SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Relativitätstheorie (Physik)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

1. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Kinematik

1. Ereignisse und Weltlinien

2. Die Galileitransformation

3. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

4. Zeitdilatation und Längenkontraktion

1. (a) Relativitätsprinzip: In Bezugssystemen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit zueinander bewegen, gelten die physikalischen Gesetze in gleicher Weise.

   Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Licht breitet sich im Vakuum unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle mit der gleichen Geschwindigkeit aus.

   (b) Längenkontraktion: Je schneller sich ein Körper relativ zu einem anderen bewegt, desto kürzer erscheint er.

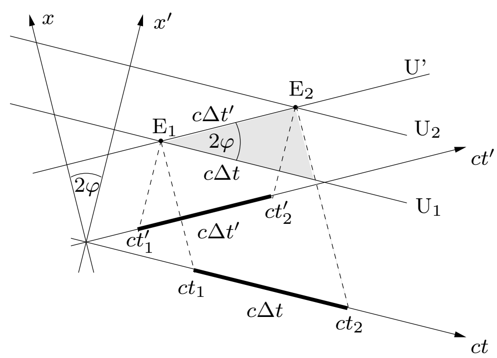
   Zeitdilatation: Je schneller sich ein Körper relativ zu einem anderen bewegt, desto langsamer vergeht die Zeit.

2. (a) Aufgrund der relativen Geschwindigkeit vergehen die Zeitabläufe im Raumschiff langsamer.

   (b) Der auf der Erde gebliebene Zwilling ist um viele Jahre mehr gealtert. Aufgrund der Beschleunigungsphase des Raumschiffs wechselt der Raumfahrer das Bezugssystem, so dass der Zeitunterschied erhalten bleibt.

3. (a) **Eine** Uhr U' (ruhend in S') bewegt sich mit der Geschwindigkeit v an **zwei in S ruhenden Uhren** U_1 und U_2 vorbei.

$$\Delta t' = \Delta t \cos 2\varphi = \Delta t \sqrt{1-\beta^2}$$



   (b) $v \approx c \quad \Longrightarrow \quad \Delta t = 6000\,\mathrm{a} = 1{,}89 \cdot 10^{11}\,\mathrm{s}$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\tau}{\Delta t} = 3{,}17 \cdot 10^{-9}$$

$$1-\beta^2 = 1{,}0 \cdot 10^{-17}$$

$$\beta = \sqrt{1-1{,}0\cdot 10^{-17}} \approx 1 - \frac{1}{2}10^{-17} = 1 - 5\cdot 10^{-18} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 5 \cdot 10^{-18}$$

$$\Delta v = c - v = \alpha c \quad \Longrightarrow \quad \delta x = \alpha c \Delta t = 285\,\mathrm{m} \quad \Longrightarrow \quad \delta t = \frac{\delta x}{c} = 950\,\mathrm{ns}$$

4. (a) Bewegt sich **eine** Uhr U' (System S') mit der konstanten Geschwindigkeit $v = \beta\, c$ an zwei im Inertialsystem S ruhenden Uhren U_1 und U_2 vorbei, dann gilt für die Zeitspanne zwischen den Treffpunkten

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1-\beta^2}$$

(b) $\beta \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \Delta t' \approx \Delta t \cdot \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)$

$\alpha \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{(1-\beta)(1+\beta)} = \Delta t \cdot \sqrt{\alpha(2-\alpha)} \approx \Delta t \cdot \sqrt{2\,\alpha}$

(c) $v = \frac{1200\,\mathrm{m}}{40\,\mathrm{s}} = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \Longrightarrow \quad \beta = 10^{-7}$

$\delta t = \Delta t - \Delta t' = \Delta t \cdot \left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right) \approx \Delta t \cdot (1 - 1 + \frac{\beta^2}{2}) = \Delta t \cdot \frac{\beta^2}{2} = 2 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{s}$

(d) $\Delta t = 5 \cdot 10^8\,\mathrm{a}, \quad s = c\,\Delta t, \quad \Delta s = 100\,\mathrm{m}$

$v = \frac{s - \Delta s}{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{s - \Delta s}{c\,\Delta t} = \frac{s - \Delta s}{s} = 1 - \frac{\Delta s}{s}$

$\Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\Delta s}{s} = \frac{100\,\mathrm{m}}{4{,}73 \cdot 10^{24}\,\mathrm{m}} = 2{,}11 \cdot 10^{-23}$

$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{2\,\alpha} = 5 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} \cdot \sqrt{2 \cdot 2{,}11 \cdot 10^{-23}} = 1{,}03 \cdot 10^5\,\mathrm{s} = 28{,}5\,\mathrm{h}$

5. Lorentztransformation

1. (a) $\sin 2\varphi = \beta = 0{,}8$

   $\cos 2\varphi = \sqrt{1-\beta^2} = 0{,}6$

   $\tan\varphi = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}} = 0{,}5$

   (b) $t_2 = t_1 = 5\,\mathrm{d}$, $x_2' = 0$

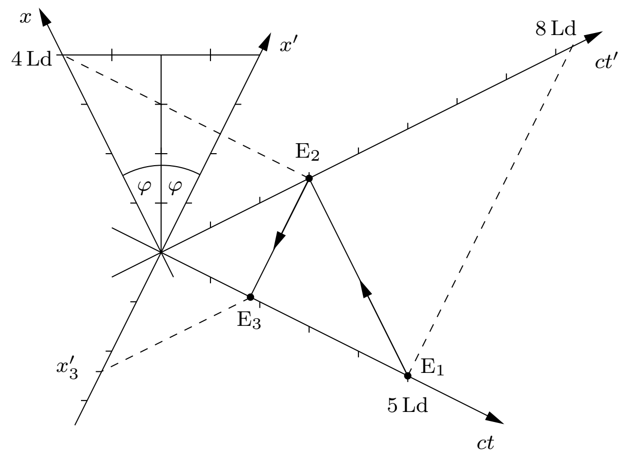
   $x_2 = vt_2 = 4\,\mathrm{Ld}$

   $t_2' = t_1 \cos 2\varphi = 3\,\mathrm{d}$

   $t_3' = t_2' = 3\,\mathrm{d}$, $x_3 = 0$

   $x_3' = -vt_3' = -2{,}4\,\mathrm{Ld}$

   $t_3 = t_2' \cos 2\varphi = 1{,}8\,\mathrm{d}$



   (c) $f' = \sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}} \cdot \dfrac{c}{\lambda} = \sqrt{\dfrac{0{,}2}{1{,}8}} \cdot 120\,\mathrm{MHz} = 40\,\mathrm{MHz}$

6. Dopplereffekt bei Licht

1. (a) Hauptmaximum 2. Ordnung am Gitter: $d \sin\varphi = 2\lambda \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{d}{2}\sin\varphi$

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi} \approx \left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = \frac{1}{2} d\cos\varphi_0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta\lambda \approx \frac{1}{2} d\Delta\varphi\cos\varphi_0$$

Das Maximum der Wellenlänge entsteht, wenn sich der Stern mit V vom Beobachter weg bewegt, das Minimum, wenn er sich auf den Beobachter zu bewegt.

$$\varphi_0 = 59{,}76871389^\circ = 1.043160847 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_0 = \frac{d}{2}\sin\varphi_0 = 5{,}40 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 540\,\mathrm{nm}$$

$$\Delta\varphi = 0{,}062'' = 0{,}0000172^\circ = 0{,}3006 \cdot 10^{-6} \quad \Longrightarrow \quad \Delta\lambda = 9{,}46 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$$

(b)

$$\frac{1}{1-h} \approx 1 + h \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\frac{1+h}{1-h}} \approx \sqrt{(1+h)^2} = 1 + h \quad \text{für } |h| \ll 1.$$

Stern bewegt sich vom Beobachter weg:

$$\lambda' = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \approx \lambda_0(1+\beta) \quad \Longrightarrow \quad \Delta\lambda = \beta\lambda_0$$

$$\beta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 1{,}75 \cdot 10^{-7} \quad \Longrightarrow \quad V = \beta c = 52{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$2R\pi = VT \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{VT}{2\pi} = 5{,}0 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m}$$

(c) Zentripetalkraft = Gravitationskraft und S = Schwerpunkt:

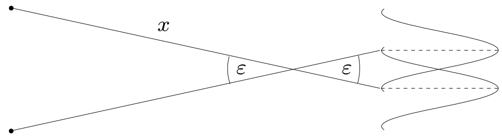
$$\frac{GMm}{s^2} = \frac{MV^2}{R} \quad \text{und} \quad MR = mr$$

Mit $R \ll r$ folgt $s = r + R \approx r = \frac{MR}{m}$ und damit

$$\frac{GMm}{s^2} \approx \frac{GMm^3}{M^2R^2} = \frac{MV^2}{R} \quad \Longrightarrow \quad m \approx \sqrt[3]{\frac{M^2V^2R}{G}} = 1{,}6 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$$

$$r = \frac{MR}{m} = 4{,}4 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$$

(d) Gerade noch trennbar: Hauptmaximum des einen Punktes fällt mit dem ersten Beugungsminimum des anderen Punktes zusammen:



$$a \sin \varepsilon = 1{,}22 \cdot \lambda_0$$

$$\varepsilon \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon \approx \sin \varepsilon = \frac{1{,}22\lambda_0}{a} = 6{,}6 \cdot 10^{-8} \quad \Longrightarrow \quad x \approx \frac{r+R}{\varepsilon} = 6{,}7 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m} = 71\,\mathrm{LJ}$$

7. Geschwindigkeitsaddition

Teil II.

Dynamik

8. Impuls und dynamische Masse

1. $m' = k \cdot m = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}95^2}} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} kg = 5,3 \cdot 10^{-27} kg$

2. $\mu = \dfrac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = 28{,}9m = 2{,}02 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$

   Du ruhst in einem Inertialsystem und spürst einfach deine Masse m. Da die Gravitationskraft ungefähr proportional zu $\gamma m M_\mathrm{E}$ ist, spürst du in der Nähe der Erde eine ungefähr 29 mal größere Gewichtskraft als auf der relativ zu dir ruhenden Erde.

9. Relativistischer Kraftbegriff

1. Wienfilter: $v = \dfrac{E}{B} = 1{,}75 \cdot 10^8\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad \beta = \frac{v}{c} = 0{,}583$

   $\dfrac{\gamma m v^2}{r} = \dfrac{m v^2}{r\sqrt{1-\beta^2}} = evB \quad \Longrightarrow \quad m = \dfrac{eBr}{v}\sqrt{1-\beta^2} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \quad \Longrightarrow \quad$ Positron

10. Relativistische Energie

1. (a) $\gamma = \dfrac{W_\mathrm{p}}{m_\mathrm{p}c^2} = \dfrac{7010\,\mathrm{GeV}}{0{,}938\,\mathrm{GeV}} = 7471 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \sqrt{1-\dfrac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \dfrac{1}{2\gamma^2}$

   $\dfrac{c-v}{c} = 1-\beta \approx \dfrac{1}{2\gamma^2} = 8{,}96\cdot 10^{-9}$

   (b) $\dfrac{\gamma m_\mathrm{p} v^2}{r} = evB \quad\Longrightarrow\quad B = \dfrac{\gamma m_\mathrm{p} v}{re} = \dfrac{\gamma\beta m_\mathrm{p} c}{re} = 5{,}51\,\mathrm{T}, \quad (r = 4243\,\mathrm{m})$

   (c) $B = \gamma'\beta'\dfrac{Mc}{Zre} = \gamma\beta\dfrac{m_\mathrm{p}c}{re} \quad\Longrightarrow\quad \gamma'\beta' = \dfrac{\gamma\beta m_\mathrm{p} Z}{M} \approx \gamma'$

   $W_\mathrm{Z} = \gamma' Mc^2 \approx Z\gamma m_\mathrm{p} c^2 = ZW_\mathrm{p} = 82W_\mathrm{p} = 575\,\mathrm{TeV}$

   Exakte Rechnung:

   $\gamma'\beta' = \sqrt{\gamma'^2 - 1} \quad\Longrightarrow\quad \gamma'^2 = 1 + \left(\gamma'\beta'\right)^2 = 1 + \dfrac{\beta^2\gamma^2 m_\mathrm{p}^2 Z^2}{M^2}$

   $W_\mathrm{Z} = Mc^2\sqrt{1 + \dfrac{\beta^2\gamma^2 m_\mathrm{p}^2 Z^2}{M^2}} = \sqrt{M^2c^4 + Z^2\beta^2 W_\mathrm{p}^2} \approx ZW_\mathrm{p}$

   (d) $M \approx 207\,u \quad\Longrightarrow\quad M_\mathrm{H} = \dfrac{W_\mathrm{Z} - Mc^2}{c^2} = 1{,}02\cdot 10^{-21}\,\mathrm{kg}$

2. In der Zeit $t = \dfrac{s}{c}$ legt das Licht die Strecke s und das Proton die Strecke $s - \Delta s$ zurück:

$$vt = \beta c\cdot\frac{s}{c} = \beta s = s - \Delta s \quad\Longrightarrow\quad \beta = 1 - \frac{\Delta s}{s}$$

$$\beta = 1 - \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\Delta s}{s} = \frac{100\,\mathrm{m}}{9{,}46\cdot 10^{17}\,\mathrm{m}} = 1{,}057\cdot 10^{-16}$$

$$1 - \beta^2 = (1-\beta)(1+\beta) = \alpha(2-\alpha) \approx 2\alpha$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} = 6{,}88\cdot 10^7$$

$$W = \gamma m_\mathrm{p} c^2 = 0{,}0103\,\mathrm{J}$$

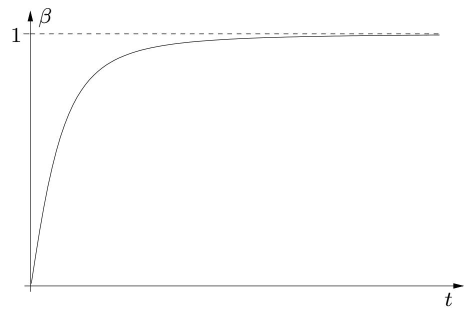
$$\tau = \frac{t}{\gamma} = \frac{3{,}16\cdot 10^9\,\mathrm{s}}{6{,}88\cdot 10^7} = 45{,}9\,\mathrm{s}$$

3. (a) $F = eE = \dot{p} \quad \Longrightarrow \quad p = eEt = \dfrac{mc\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$(1-\beta^2)e^2E^2t^2 = m^2\beta^2c^2$

$$\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{mc}{eEt}\right)^2}}, \quad v(t) = c\beta(t)$$

$\lim\limits_{t\to\infty} \beta(t) = 1$, d.h. $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = c$



(b) $t = \dfrac{p}{eE} = \dfrac{mc}{eE} \cdot \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \dfrac{mc\beta}{eE} = \dfrac{mv}{eE} = \dfrac{p_{\text{klassisch}}}{eE}$ für $\beta \ll 1$

β	$\dfrac{t_{\text{rel}}}{\frac{mc}{eE}}$	$\dfrac{t_{\text{klassisch}}}{\frac{mc}{eE}}$
0,99	7,0	0,99
0,5	0,58	0,50
10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}

4. (a) $W_{\text{kin}} = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \approx mc^2\left(\dfrac{1}{1-\frac{\beta^2}{2}} - 1\right) \approx mc^2\left(1+\dfrac{\beta^2}{2} - 1\right) = \dfrac{m}{2}v^2$

(b) $W_{\text{kin,falsch}} = \dfrac{\gamma m}{2}v^2 = \dfrac{m\beta^2c^2}{2\sqrt{1-\beta^2}}$

z.B. gilt für $\beta = 0{,}6$:

$W_{\text{kin}} = 0{,}225\,mc^2$, $W_{\text{kin,falsch}} = 0{,}25\,mc^2$, $W_{\text{kin,klassisch}} = 0{,}18\,mc^2$

5. $W = 0{,}001\,\text{kg} \cdot c^2 = 9 \cdot 10^{13}\,\text{J} = 2{,}5 \cdot 10^7\,\text{kWh} \mathrel{\widehat{=}} 2{,}5 \cdot 10^6$ € bei $10\,\dfrac{\text{Ct}}{\text{kWh}}$

Der Preis für ein Gramm Gold bewegt sich in der Größenordnung von 10 €bis 20 €.

6. $\Delta W = mc_{\text{Fe}}\Delta T = 7{,}86\,\text{kg} \cdot 0{,}452\,\dfrac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 280\,\text{K} = 9{,}95 \cdot 10^5\,\text{J}$

$\Delta m = \dfrac{\Delta W}{c^2} = 1{,}1 \cdot 10^{-11}\,\text{kg}, \quad \dfrac{\Delta m}{m} = 1{,}4 \cdot 10^{-12}$

7. $\Delta W = mC_{\text{schmelz}} = m \cdot 334\,\dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\Delta m}{m} = \dfrac{\Delta W}{mc^2} = \dfrac{C_{\text{schmelz}}}{c^2} = 3{,}7 \cdot 10^{-10}\,\%$

8. $W_{\text{kin}} = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = mc^2, \quad 1-\beta^2 = \dfrac{1}{4}, \quad \beta = \dfrac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}866$

9. $\dfrac{W_\mathrm{k}}{mc^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \quad\Longrightarrow\quad 1-\beta^2 = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{W_\mathrm{k}}{mc^2}\right)^2} \quad\Longrightarrow\quad$ die Beh.

10. $Mc^2 = 2\gamma mc^2, \quad M = 2\gamma m = 2\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}m = \dfrac{2m}{0{,}8} = 2{,}5\,m$

11. (a) $W_{\mathrm{e}0} = mc^2 = 8{,}18711 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} = 0{,}511\,\mathrm{MeV}$

(b) $m_\mathrm{p} = \dfrac{W_{\mathrm{p}0}}{c^2} = 1{,}67262 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

12. (a) $v_\mathrm{kl} = \sqrt{\dfrac{2W_\mathrm{kin}}{m}} = \sqrt{\dfrac{2qU}{m}}, \quad v_\mathrm{rel} = c \cdot \dfrac{\sqrt{qU(qU+2mc^2)}}{qU+mc^2}$

$$\frac{W}{W_0} = \frac{W_0 + W_\mathrm{kin}}{W_0} = 1 + \frac{W_\mathrm{kin}}{mc^2} = 1 + \frac{qU}{mc^2}$$

(b) Elektron:

U	v_kl	v_rel	$\dfrac{v_\mathrm{kl}-v_\mathrm{rel}}{v_\mathrm{rel}}$	$\gamma = \dfrac{W}{W_0}$
2500 V	$0{,}0989c$	$0{,}0986c$	0,37 %	1,0049
$5 \cdot 10^6$ V	$4{,}42c > c$!!	$0{,}9957c$	344 %	10,78

Proton:

U	v_kl	v_rel	$\dfrac{v_\mathrm{kl}-v_\mathrm{rel}}{v_\mathrm{rel}}$	$\gamma = \dfrac{W}{W_0}$
2500 V	$0{,}00231c$	$0{,}00231c$	$2 \cdot 10^{-4}$ %	$1 + 2{,}6 \cdot 10^{-6}$
$5 \cdot 10^6$ V	$0{,}1032c$	$0{,}1028c$	0,40 %	1,0053

13. (a) Mit $\beta = 0{,}1$ ist $\delta_\mathrm{rel} = \dfrac{W_\mathrm{kin} - W_\mathrm{kin,klassisch}}{W_\mathrm{kin}}$:

$$\delta_\mathrm{rel} = \frac{mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) - \dfrac{m}{2}\beta^2c^2}{mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)} = 1 - \frac{\beta^2}{2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)} = 0{,}0075 = 0{,}75\,\%$$

(b) $U = \dfrac{W_\mathrm{kin}}{e} = \dfrac{mc^2}{e}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}1^2}} - 1\right) = 0{,}00504 \cdot \dfrac{mc^2}{e}$

e^- : $U = 0{,}00504 \cdot 0{,}511 \cdot 10^6\,\mathrm{V} = 2{,}57\,\mathrm{kV}$
p^+ : $U = 0{,}00504 \cdot 938{,}27 \cdot 10^6\,\mathrm{V} = 4{,}73\,\mathrm{MV}$

14. (a) $\gamma = \dfrac{W}{W_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \dfrac{1}{2\gamma^2}, \quad$ da $\dfrac{1}{\gamma^2} \ll 1$

Proton : $\gamma = \dfrac{400\,\mathrm{GeV}}{0{,}93827\,\mathrm{GeV}} = 426 \qquad \beta = 1 - 2{,}75 \cdot 10^{-6}$

Elektron : $\gamma = \dfrac{21\,000\,\mathrm{MeV}}{0{,}511\,\mathrm{MeV}} = 4{,}11 \cdot 10^4 \qquad \beta = 1 - 2{,}96 \cdot 10^{-10}$

(b) $\gamma = \dfrac{1\,\mathrm{J}}{0{,}511 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}} = 1{,}22 \cdot 10^{13}$

$\beta = 1 - \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{2\gamma^2} = 3{,}35 \cdot 10^{-27}$

$$\tau = \frac{s}{c}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{s}{c}\sqrt{\underbrace{(1-\beta)}_{\alpha}\underbrace{(1+\beta)}_{\approx 2}} \approx \frac{s}{c}\sqrt{2\alpha} = \frac{s}{c\gamma} = \frac{4{,}8 \cdot 10^9\,\mathrm{a}}{1{,}22 \cdot 10^{13}} = 12\,400\,\mathrm{s}$$

oder $\tau = 3\,\mathrm{h}\,27\,\mathrm{min}$

Im Raumschiff steckt die kinetische Energie $W_\mathrm{k} = (\gamma - 1)mc^2 \approx \gamma mc^2 = 1{,}1 \cdot 10^{35}$ J.

Die tatsächlich aufzuwendende Energie ist viel größer, da auch in der von der Rakete ausgestoßenen Masse (heiße Gase, Photonen) Energie steckt (siehe Raketenaufgabe zum Kapitel *Energie-Impuls-Beziehungen*). Für die Photonenrakete ist die aufzuwendende Energie $\approx 2\gamma mc^2$.

15. In erster Näherung verwenden wir einen Plattenkondensator mit der Plattenfläche $A = 4\pi R^2$, $R = 6{,}38 \cdot 10^6$ m und $d = h = 6 \cdot 10^4$ m:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}, \quad W = \frac{1}{2}CU^2, \quad U = \frac{Q}{C}, \quad W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} = 2{,}21 \cdot 10^{12}\,\mathrm{J}$$

$$m = \frac{W}{c^2} = 24{,}5\,\mathrm{mg}$$

Genauer ist die Kapazitätsformel für den Kugelkondensator mit $r = R + h$:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{r}} \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{W}{c^2} = 24{,}3\,\mathrm{mg}$$

16. Der Fehler liegt einmal in einer falschen Interpretation von W_ges. Wenn W_ges die Gesamtenergie des Teilchens sein soll, dann gilt $W_\mathrm{ges} = m\,c^2 + \Delta W_\mathrm{kin} = \gamma m\,c^2 = \dfrac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Zum Anderen wird auch ΔW_pot falsch gedeutet, da die potentielle Energie nicht zum Teilchen, sondern zum System Teilchen-Feld gehört. Da das Feld auch von mindestens einem Teilchen erzeugt werden muss, lautet der vollständige Energiesatz (wir nehmen ein felderzeugendes Teilchen mit der Masse M an):

$$\begin{aligned} W_\mathrm{ges} = mc^2 + Mc^2 + W_\mathrm{pot} &= \gamma_1 mc^2 + \gamma_2 Mc^2 + W'_\mathrm{pot} \\ &= mc^2 + \Delta W_\mathrm{kin1} + Mc^2 + \Delta W_\mathrm{kin2} + W'_\mathrm{pot} \end{aligned}$$

11. Energie-Impuls-Beziehungen

1. (a) $\dfrac{\overline{\gamma}' m_\mathrm{e} u'^2}{r} = eu'B \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\overline{\gamma}'\overline{\beta}' m_\mathrm{e} c}{r} = eB \quad \Longrightarrow \quad \overline{\gamma}'\overline{\beta}' = \dfrac{eBr}{m_\mathrm{e} c} = 5{,}87 \cdot 10^7 \gg 1$

$\Longrightarrow \quad \overline{\gamma}' \approx \dfrac{eBr}{m_\mathrm{e} c} = 5{,}87 \cdot 10^7$, exakt: $\overline{\gamma}' = \sqrt{1 + \left(\dfrac{eBr}{m_\mathrm{e} c}\right)^2}$

$W' = \overline{\gamma}' m_\mathrm{e} c^2 = eBrc = 4{,}80 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J} = 30{,}0\,\mathrm{TeV}$

(b) $W'^2 = W_0^2 + p'^2 c^2 \quad \Longrightarrow \quad p' = \dfrac{1}{c}\sqrt{W'^2 - W_0^2}$

Lorentztransformation: $\dfrac{W}{c} = \gamma\left(\dfrac{W'}{c} + \beta p'\right) \quad \Longrightarrow$

$$W = \gamma\left(W' + \beta c p'\right) = \gamma\left(W' + \beta\sqrt{W'^2 - W_0^2}\right) \approx 2\gamma W'$$

$$p = \gamma\left(p' + \beta\frac{W'}{c}\right) = \frac{\gamma}{c}\left(\sqrt{W'^2 - W_0^2} + \beta W'\right) \approx \frac{2\gamma W'}{c}$$

(c) Zahl der Elektronen: $N = \dfrac{1\,\mathrm{As}}{e} = 6{,}24 \cdot 10^{18}$

$\beta = 0{,}9999 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 70{,}71 \quad \Longrightarrow \quad W = 2\gamma W' = 6{,}79 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J} = 4{,}24 \cdot 10^3\,\mathrm{TeV}$

$W_\mathrm{g} = NW = 4{,}24 \cdot 10^{15}\,\mathrm{J}, \quad p_\mathrm{g} = \dfrac{W_\mathrm{g}}{c} = 1{,}41 \cdot 10^7\,\dfrac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$

(d) $v_\mathrm{K} \ll c \quad \Longrightarrow$ nichtrelativistische Rechnung, d.h.

$p_\mathrm{K} = p_\mathrm{g} = (m_\mathrm{K} + N m_\mathrm{e}) v_\mathrm{K} \approx m_\mathrm{K} v_\mathrm{K}$ wegen $N m_\mathrm{e} = 5{,}7 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{kg} \ll m_\mathrm{K}$

$v_\mathrm{K} = \dfrac{p_\mathrm{g}}{m_\mathrm{K}} = 14{,}1\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad W_\mathrm{K} = \dfrac{p_\mathrm{K}^2}{2(m_\mathrm{K} + N m_\mathrm{e})} \approx \dfrac{p_\mathrm{g}^2}{2 m_\mathrm{K}} = 1{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{J}$

$\Delta W = W_\mathrm{g} - W_\mathrm{K} \approx W_\mathrm{g}, \quad \dfrac{\Delta W}{m_\mathrm{K}} = 4{,}24 \cdot 10^6\,\dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} \gg q_\mathrm{Fe} = 6{,}3 \cdot 10^4\,\dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$

2. (a) $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Longrightarrow \quad \beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} = \dfrac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}, \qquad \alpha = \dfrac{W_\mathrm{k}}{W_0} = \dfrac{(\gamma - 1) W_0}{W_0} = \gamma - 1$

$p = \gamma m v = \gamma\beta m c = mc\sqrt{\gamma^2 - 1} = mc\sqrt{(\gamma - 1)(\gamma + 1)} = mc\sqrt{\alpha(\alpha + 2)}$

Oder mit der Energie-Impuls-Relation:

$W^2 = W_0^2 + p^2 c^2 \quad \Longrightarrow \quad p^2 c^2 = (\gamma^2 - 1) m^2 c^4 \quad \Longrightarrow \quad p = mc\sqrt{\gamma^2 - 1}$

(b) $\dfrac{\gamma m v^2}{r} = qvB \quad \Longrightarrow$

$$r = \frac{\gamma m v}{qB} = \frac{\gamma \beta m c}{qB} = \frac{p}{qB} = \frac{mc\sqrt{\alpha(\alpha+2)}}{qB} = \frac{mc\sqrt{\frac{W_\mathrm{k}}{mc^2}\left(\frac{W_\mathrm{k}}{mc^2}+2\right)}}{qB} = \frac{\sqrt{W_\mathrm{k}(W_\mathrm{k}+2mc^2)}}{qBc}$$

(c) $W_\mathrm{k}(W_\mathrm{k}+2mc^2) = W_\mathrm{k}^2 + 2mc^2 W_\mathrm{k} = r^2e^2B^2c^2 \implies$

$W_\mathrm{k} = -mc^2 + \sqrt{m^2c^4 + r^2e^2B^2c^2} = 9{,}6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{J} = 6{,}0\cdot 10^{12}\,\mathrm{eV}, \qquad U = 6{,}0\cdot 10^{12}\,\mathrm{V}$

oder:

$p = reB = mc\sqrt{\gamma^2-1} \implies \gamma = \sqrt{1+\frac{r^2e^2B^2}{m^2c^2}} = 1{,}17\cdot 10^7$

$W_\mathrm{k} = (\gamma-1)mc^2 = 1{,}17\cdot 10^7 \cdot 0{,}511\,\mathrm{MeV} = 6{,}0\cdot 10^{12}\,\mathrm{eV}$

3. (a) $u_2 = u_2' \oplus v = \dfrac{u_2'+v}{1+\frac{u_2'v}{c^2}} = 0 \implies u_2' = -v$, Impulssatz in S': $u_1' = -u_2' = v$

(b) Energiesatz in S': $2\gamma mc^2 = (2m+M)c^2 + W_\mathrm{k,ges}$‘

M ist dann maximal, wenn $W_\mathrm{k,ges}$‘ $= 0$, d.h. wenn alle Teilchen ruhen.

(c) $\overline{u} = 0 \oplus v = v \implies W = \gamma(2m+M)c^2 = \gamma W'$

In S': $2\gamma mc^2 = (2m+M)c^2 \implies \gamma = 1 + \dfrac{M}{2m}$

In S: $W = 2mc^2 + W_\mathrm{k} = \gamma(2m+M)c^2 = \gamma W' = 2\gamma^2 mc^2 \implies \gamma^2 = \dfrac{W_\mathrm{k}}{2mc^2} + 1$

(d) $\dfrac{M}{2m} = \gamma - 1 = \sqrt{1+\alpha} - 1, \quad W_\mathrm{k} \gg mc^2 \implies \alpha \gg 1 \implies \dfrac{M}{2m} \approx \sqrt{\alpha}$

(e) Mit $m = m_\mathrm{p}$ ist $2mc^2 = 1{,}877\,\mathrm{GeV}$. $\overline{M} = \frac{M}{2} = m(\sqrt{1+\alpha}-1) \approx m\sqrt{\alpha}$

W_k	α	$\frac{\overline{M}}{m_\mathrm{p}}$	$\frac{\overline{M}c^2}{\mathrm{GeV}}$	$\frac{W_\mathrm{k}}{2\overline{M}c^2}$
6,4 GeV	3,41	1,10	1,03	3,10
900 GeV	480	20,9	19,6	22,9
7 TeV	3730	60,1	56,4	62,1

Mit $\beta_0 = \dfrac{u}{c}$ und $\gamma_0 = \sqrt{1-\beta_0^2}$ folgt:

$W = (\gamma_0+1)mc^2 = \gamma W' = 2\gamma^2 mc^2 \implies \gamma_0 = 2\gamma^2 - 1$

$\gamma_0^2 - 1 = 4\gamma^2(\gamma^2-1) = 4\alpha(1+\alpha)$

$\dfrac{\gamma_0 m u^2}{r} = euB \implies B = \dfrac{mc}{re}\gamma_0\beta_0 = \dfrac{mc}{re}\sqrt{\gamma_0^2-1} = \dfrac{mc}{re}\cdot 2\sqrt{\alpha(1+\alpha)} \approx \dfrac{mc}{re}\cdot 2\alpha$

$B \approx \dfrac{mc}{re}\cdot\dfrac{2W_\mathrm{k}}{2mc^2} = \dfrac{W_\mathrm{k}}{rec} = 5{,}43\,\mathrm{T}$

(f) $W_\mathrm{k} = 2mc^2(\gamma^2-1) = 2mc^2\left[\left(1+\dfrac{M}{2m}\right)^2 - 1\right] = Mc^2\left(2+\dfrac{M}{2m}\right) = 2\overline{M}c^2\left(2+\dfrac{\overline{M}}{m}\right)$

$\mathrm{p\overline{p}}$: $\overline{M} = m \quad \Longrightarrow \quad W_\mathrm{k} = 6mc^2 = 5{,}63\,\mathrm{GeV} = 3 \cdot 2\overline{M}c^2$

Higgs: $W_\mathrm{k} = 10^3\,\mathrm{GeV} \cdot \left(2 + \frac{500}{0{,}938}\right) = 535\,\mathrm{TeV} = 535 \cdot 2\overline{M}c^2$

(g) Der Preis x ist zum Radius der Anlagen proportional:

$$\frac{x}{x'} = \frac{r}{2r'} = \frac{\frac{mc}{eB}\sqrt{\gamma_0^2 - 1}}{2 \cdot \frac{mc}{eB}\sqrt{\gamma^2 - 1}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\gamma_0^2 - 1}{\gamma^2 - 1}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4\alpha(1+\alpha)}{\alpha}} = \sqrt{1+\alpha} = \gamma = 1 + \frac{\overline{M}}{m}$$

Für $\overline{M}c^2 = 500\,\mathrm{GeV}$: $\dfrac{x}{x'} = 534.$

Ein Festtargetbeschleuniger mit der gleichen Schwerpunktsenergie wie der LHC ($\overline{M}c^2 = 7\,\mathrm{TeV}$) würde 7460 mal soviel kosten wie der LHC, sein Umfang wäre ungefähr $4 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$.