SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Thermodynamik (Physik)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

30. Juli 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Temperatur

1. (a) Zu welcher Größe ist die Temperatur eines Körpers – nach Definition – proportional?
   (b) Erkläre genau das Zustandekommen der Verdunstungskälte.
   (c) Ein Gas hat die Temperatur $T_1 = -23\,°\mathrm{C}$. Welche Temperatur T_2 (in °C) hat das Gas, wenn die Geschwindigkeit von *jedem* Molekül verdoppelt wird?

Lösung: (a) Zur mittleren kinetischen Energie der Moleküle.

(b) Am Rand der Flüssigkeit macht die potentielle Energie eines Teilchens einen Sprung der Höhe ΔW_p. Ein Molekül an der Flüssigkeitsoberfläche kann diese also nur dann verlassen, wenn seine kinetische Energie größer als ΔW_p ist. Auch wenn die *mittlere* kinetische Energie $\overline{W}_\mathrm{k} < \Delta W_\mathrm{p}$ ist, haben einige Teilchen an der Oberfläche eine kinetische Energie größer als ΔW_p. Diese Teilchen verlassen die Flüssigkeit, sie *verdunsten.* Beim Verdunsten verlassen nur die schnellsten Teilchen die Flüssigkeit, die mittlere kinetische Energie der verbleibenden Teilchen wird dadurch kleiner, die Flüssigkeit wird kälter.

(c) Bei einer Verdopplung der Geschwindigkeit wird die kinetische Energie eines jeden Teilchens, und damit auch die mittlere kinetische Energie des Gases, vervierfacht.

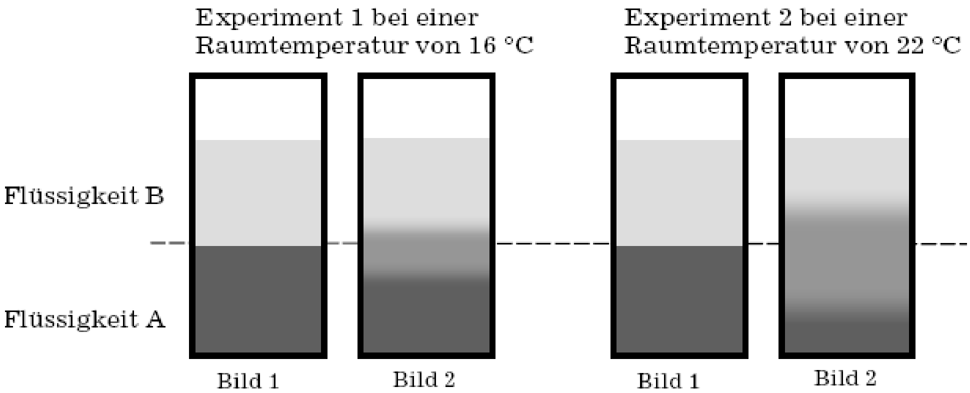
$T_2 = 4 \cdot (273 - 23)\,\mathrm{K} = 1000\,\mathrm{K} = 727\,°\mathrm{C}$

2. Luft der Temperatur $T_1 = 10\,°\mathrm{C}$ wird Energie zugeführt, bis sich die mittlere kinetische Energie der Moleküle verdoppelt hat. Wie groß ist die Lufttemperatur T_2 nach der Energiezufuhr?

Lösung: $T_1 = 283\,\mathrm{K}, \qquad T_2 = 2T_1 = 566\,\mathrm{K} = 293\,°\mathrm{C}$

3. In zwei Versuchen wird mit Flüssigkeiten experimentiert, die sich vermischen können. Beide Flüssigkeiten haben jeweils die gleiche Temperatur (Raumtemperatur).

   Die Flüssigkeit A wird in ein Becherglas gegossen und eine zweite Flüssigkeit B wird vorsichtig darüber geschichtet. Das Becherglas wird drei Stunden ruhig stehen gelassen. Bild 1 zeigt jeweils den Ausgangszustand, Bild 2 das Endergebnis des Experimentes.



Quelle: Kommission

(a) Beschreibe und vergleiche die Ergebnisse der beiden Experimente.

(b) Es werden mehrere Hypothesen zur Erklärung der Ergebnisse aufgestellt. Entscheide für jede Hypothese, ob Sie richtig, falsch oder unentscheidbar ist. Solltest du eine Hypothese für falsch halten, gib eine kurze Begründung für deine Meinung an.

- Bei höherer Temperatur bewegen sich die Teilchen schneller und die Flüssigkeiten durchmischen sich leichter.
- Die Teilchen der Flüssigkeit A bewegen sich gezielt in Richtung der Flüssigkeit B.
- Die Teilchen der Flüssigkeit B sind schwerer als die Teilchen der Flüssigkeit A.

Quelle: Bildungsstandards im Fach Physik für den Mittleren Schulabschluss, Beschluss vom 16.12.2004

Lösung: (a) Beobachtung zum Experiment 1: Die Flüssigkeiten mischen sich an der Grenzfläche, die obere Flüssigkeit ist jedoch weiter in die untere Flüssigkeit eingedrungen als umgekehrt.

Beobachtung zum Experiment 2 und Vergleich: Die Beobachtung entspricht der im Experiment 1, jedoch ist die gegenseitige Durchmischung größer.

(b)
- Richtig
- Falsch, Begründung: Die Brownsche Bewegung verläuft ungeordnet.
- Keine Entscheidung möglich

2 Wärmeenergie

1. **Kaffeemaschine**
   (a) Schätze ab, die viele Tassen Kaffee man an einer Haushalts-Steckdose in 10 Minuten etwa kochen kann.
   (b) Schätze die Größenordnung der elektrischen Leistungsaufnahme einer handelsüblichen Kaffeemaschine ab.
   (c) Wie viele Kaffeemaschinen kann man z. B. beim Schulfest gleichzeitig über eine Vielfachsteckdose betreiben?

Lösung: Annahmen z. B.:

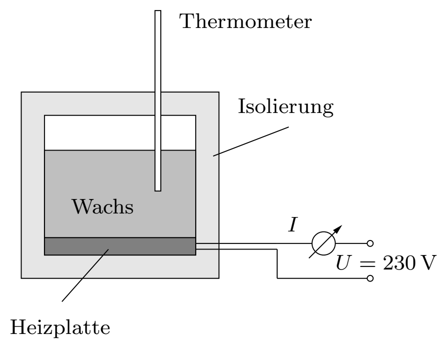
150ml pro Tasse, $\Delta T = 100^oC - 20^oC = 80^oC$, Sicherung $10A$

(a) Wärmeenergie pro Tasse: $4,2\frac{J}{g^oC} \cdot 150g \cdot 80^oC = 50kJ$
$I_{max} = 10A \Rightarrow E_{max} = 10A \cdot 230V \cdot 600s = 1380kJ \Rightarrow$ 27 Tassen
Wegen Verlusten und einem Wirkungsgrad unter 100% weniger als 27 Tassen.

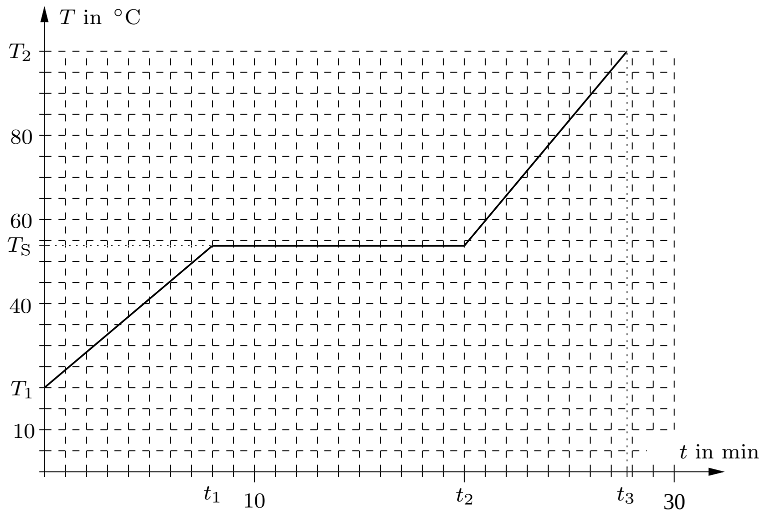
(b) Annahme: 10 Tassen werden in 10min gebrüht
$\Delta E = 10 \cdot 4,2\frac{J}{g^oC} \cdot 150g \cdot 80^oC = 0,5MJ \Rightarrow P = \frac{0,5MJ}{600s} = 0,8kW$

(c) $P = 10A \cdot 230V = 2,3kW$
Anzahl Tassen $= 2,3kW : 0,8kW = 2,9$
Wenn die Steckdose mit einer 10A-Sicherung abgesichert ist, kann man zwei Kaffeemaschinen betreiben; bei höherer Absicherung ggf. mehr.

2. Sebastian nimmt am Wettbewerb *Schüler experimentieren* teil. In einem gut isolierten Ofen, der praktisch keine Wärme nach außen abgibt, erwärmt er Kerzenwachs der Masse $m = 890\,$g. Die Heizplatte des Ofens ist an das Haushaltsnetz angeschlossen und während des ganzen Versuchs beträgt die Stromstärke $I = 0{,}800\,$A. Ein in den Ofen eingebautes Thermometer überwacht die Temperatur des Wachses. Das Thermometer ist an einen Computer angeschlossen, der die Temperatur T in



Abhängigkeit von der Zeit t aufzeichnet (siehe Diagramm). Beschreibe zunächst in Worten das vom Diagramm erfasste physikalische Geschehen und ermittle dann alle physikalischen Daten des Wachses, die man dem Diagramm entnehmen kann.



Lösung: Zunächst erwärmt sich das feste Wachs von $T_1 = 20\ °\text{C}$ bis zu Schmelztemperatur $T_\text{S} = 54\ °\text{C}$. Anschließend wird die aufgenommene Energie zum Schmelzen des Wachses verwendet, die Temperatur bleibt konstant, bis das ganze Wachs geschmolzen ist. Dann erwärmt sich das jetzt flüssige Wachs bis zur Temperatur $T_2 = 100\ °\text{C}$.

Leistung der Heizplatte: $P = UI = 230\,\text{V} \cdot 0{,}80\,\text{A} = 184\,\text{W}$

Vom Wachs aufgenommene Energie: $\Delta W = P \cdot \Delta t$

Zeit	$0 < t < t_1$	$t_1 < t < t_2$	$t_2 < t < t_3$
Δt	$\Delta t_1 = 8\,\text{min} = 480\,\text{s}$	$\Delta t_2 = 12\,\text{min} = 720\,\text{s}$	$\Delta t_3 = 7{,}75\,\text{min} = 465\,\text{s}$
ΔW	$88{,}3\,\text{kJ}$	$132\,\text{kJ}$	$85{,}6\,\text{kJ}$
ΔT	$34\,\text{K}$	0	$46\,\text{K}$
	$c_\text{fest} = \dfrac{\Delta W}{m\Delta T} = 2{,}9\,\dfrac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$	$q_\text{s} = \dfrac{\Delta W}{m} = 148\,\dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}}$	$c_\text{flüssig} = \dfrac{\Delta W}{m\Delta T} = 2{,}1\,\dfrac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$

3. (a) Wenn eine Eislawine zu Tal donnert, wird ein Teil des Eises geschmolzen. Beschreibe in Worten, welche Energieumwandlungen sich dabei abspielen.

   (b) Welchen Höhenunterschied muss eine Eislawine mindestens überwinden, damit das ganze Eis geschmolzen wird?

   (c) Eine Eislawine stürzt über eine $h = 1000\,\text{m}$ hohe Wand hinab. Wieviel Prozent des Eises werden dabei höchstens geschmolzen? Erläutere genau, warum in der Frage das Wort „höchstens“ steht!

   Daten von Wasser:

spez. Wärmekapazität	spez. Schmelzwärme	spez. Verdampfungswärme
$c = 4{,}19\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$	$q_\text{s} = 334\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$	$q_\text{v} = 2257\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

Lösung: (a) Die potentielle Energie des Eises verwandelt sich zunächst in kinetische Energie und dann über Reibung in Verformungsenergie (Zerkleinerung des Eises) und in innere Energie (Schmelzen).

(b) $mgh = q_s m \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{q_s}{g} = \frac{334\,000\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 34\,\mathrm{km}$

(c) $mgh = q_s \Delta m \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta m}{m} = \frac{gh}{q_s} = \frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1000\,\mathrm{m}}{334\,000\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}029 = 2{,}9\,\%$

„Höchstens" deshalb, weil ein Teil der potentiellen Energie zum Erwärmen des Untergrundes und zur Verformung des Eises verwendet wird.

4. Quecksilber (Hg) hat die Schmelztemperatur $T_\mathrm{S} = -38{,}83$ °C. Welche Energie wird benötigt, um $m = 5{,}08\,\mathrm{kg}$ Quecksilber von $T_1 = -194{,}83$ °C auf $T_2 = 294{,}22\,\mathrm{K}$ zu erwärmen?

	spez. Wärmekapazität (fest)	spez. Wärmekapazität (flüssig)	spez. Schmelzwärme
Hg	$c_\text{fest} = 0{,}123\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}}$	$c_\text{flüssig} = 0{,}140\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}}$	$q_s = 11{,}8\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$

Lösung: $T_1 = (-194{,}83 + 273{,}15)\,\mathrm{K} = 78{,}32\,\mathrm{K}$, $T_2 = (294{,}22 - 273{,}15)$ °C $= 21{,}07$ °C

$T_\mathrm{S} = (-38{,}83 + 273{,}15)\,\mathrm{K} = 234{,}32\,\mathrm{K}$

$$W = \underbrace{mc_\text{fest}\overbrace{(T_\mathrm{S} - T_1)}^{156\,\mathrm{K}}}_{97{,}475\,\mathrm{kJ}} + \underbrace{mq_s}_{59{,}944\,\mathrm{kJ}} + \underbrace{mc_\text{flüssig}\overbrace{(T_2 - T_\mathrm{S})}^{59{,}90\,\mathrm{K}}}_{42{,}601\,\mathrm{kJ}} = 200\,\mathrm{kJ}$$

5. Ein Eiswürfel mit Kantenlänge $3cm$, der Temperatur 0^oC und der Dichte $0,917g/cm^3$ wird in Glas mit $0,3l$ Cola der Temperatur 19^oC gegeben.

   (a) Welche Energie nimmt der Eiswürfel auf, bis er zu Wasser von $0,0^oC$ geschmolzen ist.

   (b) Wie weit kühlt die Cola durch die zum Schmelzen des Eises notwendige Energie ab?

   (c) Welche Temperatur erreicht die Cola,wenn sich nach dem Schmelzen des Eiswürfels ein Temperaturgleichgewicht eingestellt hat. Vergleiche diese mit der in (b) berechneten Temperatur.

   Konstanten:
   spezifische Wärmekapazität: $c_{Wasser} = 4,19\frac{kJ}{kg^oC}$
   spezifische Schmelzwärme von Eis: $C_{Eis} = 335\frac{kJ}{kg}$

Lösung: (a) $m_{Eis} = 0,025kg$, $E_{schmelzen} = 8,3kJ$

(b) $m_{Cola} = 300g$, $\Delta\theta = 6,6°C$, $\theta = 12,4°C$

(c) $11,4°C$; die Abkühlung geschieht im wesentlichen durch das Schmelzen des Eises

6. Washalb sollte man nasse Kleidung nicht am Körper trocknen lassen?

Lösung: Beim trocknen der Kleidung wird dem Körper die Verdunstungswärme entzogen.

*Lösung*7.: Heißer Dampf verrichtet Arbeit
   (a) Nenne drei völlig verschiedene Maschinen, in denen heißer Dampf Arbeit verrichtet.
   (b) Erkläre für eine der genannten Maschinen die Funktionsweise genau.

   (a) Ottomotor, Dampfmaschine, Flugzeugtriebwerk

8. **Schwimmbad**

   Im Vilsbiburger Schwimmbad ist einige Tage die Wärmepumpe ausgefallen. Dadurch ist die Wassertemperatur im Schwimmerbecken von $23°C$ auf $18°C$ gesunken. Das Schwimmerbecken ist 50m lang, 25m breit und 2,3m tief.

   (a) Berechne die Masse des Wassers im Schwimmerbecken.
   (b) Berechne die notwendige Energie, das Wasser im Schwimmerbecken wieder auf $23°C$ zu erwärmen.
   (c) Das Wasser wird mit Hilfe von vier Wärmepume erwärmt. Dabei wird elektrische Energie dazu verwendet, dem Wasser der Vils Wärme zu entziehen und diese dann dem Wasser im Becken zuzuführen. Mit einem Joule elektrischer Energie können 5 Joule Wärmeenerige gewonnen werden.
      i. Wie viel elektrische Energie ist nötig, um das Becken zu erwärmen? Wie viele Stunden dauert dies, wenn die Stromstärke $15A$ und die Spannung $4,0kV$ beträgt?
      ii. Die Wärme wird dem Wasser der Vils entzogen, welches dabei um $2°C$ abgekühlt wird. Welche Masse Vilswasser wird abgekühlt?
      iii. Wie verändert sich die notwendige elektrische Energie, wenn der Wirkungsgrad der Wärmepumpe kleiner ist.

Lösung: (a) $2,9 \cdot 10^6 kg$
   (b) $6 \cdot 10^{10} J$
   (c) i. $E_{el} = 1,2 \cdot 10^{10} J$, $t = 14h$
      ii. $7,1 \cdot 10^3 t$
      iii. mehr Energie nötig

9. Am Gletscher des Großglockner strahlt an einem schönen Wintertag pro Quadratmeter in einer Sekunde eine Energie von 600J ein. Dadurch schmilzt der Schnee.

(a) Wie viele Liter Wasser fließen von eine Berghütte mit einer waagrechten Dachfläche von $20m^2$ innerhalb von 4 Stunden ab, wenn man von einer Umgebungstemperatur von $0°C$ ausgeht?

(b) Um den Rückgang der Gletscher zu verlangsamen, werden an vielen Stellen die Schneeflächen mit weißen Planen bedeckt. Erkläre warum man sich dadurch einen positiven Einfluß erhofft.

(c) Welche Energie ist notwendig, um das geschmolzene Wasser vom Dach der Berghütte auf eine Temperatur von $20°C$ zu erwärmen?

Konstanten: $C_{schmelzen} = 334\frac{J}{g}$, $c_W = 4,2\frac{J}{g\cdot°C}$

Lösung: (a) $E = 600\frac{J}{sm^2} \cdot 20m^2 \cdot 4 \cdot 3600s = 172,8MJ = C_{schmelz} \cdot m \Rightarrow m = \frac{E}{C_{schmelz}} = 517kg$ $\Rightarrow 517l$

(b) Schnee absorbiert weniger Energie ⇒ weniger Schnee schmilzt

(c) $E = c_W \cdot m\Delta\theta = 43MJ$

10. **Qualmende Flugzeugreifen**

Beim Landen von Flugzeugen sieht man oft, wie in den ersten Momenten des Aufsetzens Qualm zwischen Reifen und Landebahn entsteht (in Form einer regelrechten Fontäne, gegen die Bewegungsrichtung des Flugzeugs); dazu hört man ein deutliches Reifenquietschen. Erkläre diesen Vorgang. Was er mit einem Kavalierstart zu tun?

Quelle: Prof. Dr. Müller, Zentrum für Lehrerbildung, Campus Landau

Lösung: Die anfangs ruhenden Flugzeugräder müssen beim Aufsetzen erst in Bewegung versetzt werden, deswegen schlittern sie anfangs über die Landebahn, mit entsprechend großem Abrieb (und Reibungswärme), den man als Qualm sieht. Beim Aufsetzen bewegt sich der Untergrund gegen das Flugzeug, und die Reifen ruhen anfänglich; beim Kavalierstart ruht der Untergrund anfänglich gegen das Auto, und die Reifen bewegen sich; in beiden Fällen gibt es eine Relativbewegung von Reifen und Untergrund, mit entsprechenden Begleiterscheinungen durch Reibung (Abrieb, Qualmen, Quietschen).

11. **Auftrieb in Wolken**

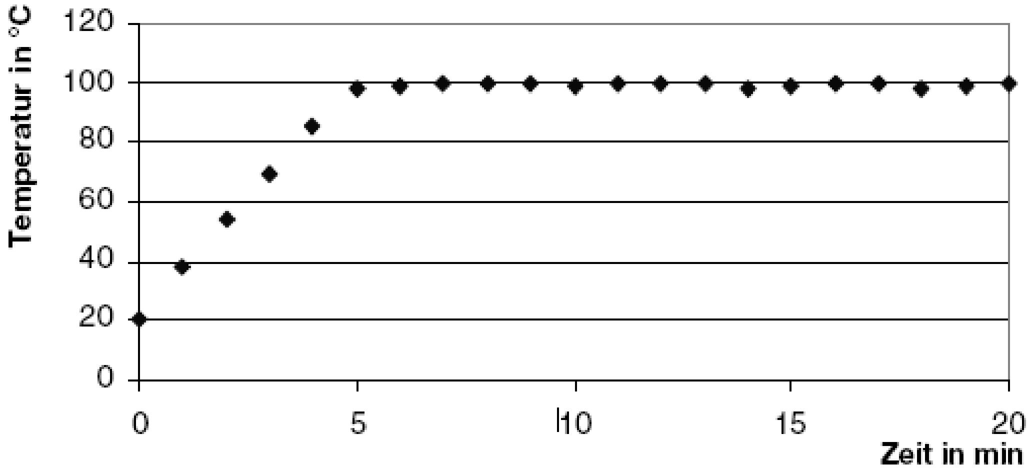
In Wolken kondensiert offensichtlich Wasser zu kleinen Tröpfchen. Ebenso offensichtlich gibt es in Wolken manchmal heftige Aufwinde. Wie hängen die beiden Sachverhalte zusammen?

Quelle: Prof. Dr. Müller, Zentrum für Lehrerbildung, Campus Landau

Lösung: Bei der Entstehung der Wassertröpfchen wird die Kondensationswärme frei. Diese erhöht in der Wolke die Temperatur der Luft, verringert deren Dichte, erhöht ihren Auftrieb und sorgt so für Aufwinde.

12. **Energiebedarf beim Kochen von Kartoffeln**

Kartoffeln werden auf einem Gasherd in einem Topf mit Wasser gekocht. Auf dem Topf liegt ein Deckel. Nachdem die Gasflamme entzündet wurde, wird die Temperatur des Wassers in regelmäßigen Zeitabständen gemessen. Aus den Messwerten ergibt sich folgendes Diagramm:



(a) Beschreibe anhand des Diagramms den Temperaturverlauf des Wassers in Abhängigkeit von der Zeit.

(b) Erläute, wozu die von der Gasflamme zugeführte Energie in den ersten fünf Minuten und den folgenden fünfzehn Minuten verwendet wird.

(c) Begründe, warum es empfehlenswert ist, nach den ersten fünf Minuten die Gasflamme kleiner einzustellen.

(d) Berechne die Energie, die dem Wasser und den Kartoffeln in den ersten fünf Minuten zugeführt wird. Da Kartoffeln im Wesentlichen aus Wasser bestehen, wird angenommen, dass insgesamt 1,5kg Wasser erwärmt werden. Man benötigt 4,19kJ Energie, um 1kg Wasser um 1° zu erwärmen.

(e) Für die Erwärmung der Kartoffeln und des Wassers von 20° auf 100° wurden $0,054m^3$ Erdgas benötigt. Das Erdgas hat einen Heizwert von $39MJ/m^3$. Berechne den Wirkungsgrad für diese Erwärmung.

(f) Die Kartoffeln waren beim Kochen in einem geschlossenen Topf nicht vollständig mit Wasser bedeckt. Nennen Sie Argumente, die dafür sprechen, beim Kochen von Kartoffeln möglichst wenig Wasser zu verwenden.

Quelle: Bildungsstandards im Fach Physik für den Mittleren Schulabschluss, Beschluss vom 16.12.2004

Lösung: (a) Die Temperatur steigt innerhalb der ersten 5 Minuten von 20° auf 100° fast gleichmäßig an. Danach bleibt sie weitgehend konstant auf etwa 100°.

(b) In den ersten fünf Minuten wird die von der Gasflamme zugeführte Energie für die Erwärmung des Wassers und der Kartoffeln verwendet, danach zum Verdampfen des

Wassers. Während der ganzen Zeit wird ein Teil der zugeführten Energie an die Umgebung abgegeben.

(c) Nach fünf Minuten ist nur noch die Energie zuzuführen, die an die Umgebung abgegeben wird bzw. mit dem Wasserdampf entweicht. Entsprechend kann man die Gasflamme kleiner einstellen. Wird in dieser Phase zu viel Gas verbrannt, verdampft unnötig viel Wasser und damit entweicht auch mehr Wasserdampf.

(d) Es wird der Wert für die Energie mit ca. $500kJ$ berechnet.

(e) In den ersten fünf Minuten wurden beim Verbrennen ca. $2100kJ$ Energie an den Kochtopf und die Umgebung abgegeben. Zum Erwärmen des Wassers und der Kartoffeln wurden ca. $500kJ$ genutzt. Für den Wirkungsgrad ergibt sich ein Wert von 24 %.

(f) Wegen der geringeren Wassermenge wird weniger Energie benötigt. Über der Wasseroberfläche bildet sich Wasserdampf, der eine Temperatur von ca. 100° hat. Dieser Wasserdampf fördert das Garen der Kartoffeln ebenso wie das siedende Wasser.

13. Funktionsweise eines Kühlschranks:

Durch ein geschlossenes Rohrsystem wird ein Kühlmittel gepumpt. Als Pumpe dient ein elektrisch betriebener Kompressor. Über dieses System wird dem Innenraum Energie entzogen und er kühlt ab. An der Rückseite des Kühlschranks wird die dem Innenraum entzogene Energie an die Raumluft abgegeben. An einem heißen Tag im Sommer schlägt Dieter vor, die Kühlschranktüre zu öffnen, damit es im Raum kühler wird. Petra meint, es bringe nichts, im Gegenteil, es würde wärmer im Raum.

(a) Es werden verschiedene Argumente vorgebracht. Kreuze die richtigen Argumente an.

- Kalte Luft strömt aus dem Kühlschrank und kühlt den Raum ab.
- Diese Abkühlung der Raumluft setzt sich auf Dauer fort, weil das Kühlschrankaggregat ständig den Innenraum abkühlt.
- An der Rückseite des Kühlschranks wird die Raumluft erwärmt.
- Erwärmung und Abkühlung halten sich die Waage, die Temperatur bleibt auf Dauer konstant.
- Die Erwärmung überwiegt, die Temperatur steigt auf Dauer.
- Die Abkühlung überwiegt, die Temperatur fällt auf Dauer.
- Durch die vom Kompressor abgegebene Energie wird der Raum auf Dauer erwärmt.
- Durch den Kompressor wird der Raum auf Dauer abgekühlt.

(b) Formuliere eine zusammenhängende begründete Aussage zu der Frage, wie sich die Temperatur in der Küche insgesamt verändert, wenn der Kühlschrank über einen längeren Zeitraum bei offener Tür betrieben wird.

Lösung: (a) richtige Argumente sind:

- Kalte Luft strömt aus dem Kühlschrank und kühlt den Raum ab.
- An der Rückseite des Kühlschranks wird die Raumluft erwärmt.
- Die Erwärmung überwiegt, die Temperatur steigt auf Dauer.
- Durch die vom Kompressor abgegebene Energie wird der Raum auf Dauer erwärmt.

(b) Die Luft vor dem geöffneten Kühlschrank wird zwar abgekühlt und die Luft an der Rückseite erwärmt, dies würde sich jedoch auf Dauer ausgleichen. Die Erwärmung des Raumes resultiert aus der zugeführten elektrischen Energie

14. Abschätzung der Energiekosten für den Warmbadetag im Erlebnisbad in Mittenwald

(a) Das Schwimmbecken hat im Seitenriss betrachtet die Form eines Trapezes, dessen beiden parallele Seiten die Längen 1,0 m (seichteste Stelle) und 2,0 m (tiefste Stelle) haben.

Außerdem hat das Becken eine Länge von 25 m und eine Breite von 12 m.

Berechne Volumen und Masse des Wassers im Becken (die Dichte von Wasser beträgt $\varrho = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$).

(b) Wie hoch sind die Energiekosten für den Warmbadetag, wenn dazu das Wasser von 28°C auf 30°C erwämt werden muss und mit Energiekosten von $0{,}060\,\frac{€}{\mathrm{kWh}}$ für Großabnehmer gerechnet wird?

Lösung: (a) $4{,}5 \cdot 10^2\,\mathrm{m^3}$; $4{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{kg}$

(b) 60 €

15. Die Strahlungsleistung pro Fläche die auf die Erdatmosphäre trifft wird mit der sogenannten Solarkonstanten $\sigma = 1{,}2 \cdot 10^3\,\mathrm{Wm^{-2}}$ angegeben.

Durch Verluste beim Durchgang durch die Atmosphäre steht allerdings nur der Anteil $\tilde{\sigma} = 0{,}70 \cdot 10^3\,\mathrm{Wm^{-2}}$ an der Erdoberfläche zur Verfügung.

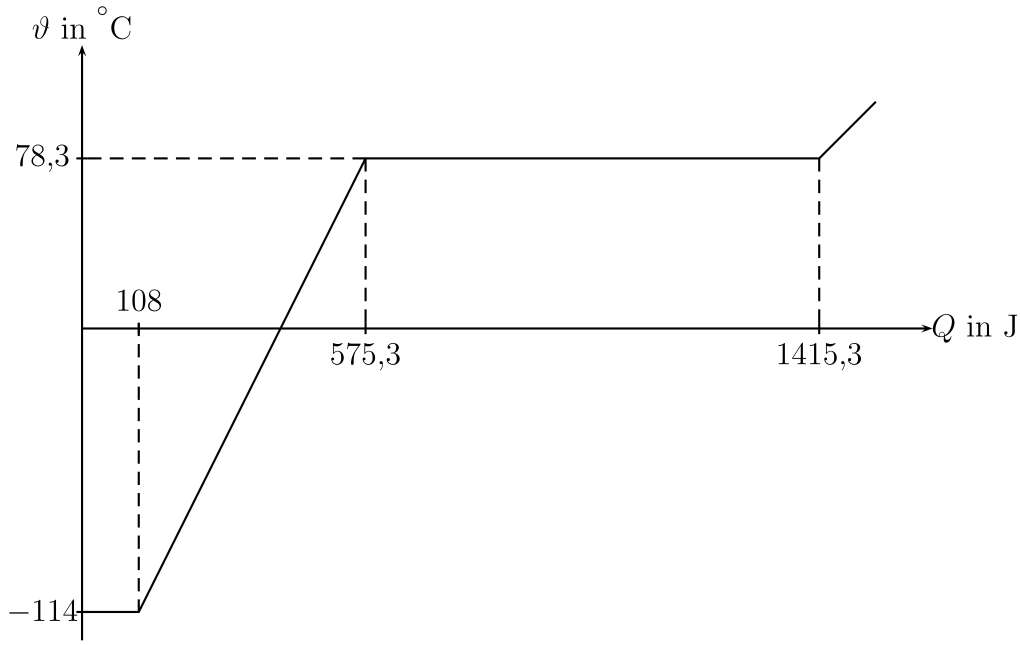
Berechne die Amortisationszeit einer photovoltaischen Anlage, wenn folgenden Annahmen gemacht werden:

- Anschaffungskosten: 3000 €
- Wirkungsgrad der Anlage: $\eta = 0{,}10$
- Flächeninhalt der Anlage: $5{,}0\,\mathrm{m^2}$
- Jährliche Sonnenscheindauer: $1{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{h}$
- Kosten für 1,0 kWh Energie: 30 Cent

Lösung: $1{,}2 \cdot 10^3\mathrm{d}$

16. „Phasenübergänge von Ethanol“

Das untenstehende Diagramm zeigt den Verlauf der Temperatur ϑ von 1,0 g Ethanol bei fortgesetzter Zufuhr der Wärmeenergie Q. Bei $Q = 0$ beginnt das als Festkörper vorliegende Ethanol gerade in den flüssigen Aggregatszustand überzugehen.



Deute den Verlauf der Kurve aus physikalischer Sicht und ermittle aus dem Diagramm die Schmelztemperatur von festem Ethanol, sowie die spezifische Wärmekapazität und die spezifische Verdampfungsenergie von flüssigem Ethanol.

$0 < Q < 216\,\text{J}$ ____________________

____

$216\,\text{J} < Q < 1\,150{,}6\,\text{J}$ ____________________

____

$1\,150{,}6\,\text{J} < Q < 2\,830{,}6\,\text{J}$ ____________________

____

$2\,830{,}6\,\text{J} < Q$ ____________________

____

Schmelztemperatur: ____________________

Spezifische Verdampfungsenergie: ____________________

Spezifische Wärmekapazität: ____________________

____

Lösung: Deutung des Verlaufs der Kurve:

$0 < Q < 108\,\mathrm{J}$	Das Ethanol schmilzt, wobei seine Temperatur stets $-114°$ C beträgt.
$108\,\mathrm{J} < Q < 575{,}3\,\mathrm{J}$	Das flüssige Ethanol erwärmt sich von $-114°$ C auf 78,3° C.
$575{,}3\,\mathrm{J} < Q < 1415{,}3\,\mathrm{J}$	Das flüssige Ethanol verdampft, wobei seine Temperatur stets 78,3° C beträgt.
$1415{,}3\,\mathrm{J} < Q$	Das gasförmige Ehanol erwärmt sich.

Schmelztemperatur: $-114°$ C.

Spezifische Verdampfungsenergie: $r = \dfrac{1415{,}3\,\mathrm{J} - 575{,}3\,\mathrm{J}}{1{,}0\,\mathrm{g}} = 840{,}0\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}}$.

Spezifische Wärmekapazität: $\dfrac{575{,}3\,\mathrm{J} - 108\,\mathrm{J}}{1{,}0\,\mathrm{g} \cdot (78{,}3°\,\mathrm{C} - (114°\,\mathrm{C}))} = 2{,}430057202\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}\cdot\mathrm{K}} = 2{,}4\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}\cdot\mathrm{K}}$

17. Geschmolzenes Blei der Masse $m_{\mathrm{Pb}} = 80{,}0\,\mathrm{g}$, dessen Temperatur gleich der Schmelztemperatur $T_{\mathrm{s}} = 327\,°\mathrm{C}$ des Bleis ist, wird in einen Becher mit $m_{\mathrm{W}} = 100\,\mathrm{g}$ Wasser der Temperatur $T_{\mathrm{W}} = 20{,}0\,°\mathrm{C}$ gegossen. Nach kurzer Zeit haben das jetzt feste Blei und das Wasser die gleiche Temperatur $T = 31{,}7\,°\mathrm{C}$ angenommen.
    (a) Berechne die Erhöhung ΔW_{W} der inneren Energie des Wassers.
    (b) Welchen Energiebetrag ΔW_{Pb1} gibt das *feste* Blei beim Abkühlen an das Wasser ab?
    (c) Welchen Energiebetrag ΔW_{Pb2} gibt das Blei somit während des Erstarrens an das Wasser ab? Berechne die spezifische Schmelzwärme q_{s} von Blei.

Stoff	spez. Wärmekapazität in $\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}}$	spez. Schmelzwärme in $\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$	spez. Verdampfungswärme in $\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$
Wasser	4,19	334	2257
Blei	0,130	?	8600

Lösung: (a) $\Delta W_{\mathrm{W}} = m_{\mathrm{W}} c_{\mathrm{W}} (T - T_{\mathrm{W}}) = 0{,}1\,\mathrm{kg} \cdot 4{,}19\,\dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} \cdot 11{,}7\,\mathrm{K} = 4{,}90\,\mathrm{kJ}$

(b) $\Delta W_{\mathrm{Pb1}} = m_{\mathrm{Pb}} c_{\mathrm{Pb}} (T_{\mathrm{s}} - T) = 0{,}08\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}13\,\dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} \cdot 295{,}3\,\mathrm{K} = 3{,}07\,\mathrm{kJ}$

(c) Die vom Blei abgegebene Energie ist gleich der vom Wasser aufgenommenen Energie:

$$\Delta W_{\mathrm{Pb1}} + \Delta W_{\mathrm{Pb2}} = \Delta W_{\mathrm{W}} \quad \Longrightarrow \quad \Delta W_{\mathrm{Pb2}} = 1{,}83\,\mathrm{kJ}$$

$$W_{\mathrm{Pb2}} = m_{\mathrm{Pb}} q_{\mathrm{s}} \quad \Longrightarrow \quad q_{\mathrm{s}} = \frac{W_{\mathrm{Pb2}}}{m_{\mathrm{Pb}}} = \frac{1{,}83\,\mathrm{kJ}}{0{,}08\,\mathrm{kg}} = 22{,}9\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$$

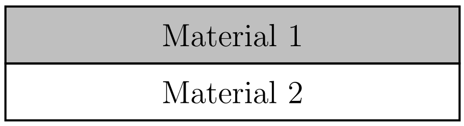
3 Längen- und Volumenänderung

1. Erkläre wie Frostschäden auf Straßen (vor allem) im Gebirge zustande kommen.

Lösung: In der Straße befinden sich winzige Risse. In diesen sammelt sich Wasser. Dieses gefriert und dehnt sich dabei aus. Dadurch wird der Riss größer. Das Wasser schmilzt wieder und der Vorgang kann erneut ablaufen.

2. Ein Bimetallstreifen besteht bekanntlich aus zwei dünnen Metallstreifen unterschiedlichen Materials, die bei einer Temperatur von 20°C gleiche Länge haben und aufeinander genietet sind.

   Der nebenstehend abgebildete Bimetallstreifen wird stark erhitzt und biegt sich nach unten durch. Aus welchen Materialien kann der Bimetallstreifen bestehen, wenn die folgenden Längenausdehnungskoeffizienten α bekannt sind?



Material	α in 10^{-6}/K
Kupfer	16,8
Nickel	12,8
Wolfram	4,3
Zink	27

Lösung: Wenn sich der Streifen nach unten durchbiegt, muss das Material 1 einen größeren Längenausdehnungskoeffizienten haben als das Material 2. Somit sind folgenden Kombinationen denkbar:

Material 1	Material 2
Zink	Kupfer
Zink	Nickel
Zink	Wolfram
Kupfer	Nickel
Kupfer	Wolfram
Nickel	Wolfram

3. In den meisten Thermometern wird als Thermometerflüssigkeit Quecksilber oder Alkohol verwendet.
   (a) Wie würdest Du vorgehen, um eine mit Alkohol gefüllte Glasröhre mit Vorratsgefäß zu einem Thermometer zu eichen?
   (b) Warum ist es nicht sinnvoll, Wasser als Thermometerflüssigkeit zu verwenden?

Lösung: (a) für verschiedene Temperaturen die Steighöhe im Rohr markieren und Temperatur messen; dazwischen linear interpolieren

(b) Schmelz- und Siedetemperatur von Wasser schränken den Messbereich ein; bei Quecksilber liegen Schmelz- und Siedetemperatur ($-39°C$ bzw. $357°C$) weiter auseinander

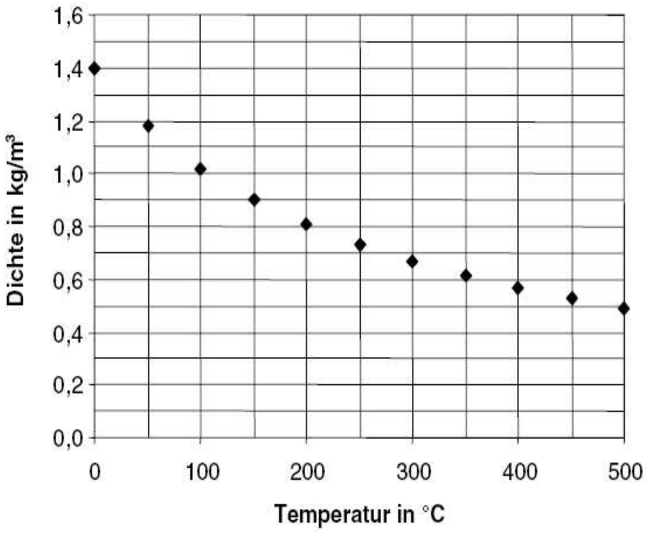
4. Ein Heißluftballon hat ein Volumen von $2700m^3$.
   (a) Die Luft im Ballon wird von 0^oC auf 36^oC erwärmt. Wie viel Luft entweicht dabei aus dem Heißluftballon?
   (b) Ein Ballon schwebt, wenn seine Dichte genausogroß ist, wie die der ihn umgebende Luft. Wie groß darf die Masse des Heißluftballons (Ballonfahrer, Korb, Hülle) sein, wenn der Ballon gerade noch abheben soll.
   Dichte von Luft (0^oC, $0m$ ü.N.N): $1\frac{g}{l}$

Lösung: (a) Annahme: gleicher Druck; $V_2 = V_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 2700m^3 \cdot \frac{309K}{273K} = 3056m^3$; $\Delta V = 356m^3$ entweicht aus dem Ballon.

(b) Annahme: Volumen von Ballonfahrer und Korb kann man vernachlässigen
$\rho_L = 1\frac{g}{l} = \frac{m}{3056 \cdot 1000l} \Rightarrow 3056kg$

5. Fahrten mit Heißluftballons werden immer beliebter. Mit einem Gasbrenner wird die Luft im Inneren des Ballons erhitzt. Das Diagramm zeigt den Zusammenhang zwischen der Dichte und der Temperatur der Luft bei konstantem Druck.

Quelle: www.jj-pr.de/
u-publikationen.htm



Quelle: Kommission

(a) Erkläre die Lage der Messpunkte im Diagramm mit der Bewegung der Teilchen.

(b) Warum schwebt der Heißluftballon? Begründe die Antwort mithilfe des Diagramms.

(c) Der abgebildete Heißluftballon hat ein Volumen von $1600 m^3$. Die Luft im Inneren des Ballons hat eine Temperatur von $100°$. Die Luft, in der der Ballon schwebt, hat eine Temperatur von $0°$. Hülle, Korb und weitere Ausrüstungen wiegen zusammen etwa 340 kg.

- Welche Masse hat die Luft im Inneren?
- Welche Masse hat die vom Ballon verdrängte Außenluft von $0°$?
- Können 5 Personen von je 75 kg gleichzeitig mit dem Ballon fahren?

Lösung: (a) Jede Temperaturerhöhung führt zu einer Zunahme der mittleren Geschwindigkeit der Gasteilchen und somit zu einer Vergrößerung des mittleren Abstandes zwischen ihnen. Dadurch nimmt die Dichte ab.

(b) Die Luft im Ballon hat durch ihre höhere Temperatur eine kleinere Dichte als die Luft, die den Ballon umgibt. Der Ballon schwebt, wenn er genauso schwer ist wie die von ihm verdrängte Luft. Deshalb muss aus seinem Inneren durch die Erwärmung so viel Luft verdrängt werden, bis die Masse dieser Luft der von Hülle, Korb und Beladung des Heißluftballons entspricht.

(c) Aus dem Diagramm wird die Dichte der Luft entnommen. Es wird die Masse der Luft bei $0°$ (etwa $2240 kg$) und bei $100°$ (etwa $1600 kg$) berechnet. Die Differenz aus den beiden Massen ist die Gesamtmasse aus Hülle, Korb und Beladung (etwa $640 kg$). Demzufolge können maximal 4 Personen zu je $75 kg$ mitfahren.

6. Ein Luftballon ist mit Helium der Temperatur $T_1 = 289\,\mathrm{K}$ gefüllt, sein Volumen ist $V_1 = 2975\,\mathrm{cm}^3$ und das Gas steht unter dem Druck $p_1 = 992\,\mathrm{hPa}$. In der prallen Sonne

erwärmt sich das Gas um $\Delta T = 17\,\mathrm{K}$ und das Volumen des Ballons vergrößert sich auf $V_2 = 3{,}10\,\mathrm{dm}^3$. Unter welchem Druck p_2 steht das Gas jetzt? Wie ist es möglich, dass p_2 größer als der äußere Luftdruck ist?

Lösung: $$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad \Longrightarrow \quad p_2 = \frac{992\,\mathrm{hPa}\cdot 2975\,\mathrm{cm}^3 \cdot 306\,\mathrm{K}}{289\,\mathrm{K}\cdot 3100\,\mathrm{cm}^3} = 1008\,\mathrm{hPa} \approx 1{,}01\cdot 10^3\,\mathrm{hPa}$$

Der Gasdruck ist größer als der Luftdruck, weil die Spannung der gedehnten Ballonhülle eine zusätzliche Kraft und damit einen zusätzlichen Druck auf das Gas im Ballon ausübt.

7. **Ein Modell zur Erklärung der Anomalie des Wassers**

Da sich Wassermoleküle auf Grund ihrer Bauweise und ihrer Ladungsverteilung auf verschiedene Arten zu größeren Gebilden vereinigen können, gibt es nicht nur verschiedene Sorten von Eis, sondern nach neuesten Forschungsergebnissen auch zwei Formen des flüssigen Wassers, eine mit größerer und eine mit kleinerer Dichte. Die Wasserform mit der kleineren Dichte (LD für Low Density) kann man sich vereinfacht wie ganz winzige Eiskristalle vorstellen, die in der dichteren Form (HD für High Density) schwimmen. Der Anteil des LD-Wassers nimmt mit steigender Temperatur T ständig ab und verschwindet bei ca. 30 °C ganz.

Ein einfaches Wassermodell, gültig für $T_0 = 0\,°\mathrm{C}$ bis $T_1 = 30\,°\mathrm{C}$			
	Dichte bei 0 °C	Volumenausdehnungszahl	Bruchteil der Gesamtmasse
LD	$\varrho_{\mathrm{L0}} = 0{,}9809\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$	$\gamma_\mathrm{L} = 0$	$\beta(T) = 2{,}123\cdot 10^{-4}\left(\frac{T}{°\mathrm{C}} - 30\right)^2$
HD	$\varrho_{\mathrm{H0}} = 1{,}00441\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$	$\gamma_\mathrm{H} = 0{,}0002934\,\frac{1}{°\mathrm{C}}$	$1 - \beta(T)$

Ist m die Gesamtmasse des Wassers, dann sind die Massen der beiden Wasserarten bei der Temperatur T

$$m_\mathrm{L} = \beta(T)\cdot m \quad \text{und} \quad m_\mathrm{H} = m - m_\mathrm{L} = (1-\beta(T))\cdot m$$

Der Wasserteil mit der geringeren Dichte (also mit dem größeren Volumen pro Masse) wird mit steigender Temperatur weniger, wodurch das Gesamtvolumen sinkt. Andererseits dehnt sich das HD-Wasser mit steigender Temperatur aus, wodurch das Gesamtvolumen steigt. Beide Effekte zusammen ergeben die Anomalie des Wassers.

(a) Erstelle eine Wertetabelle für $\beta(T)$ $\left(\frac{T}{°\mathrm{C}} \in \{0, 10, 15, 20, 25, 30\}\right)$ und zeichne den Grafen von β in geeignet gewählten Einheiten. Wieviel Prozent der gesamten Masse des Wassers bestehen bei 0 °C aus LD- bzw. HD-Wasser?

(b) Beweise für das Volumen des Wassers der Gesamtmasse m im Intervall $[0, T_1]$:

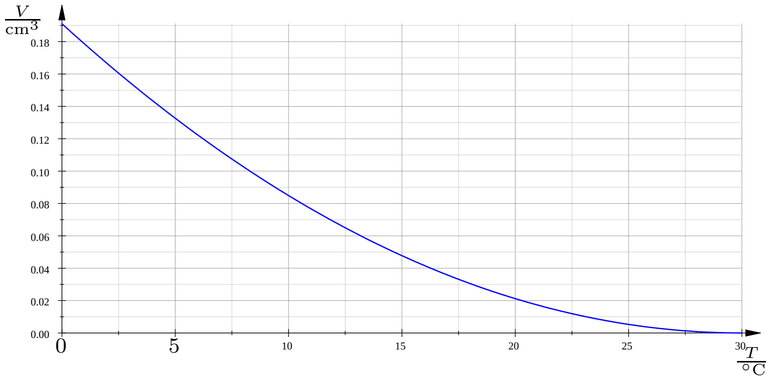
$$V(T) = V_\mathrm{L} + V_\mathrm{H} = m\left(\frac{\beta(T)}{\varrho_{\mathrm{L0}}} + \frac{(1-\beta(T))(1+\gamma T)}{\varrho_{\mathrm{H0}}}\right)$$

Erstelle eine Wertetabelle für $V(T)$ mit $m = 1\,\mathrm{kg}$ für alle ganzzahligen Temperaturen im Intervall $[0\,°\mathrm{C}, 8\,°\mathrm{C}]$ und zeichne den Grafen von $V(T)$ (V-Achse von $1000{,}0\,\mathrm{cm}^3$ bis $1000{,}2\,\mathrm{cm}^3$; $0{,}2\,\mathrm{cm}^3 \mathrel{\widehat{=}} 5\,\mathrm{cm}$).

Lösung: (a)

$\frac{T}{°\mathrm{C}}$	0	5	10	15	20	25	30
β	0,1911	0,1327	0,0849	0,0478	0,0212	0,0053	0

Bei $0\,°\mathrm{C}$ besteht Wasser aus $\beta(0\,°\mathrm{C}) = 19{,}11\%$ LD-Wasser und aus $80{,}89\%$ HD-Wasser.



(b) Da die Volumenausdehnungszahl $\gamma_\mathrm{L} = 0$ ist, ist die Dichte des LD-Wassers konstant

$$\varrho_\mathrm{L} = \varrho_\mathrm{L0}.$$

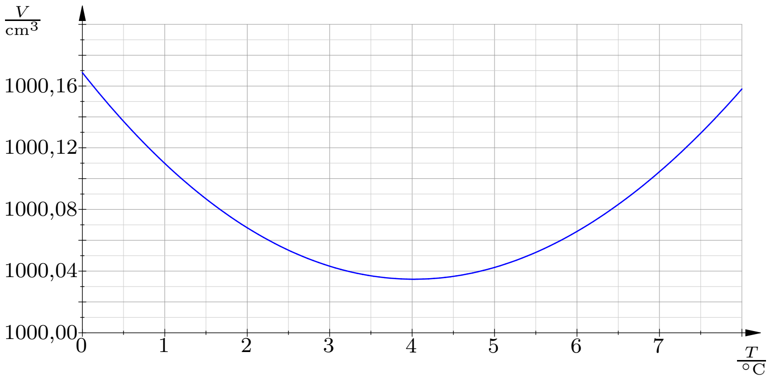
Für die Dichte des HD-Wassers gilt

$$\varrho_\mathrm{H}(T) = \frac{\varrho_\mathrm{H0}}{1 + \gamma_\mathrm{H} T}$$

$$\begin{aligned} V(T) = V_\mathrm{L} + V_\mathrm{H} &= \frac{m_\mathrm{L}}{\varrho_\mathrm{L}} + \frac{m_\mathrm{H}}{\varrho_\mathrm{H}} = \frac{m_\mathrm{L}}{\varrho_\mathrm{L0}} + \frac{m_\mathrm{H}(1 + \gamma_\mathrm{H} T)}{\varrho_\mathrm{H0}} = \\ &= \frac{\beta(T) m}{\varrho_\mathrm{L0}} + \frac{m(1 - \beta(T))(1 + \gamma_\mathrm{H} T)}{\varrho_\mathrm{H0}} = \\ &= m \left(\frac{\beta(T)}{\varrho_\mathrm{L0}} + \frac{(1 - \beta(T))(1 + \gamma_\mathrm{H} T)}{\varrho_\mathrm{H0}} \right) \end{aligned}$$

$\frac{T}{°\mathrm{C}}$	0	1	2	3	4
$\frac{V}{\mathrm{cm}^3}$	1,000169	1,000110	1,000068	1,000043	1,000035

$\frac{T}{°\mathrm{C}}$	5	6	7	8
$\frac{V}{\mathrm{cm}^3}$	1,000042	1,000066	1,000104	1,000158



$\frac{V}{cm^3}$
1000,16
1000,12
1000,08
1000,04
1000,00
0
1
2
3
4
5
6
7
$\frac{T}{°C}$

4 Kinetische Gastheorie

1. Ein Gefäß mit dem Volumen $V = 1{,}00\,\mathrm{m}^3$ enthält reinen Stichstoff (N_2) der Temperatur $T = 24{,}0\,^\circ\mathrm{C}$, der Gasdruck beträgt $p = 990\,\mathrm{hPa}$.

   (a) Berechne die Zahl N der Gasmoleküle.

   (b) Berechne die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ der Stickstoffmoleküle.

   (c) Wie groß sind die molare (c_{Vm}) und die spezifische (c_{V}) Wärmekapazität von Stickstoff bei „mittleren" Temperaturen?

   (d) Für die Zahl $\mathrm{d}N$ der Moleküle (Masse M) mit einer Geschwindigkeit aus dem Intervall $[v, v + \mathrm{d}v]$ gilt nach Maxwell

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}v} = \sigma(v) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}v_{\mathrm{m}}^3} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{v^2}{v_{\mathrm{m}}^2}} \qquad \text{mit} \qquad v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2kT}{M}}$$

   Berechne $\sigma(v)$ für $v \in \{200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, v_{\mathrm{m}}, \langle v \rangle, 800\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, 900\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, 1100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\}$ und zeichne den Grafen von $\sigma(v)$. Schätze in nachvollziehbarer Weise die Zahl ΔN der Moleküle ab, deren Geschwindigkeit im Intervall $[800\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, 900\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$ liegt.

Lösung: (a) $N = \dfrac{pV}{kT} = \dfrac{99000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 1\,\mathrm{m}^3}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \cdot 297{,}15\,\mathrm{K}} = 2{,}41 \cdot 10^{25}$

(b) $\dfrac{3}{2}kT = \dfrac{M}{2}\langle v^2 \rangle \quad \text{und} \quad M = 28u \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\dfrac{3kT}{M}} = 515\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \Longrightarrow$

$\langle v \rangle = 0{,}92\sqrt{\langle v^2 \rangle} = 473\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

(c) $c_{\mathrm{Vm}} = \dfrac{\Delta W}{n\Delta T} = \dfrac{\frac{5}{2}Nk\Delta T}{n\Delta T} = \dfrac{5Nk}{2n} = \dfrac{5nN_{\mathrm{A}}k}{2n} = \dfrac{5N_{\mathrm{A}}k}{2} = \dfrac{5}{2}R = 2{,}08 \cdot 10^4\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{K} \cdot \mathrm{kmol}}$

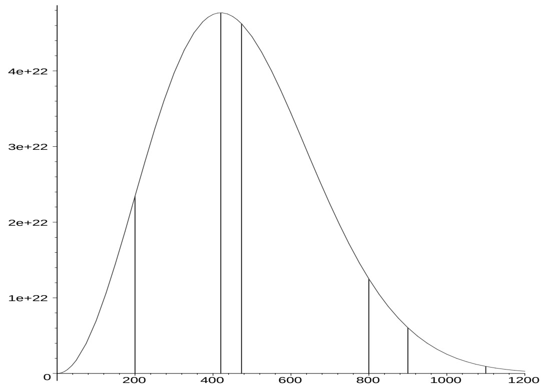
$c_{\mathrm{V}} = \dfrac{\Delta W}{m\,\Delta T} = \dfrac{\frac{5}{2}Nk\Delta T}{N \cdot 28u \cdot \Delta T} = \dfrac{5k}{56u} = 0{,}742\,\dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}}$

oder: 1 kmol unseres Gases hat die Masse 28 kg $\Longrightarrow \quad c_{\mathrm{V}} = \dfrac{c_{\mathrm{Vm}}}{28\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}}} = 0{,}742\,\dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}}$

(d) $v_{\mathrm{m}} = 420\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad \dfrac{4N}{\sqrt{\pi}v_{\mathrm{m}}^3} = 7{,}346 \cdot 10^{17}\,\dfrac{\mathrm{s}^3}{\mathrm{m}^3},$

v in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	200	420	473	800	900	1100
σ in $10^{20}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}$	234	477	462	125	60	9

$$\Delta N \approx \frac{\sigma\left(800\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + \sigma\left(900\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{2} \cdot 100\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$= 9{,}28 \cdot 10^{23}$$
$$\Delta N \approx \sigma\left(850\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot 100\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 8{,}85 \cdot 10^{23}$$
$$\Delta N = \int\limits_{800\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}^{900\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} \sigma(v)\,\text{d}v = 8{,}99 \cdot 10^{23}$$



2. Ein Gefäß mit dem Volumen $V = 1{,}00\,\text{m}^3$ enthält reinen Stichstoff (N_2) der Temperatur $T = 24{,}0\,°\text{C}$, der Gasdruck beträgt $p = 990\,\text{hPa}$.

   (a) Berechne die Zahl N der Gasmoleküle.

   (b) Berechne die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ der Stickstoffmoleküle.

   (c) Wie groß sind die molare ($c_{\text{Vm}} = \frac{\Delta W}{n\Delta T}$) und die spezifische ($c_{\text{V}} = \frac{\Delta W}{m\Delta T}$) Wärmekapazität von Stickstoff bei „mittleren“ Temperaturen?

   (d) Für die Zahl $\text{d}N$ der Moleküle (Masse M) mit einer Geschwindigkeit aus dem Intervall $[v, v + \text{d}v]$ gilt nach Maxwell

$$\frac{\text{d}N}{\text{d}v} = \sigma(v) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}v_{\text{m}}^3} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{v^2}{v_{\text{m}}^2}} \qquad \text{mit} \qquad v_{\text{m}} = \sqrt{\frac{2kT}{M}}$$

   Berechne $\sigma(v)$ für $v \in \left\{200\,\frac{\text{m}}{\text{s}}, v_{\text{m}}, \langle v \rangle, 800\,\frac{\text{m}}{\text{s}}, 900\,\frac{\text{m}}{\text{s}}, 1100\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right\}$ und zeichne den Grafen von $\sigma(v)$. Schätze in nachvollziehbarer Weise die Zahl ΔN der Moleküle ab, deren Geschwindigkeit im Intervall $\left[800\,\frac{\text{m}}{\text{s}}, 900\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ liegt. Wie groß ist der relative Fehler deiner Schätzung, wenn der genaue Wert $\Delta N = 8{,}99 \cdot 10^{23}$ ist?

Lösung: (a) $N = \dfrac{pV}{kT} = \dfrac{99000\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 1\,\text{m}^3}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 297{,}15\,\text{K}} = 2{,}41 \cdot 10^{25}$

(b) $\dfrac{3}{2}kT = \dfrac{M}{2}\left\langle v^2 \right\rangle \quad \text{und} \quad M = 28u \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\dfrac{3kT}{M}} = 515\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \quad \Longrightarrow$

$\langle v \rangle = 0{,}92\sqrt{\langle v^2 \rangle} = 473\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

(c) $c_{\text{Vm}} = \dfrac{\Delta W}{n\Delta T} = \dfrac{\frac{5}{2}Nk\Delta T}{n\Delta T} = \dfrac{5Nk}{2n} = \dfrac{5nN_{\text{A}}k}{2n} = \dfrac{5N_{\text{A}}k}{2} = \dfrac{5}{2}R = 2{,}08 \cdot 10^4\,\dfrac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kmol}}$

$c_{\text{V}} = \dfrac{\Delta W}{m\,\Delta T} = \dfrac{\frac{5}{2}Nk\Delta T}{N \cdot 28u \cdot \Delta T} = \dfrac{5k}{56u} = 0{,}742\,\dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}\,\text{K}}$

oder: 1 kmol unseres Gases hat die Masse 28 kg $\Longrightarrow \quad c_{\text{V}} = \dfrac{c_{\text{Vm}}}{28\,\frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = 0{,}742\,\dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}\,\text{K}}$

(d) $v_{\mathrm{m}} = 420\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\dfrac{4N}{\sqrt{\pi}v_{\mathrm{m}}^3} = 7{,}346{\cdot}10^{17}\,\dfrac{\mathrm{s}^3}{\mathrm{m}^3}$,

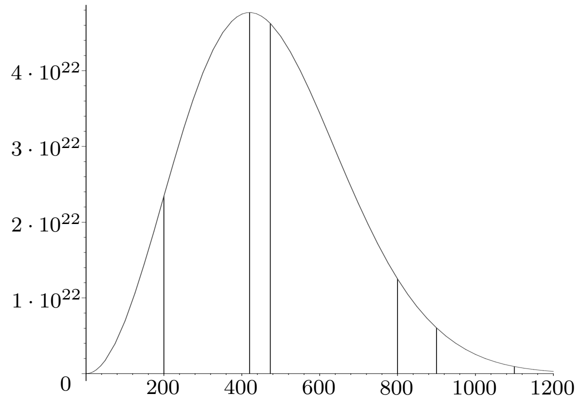
v in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	200	420	473	800	900	1100
σ in $10^{20}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}$	234	477	462	125	60	9

$$\Delta N \approx \frac{\sigma\left(800\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) + \sigma\left(900\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{2} \cdot 100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 9{,}28 \cdot 10^{23}$$

$$\Delta N \approx \sigma\left(850\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \cdot 100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 8{,}85 \cdot 10^{23}$$

$$\Delta N = \int\limits_{800\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}^{900\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \sigma(v)\,\mathrm{d}v = 8{,}99 \cdot 10^{23}$$

$$\delta_{\mathrm{rel}} = \frac{8{,}85 - 8{,}99}{8{,}99} = -1{,}59\%$$



3. Um ein Wasserstoffatom zu ionisieren, ist die Energie $W_{\mathrm{ion}} = 13{,}6\,\mathrm{eV}$ (Ionisierungsenergie) nötig.
   (a) Welche Geschwindigkeit v_0 muss ein H-Atom besitzen, damit seine kinetische Energie gleich W_{ion} ist? Bei welcher Temperatur T_0 wäre die mittlere kinetische Energie der H-Atome in atomarem Wasserstoff gleich der Ionisierungsenergie?
   (b) Um welchen Faktor unterscheidet sich die gesamte Wärmeenergie W_{a} von atomarem Wasserstoff von der gesamten Wärmeenergie W_{m} von molekularem Wasserstoff (H_2) der gleichen Masse und der gleichen *sehr hohen* Temperatur? Warum ist eine direkte experimentelle Überprüfung des berechneten Wertes nicht möglich?
   (c) Für die Zahl $\mathrm{d}N$ der Atome (Masse M) mit einer Geschwindigkeit aus dem Intervall $[v, v + \mathrm{d}v]$ gilt nach Maxwell

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}v} = \sigma(v) = N \cdot w(v) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}v_{\mathrm{m}}^3} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{v^2}{v_{\mathrm{m}}^2}} \qquad \text{mit} \qquad v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2kT}{M}}$$

   Wie groß ist ungefähr die Wahrscheinlichkeit, ein Gasteilchen im Geschwindigkeitsintervall $[0{,}99v_{\mathrm{m}}, 1{,}01v_{\mathrm{m}}]$ zu finden?
   (d) Wir betrachten jetzt das frühe Universum zur Zeit der sogenannten *Rekombinationsphase* (ca. 370 000 a nach dem Urknall). In dieser Zeit gehen die H-Atome vom ionisierten in den neutralen Zustand über. Wir nehmen vereinfacht an, dass das Universum nur aus atomarem Wasserstoff der Temperatur $T = 3{,}00 \cdot 10^3\,\mathrm{K}$ und der Dichte $\varrho = 1{,}3 \cdot 10^{-17}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ besteht.
      i. Welcher Druck p herrscht in unserem frühen Universum?
      ii. Berechne v_{m} und die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ der H-Atome. Berechne w für $0{,}5\,v_{\mathrm{m}}$, v_{m}, $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$, $2v_{\mathrm{m}}$ und $3v_{\mathrm{m}}$ und skizziere damit den Verlauf von $w(v)$.

iii. Schätze in nachvollziehbarer Weise die Zahl ΔN der Atome in einem Würfel mit der Kantenlänge 10 km ab, deren Geschwindigkeit größer als v_0 ist (wie viele Atome dann tatsächlich ionisiert sind, ist eine kompliziertere Angelegenheit). Zeichne dazu $w(v)$ im Intervall $[v_0, 1{,}04v_0]$ und trage alle der Verständlichkeit zuträglichen Hilfslinien und Beschriftungen ein. Wie lässt sich das Ergebnis physikalisch interpretieren?

Lösung: (a) $\frac{M}{2} v_0^2 = W_{\text{ion}} \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2W_{\text{ion}}}{M}} = 5{,}104 \cdot 10^4 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\frac{3}{2} kT_0 = W_{\text{ion}} \quad \Longrightarrow \quad T_0 = \frac{2W_{\text{ion}}}{3k} = \frac{2 \cdot 2{,}18 \cdot 10^{-18}\,\text{J}}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}}} = 1{,}05 \cdot 10^5\,\text{K}$$

(b) Bei H_2 sind bei sehr hohen Temperaturen Rotationen und Schwingungen angeregt, d.h. (N ist die Zahl der H-Atome)

$$W_{\text{a}} = N \cdot \frac{3}{2} kT \text{ und } W_{\text{m}} = \frac{N}{2} \cdot \frac{7}{2} kT \quad \Longrightarrow \quad \frac{W_{\text{a}}}{W_{\text{m}}} = \frac{3 \cdot 4NkT}{7 \cdot 2NkT} = \frac{6}{7}$$

Bei gegebenem T kann das Gas nicht einmal atomar und einmal molekular vorliegen.

(c) $$P = \frac{\Delta N}{N} = \int\limits_{0{,}99v_{\text{m}}}^{1{,}01v_{\text{m}}} \frac{4}{\sqrt{\pi} v_{\text{m}}^3} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{v^2}{v_{\text{m}}^2}} \,\mathrm{d}v \approx \frac{4}{\sqrt{\pi} v_{\text{m}}^3} \cdot v_{\text{m}}^2 \cdot e^{-1} \cdot 0{,}02 v_{\text{m}} = \frac{0{,}08}{e\sqrt{\pi}} = 1{,}66\%$$

(d) i. $V = \frac{NM}{\varrho} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{NkT}{V} = \frac{NkT\varrho}{NM} = \frac{kT\varrho}{M} = 3{,}2 \cdot 10^{-10}\,\text{Pa}$

ii. $v_{\text{m}} = \sqrt{\frac{2kT}{M}} = 7{,}04 \cdot 10^3 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{M}} = 8{,}62 \cdot 10^3 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\langle v \rangle = 0{,}92 \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 7{,}94 \cdot 10^3 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$

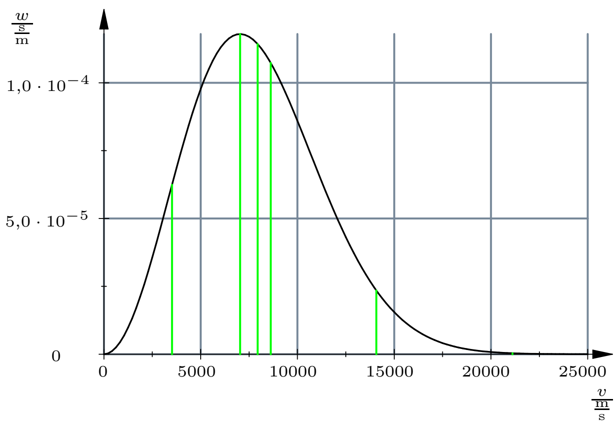
$w\left(\frac{v_{\text{m}}}{2}\right) = 6{,}24 \cdot 10^{-5} \, \frac{\text{s}}{\text{m}}$

$w(v_{\text{m}}) = 1{,}18 \cdot 10^{-4} \, \frac{\text{s}}{\text{m}}$

$w\left(\sqrt{\langle v^2 \rangle}\right) = 1{,}07 \cdot 10^{-4} \, \frac{\text{s}}{\text{m}}$

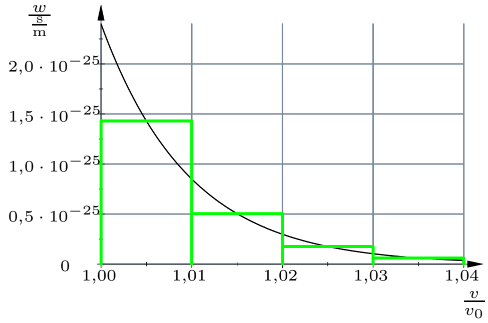
$w(2v_{\text{m}}) = 2{,}35 \cdot 10^{-5} \, \frac{\text{s}}{\text{m}}$

$w(3v_{\text{m}}) = 3{,}56 \cdot 10^{-7} \, \frac{\text{s}}{\text{m}}$



iii. z.B. $\Delta v = 0{,}01 v_0 = 510{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

v	w in $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}$
v_0	$2{,}400 \cdot 10^{-25}$
$1{,}005 v_0 = 5{,}130 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$1{,}430 \cdot 10^{-25}$
$1{,}015 v_0 = 5{,}181 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$5{,}041 \cdot 10^{-26}$
$1{,}025 v_0 = 5{,}232 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$1{,}758 \cdot 10^{-26}$
$1{,}035 v_0 = 5{,}283 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$6{,}064 \cdot 10^{-27}$



$$P \approx (w(v_1) + w(v_2) + w(v_3) + w(v_4)) \cdot \Delta v = 1{,}108 \cdot 10^{-22}$$

$$N = \frac{m}{M} = \frac{\varrho V}{M} = 7{,}77 \cdot 10^{21}, \qquad \left[P_{\text{exakt}} = \int\limits_{v_0}^{\infty} w(v)\,\mathrm{d}v = 1{,}175 \cdot 10^{-22} \right]$$

$\Delta N = PN = 0{,}86$, d.h. es werden praktisch keine Ionen mehr erzeugt.