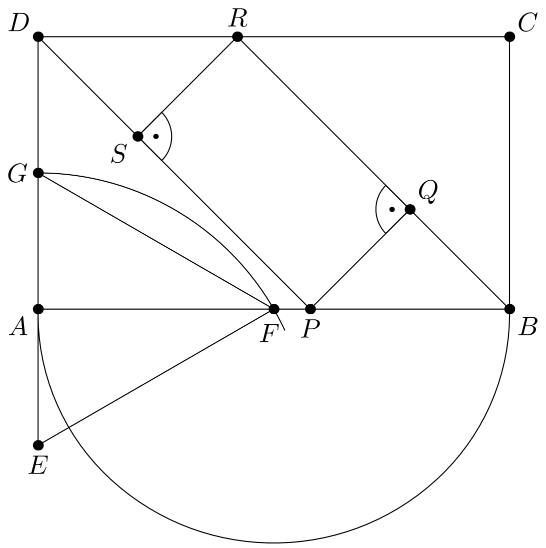
$\overline{PD} = 5\cdot\sqrt{2}\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{PS} = 5\sqrt{2} - 1,5\sqrt{2} = 3,5\sqrt{2}\,\text{cm}\,.$

$A_{PQRS} = \overline{PQ}\cdot\overline{RS} = 1,5\sqrt{2}\cdot 3,5\sqrt{2} = 10,5\,\text{cm}^2\,.$

$A_{ABCD} = 40\,\text{cm}^2\,.$

$\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{10,5\,\text{cm}^2}{40\,\text{cm}^2} = 0,2625 = 26,25\%\,.$

(d)



- Klar.
- Die Strecke $[AF]$ stellt die Höhe des gleichseitigen Dreiecks EFG mit einer Seitenlänge von 6 cm dar. Also gilt:
  $\overline{AF} = 3\sqrt{3}\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad a = 2 \cdot \overline{AF} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}\,.$
  $\overline{PB} = 6\sqrt{3} - 6 = 6 \cdot (\sqrt{3} - 1)\,\text{cm}\,.$

  $$\overline{PQ} = \frac{\overline{PB}}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})\,\text{cm} = \overline{DS}\,.$$

  $\overline{PS} = 6\sqrt{2} - 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = (9\sqrt{2} - 3\sqrt{6})\,\text{cm}\,.$
  $A_{PQRS} = 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot (9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}) = (72\sqrt{3} - 108)\,\text{cm}^2\,.$

  $$A_{ABCD} = 6 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\,\text{cm}^2\,.$$

  $$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(72\sqrt{3} - 108)\,\text{cm}^2}{36\sqrt{3}\,\text{cm}^2} = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}26795 \approx 26{,}80\%\,.$$

(e) Es gilt allgemein: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot (a-b) \cdot (3b-a)}{ab} = -\dfrac{1}{2} \cdot \left(3\dfrac{b}{a} - 4 + \dfrac{a}{b}\right).$

Setzen wir $\dfrac{b}{a} = k$, so ergibt sich weiter: $\dfrac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = -\dfrac{1}{2} \cdot \left(3k - 4 + \dfrac{1}{k}\right) = T(k)\,.$

- $$\begin{aligned} T^*(k) &= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\sqrt{3k}\right)^2+2-\sqrt{3} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}-2\sqrt{3}+3k\right)+2-\sqrt{3} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}-2\sqrt{3}+3k-4+2\sqrt{3}\right) \\ T^*(k) &= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}+3k-4\right)=T(k) \end{aligned}$$

- $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\sqrt{3k}\right)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{k}}-\sqrt{3k}=0$

  $\Leftrightarrow\quad 1=k\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad k=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{b}{a}.$

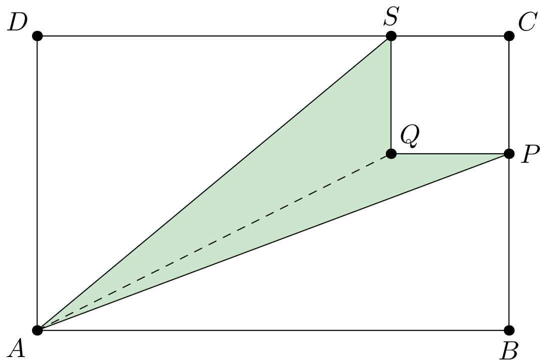
  $T(k)_{max}=T\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2-\sqrt{3}\approx 0,26795\approx 26,80\%.$

- Es gilt $\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad\Leftrightarrow\quad a=b\sqrt{3}$

  In der Aufgabe (d) hattest du mit $b=6\,\text{cm}$ konstruiert. Für die Höhe im gleichseitigen Dreieck EFG der Konstruktion (d) ergibt sich dann $\overline{AF}=3\sqrt{3}\,\text{cm}$. Weil der Punkt F gleichzeitig Mittelpunkt des Halbkreises ist, gilt $a=2\cdot 3\sqrt{3}\,\text{cm}=6\sqrt{3}\,\text{cm}$. Also ergibt sich:

  $k=\frac{b}{a}=\frac{6\,\text{cm}}{6\sqrt{3}\,\text{cm}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, wie in der Lösung (e) schon errechnet.

49.



Aus dem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ und $\overline{BC}=\overline{AD}=b$ werden Quadrate mit der Seitenlänge x herausgeschnitten. Dadurch entstehen Vierecke $AP_nQ_nS_n$.

(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ für $a = 8\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ und das Viereck $AP_1Q_1S_1$ für $x = 2\,\text{cm}$.

(b) Gib alle Belegungen von x an, für die es solche Vierecke $AP_nQ_nS_n$ gibt.

(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Vierecke $AP_nQ_nS_n$ gilt in Abhängigkeit von x:

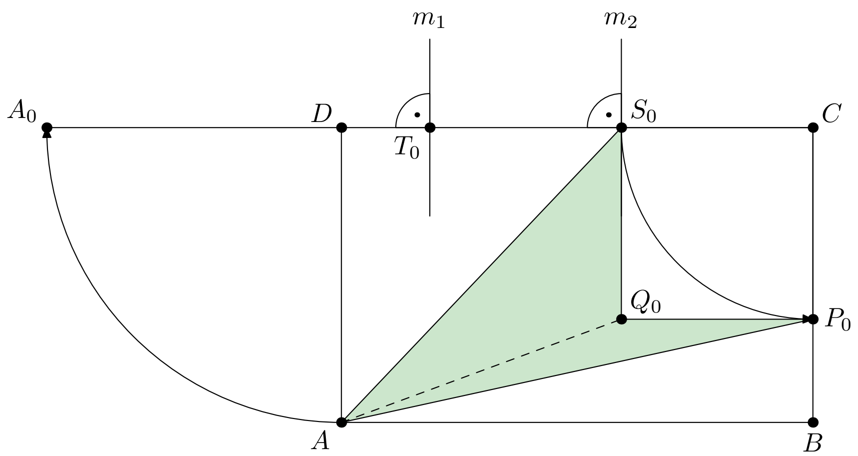
$$A(x) = -x^2 + \frac{1}{2}(a+b) \cdot x$$

Tipp: Deute die Strecken $[P_nQ_n]$ und $[Q_nS_n]$ jeweils als Grundlinien der Teildreiecke AP_nQ_n bzw. AQ_nS_n.

(d) Unter allen Vierecken $AP_nQ_nS_n$ gibt es das Viereck $AP_0Q_0S_0$, dessen Flächeninhalt maximal ist.

Zeige, dass $x = \frac{1}{4}(a+b)$ das Viereck $AP_0Q_0S_0$ liefert.

(e)



In der obigen Figur gilt:

- Der Punkt D ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von Punkt A zum Punkt A_0.
- Der Punkt C ist der Mittelpunkt des Kreisbogens von Punkt P_0 zum Punkt S_0.
- Der Punkt T_0 ist der Mittelpunkt der Strecke $[A_0C]$.
- Der Punkt S_0 ist der Mittelpunkt der Strecke $[T_0C]$.

Begründe anhand dieser Konstruktion, dass das Viereck $AP_0Q_0S_0$ dasjenige mit dem maximalen Flächeninhalt ist.

Lösung: (a) Klar.

(b) $x \in]0, 5[_{\mathbb{R}}$.

(c) Wir rechnen mit der Formel: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot$ Grundlinie $\cdot$ Höhe: In den Dreiecken AP_nQ_n bzw AQ_nS_n gilt:

$$A_{AP_nQ_n} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (b-x) = \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}x^2 \tag{2.1}$$

$$A_{AQ_nS_n} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (a-x) = \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}x^2 \tag{2.2}$$

$$(1)+(2): \quad A_{AP_nQ_nS_n} = \frac{1}{2}(a+b) \cdot x - x^2 \tag{2.3}$$

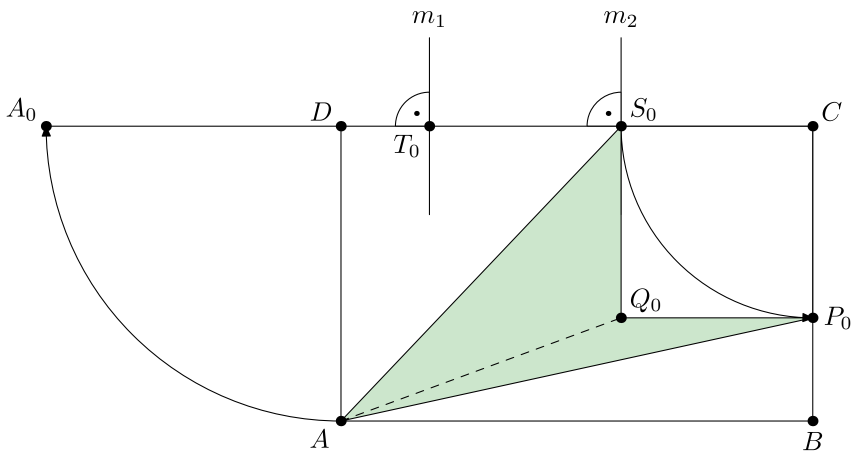
Die Gleichung (3) ist die geforderte.

(d)

$$\begin{aligned}
A(x) &= -x^2 + \frac{1}{2}(a+b) \cdot x \\
&= -\left[x^2 - \frac{1}{2}(a+b) \cdot x + \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2\right] \\
&= -\left[\left(x - \frac{1}{4}(a+b)\right)^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2\right] \\
A(x) &= -\left(x - \frac{1}{4}(a+b)\right)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2
\end{aligned}$$

$x = \frac{1}{4}(a+b)$ liefert $A_{max} = \frac{(a+b)^2}{16}$.

(e)

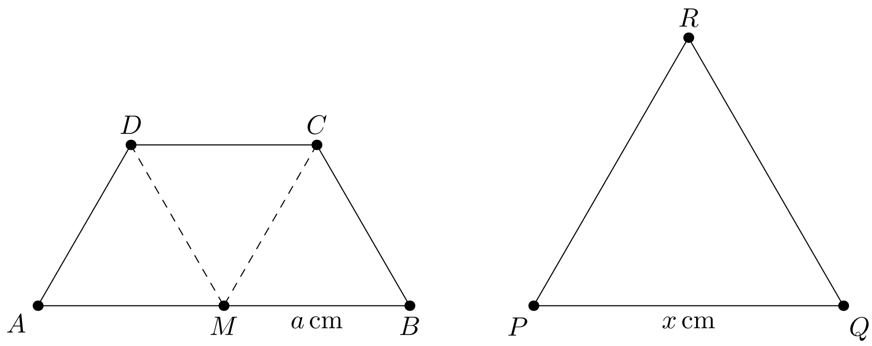


Hier gilt $\overline{A_0C} = a+b$.

Der Punkt T_0 halbiert die Strecke $[A_0C]$: $\overline{T_0C} = \frac{a+b}{2}$.

Der Punkt S_0 halbiert die Strecke $[T_0C]$: $\overline{S_0C} = \frac{a+b}{4} = x$.

50.



Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ ist aus drei kongruenten gleichseitigen Dreiecken mit der jeweiligen Seitenlänge von a cm zusammengefügt worden. Dieses Trapez und das gleichseitige Dreieck PQR mit der Seitenlänge x cm sollen den gleichen Umfang besitzen.

(a) Zeige, dass dann $x = \frac{5}{3}a$ gilt.

(b) Berechne das Verhältnis der Flächen der beiden Figuren.

(c) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ größer als der des Dreiecks PQR?

Lösung: (a) Gleicher Umfang: $5a = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{3}a\,.$

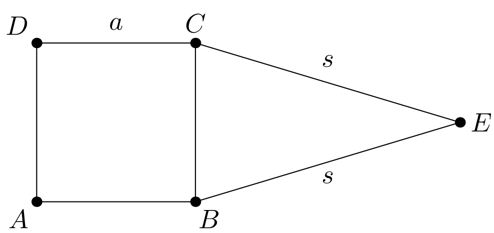
(b) $A_{\text{Trapez}} = 3 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}\,.$

$$A_{\Delta\, PQR} = \frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\left(\frac{5}{3}a\right)^2}{4}\sqrt{3} = \frac{25}{36}a^2\sqrt{3}\,.$$

$$\frac{A_{\Delta\, PQR}}{A_{\text{Trapez}}} = \frac{\frac{25}{36}a^2\sqrt{3}}{\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}} = \frac{25}{36} \cdot \frac{4}{3} = \frac{100}{108}\left(= \frac{25}{27}\right).$$

(c) $A_{\Delta\, PQR} \mathrel{\widehat{=}} 100\%\,.$
Nach Lösung (b) gilt $A_{\text{Trapez}} \mathrel{\widehat{=}} 108\%\,.$
Dann ist also der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ um 8% größer als der des Dreiecks PQR.

51.



Die Figur $ABECD$ setzt sich aus dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a und dem gleichschenkligen Dreieck BEC mit $\overline{BE} = \overline{CE} = s$ zusammen. Das Dreieck BEC und das Quadrat $ABCD$ haben den gleichen Umfang.

(a) Zeige: Es muss $s = 1,5a$ gelten.

(b) Zeichne die Fgur für $a = 3\,\text{cm}$.

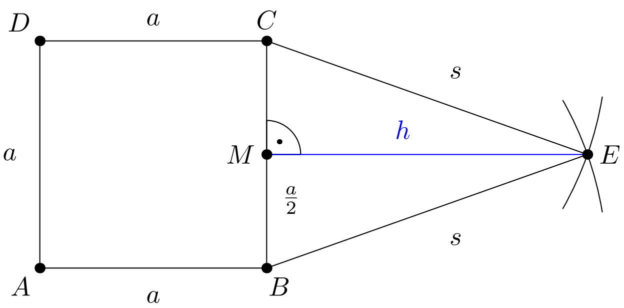
(c) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte des Dreiecks BEC und des Quadrates $ABCD$ in Prozent.

(d) Wie lang müsste die Schenkellänge s sein, damit die Flächeninhalte des Quadrates $ABCD$ und des Dreiecks BEC gleich groß werden?

Lösung: (a) $u_{BEC} = a + s + s = 2s + a \qquad u_{ABCD} = 4a$

$2s + a = 4a \quad \Leftrightarrow \quad s = 1,5a\,.$

(b)



Die beiden Kreisbögen mit dem Radius $r = 1,5\cdot 3\,\text{cm} = 4,5\,\text{cm}$ und den Mittelpunkten B bzw. C schneiden sich im Punkt E.

(c) $\Delta BEM\colon \quad h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (1,5a) - (0.5a)^2 = 2.25a^2 - 0.25a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow \quad h = a\sqrt{2}$

$$A_{\Delta BEC} = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2}{2}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad A_{ABCD} = a^2\,.$$

$$\frac{A_{\Delta BEC}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{a^2}{2}\sqrt{2}}{a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071 = 70,71\%$$

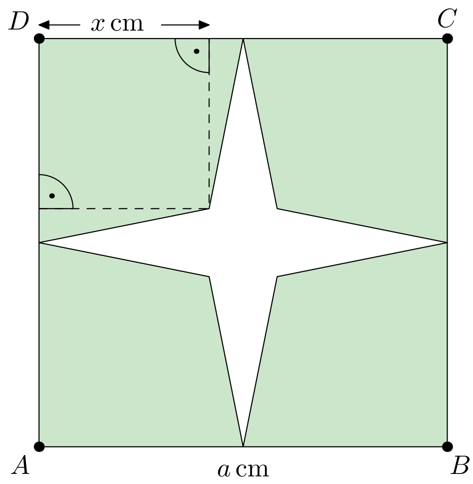
(d) $h^2 = s^2 - \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}}\,.$

$$A_{\Delta BEC} = A_{ABCD} \quad : \quad \frac{a}{2}\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} = a^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} = a \quad \Big|^{\,2}$$

$$\Rightarrow \quad s^2 - \frac{a^2}{4} = 4a^2 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 = \frac{16a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{a}{2}\sqrt{17} \approx 2,06 \cdot a\,.$$

52.



Schneidet man aus dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a cm die vier getönten kongruenten Vierecke weg, so bleibt der weiße Stern im Zentrum übrig.

(a) Zeichne die obige Figur für $a = 6$ und $x = 2,5$.

(b) Begründe: Jedes dieser vier getönten kongruenten Vierecke ist ein Drachenviereck.

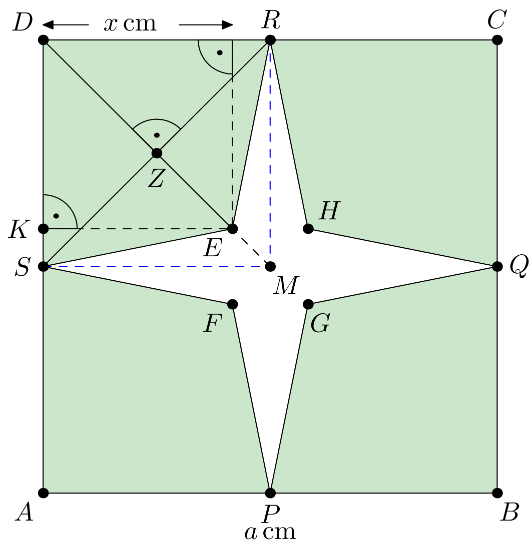
(c) Zeige: Für den Flächeninhalt A des weißen Sterns gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = (36 - 12x)\,\text{cm}^2 .$$

(d)
- Berechne $A(3)$ und deute dein Ergebnis mit Hilfe der Zeichnung.
- Berechne $A(1,5)$ und deute dein Ergebnis mit Hilfe der Zeichnung.

(e) Berechne x so, dass der Flächeninhalt des Sterns $3,6\,\text{cm}^2$ beträgt.

Lösung: (a)



(b) Das Viereck $SMRD$ ist ein Quadrat, dessen Diagonalen $[DM]$ und $[SR]$ folgende Eigenschaften besitzen:

- $[SR] \perp [DM]$. Wegen $E \in [DM]$ folgt $[SR] \perp [DE]$.
- DM ist sowohl die Symmetrieachse des Quadrates $SMRD$ als auch die des Vierecks $SERD$.

Also ist das Viereck $SERD$ ein achsensymmetrischer Drachen.

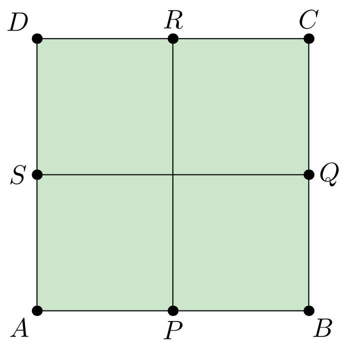
(c) $A_{SERD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SR} \cdot \overline{DE}$. (*)

$[SR]$ ist eine Diagonale des Quadrates $SMRD$ mit der Seitenlänge 3 cm: $\Rightarrow \quad \overline{SR} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.
$[DE]$ ist eine Diagonale des Quadrates mit der Seitenlänge $\overline{KD} = x\,\text{cm}$ und der Diagonale $[DE]$: $\Rightarrow \quad \overline{DE} = x\sqrt{2}\,\text{cm}$.
Mit (*) folgt dann:

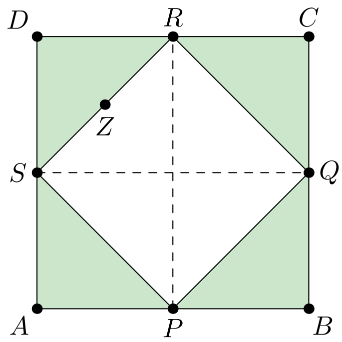
$$A_{SERD} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2}\,\text{cm}^2 = 3x\,\text{cm}^2 .$$

$$A_{\text{Stern}} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{SERD} = 36\,\text{cm}^2 - 4 \cdot 3x\,\text{cm}^2 = (36 - 12x)\,\text{cm}^2 .$$

(d)
- $A(3) = (36 - 12 \cdot 3)\,\text{cm}^2 = 0\,\text{cm}^2$.
  Für $x = 3$ deckt sich das Drachenviereck $SERD$ mit dem Quadrat $SMRD$. Das geschieht auf die gleiche Weise mit den drei restlichen Drachenvierecken. Dann sieht die Figur so aus:



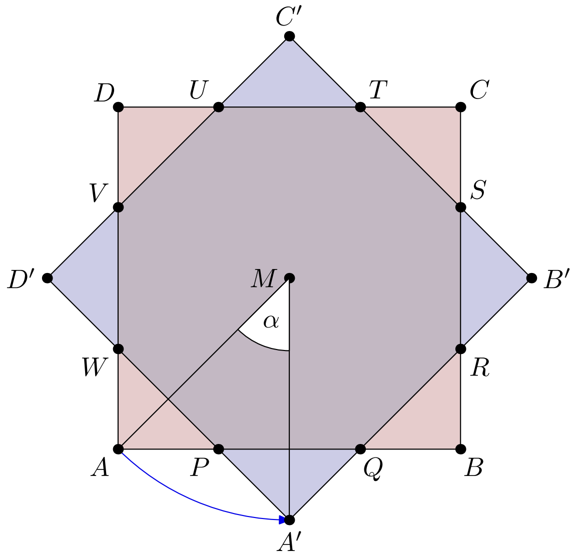
  D.h. der Stern entartet zu zwei gekreuzten Strecken $[PR]$ und $[SQ]$, deren Flächeninhalt 0 ist.
- $A(1,5) = (36 - 12 \cdot 1,5)\,\text{cm}^2 = 18\,\text{cm}^2$.
  Für $x = 1,5$ kommt der Punkt E auf den Diagonalenschnittpunkt Z des Drachenvierecks $SERD$ zu liegen; d.h. das Drachenviereck entartet zum gleichschenkligrechtwinkligen Dreieck SRD. Damit wird der Stern zu einem einbeschriebenen Quadrat dessen Eckpunkte jeweils auf einem Mittelpunkt der Seiten des Quadrates $ABCD$ fallen. Dann sieht die Figur so aus:



Anhand der gestrichelten Diagonalen des zum Quadrat $PQRS$ entarteten Sterns erkennst du, dass dieses Quadrat halb so groß wie das äußere Quadrat $ABCD$ ausfällt, was auch die obige Rechnung bestätigt.

(e) $36 - 12x = 3{,}6 \quad \Leftrightarrow \quad 32{,}4 = 12x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2{,}7.$

53.



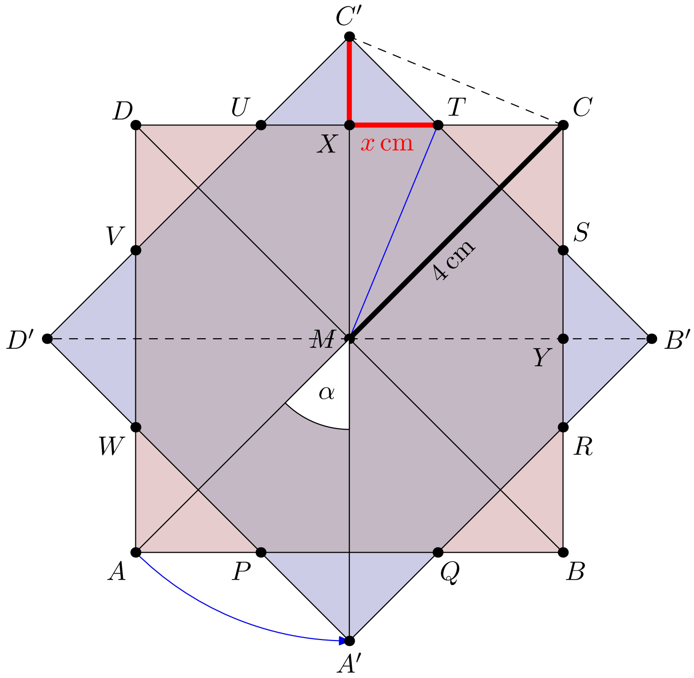
Das Quadrat $A'B'C'D'$ ist dadurch entstanden, dass das Quadrat $ABCD$ um seinen Mittelpunkt M um einen Winkel mit dem Maß α so gedreht worden ist, dass bestimmte Symmetrieachsen vom Ur- und vom Bildquadrat zur Deckung kommen.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$.

(b) Wie groß ist α? Begründe deine Antwort.

(c)
- Ist das Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig?
- Berechne den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUVW$.

Lösung: (a)



(b) $\alpha = 45°$.
Es gilt z.B.: $MD' \perp MA'$. Die Diagonale $[AC]$ halbiert diesen rechten Winkel.

(c)
- Aus Symmetriegründen sind die vier Dreiecke, die über das Quadrat $ABCD$ hinausragen und die vier Dreiecke, die über das gedrehte Quadrat $A'B'C'D'$ hinausragen, alle kongruent. Also sind alle Seiten des fraglichen Achtecks geich lang.
  Die Diagonalen der Quadrate $ABCD$ und $A'B'C'D'$ schließen paarweise einen 45°-Winkel ein. Also haben alle Innenwinkel des Achtecks das Maß $180° - 45° = 135°$.
  Also ist das Achteck $PQRSTUVW$ regelmäßig.
- Subtrahierst du vom gedrehten Quadrat $A'B'C'D'$ die Flächen der vier Dreiecke, die über das Quadrat $ABCD$ hinausragen, dann erhältst du den Flächeninhalt des Achtecks $PQRSTUVW$.
  Betrachte z.B. das Dreieck UTC'. Aus Symmetriegründen muss es gleichschenkligrechtwinklig sein. Also gilt: $\overline{XT} = \overline{XC'} = x\,\text{cm}$. .
  Das Dreieck $MCXC'$ ist gleichschenklig: $\overline{MC} = \overline{MC'} = 4\,\text{cm}$.
  Damit gilt einerseits: $\overline{MX} = (4 - x)\,\text{cm}$.   (*)
  Das Viereck $MYCX$ ist ein Quadrat, dessen Diagonale 4 cm lang ist. Damit gilt andererseits: $\overline{MX} = \dfrac{4}{\sqrt{2}}\,\text{cm}$.

  Mit (*) ergibt sich:

  $$4 - x = \frac{4}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = 4 - \frac{4}{\sqrt{2}} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} .$$

  Das Dreieck UTC' ist genauso groß wie ein Quadrat mit der Seitenlänge x cm .

$$A_{UTC'} = x^2\,\text{cm}^2 = \left(4 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{cm}^2 = 16 \cdot \frac{2-2\sqrt{2}+1}{2}\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{UTC'} = 8 \cdot (3-2\sqrt{2})\,\text{cm}^2\,.$$

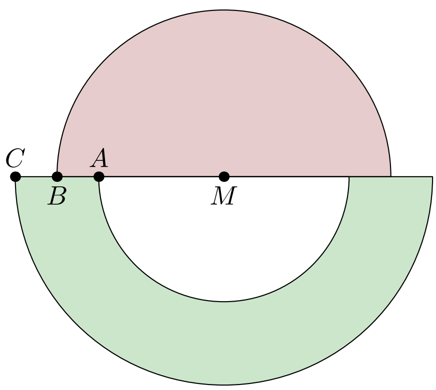
Wegen $A_{PQRSTUVW} = A_{A'B'C'D'} - 4 \cdot A_{UTC'}$ folgt:

$$A_{PQRSTUVW} = \frac{1}{2} \cdot 8^2\,\text{cm}^2 - 4 \cdot 8 \cdot (3-2\sqrt{2})\,\text{cm}^2$$

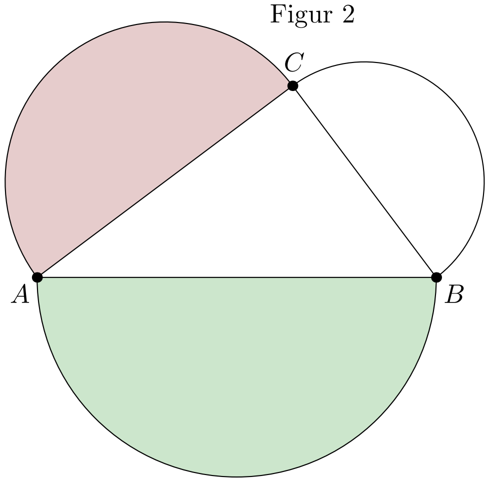
$$A_{PQRSTUVW} = 32 \cdot [1-(3-2\sqrt{2})]\,\text{cm}^2 = 32 \cdot [2\sqrt{2}-2]\,\text{cm}^2$$
$$A_{PQRSTUVW} = 64 \cdot (\sqrt{2}-1)\,\text{cm}^2 \approx 26,51\,\text{cm}^2\,.$$

54.

Figur 1



Figur 2



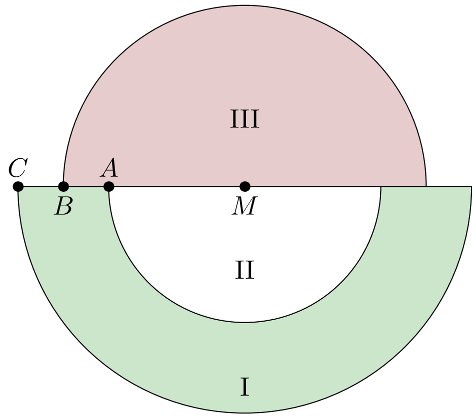
(a) Zeichne die Figur 1 für $\overline{MA} = 3,6\,\text{cm}$, $\overline{MB} = 4,8\,\text{cm}$ und $\overline{MC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Zeige ohne zu runden, dass der untere Kreisring und der obere Halbkreis den gleichen Flächeninhalt besitzen.

(c)
- Zeichne die Figur 2 für $c = \overline{AB} = 12\,\text{cm}$, $a = \overline{BC} = 7,2\,\text{cm}$ und $b = \overline{AC} = 9,6\,\text{cm}$.
- Begründe: Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.
- Notiere den Zusammenhang zwischen den drei Halbkreisflächen in der Figur 2 in Form einer Gleichung.
- Was hat die Figur 2 mit der Figur 1 zu tun? Beschreibe deine Idee.

Lösung: (a) Die Figur 1 ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

Figur 1



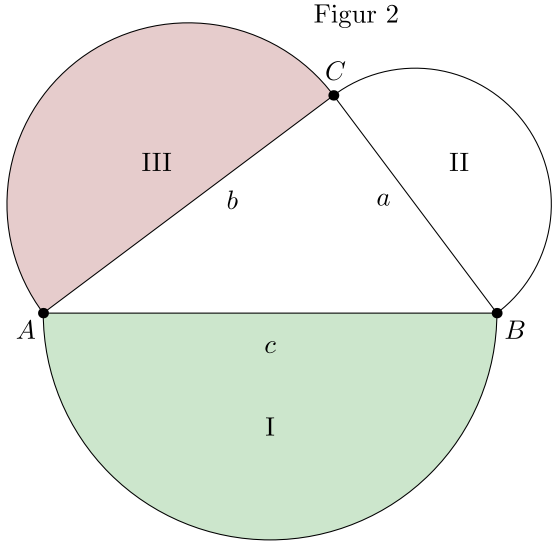
(b) Du hast die drei Halbkreise I, II und III vor dir.
Es müsste gelten: $A_{III} = A_I - A_{II}$. Es wird in der Einheit cm^2 gerechnet.

Also: $\frac{1}{2} \cdot 4,8^2\pi = \frac{1}{2} \cdot 6^2\pi - \frac{1}{2} \cdot 3,6^2\pi \;\Big|\; : \frac{1}{2}\pi$

$4,8^2 = 6^2 - 3,6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 23,04 = 36 - 12,96$. Das stimmt, also ist die Behauptung bewiesen.

(c)
- Die Figur 2 ist im Maßstab 1 : 2 dargestellt.

Figur 2

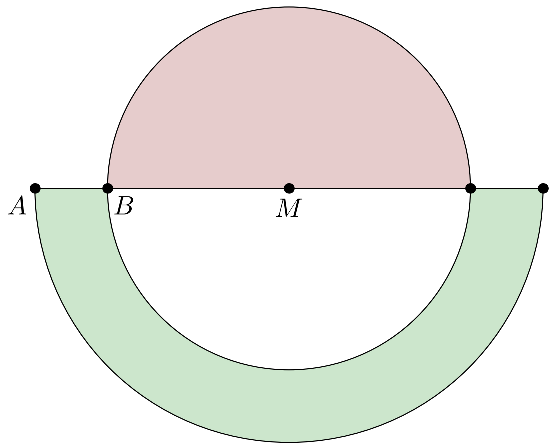


- Für die Maßzahlen müsste gelten:
  $12^2 = 7,2^2 + 9,6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 144 = 51,84 + 92,16$. Das stimmt, also ist das Dreieck ABC rechtwinklig.
- Es gilt: $c^2 = a^2 + b^2 \;\big|\; \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi$
  $\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \pi\,.$

Das bedeutet: Der Halbreis I hat den gleichen Flächeninhalt wie die beiden Halbkreise II und III zusammen.

- In der Figur 1 siehst du einen gleich gelagerten Fall: Wenn du den Halbkreis II aus dem Halbkreis I entfernst, ergibt sich: Der Halbkreis I muss genauso groß sein wie die beiden Halbkreise II und III zusammen.
  In der Figur 1 und der Figur 2 haben gleich nummerierte Halbkreise den gleichen Durchmesser; d.h. sie sind kongruent.

55.



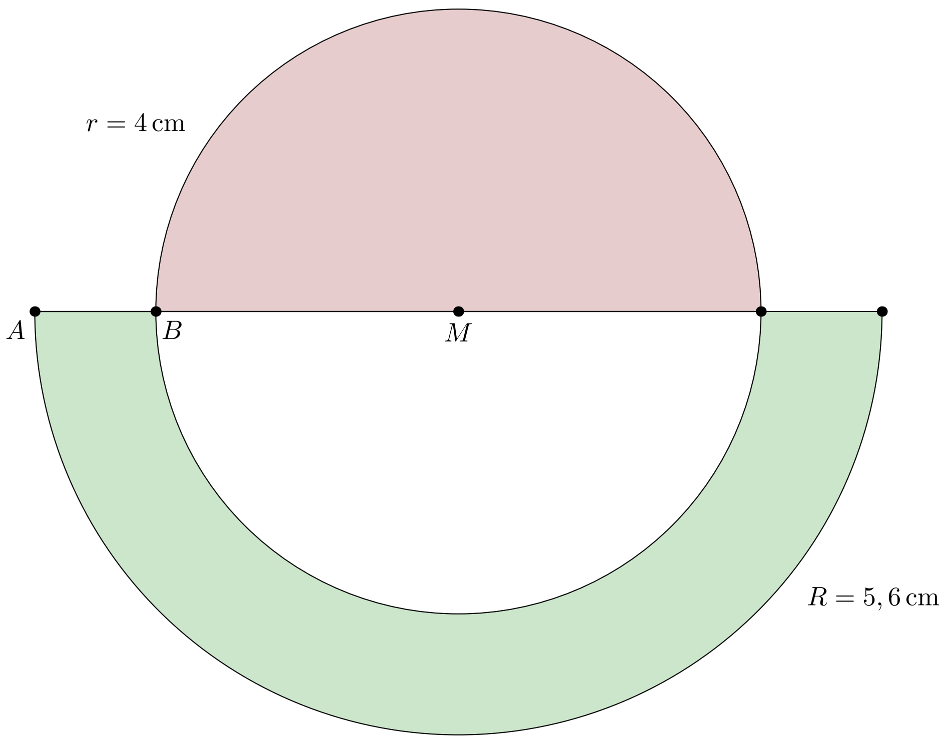
(a) Zeichne die Figur für $R = \overline{MA} = 5,6\,\text{cm}$ und $r = \overline{MB} = 4\,\text{cm}$.

(b) Zeige, dass der untere Kreisring und der obere Halbkreis nicht denselben Flächeninhalt besitzen.

(c) Jetzt sei $r = \sqrt{18}\,\text{cm}$.
Berechne R so, dass der Inhalt der beiden getönten Flächen gleich ist.

(d) Welcher Zusammenhang muss zwischen R und r bestehen, damit die getönten Flächen gleichen Inhalt besitzen?

Lösung: (a)



(b) **Anmerkung: Zu allen Flächenmaßzahlen gehört die Einheit „cm^2“.** Es gilt: $A_{\text{Halbkreis(klein)}} = \frac{1}{2} \cdot 4^2\pi$ und $A_{\text{Kreisring}} = \frac{1}{2} \cdot 5{,}6^2\pi - A_{\text{Halbkreis(klein)}}$.

Es muss also gelten: $A_{\text{Halbkreis(groß)}} = 2 \cdot A_{\text{Halbkreis(klein)}}$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 5{,}6^2\pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2\pi \quad \Big| : \pi \quad \Leftrightarrow \quad 15{,}68 \neq 16\,.$$

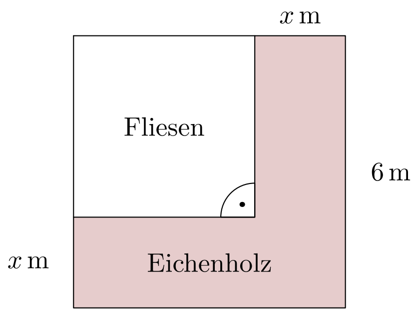
(c) $\frac{1}{2} \cdot R^2\,\pi = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{18}^{\,2}\,\pi\,\mathrm{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 = 36\,\mathrm{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad R = 6\,\mathrm{cm}\,.$

(d) Es muss gelten: $\frac{1}{2} \cdot R^2\,\pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^{\,2}\pi \quad \Rightarrow \quad R = r\sqrt{2}\,.$

Du könntest das auch mit Hilfe der Eigenschaften der zentrischen Streckung begründen:

- Alle Kreise sind zueinander ähnlich.
- Wenn du eine Kreisfläche verdoppelst, dann gilt für den Streckungsfaktor k: $k^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{2}\,.$

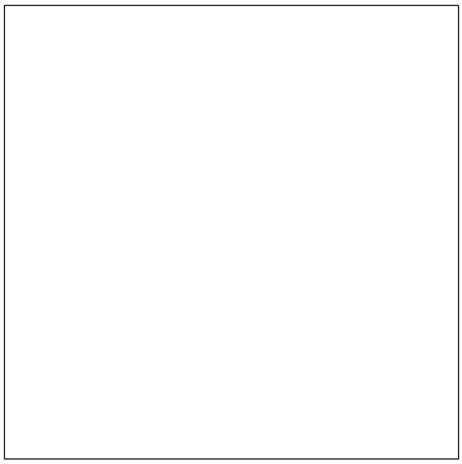
56.



Der quadratische Boden eines Badezimmers mit einer Seitenlänge von 6 m ist einerseits gefliest, anderserseits mit Eichenbrettern L-förmig verlegt worden. Das „L“ hat eine Breite von x m.
Die Fläche aus Holz ist halb so groß wie die gesamte Bodenfläche.

(a) Zeige: $x = 6 - 3\sqrt{2}$.

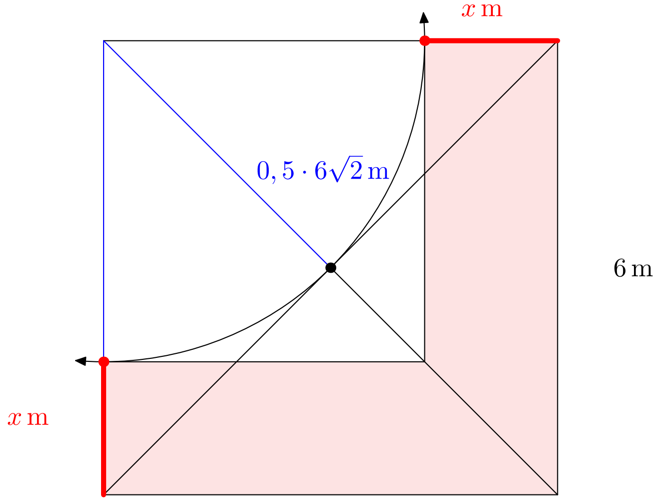
(b) •



In welchem Maßstab ist der Grundriss des Badezimmers in der obigen Figur dargestellt?

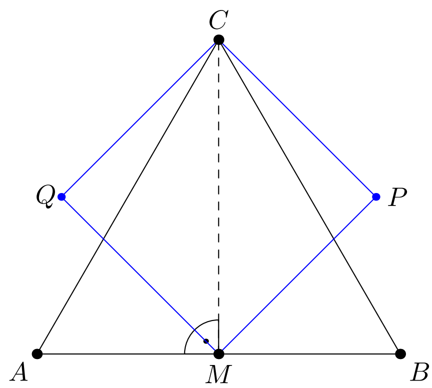
- Konstruiere mit Zirkel und Lineal in diesen Grundriss maßstabgerecht die Streckenlänge $x\,\text{m} = (6 - 3\sqrt{2})\,\text{m}$.
  Tipp: $6 - 3\sqrt{2} = 6 - 0,5 \cdot 6\sqrt{2}$.
- Vervollständige damit die Flächenaufteilung des Badezimmers.

Lösung: (a) Wenn das „L“ überall x m dick ist, dann ist die geflieste Fläche ein Quadrat mit der Seitenlänge $(6 - x)$ m.
Wenn das „L“ die Hälfte der Gesamtfläche ausmacht, dann muss die quadratische geflieste Fläche die andere Hälfte einnehmen. Als Maßzahlengleichung ergibt sich dann:
$(6 - x)^2 = 0.5 \cdot (6 \cdot 6) = 18$, mit $x \in\,]0,\, 6[_{\mathbb{R}}$.
$\Leftrightarrow \quad | 6 - x | = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$.
$\Leftrightarrow \quad 6 - x = 3\sqrt{2} \quad \vee \quad 6 - x = -3\sqrt{2}$.
$\Leftrightarrow \quad x = 6 - 3\sqrt{2} \quad \vee \quad x = 6 + 3\sqrt{2}$.
Wegen $x \in\,]0,\, 6[_{\mathbb{R}}$ folgt $x = 6 - 3\sqrt{2}$.

(b)
- Der Grundriss ist im Maßstab $1:100$ dargestellt. $(1\,\text{m} = 100\,\text{cm})$.
- 

  Ein Quadrat, dessen Seitenlänge 6 cm beträgt, hat eine Diagonalenlänge von $6\sqrt{2}$ cm.
  $0,5 \cdot 6\sqrt{2}$ cm ist dann gerade die halbe Diagonalenlänge dieses Quadrates.
  Du erhältst x, wenn du mit Hilfe des Kreisbogens die Differenz aus der Seitenlänge des großen Quadrates und seiner halben Diagonalenlänge abträgst.
- Der Rest ist klar.

57.



Das Dreieck ABC ist gleichseitig. Das Viereck $MPCQ$ ist ein Quadrat.

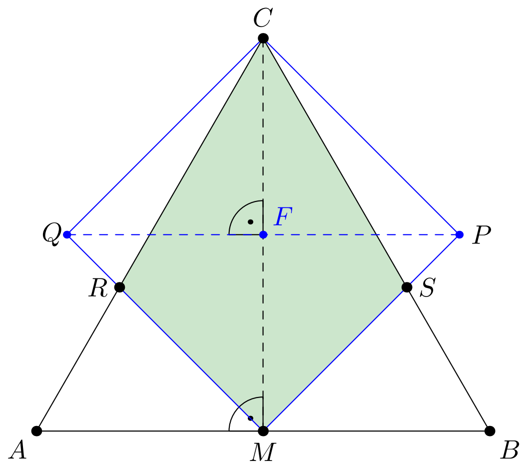
(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC größer als der des Quadrates $MPCQ$?

(c) Im Inneren des Dreiecks ABC liegt ein Viereck.
Um welches besondere Viereck handelt es sich? Begründe deine Antwort.

(d) Zeige: Für den Umfang u des gezeichneten Quadrates $MPCQ$ gilt: $u = 6\sqrt{6}\,\text{cm}$.

Lösung: (a)



(b) Flächeninhalt A_Δ des Dreiecks ABC: $A_\Delta = \dfrac{6^2}{4} \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

Jedes Quadrat darf sich auch „Drachenviereck“ nennen. Am einfachsten kommst du mit der Flächenformel für das Drachenviereck zum Ziel:

Hier: $A_{MPCQ} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{MC}^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{6}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2 \text{cm}^2 = 13,5\,\text{cm}^2$.

$\dfrac{13,5\,\text{cm}^2}{9\sqrt{3}}\,\text{cm}^2 \approx 0,8660 = 86,60\%$

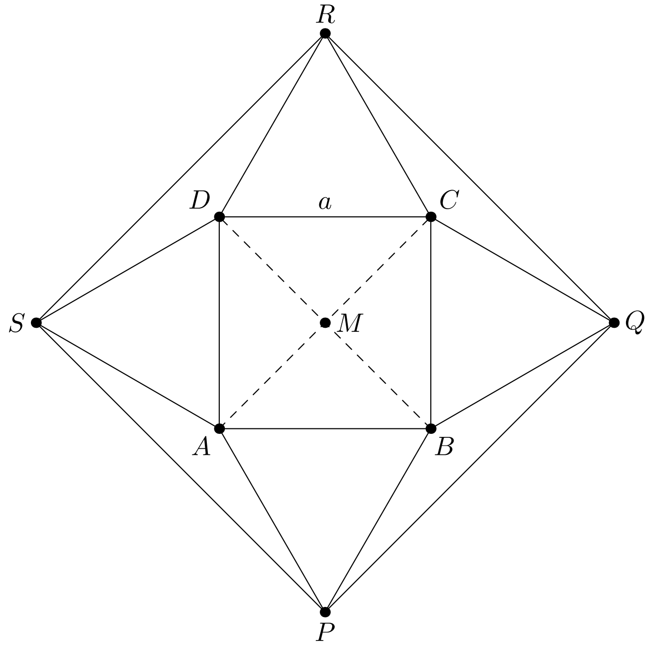
$100\% - 86,60\% = 13,40\%$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist etwa um $13,40\%$ größer als der des Quadrates $MPCQ$.

(c) Das Viereck $MSCR$ ist ein achsensymmetrisches Drachenviereck.
Begründung:

- Seine Diagonalen stehen (wie auch die des Quadrates $MPCQ$) aufeinander senkrecht.
- Die Gerade MC ist die Sysmmetrieachse des Drachenvierecks.

(d) $u = 4 \cdot \overline{MP} = 4 \cdot \overline{MF}\sqrt{2} = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{6}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} = 6\sqrt{6}\,\text{cm}$.

58.



Das Viereck $PQRS$ ist dadurch entstanden, dass man über den vier Seiten des Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a jeweils gleichseitige Dreiecke errichtet hat.

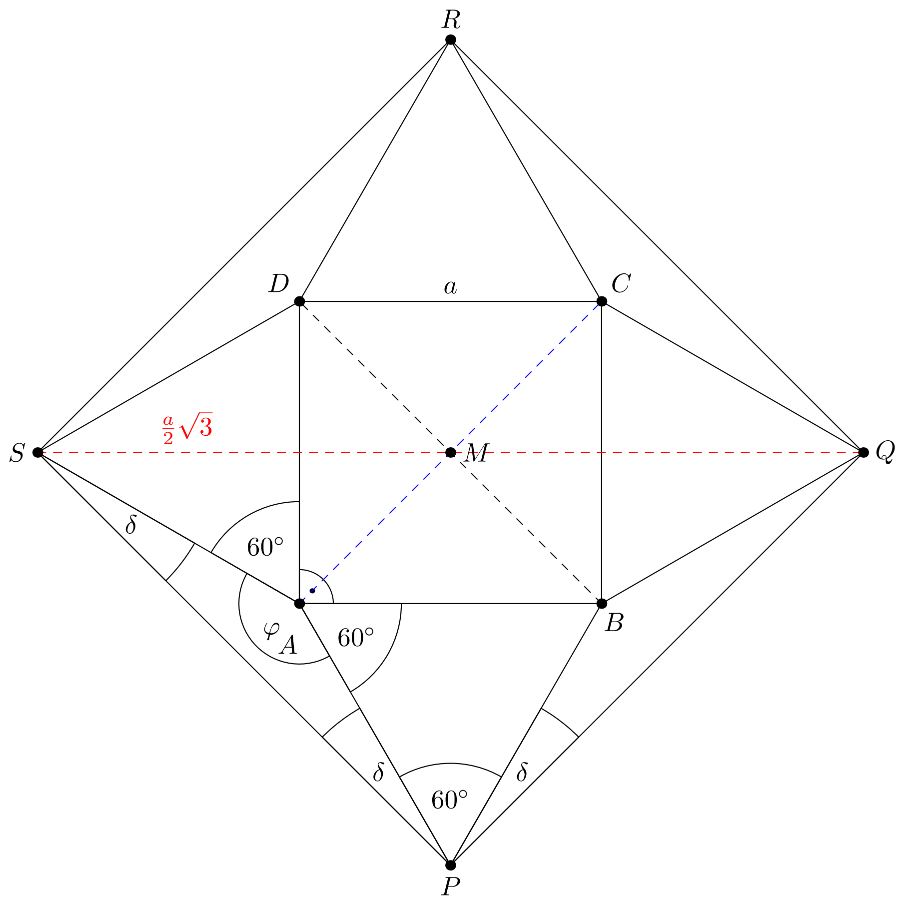
(a) Zeichne die Fgur für $a = 4\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat.
Hinweis: Zeige, dass z.B. $\sphericalangle APS = 15°$ gilt.

(c) Zeige auf verschiedene Weise: Für den Flächeninhalt A des Vierecks $PQRS$ gilt:
$$A_{PQRS} = a^2(2 + \sqrt{3})$$

(d) Berechne den prozentualen Flächenanteil des Quadrates $ABCD$ am Viereck $PQRS$.

Lösung: (a)



(b) Die vier Dreiecke SPA, PQB, QRC und RSD sind aus Symmetriegründen kongruent. Also handelt es sich bei dem Viereck $PQRS$ mindestens um eine Raute.
Am Punkt A gilt: $\varphi = 360° - 90° - 2 \cdot 60° = 150°$.
Aus Symmetriegründen sind die vier Dreiecke SPA, PQB, QRC und RSD gleichschenklig.
$\Rightarrow \quad \delta = (180° - 150°) : 2 = 15°$.
Dann siehst du z.B. am Punkt P: $\sphericalangle QPS = 2 \cdot 15° + 60° = 90°$. Also ist die Raute sogar ein Quadrat.

(c) **1. Möglichkeit:** Die Summe aller Teilflächen
$A_{PQRS} = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 150° = a^2 + a^2\sqrt{3} + a^2 = a^2(2+\sqrt{3})$.

2. Möglichkeit: Alle Quadrate sind zueinander ähnlich
Wenn du das kleine Quadrat $ABCD$ mit einem Faktor k streckst, erhältst du das große Quadrat. (Erst eine anschließende Drehung des gestreckten Quadrates um 45° brächte dieses Zwischenbild zur Deckung mit dem großen Quadrat $PQRS$. Aber das spielt bei der Ermittlung des Flächeninhaltes des großen Quadrates $PQRS$ keine Rolle, weil ja die Drehung einer Fläche deren Inhalt unverändert lässt.)

Den Streckungsfaktor k ermittelst du über die Diagonalenlängen:. Es gilt z.B.: $k =$

$\dfrac{\overline{SQ}}{\overline{AC}}$.

$\overline{SQ} = 2 \cdot \dfrac{a}{2}\sqrt{3} + a = a \cdot (\sqrt{3}+1)$ und $\overline{AC} = a\sqrt{2}$.

Dann gilt: $k = \dfrac{a \cdot (\sqrt{3}+1)}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$.

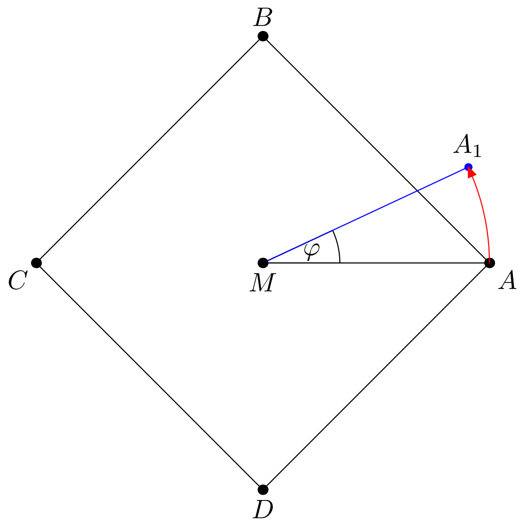
Weiter folgt:

$$A_{PQRS} = k^2 \cdot A_{ABCD} = \left[\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}\right]^2 \cdot a^2 = \frac{2(3+2\sqrt{3}+1)}{4} \cdot a^2 .$$

$\Rightarrow \quad A_{PQRS} = (2+\sqrt{3}) \cdot a^2$.

(d) $\dfrac{A_{ABCD}}{A_{PQRS}} = \dfrac{a^2}{(2+\sqrt{3}) \cdot a^2} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} \approx 0,2679 = 26,79\%$.

59.



Gegeben ist das Quadrat $ABCD$ mit dem Mittelpunkt M und der Diagonalenlänge $d = 10\,\text{cm}$.
Dieses Quadrat wird nun um den Mittelpunkt M mit dem Winkel φ gedreht, wobei $\varphi \in \,]0°;\, 90°[_{\mathbb{R}}$ gilt.
Dadurch entstehen zum einen Quadrate $A_nB_nC_nD_n$ und zum anderen Achtecke $AA_nBB_nCC_nDD_n$.

(a)
- Zeichne das Quadrat $ABCD$ und seinen Umkreis.
- Zeichne für $\varphi = 25°$ das Quadrat $A_1B_1C_1D_1$ farbig ein.
- Zeichne dazu das Achteck $AA_1BB_1CC_1DD_1$ in einer anderen Farbe.

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Achtecke $AA_nBB_nCC_nDD_n$ gilt in Anbhängigkeit von φ:

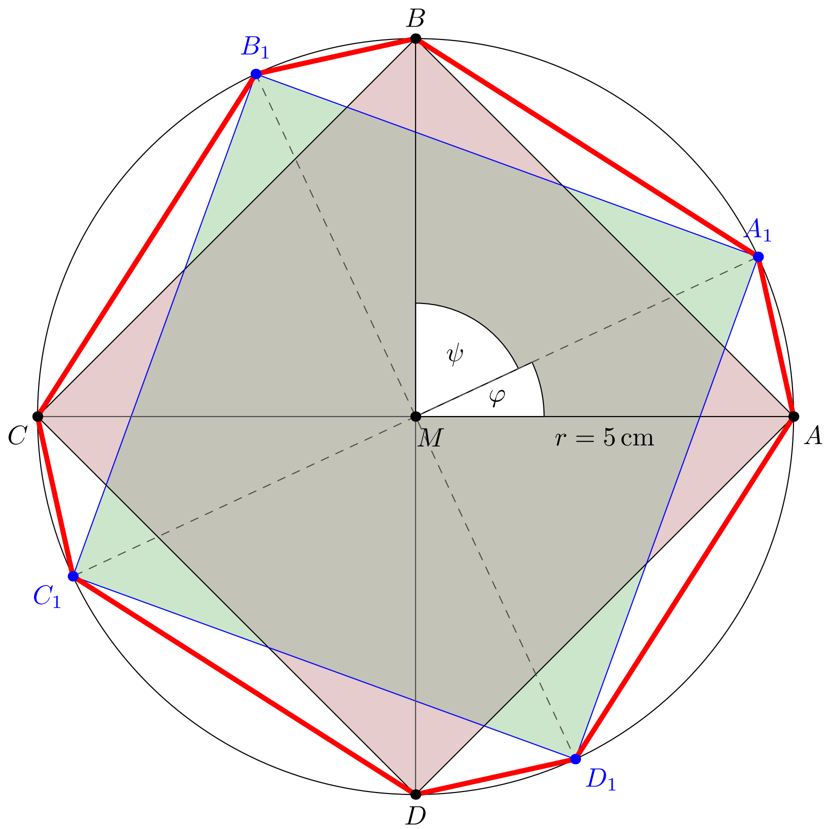
$$A(\varphi) = 50 \cdot (\sin\varphi + \cos\varphi)\,\text{cm}^2$$

(c)
- Begründe rechnerisch: Es gilt ebenfalls

$$A(\varphi) = \frac{50}{\cos 45^\circ}\,(\sin\varphi \sin 45^\circ + \sin 45^\circ \cos\varphi)\,\text{cm}^2$$

- Vereinfache den in der obigen Zeile dargestellten Term für $A(\varphi)$ so weit wie möglich. Der Nenner vor der Klammer soll dabei rational werden.
- Unter allen Achtecken $AA_nBB_nCC_nDD_n$ gibt es das Achteck $AA_2BB_2CC_2DD_2$, dessen Flächeninhalt maximal wird.
  Berechne dieses Maximum und die zugehörige Belegung von φ .
- Berechne den Umfang u des flächengrößten Achtecks ohne zu runden.
  Zeige: $\quad u = 40 \cdot \sqrt{\ldots}\ \text{cm}$

Lösung: (a) Alle verlangten Zeichnungen:



(b) Die roten Achtecke setzen sich aus je vier kongruenten Dreiecken vom Typ MAA_n und vom Typ MA_nB zusammen. Weiter gilt: $\psi = 90° - \varphi$.

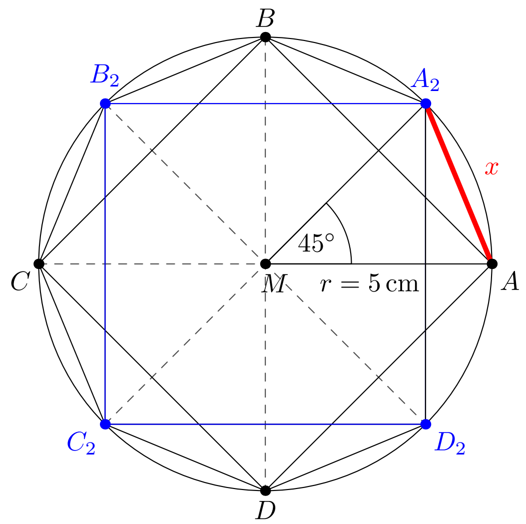
$$\begin{aligned} A(\varphi) &= 4 \cdot A_{MAA_n} + 4 \cdot A_{MA_nB} \\ &= \left(4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \sin\varphi + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \sin\psi\right) \text{ cm}^2 \\ &= [50 \cdot \sin\varphi + 50 \cdot \sin(90° - \varphi)] \text{ cm}^2 \\ A(\varphi) &= 50 \cdot (\sin\varphi + \cos\varphi) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

(c)
- $$A(\varphi) = \frac{50}{\cos 45°}(\sin\varphi \sin 45° + \sin 45° \cos\varphi)\,\text{cm}^2 = $$
  $$50 \cdot \left(\sin\varphi \cdot \frac{\sin 45°}{\cos 45°} + \frac{\sin 45°}{\cos 45°} \cdot \cos\varphi\right) \text{ cm}^2 =$$
  $$50 \cdot (\sin\varphi \tan 45° + \cos\varphi \tan 45°) \text{ cm}^2 .$$

  Wegen $\tan 45° = 1$ ergibt sich die Lösung von (b).

- $$\begin{aligned} A(\varphi) &= \frac{50}{\cos 45°} \cdot (\sin\varphi \sin 45° + \sin 45° \cos\varphi)\,\text{cm}^2 \\ &= \frac{50}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \sin(45° + \varphi)\,\text{cm}^2 . \\ \text{Also gilt:}\quad A(\varphi) &= 50 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(45° + \varphi)\,\text{cm}^2 . \end{aligned}$$

- $A(\varphi)$ wird maximal, wenn $\sin(45° + \varphi)$ maximal wird;
  d.h. wenn $\sin(45° + \varphi)$ den Wert 1 annimmt. Das ist im Definitonsbereich der Fall, wenn $\varphi = 45°$ gilt.
  Der maximale Flächeninhalt beträgt dann $50 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm}^2 \approx 70,71\,\text{cm}^2$.

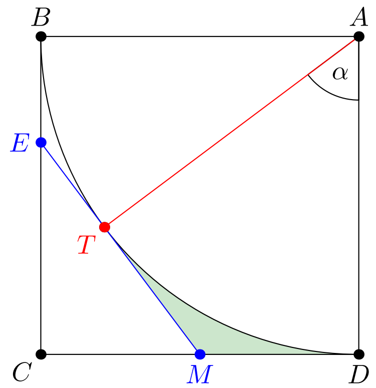
- 

Kosinussatz im Dreieck MAA_2: $x^2 = \left(5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 45°\right)\ \text{cm}^2$.

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \left[25 \cdot (2 - \sqrt{2})\right]\ \text{cm} \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}\ \text{cm}.$$

Aus Symmetriegründen gilt: $u = 8x = 40 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}\,\text{cm} \quad (\approx 30{,}61\ \text{cm})$.

60.



Dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 6\,\text{cm}$ ist ein Viertelkreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius a einbeschreiben worden. Der Mittelpunkt der Seite $[CD]$ ist M.
Weiter gilt: $\overline{BE} = 2\,\text{cm}$.
Hinweis: Alle Rechenergebnisse sind auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne das Quadrat $ABCD$, den Viertelkreis und die Strecke $[EM]$.

(b)
- Zeige durch Rechnung: $\overline{EM} = 5\,\text{cm}$.
- Begründe: Die Strecke $[ME]$ berührt den Kreisbogen in einem Punkt T.
  Tipp: Wenn der Punkt T Berührpunkt sein soll, dann müssen gleichzeitig die beiden Vierecke $MDAT$ und $BETA$ besondere Vierecke sein.
- Zeichne die Strecke $[AT]$ ein.

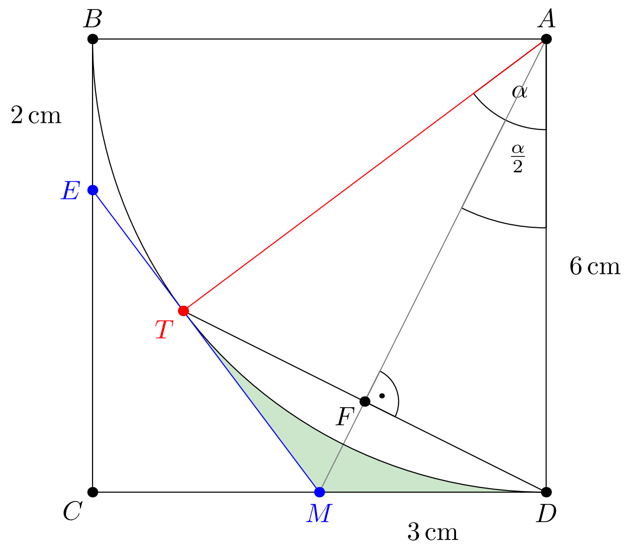
(c) Berechne das Maß α des Winkels TAD.

[Teilergebnis: $\frac{\alpha}{2} \approx 26{,}57°$]

- Zeichne den Diagonalenschnittpunkt F des Vierecks $MDAT$ ein.
- Berechne den Inhalt der in der Eingangsfigur getönten Fläche.

[Teilergebnis: $\overline{FD} \approx 2{,}68\,\text{cm}$]

Lösung: (a) Die Zeichnung enthält bereits alle Elemente.



(b)
- Im rechtwinkligen Dreieck CME gilt:
  $\overline{EM}^{\,2} = [3^2 + (6-2)^2]\,\mathrm{cm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{EM} = 5\,\mathrm{cm}\,.$
- Wenn der Punkt T der Berührpunkt sein soll, dann müssen die beiden Vierecke $MDAT$ und $BETA$ achsensymmetrische Drachenvierecke sein.
  Dann muss aber $\overline{MD} = \overline{MT} = 3\,\mathrm{cm}$ und $\overline{EB} = \overline{ET} = 2\,\mathrm{cm}$ gelten.
  Dann muss also $\overline{MT} + \overline{ET} = 5\,\mathrm{cm}$ gelten. Das hast du aber vorhin gerade mit dem Satz des PYTHAGORAS gezeigt. Also gibt es den Punkt T als Berührpunkt.
- Siehe Zeichnung.

(c) Im Dreieck MDA gilt:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{3\,\mathrm{cm}}{6\,\mathrm{cm}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} \approx 26,57^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 53,14^\circ\,.$$

- Siehe Zeichnung.
- Im Dreieck FDA gilt:

$$\sin 26,57^\circ \approx \frac{\overline{FD}}{6\,\mathrm{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{FD} \approx 2,68\,\mathrm{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{TD} \approx 5,36\,\mathrm{cm}\,.$$

$$\Delta MDA: \quad \overline{AM}^2 = (6^2 + 3^2)\,\mathrm{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AM} \approx 6,71\,\mathrm{cm}\,.$$

$$A_{\text{getönt}} = A_{MDAT} - A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{TD} - A_{\text{Sektor}}\,.$$

$$A_{\text{getönt}} \approx \frac{1}{2} \cdot 6,71 \cdot 5,36\,\mathrm{cm}^2 - \frac{53,14^\circ}{360^\circ} \cdot 6^2\pi\,\mathrm{cm}^2 \approx 1,29\,\mathrm{cm}^2$$

3 Neue Aufgaben, Oktober 2012

1. Erfinde 10 Divisionsaufgaben, wobei jeweils nur die drei Ziffern 0, 5 und 7 mindestens einmal vorkommen. Bei der anschließenden Division darf kein Rest bleiben.

Lösung: Z.B. $700 : 5 = 140 \quad 7000 : 5 = 1400 \quad 70000 : 5 = 14000$ usw.

oder

$705 : 5 = 141 \quad 750 : 5 = 150 \quad 570 : 5 = 114$

oder

$7005 : 5 = 1401 \quad 7050 : 50 = 150 \quad 57500 : 500 = 15$ usw.

oder

$70 : 5 = 14 \quad 700 : 50 = 14 \quad 7000 : 500 = 14$ usw.

2. Die Schülerinnen und Schüler der 5a haben die folgenden Aufgaben bekommen:
$7 \cdot 101 = \qquad 53 \cdot 101 = \qquad 964 \cdot 101 = \qquad 1001 \cdot 101 = \qquad .$
Beim Berechnen der Ergebnisse meint Hans: „Das mit dem zweiten Faktor 101 ist doch eigentlich ganz einfach: Hänge jeweils an den ersten Faktor zwei Nullen an und addiere zu dieser neuen Zahl den ersten Faktor. Dann hast du den Wert des betreffenden Produktes.“
   (a) Berechne selbst die vier Produktwerte. Bestätige, dass Hans mit seiner Regel Recht hat.
   (b) Christian behauptet jedoch: „Ja aber wenn der erste Faktor größer als eine Million ist, dann funktioniert die Regel nicht mehr.“
   Hat Christian Recht? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) $7 \cdot 101 = 707 = 700 + 7$; seine Regel stimmt.
$53 \cdot 101 = 5353 = 5300 + 53$; seine Regel stimmt.
$964 \cdot 101 = 97364 = 96400 + 964$; seine Regel stimmt.
$1001 \cdot 101 = 101\,101 = 100\,100 + 1001$; seine Regel stimmt.

(b) Christian sollte die Regel von Hans zunächst an einem Beispiel testen:
$1\,234\,567 \cdot 101 = 124\,691\,267 = 123\,456\,700 + 1\,234\,567$; die Regel von Hans stimmt auch für dieses Beispiel.

Allerdings ist dieses eine Beispiel nur ein Hinweis, aber kein Beweis dafür, dass die Regel auch für so große oder noch größere oder sogar **alle natürlichen Zahlen** gilt. Wir untersuchen die Regel genauer.
„Hänge jeweils ... zwei Nullen an ... “ bedeutet: Multipliziere (den ersten Faktor) mit 100. „Addiere zu dieser neuen Zahl den ersten Faktor.“ bedeutet: Dieser erste Faktor kommt noch einmal hinzu. Also hast du den ersten Faktor insgesamt mit 101 multipliziert. Das bedeutet: Die Regel von Hans bei der Multiplikation mit 101 gilt für alle natürlichen Zahlen.

3. In der Tierhandlung „Katz & Maus“ sind 4 schwarze, 13 weiße und 9 graue Mäuse aus einem Käfig geflüchtet.
Der Chef, Herr Samtpfote, stellt eine Lebendfalle mit Ködern auf. Noch in der Nacht finden sich darin einige der Ausreißer wieder ein. Am Morgen stellt sich heraus, dass von jeder Farbe mindestens eine Maus wieder eingefangen ist. Der Rest rennt noch frei umher.

Notiere im Folgenden für jede Antwort eine Begründung.

(a) Gib die Mindestzahl der Mäuse an, die bis dahin eingefangen waren.

(b) Gib die Höchstzahl der Mäuse an, die bis dahin eingefangen waren.

(c) Wie viele Mäuse mussten mindestens wieder eingefangen worden sein, damit sich Herr Samtpfote sicher sein kann, dass von jeder Farbe mindestens eine Maus dabei ist? Welche Farbe(n) tragen dann die noch in Freiheit befindlichen Tiere?

Lösung: Wichtig ist, dass (wie aus dem obigen Text ersichtlich) alle drei Farben bei den wieder eingefangenen Mäusen vertreten sind.

(a) Es saßen mindestens 3 Mäuse in der Falle: eine schwarze, eine weiße und eine graue.

(b) Gesamtzahl der Mäuse: $4 + 13 + 9 = 26$.
Weil es aber einen Rest gibt, der sich noch auf der Flucht befindet, können höchstens 25 Tiere gefangen worden sein.

(c) Im ungünstigsten Fall gehen zuerst die 13 weißen Mäuse und die 9 grauen Mäuse in die Falle. Dann muss die nächste Maus, die sich fangen lässt, aber schwarz ein. Also sind noch drei schwarze Nager frei.

4. Karl rechnet: $374\,389 \cdot 9 = 3\,349\,501$.

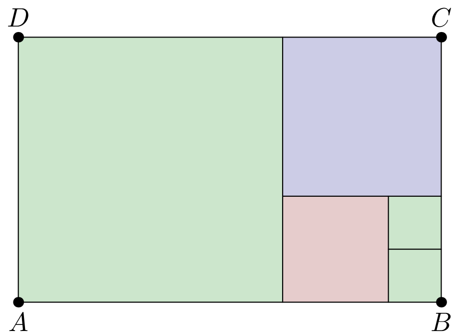
(a) Angela betrachtet das Ergebnis. Sie meint: „Du hast dich verrechnet.“
Begründe ohne den richtigen Produktwert zu berechnen, dass Angela Recht hat.

(b) Angela berechnet das korrekte Ergebnis. Sie entdeckt, dass sich Karl nur an der Zehntausenderstelle vertan hat.
Ermittle die richtige Zehntausenderstelle ohne den ganzen Produktwert zu berechnen.

Lösung: (a) Da die Rechenaufgabe den Faktor 9 enthält, muss der Produktwert wiederum durch 9 teilbar sein, aber dessen Quersumme beträgt $3 + 3 + 4 + 9 + 5 + 0 + 1 = 25$. Weil 9 kein Teiler von 25 ist, kann Karls Ergebnis nicht stimmen.

(b) Du musst also Neunervielfache finden, die in der Nähe von 25 liegen.
Die Quersumme 18 kann mit Hilfe einer abgeänderten Zehntausenderstelle 4 nicht erreicht werden, denn dann müsste die richtige Ziffer um 7 kleinerer als 4 sein. Eine solche Ziffer gibt es nicht.
Also muss das richtige Ergebnis die Quersumme 27 besitzen. Das ist dann der Fall, wenn die falsche Ziffer 4 durch die Ziffer 6 ersetzt wird.
In der Tat ist dann $374\,389 \cdot 9 = 3\,369\,501$.

5.



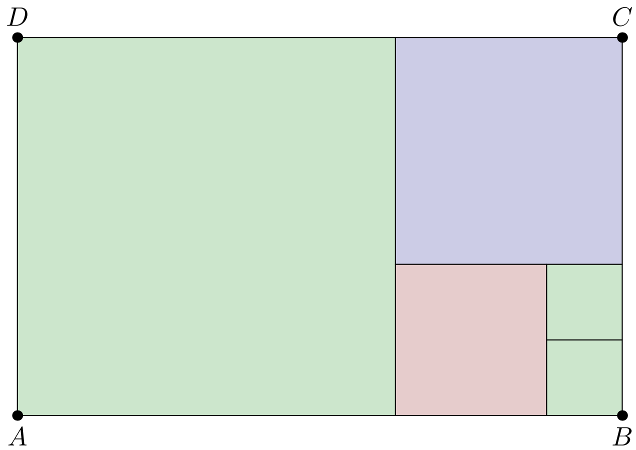
Das rechteckige Banner $ABCD$ ist aus lauter Quadraten zusammengefügt.

(a) Zeichne die Figur mit ihrem quadratischen Muster im Inneren für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$.

(b)
- Wie viele Quadrate sind es?
- Wie viele Rechtecke sind es?

(c) Das Banner wird aus Stoff zusammengenäht und mit einer goldenen Borte umsäumt.
Berechne die Mindestlänge des Saumes, wenn jedes der beiden kleinsten Quadrate einen Umfang von $24\,\text{cm}$ hat.

Lösung: (a)



(b)
- Es sind fünf Quadrate.
- Zunächst siehst du vier Rechtecke, die keine Quadrate sind.
  Weil sich jedes Quadrat aber gleichzeitig auch Rechteck nennen darf (da es in sich alle Eigenschaften eines Rechtecks vereinigt), enthält die Figur $5+4 = 9$ Rechtecke.

(c) Jedes der kleinsten Quadrate hat dann eine Seitenlänge von
$24\,\text{cm} : 4 = 6\,\text{cm}$.

Das nächst größere Quadrat hat dann eine Seitenlänge von
$2 \cdot 6\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$.

Das Quadrat rechts oben hat dann eine Seitenlänge von
$12\,\text{cm} + 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$.

Das Quadrat links hat dann eine Seitenlänge von
$12\,\text{cm} + 18\,\text{cm} = 30\,\text{cm}$.

Somit erhältst du als Mindestlänge für den Goldsaum:
$u = 2 \cdot [(30 + 12 + 6) + (6 + 6 + 18)]\,\text{cm} = 156\,\text{cm}$.

6. Die Summe aus drei natürlichen Zahlen soll 10 ergeben. Notiere alle Möglichkeiten.

Lösung:

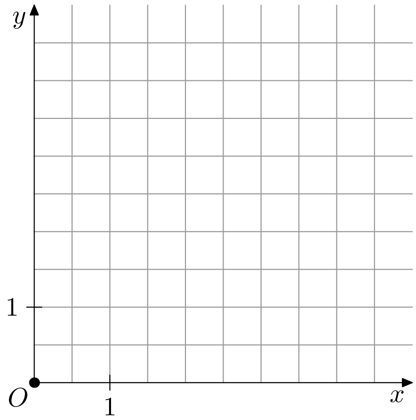
$1+1+8 = 10$	$2+2+6 = 10$	$3+3+4 = 10$
$1+2+7 = 10$	$2+3+5 = 10$	
$1+3+6 = 10$	$2+4+4 = 10$	
$1+4+5 = 10$		

7. Zwei natürliche Zahlen x und y sollen zusammen 5 ergeben. In der Tabelle unten steht schon eine Möglichkeit: $x = 2$ und $y = 3$, so dass $x + y = 2 + 3 = 5$ gilt.

(a) Vervollständige die Tabelle entsprechend:

x		2			
y		3			
$(x \mid y)$		$(2 \mid 3)$			

(b) Die Zahlenpare in der dritten Zeile lassen sich als Punkte im Gitternetz deuten.



Trage alle Zahlenpaare der dritten Zeile in das Gitternetz ein.

(c) • Die Punkte im Gitternetz liegen nicht wild in der Gegend herum. Beschreibe die Lage dieser Punkte:

____

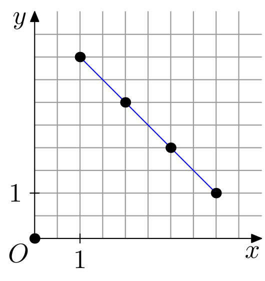
____

• Mache deine Antwort auch im Gitternetz deutlich.

Lösung: (a) Vervollständige die Tabelle entsprechend:

x	1	2	3	4	
y	4	3	2	1	
$(x \mid y)$	$(1 \mid 4)$	$(2 \mid 3)$	$(3 \mid 2$	$(4 \mid 1)$	

(b)



(c) • Alle Punkte liegen auf einer Strecke (oder Halbgeraden oder Geraden).

• Siehe Zeichnung.

8. Uwe rechnet:
$5183 + 4625 + 1078 + 500 = 11\,386$. Die Lehrerin bestätigt sein Ergebnis.
Doris soll die folgende Aufgabe rechnen:
$5183 - 500 + 1078 + 4625 =$.
Sie betrachtet das Ergebnis von Uwe und meint dann: „Da brauche ich doch nur … .“

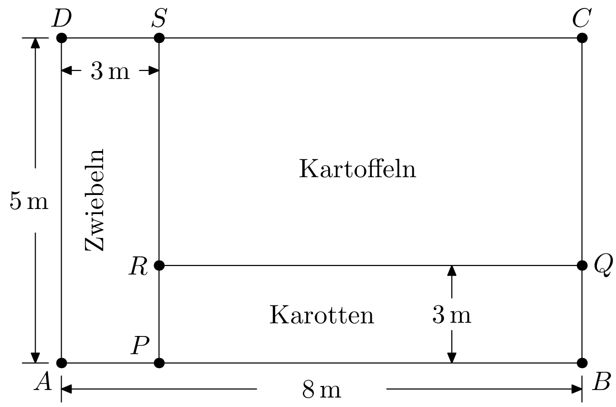
   (a) Was hat Doris gemeint? Notiere ihre vollständige Antwort und begründe sie.

   (b) Schreibe das Ergebnis ihrer Rechenaufgabe hin.

Lösung: (a) „Da brauche ich doch nur von Uwes Ergebnis 1000 zu subtrahieren. Dann habe ich mein Ergebnis.“
Begründung: Bei sonst identischen Summanden steht in Uwes Aufgabe +500 und in der Aufgabe von Doris −500. Also unterscheiden sich die beiden Ergebnisse um den Wert 1000.

(b) Das Ergebnis von Doris ist dann $10\,386$.

9.



Das rechteckige Feld $ABCD$ ist 8 m lang und 5 m breit.
Auf den drei rechteckigen Parzellen werden Karotten, Zwiebeln und Kartoffeln angebaut. Die beiden Streifen für Karotten und Zwiebeln sind jeweils 3 m breit.
Berechne den Flächeninhalt des Kartoffelfeldes. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

Lösung: Es gilt: $\overline{RQ} = 8\,\mathrm{m} - 3\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}$ und $\overline{RS} = 5\,\mathrm{m} - 3\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}$
$A_{\text{Kartoffelfeld}} = \overline{RQ} \cdot \overline{RS} = 5\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{m}^2$.

10. Unter der Quersumme QS einer natürlichen Zahl versteht man den Wert der Summe aus ihren Ziffern.
Beispiel: $QS(409) = 4 + 0 + 9 = 13$.

(a) Notiere alle natürlichen Zahlen zwischen 9 und 45, die durch ihre Quersumme teilbar sind.

(b) Emil betrachtet das Ergebnis und meint: „Hier stehen nur Zahlen, die durch 3 oder durch 10 teilbar sind. Das gilt auch bestimmt für alle Zahlen von 10 bis 100.“
Begründe, dass Emil Recht hat.

(c)
- Welche dreistelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 4 sind durch 4 teilbar?
- Welche dreistelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 7 sind durch 7 teilbar?
- Welche vierstelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 25 sind durch 25 teilbar?

Lösung: (a) $\{10; 12; 18; 20; 21; 24; 30; 36; 40; 42\}$.

(b) Es kommen nur Zahlen mit $QS \in \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 11; 13; 14; 16\}$ in Frage.
$QS = 1$ liefert $\{10; 100\}$: Beides sind aber ein Zehnervielfache.
$QS = 2$ liefert 11 und 20 . Beide Möglichkeiten scheiden aus.
$QS = 4$ liefert $\{13; 31; 22; 40\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 5$ liefert $\{14; 23; 41; 32; 50\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 7$ liefert $\{16; 25; 34; 61; 52; 43; 70\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 8$ liefert $\{17, 26; 35; 44; 71; 62; 43; 80\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 11$: Die zugehörigen natürlichen Zahlen müssen zwei gleiche Ziffern besitzen. Damit kommt aber keine $QS = 11$ zustande.
$QS = 13$ liefert $\{49; 58; 67; 94; 85; 76\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 14$ liefert $\{59; 68; 77; 86; 95\}$. Keine Möglichkeit.
$QS = 16$ liefert $\{79; 88; 97\}$. Keine Möglichkeit.

(c)
- Auf jeden Fall gehört 400 mit der $QS = 4 + 0 + 0 = 4$ dazu.
  Nun ist $4 = 1 + 1 + 2$. Also: $112 : 4 = 28$: Daher ist 112 eine der gesuchten Zahlen. Alle anderen dreistelligen Zahlen, die sich aus den Ziffern 1 und 2 zusammensetzen, sind ungerade und damit nicht durch 4 teilbar.
  Weiter ist $4 = 2 + 2$. Das ergibt 202 (nicht durch 4 teilbar) und
  $220 : 4 = 55$. Daher ist 220 eine weitere der gesuchten Zahlen, andere gibt es nicht.
- Wieder ist 700 mit der $QS = 7 + 0 + 0 = 7$ eine der gesuchten Zahlen.

  1. Fall:
  $7 = 1 + 0 + 6$ ergibt $\{106; 160; 610; 601\}$.
  $106 : 7 = 15$ Rest 2.
  $160 : 7 = 22$ Rest 6.
  $610 : 7 = 87$ Rest 1.
  $601 : 7 = 85$ Rest 6.

  2. Fall:
  $7 = 2 + 0 + 5$ ergibt $\{205; 250; 502; 520\}$.

$205 : 7 = 29$ Rest 2.
$250 : 7 = 35$ Rest 5.
$502 : 7 = 71$ Rest 5.
$520 : 7 = 74$ Rest 2.

3. Fall:
$7 = 3 + 0 + 4$ ergibt $\{304; 340; 403; 430\}$.
$304 : 7 = 43$ Rest 3.
$340 : 7 = 48$ Rest 4.
$403 : 7 = 57$ Rest 4.
$430 : 7 = 61$ Rest 3.

4. Fall:
$7 = 1 + 1 + 5$ ergibt $\{115; 151; 511\}$.
$115 : 7 = 16$ Rest 4.
$151 : 7 = 21$ Rest 4.
$511 : 7 = 73$ Rest 0. Also ist 511 eine der gesuchten Zahlen.

5. Fall:
$7 = 1 + 2 + 4$ ergibt $\{124; 142; 214; 241; 412; 421\}$.
$124 : 7 = 17$ Rest 5.
$142 : 7 = 20$ Rest 2.
$214 : 7 = 30$ Rest 4.
$241 : 7 = 34$ Rest 3.
$412 : 7 = 58$ Rest 6.
$421 : 7 = 60$ Rest 1.

6. Fall:
$7 = 1 + 3 + 3$ ergibt $\{133; 313; 331\}$.
$133 : 7 = 19$ Rest 0. Also ist 133 eine der gesuchten Zahlen.
$313 : 7 = 44$ Rest 5.
$331 : 7 = 47$ Rest 2.

7. Fall:
$7 = 2 + 2 + 3$ ergibt $\{223; 232; 322\}$.
$223 : 7 = 31$ Rest 6.
$232 : 7 = 33$ Rest 1.
$322 : 7 = 46$ Rest 0. Also ist 322 eine der gesuchten Zahlen.

Also kommen nur die Zahlen 133, 322, 511 und 700 in Frage.

- Eine natürliche Zahl ist durch 25 teilbar, wenn sie auf das Ziffernpaar . . . 00 oder . . . 25 oder . . . 50 oder . . . 75 endet.

1. Fall: Die Zahl endet auf $\ldots 00$.
Dann müssten die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 25 ergeben. Das ist nicht möglich.

2. Fall: Die Zahl endet auf $\ldots 25$.
Dann muss die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 18 ergeben. Das ergibt 9925 als einzige Zahl: $9 + 9 + 2 + 5 = 25$.

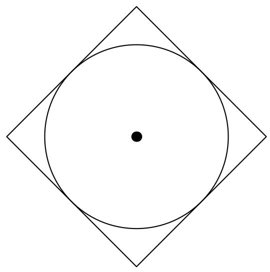
3. Fall: Die Zahl endet auf $\ldots 50$.
Dann müssten die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 20 ergeben. Das ist nicht möglich.

4. Fall: Die Zahl endet auf $\ldots 75$.
Dann muss die Summe beiden vorderen Ziffern den Wert 13 ergeben. Das ergibt die folgenden Möglichkeiten: 9475 , 4975, 8575, 5875, 6775 und 7675 .

11. Welche Zahl gehört in das Kästchen?
$6 \cdot 7 \cdot 15 = 10 \cdot \square \cdot 21$

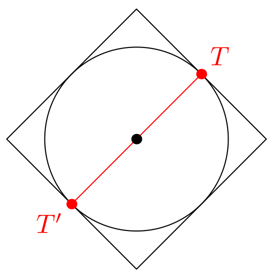
Lösung: $6 \cdot 7 \cdot 15 = 10 \cdot 3 \cdot 21$.

12.



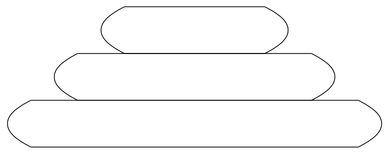
Eine kreisförmige Fensterscheibe ist von einem quadratischen hölzernen Rahmen eingefasst, dessen Gesamtlänge 5 m beträgt.
Welchen Durchmesser hat die Fensterscheibe?

Lösung:



Das Quadrat hat eine Seitenlänge von $5\,\mathrm{m} : 4 = 500\,\mathrm{cm} : 4 = 125\,\mathrm{cm}$.
Dann hat die Fensterscheibe ebenfalls einen Durchmesser von $125\,\mathrm{cm}$ (siehe Strecke $[TT']$).

13.



Im Küchenschrank sind drei verschieden große Holzbrettchen rwie in der Zeichnung übereinander gestapelt.
Es handelt sich um ein weißes (w), einen grünes (g) und einen rotes (r) Brettchen. Das weiße Brettchen ist größer als das rote. Wie könnte der Stapel aussehen?

Lösung: Das weiße Brettchen muss in jedem Fall unter dem roten liegen. Dann gibt es drei Möglichkeiten:

b	r	r
r	b	w
w	w	b

14. In einer Plastiktüte befinden sich 100 gleiche Würfel, deren Kantenlänge jeweils 2 cm beträgt. Alfred will aus diesen Würfeln einen möglichst großen Würfel lückenlos zusammenfügen.

(a) Wie viele kleine Würfel hat der dann übrig?

(b) Wie hoch wäre der Turm aus kleinen Würfeln, die den großen Würfel ergeben?

Lösung: (a) Wenn in jeder Kante fünf kleine Würfel lägen, dann bräuchte Alfred $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ Würfel.
Also dürfen in jeder Kante nur 4 kleine Würfel liegen: $4^3 = 64$. Dann hat Alfred noch $100 - 64 = 36$ kleine Würfel übrig.

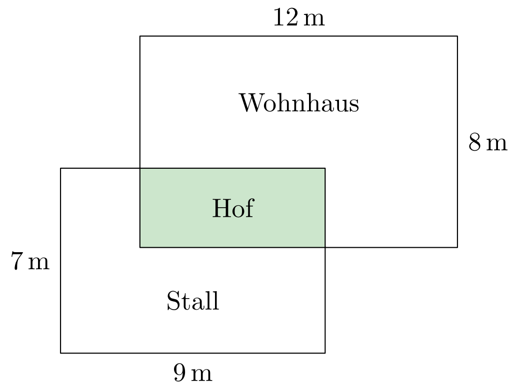
(b) Wenn Alfred die 64 kleinen Würfel zu einem Turm aufschichten könnte, dann wäre der Turm $64 \cdot 2\,\mathrm{cm} = 128\,\mathrm{cm}$ hoch.

15. Ein halkugelförmiges Glasgefäß mit einer Wandstärke von 5 mm hat ein Fassungsvermögen von $10\,\mathrm{l}$.
Berechne den Außendruchmesser des Gefäßes in mm.

Lösung: (a) Damit der Differenzwert minimal wird, muss der Minuend möglichst klein und der Subtrahend möglichst groß werden:
$\square = 0$, $\heartsuit = 1$ und $\bigcirc = 9$.

(b) $8015 - 794 = 7221$.

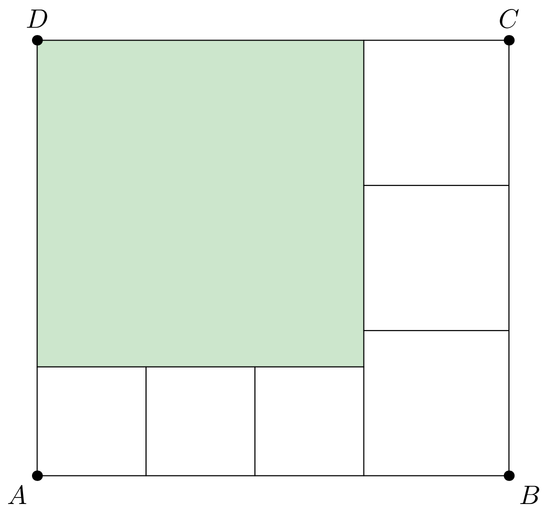
16.



Die Figur zeigt den Grundriss eines landwirtschaftlichen Anwesens. Die Grundfläche des Stalles beträgt $50\,\mathrm{m}^2$. Berechne die Grundfläche des Wohnhauses.

Lösung: Grundfläche des Stalles mit Hof: $9\,\mathrm{m} \cdot 7\,\mathrm{m} = 63\,\mathrm{m}^2$.
Grundfläche des Stalles: $50\,\mathrm{m}^2$.
Grundfläche des Hofes: $63\,\mathrm{m}^2 - 50\,\mathrm{m}^2 = 13\,\mathrm{m}^2$.
Grundfläche des Wohnhauses mit Hof: $12\,\mathrm{m} \cdot 8\,\mathrm{m} = 96\,\mathrm{m}^2$.
Grundfläche des Wohnhauses: $96\,\mathrm{m}^2 - 13\,\mathrm{m}^2 = 83\,\mathrm{m}^2$.

17.



Der eingefärbte Treppenabsatz ist ein Quadrat dessen Umfang 7m 2 dm beträgt.
Der Treppenabsatz ist von sechs quadratischen Betonplatten eingesäumt. Je drei davon haben die gleiche Größe.
Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$.

Lösung: 7m 2 dm = 72 dm .
Die Seitenlänge des quadratischen Treppenabsatzes beträgt dann
72 dm : 4 = 18 dm .
Dann beträgt die Seitenlänge eines der drei kleineren unteren Quadrate
18 dm : 3 = 6 dm .
Die Seite $[AD]$ des Rechtecks $ABCD$ ist dann 18 dm + 6 dm = 24 dm lang.
Dann beträgt die Seitenlänge eines der drei größeren seitlichen Quadrate
24 dm : 3 = 8 dm .
Die Seite $[AB]$ des Rechtecks $ABCD$ ist dann 18 dm + 8 dm = 26 dm lang.
Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ ergibt sich dann aus
$24\,\text{dm} \cdot 26\,\text{dm} = 624\,\text{dm}^2$.

18. Berechne die fehlenden Ziffern □ und ◯ in der folgenden Multiplikationsaufgabe:

$$\square 3 \cdot 19 \bigcirc = 4\,531$$

Lösung: Bei **jeder** Produktberechnung aus beliebig vielen Faktoren gilt:
Der Produktwert der **Endziffern** aus allen Faktoren hat selbst eine Endziffer. Diese stimmt mit der Endziffer des Produktwertes aus allen Faktoren überein.
Das bedeutet hier: $3 \cdot \bigcirc = \ldots 1$.
Der Produktwert aus 3 und der Ziffer ◯ endet also auf 1 . Dann muss $\bigcirc = 7$ gelten, denn im Dreiereinmaleins gibt es nur einen Produktwert, der auf 1 endet, nämlich $3 \cdot 7 = 21$.
Somit ergibt sich: $\square 3 \cdot 197 = 4\,531$ Umkehraufgabe: $4\,531 : 197 = 23$.
Also ist $\bigcirc = 2$, und $23 \cdot 197 = 4\,531$.

19. (a) Überprüfe, ob die Zahl 1 213 145 durch 9 teilbar ist.
    (b) Streiche bestimmte Ziffern durch, so dass die übrig gebliebene Zahl (die Reihenfolge der restlichen Ziffern soll unverändert bleiben) durch 9 teilbar ist. Gib sieben Möglichkeiten an.

Lösung: (a) Ist der Wert der Quersumme einer Zahl durch 9 teilbar, dann ist die Zahl selbst durch 9 teilbar.
Der Wert der Quersumme der Zahl 1 213 145 beträgt 17. Also ist diese nicht durch 9 teilbar.

(b) Nach dem Streichen bestimmter Ziffern kann aus dem Wert 17 keine größere, sondern nur eine kleinere Quersumme werden. Der nächst kleinere Quersummenwert, der dann durch 9 teilbar ist, ist die 9.
Durch Streichen von bestimmten Ziffern muss also der Wert der Quersumme von 17 auf 9 abgeändert werden; d.h. die Summe der zu streichenden Ziffern muss den Wert $17 - 9 = 8$ annehmen. Dann gibt es die folgenden Möglichkeiten:

Ursprüngliche Zahl	Zu streichende Ziffern	Neue Zahl
1 213 145	5; 3	12 114
1 213 145	5; 2; 1	1 314
1 213 145	5; 2; 1	1 134
1 213 145	5; 1; 1; 1	234
1 213 145	4; 3; 1;	z.B. 1 215
1 213 145	4; 2; 1; 1;	z.B. 135
1 213 145	3; 2; 1; 1; 1;	45

20. Ein Personenzug fährt von Cantorhausen über Abelstadt nach Besselheim.
In Cantorhausen befinden sich 306 Fahrgäste im Zug.
In Abelstadt steigt die Hälfte davon aus und 79 Fahrgäste steigen ein.
Die Anzahl der in Besselheim zugestiegenen Fahrgäste ist genauso groß wie die Hälfte der Fahrgäste, die sich bei der Ankunft im Bahnhof im Zug befunden haben. Außerdem steigen in Besselheim 120 Fahrgäste aus.
Wie viele Fahrgäste befinden sich im Zug, wenn dieser den Bahnhof in Besselheim verlässt?

Lösung: Abelstadt: Es steigen $306 : 2 = 153$ Fahrgäste aus und 79 Fahrgäste steigen ein. Dann sind $153 + 79 = 232$ Fahrgäste im Zug.
Besselheim: Es steigen $232 : 2 = 116$ Fahrgäste ein und 120 Personen aus. Dann sind 4 Fahrgäste weniger im Zug als vor der Ankunft in Besselheim.
Nach der Abfahrt in Besselheim sind dann also noch $232 - 4 = 228$ Fahrgäste im Zug.

21. a und b sind zwei natürliche Zahlen. Finde alle natürlichen Zahlen a und b, für die $a \cdot b + 3 = 42$ gilt.

Lösung: Aus $a \cdot b + 3 = 42$ folgt $a \cdot b = 39$. Es gilt $\mathbb{T}_{39} = \{1; ;3;13; 39\}$. Damit sind folgende Fälle möglich:

$$\begin{array}{lllll} 1 \cdot 39 & = & 39 & \Rightarrow & a = 1 \text{ und } b = 39 \quad \text{oder } a = 39 \text{ und } b = 1 \\ 3 \cdot 13 & = & 39 & \Rightarrow & a = 3 \text{ und } b = 13 \quad \text{oder } a = 13 \text{ und } b = 3 \end{array}$$

22. Ein Produkt aus drei Faktoren hat den Wert 70. Jeder Faktor ist größer als eins. Welchen Wert können die drei Faktoren haben? Gib alle Möglichkeiten an.

Lösung: Die Faktoren sollen a, b und c heißen. Es gilt: $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$.
Weil du Faktoren vertauschen kannst, ohne dass sich der betreffende Produktwert ändert, ergeben sich dann die folgenden Möglichkeiten:

a	b	c
2	5	7
2	7	5
5	2	7
5	7	2
7	2	5
7	5	2

Insgesamt gibt es also sechs Möglichkeiten.

23. Berechne die Platzhalter:

    (a) $11 \cdot 5 \cdot \square \cdot 3 \cdot 7 = 15\,015\,.$

    (b) $\{[(3\,000 : \bigcirc) : 10] : 25\} = 1\,.$

Lösung: Zur Lösung sind die jeweiligen Umkehraufgaben hilfreich:

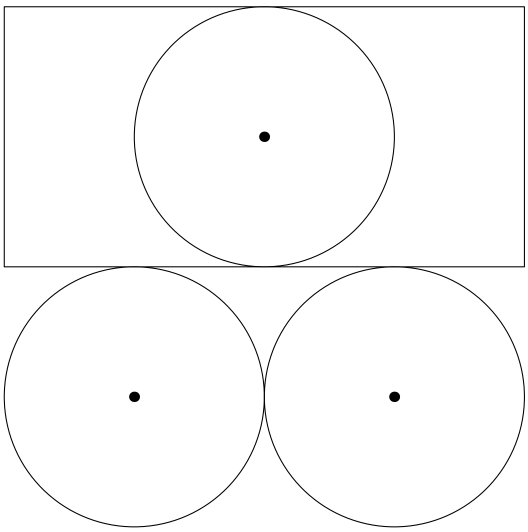
(a)

$$\begin{aligned} \underbrace{11 \cdot 5}_{=55} \cdot \square \cdot \underbrace{3 \cdot 7}_{=21} &= 15\,015 \\ 55 \cdot \square \cdot 21 &= 15\,015 \\ 55 \cdot \square &= 15\,015 : 21 = 715 \\ \square &= 715 : 55 = 13 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 3\,000 : \bigcirc &= 1 \cdot 10 \cdot 25 = 250 \\ 3\,000 &= 250 \cdot \bigcirc \\ 3\,000 : 250 &= \bigcirc \\ 12 &= \bigcirc \end{aligned}$$

24.



Welchen Flächeninhalt hat das Rechteck, wenn jeder Kreis einen Durchmesser von 10 cm hat? Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

Lösung: Länge des Rechtecks: $2 \cdot 10\,\text{cm} = 20\,\text{cm}$. Breite des Rechtecks: $10\,\text{cm}$.
Flächeninhalt des Rechtecks: $20\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} = 200\,\text{cm}^2$.

25.

$$\triangle \quad \bigcirc \quad \boxed{5} \quad : \quad 13 = \ ?$$

Der dreistellige Dividend soll aus lauter verschiedenen Ziffern bestehen.
Berechne alle möglichen Quotientenwerte.

Lösung: In der Umkehraufgabe muss $13 \cdot ?$ eine dreiziffrige Zahl ergeben, die einerseits aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und andererseits auf die Ziffer 5 endet. Notwendig dazu ist, dass anstelle des Fragezeichens eine natürliche Zahl steht, die auf die Ziffer 5 endet.
Das ergibt folgende Möglichkeiten:

Wert des Quotienten	$\triangle$	$\bigcirc$	$\square$	
$13 \cdot 5 = 65$		6	5	keine dreiziffrige Zahl
$13 \cdot 15 = 195$	1	9	5	
$13 \cdot 25 = 325$	3	2	5	
$13 \cdot 35 = 455$	4	5	5	geht nicht: gleiche Ziffern
$13 \cdot 45 = 455$	5	8	5	geht nicht: gleiche Ziffern
$13 \cdot 55 = 715$	7	1	5	
$13 \cdot 65 = 845$	8	4	5	
$13 \cdot 75 = 975$	9	7	5	

Es sind also nur die Quotientenwerte $\{195; 325; 715; 845; 975\}$ möglich.

26. Egon ist 13 Jahre alt und er wäre 6 Jahre jünger als Emil, wenn dieser 1 Jahr älter wäre.
Wie alt ist Emil?

Lösung: Wenn Egon ohne weitere Vorbedingungen 6 Jahre jünger wäre als Emil, dann wäre Emil 19 Jahre alt.
Egon ist aber nur unter der Bedingung 6 Jahre jünger, dass Emil ein Jahr älter ist. Mit 19 Jahren ist er ein Jahr zu alt. Also muss Emil jetzt 18 Jahre alt sein.

27. Auf wie viele Nullen endet der Produktwert von $32 \cdot 10\,034\,300 \cdot 25$?

Lösung: $32 \cdot 10\,034\,300 \cdot 25 = 32 \cdot 25 \cdot 10\,034\,300 = 800 \cdot 1\,034\,300$.
Am Ende des Produktwertes stehen somit 4 Nullen.

28. Wenn du 31 durch 9 dividierst, bleibt der Rest 4.
Eine möglich Schreibweise dafür ist $31 = 3 \cdot 9 + 4$.

(a) Ermittle alle zweistelligen Zahlen, die bei der Division durch 13 den Rest 12 lassen.

(b) Ermittle die kleinste dreistellige Zahl, die bei der Division durch 13 den Rest 12 lässt.

(c) Ermittle die größte dreistellige Zahl, die bei der Division durch 13 den Rest 12 lässt.

Lösung: (a)

$1 \cdot 13 = 13$	$13 + 12 = 25$	gesuchte Zahl: **25**
$2 \cdot 13 = 26$	$26 + 12 = 38$	gesuchte Zahl: **38**
$3 \cdot 13 = 39$	$39 + 12 = 51$	gesuchte Zahl: **51**
$4 \cdot 13 = 52$	$52 + 12 = 64$	gesuchte Zahl: **64**
$5 \cdot 13 = 65$	$65 + 12 = 77$	gesuchte Zahl: **77**
$6 \cdot 13 = 78$	$78 + 12 = 90$	gesuchte Zahl: **90**
$7 \cdot 13 = 91$	$91 + 12 = 103$	Die Zahl 103 ist aber schon dreistellig.

(b) Die kleinste dreistellige Zahl ist 100. Aber hier gilt: $100 : 13 = 7\,R\,9$.
Die letze Zeile der Tabelle in der Lösung der Aufgabe (a) liefert damit die gesuchte kleinste Zahl **103**.

(c) 999 ist die größte dreistellige Zahl, aber es gilt: $999 : 13 = 76\,R\,11$.
Dann ist $998 : 13 = 76\,R\,10$. Du musst in deiner Suche also so weit zurück, bis der Rest auf 12 zugenommen hat.
$998 - 10 = 988$ .Dann gilt $988 : 13 = 76$. Also ist $987 : 13 = 75\,R\,12$.
Damit heißt die gesuchte Zahl **987**.

29. Die Klasse 5b beschäftigt sich gerade mit natürlichen Zahlen, deren Quersumme 100 beträgt.

(a) Begründe: Solche Zahlen müssen mehr als 11 Stellen aufweisen.

(b) • Ermittle die kleinste natürliche Zahl mit der Quersumme 100.
  • Schreibe ihren Namen im Wortlaut hin.

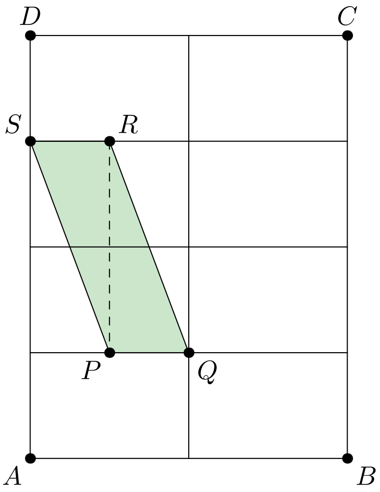
(c) Untersuche, ob es eine größte natürliche Zahl mit der Quersumme 100 gibt.

Lösung: (a) Eine 11-stellige natürliche Zahl kann höchstens die Quersumme $11 \cdot 9 = 99$ erreichen. Für die Quersumme 100 muss also mindestens eine Stelle dazukommen.

(b) • Die gesuchte Zahl muss mit einer „1“ beginnen. Dann muus die Quersumme 100 mit möglichst wenig weiteren Stellen erreicht werden. Also dürfen nur Neuner folgen, denn jede folgende Ziffer, die kleiner als 9 ist, hat eine Erhöhung der Stellenzahl und damit eine Vergrößerung des Zahlenwertes zur Folge.
  Mit der Lösung von (a) erhältst du die gesuchte Zahl 199 999 999 999 .
  • „Einhundertneunundneunzig Milliarden neunhundertneunundneunzig Millionen neunhundertneunundneunzig Tausend neunhundertneunundneunzig“.

(c) Du kannst eine natürliche Zahl zwischen der ersten und der letzten Ziffer mit beliebig vielen Nullen ausstatten, ohne dass sich der Wert der Quersumme 100 ändert. Mit immer mehr Stellen, die aussschließlich aus Nullen bestehen, kannst du den Zahlenwert immer weiter steigern, ohne dass du an eine Grenze stößt. Also gibt es keine größte natürliche Zahl mit der Quersumme 100.

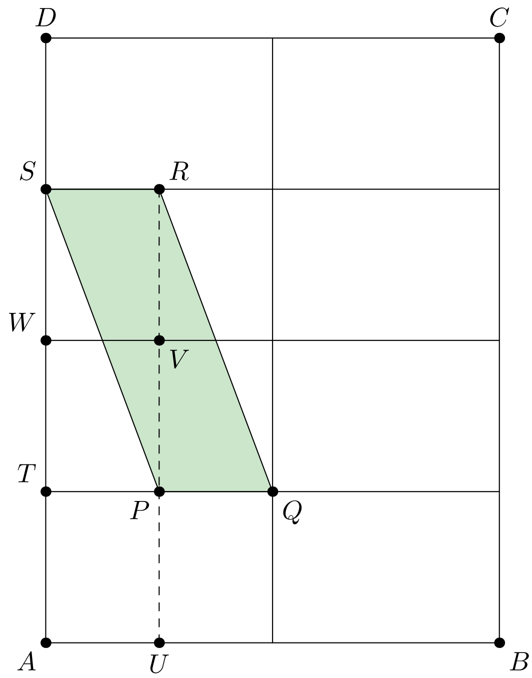
30.



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 8\,\text{cm}$.

(b) Welchen Bruchteil der Fläche des Rechtecks $ABCD$ nimmt das Viereck $PQRS$ ein?

Lösung: (a)

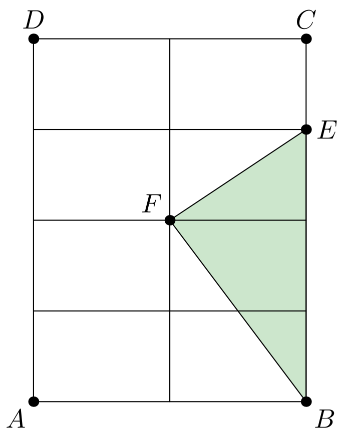


(b) Das Rechteck $TPRS$ hat den gleichen Flächeninhalt wie das Viereck $PQRS$ (Übrigens: Das Viereck $PQRS$ heißt „Parallelogramm“.)

Das Viereck $PQRS$ wiederum hat den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck $AUVW$. In das Rechteck $ABCD$ passt das Viereck $AUVW$ 8-mal hinein. Also gilt:

$$\frac{A_{AUVW}}{A_{ABCD}} = \frac{1}{8} = \frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}}.$$

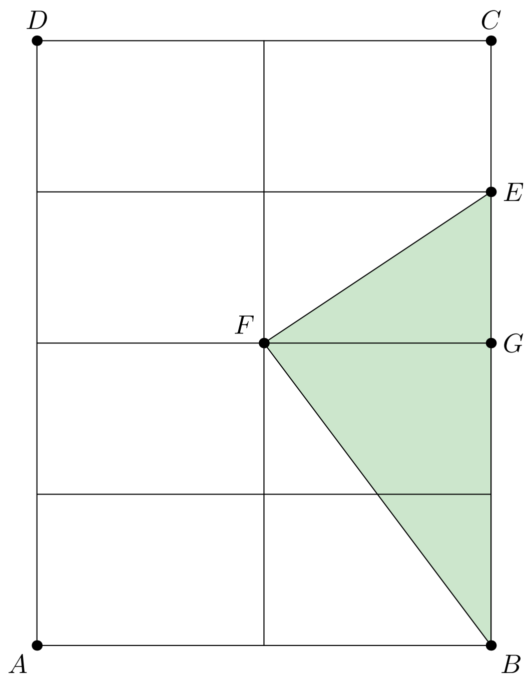
31.



(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 8\,\text{cm}$.

(b) Wie viel Prozent der Fläche des Rechtecks $ABCD$ nimmt das Dreieck BEF ein?

Lösung: (a)

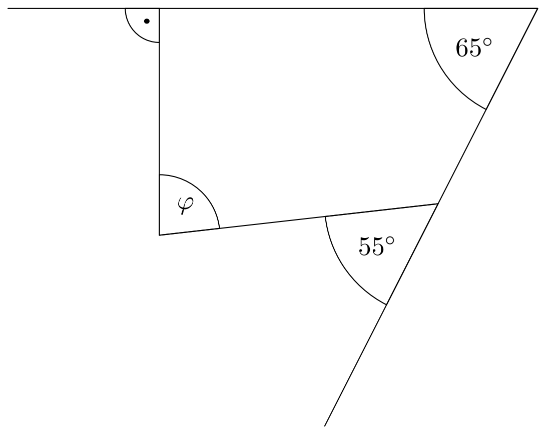


(b) Das Rechteck $ABCD$ setzt sich aus acht kleinen kongruenten Rechtecken zusammen. Das Dreieck FGE ist halb so groß wie eines dieser kleinen Rechtecke. Also nimmt das

Dreieck FGE $\frac{1}{16}$ der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ein.
Das Dreieck BGF wiederum nimmt die Hälfte von zwei dieser kleinen Rechtecke ein.Also nimmt das Dreieck BGF $\frac{1}{8}$ der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ein.
Daraus folgt::

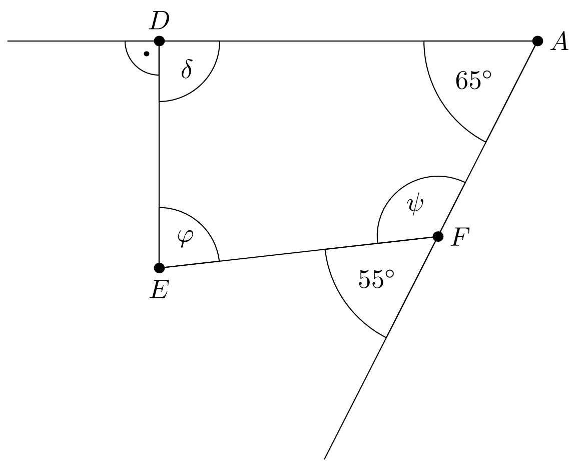
$$\frac{A_{BEF}}{A_{ABCD}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16} = 0,1875 = 18,75\% \,.$$

32.



Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht. Berechne das Winkelmaß φ .

Lösung:



Nach der Beziehung zwischen Nebenwinkeln gilt: $\delta = 180° - 90° = 90°$ und $\psi = 180° - 55° = 125°$.
Die Innenwinkelsumme betr“agt in jedem Viereck 360° .
Also gilt im Viereck $ADEF$: $65° + 90° + \varphi + 125° = 360° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 80°$.

33. Gegeben ist die Menge M von unmittelbar aufeinander folgenden Stammbrüchen:

$$M = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \dots \right\}$$

(a) Berechne:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} =$

(b)
- Notiere eine Regel, die beschreibt, wie du den Nenner des Ergebnisses berechnest.
- Notiere eine Regel, die beschreibt, wie du den Zähler des Ergebnisses berechnest.

(c) Stelle $\frac{31}{240}$ als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender Stammbrüche dar.

(d) Untersuche, ob sich $\frac{293}{21467}$ als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender Stammbrüche darstellen lässt.

(e) Begründe, weshalb sich $\frac{123008}{3782742016}$ nicht als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender Stammbrüche darstellen lässt.

Lösung: (a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{4 \cdot 3} = \frac{7}{12}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5+4}{5 \cdot 4} = \frac{9}{20}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6+5}{6 \cdot 5} = \frac{11}{30}$

(b)
- Der Nenner des Ergebnisses ist das Produkt aus den Nennern der beiden Stammbrüche.
- Der Zähler des Ergebnisses ist die Summe aus den Nennern der beiden Stammbrüche.

(c) Es gilt $31 = 15 + 16$ und $16 \cdot 15 = 240$. Also folgt $\dfrac{31}{240} = \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{16}$.

(d) Der Zähler 293 lässt sich nur auf eine Weise als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender natürlicher Zahlen darstellen: $293 = 146 + 147$. 146 und 147 müssen gleichzeitig die beiden gesuchten Nenner der Stammbrüche sein, deren Produkt 21467 ergeben müsste.
Es gilt jedoch $146 \cdot 147 = 21462 \neq 21467$. Die Darstellung als Summe zweier solcher Stammbrüche ist also nicht möglich.

(e) Der Zähler 123008 müsste sich als Summe zweier unmittelbar aufeinander folgender natürlicher Zahlen darstellen lassen. Von zwei unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen muss eine ungerade und die andere gerade sein. Die Summe aus einer geraden und ungeraden natürlichen Zahl ist aber stets ungerade. Der Zähler 123008 ist jedoch eine gerade Zahl. Die Darstellung als Summe zweier solcher Stammbrüche ist also nicht möglich.

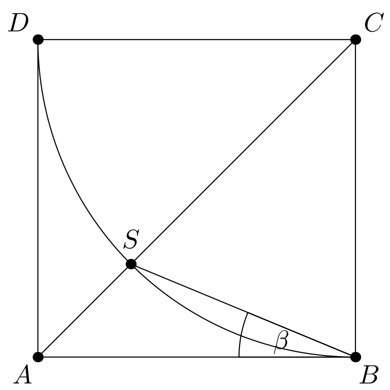
34. Gib zehn Belegungen für $x \in \mathbb{Q}$ an, so dass $\dfrac{x}{4} < 2$ gilt.

Lösung: Es gilt z.B. $\dfrac{7}{4} = 1,75 < 2$.

Dann ist aber auch $\dfrac{6}{4} = 1,5 < 2, \quad \dfrac{5}{4} = 1,25 < 2, \quad \ldots \quad , \quad \dfrac{1}{4} < 2$.

Wenn dann $x < 1$ ist, stimmt die Ungleichung immer.
Also gilt insgesamt z.B. $x \in \{6;\ 5;\ 4;\ 3;\ 2;\ 1;\ 0,98;\ 0,97;\ 0,96;\ 0,95\}$
oder $x \in \{0,25;\ 0,15;\ 0,05;\ 0,03;\ 0,02;\ 0,01;\ 0,098;\ 0,097;\ 0,096;\ 0,095\}$
oder $x \in \{-17;\ -20;\ -30;\ -300;\ -5678;\ -10^6;\ -10^8;\ -10^7;\ -3,146;\ 0\}$.

35.

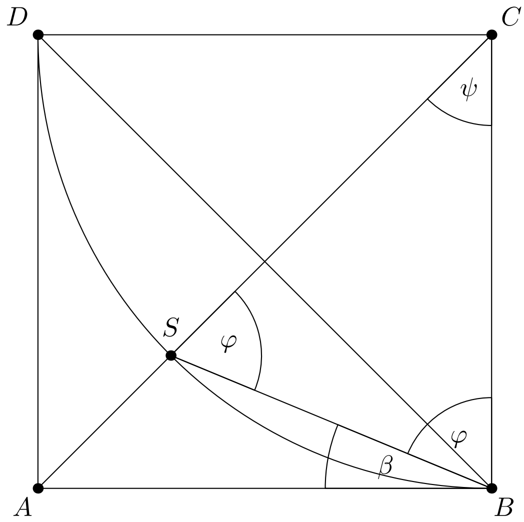


Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne das Maß β des Winkels SBA.

Lösung: (a)

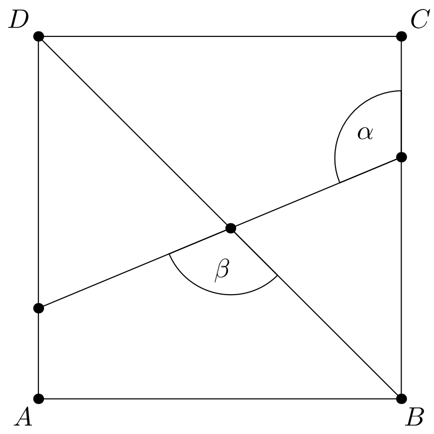


(b) Im Quadrat $ABCD$ halbiert die Diagonale $[AC]$ den rechten Winkel DCB. Also gilt: $\psi = 45°$.
Das Dreieck SBC ist gleichschenklig. $\Rightarrow \quad \varphi = (180° - 45°) : 2 = 67{,}5°$.
$\Rightarrow \quad \beta = 90° - \varphi = 22{,}5°$.

36. Gegeben ist die Gleichung $x \cdot y \cdot x = 284$, wobei x und y ganze Zahlen sein sollen. Ermittle alle Lösungen für x und y.

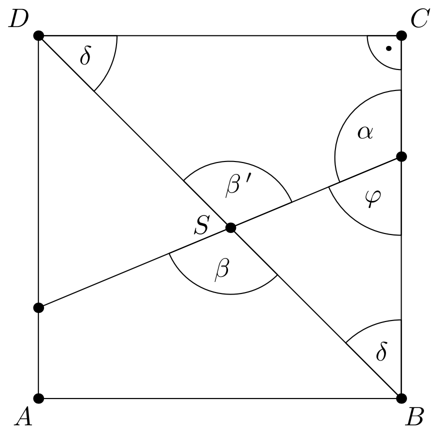
Lösung: $x \cdot y \cdot x = x^2 \cdot y = 284$.
Die Zahl 284 muss also einen quadratischen Teiler besitzen. Nun ist $284 = 1 \cdot 4 \cdot 71$.
1. Fall:
$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \vee x = -1$ zusammen mit $b = 284$.
2. Fall:
$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \vee x = -2$ zusammen mit $b = 71$.
Weil $71 \in \mathbb{P}$ gilt, gibt es nur die Lösungen
$\{(-1 \mid 284);\ (1 \mid 284);\ (-2 \mid 71);\ (2 \mid 71)\}$.

37.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Es gilt $\alpha = 123,4°$. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.
Berechne β auf zwei verschiedene Arten.

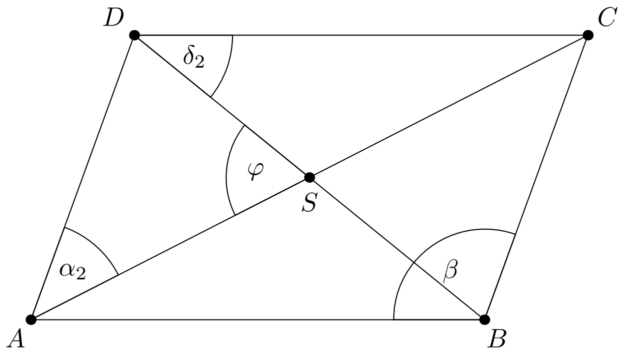
Lösung:



1. Möglichkeit: Über die Innenwinkelsumme im Viereck $SQCD$
Weil jede Quadratdiagonale Winkelhalbierende von zwei rechten Winkeln ist, folgt $\delta = 45°$.
Dann gilt im Viereck $SQCD$: $45° + \beta\,' + 123,4° + 90° = 360°$
$\Rightarrow \quad \beta\,' = 101,6°$.
Weil $\beta\,'$ und β Scheitelwinkel sind, folgt $\beta\,' = \beta = 101,6°$.

2. Möglichkeit: Über den Satz vom Außenwinkel
φ ist der Nebenwinkel von α. Also gilt: $\varphi = 180° - 123,4° = 56,6°$.
β ist ein Außenwinkel am Dreieck BQS: $\beta = \delta + \varphi = 45° + 56,6° = 101,6°$.

38.

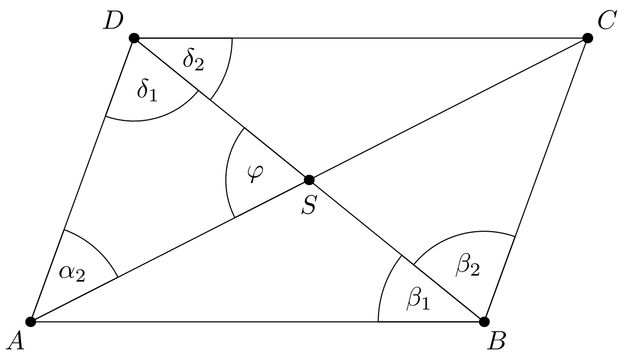


Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
Es soll gelten: $\alpha_2 = 42,1°$, $\delta_2 = 38,7°$ und $\varphi = 65,3°$. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.

(a) Skizziere das Parallelogramm.

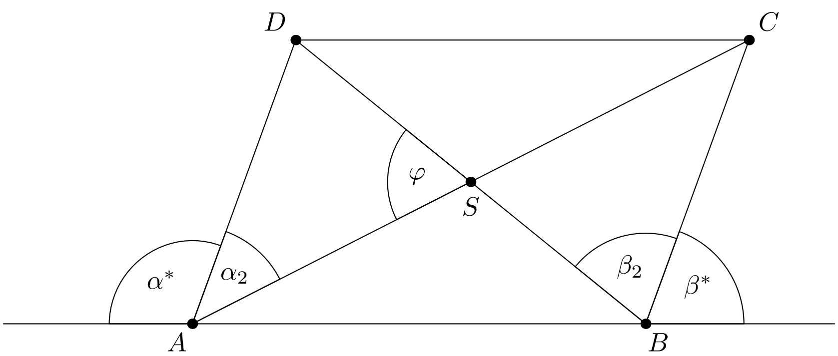
(b) Berechne β .

Lösung: (a)



(b) Es gibt mehrere Möglichkeiten, z.B.:
$\Delta\, ASD$: $\delta_1 = 180° - 42,1° - 65,3° = 72,6° = \beta_2$ (Z-Winkel) .
$\beta_1 = \delta_2 = 38,7°$ (Z-Winkel) $\quad\Rightarrow\quad \beta = \delta_1 + \delta_2 = 111,3°$.

39.



Die Klasse 7a bekommt vom Mathematiklehrer die folgende Aufgabe gestellt:
„Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
Es soll gelten: $\alpha_2 = 38{,}9°$, $\alpha^* = 109{,}2°$, $\varphi = 67{,}5°$ und $\beta^* = 77{,}6°$.
Berechne β_2. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht.“
Erwin meint nach mehreren Rechenversuchen: „In der Angabe kann etwas nicht stimmen.“ Wo liegt der Fehler?

Lösung: Es müsste gelten: $\beta = \sphericalangle CBA = 180° - \beta^* = 180° - 77{,}6° = 102{,}4°$.
Weil aber α^* und β zwei zugehörige F-Winkel sind, müssten beide Winkel gleiches Maß besitzen.
Aber in der Angabe steht: „$\alpha^* = 109{,}2° \neq 102{,}4°$.“ Das geht nicht.

40. Die Käsesorte „Bergglück“ besteht zu 40% aus Wasser. Die Trockenmasse besteht zu 40% aus Fett.
Wie viel Prozent Fett sind in der Käsesorte „Bergglück“ enthalten?

Lösung: Angenommen, der Käse wird in 100 g-Stücken angeboten.
Dann sind davon 40 g Wasser.
Die Trockenmasse beträgt 60 g. 40% davon sind Fett, das sind 24 g.
Also sind 24 g Fett in 100 g Käse enthalten. Der Fettgehalt dieser Käsesorte beträgt somit 24%.
Dieser Prozentsatz ist für jede Käsemenge dieser Sorte die gleiche.

41. Es gilt: $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125$.
Die Zahl 1000 lässt sich also in zwei Faktoren zerlegen, wobei keiner der beiden durch 10 teilbar ist; d.h. keiner der beiden endet auf 0.
Zerlege 21 000 so in zwei Faktoren, dass keiner der beiden auf 0 endet. Gib alle Möglichkeiten an.

Lösung:

$$\begin{aligned}
21\,000 &= 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \\
21\,000 &= (21 \cdot 8) \cdot 125 &&= 168 \cdot 125 \\
&= (21 \cdot 125) \cdot 8 &&= 2625 \cdot 8 \\
&= (3 \cdot 8) \cdot (7 \cdot 125) &&= 24 \cdot 875 \\
&= (7 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 125) &&= 56 \cdot 375
\end{aligned}$$

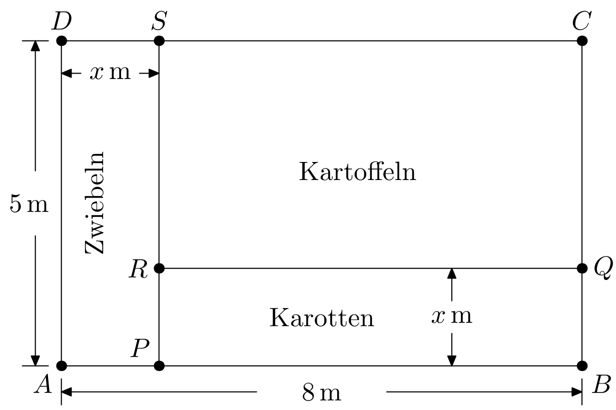
42. Carsten rechnet eine Gleichung aus, die er aus dem Buch übertragen hat. Der Lehrer betrachtet seinen Hefteintrag: „Deine Schrift ist wie schon so oft zum Teil unleserlich, aber dein Ergebnis ist richtig.“
In seinem Heft steht (der unleserliche Teil ist durch ein Kästchen ersetzt):

$$\begin{aligned}
2x - \square &= -2 \\
2x &= 14 \\
x &= 7
\end{aligned}$$

Ermittle auf zwei verschiedene Arten, was im Buch anstelle des Kästchens stand.

Lösung: **1. Möglichkeit:**
Um von der ersten zur zweiten Zeile zu kommen, hat Carsten offenbar auf beiden Seiten der Gleichung im Buch die Zahl 16 addiert. Dadurch fällt das Kästchen in der zweiten Zeile weg. Also stand die unleserliche Zahl 16 anstelle des Kästchens da.
2. Möglichkeit:
Der Lehrer hat $x = 7$ als richtige Lösung bestätigt. Setze diese Lösung in die erste Zeile ein:
$2 \cdot 7 - \square = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 14 - \square = -2 \mid -14 \quad \Leftrightarrow \quad -\square = -16 \mid \cdot (-1)$
$\Leftrightarrow \quad \square = 16\,.$

43.



Das rechteckige Feld $ABCD$ ist 8 m lang und 5 m breit.
Auf den drei rechteckigen Parzellen werden Karotten, Zwiebeln und Kartoffeln angebaut. Die beiden Streifen für Karotten und Zwiebeln sind jeweils x m breit. Sie besitzen den gleichen Flächeninhalt. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

(a) Berechne x. [Ergebnis: x=3]

(b) Wie viel Prozent der Gesamtfläche nimmt dann das Kartoffelfeld ein?

Lösung: (a) Es gilt: $\overline{RQ} = (8 - x)\,\text{m}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.
Dann folgt: $x \cdot (8 - x)\,\text{m}^2 = 5 \cdot x\,\text{m}^2 \ \mid: \ (x\,\text{m}^2)$ mit $x > 0$
$\Leftrightarrow \quad 8 - x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3\,.$

(b) $A_{\text{Kartoffelfeld}} = \overline{RQ} \cdot \overline{RS} = 5\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = 10\,\text{m}^2\,.$

$$\frac{A_{\text{Kartoffelfeld}}}{A_{ABCD}} = \frac{10\,\text{m}^2}{40\,\text{m}^2} = 0{,}25 = 25\%\,.$$

44. Lisa weiß, dass eine natürliche Zahl n dann durch 9 teilbar ist, wenn ihre Quersumme QS durch 9 teilbar ist.
Sie stellt sich nun folgende Fragen:

(1) „Ist der Wert der Summe aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme auch durch 9 teilbar?“

(2) „Ist der Wert des Produktes aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme durch 27 teilbar?“

(3) „Ist der Wert des Quotienten aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme durch 9 teilbar?“

Was meinst du? Begründe jeweils deine Ansicht.

Lösung: In jedem all gilt: $n = 9 \cdot x$ und $QS = 9 \cdot y$.

Zu Frage (1):
$n + QS = 9x + 9y = 9 \cdot (x + y)$. Die Antwort heißt „Ja“.

Zu Frage (2):
$n \cdot QS = 9x \cdot 9y = 81 \cdot (xy) = 27 \cdot 3 \cdot (x \cdot y)$. Die Antwort heißt wieder „Ja“.

Zu Frage (3):

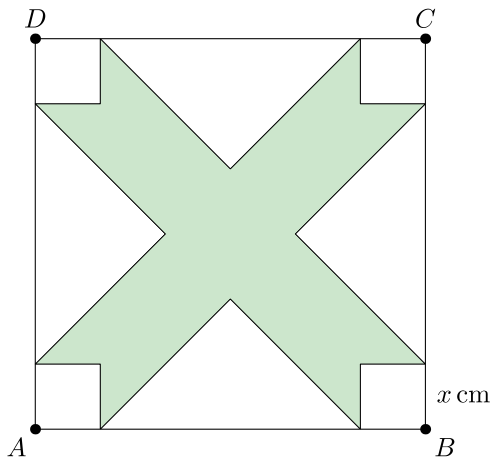
$\frac{n}{QS} = \frac{9x}{9y} = \frac{x}{y}$. Nun müsste y ein Teiler von x sein. Aber ist das immer so?

1. Beispiel:
$n = 648 \quad \Rightarrow \quad QS = 18 \quad 648 : 18 = 36$. Dieses Beispiel liefert eine Bestätigung.

2. Beispiel:
$n = 927 \quad \Rightarrow \quad QS = 18 \quad 917 : 18 = 50$ Rest 17 . Dieses Beispiel verneint die Frage (3).

Also ist der Wert des Quotienten aus einer durch 9 teilbaren natürlichen Zahl und ihrer Quersumme nicht immer ganz.

45.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat.
An seinen Eckpunkten befinden sich vier kleine Quadrate, deren Seitenlänge jeweils x m beträgt.
Die vier Dreiecke an den Quadratseiten sind jeweils gleichschenklig-rechtwinkig.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $x = 1$.

(b) Zeige: Für den Flächeninhalt A des eingefärbten Kreuzes gilt in Anhängigkeit von x:

$$A(x) = (-8x^2 + 24x)\,\text{cm}^2 .$$

(c) Berechne $A(0)$ und $A(3)$. Deute dein Ergebnis mit Hilfe deiner Zeichnung.

(d) Unter allen Kreuzen gibt es eines, dessen Flächeninhalt maximal ist.

- Berechne dieses Maximum sowie die zugehörige Belegung von x .
- Zeichne erneut das Quadrat $ABCD$ mit dem einbeschriebenen größten Kreuz.
- Wie viel Prozent der Fläche des Quadrates $ABCD$ nimmt das größte Kreuz ein? Löse das Problem auf zwei verschiedene Arten.

Lösung: (a) Klar.

(b)

$$\begin{aligned} A(x) &= [6^2 - 4 \cdot x^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (6-2x) \cdot (3-x)]\,\text{cm}^2 \\ &= [36 - 4x^2 - 2 \cdot (18 - 6x - 6x + 2x^2)]\,\text{cm}^2 \\ &= [36 - 4x^2 - 36 + 12x + 12x - 4x^2]\,\text{cm}^2 \\ A(x) &= (-8x^2 + 24x)\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

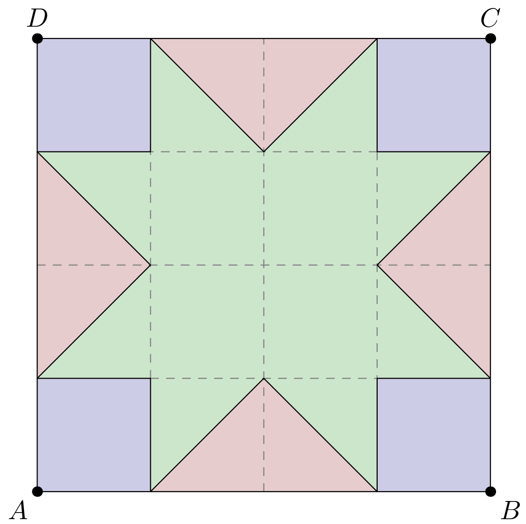
(c) $A(0) = 0\,\text{cm}^2$. Das zugehörige Kreuz entartet zu den beiden Diagonalen des Quadrates $ABCD$.
$A(3) = 0\,\text{cm}^2$. Es entsteht ein Kreuz das aus den Seitenmittelpunkten des Quadrates $ABCD$ erzeugt worden ist.

(d) •

$$\begin{aligned}A(x) &= (-8x^2+24x)\,\mathrm{cm}^2\\ &= -8\cdot(x^2-3x+1,5^2-2,25)\,\mathrm{cm}^2\\ &= -8\cdot[(x-1,5)^2-2,25)\,\mathrm{cm}^2\\ A(x) &= [(-8(x-1,5)^2+18]\,\mathrm{cm}^2\end{aligned}$$

$x=1,5$ liefert $A_{\max}=18\,\mathrm{cm}^2$.

•



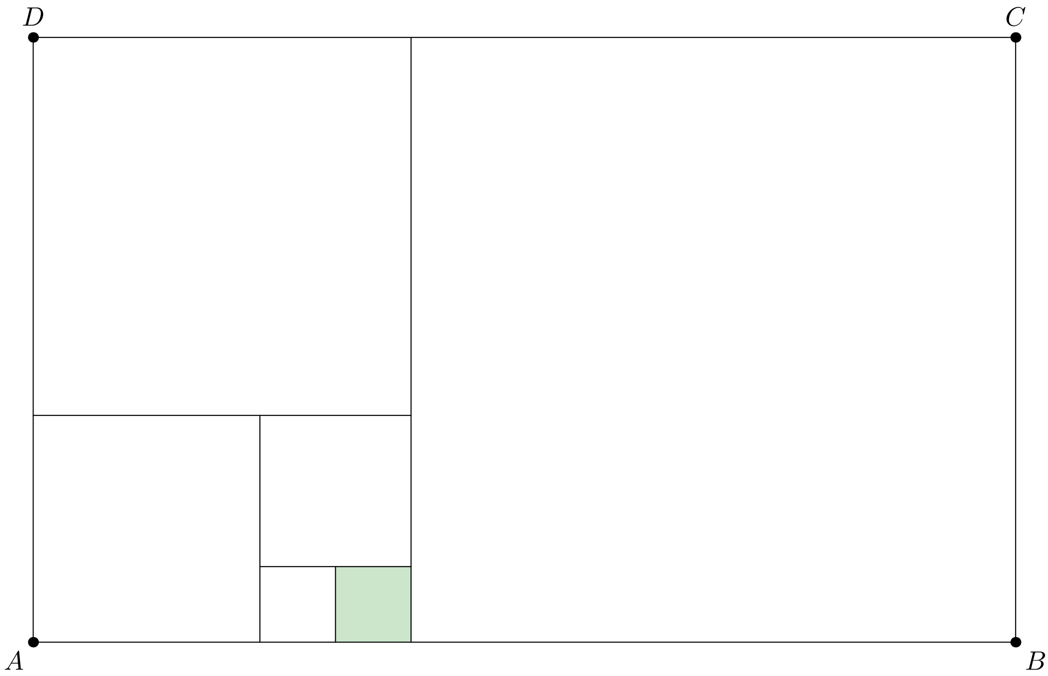
Zeichne das Quadrat $ABCD$ erneut mit dem größten Kreuz.

• 1. Möglichkeit: mit Hilfe der Lösung oben

$$\frac{A_{\text{Kreuz}}}{A_{\text{ABCD}}}=\frac{18\,\mathrm{cm}^2}{36\,\mathrm{cm}^2}=0,5=50\%\,.$$

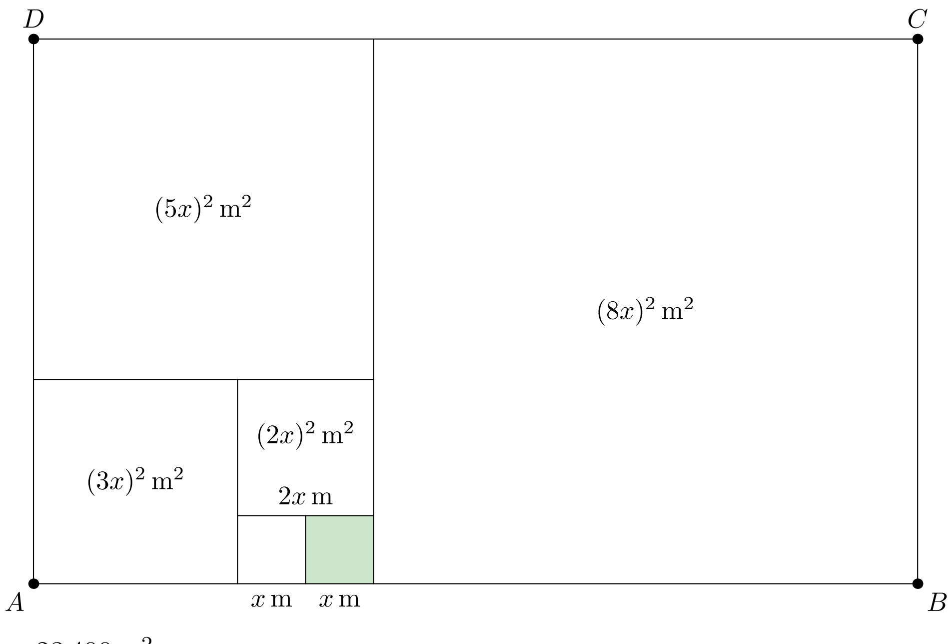
2. Möglichkeit: Die gestrichelten Hilfslinien zerlegen das Quadrat $ABCD$ in 16 kongruente kleine Quadrate.
Im Zentrum des Kreuzes befinden sich 4 gleich große Quadrate. Der Rest des Kreuzes setzt sich aus 8 kongruenten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken zusammen, wobei jedes halb so groß wie ein Quadrat im Zenrtrum ist. Diese 8 Dreiecke ergeben wiederum 4 Quadrate. Also nimmt das Kreuz insgesamt den gleichen Flächeninhalt ein, wie die 8 Quadrate.
Das sind aber zusammen 50% der Fläche des Quadrates $ABCD$.

46.



Ein rechteckiges Grundstück $ABCD$, dessen Flächeninhalt $2,34\,\mathrm{ha}$ beträgt, ist in lauter quadratische Parzellen eingeteilt. Eine der beiden kleinsten Parzellen, die im Plan farbig gekennzeichent ist, wird eingezäunt.
Berechne die Länge des Zaunes.

Lösung:



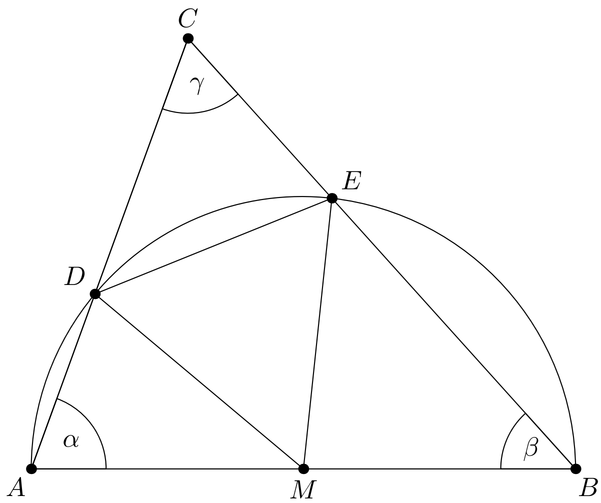
$2,34\,\mathrm{ha} = 23\,400\,\mathrm{m}^2$.
Die beiden kleinsten Parzellen haben eine Breite von $(x + x)\,\mathrm{m} = 2x\,\mathrm{m}$.
Diese Seitenlänge geht dann auf das nächst größere Quadrat über.
Dessen Flächeninhalt beträgt dann $(2x)^2\,\mathrm{m}^2$.

Auf diese Weise ermittelst du die Flächeninhalte der nächsten Quadrate (siehe Lösungsskizze).
Am Ende ergibt sich für die Maßzahlen:

$$\begin{aligned}
x^2 + x^2 + (2x)^2 + (3x)^2 + (5x)^2 + (8x)^2 &= 23\,400 \\
2x^2 + 4x^2 + 9x^2 + 25x^2 + 64x^2 &= 23\,400 \\
104x^2 &= 23\,400 \qquad |:104 \\
x^2 &= 225 \\
x &= 15
\end{aligned}$$

Der Umfang eines dieser kleinsten Quadrate beträgt $4 \cdot 15\,\mathrm{m} = 60\,\mathrm{m}$. Das ist dann die gesuchte Zaunlänge.

47.

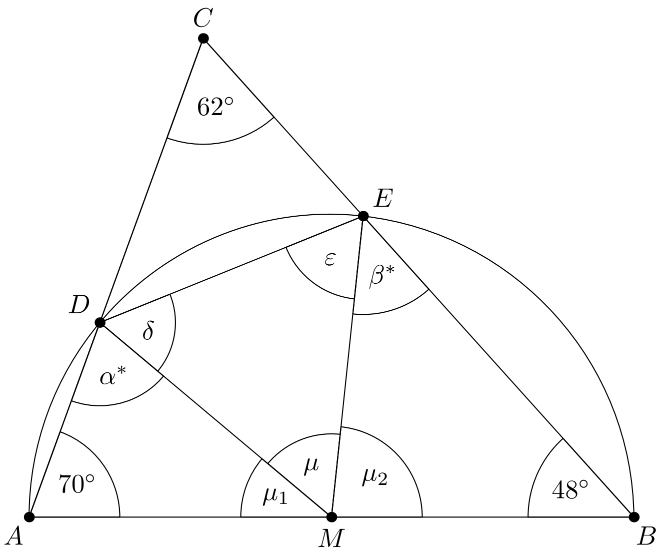


Der Mittelpunkt des Halbkreises ist M.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 70^\circ$ und $\gamma = 62^\circ$.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks MED.

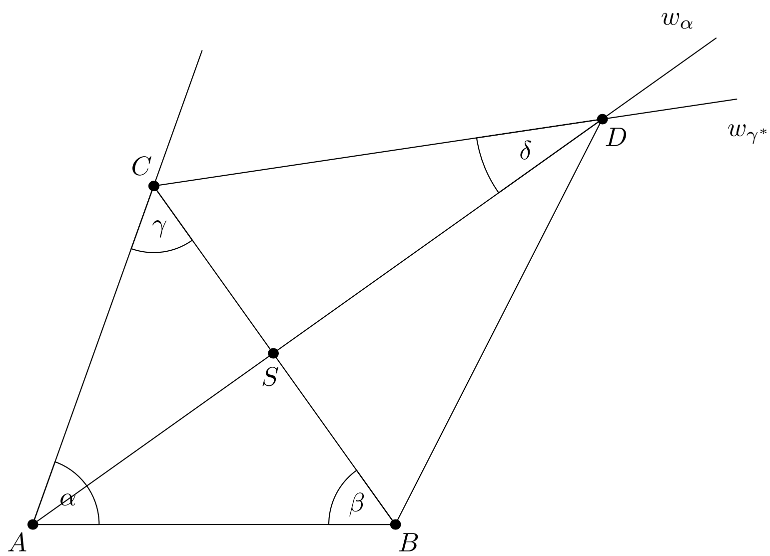
Lösung: (a)



Berechne zunächst das Winkelmaß $\beta = 180° - 70° - 62° = 48°$ und zeichne dann das Dreieck ABC (w,s,w), dann den Halbkreis . . . .

(b) Für den Kreiradius r gilt: $r = \overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MD} = \overline{ME}$.
Das Dreieck AMD ist daher gleichschenklig.
Also gilt: $\alpha^* = \alpha$ und damit $\mu_1 = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$.
Das Dreieck MBE ist ebenfalls gleichschenklig.
Also gilt: $\beta^* = \beta$ und damit $\mu_2 = 180° - 2 \cdot 48° = 84°$.
$\Rightarrow \quad \mu = 180° - 40° - 84° = 56°$.
Auch das Dreieck MED ist gleichschenklig.
Also gilt: $\delta = \varepsilon = (180° - 56°) : 2 = 62°$.

48.



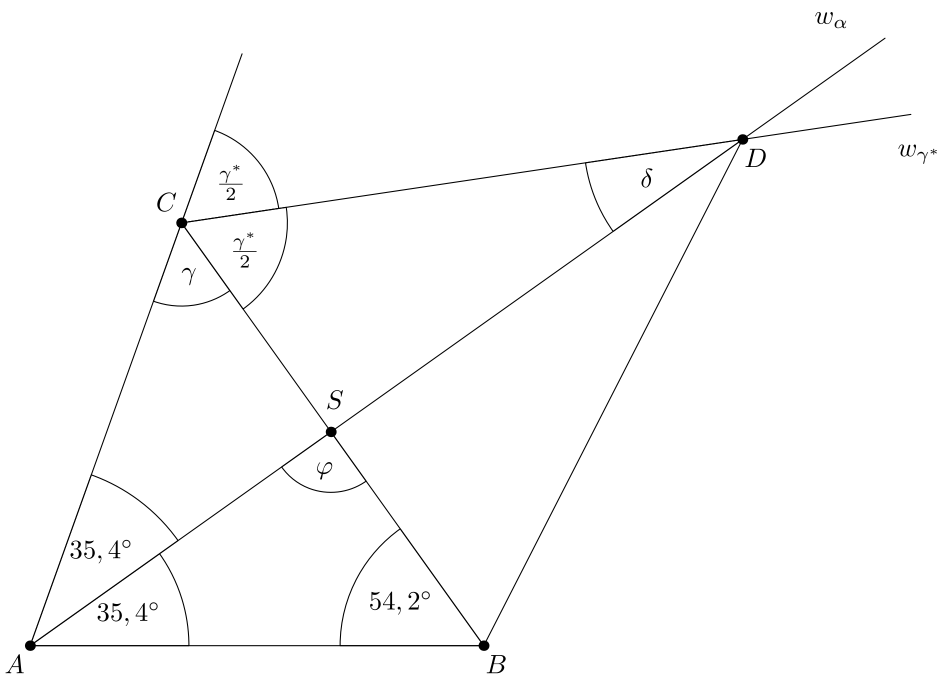
Die Halbgerade w_α halbiert den Winkel α und die Halbgerade w_{γ^*} halbiert den Nebenwinkel von γ.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 70{,}8°$ und $\beta = 54{,}2°$.

(b) Berechne das Winkelmaß δ.

(c) Untersuche, ob es sich bei dem Viereck $ABDC$ um ein achsensymmetrisches Drachenviereck handelt.

Lösung: (a)



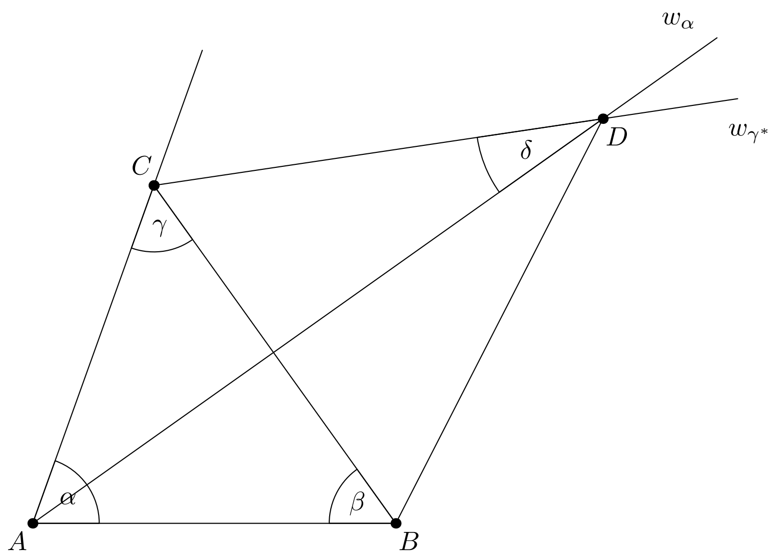
(b) Es gilt: $\gamma = 180° - 70{,}8° - 54{,}2° = 55°$.

$$\Rightarrow \quad \gamma^* = 180° - 55° = 125° \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma^*}{2} = 62{,}5°.$$

Im Dreieck ADC gilt dann $\delta = 180° - 35{,}4° - 55° - 62{,}5° = 27{,}2°$.

(c) In jedem (achsensymmetrischen) Drachenviereck müssen die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck ABS gilt: $\varphi = 180° - 35{,}4° - 54{,}2° = 90{,}4° \neq 90°$.
Das Viereck $ABDC$ ist also kein (achsensymmetrisches) Drachenviereck.

49.

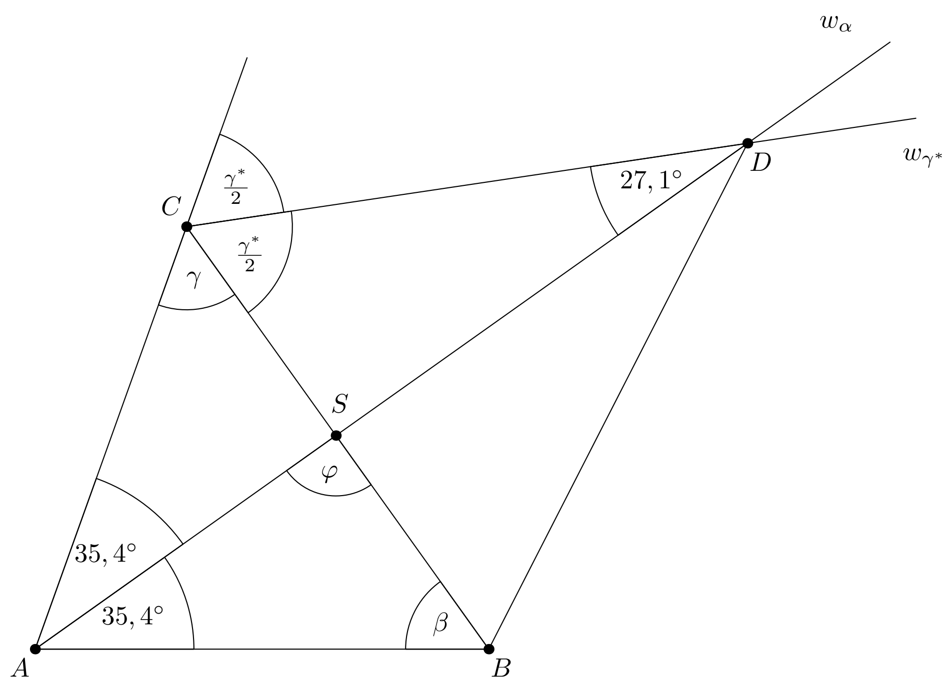


Die Halbgerade w_α halbiert den Winkel α und die Halbgerade w_{γ^*} halbiert den Nebenwinkel von γ. Weiter gilt: $\alpha = 70,8°$ und $\delta = 27,1°$.
Das Viereck $ABDC$ ist nicht achsensymmetrisch.

(a) Berechne die Winkelmaße γ und β. [Teilergebnis: $\beta = 54,2°$]

(b) Begründe, dass es sich bei dem Viereck $ABDC$ nicht um ein achsensymmetrisches Drachenviereck handelt.

Lösung: (a)



Im Dreieck ADC gilt: $35,4° + 27,1° + \dfrac{\gamma^*}{2} + \gamma = 180°$ (1).
Weiter gilt: $\gamma^* = 180° - \gamma$.

In (1): $35,4^\circ + 27,1^\circ + (180^\circ - \gamma) : 2 + \gamma = 180^\circ$.
$\Leftrightarrow \quad 62,5^\circ + 90^\circ - 0,5\gamma + \gamma = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad 62,5^\circ + 0,5\gamma = 90^\circ$
$\Leftrightarrow \quad \gamma = 55^\circ$.
Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck ABC ergibt sich:
$70,8^\circ + 55^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow \quad \beta = 54,2^\circ$.

Eine andere Möglichkeit:

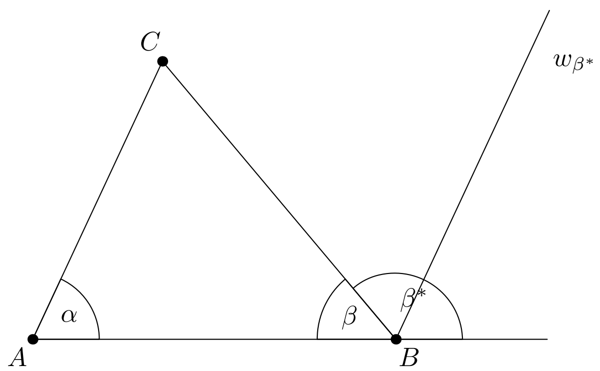
$\frac{\gamma^*}{2}$ ist ein Außenwinkel am Dreieck ADC. Jeder Außenwinkel an einem Dreieck ist genau so groß wie die Summe der Maße der beiden nicht anliegenden Innenwinkel. Das bedeutet hier:

$$\frac{\gamma^*}{2} = 35,4^\circ + 27,1^\circ = 62,5^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^* = 125^\circ .$$

$\gamma = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ \quad \ldots \quad \beta = 54,2^\circ$.

(b) In jedem (achsensymmetrischen) Drachenviereck müssen die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck ABS gilt: $\varphi = 180^\circ - 35,4^\circ - 54,2^\circ = 90,4^\circ \neq 90^\circ$.
Das Viereck $ABDC$ ist also kein (achsensymmetrisches) Drachenviereck.

50.

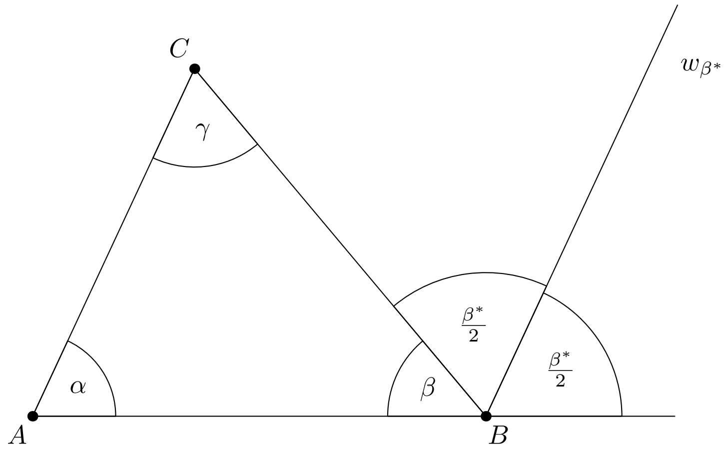


In der Figur halbiert die Halbgerade w_{β^*} den Außenwinkel von β . Gleichzeitig gilt: $w_{\beta^*} \parallel [AC]$.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\beta = 50^\circ$.

(b) Begründe: Das Dreieck ABC muss gleichschenklig sein.

Lösung: (a)

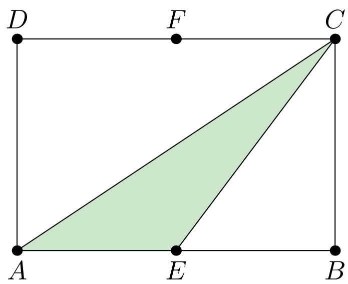


(b) In der Figur gilt: $\gamma = \dfrac{\beta^*}{2}$ (Z-Winkel).

Ebenso gilt: $\alpha = \dfrac{\beta^*}{2}$ (F-Winkel).

$\Rightarrow \quad \alpha = \gamma$; also ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

51.



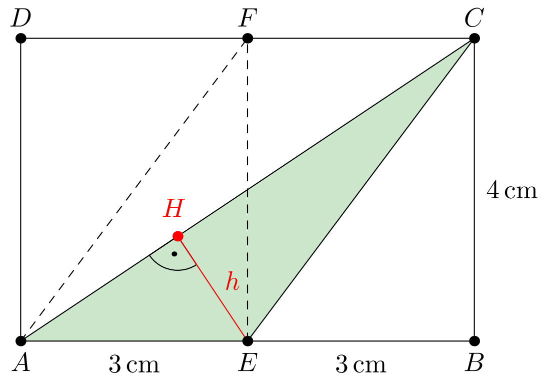
Für das Rechteck $ABCD$ gilt: $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.
Die Punkte E und F sind die Mittelpunkte der Seite $[AB]$ bzw. $[CD]$.

(a) Zeichne die Figur.

(b) Welchen Bruchteil der Rechtecksfläche nimmt das Dreieck AEC ein? Löse die Aufgabe auf zwei verschiedene Arten.

(c) Berechne den Abstand des Punktes E von der Strecke $[AC]$. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) **1. Möglichkeit:**
Die Dreiecke AEC und AEF haben die gleiche Grundlinie $[AE]$ und gleichlange Höhen $[BC]$ bzw. $[EF]$. Also besitzen sie den gleichen Flächeninhalt.
Das Dreick AEF nimmt ein Viertel der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ein, also trifft dies auch für das Dreieck AEC zu.
2. Möglichkeit:
$A_{AEC} = A_{ABCD} - A_{EBC} - A_{ACD}$.

$$A_{\Delta\,EBC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2 \text{ und } A_{\Delta\,ACD} = 6 \cdot 4\,\text{cm}^2 : 2 = 12\,\text{cm}^2$$

$$\Rightarrow \quad A_{AEC} = 24\,\text{cm}^2 - 6\,\text{cm}^2 - 12\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2 .$$

Das ist aber ein Viertel der Fläche des Rechtecks $ABCD$.

(c) Der Abstand eine Punktes zu einer Strecke (oder Geraden) ist immer die kürzeste Entfernung dieses Punktes zur Strecke. Sie wird durch das **Lot** vom Punkt E auf die Strecke $[AC]$ dargestellt.
Wir wissen schon, dass $A_{\Delta\,AEC} = 6\,\text{cm}^2$ gilt.
Der gesuchte Abstand h ist die Höhe im Dreieck AEC mit der Grundlinie $[AC]$:
$A_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h$.

$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 4^2}\,\text{cm} = \sqrt{52}\,\text{cm} .$$

$$6\,\text{cm}^2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{52}\,\text{cm} \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{12\,\text{cm}^2}{\sqrt{52}\,\text{cm}} \approx 1,66\,\text{cm} .$$

52. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$.
   (a) Zeichne dieses Dreieck, so dass die Kathete $[AB]$ waagrecht liegt.
   (b) Punkte P_n wandern auf der Seite $[AB]$ und Punkte Q_n wandern gleichzeitig auf der Seite $[BC]$, wobei $\overline{AP_n} = \overline{BQ_n} = x\,\text{cm}$ gilt. Dadurch entstehen Vierecke AP_nQ_nC.
   Zeichne für $x = 1,5$ das Viereck AP_1Q_1C ein.
   (c) Gib die Menge aller möglichen Belegungen von x an.

(d) Unter allen Vierecken AP_nQ_nC gibt es das Trapez AP_2Q_2C .

- Berechne die zugehörige Belegung von x .

  [Ergebnis: $x = 2,4$]

- Zeichne dieses Trapez in anderer Farbe ein.
- Berechne den Flächeninhalt dieses Trapezes. **Tipp:** Berechne zunächst den Flächeninhalt des Dreiecks P_2BQ_2 .
- Berechne die Höhe h dieses Trapezes AP_2Q_2C . Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

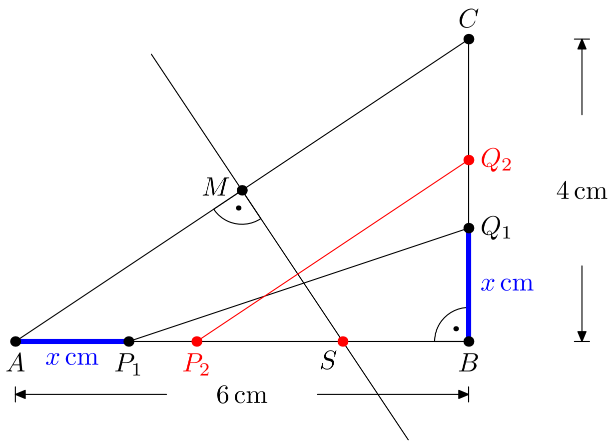
(e) Zeige: Für den Flächeninhalt A der Vierecke AP_nQ_nC gilt in Abhängigkeit von x:

$$A(x) = (0,5x^2 - 3x + 12)\,\mathrm{cm}^2 \ .$$

(f) Unter allen Vierecken AP_nQ_nC gibt es das Viereck AP_2Q_2C, das den minimalen Flächeninhalt besitzt.
Berechne dieses Minimum und die zugehörige Belegung von x .

(g) Untersuche, ob es unter allen Vierecken AP_nQ_nC achsensymmetrische gibt.

Lösung: (a)



(b) Siehe Zeichnung.

(c) Auf der Kathete $[BC]$ kann x nicht länger als 4 cm. werden. Für $x = 0$ und $x = 4$ gibt es kein Viereck. Also: $x \in \,]\,0;\,4[_{\mathbb{R}}$.

(d)
- Ein Viereck, darf sich dann Trapez nennen, wenn es zwei parallele Seiten besitzt. In der Zeichnung ist das Trapez AP_2Q_2C vorhanden. Du siehst, dass die Dreiecke P_2BQ_2 und ABC dann zueinander ähnlich sind. Wende den Vierstreckensatz an, wobei die Variable x mit eingebunden sein muss:

$$\frac{6-x}{x} = \frac{6}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 24 - 4x = 6x \quad \Leftrightarrow \quad 24 = 10x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,4\,.$$

- Siehe Zeichnung.

- $A_{\Delta\, P_2BQ_2} = 0.5 \cdot 3,6 \cdot 2,4\,\text{cm}^2 = 4,32\,\text{cm}^2$.
  $A_{\Delta\, ABC} = 0.5 \cdot 6 \cdot 4\,\text{cm}^2 = 12\,\text{cm}^2$.
  $A_{AP_2Q_2C} = A_{\Delta\, ABC} - A_{\Delta\, P_2BQ_2} = 12\,\text{cm}^2 - 4,32\,\text{cm}^2 = 7,68\,\text{cm}^2$.
- $\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 4^2}\,\text{cm} = \sqrt{52}\,\text{cm}\,(\approx 7,21\,\text{cm})$.
  $\overline{P_2Q_2} = \sqrt{3,6^2 + 2,4^2} = \sqrt{18,72}\,\text{cm}\,(\approx 4,33\,\text{cm})$.

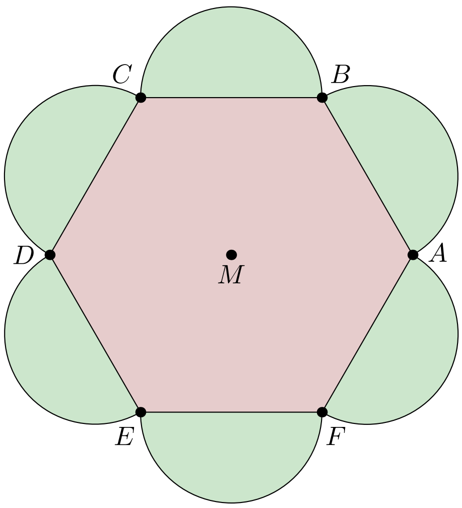
$$A_{AP_2Q_2C} = \frac{\sqrt{52}\,\text{cm} + \sqrt{18,72}}{2} \cdot h = 7,68\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad h \approx 1,33\,\text{cm}.$$

(e) $A(x) = A_{AP_nQ_nC} = 0.5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} - 0.5 \cdot \overline{P_nB} \cdot \overline{BQ_n}$
$A(x) = 12\,\text{cm}^2 - 0.5 \cdot (6 - x) \cdot x\,\text{cm}^2 = (12 - 3x + 0,5x^2)\,\text{cm}^2$.
Also gilt: $A(x) = (0,5x^2 - 3x + 12)\,\text{cm}^2$.

(f) $A(x) = (0,5x^2 - 3x + 12)\,\text{cm}^2 = 0.5 \cdot (x^2 - 6x + 3^3 - 9 + 24)\,\text{cm}^2$
$= 0.5 \cdot [(x-3)^2 + 15]\,\text{cm}^2 = [-0.5 \cdot (x-3)^2 + 7,5]\,\text{cm}^2$.
$x = 3$ liefert $A_{\min} = 7,5\,\text{cm}^2$.

(g) Die Symmetrieachse müsste entweder durch zwei Eckpunkte des fraglichen Vierecks oder durch zwei seiner Seitemittelpunkte verlaufen. Der Verlauf durch zwei Eckpunkte ist offensichtlich ausgeschlossen.
Im anderen Fall müsste die Symmetrieachse die gemeinsame Mittelsenkrechte zweier Vierecksseiten sein. Diese Vierecksseiten müssten dann aber zueinader parallel sein. Also wäre das gesuchte achsensymmetrische Viereck ein gleichschenkliges Trapez.
Da es aber nur nur ein Trapez, nämlich AP_2Q_2C, gibt und $\overline{AP_2} = 2,4\,\text{cm} \neq \overline{CQ_2} = 1,6\,\text{cm}$ gilt, gibt es unter allen Vierecken AP_nQ_nC kein achsensymmetrisches.

53.

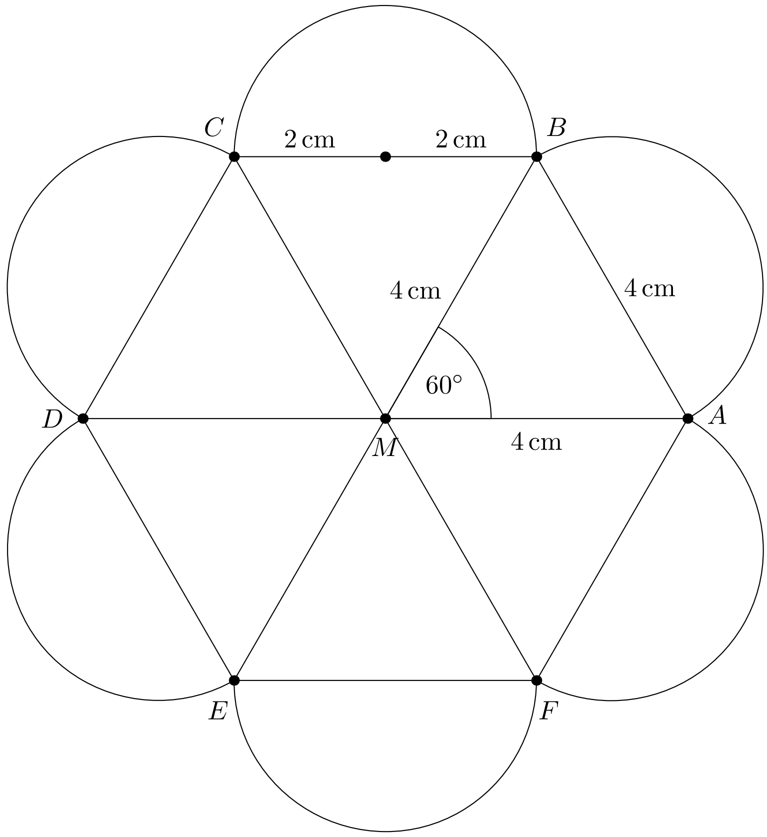


Das Sechseck $ABCDEF$ mit dem Mittelpunkt M ist regelmäßig.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AD} = 8\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A der Figur. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

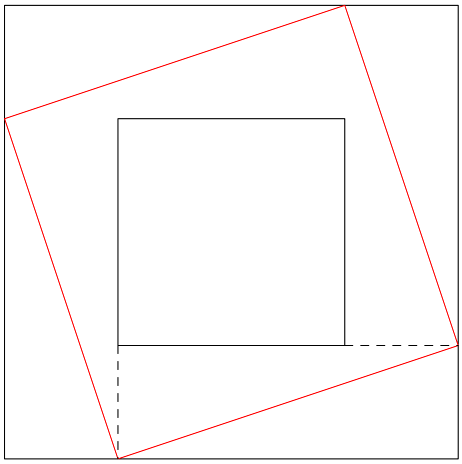
Lösung: (a)



(b) Die drei Diagonalen zerlegen jedes regelmäßige Sechseck in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke. In unserem Fall hat jedes dieser gleichseitigen Dreiecke eine Seitenlänge von 4 cm .
Die sechs kongruenten Halbkreise lassen sich paarweise zu drei Vollkreisen mit dem Radius $r = 2\,\text{cm}$ zusammenfügen .

Also: $A = \left(6 \cdot \frac{4^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2^2 \cdot \pi\right)\ \text{cm}^2 \approx 79{,}27\,\text{cm}^2$.

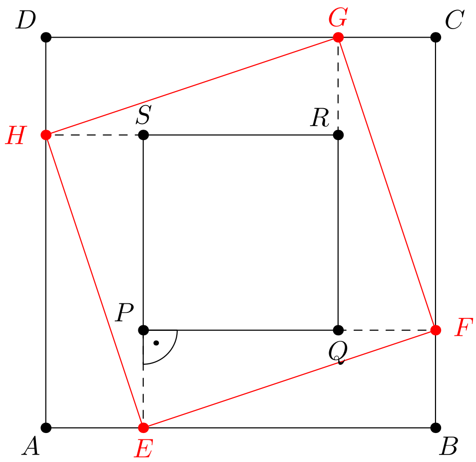
54.



Das große Quadrat hat einen Umfang von $81,6\,\text{cm}$ und das kleine Quadrat hat einen Umfang von $34\,\text{cm}$. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.
Berechne den Flächeninhalt des mittleren Quadrates auf verschiedene Weise:

- Mit Hilfe der Berechnung der Seitenlänge des mittleren Quadrates
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

Lösung:

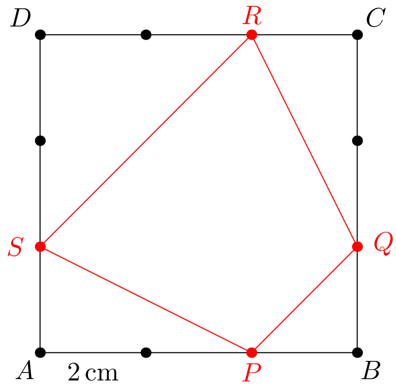


- Es gilt: $\overline{AB} = 81,6\,\text{cm} : 4 = 20,4\,\text{cm}$ und $\overline{PQ} = 34\,\text{cm} : 4 = 8,5\,\text{cm}$.
  Dann folgt: $\overline{QF} = \overline{PE} = (20,4\,\text{cm} - 8,5\,\text{cm}) : 2 = 5,95\,\text{cm}$.
  Weiter folgt: $\overline{PF} = 8,5\,\text{cm} + 5,95\,\text{cm} = 14,45\,\text{cm}$.
  $\Delta\, EFP$: $\overline{EF}^2 = A_{EFGH} = \overline{PF}^2 + \overline{PE}^2 = (14,45\,\text{cm})^2 + (5,95\,\text{cm})^2$
  $\Rightarrow \quad A_{EFGH} = 244,205\,\text{cm}^2$.
- **1. Möglichkeit:** $A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{\Delta\, EBF}$
  $A_{EFGH} = (20,4\,\text{cm})^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45\,\text{cm} \cdot 5,95\,\text{cm} = 244,205\,\text{cm}^2$.

  2. Möglichkeit: $A_{EFGH} = A_{PQRS} + 4 \cdot A_{\Delta\, EFP}$
  $A_{EFGH} = (8,5\,\text{cm})^2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 14,45\,\text{cm} \cdot 5,95\,\text{cm} = 244,205\,\text{cm}^2$.

  Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

55.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Jede Quadratseite ist in drei Abschnitte eingeteilt, die jeweils 2cm lang sind. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

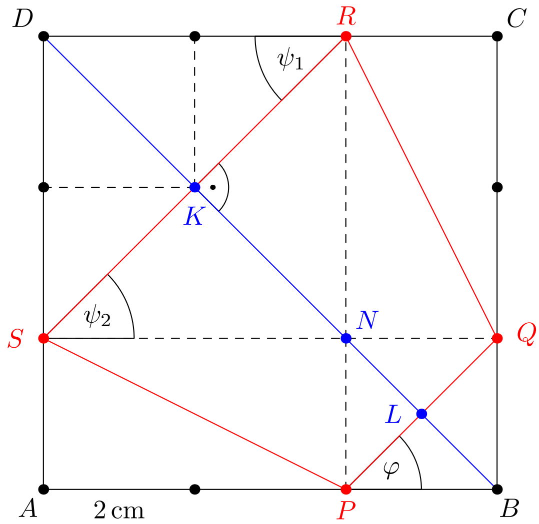
(a) Zeichne die Figur.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ besitzt zwei parallele Seiten.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ auf zwei verschiedene Arten:

- Mit Hilfe der Berechnung der zugehörigen Formelgleichung
- Mit Hilfe der Berechnung des Flächeninhalts rechtwinkliger Dreiecke .

Lösung: (a)



(b) Das Dreieck SRD ist gleichschenklig-rechtwinklig . $\Rightarrow$ $\psi_1 = 45°$.
Dann gilt auch $\psi_2 = 45°$ (Z-Winkel) .
Das Dreieck PBQ ist gleichschenklig-rechtwinklig . $\Rightarrow$ $\varphi = 45°$.
Also folgt: $[PQ] \parallel [SR]$.
Das Viereck $PQRS$ ist ein (achsensymmetrisches) Trapez..

(c) • Für die Trapezfläche A gilt: $A_{PQRS} = \dfrac{\overline{SR} + \overline{PQ}}{2} \cdot \overline{KL}\,.$

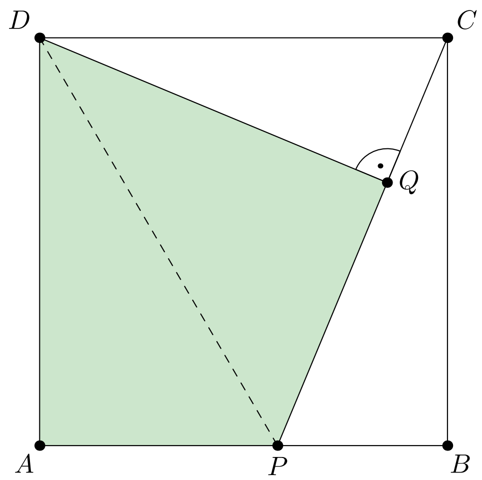
Die Strecke $[SR]$ ist die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge $4\,\text{cm}$. Also folgt: $\overline{SR} = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$.
$[DK]$, $[NB]$ und $[PQ]$ sind jeweils Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge $2\,\text{cm}$.
Also folgt: $\overline{DK} = \overline{NB} = \overline{PQ} = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$ und $\overline{LB} = \sqrt{2}\,\text{cm}$.
Im Quadrat $ABCD$ gilt: $\overline{DB} = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$.
Damit gilt: $\overline{KL} = 6\sqrt{2}\,\text{cm} - 2\sqrt{2}\,\text{cm} - \sqrt{2}\,\text{cm} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.

Und damit gilt: $A_{PQRS} = \dfrac{4\sqrt{2}\,\text{cm} + 2\sqrt{2}\,\text{cm}}{2} \cdot 3\sqrt{2}\,\text{cm} = 18\,\text{cm}^2\,.$

• Das Trapez $PQRS$ ist von vier rechtwinkligen Dreiecken eingeschlossen. Zwei von ihnen sind kongruent.
$A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta\,APS} - A_{\Delta\,SRD} - A_{\Delta\,PBQ}\,.$

$A_{PQRS} = 36\,\text{cm}^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\,\text{cm}^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\,\text{cm}^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\,\text{cm}^2 = 18\,\text{cm}^2\,.$

56.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a.

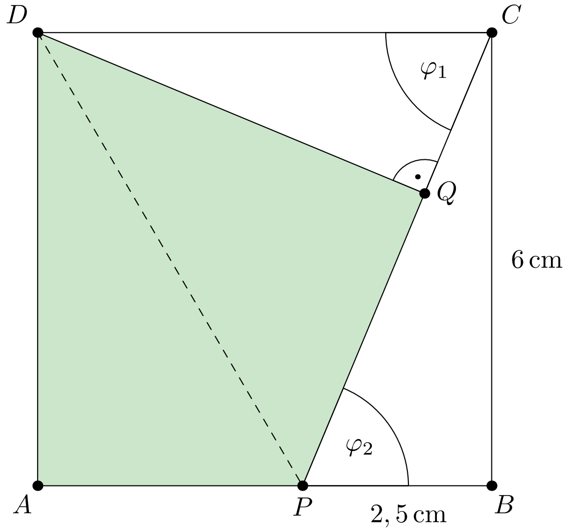
(a) Zeichne die Figur für $a = 6\,\text{cm}$ und $\overline{PB} = 2,5\,\text{cm}$.

(b) Begründe ohne Messung: Die Diagonale $[DP]$ ist keine Symmetrieachse im Viereck $APQD$.

(c) Begründe: Die beiden Dreiecke PBC und DQC sind zueinander ähnlich.

(d) Berechne den Anteil der Fläche des Vierecks $APQD$ an der Fläche des Quadrates $ABCD$ in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Die Kathete $\overline{AD}$ im rechtwinkligen Dreieck APD besitzt die Länge a. Die Hypotenuse $\overline{DC}$ im rechtwinkligen Dreieck DQC hat ebenfalls die Länge a. Weil aber in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite darstellt, gilt: $\overline{DQ} < a = \overline{AD}$. Somit kann die Diagonale $\overline{DP}$ im Viereck $APQD$ nicht Symmetrieachse dieses Vierecks sein.

(c) In den beiden rechtwinkligen Dreiecken DQC und PBC gilt: $\varphi_1 = \varphi_2$ (Z-Winkel). Damit stimmen die beiden Dreiecke paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Wegen der Innenwinkelsumme von 180° in jedem Dreieck stimmen diese beiden Dreiecke in allen drei Innenwinkelmaßen überein. Also gilt: $\Delta\, PBC \sim \Delta\, DQC$.

(d) Strategie: $A_{APQD} = A_{ABCD} - (A_{\Delta\, PBC} + A_{\Delta\, DQC})$.

$$A_{\Delta\, PBC} = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 6\,\mathrm{cm}^2 = 7,5\,\mathrm{cm}^2 \,.$$

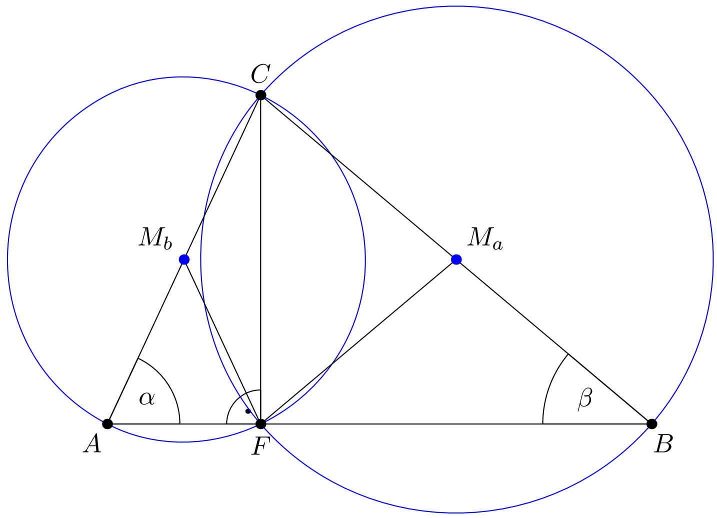
Wegen (c) folgt: $A_{\Delta\, DQC} = k^2 \cdot A_{\Delta\, PBC}$ mit dem Streckungsfaktor k .

Mit $k = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{PC}}$ folgt: $k = \dfrac{6\,\mathrm{cm}}{\sqrt{2,5^2 + 6^2}\,\mathrm{cm}} = \dfrac{12}{13}$.

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\, DQC} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2 = \frac{144}{169} \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2 \,.$$

$$\begin{aligned} A_{APQD} &= 36\,\mathrm{cm}^2 - \left(7,5\,\mathrm{cm}^2 + \frac{144}{169} \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2\right) \\ &= 36\,\mathrm{cm}^2 - \frac{313}{169} \cdot 7,5\,\mathrm{cm}^2 \\ \frac{A_{APQD}}{A_{ABCD}} &= \frac{6084 - 2374,5}{169 \cdot 36} = \frac{3707,5}{6084} \approx 0,6094 = 60,94\,\% \,. \end{aligned}$$

57.



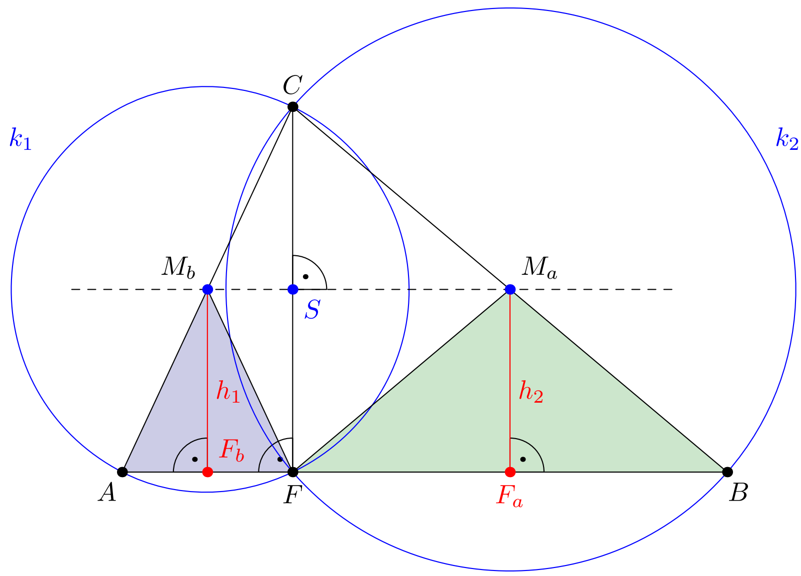
Im Dreieck ABC mit der Höhe $[CF]$ sind die Punkte M_a und M_b die Mittelpunkte der Umkreise der Teildreiecke FBC bzw. AFC.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\beta = 40°$.

(b) Begründe auf verschiedene Weise: Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Begründe: Zusammen bedecken die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a die Hälfte des Dreiecks ABC.

Lösung: (a)



(b) **1. Möglichkeit:**
Im Kreis k_1 gilt: $\overline{M_bA} = \overline{M_bF} = \overline{M_bC}$.
Im Kreis k_2 gilt: $\overline{M_aB} = \overline{M_aF} = \overline{M_aC}$.
Also sind im Viereck FM_aCM_b zweimal zwei benachbarte Seiten gleich lang. Also handelt es sich um ein achsensymmetrisches Drachenviereck.
2. Möglichkeit:
In jedem rechtwinkligen Dreieck fällt dessen Umkreismittelpunkt mit dem Hypotenusenmittelpunkt zusammen. Also sind die Kreismittelpunkte M_a und M_b gleichzeitig die Mittelpunkte der Seiten $a = [BC]$ bzw. $b = [AC]$.
Die Dreiecke FBC und F_aBM_a sind zueinander ähnlich.
Wegen $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BM_a}$ folgt dann $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{F_aM_a} = 2 \cdot \overline{F_bM_b}$.
Also gilt: $h_1 = h_2 = \overline{SF} = \overline{FC}$. Daher liegt die Gerade M_aM_b zur Grundlinie $[AB]$ des Dreiecks ABC parallel. Diese Parallele steht damit auf der Diagonalen des Vierecks FM_aCM_b senkrecht. Gleichzeitig halbiert der Punkt S die Höhe $[CF]$ des Dreiecks ABC. Also ist das Viereck FM_aCM_b ein achsensymmetrischer Drachen.

(c) Die in der 2. Möglichkeit verwendete Argumentation ergibt nun Folgendes:

- Die vier Dreiecke F_aBM_a, FF_aM_a, FM_aS und SM_aC sind kongruent. Das Dreieck FBM_a besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
  Also ist das Dreieck FBM_a halb so groß wie das Teildreieck FBC.
- Die vier Dreiecke AF_bM_b, F_bFM_b, FSM_b und M_bSC sind kongruent. Das Dreieck AFM_b besteht aus zwei dieser kongruenten Dreiecke.
  Also ist das Dreieck AFM_b halb so groß wie das Teildreieck AFC.

Also sind die beiden Dreiecke AFM_b und FBM_a zusammen halb so groß wie das Dreieck ABC.

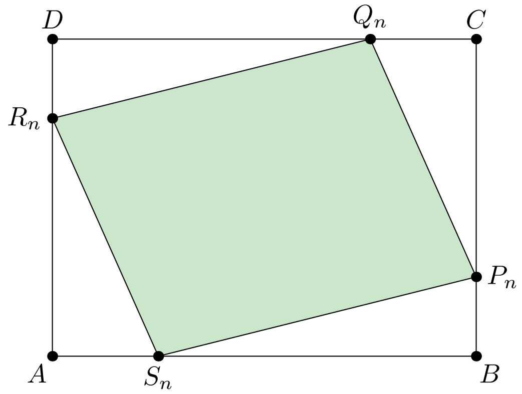
Oder:
Weil der Schnittpunkt S auf halber Höhe im Dreieck ABC liegt, gilt:
$A_{\Delta\, M_bM_aC} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta\, ABC}$ (zentrische Streckung mit $k = \frac{1}{2}$).
Das Viereck FM_aCM_b ist ein achsensymmetrischer Drachen mit der Diagonalen $[M_aM_b]$ als Symmetrieachse.
$\Rightarrow \quad A_{FM_aCM_b} = 2 \cdot \frac{1}{4} A_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta\, ABC}$.
Dann muss der Rest, nämlich derjenige, der aus den beiden Dreiecken AFM_b und FBM_a besteht, ebenfalls die Hälfte des Dreiecks ABC einnehmen.

58. Begründe: $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right)^{444} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^{444} = 16^{\,111}$.

Lösung: $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right)^{444} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^{444} = \left(\dfrac{(\sqrt{5}-1)\cdot(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right)^{444} = \left(\dfrac{\sqrt{5}^{\,2}-1^2}{\sqrt{2}^{\,2}}\right)^{444} =$

$= \left(\dfrac{4}{2}\right)^{444} = 2^{\,444} = 2^{\,4\cdot 111} = \left(2^4\right)^{111} = 16^{\,111}$.

59.



In das Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$ werden Parallelogramme $P_nQ_nR_nS_n$ einbeschrieben, wobei gilt: $\overline{BP_n} = \overline{DR_n} = 6k\,\text{cm}$ und $\overline{AS_n} = \overline{CQ_n} = 8k\,\text{cm}$ mit $k \in]0;\,1[_{\mathbb{R}}$.

(a) Zeichne das Rechteck $ABCD$ und für $k = 0,25$ das Parallelogramm $P_1Q_1R_1S_1$.

(b) Zeige: Für das Verhältnis q der Flächeninhalte der Parallelogramme $P_nQ_nR_nS_n$ zum Rechteck $ABCD$ gilt in Abhängigkeit von k:
$$q(k) = \frac{A_{P_nQ_nR_nS_n}}{A_{ABCD}} = 1 - 2k(1-k)\,.$$

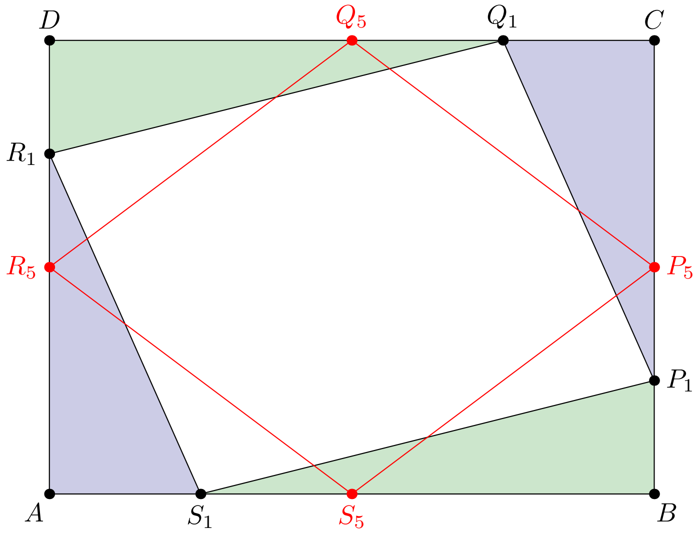
(c) $k = 0,4$ erzeugt das Parallelogramm $P_2Q_2R_2S_2$. Wie viel Prozent der Fläche des Rechtecks $ABCD$ wird von diesem Parallelogramm eingenommen?

(d) Unter allen Parallelogrammen $P_nQ_nR_nS_n$ gibt es die Parallelogramme $P_3Q_3R_3S_3$ und $P_4Q_4R_4S_4$, die jeweils 58% der Fläche des Rechtecks $ABCD$ einnehmen. Berechne die zugehörigen Belegungen von k.

(e) Für $k = 0,5$ wird das Parallelogramm $P_5Q_5R_5S_5$ erzeugt.

- Zeichne dieses Parallelogramm in einer anderen Farbe ein.
- Um welches besondere Parallelogramm handelt es sich hier? Begründe deine Antwort.
- Zeige: Unter allen Parallelogrammen $P_nQ_nR_nS_n$ besitzt dieses Parallelogramm $P_5Q_5R_5S_5$ den kleinsten Flächeninhalt.

Lösung: (a)



(b) Es gilt $\Delta\, S_nBP_n \cong \Delta\, R_nQ_nD$ und $\Delta\, P_nCQ_n \cong \Delta\, AS_nR_n$.
$A_{ABCD} = 48\,\text{cm}^2$
$A_{P_nQ_nR_nS_n} = A_{ABCD} - 2 \cdot A_{\Delta\, S_nBP_n} - 2 \cdot A_{\Delta\, P_nCQ_n}$.
$2 \cdot A_{\Delta\, S_nBP_n} = 2 \cdot 0,5 \cdot \overline{S_nB} \cdot \overline{BP_n} = (1-k) \cdot 8\,\text{cm} \cdot 6k\,\text{cm} = 48\,\text{cm}^2 \cdot (1-k) \cdot k$.
$2 \cdot A_{\Delta\, P_nCQ_n} = 2 \cdot 0,5 \cdot \overline{P_nC} \cdot \overline{CQ_n} = (1-k) \cdot 6\,\text{cm} \cdot 8k\,\text{cm} = 48\,\text{cm}^2 \cdot (1-k) \cdot k$.

$$\begin{aligned} A_{P_nQ_nR_nS_n} &= 48\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 48\,\text{cm}^2 \cdot (1-k) \cdot k \\ A_{P_nQ_nR_nS_n} &= 48\,\text{cm}^2 \cdot [1 - 2k(1-k)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad q(k) = \frac{A_{P_nQ_nR_nS_n}}{A_{ABCD}} = \frac{48\,\text{cm}^2 \cdot [1-2k(1-k)]}{48\,\text{cm}^2} = 1 - 2k(1-k)\,.$$

(c) $q(0,4) = 1 - 2 \cdot 0,4 \cdot (1 - 0,4) = 0,52 = 52\%$

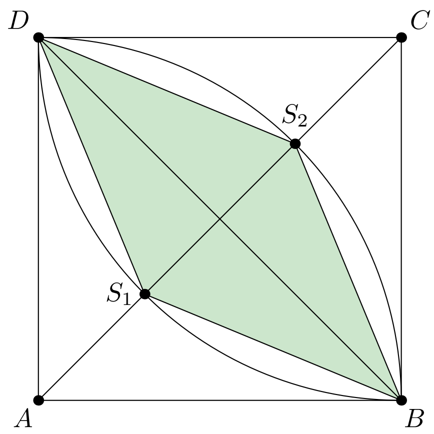
(d)

$$\begin{aligned} 1 - 2k(1-k) &= 0,58 \\ 2k^2 - 2k + 1 &= 0,58 \\ 2k^2 - 2k + 0,42 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad k_1 = 0,3 \quad \text{und} \quad k_2 = 0,7$

(e)
- Siehe Zeichnung.
- Es handelt sich um eine Raute.
  Begründung: Die vier rechtwinkligen Dreiecke S_5BP_5, P_5CQ_5, R_5Q_5D und AS_5R_5 sind kongruent, denn die besitzen jeweils Katheten, die jeweils 3 cm bzw. 4 cm lang sind. Also sind auch ihre Hypotenusen, die die Seiten des Parallelogramms $P_5Q_5R_5S_5$ bilden, gleich lang. Also ist dieses Viereck eine Raute.
- $q(k) = 1 - 2k(1-k) = 2k^2 - 2k + 1 = 2(k^2 - k + 0,5^2 - 0,25) + 1 = 2[(k-0,5)^2 - 0,25) + 1] = 2(k-0,5)^2 + 0,5$
  $k = 0,5$ liefert den minimalen Flächenanteil von $0,5 = 50\%$.

60.



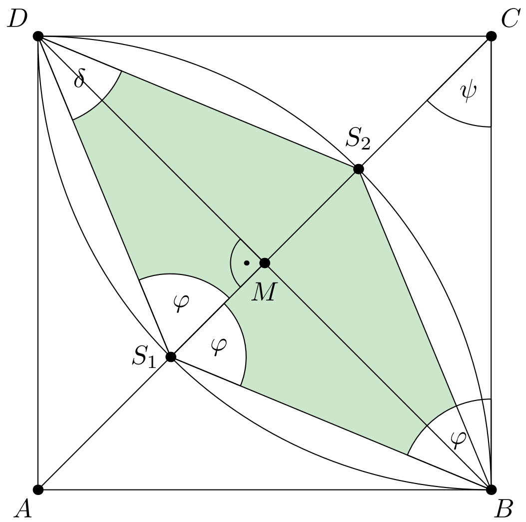
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte A und C.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne die Maße der Innenwinkel des Vierecks S_1BS_2D.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck S_1BS_2D ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



Das Viereck S_1BS_2D ist ein achsensymmetrischer Drachen.

(b) Im Quadrat $ABCD$ halbiert die Diagonale $[AC]$ den rechten Winkel DCB. Also gilt: $\psi = 45°$.
Das Dreieck S_1BC ist gleichschenklig. $\quad \Rightarrow \quad \varphi = (180° - 45°) : 2 = 67{,}5°$.
$\Rightarrow \quad \sphericalangle BS_1D = 2 \cdot \varphi = 135° = \sphericalangle DS_2B$.
$\Rightarrow \quad \delta = \sphericalangle S_1DS_2 = \sphericalangle S_2BS_1 = (360° - 4 \cdot 67{,}5°) : 2 = 45°$.

(c) $A_{\text{Drachen}} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{S_1S_2}\,.$

$\overline{BD} = 6 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm}\,(\approx 8,49\,\text{cm})\,.$

Wegen $\overline{S_1C} = 6\,\text{cm}$ folgt $\overline{AS_1} = \overline{CS_2} = (6 \cdot \sqrt{2} - 6)\,\text{cm}\,(\approx 2,49\,\text{cm})\,.$

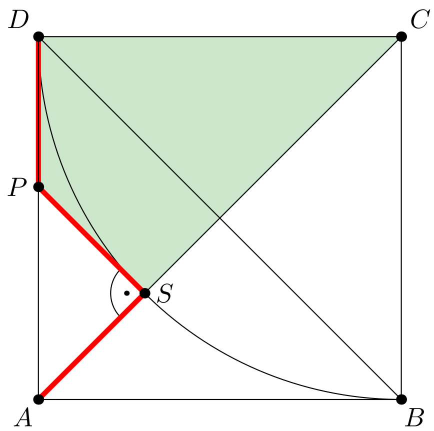
Dann ist $\overline{S_1S_2} = \left[6 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \left(6 \cdot \sqrt{2} - 6\right)\right]\ \text{cm} = \left(12 - 6\sqrt{2}\right)\ \text{cm}\,(\approx 3,51\,\text{cm})\,.$

$A_{\text{Drachen}} = \dfrac{1}{2} \cdot \left[6\sqrt{2} \cdot \left(12 - 6\sqrt{2}\right)\right]\ \text{cm}^2\,.$

$A_{\text{Drachen}} = \left(36\sqrt{2} - 36\right)\ \text{cm}^2(\approx 14,91\,\text{cm}^2)\,.$

$\dfrac{A_{\text{Drachen}}}{A_{\text{Quadrat}}} = \dfrac{(36\sqrt{2} - 36)\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142 = 41,42\%\,.$

61.

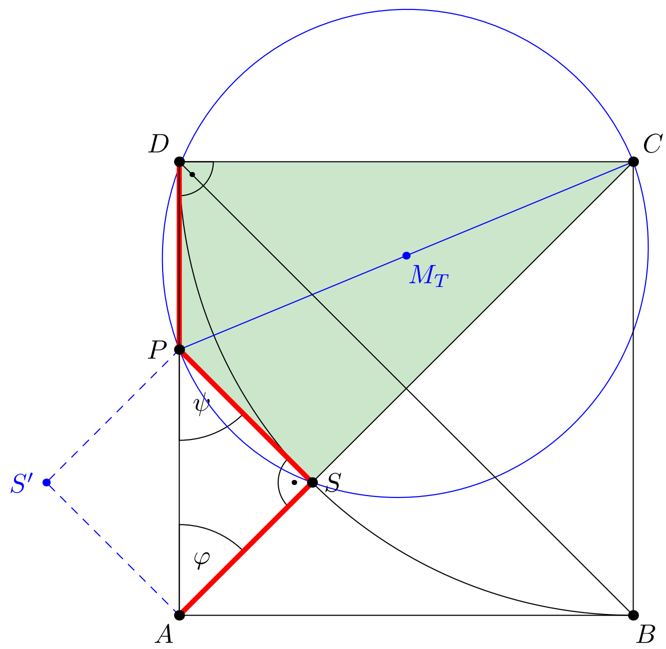


Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt C.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b)
- Begründe rechnerisch: Das Viereck $SCDP$ ist ein achsensymmetrischer Drachen.
- Besitzt dieses Drachenviereck einen Umkreis? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a)

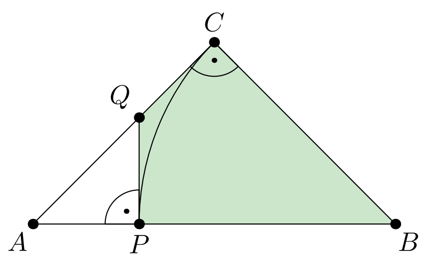


(b) • Es gilt: $\overline{CS} = \overline{CD}$. **(*)**
Die Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ sind Halbierende der betreffenden rechten Innenwinkel.
Also folgt $\varphi = 45°$.
Wegen der Innenwinkelsumme im rechtwinkligen Dreieck ASP gilt dann $\psi = 45°$.
Also ist das Dreieck ASP gleichschenklig. Damit gilt:
$\overline{AS} = \overline{AC} - \overline{SC} = \overline{SP} = (6\sqrt{2} - 6)\,\text{cm}$.

Der Punkt S' ist das Spiegelbild des Punktes S an der Strecke $[AP]$. Das Dreieck ASP ist somit die Hälfte eines Quadrates mit der Diagonalen $[AP]$.
Somit gilt: $\overline{AP} = \overline{AS} \cdot \sqrt{2} = (12 - 6\sqrt{2})\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad \overline{DP} = \overline{AD} - \overline{AS} = [6 - (12 - 6\sqrt{2})]\,\text{cm} = (6\sqrt{2} - 6)\,\text{cm} = \overline{PS} = \overline{AS}$.
Mit **(*)** ist erwiesen, dass es sich um einen achsensymmetrischen Drachen handelt.

• Die Diagonale $[PC]$ des Drachens $SCDP$ zerlegt dieses Viereck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke. Somit liegen die Eckpunkte S, C, D und P dieses Vierecks auf dem THALES-Kreis mit dem Durchmesser $[SC]$. Dieser Kreis ist also der Umkreis des Drachenvierecks.

62.



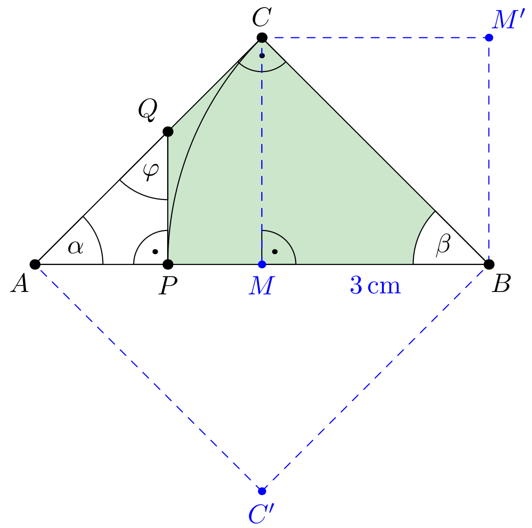
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Der Mittelpunkt des Kreisbogens ist der Punkt B.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Die Dreiecke ABC und APQ sind zueinander ähnlich.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC nimmt das Dreieck APQ ein? Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Es gilt $\alpha = \beta = 45°$. Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck APQ gilt aber auch $\alpha = \varphi = 45°$. Also stimmen die beiden Dreiecke ABC und APQ paarweise in ihren Innenwinkelmaßen überein. Damit sind sie zueinander ähnlich.

(c) Weil die beiden Dreiecke ABC und APQ zueinander ähnlich sind, gilt für den Ähnlichkeitsfaktor k z.B.:

$$k = \frac{\overline{AP}}{\overline{BC}}\,.$$

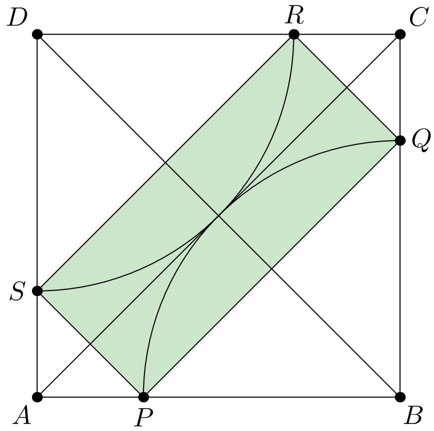
Das Dreieck MBC ist ein halbes Quadrat mit der Daigonalenlänge $\overline{BC} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.

$$\overline{AP} = \overline{BA} - \overline{BP} = \overline{BA} - \overline{BC} = (6 - 3\sqrt{2})\,\text{cm}\,.$$

Damit folgt $k = \dfrac{(6-3\sqrt{2})\,\text{cm}}{6\,\text{cm}}$.

Und $\dfrac{A_{\Delta\,APQ}}{A_{\Delta\,ABC}} = k^2 = \left[\dfrac{(6-3\sqrt{2})\,\text{cm}}{(3\sqrt{2})\,\text{cm}}\right]^2 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,1716 = 17,16\%\,.$

63.



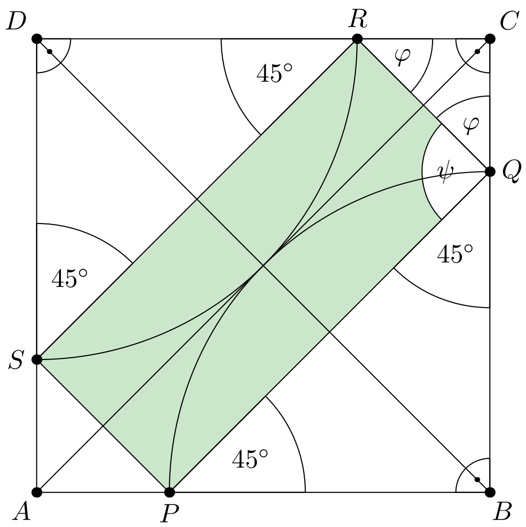
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen sind die Punkte B und D.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe: Das Viereck $PQRS$ ist ein Rechteck.

(c) Wie viel Prozent des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ nimmt das Viereck $PQRS$ ein? Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Die beiden Dreiecke PBQ und SRD sind gleichschenklig-rechtwinklig. Also haben ihre spitzen Innenwinkel das Maß $45°$.
Weiter gilt: $\overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{BQ} = \overline{DC} - \overline{DR} = \overline{CR}$. Also ist auch das Dreieck RQC gleichschenklig-rechtwinklig. Dann gilt $\varphi = 45°$.
Am Punkt Q gilt somit: $45° + \psi + 45° = 180° \quad \Rightarrow \quad \psi = 90°.$.
Aus Symmetriegründen sind dann auch die drei restlichen Innenwinkel des Vierecks $PQRS$ rechte Winkel. Also handelt es sich hierbei um ein Rechteck.

(c) Eine mögliche Strategie: $A_{PQRS} = A_{ABCD} - 2 \cdot (A_{\Delta\,PBQ} + A_{\Delta\,RQC})$

$$A_{\Delta\, PBQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 \text{ cm}^2 = 9\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{\Delta\, RQC} = \frac{1}{2} \cdot \left(6 - 3\sqrt{2}\right)^2 \text{ cm}^2 = (27 - 18\sqrt{2})\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{PQRS} = 36\,\text{cm}^2 - 2 \cdot [9\,\text{cm}^2 + (27 - 18\sqrt{2})\,\text{cm}^2] = (36\sqrt{2} - 36)\,\text{cm}^2\,.$$

$$\frac{A_{PQRS}}{A_{ABCD}} = \frac{(36\sqrt{2} - 36)\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2} = \frac{(36(\sqrt{2} - 1)\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}^2}$$

$$= \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142 = 41,42\%$$

64. In einem Lehrbuch steht zum Thema „Gleichungssysteme“ eine Aufgabe mit der Musterlösung:
„Es sind a und b natürliche Zahlen. Berechne a und b so, dass $a^2 - b^2 = 15$ gilt.“

Musterlösung

$$a^2 - b^2 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)(a+b) = 15\,.$$

Wegen $\mathbb{T}_{15} = \{1;\ 3;\ 5;\ 15\}$ und $a + b > a - b$ folgt

entweder:

$$\begin{array}{lcccccl} & a & + & b & = & 15 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 1 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 16 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 8 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 7$
Probe: $8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$, stimmt.

oder:

$$\begin{array}{lcccccl} & a & + & b & = & 5 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 3 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 8 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 4 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 1$
Probe: $4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$, stimmt.

$$\Rightarrow \quad L = \{(4 \mid 1);\ (8 \mid 7)\}$$

(a) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 77$ und mache die Probe. .

(b) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 83$ und mache die Probe. .

(c) Löse die Aufgabe für $a^2 - b^2 = 38$ und mache die Probe. .

(d) Edwin behauptet: „Wenn der Wert der Differenz aus den Quadraten von a und b gerade ist, dann ist die Lösungsmeng leer.“
Begründe, dass Edwin nicht Recht hat.

Lösung: (a) Wegen $\mathbb{T}_{77} = \{1; 7; 11; 77\}$ folgt

entweder:

$$\begin{array}{rcccccc} & a & + & b & = & 11 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 7 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 18 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 9 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 2$

Probe: $9^2 - 2^2 = 81 - 4 = 77$, stimmt.

oder:

$$\begin{array}{rcccccc} & a & + & b & = & 77 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 1 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 78 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 39 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 38$

Probe: $39^2 - 38^2 = 1521 - 1444 = 77$, stimmt.

$$\Rightarrow \quad L = \{(9 \mid 2); (39 \mid 38)\}$$

(b) 83 ist eine Primzahl. Wegen $\mathbb{T}_{83} = \{1; 83\}$ folgt

$$\begin{array}{rcccccc} & a & + & b & = & 83 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 1 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 84 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 42 \quad$ z.B. in (2): $\quad b = 41$

Probe: $42^2 - 41^2 = 1764 - 1681 = 83$, stimmt.

(c) Wegen $\mathbb{T}_{38} = \{1; 2; 19; 38\}$ folgt z.B.

$$\begin{array}{rcccccccccc} & a & + & b & = & 19 & & & & & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 2 & & & & & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 21 & \Rightarrow & a \notin \mathbb{N} & \Rightarrow & b \notin \mathbb{N} & \end{array}$$

Damit folgt: $\quad L = \emptyset$.

(d) Das folgende Gegenbeispiel zeigt, dass Edwin Unrecht hat:

$a^2 - b^2 = 44$. Daraus wird z.B.:

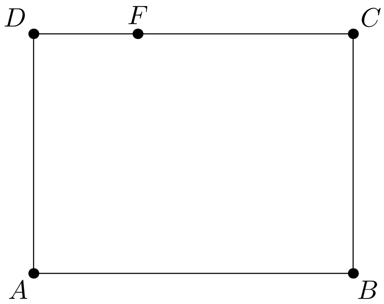
$$\begin{array}{rcccccc} & a & + & b & = & 22 & (1) \\ \wedge & a & - & b & = & 2 & (2) \\ \hline (1)+(2): & 2a & & & = & 24 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad a = 12$ und $\quad b = 10$.

In der Tat ist $12^2 - 10^2 = 144 - 100 = 44$.

Für $a^2 - b^2 = 2^n \cdot p$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $p \in \mathbb{P}$ ist die Lösungsmenge nie leer.

65.



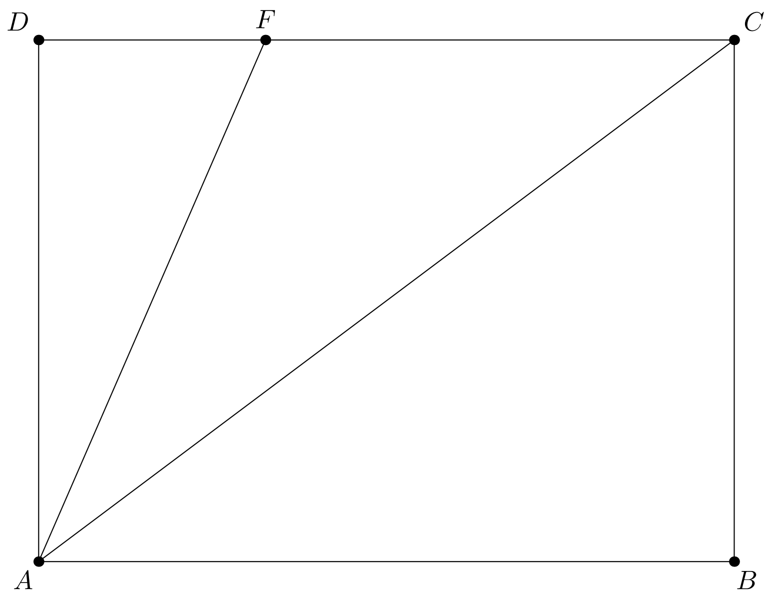
Die beiden Freunde Hans und Michael wollen ein Bundesligaspiel besuchen. Auf ihrem Weg dorthin gelangen sie vor dem Stadion an einen rechteckigen Parkplatz $ABCD$. Sie befinden sich am Punkt A und wollen den Platz diagonal zum Punkt C überqueren. Michael entdeckt jedoch einen Kameraden, der am Punkt F steht und läuft erst geradewegs zu ihm. Dann begeben sich die beiden direkt zum Punkt C, an dem schon Hans wartet.

(a) Es soll gelten $\overline{AB} = 92\,\text{m}$, $\overline{BC} = 69\,\text{m}$ und $\overline{FC} = 60\,\text{m}$.
Fertige eine Zeichnung im Maßstab 1 : 1000 an.

(b) Begründe ohne Messung: Michael muss einen längeren Weg von A über F nach C zurücklegen als Hans.

(c) Berechne die Streckenlänge, die Michael mehr als Hans zurücklegen muss. Runde auf ganze Meter.

Lösung: (a)

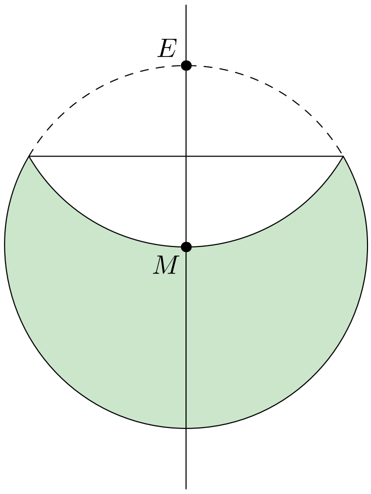


(b) Im Dreieck ACF gilt die Dreiecksungleichung: Zwei Seitenlängen müssen zusammen mehr ergeben als die Länge der dritten Dreiecksseite; d.h. hier gilt: $\overline{AF} + \overline{FC} > \overline{AC}$.

(c) $\overline{DF} = 32\,\text{m}$.
Im Dreieck AFD gilt: $\overline{AF} = \sqrt{32^2 + 69^2}\,\text{m} = \sqrt{5785}\,\text{m}$.

Im Dreieck ABC gilt: $\overline{AC} = \sqrt{92^2 + 69^2}\,\text{m} = 115\,\text{m}$.
Wegunterschied: $\sqrt{5785}\,\text{m} - 115\,\text{m} \approx 21\,\text{m}$.

66.

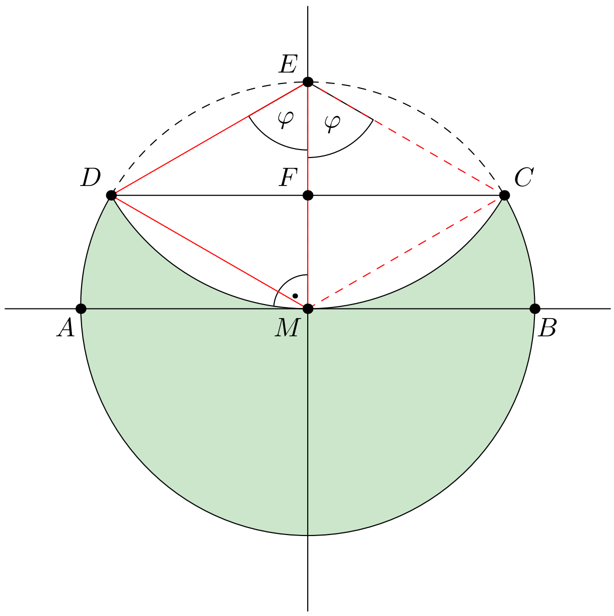


Erwin hat einen Kreis aus Papier ausgeschnitten. Er faltet nun die Kreisscheibe so, dass der Punkt E auf den Kreismittelpunkt M zu liegen kommt.

(a) Zeichne die Figur mit einem Kreisdurchmesser von $6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Anteil der eingefärbten Fläche an der gesamten Kreisfläche in Prozent. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Von der Kreisscheibe hat Erwin das Kreissegment $CDMC$ heruntergeklappt.
Den Flächeninhalt dieses Kreissegmentes erhältst du, indem du vom Flächeninhalt des Kreissektors $EDMCE$ den Flächeninhalt des Dreiecks DCE subtrahierst.
Im Dreieck DME gilt: $\overline{ME} = \overline{MD} = \overline{DE} = 3\,\text{cm}$.
Also ist das Dreieck DME gleichseitig, und es gilt: $\varphi = 60°$.
Das Dreieck DCE hat den gkeichen Flächeninhalt wie dieses Dreieck DME.

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{120°}{360°} \cdot 3^2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 9,42\,\text{cm}^2\,.$$

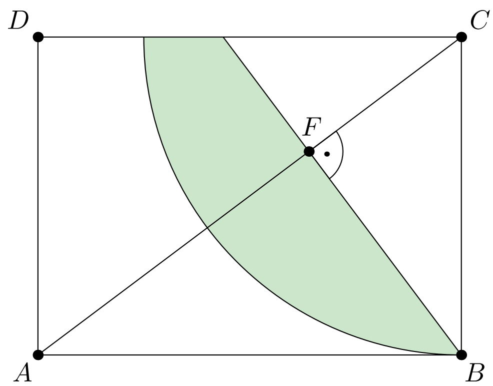
$$A_{\Delta\,DCE} = \frac{3^2}{4}\,\text{cm}^2 \cdot \sqrt{3} \approx 3,90\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{\text{Segment}} \approx 9,42\,\text{cm}^2 - 3,90\,\text{cm}^2 = 5,52\,\text{cm}^2\,.$$

Diese Segmentfläche musst du zwei Mal von der Fläche der Kreisscheibe subtrahieren:
$A_{\text{gefärbt}} \approx 3^2\pi\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 5,52\,\text{cm}^2 \approx 17,23\,\text{cm}^2$.

$$\frac{A_{\text{gefärbt}}}{A_{\bigcirc}} = \frac{17,23\,\text{cm}^2}{28,27\,\text{cm}^2} \approx 0,6945 = 69,54\%\,.$$

67.

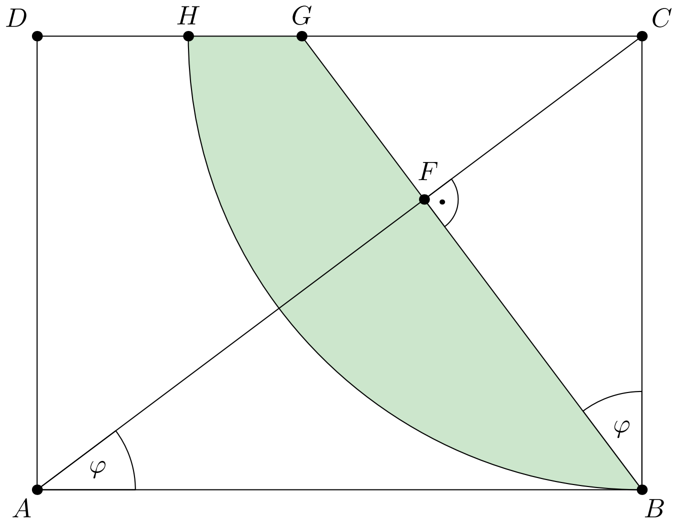


Der Punkt C des Rechtecks $ABCD$ ist der Mittelpunkt des Kreisbogens.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Inhalt A der eingefärbten Fläche. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung: (a)



(b) Strategie: Subtrahiere den Flächeninhalt des Dreiecks BCG vom Flächeninhalt des Viertelkreises mit dem Mittelpunkt C und dem Radius $r = 6\,\text{cm}$.

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{4} \cdot 6^2\pi\,\text{cm}^2 = 9\pi\,\text{cm}^2\,.$$

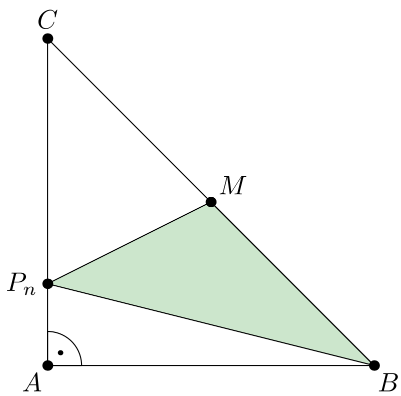
Weil sie z.B. im Winkelmaß φ übereinstimmen, sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABC und BCG zueinander ähnlich:

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{CG} = \frac{36\,\text{cm}^2}{8\,\text{cm}} = 4{,}5\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad A_{\Delta\,BCG} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 4{,}5\,\text{cm} = 13{,}5\,\text{cm}^2\,.$$

$$\Rightarrow \quad A = (9\pi - 13{,}5)\,\text{cm}^2 \approx 14{,}77\,\text{cm}^2\,.$$

68.



Der Punkt M halbiert die Hypotenuse $[BC]$ des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC.
Punkte P_n mit $\overline{AP_n} = x\,\text{cm}$ wandern auf der Kathete $[AC]$, so dass laufend Dreiecke BMP_n erzeugt werden.

(a) Zeichne das Dreieck ABC für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ zusammen mit dem Dreieck BMP_1 für $x = 2$.

(b) Für welche Belegungen von x gibt es solche Dreiecke BMP_n?

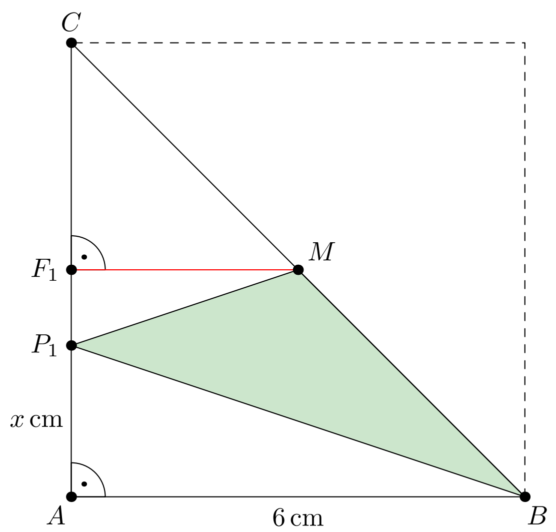
(c) Berechne den Flächeninhalt A der Dreiecke BMP_n in Abhängigkeit von x.
Ergebnis: $A(x) = (9 - 1,5x)\,\text{cm}^2$
Tipp: Fälle das Lot von M auf $[AC]$.

(d) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das Dreieck BMP_2, dessen Flächeninhalt $6,6\,\text{cm}^2$ beträgt. Berechne die zugehörige Belegung von x.

(e) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das gleichschenklige Dreieck BMP_3 mit der Basis $[MP_3]$. Berechne die zugehörige Belegung von x. Runde dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

(f) Unter allen Dreiecken BMP_n gibt es das Dreieck BMP_3, dessen Flächeninhalt 20% der Fläche des Dreiecks ABC einnimmt. Berechne die zugehörige Belegung von x.

Lösung: (a)



(b) Für $x = 0$ ergibt sich das maximale Dreieck. Für $x = 6$ entartet das betreffende Dreieck zur Doppelstrecke $[BC]$.
Also gibt es Dreiecke für $x \in [0; 6[_{\mathbb{R}}$.

(c) Eine mögliche Strategie: Berechne jeweils den Flächeninhalt der Dreiecke ABP_n und P_nMC in Abhängigkeit von x. Subtrahiere die beiden Flächeninhalte dann vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

$$A_{\Delta\,ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{\Delta\,ABP_n} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot x\,\text{cm} = 3x\,\text{cm}^2\,.$$

$$A_{\Delta\,P_nMC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_nC} \cdot \overline{F_nM} = \frac{1}{2} \cdot (6-x)\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = (9-1,5x)\,\text{cm}^2\,.$$

$$A(x) = [18 - 3x - (9 - 1,5x)]\,\text{cm}^2 = (9-1,5x)\,\text{cm}^2 = A_{\Delta\,P_nMC}\,.$$

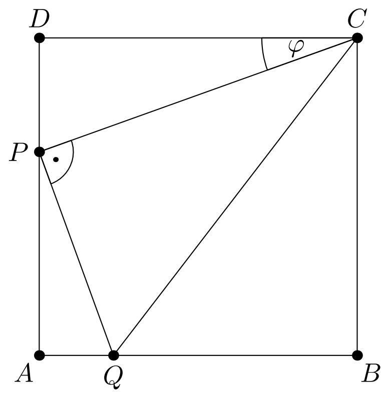
Kommentar: Die Flächeninhalte der Dreiecke BCP_n werden ständig durch deren Seitenhalbierende $[P_nM]$ halbiert.

(d) $9 - 1,5x = 6,6 \quad\Leftrightarrow\quad x = 1,6\,.$

(e) Es muss gelten: $\overline{CP_n} = \overline{CM}\,.$
$\overline{CP_n} = (6-x)\,\text{cm}\,.$
Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck ABC ist ein halbes Quadrat mit der Diagonalenlänge $\overline{BC} = 6\sqrt{2}\,\text{cm} \quad\Rightarrow\quad \overline{CM} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}\,.$
Damit muss gelten: $6 - x = 3\sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad x = 6 - 3\sqrt{2} \approx 1,76\,.$

(f) $20\% = 0,2\,.$
$(9-1,5x)\,\text{cm}^2 = 0.2 \cdot 18\,\text{cm}^2 \quad\Leftrightarrow\quad 9 - 1,5x = 3,6 \quad\Leftrightarrow\quad x = 3,6\,.$

69.



Dem Quadrat $ABCD$ ist das rechtwinklige Dreieck QCP einbeschrieben worden. Dabei gilt: $\sphericalangle\, DCP = \varphi\,.$

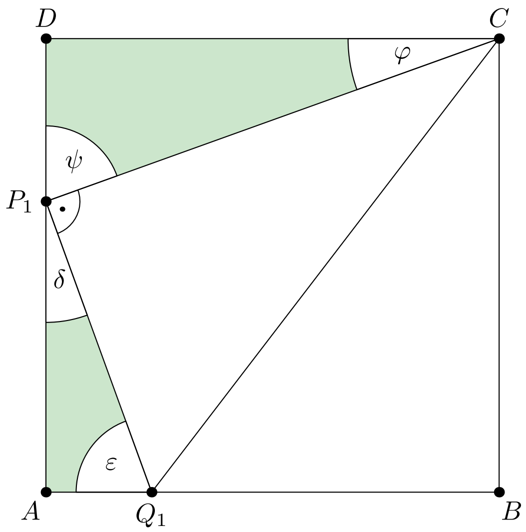
Hinweis: Gegebenenfalls sind alle Ergebnissse auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne das Quadrat für $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und für $\varphi = 20^\circ$ das Dreieck $QCP\,.$

(b) Begründe: Die Dreiecke AQP und PCD sind zueinander ähnlich.

(c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $QCP\,.$

Lösung: (a)



(b) Im rechtwinkligen Dreieck PCD gilt: $\varphi + \psi = 90°$ (*).
Am Punkt P gilt: $\psi + 90° + \delta = 180°$ also: $\delta + \psi = 90°$, und mit (*) folgt: $\varphi = \delta$ (**).
Im rechtwinkligen Dreieck AQP gilt: $\delta + \varepsilon = 90°$. Mit (*) und (**) folgt: $\psi = \varepsilon$.
Damit stimmen die Dreiecke AQP und QCP paarweise in zwei Innenwinkelmaßen überein. Also sind sie zueinander ähnlich.

(c) $\Delta\, PCD: \quad \cos 20° = \dfrac{6\,\text{cm}}{\overline{PC}} \quad \Rightarrow \quad \overline{PC} \approx 6,39\,\text{cm}$.

Und weiter (z.B.): $\overline{PD}^2 = \left(6,39^2 - 6^2\right)\,\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PD} \approx 2,20\,\text{cm}$.
$\Rightarrow \quad \overline{AP} \approx 6\,\text{cm} - 2,20\,\text{cm} = 3,80\,\text{cm}$.

$\Delta\, AQP: \quad \cos 20° \approx \dfrac{3,80\,\text{cm}}{\overline{PQ}} \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \approx 4,04\,\text{cm}$.

$A_{\Delta\, QCP} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PQ} \approx \dfrac{1}{2} \cdot 6,39\,\text{cm} \cdot 4,04\,\text{cm} \approx 12,91\,\text{cm}^2$.

70. Ein halbkugelförmiges Glasgefäß mit einer Wandstärke von 5 mm hat ein Fassungsvermögen von 10 l.
Berechne den Außendurchmesser des Gefäßes in mm.

Lösung: $10\,\text{l} = 10\,\text{dm}^3 = 10^4\,\text{cm}^3 = 10^7\,\text{mm}^3$.
Für den Innenradius r_i des Gefäßes gilt dann:

$$\frac{2}{3} r_i^3 = 10^7\,\text{mm}^3 \quad \Rightarrow \quad r_i \approx 168,4\,\text{mm}.$$

$$\Rightarrow \quad d_i \approx 337\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad d_a \approx 347\,\text{mm}.$$