SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Quantenphysik (Physik)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

1. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Teilchen

1. Materiewellen

1. Die kleinste in der Physik sinnvolle Länge ist die *Plancklänge* $l_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}}$.

   (a) Welchen Impuls p und welche Energie W müsste ein Proton haben, dessen Wellenlänge λ gleich der Plancklänge ist (damit könnte man dann Strukturen dieser Größenordnung untersuchen).

   (b) In welcher Eigenzeit τ würde dieses Proton quer durchs Universum fliegen ($s = 10^{10}\,\mathrm{LJ}$)?

   (c) Berechne die Geschwindigkeit unseres Protons in der Form $v = (1-\alpha)c$.

Lösung: (a) $\lambda = l_\mathrm{p} = 4{,}05 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m}$, $\quad p = \frac{h}{\lambda} = 16{,}355\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$, $\quad W = \sqrt{W_0^2 + p^2c^2} \approx pc = 4{,}90\,\mathrm{GJ}$

(b) $\gamma = \frac{W}{m_\mathrm{p}c^2} = 3{,}26 \cdot 10^{19}$, $\quad \tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{s}{c\gamma} = \frac{9{,}46 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m}}{c\gamma} = \frac{3{,}16 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s}}{\gamma} = 9{,}67 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \quad \Longrightarrow \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2\gamma^2} = 4{,}70 \cdot 10^{-40}$

2. (a) Welche Wellenlänge hat ein Elektron mit der Geschwindigkeit $v = 2{,}00 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$?

   (b) Welche Energie, welchen Impuls und welche Geschwindigkeit hat ein Proton mit der Wellenlänge $\lambda = 1{,}00 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{m}$?

Lösung:

3. (a) Ein Elektron in einer Bildröhre wird von der Spannung $U = 1800\,\mathrm{V}$ beschleunigt. Berechne die Geschwindigkeit v des Elektrons.

   (b) Welche kinetische Energie in J und in eV hat ein Proton mit der Geschwindigkeit $v = 5{,}00 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$?

Lösung: (a) $W_\mathrm{kin} = \frac{m_\mathrm{e}}{2}\,v^2 = 1800\,\mathrm{eV} = 1800 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 2{,}88 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{J}$

$$v = \sqrt{\frac{2W_\mathrm{kin}}{m_\mathrm{e}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}88 \cdot 10^{-16}\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 2{,}52 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(b) $W_\mathrm{kin} = \frac{m_\mathrm{p}}{2}\,v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot \left(5 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 2{,}09 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} = 13{,}0\,\mathrm{eV}$

2. Wahrscheinlichkeitsdeutung

Teil II.

Licht und Materie

3. Diskrete Energien

1. 2008 entdeckten Marc Fries und Andrew Steele auf einem Meteoriten sogenannte *Carbon Whiskers*, langgestreckte Nanostrukturen aus Kohlenstoff, von denen angenommen wird, dass sie im Raum um junge Sterne und Supernovä vorkommen. Wir gehen davon aus, dass jeder dieser Fäden der Länge a ein frei bewegliches, aber auf dem Faden eingesperrtes Elektron enthält.

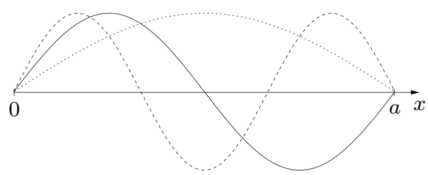
   (a) Erstelle eine Skizze der ersten drei Wellenfunktionen $\varphi_n(x)$ (genauer ihres Realteils) des Elektrons und leite daraus eine Formel für die zu den Wellenfunktionen gehörenden Wellenlängen λ_n ab. Berechne daraus die Energiewerte W_n des eingesperrten Elektrons ($n = 1$ für den Grundzustand).

   (b) Ein dünnes Gas unserer Nanofäden der Länge $a = 2{,}9\,\mathrm{nm}$ wird von elektromagnetischen Wellen eines sehr breiten Spektralbereichs durchstrahlt. Welche Wellenlängen sind im durchgehenden Licht geschwächt, wenn eine Anregung der Fäden bis $n = 4$ angenommen wird? In welchem Spektralbereich liegen diese Wellenlängen? Neben den Rechnungen ist auch eine genaue Erklärung dieser Schwächung gefragt!

   (c) Berechne anhand eines Termschemas die zusätzlichen Wellenlängen, die das an den Fäden gestreute Licht noch enthalten kann.

   (d) Es wird derzeit untersucht, ob die *Carbon Whiskers* einen Einfluss auf die Entfernungsmessung mit Typ 1a Supernavä haben. Wenn ja, müssen dann die bisher gemessenen Entfernungen nach oben oder nach unten korrigiert werden?

Lösung: (a) $\lambda_1 = 2a, \quad \lambda_2 = a = \frac{2a}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{2a}{3}, \quad \lambda_n = \frac{2a}{n}$



$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{\pi}{a} \cdot n, \quad p_n = \hbar k_n = \frac{h}{2a} \cdot n$$

$$W_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{h^2}{8ma^2} \cdot n^2$$

(b) Da die Verweildauer in angeregten Zuständen meistens sehr klein ist, befinden sich fast alle Fäden im Grundzustand. Photonen mit den Energien $W_{n1} = W_n - W_1$ und den dazu gehörenden Wellenlängen

$$\lambda_{n1} = \frac{hc}{W_{n1}} = \frac{8m_{\mathrm{e}}ca^2}{h(n^2-1)} = \frac{27{,}7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}}{n^2-1} = \frac{27{,}7\,\mu}{n^2-1}$$

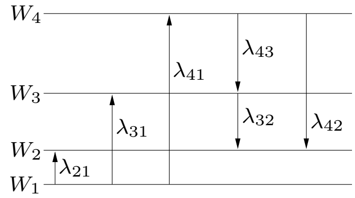
werden von den Fäden absorbiert und in alle Richtungen wieder ausgesandt. Daher ist die Intensität dieser Wellenlängen der durchgehenden Strahlung geschwächt.

$$\lambda_{21} = \frac{27{,}7\,\mu}{3} = 9{,}2\,\mu, \quad \lambda_{31} = \frac{27{,}7\,\mu}{8} = 3{,}5\,\mu, \quad \lambda_{41} = \frac{27{,}7\,\mu}{15} = 1{,}8\,\mu$$

Infrarotbereich!

(c) $\lambda_{43} = \dfrac{27{,}7\,\mu}{7} = 4{,}0\,\mu, \quad \lambda_{42} = \dfrac{27{,}7\,\mu}{12} = 2{,}3\,\mu$

$\lambda_{32} = \frac{27{,}7\,\mu}{5} = 5{,}5\,\mu$



(d) Da mit den Whiskers Licht absorbiert wird, ist die wirkliche Helligkeit der Supernovä größer als die gemessene, d.h. sie sind nicht so weit entfernt, Korrektur also nach unten.

2. Bestimmte Farbstoffmoleküle (Carbocyanin) haben die Energiestufen

$$W_n = n^2 \cdot W_1 \quad \text{mit} \quad W_1 = 0{,}250\,\text{eV},\, n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad n \leqq 4.$$

Ein Gas aus Carbocyaninmolekülen (alle zunächst im Grundzustand) wird von weißem Licht mit einem gehörigen UV-Anteil durchstrahlt. Welche Wellenlängen fehlen im durchgehenden Strahl? Welche Wellenlängen enthält das gestreute Licht?

Lösung: $W_1 = 0{,}25\,\text{eV}$, $W_2 = 1{,}00\,\text{eV}$, $W_3 = 2{,}25\,\text{eV}$, $W_4 = 4{,}00\,\text{eV}$.

Fehlende Wellenlängen im durchgehenden Strahl:

$$\Delta W_{12} = 0{,}75\,\text{eV} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{12} = \frac{hc}{\Delta W_{12}} = 1650\,\text{nm} \quad \text{(IR)}$$

$$\Delta W_{13} = 2{,}00\,\text{eV} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{13} = \frac{hc}{\Delta W_{13}} = 620\,\text{nm} \quad \text{(rot)}$$

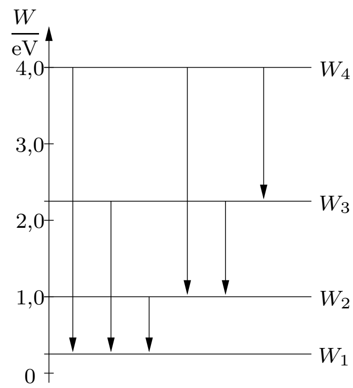
$$\Delta W_{14} = 3{,}75\,\text{eV} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{14} = \frac{hc}{\Delta W_{14}} = 331\,\text{nm} \quad \text{(UV)}$$

Wellenlängen im Streulicht (zusätzlich zu λ_{12}, λ_{13} und λ_{14}):

$$\Delta W_{23} = 1{,}25\,\text{eV}, \quad \lambda_{23} = \frac{hc}{\Delta W_{23}} = 992\,\text{nm} \quad \text{(IR)}$$

$$\Delta W_{24} = 3{,}00\,\text{eV}, \quad \lambda_{24} = \frac{hc}{\Delta W_{24}} = 413\,\text{nm} \quad \text{(violett)}$$

$$\Delta W_{34} = 1{,}75\,\text{eV}, \quad \lambda_{34} = \frac{hc}{\Delta W_{34}} = 708\,\text{nm} \quad \text{(rot)}$$



3. (a) Erkläre, warum gebundene, stationäre quantenmechanische Zustände (Teilchen im Potentialtopf) ein diskretes Energiespektrum haben.

(b) Nanotechniker haben sehr dünne Fäden der Länge $a = 400\,\text{nm}$ gefertigt, die ein über die ganze Fadenlänge frei bewegliches Elektron enthalten. Unter der Annahme, dass die Energie zum Ablösen des Elektrons unendlich groß ist, gilt für die möglichen kinetischen Energien des Elektrons

$$W_n = \frac{h^2}{8ma^2} \cdot n^2$$

Welche Wellenlängen einer einfallenden elektromagnetischen Strahlung kann ein Nanofaden im Grundzustand absorbieren? Berechne den Wert der größten dieser Wellenlängen. Gib zum Vergleich die größte Wellenlänge an, die ein klassischer Dipol (Leiterstab) der Länge a absorbieren kann.

(c) Gib ein Paar (r, s) von Quantenzahlen an, für die die Wellenlänge λ_{rs} der ausgesandten elektromagnetischen Strahlung eines Nanofadens beim Übergang von W_r nach W_s im sichtbaren Bereich liegt.

Lösung: (a) Bei gebundenen Zuständen (eindimensionale Betrachtung) gibt es zwei Schnittstellen x_1 und x_2 zwischen W (konstante Teilchenenergie) und $V(x)$ (potentielle) Energie. Im Intervall (x_1, x_2) hat die Wellenfunktion $\varphi(x)$ (Lösung der zeitunabh. Schrödingergleichung) eine andere mathematische Gestalt als außerhalb. Aus der Stetigkeitsforderung von $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ auch an den Stellen x_1 und x_2 folgen Gleichungen, die nur für bestimmte Werte von W eine Lösung haben.

(b) $\lambda_{1s} = \dfrac{hc}{W_s - W_1} = \dfrac{8mca^2}{h} \cdot \dfrac{1}{s^2-1} = \dfrac{0{,}528\,\text{m}}{s^2-1}, \qquad \lambda_{12} = 0{,}176\,\text{m}$

Für Dipole gilt: $\lambda_{\text{e},n} = \dfrac{2a}{n}$, d.h $\lambda_{\text{e,max}} = \lambda_{\text{e},1} = 2a = 800\,\text{nm}$

(c) $\lambda_{rs} = \dfrac{hc}{W_r - W_s} = \dfrac{8mca^2}{h} \cdot \dfrac{1}{r^2-s^2} = \dfrac{5{,}28 \cdot 10^8\,\text{nm}}{r^2-s^2}, \quad 400\,\text{nm} < \lambda_{rs} < 800\,\text{nm} \quad \Longrightarrow$

$\dfrac{5{,}28 \cdot 10^8}{800} < r^2 - s^2 < \dfrac{5{,}28 \cdot 10^8}{400}, \qquad 6{,}6 \cdot 10^5 < r^2 - s^2 < 13{,}1 \cdot 10^5$

z. B. $s = 1$ und $813 \leqq r \leqq 1148$ oder $(r, s) = (400\,001, 400\,000)$ oder ...

4. Nanotechniker haben sehr dünne Fäden der Länge $a = 800\,\text{nm}$ gefertigt, die ein über die ganze Fadenlänge frei bewegliches Elektron enthalten. Im Folgenden darf angenommen werden, dass die Energie zum Entfernen des Elektrons vom Faden unendlich groß ist.

   (a) Erstelle eine Skizze der ersten drei Wellenfunktionen $\varphi_n(x)$ (genauer ihres Realteils) und leite daraus eine Formel für die zu den Wellenfunktionen gehörenden Wellenlängen λ_n ab. Berechne dann Formeln für die Wellenzahlen k_n, die Impulse p_n und die kinetischen Energien W_n des Elektrons.

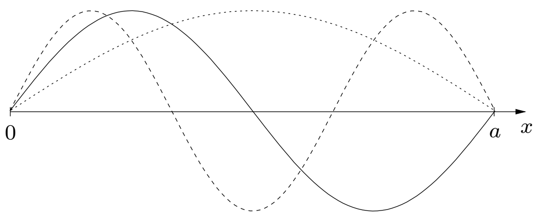
(b) Wählt man die x-Achse eines Koordinatensystems so, dass der Nanofaden parallel zur Achse ist und bei $x = 0$ beginnt, dann lautet die Wellenfunktion

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} A\sin(k_n x) & \text{für } 0 \leqq x \leqq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechne mit einer kurzen Erklärung die Amplitude A und schreibe die endgültige Formel für die Wahrscheinlichkeitsdichte $w_n(x)$ hin.

(c) Zeichne die Wahrscheinlichkeitsdichte $w_n(x)$ für unser Elektron im Zustand $n = 4$ ($100\,\text{nm} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$). Berechne und veranschauliche in der Zeichnung die Wahrscheinlichkeit P, das Elektron für $n = 4$ im Intervall $\left[\frac{3a}{16}, \frac{5a}{16}\right]$ anzutreffen.

Lösung: (a) $\lambda_1 = 2a, \quad \lambda_2 = a = \frac{2a}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{2a}{3}$



$$\lambda_n = \frac{2a}{n}, \quad k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{\pi}{a} \cdot n$$

$$p_n = \hbar k_n = \frac{h}{2a} \cdot n$$

$$W_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{h^2}{8ma^2} \cdot n^2$$

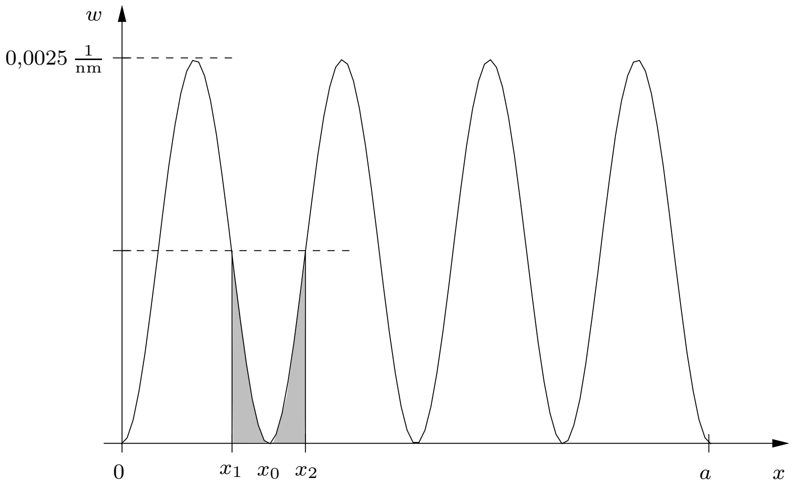
(b) Da das Elektron irgendwo sein muss, ist

$$\int_0^a w_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a |\varphi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x = A^2 \int_0^a \sin^2(k_n x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$A^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin k_n x \cos k_n x}{2k_n}\right]_0^a = A^2 \left[\frac{a}{2} - \frac{\sin \overbrace{k_n a}^{n\pi} \cos k_n a}{2k_n}\right] = A^2 \cdot \frac{a}{2} = 1$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad \Longrightarrow \quad w_n(x) = |\varphi(x)|^2 = \frac{2}{a}\sin^2 k_n x$$

(c) $x_1 = \frac{3a}{16}, \quad x_0 = \frac{4a}{16} = \frac{a}{4}, \quad x_2 = \frac{5a}{16}, \quad k_4 = \frac{4\pi}{a}$



$$P = \int_{x_1}^{x_2} w_4(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{x_0}^{x_2} w_4(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{a}\int_{x_0}^{x_2} \sin^2(k_4 x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{4}{a}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin k_4 x \cos k_4 x}{2k_4}\right]_{x_0}^{x_2} = \frac{4}{a}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2k_4 x}{4k_4}\right]_{x_0}^{x_2} =$$

$$= \frac{4}{a}\left[\frac{5a}{32} - \frac{4a}{32} - \frac{a\sin\left(\frac{8\pi}{a}\cdot\frac{5a}{16}\right)}{16\pi} + \frac{a\sin\left(\frac{8\pi}{a}\cdot\frac{a}{4}\right)}{16\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{4\pi} + \frac{\sin 2\pi}{4\pi} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi} = \frac{\pi - 2}{8\pi} = 0{,}0454$$

4. Photonen

1. In dieser Aufgabe kannst du $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ für die Lichtgeschwindigkeit, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}$ für das Planck'sche Wirkungsquantum und $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$ für die Elementarladung verwenden.

   (a) Gib $19{,}2 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$ in der Einheit $1\,\text{eV}$ an.

   (b) Gib $13{,}6\,\text{eV}$ in der Einheit $1\,\text{J}$ an.

   (c) Welche Frequenz hat Licht der Wellenlänge $780\,\text{nm}$?

   (d) Welche Wellenlänge hat Licht der Frequenz $4{,}20 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$?

   (e) Welche Energie besitzt eine Lichtquant der Wellenlänge $635\,\text{nm}$ (Ergebnis in der Einheit $1\,\text{eV}$)?

   (f) Welche Wellenlänge und welche Frequenz haben Lichtquanten der der Energie $8{,}20\,\text{eV}$?

Lösung: (a) $12{,}0\,\text{eV}$

(b) $2{,}18 \cdot 10^{-18}\,\text{J}$

(c) $3{,}85 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$

(d) $714\,\text{nm}$

(e) $1{,}95\,\text{eV}$

(f) $\lambda = 151\,\text{nm}$; $f = 2{,}0 \cdot 10^{15}\,\text{Hz}$

2. (a) Welche Energie hat ein Photon der Handystrahlung des D-Netzes mit der Frequenz $f = 900\,\text{MHz}$?

   (b) Welche Energie hat ein Photon von grünem Licht der Wellenlänge $\lambda = 500\,\text{nm}$?

   (c) Welche Wellenlänge hat eine elektromagnetische Welle, deren Photonen die Energie $4{,}13 \cdot 10^{-7}\,\text{eV}$ besitzen? Um welche Wellenart könnte es sich handeln?

   (d) Welche Wellenlänge hat eine elektromagnetische Welle, deren Photonen die Energie $4{,}13\,\text{keV}$? Um welche Strahlungsart handelt es sich?

Lösung: (a) $W = hf = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\text{Js} \cdot 9 \cdot 10^8\,\frac{1}{\text{s}} = 5{,}96 \cdot 10^{-25}\,\text{J} = 3{,}72 \cdot 10^{-6}\,\text{eV}$

(b) $W = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\text{Js} \cdot 3{,}00 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5{,}00 \cdot 10^{-7}\,\text{m}} = 3{,}97 \cdot 10^{-19}\,\text{J} = 2{,}48\,\text{eV}$

(c) $\lambda = \dfrac{hc}{W} = \dfrac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{6{,}62 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{J}} = 3{,}00\,\mathrm{m},\ f = \dfrac{c}{\lambda} = 100\,\mathrm{MHz}$ (UKW)

(d) $\lambda = \dfrac{hc}{W} = \dfrac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{6{,}62 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{J}} = 3{,}00 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$ (Röntgenstrahlung)

3. UV-Strahlung der Wellenlänge $\lambda = 200\,\mathrm{nm}$ trifft auf ein Aluminiumblech. Dabei werden Elektronen mit der maximalen kinetischen Energie $W_{\mathrm{kin}} = 2{,}00\,\mathrm{eV}$ aus dem Metall geschlagen. Welche Energie (Austrittsarbeit A) ist erforderlich, um Elektronen von Aluminium abzulösen? Welche maximale Geschwindigkeit haben die aus dem Blech austretenden Elektronen?

Lösung: Energie des Photons:

$$W_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2{,}00 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 9{,}93 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 6{,}20\,\mathrm{eV}$$

$$A = W_\gamma - W_{\mathrm{kin}} = 4{,}20\,\mathrm{eV}$$

$$\frac{m_\mathrm{e}}{2} v^2 = W_{\mathrm{kin}} = 3{,}20 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2W_{\mathrm{kin}}}{m_\mathrm{e}}} = 5{,}93 \cdot 10^{5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

4. Nimm zu folgenden Aussagen kritisch Stellung. Im Fall (b) sollte eine kleine Rechnung nicht fehlen!

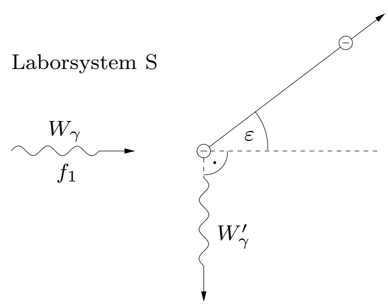
   (a) Licht der Frequenz f besteht aus Quanten der Energie hf.

   (b) Das Vakuum ist absolut leer.

Lösung: (a) Licht der Frequenz f besteht nicht aus Quanten der Energie hf, sondern bei der Wechselwirkung mit einem quantenmechanischen System kann nur ein ganzzahliges Vielfaches von hf ausgetauscht werden.

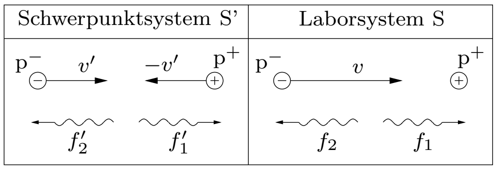
(b) Das Vakuum ist voll von virtuellen Teilchen, die immer paarweise (Teilchen und Antiteilchen) aus dem Nichts entstehen. Die Lebensdauer der virtuellen Teilchen ist nach Heisenberg $\Delta t \approx \frac{h}{2\,m_0\,c^2}$.

5. Im System S (Laborsystem) trifft ein Photon mit der Energie $W_\gamma = 9999\,W_{\mathrm{e}0}$ auf ein ruhendes Elektron (Ruhenergie $W_{\mathrm{e}0}$). Das unter dem Winkel $\varphi = 90^\circ$ gestreute Photon hat die Energie W'_γ und den Impulsbetrag p'_γ. Nach der Wechselwirkung bezeichnen wir die Größen des Elektrons mit W_{ek} (kinetische Energie), W_e (Gesamtenergie), $\vec{p}_\mathrm{e}$ (Impuls) und v_e (Geschwindigkeitsbetrag).



   (a) Berechne W'_γ, W_{ek} und W_e, jeweils als Vielfaches von $W_{\mathrm{e}0}$ und in MeV.

(b) Berechne den Winkel ε, den die Flugrichtung des Rückstoßelektrons mit der Richtung des einfallenden Gammaquants einschließt. Berechne auch $\beta_{\rm e} = \frac{v_{\rm e}}{c}$.



Wir befassen uns jetzt mit der Erzeugung des einfallenden Photons: Ein Antiproton p^- aus einem Beschleuniger trifft im Laborsystem S mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ und der Gesamtenergie W auf ein ruhendes Proton p^+. Dabei entstehen zwei Gammaquanten mit den Frequenzen f_1 und f_2, die sich parallel zur Einfallsrichtung des Antiprotons ausbreiten. Da das Proton in S ruht, ist die Relativgeschwindigkeit von S' zu S durch $v_{\rm S'S} = v'$ gegeben.

(c) Zeige, dass in S' $f_1' = f_2'$ gilt. Mit f_0 bezeichnen wir die Frequenz eines der beiden Photonen, die bei der Zerstrahlung von einem **ruhenden** Proton-Antiproton-Paares erzeugt werden. Berechne f_0 und beweise dann:

$$f_1 = \frac{f_0}{1-\beta'}$$

(d) Berechne β' und dann β mit Hilfe des Additionstheorems für Geschwindigkeiten. Welche Beschleunigungsspannung hat das Antiproton durchlaufen?

Lösung: (a) $\lambda' = \lambda + \lambda_{\rm C}(1-\cos\varphi) = \lambda + \lambda_{\rm C} = \frac{hc}{W_\gamma} + \frac{hc}{W_{\rm e0}} = \frac{10\,000}{9999}\cdot\frac{hc}{W_{\rm e0}} = \frac{10\,000\,hc}{W_\gamma}$

$$W_\gamma' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{W_\gamma}{10\,000} = 0{,}9999\,W_{\rm e0} = 0{,}5109\,\text{MeV}$$

$$W_{\rm ek} = W_\gamma - W_\gamma' = 9998\,W_{\rm e0} = 5109\,\text{MeV}$$

$$W_{\rm e} = W_{\rm ek} + W_{\rm e0} = 9999\,W_{\rm e0} = 5109{,}5\,\text{MeV}$$

(b) $\vec{p}_{\rm e} = \vec{p}_\gamma - \vec{p}_\gamma' = \begin{pmatrix} p_\gamma \\ p_\gamma' \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} W_\gamma \\ W_\gamma' \end{pmatrix}$

$$\tan\varepsilon = \frac{W_\gamma'}{W_\gamma} = 10^{-4} \quad\Longrightarrow\quad \varepsilon = 10^{-4} = 0{,}00573^\circ$$

$$W_{\rm e} = \frac{W_{\rm e0}}{\sqrt{1-\beta_{\rm e}^2}} \quad\Longrightarrow\quad \beta_{\rm e} = \sqrt{1-\left(\frac{W_{\rm e0}}{W_{\rm e}}\right)^2} = \sqrt{1-10^{-8}} = 1 - 5\cdot 10^{-9}$$

(c) In S' ist der Gesamtimpuls null, d.h. die beiden Photonen haben den gleichen Impulsbetrag und damit die gleiche Energie und Frequenz.

$$2hf_0 = 2m_{\rm p}c^2 \quad\Longrightarrow\quad f_0 = \frac{m_{\rm p}c^2}{h} = 2.269\cdot 10^{23}\,\frac{1}{\rm s}$$

Dopplerformel:

$$f_1 = f_1'\sqrt{\frac{1+\beta'}{1-\beta'}} = \frac{m_\mathrm{p}c^2}{h\sqrt{1-\beta'^2}}\sqrt{\frac{1+\beta'}{1-\beta'}} = f_0\sqrt{\frac{1+\beta'}{(1-\beta')(1-\beta'^2)}} =$$

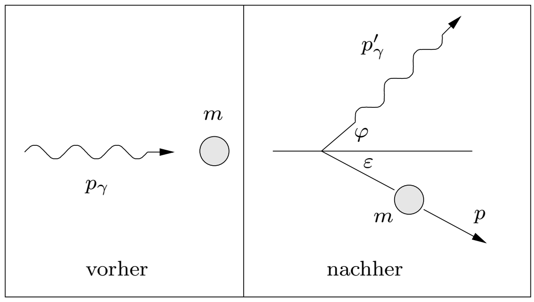
$$= f_0\sqrt{\frac{1+\beta'}{(1-\beta')^2(1+\beta')}} = \frac{f_0}{1-\beta'}$$

(d) $\beta' = 1 - \frac{f_0}{f_1} = 1 - \frac{m_\mathrm{p}c^2}{W_\gamma} = 1 - \frac{m_\mathrm{p}}{9999\,m_\mathrm{e}} = 0{,}8164$

$v = v' \oplus v' = \frac{2v'}{1+\frac{v'v'}{c^2}}, \qquad \beta = \frac{2\beta'}{1+\beta'^2} = 0{,}9798, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 4{,}996$

$W_{\mathrm{k,p^-}} = (\gamma-1)m_\mathrm{p}c^2 = 6{,}007\cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} = 3749\,\mathrm{MeV} \implies U = 3{,}749\,\mathrm{GV}$

6. Ein energiereiches Gammaquant der Energie $W_\gamma = 2{,}815\,\mathrm{GeV}$ trifft auf ein ruhendes Teilchen der Masse m und der Ruhenergie W_0. Der Impuls des gestreuten Quants bildet mit der Richtung des einfallenden Photons den Winkel $\varphi = 53{,}130°$, das Rückstoßteilchen fliegt unter dem Winkel $\varepsilon = \frac{\varphi}{2}$ davon (siehe Abb.).

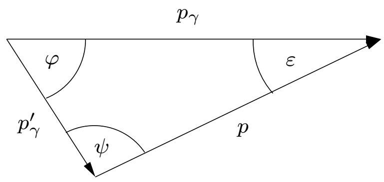


(a) Zeichne eine Vektorkette aller beteiligten Impulse und drücke mit Hilfe des Sinussatzes p'_γ durch p_γ und die Winkel aus. Berechne dann die Energie W'_γ des gestreuten Quants.

(b) Leite aus der Comptonformel für die Wellenlängendifferenz eine Beziehung zwischen W_γ, W'_γ, W_0 und φ her. Berechne dann W_0. Um welches Teilchen handelt es sich also bei dem Rückstoßteilchen?

(c) Der Ort der Wechselwirkung ist im Zentrum einer großen Detektorkammer. Das Rückstoßteilchen und das gestreute Quant legen beide die gleiche Strecke $a = 5{,}00\,\mathrm{m}$ bis zum jeweiligen Detektor zurück. Um welche Zeit Δt wird das Teilchen später registriert als das Photon?

Lösung: (a) Mit $\psi = 180° - \varphi - \varepsilon = 100{,}305°$ folgt



$$\frac{p'_\gamma}{\sin\varepsilon} = \frac{p_\gamma}{\sin\psi} \implies p'_\gamma = p_\gamma\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\sin\psi}$$

$$W'_\gamma = p'_\gamma c = W_\gamma\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\sin\psi} = 1279{,}54\,\mathrm{MeV}$$

(b) $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{hc}{W'_\gamma} - \frac{hc}{W_\gamma} = \frac{h}{mc}(1-\cos\varphi) = \frac{hc}{W_0}(1-\cos\varphi)$

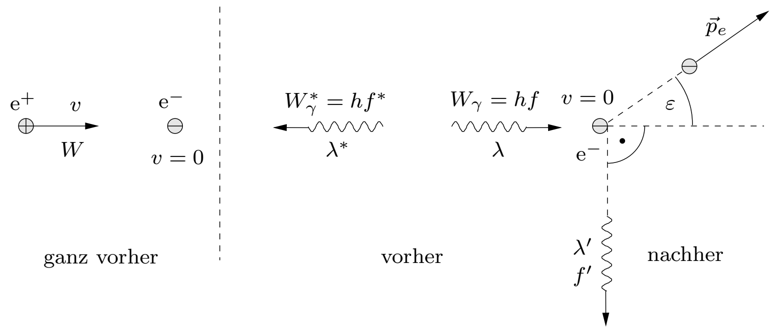
$$\frac{1}{W'_\gamma} - \frac{1}{W_\gamma} = \frac{1-\cos\varphi}{W_0} \quad\Longrightarrow\quad W_0 = \frac{1-\cos\varphi}{\frac{1}{W'_\gamma} - \frac{1}{W_\gamma}} = 938{,}3\,\mathrm{MeV} \quad\Longrightarrow\quad \text{Proton}$$

(c) Kinetische Energie des Protons: $W_\mathrm{k} = W_\gamma - W'_\gamma = (\gamma-1)W_0$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{W_\gamma - W'_\gamma}{W_0} = 2{,}636 \quad\Longrightarrow\quad \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = 0{,}925$$

$$\Delta t = \frac{a}{\beta c} - \frac{a}{c} = 1{,}35\cdot 10^{-9}\,\mathrm{s} = 1{,}35\,\mathrm{ns}$$

7. Ein Positron prallt mit der Gesamtenergie $W = \gamma W_0$ ($v = 0{,}600c$) auf ein ruhendes Elektron (Ruhenergie W_0). Die beiden Teilchen zerstrahlen in zwei Photonen mit den Frequenzen f bzw. f^*. Das Photon mit der Frequenz f fliegt in die gleiche Richtung wie das einfallende Positron und trifft auf ein ruhendes Elektron. Das Elektron fliegt mit dem Impuls $\vec{p}_\mathrm{e}$ davon und es entsteht ein gestreutes Quant mit der Energie $W'_\gamma = hf'$ senkrecht zur Richtung des einfallenden Photons (siehe Abb.).



(a) Beweise für die Energie des einen Photons:

$$W_\gamma = \frac{W_0}{2}(1 + \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})$$

und berechne dann den Zahlenwert von α in $W_\gamma = \alpha W_0$. Wie groß ist W^*_γ?

(b) Schreibe die Energien W_γ, W'_γ, die kinetische Energie W_ek und die die Gesamtenergie W_e des Elektrons alle als Vielfache von W_0. Drücke ebenso die Impulse p_γ, p'_γ und p_e durch $m_\mathrm{e}c$ aus. Unter welchem Winkel ε (siehe Abb.) fliegt das Elektron davon?

Lösung: (a) Mit dem Impuls p des Positrons gilt

$$p^2c^2 = W^2 - W_0^2 = (\gamma^2-1)W_0^2 \quad\Longrightarrow\quad p = \frac{W_0}{c}\sqrt{\gamma^2-1}$$

Energiesatz: $$W_0(1+\gamma) = hf + hf^* \quad\Longrightarrow\quad \frac{W_0}{h}(1+\gamma) = f + f^* \qquad (1)$$

Impulssatz: $$\frac{W_0}{c}\sqrt{\gamma^2-1} = \frac{hf}{c} - \frac{hf^*}{c} \quad\Longrightarrow\quad \frac{W_0}{h}\sqrt{\gamma^2-1} = f - f^* \qquad (2)$$

$$(1)+(2): \qquad \frac{W_0}{h}\left(1+\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)=2f \quad\Longrightarrow\quad W_\gamma = hf = \frac{W_0}{2}\left(1+\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)$$

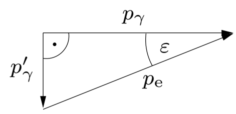
$$\gamma=\sqrt{\frac{1}{1-0{,}6^2}}=1{,}25 \quad\Longrightarrow\quad \alpha=\frac{1}{2}\left(1+1{,}25+\sqrt{1{,}25^2-1}\right)=\frac{3}{2}=1{,}5$$

$$W_\gamma^* = W+W_0-W_\gamma=(\gamma+1-\alpha)W_0=0{,}75W_0$$

(b) $W_\gamma=\frac{3}{2}W_0$. Mit $\varphi=90^\circ$ ist $1-\cos\varphi=1$ und damit

$$\lambda'=\lambda+\lambda_{\mathrm{C}} \quad\Longrightarrow\quad W'_\gamma=\frac{hc}{\lambda'}=\frac{hc}{\lambda+\lambda_{\mathrm{C}}}=\frac{hc}{\frac{hc}{W_\gamma}+\frac{hc}{m_{\mathrm{e}}c^2}}=\frac{1}{\frac{2}{3W_0}+\frac{1}{W_0}}=\frac{3}{5}W_0$$

$$W_{\mathrm{ek}}=W_\gamma-W'_\gamma=\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{5}\right)W_0=\frac{9}{10}W_0, \quad W_{\mathrm{e}}=W_0+W_{\mathrm{ek}}=\frac{19}{10}W_0$$



$p_\gamma = \frac{W_\gamma}{c} = \frac{3}{2}m_{\mathrm{e}}c, \quad p'_\gamma = \frac{W'_\gamma}{c} = \frac{3}{5}m_{\mathrm{e}}c, \quad p_{\mathrm{e}} = \sqrt{p_\gamma^2+p_\gamma'^2} =$ $1{,}62\, m_{\mathrm{e}}c$

$\tan\varepsilon=\frac{p'_\gamma}{p_\gamma}=\frac{2}{5} \quad\Longrightarrow\quad \varepsilon=21{,}8^\circ$

Teil III.

Anwendungen der Quantenphysik