SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Quantenphysik (Physik)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

1. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Teilchen

1. Materiewellen

1. (a) $\lambda = l_\mathrm{p} = 4{,}05 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m}$, $\quad p = \dfrac{h}{\lambda} = 16{,}355\,\dfrac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$, $\quad W = \sqrt{W_0^2 + p^2c^2} \approx pc = 4{,}90\,\mathrm{GJ}$

   (b) $\gamma = \dfrac{W}{m_\mathrm{p}c^2} = 3{,}26 \cdot 10^{19}$, $\quad \tau = \dfrac{\Delta t}{\gamma} = \dfrac{s}{c\gamma} = \dfrac{9{,}46 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m}}{c\gamma} = \dfrac{3{,}16 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s}}{\gamma} = 9{,}67 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$

   (c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \quad \Longrightarrow \quad \beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \dfrac{1}{2\gamma^2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \dfrac{1}{2\gamma^2} = 4{,}70 \cdot 10^{-40}$

2.

3. (a) $W_\mathrm{kin} = \dfrac{m_\mathrm{e}}{2}\,v^2 = 1800\,\mathrm{eV} = 1800 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 2{,}88 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{J}$

   $$v = \sqrt{\frac{2W_\mathrm{kin}}{m_\mathrm{e}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}88 \cdot 10^{-16}\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 2{,}52 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

   (b) $W_\mathrm{kin} = \dfrac{m_\mathrm{p}}{2}\,v^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot \left(5 \cdot 10^4\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 2{,}09 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} = 13{,}0\,\mathrm{eV}$

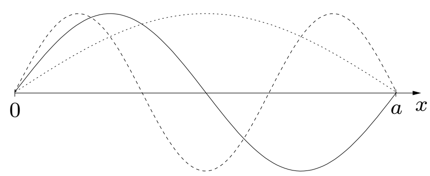
2. Wahrscheinlichkeitsdeutung

Teil II.

Licht und Materie

3. Diskrete Energien

1. (a) $\lambda_1 = 2a, \quad \lambda_2 = a = \frac{2a}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{2a}{3}, \quad \lambda_n = \frac{2a}{n}$



$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{\pi}{a} \cdot n, \quad p_n = \hbar k_n = \frac{h}{2a} \cdot n$$

$$W_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{h^2}{8ma^2} \cdot n^2$$

(b) Da die Verweildauer in angeregten Zuständen meistens sehr klein ist, befinden sich fast alle Fäden im Grundzustand. Photonen mit den Energien $W_{n1} = W_n - W_1$ und den dazu gehörenden Wellenlängen

$$\lambda_{n1} = \frac{hc}{W_{n1}} = \frac{8m_\mathrm{e}ca^2}{h(n^2-1)} = \frac{27{,}7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}}{n^2-1} = \frac{27{,}7\,\mu}{n^2-1}$$

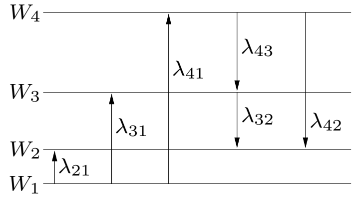
werden von den Fäden absorbiert und in alle Richtungen wieder ausgesandt. Daher ist die Intensität dieser Wellenlängen der durchgehenden Strahlung geschwächt.

$$\lambda_{21} = \frac{27{,}7\,\mu}{3} = 9{,}2\,\mu, \quad \lambda_{31} = \frac{27{,}7\,\mu}{8} = 3{,}5\,\mu, \quad \lambda_{41} = \frac{27{,}7\,\mu}{15} = 1{,}8\,\mu$$

Infrarotbereich!

(c) $\lambda_{43} = \frac{27{,}7\,\mu}{7} = 4{,}0\,\mu, \quad \lambda_{42} = \frac{27{,}7\,\mu}{12} = 2{,}3\,\mu$

$\lambda_{32} = \frac{27{,}7\,\mu}{5} = 5{,}5\,\mu$



(d) Da mit den Whiskers Licht absorbiert wird, ist die wirkliche Helligkeit der Supernovä größer als die gemessene, d.h. sie sind nicht so weit entfernt, Korrektur also nach unten.

2. $W_1 = 0{,}25\,\mathrm{eV}$, $W_2 = 1{,}00\,\mathrm{eV}$, $W_3 = 2{,}25\,\mathrm{eV}$, $W_4 = 4{,}00\,\mathrm{eV}$.

Fehlende Wellenlängen im durchgehenden Strahl:

$$\Delta W_{12} = 0{,}75\,\mathrm{eV} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{12} = \frac{hc}{\Delta W_{12}} = 1650\,\mathrm{nm} \quad \text{(IR)}$$

$$\Delta W_{13} = 2{,}00\,\mathrm{eV} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{13} = \frac{hc}{\Delta W_{13}} = 620\,\mathrm{nm} \quad \text{(rot)}$$

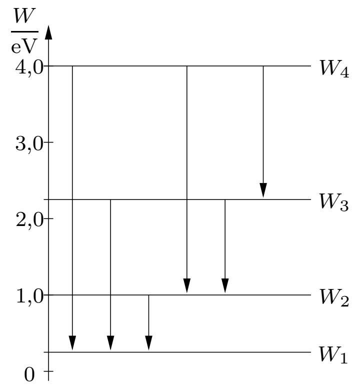
$$\Delta W_{14} = 3{,}75\,\mathrm{eV} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{14} = \frac{hc}{\Delta W_{14}} = 331\,\mathrm{nm} \quad \text{(UV)}$$

Wellenlängen im Streulicht (zusätzlich zu λ_{12}, λ_{13} und λ_{14}):

$$\Delta W_{23} = 1{,}25\,\mathrm{eV}, \quad \lambda_{23} = \frac{hc}{\Delta W_{23}} = 992\,\mathrm{nm} \quad \text{(IR)}$$

$$\Delta W_{24} = 3{,}00\,\mathrm{eV}, \quad \lambda_{24} = \frac{hc}{\Delta W_{24}} = 413\,\mathrm{nm} \quad \text{(violett)}$$

$$\Delta W_{34} = 1{,}75\,\mathrm{eV}, \quad \lambda_{34} = \frac{hc}{\Delta W_{34}} = 708\,\mathrm{nm} \quad \text{(rot)}$$



3. (a) Bei gebundenen Zuständen (eindimensionale Betrachtung) gibt es zwei Schnittstellen x_1 und x_2 zwischen W (konstante Teilchenenergie) und $V(x)$ (potentielle) Energie. Im Intervall (x_1, x_2) hat die Wellenfunktion $\varphi(x)$ (Lösung der zeitunabh. Schrödingergleichung) eine andere mathematische Gestalt als außerhalb. Aus der Stetigkeitsforderung von $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ auch an den Stellen x_1 und x_2 folgen Gleichungen, die nur für bestimmte Werte von W eine Lösung haben.

   (b) $\lambda_{1s} = \dfrac{hc}{W_s - W_1} = \dfrac{8mca^2}{h} \cdot \dfrac{1}{s^2-1} = \dfrac{0{,}528\,\mathrm{m}}{s^2-1}, \qquad \lambda_{12} = 0{,}176\,\mathrm{m}$

   Für Dipole gilt: $\lambda_{\mathrm{e},n} = \dfrac{2a}{n}$, d.h $\lambda_{\mathrm{e,max}} = \lambda_{\mathrm{e},1} = 2a = 800\,\mathrm{nm}$

   (c) $\lambda_{rs} = \dfrac{hc}{W_r - W_s} = \dfrac{8mca^2}{h} \cdot \dfrac{1}{r^2-s^2} = \dfrac{5{,}28 \cdot 10^8\,\mathrm{nm}}{r^2-s^2}, \qquad 400\,\mathrm{nm} < \lambda_{rs} < 800\,\mathrm{nm} \quad \Longrightarrow$

   $\dfrac{5{,}28 \cdot 10^8}{800} < r^2 - s^2 < \dfrac{5{,}28 \cdot 10^8}{400}, \qquad 6{,}6 \cdot 10^5 < r^2 - s^2 < 13{,}1 \cdot 10^5$

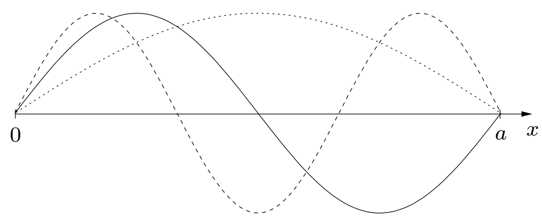
   z. B. $s = 1$ und $813 \leqq r \leqq 1148$ oder $(r,s) = (400\,001, 400\,000)$ oder ...

4. (a) $\lambda_1 = 2a, \quad \lambda_2 = a = \dfrac{2a}{2}, \quad \lambda_3 = \dfrac{2a}{3}$

$$\lambda_n = \frac{2a}{n}, \quad k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{\pi}{a} \cdot n$$

$$p_n = \hbar k_n = \frac{h}{2a} \cdot n$$

$$W_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{h^2}{8ma^2} \cdot n^2$$



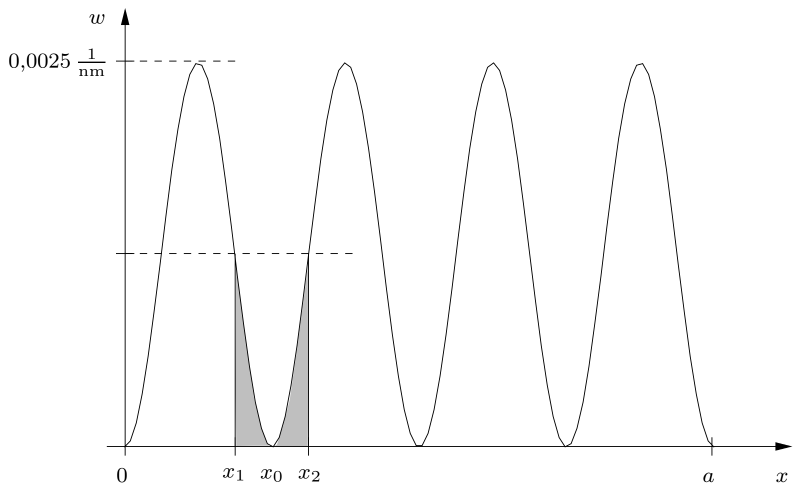
   (b) Da das Elektron irgendwo sein muss, ist

$$\int_0^a w_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a |\varphi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x = A^2 \int_0^a \sin^2(k_n x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$A^2\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin k_n x\cos k_n x}{2k_n}\right]_0^a = A^2\left[\frac{a}{2}-\frac{\sin \overbrace{k_n a}^{n\pi}\cos k_n a}{2k_n}\right] = A^2\cdot\frac{a}{2}=1$$

$$A=\sqrt{\frac{2}{a}} \quad\Longrightarrow\quad w_n(x)=|\varphi(x)|^2=\frac{2}{a}\sin^2 k_n x$$

(c) $x_1=\frac{3a}{16},\quad x_0=\frac{4a}{16}=\frac{a}{4},\quad x_2=\frac{5a}{16},\quad k_4=\frac{4\pi}{a}$



$$P=\int_{x_1}^{x_2} w_4(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{x_0}^{x_2} w_4(x)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{a}\int_{x_0}^{x_2}\sin^2(k_4x)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{4}{a}\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin k_4x\cos k_4x}{2k_4}\right]_{x_0}^{x_2}=\frac{4}{a}\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2k_4x}{4k_4}\right]_{x_0}^{x_2}=$$

$$=\frac{4}{a}\left[\frac{5a}{32}-\frac{4a}{32}-\frac{a\sin\left(\frac{8\pi}{a}\cdot\frac{5a}{16}\right)}{16\pi}+\frac{a\sin\left(\frac{8\pi}{a}\cdot\frac{a}{4}\right)}{16\pi}\right]=$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{4\pi}+\frac{\sin 2\pi}{4\pi}=\frac{1}{8}-\frac{1}{4\pi}=\frac{\pi-2}{8\pi}=0{,}0454$$

4. Photonen

1. (a) $12{,}0\,\mathrm{eV}$
   (b) $2{,}18 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}$
   (c) $3{,}85 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$
   (d) $714\,\mathrm{nm}$
   (e) $1{,}95\,\mathrm{eV}$
   (f) $\lambda = 151\,\mathrm{nm};\ f = 2{,}0 \cdot 10^{15}\,\mathrm{Hz}$

2. (a) $W = hf = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \cdot 9 \cdot 10^{8}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 5{,}96 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{J} = 3{,}72 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV}$
   (b) $W = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{5{,}00 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 3{,}97 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 2{,}48\,\mathrm{eV}$
   (c) $\lambda = \frac{hc}{W} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{6{,}62 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{J}} = 3{,}00\,\mathrm{m},\ f = \frac{c}{\lambda} = 100\,\mathrm{MHz}$ (UKW)
   (d) $\lambda = \frac{hc}{W} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{6{,}62 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{J}} = 3{,}00 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$ (Röntgenstrahlung)

3. Energie des Photons:

   $W_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2{,}00 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 9{,}93 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 6{,}20\,\mathrm{eV}$

   $A = W_\gamma - W_{\mathrm{kin}} = 4{,}20\,\mathrm{eV}$

   $\frac{m_\mathrm{e}}{2}v^2 = W_{\mathrm{kin}} = 3{,}20 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2W_{\mathrm{kin}}}{m_\mathrm{e}}} = 5{,}93 \cdot 10^{5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

4. (a) Licht der Frequenz f besteht nicht aus Quanten der Energie hf, sondern bei der Wechselwirkung mit einem quantenmechanischen System kann nur ein ganzzahliges Vielfaches von hf ausgetauscht werden.
   (b) Das Vakuum ist voll von virtuellen Teilchen, die immer paarweise (Teilchen und Antiteilchen) aus dem Nichts entstehen. Die Lebensdauer der virtuellen Teilchen ist nach Heisenberg $\Delta t \approx \frac{h}{2\,m_0\,c^2}$.

5. (a) $\lambda' = \lambda + \lambda_\mathrm{C}(1 - \cos\varphi) = \lambda + \lambda_\mathrm{C} = \frac{hc}{W_\gamma} + \frac{hc}{W_{\mathrm{e}0}} = \frac{10\,000}{9999} \cdot \frac{hc}{W_{\mathrm{e}0}} = \frac{10\,000\,hc}{W_\gamma}$

$$W'_\gamma = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{W_\gamma}{10\,000} = 0{,}9999\,W_{e0} = 0{,}5109\,\mathrm{MeV}$$
$$W_{ek} = W_\gamma - W'_\gamma = 9998\,W_{e0} = 5109\,\mathrm{MeV}$$
$$W_e = W_{ek} + W_{e0} = 9999\,W_{e0} = 5109{,}5\,\mathrm{MeV}$$

(b) $\vec{p}_e = \vec{p}_\gamma - \vec{p}'_\gamma = \begin{pmatrix} p_\gamma \\ p'_\gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} W_\gamma \\ W'_\gamma \end{pmatrix}$

$$\tan\varepsilon = \frac{W'_\gamma}{W_\gamma} = 10^{-4} \quad\Longrightarrow\quad \varepsilon = 10^{-4} = 0{,}00573^\circ$$

$$W_e = \frac{W_{e0}}{\sqrt{1-\beta_e^2}} \quad\Longrightarrow\quad \beta_e = \sqrt{1-\left(\frac{W_{e0}}{W_e}\right)^2} = \sqrt{1-10^{-8}} = 1 - 5\cdot 10^{-9}$$

(c) In S' ist der Gesamtimpuls null, d.h. die beiden Photonen haben den gleichen Impulsbetrag und damit die gleiche Energie und Frequenz.

$$2hf_0 = 2m_p c^2 \quad\Longrightarrow\quad f_0 = \frac{m_p c^2}{h} = 2.269\cdot 10^{23}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

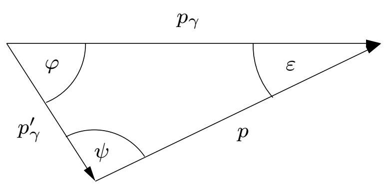
Dopplerformel:

$$f_1 = f'_1\sqrt{\frac{1+\beta'}{1-\beta'}} = \frac{m_p c^2}{h\sqrt{1-\beta'^2}}\sqrt{\frac{1+\beta'}{1-\beta'}} = f_0\sqrt{\frac{1+\beta'}{(1-\beta')(1-\beta'^2)}} =$$
$$= f_0\sqrt{\frac{1+\beta'}{(1-\beta')^2(1+\beta')}} = \frac{f_0}{1-\beta'}$$

(d) $\beta' = 1 - \frac{f_0}{f_1} = 1 - \frac{m_p c^2}{W_\gamma} = 1 - \frac{m_p}{9999\,m_e} = 0{,}8164$

$$v = v' \oplus v' = \frac{2v'}{1+\frac{v'v'}{c^2}}, \qquad \beta = \frac{2\beta'}{1+\beta'^2} = 0{,}9798, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 4{,}996$$
$$W_{k,p^-} = (\gamma-1)m_p c^2 = 6{,}007\cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} = 3749\,\mathrm{MeV} \quad\Longrightarrow\quad U = 3{,}749\,\mathrm{GV}$$

6. (a) Mit $\psi = 180^\circ - \varphi - \varepsilon = 100{,}305^\circ$ folgt



$$\frac{p'_\gamma}{\sin\varepsilon} = \frac{p_\gamma}{\sin\psi} \quad\Longrightarrow\quad p'_\gamma = p_\gamma\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\sin\psi}$$
$$W'_\gamma = p'_\gamma c = W_\gamma\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\sin\psi} = 1279{,}54\,\mathrm{MeV}$$

(b) $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{hc}{W'_\gamma} - \frac{hc}{W_\gamma} = \frac{h}{mc}(1-\cos\varphi) = \frac{hc}{W_0}(1-\cos\varphi)$

$$\frac{1}{W'_\gamma} - \frac{1}{W_\gamma} = \frac{1-\cos\varphi}{W_0} \quad\Longrightarrow\quad W_0 = \frac{1-\cos\varphi}{\frac{1}{W'_\gamma}-\frac{1}{W_\gamma}} = 938{,}3\,\mathrm{MeV} \quad\Longrightarrow\quad \text{Proton}$$

(c) Kinetische Energie des Protons: $W_\mathrm{k} = W_\gamma - W'_\gamma = (\gamma - 1)W_0$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{W_\gamma - W'_\gamma}{W_0} = 2{,}636 \quad\Longrightarrow\quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0{,}925$$

$$\Delta t = \frac{a}{\beta c} - \frac{a}{c} = 1{,}35 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s} = 1{,}35\,\mathrm{ns}$$

7. (a) Mit dem Impuls p des Positrons gilt

$$p^2c^2 = W^2 - W_0^2 = (\gamma^2 - 1)W_0^2 \quad\Longrightarrow\quad p = \frac{W_0}{c}\sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$\text{Energiesatz:}\quad W_0(1+\gamma) = hf + hf^* \quad\Longrightarrow\quad \frac{W_0}{h}(1+\gamma) = f + f^* \quad (1)$$

$$\text{Impulssatz:}\quad \frac{W_0}{c}\sqrt{\gamma^2-1} = \frac{hf}{c} - \frac{hf^*}{c} \quad\Longrightarrow\quad \frac{W_0}{h}\sqrt{\gamma^2-1} = f - f^* \quad (2)$$

$$(1)+(2):\quad \frac{W_0}{h}\left(1+\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right) = 2f \quad\Longrightarrow\quad W_\gamma = hf = \frac{W_0}{2}\left(1+\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-0{,}6^2}} = 1{,}25 \quad\Longrightarrow\quad \alpha = \frac{1}{2}\left(1 + 1{,}25 + \sqrt{1{,}25^2 - 1}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

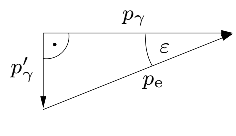
$$W_\gamma^* = W + W_0 - W_\gamma = (\gamma + 1 - \alpha)W_0 = 0{,}75 W_0$$

(b) $W_\gamma = \frac{3}{2}W_0$. Mit $\varphi = 90^\circ$ ist $1 - \cos\varphi = 1$ und damit

$$\lambda' = \lambda + \lambda_\mathrm{C} \quad\Longrightarrow\quad W'_\gamma = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda + \lambda_\mathrm{C}} = \frac{hc}{\frac{hc}{W_\gamma} + \frac{hc}{m_\mathrm{e}c^2}} = \frac{1}{\frac{2}{3W_0} + \frac{1}{W_0}} = \frac{3}{5}W_0$$

$$W_\mathrm{ek} = W_\gamma - W'_\gamma = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{5}\right)W_0 = \frac{9}{10}W_0, \quad W_\mathrm{e} = W_0 + W_\mathrm{ek} = \frac{19}{10}W_0$$

$p_\gamma = \dfrac{W_\gamma}{c} = \dfrac{3}{2}m_\mathrm{e}c, \quad p'_\gamma = \dfrac{W'_\gamma}{c} = \dfrac{3}{5}m_\mathrm{e}c, \quad p_\mathrm{e} = \sqrt{p_\gamma^2 + p_\gamma'^2} =$
$1{,}62\, m_\mathrm{e}c$



$$\tan\varepsilon = \frac{p'_\gamma}{p_\gamma} = \frac{2}{5} \quad\Longrightarrow\quad \varepsilon = 21{,}8^\circ$$

Teil III.

Anwendungen der Quantenphysik