# SMART

# Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

# Relativitätstheorie (Physik)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

1. Mai 2010

# Inhaltsverzeichnis

# Teil I.

# Kinematik

# 1. Ereignisse und Weltlinien

# 2. Die Galileitransformation

# 3. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

# 4. Zeitdilatation und Längenkontraktion

1. (a) Wie lauten die Postulate der speziellen Relativitätstheorie?
   (b) Erkläre die Begriffe Längenkontraktion und Zeitdilatation.

*Lösung:* (a) Relativitätsprinzip: In Bezugssystemen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit zueinander bewegen, gelten die physikalischen Gesetze in gleicher Weise.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Licht breitet sich im Vakuum unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle mit der gleichen Geschwindigkeit aus.

(b) Längenkontraktion: Je schneller sich ein Körper relativ zu einem anderen bewegt, desto kürzer erscheint er.

Zeitdilatation: Je schneller sich ein Körper relativ zu einem anderen bewegt, desto langsamer vergeht die Zeit.

2. Ein Zwilling reist mit sehr hoher Geschwindigkeit (nahe der Lichtgeschwindigkeit) durchs All. Der Zwilling auf der Erde beobachtet die zeitlichen Abläufe im Raumschiff.
   (a) Was stellt er fest?
   (b) Nach einiger Zeit kehrt der Zwilling mit dem Raumschiff zur Erde zurück? Was stellt er mit entsetzen fest?

   Gib jeweils ein kurze Erklärung an!

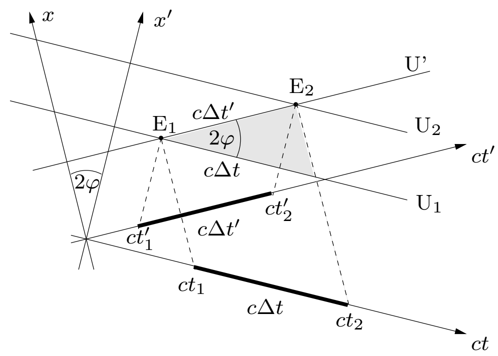
*Lösung:* (a) Aufgrund der relativen Geschwindigkeit vergehen die Zeitabläufe im Raumschiff langsamer.

(b) Der auf der Erde gebliebene Zwilling ist um viele Jahre mehr gealtert. Aufgrund der Beschleunigungsphase des Raumschiffs wechselt der Raumfahrer das Bezugssystem, so dass der Zeitunterschied erhalten bleibt.

3. (a) Erläutere, unter welchen Voraussetzungen die Formel für die Zeitdilatation gilt, veranschauliche die Situation in einem Minkowski- oder Brehmediagramm und leite die Formel her.
   (b) Bei einer Supernova, die im System S der Erde ruht, entsteht ein sehr schnelles Neutron, das in der Eigenzeit $\tau = 10\,\text{min}$ die Strecke $s = 6000\,\text{LJ}$ bis zur Erde zurücklegt. Um welchen Bruchteil $\alpha$ weicht die Geschwindigkeit $v$ des Neutrons, gemessen im System S, von der Lichtgeschwindigkeit ab? Gleichzeitig und am

gleichen Ort startet mit dem Neutron ein Lichtteilchen (Gammaquant) zur Erde. Welchen zeitlichen ($\delta t$) und räumlichen ($\delta x$) Vorsprung hat das Gammaquant bei der Ankunft auf der Erde gegenüber dem Neutron?

*Lösung:* (a) **Eine** Uhr U' (ruhend in S') bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v$ an **zwei in S ruhenden Uhren** $U_1$ und $U_2$ vorbei.




$$\Delta t' = \Delta t \cos 2\varphi = \Delta t \sqrt{1-\beta^2}$$

(b) $v \approx c \quad \Longrightarrow \quad \Delta t = 6000\,\mathrm{a} = 1{,}89 \cdot 10^{11}\,\mathrm{s}$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\tau}{\Delta t} = 3{,}17 \cdot 10^{-9}$$

$$1-\beta^2 = 1{,}0 \cdot 10^{-17}$$

$$\beta = \sqrt{1 - 1{,}0 \cdot 10^{-17}} \approx 1 - \frac{1}{2}10^{-17} = 1 - 5 \cdot 10^{-18} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 5 \cdot 10^{-18}$$

$$\Delta v = c - v = \alpha c \quad \Longrightarrow \quad \delta x = \alpha c \Delta t = 285\,\mathrm{m} \quad \Longrightarrow \quad \delta t = \frac{\delta x}{c} = 950\,\mathrm{ns}$$

4. **Zeitdilatation**

(a) Schreibe die Formel der Zeitdilatation mit einer genauen Erläuterung der verwendeten Größen hin.

(b) Entwickle Näherungsformeln der Zeitdilatation für $\beta \ll 1$ und für $1-\beta = \alpha \ll 1$.

(c) Pascal durchfährt einen 1200 m langen Hang in exakt 40 s (gemessen von Uhren am Start und am Ziel). Um wieviel zeigt Pascal's mitgeführte Mini-Atom-Stoppuhr weniger an als die offizielle Zeitnahme?

(d) Bei einer 500 Millionen Lichtjahre von der Erde entfernten Supernova-Explosion treten ein Lichtteilchen und ein Proton gleichzeitig ihre Reise zur Erde an. Das Proton kommt nur 100 m hinter dem Lichtteilchen auf der Erde an. Wie lang dauerte die Reise des Protons in seinem Ruhsystem?

*Lösung:* (a) Bewegt sich **eine** Uhr U' (System S') mit der konstanten Geschwindigkeit $v = \beta\, c$ an zwei im Inertialsystem S ruhenden Uhren $U_1$ und $U_2$ vorbei, dann gilt für die Zeitspanne zwischen den Treffpunkten

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1-\beta^2}$$

(b) $\beta \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \Delta t' \approx \Delta t \cdot \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)$

$$\alpha \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{(1-\beta)(1+\beta)} = \Delta t \cdot \sqrt{\alpha(2-\alpha)} \approx \Delta t \cdot \sqrt{2\,\alpha}$$

(c) $v = \frac{1200\,\mathrm{m}}{40\,\mathrm{s}} = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \Longrightarrow \quad \beta = 10^{-7}$

$$\delta t = \Delta t - \Delta t' = \Delta t \cdot \left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right) \approx \Delta t \cdot (1 - 1 + \frac{\beta^2}{2}) = \Delta t \cdot \frac{\beta^2}{2} = 2 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{s}$$

(d) $\Delta t = 5 \cdot 10^8\,\mathrm{a}, \quad s = c\,\Delta t, \quad \Delta s = 100\,\mathrm{m}$

$$v = \frac{s - \Delta s}{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{s - \Delta s}{c\,\Delta t} = \frac{s - \Delta s}{s} = 1 - \frac{\Delta s}{s}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\Delta s}{s} = \frac{100\,\mathrm{m}}{4{,}73 \cdot 10^{24}\,\mathrm{m}} = 2{,}11 \cdot 10^{-23}$$

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{2\,\alpha} = 5 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} \cdot \sqrt{2 \cdot 2{,}11 \cdot 10^{-23}} = 1{,}03 \cdot 10^5\,\mathrm{s} = 28{,}5\,\mathrm{h}$$

# 5. Lorentztransformation

1. Ein Raumschiff (System S′) fliegt mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 0{,}8\,c$ zur Zeit $t_0 = 0$ an der Erde (System S) vorbei. Der Physiker Moneymaker hat einen Hyperstrahlensender entwickelt, dessen Strahlen sich im Sendersystem unendlich schnell ausbreiten. Zur Zeit $t_1 = 5\,\mathrm{d}$ sendet er das Ergebnis der Ziehung der Lottozahlen von der Erde (Ereignis $\mathrm{E}_1$) mit einen Hyperstrahl zum Raumschiff. Dort wird das Signal empfangen (Ereignis $\mathrm{E}_2$) und umgehend mit einem ebenfalls an Bord befindlichen Hypersender zur Erde zurückgefunkt, wo es zur Zeit $t_3$ ankommt (Ereignis $\mathrm{E}_3$).

   (a) $2\varphi$ ist der Winkel zwischen der $x$- und $x'$-Achse im Brehmediagramm. Berechne $\tan\varphi$ und zeichne dann das Diagramm ($1\,\mathrm{Ld} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$). Zeichne die Ereignisse $\mathrm{E}_1$, $\mathrm{E}_2$ und $\mathrm{E}_3$ sowie die Weltlinien der Hyperstrahlen ein.

   (b) Berechne die Koordinaten von $\mathrm{E}_2$ und $\mathrm{E}_3$ in beiden Systemen.

   (c) Ein konventionelles Funksignal der Wellenlänge $\lambda = 2{,}5\,\mathrm{m}$ (in S) wird zu einer Zeit größer null von der Erde zum Raumschiff gesandt. Auf welche Frequenz $f'$ muss der Schiffsempfänger eingestellt werden?

*Lösung:* (a) $\sin 2\varphi = \beta = 0{,}8$

$$\cos 2\varphi = \sqrt{1-\beta^2} = 0{,}6$$

$$\tan\varphi = \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}} = 0{,}5$$

(b) $t_2 = t_1 = 5\,\mathrm{d}$, $x_2' = 0$

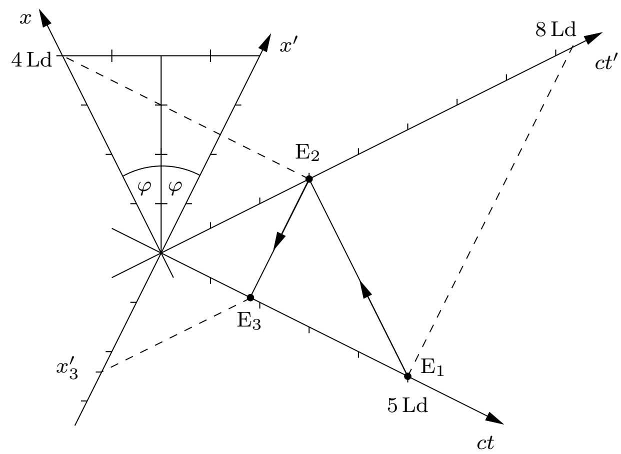
$$x_2 = vt_2 = 4\,\mathrm{Ld}$$

$$t_2' = t_1 \cos 2\varphi = 3\,\mathrm{d}$$

$$t_3' = t_2' = 3\,\mathrm{d},\ x_3 = 0$$

$$x_3' = -vt_3' = -2{,}4\,\mathrm{Ld}$$

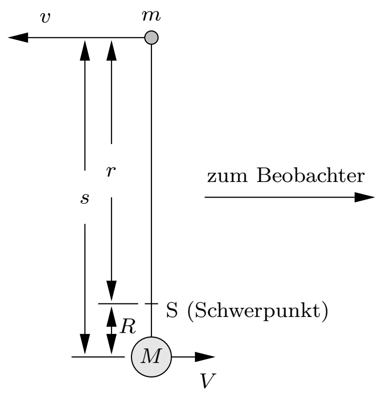
$$t_3 = t_2' \cos 2\varphi = 1{,}8\,\mathrm{d}$$




(c) $$f' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \cdot \frac{c}{\lambda} = \sqrt{\frac{0{,}2}{1{,}8}} \cdot 120\,\mathrm{MHz} = 40\,\mathrm{MHz}$$

# 6. Dopplereffekt bei Licht

1. Die Erde (Beobachter) liegt genau in der Bahnebene eines extrasolaren Planetensystems. Eine Spektrallinie des Sternenlichts wird ein Jahr lang mit einem Gitterspektrometer (8000 Linien pro cm) in zweiter Ordnung beobachtet. Der Winkel $\varphi$ dieser Linie zum Hauptmaximum schwankt mit der Periode $T = 69\,\mathrm{d}\,9\,\mathrm{h}\,30\,\mathrm{min}$ zwischen den Extremwerten $\varphi_{\mathrm{min}} = 59^\circ\,46'\,7{,}308''$ und $\varphi_{\mathrm{max}} = 59^\circ\,46'\,7{,}432''$. Ebenfalls aus dem Spektrum de Sterns kann man seine *Spektralklasse* und daraus ungefähr seine Masse zu $M = 1{,}4 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ bestimmen.




   (a) Wir bezeichnen mit $\varphi_0$ den Mittelwert der gemessenen Winkel und mit $\Delta\varphi$ die größte Abweichung von $\varphi_0$. Beweise für die Schwankung $\Delta\lambda$ der gemessenen Wellenlänge unserer Spektrallinie die Formel

$$\Delta\lambda = \frac{1}{2} d \Delta\varphi \cos\varphi_0$$

   und erkläre in Worten, wie diese Schwankung entsteht. Welche Wellenlänge $\lambda_0$ hat das Licht unserer Spektrallinie im System des Sterns? Berechne auch den Zahlenwert von $\Delta\lambda$.

   (b) Zitiere eine bekannte Näherungsformel und beweise damit in nachvollziehbarer Weise

$$\sqrt{\frac{1+h}{1-h}} \approx 1 + h \quad \text{für } |h| \ll 1.$$

   Berechne dann die Geschwindigkeit $V$ und den Radius $R$ der als kreisförmig angenommenen Sternbewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt S von Stern und Planet.

   (c) Stelle eine Gleichung für das Kräftegleichgewicht am Stern auf. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $M$, $m$, $R$ und dem Radius $r$ der Planetenbahn? Berechne jetzt $m$ und $r$ unter der Annahme $m \ll M$ bzw. $R \ll r$ (keine kubische Gleichung für $m$ lösen, sondern vorher Näherung anwenden!).

   (d) Welchen Winkelabstand $\varepsilon$ müssen zwei Lichtpunkte mindestens haben, um mit einem Teleskop (kreisförmige Eintrittsöffnung mit Durchmesser $a$) gerade noch getrennt wahrgenommen zu werden? Herleitung der Formel anhand einer sauber beschrifteten Skizze!

Wie viele Lichtjahre darf unser beobachtetes Planetensystem höchstens von der Erde entfernt sein, damit das Keck-Teleskop ($a = 10\,\mathrm{m}$) Stern und Planet in der günstigsten Lage gerade noch trennen kann?

*Lösung:* (a) Hauptmaximum 2. Ordnung am Gitter: $d \sin\varphi = 2\lambda \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{d}{2}\sin\varphi$

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi} \approx \left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = \frac{1}{2} d\cos\varphi_0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta\lambda \approx \frac{1}{2} d\Delta\varphi\cos\varphi_0$$

Das Maximum der Wellenlänge entsteht, wenn sich der Stern mit $V$ vom Beobachter weg bewegt, das Minimum, wenn er sich auf den Beobachter zu bewegt.

$$\varphi_0 = 59{,}76871389^\circ = 1.043160847 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_0 = \frac{d}{2}\sin\varphi_0 = 5{,}40 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 540\,\mathrm{nm}$$

$$\Delta\varphi = 0{,}062'' = 0{,}0000172^\circ = 0{,}3006 \cdot 10^{-6} \quad \Longrightarrow \quad \Delta\lambda = 9{,}46 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$$

(b)
$$\frac{1}{1-h} \approx 1 + h \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\frac{1+h}{1-h}} \approx \sqrt{(1+h)^2} = 1 + h \quad \text{für } |h| \ll 1.$$

Stern bewegt sich vom Beobachter weg:

$$\lambda' = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \approx \lambda_0(1+\beta) \quad \Longrightarrow \quad \Delta\lambda = \beta\lambda_0$$

$$\beta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 1{,}75 \cdot 10^{-7} \quad \Longrightarrow \quad V = \beta c = 52{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$2R\pi = VT \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{VT}{2\pi} = 5{,}0 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m}$$

(c) Zentripetalkraft = Gravitationskraft und S = Schwerpunkt:

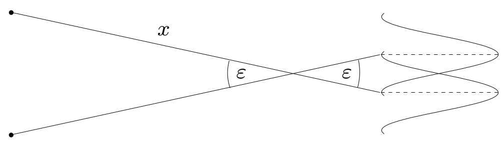
$$\frac{GMm}{s^2} = \frac{MV^2}{R} \quad \text{und} \quad MR = mr$$

Mit $R \ll r$ folgt $s = r + R \approx r = \frac{MR}{m}$ und damit

$$\frac{GMm}{s^2} \approx \frac{GMm^3}{M^2R^2} = \frac{MV^2}{R} \quad \Longrightarrow \quad m \approx \sqrt[3]{\frac{M^2V^2R}{G}} = 1{,}6 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$$

$$r = \frac{MR}{m} = 4{,}4 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$$

(d) Gerade noch trennbar: Hauptmaximum des einen Punktes fällt mit dem ersten Beugungsminimum des anderen Punktes zusammen:




$$a\sin\varepsilon = 1{,}22 \cdot \lambda_0$$

$$\varepsilon \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon \approx \sin\varepsilon = \frac{1{,}22\lambda_0}{a} = 6{,}6 \cdot 10^{-8} \quad \Longrightarrow \quad x \approx \frac{r+R}{\varepsilon} = 6{,}7 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m} = 71\,\mathrm{LJ}$$

# 7. Geschwindigkeitsaddition

# Teil II.

# Dynamik

# 8. Impuls und dynamische Masse

1. Welche Masse besitzt ein Elektron, das auf 95% der Lichtgeschwindigkeit beschleunigt wird? (Masse des Elektrons: $1,67 \cdot 10^{-27} kg$ )

*Lösung:* $m' = k \cdot m = \frac{1}{\sqrt{1-0,95^2}} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} kg = 5,3 \cdot 10^{-27} kg$

2. Stelle dir vor, du wirst in einen großen Beschleuniger am CERN eingeschossen. Welche dynamische Masse hättest du bei der Endgeschwindigkeit $v = 0{,}9994\,c$ und der Masse $m = 70\,\mathrm{kg}$? Würdest du dich schwerer fühlen? Beantworte diese Frage auch für den Fall, dass der Beschleuniger, weit weg von allen Sternen, frei im Weltall schwebt.

*Lösung:* $\mu = \dfrac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = 28{,}9m = 2{,}02 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$

Du ruhst in einem Inertialsystem und spürst einfach deine Masse $m$. Da die Gravitationskraft ungefähr proportional zu $\gamma m M_{\mathrm{E}}$ ist, spürst du in der Nähe der Erde eine ungefähr 29 mal größere Gewichtskraft als auf der relativ zu dir ruhenden Erde.

# 9. Relativistischer Kraftbegriff

1. Ein Strahl von Teilchen mit der Ladung $q = +e$ durchläuft zunächst ein Wienfilter ($E = 7{,}00 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, $B = 4{,}00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$) und tritt dann in einen Raumbereich ein, in dem nur noch das Magnetfeld herrscht. Hier beschreibt der Teilchenstrahl eine Kreisbahn mit dem Radius $r = 30{,}6\,\mathrm{cm}$. Um welche Teilchensorte handelt es sich?

*Lösung:* Wienfilter: $v = \dfrac{E}{B} = 1{,}75 \cdot 10^8\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad \beta = \frac{v}{c} = 0{,}583$

$$\frac{\gamma m v^2}{r} = \frac{m v^2}{r\sqrt{1-\beta^2}} = evB \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{eBr}{v}\sqrt{1-\beta^2} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \quad \Longrightarrow \quad \text{Positron}$$

# 10. Relativistische Energie

1. Der LHC (Large Hadron Collider) am CERN beschleunigt Protonen und schwere Ionen auf einer kreisförmigen Strecke der Länge $u = 26{,}659\,\text{km}$.

   (a) Protonen erreichen die Endenergie $W_\text{p} = 7{,}01\,\text{TeV}$. Um welchen Bruchteil weicht die Endgeschwindigkeit $v$ der Protonen von der Lichtgeschwindigkeit ab?

   (b) Berechne die Stärke $B$ des Magnetfeldes, das die Protonen auf ihre Kreisbahn zwingt.

   (c) Auf welche Energie $W_\text{Z}$ kann der LHC nackte Atomkerne der Masse $M$ und der Ladung $q = Ze$ bei dem in Teilaufgabe (b) berechneten Magnetfeld beschleunigen? Wie groß ist $W_\text{Z}$ für Bleikerne ($Z = 82$)?

   (d) Wie groß darf die Masse $M_\text{H}$ des Higgsteilchens höchstens sein, wenn es durch den Stoß zweier gegenläufiger Bleikerne erzeugt werden soll (es wird immer ein Teilchen-Antiteilchen-Paar erzeugt)?

*Lösung:* (a) $\gamma = \dfrac{W_\text{p}}{m_\text{p}c^2} = \dfrac{7010\,\text{GeV}}{0{,}938\,\text{GeV}} = 7471 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \dfrac{1}{2\gamma^2}$

$$\frac{c-v}{c} = 1 - \beta \approx \frac{1}{2\gamma^2} = 8{,}96 \cdot 10^{-9}$$

(b) $\dfrac{\gamma m_\text{p} v^2}{r} = evB \quad \Longrightarrow \quad B = \dfrac{\gamma m_\text{p} v}{re} = \dfrac{\gamma\beta m_\text{p} c}{re} = 5{,}51\,\text{T}, \quad (r = 4243\,\text{m})$

(c) $B = \gamma'\beta'\dfrac{Mc}{Zre} = \gamma\beta\dfrac{m_\text{p}c}{re} \quad \Longrightarrow \quad \gamma'\beta' = \dfrac{\gamma\beta m_\text{p} Z}{M} \approx \gamma'$

$$W_\text{Z} = \gamma' M c^2 \approx Z\gamma m_\text{p} c^2 = ZW_\text{p} = 82 W_\text{p} = 575\,\text{TeV}$$

Exakte Rechnung:

$$\gamma'\beta' = \sqrt{\gamma'^2 - 1} \quad \Longrightarrow \quad \gamma'^2 = 1 + \left(\gamma'\beta'\right)^2 = 1 + \frac{\beta^2\gamma^2 m_\text{p}^2 Z^2}{M^2}$$

$$W_\text{Z} = Mc^2\sqrt{1 + \frac{\beta^2\gamma^2 m_\text{p}^2 Z^2}{M^2}} = \sqrt{M^2c^4 + Z^2\beta^2 W_\text{p}^2} \approx ZW_\text{p}$$

(d) $M \approx 207\,u \quad \Longrightarrow \quad M_\text{H} = \dfrac{W_\text{Z} - Mc^2}{c^2} = 1{,}02 \cdot 10^{-21}\,\text{kg}$

2. Welche Energie hat ein Proton, das bei einem Wettrennen mit einem Lichtstrahl über die Strecke $s = 100\,\text{LJ}$ nur um $\Delta s = 100\,\text{m}$ zurück liegt? In welcher Eigenzeit $\tau$ bestreitet das Proton das Rennen?

*Lösung:* In der Zeit $t = \frac{s}{c}$ legt das Licht die Strecke $s$ und das Proton die Strecke $s - \Delta s$ zurück:

$$vt = \beta c \cdot \frac{s}{c} = \beta s = s - \Delta s \quad \Longrightarrow \quad \beta = 1 - \frac{\Delta s}{s}$$

$$\beta = 1 - \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\Delta s}{s} = \frac{100\,\mathrm{m}}{9{,}46 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m}} = 1{,}057 \cdot 10^{-16}$$

$$1 - \beta^2 = (1-\beta)(1+\beta) = \alpha(2-\alpha) \approx 2\alpha$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} = 6{,}88 \cdot 10^7$$

$$W = \gamma m_{\mathrm{p}} c^2 = 0{,}0103\,\mathrm{J}$$

$$\tau = \frac{t}{\gamma} = \frac{3{,}16 \cdot 10^9\,\mathrm{s}}{6{,}88 \cdot 10^7} = 45{,}9\,\mathrm{s}$$

3. (a) Ein Elektron, das zur Zeit $t = 0$ ruht, wird von einem homogenen elektrischen Feld $E$ beschleunigt. Berechne zuerst den Impuls $p(t)$ und dann die Geschwindigkeit $v(t)$ des Elektrons. Berechne $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$. Skizziere $v(t)$.

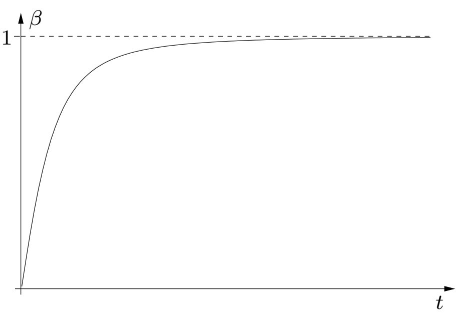
   (b) Drücke die zum Erreichen von $v$ benötigte Zeit $t$ durch $\beta = \frac{v}{c}$ aus. Wie lautet der entsprechende nichtrelativistische Ausdruck für $t$? Zeige, dass der relativistische Ausdruck für $\beta \ll 1$ in den nichtrelativistischen übergeht. Berechne $t_{\mathrm{rel}}$ und $t_{\mathrm{nichtrel}}$ speziell für $\beta = 0{,}99$, $\beta = 0{,}5$ und $\beta = 10^{-6}$.

*Lösung:* (a) $F = eE = \dot{p} \quad \Longrightarrow \quad p = eEt = \dfrac{mc\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$(1-\beta^2)e^2E^2t^2 = m^2\beta^2c^2$$

$$\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{eEt}\right)^2}}, \quad v(t) = c\beta(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = 1, \text{ d.h. } \lim_{t\to\infty} v(t) = c$$




(b) $t = \dfrac{p}{eE} = \dfrac{mc}{eE} \cdot \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \dfrac{mc\beta}{eE} = \dfrac{mv}{eE} = \dfrac{p_{\mathrm{klassisch}}}{eE} \quad$ für $\quad \beta \ll 1$

| $\beta$ | $\frac{t_{\mathrm{rel}}}{\frac{mc}{eE}}$ | $\frac{t_{\mathrm{klassisch}}}{\frac{mc}{eE}}$ |
|---|---|---|
| 0,99 | 7,0 | 0,99 |
| 0,5 | 0,58 | 0,50 |
| $10^{-6}$ | $10^{-6}$ | $10^{-6}$ |

4. (a) Zeige, dass der relativistische Ausdruck für die kinetische Energie für kleine Geschwindigkeiten näherungsweise in die klassische (nichtrelativistische) Formel übergeht.

(b) Zeige, dass man die relativistische Formel für die kinetische Energie **nicht** erhält, wenn man einfach in der nichtrelativistischen Formel $m$ durch $\gamma m$ ersetzt.

*Lösung:* (a) $W_{\text{kin}} = mc^2 \left( \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \approx mc^2 \left( \dfrac{1}{1-\frac{\beta^2}{2}} - 1 \right) \approx mc^2 \left( 1 + \dfrac{\beta^2}{2} - 1 \right) = \dfrac{m}{2} v^2$

(b) $W_{\text{kin,falsch}} = \dfrac{\gamma m}{2} v^2 = \dfrac{m\beta^2 c^2}{2\sqrt{1-\beta^2}}$

z.B. gilt für $\beta = 0{,}6$:

$W_{\text{kin}} = 0{,}225\, mc^2$, $W_{\text{kin,falsch}} = 0{,}25\, mc^2$, $W_{\text{kin,klassisch}} = 0{,}18\, mc^2$

5. Was ist mehr wert, 1 g Gold oder 1 g elektrischer Energie? Den Goldpreis und den Strompreis findet man sicher im Internet.

*Lösung:* $W = 0{,}001\,\text{kg} \cdot c^2 = 9 \cdot 10^{13}\,\text{J} = 2{,}5 \cdot 10^7\,\text{kWh} \mathrel{\widehat{=}} 2{,}5 \cdot 10^6$ € bei $10\,\dfrac{\text{Ct}}{\text{kWh}}$

Der Preis für ein Gramm Gold bewegt sich in der Größenordnung von 10 €bis 20 €.

6. Ein Eisenwürfel der Kantenlänge 10 cm wird von $\vartheta_1 = 20\,°\text{C}$ auf $\vartheta_2 = 300\,°\text{C}$ erwärmt. Berechne die absolute und relative Massenzunahme.

*Lösung:* $\Delta W = mc_{\text{Fe}}\Delta T = 7{,}86\,\text{kg} \cdot 0{,}452\,\dfrac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 280\,\text{K} = 9{,}95 \cdot 10^5\,\text{J}$

$\Delta m = \dfrac{\Delta W}{c^2} = 1{,}1 \cdot 10^{-11}\,\text{kg}, \quad \dfrac{\Delta m}{m} = 1{,}4 \cdot 10^{-12}$

7. Um wieviel Prozent ist Wasser der Temperatur 0 °C schwerer als Eis der Temperatur 0 °C?

*Lösung:* $\Delta W = mC_{\text{schmelz}} = m \cdot 334\,\dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\Delta m}{m} = \dfrac{\Delta W}{mc^2} = \dfrac{C_{\text{schmelz}}}{c^2} = 3{,}7 \cdot 10^{-10}\,\%$

8. Mit welcher Geschwindigkeit muss sich ein Körper bewegen, damit seine kinetische Energie gleich seiner Ruhenergie ist?

*Lösung:* $W_{\text{kin}} = mc^2 \left( \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = mc^2, \quad 1-\beta^2 = \dfrac{1}{4}, \quad \beta = \dfrac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}866$

9. Beweise: Ein Körper der Masse $m$ und der kinetischen Energie $W_{\text{k}}$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = \beta\, c$ mit

$$\beta = \frac{\sqrt{W_{\text{k}}\,(W_{\text{k}} + 2\,m\,c^2)}}{W_{\text{k}} + m\,c^2}$$

*Lösung:* $\dfrac{W_\mathrm{k}}{mc^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \quad\Longrightarrow\quad 1-\beta^2 = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{W_\mathrm{k}}{mc^2}\right)^2} \quad\Longrightarrow\quad$ die Beh.

10. Zwei Atomkerne mit den Massen $m$ stoßen mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 0{,}6\,c$ und $v_2 = -0{,}6\,c$ total unelastisch zusammen und bilden einen neuen Kern. Berechne die Masse des neuen Kerns.

*Lösung:* $Mc^2 = 2\gamma mc^2, \quad M = 2\gamma m = 2\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}m = \dfrac{2m}{0{,}8} = 2{,}5\,m$

11. Zur Erinnerung: $\boxed{1\,\mathrm{eV} = e\cdot 1\,\mathrm{V}}$

    (a) Die Masse des Elektrons ist $m_\mathrm{e} = 9{,}10938\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$. Berechne die Ruhenergie des Elektrons in MeV.

    (b) Die Ruhenergie des Protons ist $W_\mathrm{p} = 938{,}27\,\mathrm{MeV}$. Berechne die Masse des Protons.

*Lösung:* (a) $W_{\mathrm{e}0} = mc^2 = 8{,}18711\cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} = 0{,}511\,\mathrm{MeV}$

(b) $m_\mathrm{p} = \dfrac{W_{\mathrm{p}0}}{c^2} = 1{,}67262\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

12. Ein anfänglich ruhendes Teilchen der Ruhmasse $m$ und der Ladung $q$ wird von der Spannung $U$ beschleunigt.

    (a) Berechne Formeln für die Endgeschwindigkeit des Teilchens einmal klassisch (nichtrelativistisch) und einmal relativistisch. Berechne im relativistischen Fall auch das Verhältnis $\frac{W}{W_0}$.

    (b) Berechne $v_\mathrm{kl}$, $v_\mathrm{rel}$ und $\frac{W}{W_0}$ für ein Elektron und für ein Proton, einmal für $U = 2500\,\mathrm{V}$ und einmal für $U = 5{,}000\cdot 10^6\,\mathrm{V}$. Wie groß ist jeweils der relative Fehler der nichtrelativistischen Rechnung?

*Lösung:* (a) $v_\mathrm{kl} = \sqrt{\dfrac{2W_\mathrm{kin}}{m}} = \sqrt{\dfrac{2qU}{m}}, \quad v_\mathrm{rel} = c\cdot\dfrac{\sqrt{qU(qU+2mc^2)}}{qU+mc^2}$

$$\frac{W}{W_0} = \frac{W_0 + W_\mathrm{kin}}{W_0} = 1 + \frac{W_\mathrm{kin}}{mc^2} = 1 + \frac{qU}{mc^2}$$

(b) Elektron:

| $U$ | $v_\mathrm{kl}$ | $v_\mathrm{rel}$ | $\dfrac{v_\mathrm{kl}-v_\mathrm{rel}}{v_\mathrm{rel}}$ | $\gamma = \dfrac{W}{W_0}$ |
|---|---|---|---|---|
| 2500 V | $0{,}0989c$ | $0{,}0986c$ | 0,37 % | 1,0049 |
| $5\cdot 10^6$ V | $4{,}42c > c$!! | $0{,}9957c$ | 344 % | 10,78 |

Proton:

| $U$ | $v_\mathrm{kl}$ | $v_\mathrm{rel}$ | $\dfrac{v_\mathrm{kl}-v_\mathrm{rel}}{v_\mathrm{rel}}$ | $\gamma = \dfrac{W}{W_0}$ |
|---|---|---|---|---|
| 2500 V | $0{,}00231c$ | $0{,}00231c$ | $2\cdot 10^{-4}$ % | $1 + 2{,}6\cdot 10^{-6}$ |
| $5\cdot 10^6$ V | $0{,}1032c$ | $0{,}1028c$ | 0,40 % | 1,0053 |

13. In vielen Büchern findet man folgende Faustregel:

$$\boxed{\text{Bis zu } v = 0{,}1\,c \text{ darf klassisch gerechnet werden.}}$$

(a) Berechne den relativen Fehler der kinetischen Energie, wenn für $v = 0{,}1\,c$ klassisch gerechnet wird.

(b) Bis zu welcher Beschleunigungsspannung $U$ darf nach unserer Faustregel für Elektronen bzw. Protonen klassisch gerechnet werden?

*Lösung:* (a) Mit $\beta = 0{,}1$ ist $\delta_{\text{rel}} = \dfrac{W_{\text{kin}} - W_{\text{kin,klassisch}}}{W_{\text{kin}}}$:

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) - \dfrac{m}{2}\beta^2c^2}{mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)} = 1 - \frac{\beta^2}{2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)} = 0{,}0075 = 0{,}75\,\%$$

(b) $U = \dfrac{W_{\text{kin}}}{e} = \dfrac{mc^2}{e}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}1^2}} - 1\right) = 0{,}00504 \cdot \dfrac{mc^2}{e}$

$e^-$ : $U = 0{,}00504 \cdot 0{,}511 \cdot 10^6\,\text{V} = 2{,}57\,\text{kV}$
$p^+$ : $U = 0{,}00504 \cdot 938{,}27 \cdot 10^6\,\text{V} = 4{,}73\,\text{MV}$

14. (a) Berechne den Lorentzfaktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ für ein Proton mit $W = 400\,\text{GeV}$ (Superprotonensynchrotron am CERN) und für ein Elektron mit $W = 21\,\text{GeV}$ (Linearbeschleuniger in Stanford, USA). Wie groß ist $\beta$ in beiden Fällen?

(b) In welcher Eigenzeit legt ein Elektron mit der Energie 1 J die Strecke vom Quasar 3C 48 bis zur Erde ($4{,}8 \cdot 10^9$LJ) zurück? Welche Energie müsste man aufbringen, um ein 100 t schweres Raumschiff in der gleichen Eigenzeit zu diesem Quasar zu schicken?

*Lösung:* (a) $\gamma = \dfrac{W}{W_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \dfrac{1}{2\gamma^2}, \quad \text{da } \dfrac{1}{\gamma^2} \ll 1$

Proton : $\gamma = \dfrac{400\,\text{GeV}}{0{,}93827\,\text{GeV}} = 426 \qquad \beta = 1 - 2{,}75 \cdot 10^{-6}$

Elektron : $\gamma = \dfrac{21\,000\,\text{MeV}}{0{,}511\,\text{MeV}} = 4{,}11 \cdot 10^4 \qquad \beta = 1 - 2{,}96 \cdot 10^{-10}$

(b) $\gamma = \dfrac{1\,\text{J}}{0{,}511 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{J}} = 1{,}22 \cdot 10^{13}$

$\beta = 1 - \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{2\gamma^2} = 3{,}35 \cdot 10^{-27}$

$$\tau = \frac{s}{c}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{s}{c}\sqrt{\underbrace{(1-\beta)}_{\alpha}\underbrace{(1+\beta)}_{\approx 2}} \approx \frac{s}{c}\sqrt{2\alpha} = \frac{s}{c\gamma} = \frac{4{,}8 \cdot 10^9\,\text{a}}{1{,}22 \cdot 10^{13}} = 12\,400\,\text{s}$$

oder $\tau = 3\,\text{h}\,27\,\text{min}$

Im Raumschiff steckt die kinetische Energie $W_{\text{k}} = (\gamma - 1)mc^2 \approx \gamma mc^2 = 1{,}1 \cdot 10^{35}$ J.

Die tatsächlich aufzuwendende Energie ist viel größer, da auch in der von der Rakete ausgestoßenen Masse (heiße Gase, Photonen) Energie steckt (siehe Raketenaufgabe zum Kapitel *Energie-Impuls-Beziehungen*). Für die Photonenrakete ist die aufzuwendende Energie $\approx 2\gamma mc^2$.

15. Die Erdoberfläche trägt die Ladung $Q = 5{,}77 \cdot 10^5\,\mathrm{C}$. Von der Oberfläche bis zur Ionosphäre in ungefähr 60 km Höhe herrscht ein fast homogenes elektrisches Feld. Berechne die Masse dieses Feldes.

*Lösung:* In erster Näherung verwenden wir einen Plattenkondensator mit der Plattenfläche $A = 4\pi R^2$, $R = 6{,}38 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ und $d = h = 6 \cdot 10^4\,\mathrm{m}$:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}, \quad W = \frac{1}{2}CU^2, \quad U = \frac{Q}{C}, \quad W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} = 2{,}21 \cdot 10^{12}\,\mathrm{J}$$

$$m = \frac{W}{c^2} = 24{,}5\,\mathrm{mg}$$

Genauer ist die Kapazitätsformel für den Kugelkondensator mit $r = R + h$:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R} - \frac{1}{r}} \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{W}{c^2} = 24{,}3\,\mathrm{mg}$$

16. Ein überzeugter „Antirelativist“ bringt folgendes Argument: „Ein geladenes Teilchen bewegt sich in einem äußeren elektrischen Feld $\vec{E}$. Das zunächst ruhende Teilchen verliert die potentielle Energie $\Delta W_{\mathrm{pot}}$ und gewinnt die kinetische Energie $\Delta W_{\mathrm{kin}}$. Dabei gilt der Energiesatz $\Delta W_{\mathrm{kin}} + \Delta W_{\mathrm{pot}} = 0$. Die Gesamtenergie des Teilchens ist dann

$$W_{\mathrm{ges}} = m\,c^2 + \Delta W_{\mathrm{kin}} + \Delta W_{\mathrm{pot}} = m\,c^2 \neq \gamma m\,c^2 = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

was einen Widerspruch ergibt.“ Wo steckt der Fehler in dieser Argumentation?

*Lösung:* Der Fehler liegt einmal in einer falschen Interpretation von $\mathrm{W_{ges}}$. Wenn $\mathrm{W_{ges}}$ die Gesamtenergie des Teilchens sein soll, dann gilt $W_{\mathrm{ges}} = m\,c^2 + \Delta W_{\mathrm{kin}} = \gamma m\,c^2 = \dfrac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Zum Anderen wird auch $\Delta W_{\mathrm{pot}}$ falsch gedeutet, da die potentielle Energie nicht zum Teilchen, sondern zum System Teilchen-Feld gehört. Da das Feld auch von mindestens einem Teilchen erzeugt werden muss, lautet der vollständige Energiesatz (wir nehmen ein felderzeugendes Teilchen mit der Masse $M$ an):

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{ges}} = mc^2 + Mc^2 + W_{\mathrm{pot}} &= \gamma_1 mc^2 + \gamma_2 Mc^2 + W'_{\mathrm{pot}} \\ &= mc^2 + \Delta W_{\mathrm{kin1}} + Mc^2 + \Delta W_{\mathrm{kin2}} + W'_{\mathrm{pot}} \end{aligned}$$

# 11. Energie-Impuls-Beziehungen

1. Die Physiker der *Enterprise* haben ein kompaktes Synchrotron entwickelt, dessen Teilchen von einem Magnetfeld der Stärke $B = 1{,}00 \cdot 10^3\,\mathrm{T}$ auf eine Kreisbahn mit dem Radius $r = 100\,\mathrm{m}$ gezwungen werden.
   (a) Auf welche Maximalenergie $W'$ (in J und in TeV) können Elektronen mit dieser Maschine beschleunigt werden? Verwende $u' = \overline{\beta}'c$ für die Elektronengeschwindigkeit und $\overline{\gamma}' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\overline{\beta}'^2}}$.
   (b) Die *Enterprise* rast mit $v = \beta c$ auf ein feindliches Klingonenschiff zu und schleudert ihm einen vom Synchrotron beschleunigten Elektronenstrahl entgegen. Drücke den Impuls $p'$ eines Elektrons im System der *Enterprise* durch $W'$ aus und berechne dann allgemein die Energie $W$ und den Impuls $p$ eines Elektrons im System des Klingonenschiffs, ausgedrückt durch $W'$, $W_0 = m_\mathrm{e}c^2$ und $\beta$. Vereinfache die Ergebnisse für $1-\beta \ll 1$ und $W' \gg W_0$.
   (c) Im System der *Enterprise* hat der abgefeuerte Elektronenstrahl die Stromstärke $I = 1{,}00\,\mathrm{A}$ und dauert genau $1{,}00\,\mathrm{s}$. Welche Gesamtenergie $W_\mathrm{g}$ und welchen Gesamtimpuls $p_\mathrm{g}$ hat der Strahl im System des Klingonenschiffs für $\beta = 0{,}9999$?
   (d) Die Masse des Klingonenschiffs ist $m_\mathrm{K} = 1{,}00 \cdot 10^6\,\mathrm{kg}$ und der gesamte Elektronenstrahl wird vom Schiff absorbiert. Welche Geschwindigkeit $v_\mathrm{K}$ und welche kinetische Energie $W_\mathrm{K}$ hat das Schiff nach dem Treffer ($v_\mathrm{K} \ll c$)? Reicht die restliche absorbierte Energie aus, das Schiff zu verdampfen?

*Lösung:* (a) $\dfrac{\overline{\gamma}' m_\mathrm{e} u'^2}{r} = eu'B \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\overline{\gamma}'\overline{\beta}' m_\mathrm{e} c}{r} = eB \quad\Longrightarrow\quad \overline{\gamma}'\overline{\beta}' = \dfrac{eBr}{m_\mathrm{e}c} = 5{,}87 \cdot 10^7 \gg 1$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\gamma}' \approx \frac{eBr}{m_\mathrm{e}c} = 5{,}87 \cdot 10^7,\ \text{exakt: } \overline{\gamma}' = \sqrt{1 + \left(\frac{eBr}{m_\mathrm{e}c}\right)^2}$$

$$W' = \overline{\gamma}' m_\mathrm{e} c^2 = eBrc = 4{,}80 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J} = 30{,}0\,\mathrm{TeV}$$

(b) $W'^2 = W_0^2 + p'^2c^2 \quad\Longrightarrow\quad p' = \dfrac{1}{c}\sqrt{W'^2 - W_0^2}$

Lorentztransformation: $\dfrac{W}{c} = \gamma\left(\dfrac{W'}{c} + \beta p'\right) \quad\Longrightarrow$

$$W = \gamma\left(W' + \beta c p'\right) = \gamma\left(W' + \beta\sqrt{W'^2 - W_0^2}\right) \approx 2\gamma W'$$

$$p = \gamma\left(p' + \beta\frac{W'}{c}\right) = \frac{\gamma}{c}\left(\sqrt{W'^2 - W_0^2} + \beta W'\right) \approx \frac{2\gamma W'}{c}$$

(c) Zahl der Elektronen: $N = \dfrac{1\,\mathrm{As}}{e} = 6{,}24 \cdot 10^{18}$

$\beta = 0{,}9999 \quad\Longrightarrow\quad \gamma = 70{,}71 \quad\Longrightarrow\quad W = 2\gamma W' = 6{,}79 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J} = 4{,}24 \cdot 10^{3}\,\mathrm{TeV}$

$W_\mathrm{g} = NW = 4{,}24 \cdot 10^{15}\,\mathrm{J}, \quad p_\mathrm{g} = \dfrac{W_\mathrm{g}}{c} = 1{,}41 \cdot 10^{7}\,\dfrac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$

(d) $v_\mathrm{K} \ll c \quad\Longrightarrow\quad$ nichtrelativistische Rechnung, d.h.

$p_\mathrm{K} = p_\mathrm{g} = (m_\mathrm{K} + Nm_\mathrm{e})v_\mathrm{K} \approx m_\mathrm{K} v_\mathrm{K}$ wegen $Nm_\mathrm{e} = 5{,}7 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{kg} \ll m_\mathrm{K}$

$v_\mathrm{K} = \dfrac{p_\mathrm{g}}{m_\mathrm{K}} = 14{,}1\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad W_\mathrm{K} = \dfrac{p_\mathrm{K}^2}{2(m_\mathrm{K} + Nm_\mathrm{e})} \approx \dfrac{p_\mathrm{g}^2}{2m_\mathrm{K}} = 1{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{J}$

$\Delta W = W_\mathrm{g} - W_\mathrm{K} \approx W_\mathrm{g}, \quad \dfrac{\Delta W}{m_\mathrm{K}} = 4{,}24 \cdot 10^{6}\,\dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} \gg q_\mathrm{Fe} = 6{,}3 \cdot 10^{4}\,\dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$

2. Ein Teilchen der Masse $m$ bewegt sich in einem Inertialsystem mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ und es ist $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Die Gesamtenergie des Teilchens ist $W$, seine kinetische Energie $W_\mathrm{k}$, seine Ruhenergie $W_0$ und sein Impuls $p$. Mit $\alpha$ wird das Verhältnis $\dfrac{W_\mathrm{k}}{W_0}$ abgekürzt.

   (a) Beweise in nachvollziehbarer Weise:

   $$p = mc\sqrt{\gamma^2 - 1} = mc\sqrt{\alpha(\alpha+2)}$$

   (b) Unser Teilchen der Ladung $q$ tritt senkrecht zu den Feldlinien in ein Magnetfeld mit der Kraftflussdichte $B$ ein und beschreibt eine Kreisbahn mit Radius $r$. Drücke $r$ durch $W_\mathrm{k}$ aus.

   (c) Welche Beschleunigungsspannung $U$ hat ein zunächst ruhendes Elektron durchlaufen, das in eiem Beschleuniger bei $B = 5{,}0\,\mathrm{T}$ eine Kreisbahn mit $r = 4{,}0\,\mathrm{km}$ beschreibt?

*Lösung:* (a) $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad\Longrightarrow\quad \beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} = \dfrac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}, \qquad \alpha = \dfrac{W_\mathrm{k}}{W_0} = \dfrac{(\gamma-1)W_0}{W_0} = \gamma - 1$

$p = \gamma m v = \gamma\beta m c = mc\sqrt{\gamma^2-1} = mc\sqrt{(\gamma-1)(\gamma+1)} = mc\sqrt{\alpha(\alpha+2)}$

Oder mit der Energie-Impuls-Relation:

$W^2 = W_0^2 + p^2c^2 \quad\Longrightarrow\quad p^2c^2 = (\gamma^2-1)m^2c^4 \quad\Longrightarrow\quad p = mc\sqrt{\gamma^2-1}$

(b) $\dfrac{\gamma m v^2}{r} = qvB \quad\Longrightarrow$

$$r = \frac{\gamma m v}{qB} = \frac{\gamma\beta m c}{qB} = \frac{p}{qB} = \frac{mc\sqrt{\alpha(\alpha+2)}}{qB} = \frac{mc\sqrt{\frac{W_\mathrm{k}}{mc^2}\left(\frac{W_\mathrm{k}}{mc^2}+2\right)}}{qB} = \frac{\sqrt{W_\mathrm{k}(W_\mathrm{k}+2mc^2)}}{qBc}$$

(c) $W_\mathrm{k}(W_\mathrm{k}+2mc^2) = W_\mathrm{k}^2 + 2mc^2 W_\mathrm{k} = r^2e^2B^2c^2 \quad\Longrightarrow$

$W_\mathrm{k} = -mc^2 + \sqrt{m^2c^4 + r^2e^2B^2c^2} = 9{,}6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{J} = 6{,}0\cdot 10^{12}\,\mathrm{eV}, \qquad U = 6{,}0\cdot 10^{12}\,\mathrm{V}$

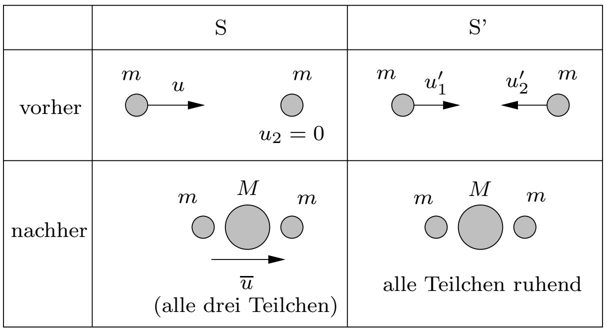
oder:

$$p = reB = mc\sqrt{\gamma^2-1} \quad\Longrightarrow\quad \gamma = \sqrt{1+\frac{r^2e^2B^2}{m^2c^2}} = 1{,}17\cdot 10^7$$

$W_\mathrm{k} = (\gamma-1)mc^2 = 1{,}17\cdot 10^7 \cdot 0{,}511\,\mathrm{MeV} = 6{,}0\cdot 10^{12}\,\mathrm{eV}$

3. **Teilchenerzeugung**

Im Laborsystem S stößt ein Teilchen der Masse $m$ auf ein ruhendes Teilchen mit der gleichen Masse $m$. Nach dem Stoß ist ein weiteres Teilchen mit der Masse $M$ vorhanden. Im Schwerpunktsystem S' haben die Teilchen vor dem Stoß die Geschwindigkeiten $u_1'$ und $u_2'$. Die Relativgeschwindigkeit von S' zu S sei $v$. Weiter verwenden wir die Bezeichnungen $\beta = \dfrac{v}{c}$ und $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.




| | | |
|---|---|---|
| $W_\mathrm{k}$ | : | kinetische Energie des bewegten Teilchens in S vor dem Stoß |
| $W_\mathrm{k}'$ | : | kinetische Energie **eines** Teilchens in S' vor dem Stoß |
| $W$ | : | Gesamtenergie in S |
| $W'$ | : | Gesamtenergie in S' |

(a) Beweise: $u_1' = v$ und $u_2' = -v$.

(b) Beweise: Die Masse $M$ des erzeugten Teilchens ist dann maximal, wenn alle drei Teilchen nach dem Stoß in S' ruhen.

Für das Weitere nehmen wir an, dass $M$ maximal ist, d.h. alle drei Teilchen ruhen nach dem Stoß in S'.

(c) Beweise: $\boxed{W = \gamma W'}$, $\boxed{\gamma = 1 + \dfrac{M}{2m}}$ und $\boxed{\gamma^2 = \dfrac{W_\mathrm{k}}{2mc^2} + 1}$

(d) Beweise: $\boxed{\dfrac{M}{2m} = \sqrt{1+\alpha} - 1}$ mit $\alpha = \dfrac{W_\mathrm{k}}{2mc^2}$.

Wie vereinfacht sich diese Beziehung für $W_\mathrm{k} \gg mc^2$?

(e) Elementarteilchen werden meist paarweise erzeugt (Teilchen und Antiteilchen). Welche maximale Masse $\overline{M}$ kann ein Teilchen eines Paares haben, das durch

Proton-Proton-Stöße erzeugt wird mit
$W_\mathrm{k} = 6{,}4\,\mathrm{GeV}$ (Bevatron in Berkley, 1954)
$W_\mathrm{k} = 900\,\mathrm{GeV}$ (Tevatron am Fermilab, 80-er-Jahre)
$W_\mathrm{k} = 7\,\mathrm{TeV}$ (LHC, Large-Hadron-Collider, CERN, ca. 2005, 27 km Umfang).
Wie stark muss das Magnetfeld im LHC sein?

(f) Drücke $W_\mathrm{k}$ durch $M$ und $m$ aus. Wie groß muss $W_\mathrm{k}$ sein, um durch einen Proton-Proton-Stoß

i. ein Proton-Antiproton-Paar

ii. ein Paar von Higgsteilchen ($\overline{M}c^2 \approx 500\,\mathrm{GeV}$)

zu erzeugen?

(g) Die Kosten eines Ringbeschleunigers sind ungefähr zu seinem Umfang proportional (supraleitende Magnetspulen). Man kann die Teilchen eines Beschleunigers auf ruhende Teilchen schießen (Typ 1, Festtarget) oder die Strahlen von zwei Beschleunigern (einer als Speicherring) frontal aufeinander prallen lassen (Typ 2, Collider). Berechne das Verhältnis der Kosten der beiden Typen in Abhängigkeit von $M$ und $m$. Es darf vorausgesetzt werden, dass $W_\mathrm{k} \gg mc^2$. Wie groß ist dieses Verhältnis speziell für die Erzeugung von Higgsteilchen? Wie groß wäre der Radius eines Festtargetbeschleunigers mit der gleichen Schwerpunktsenergie wie beim LHC?

*Lösung:* (a) $u_2 = u_2' \oplus v = \dfrac{u_2' + v}{1 + \frac{u_2' v}{c^2}} = 0 \quad\Longrightarrow\quad u_2' = -v$, Impulssatz in S': $u_1' = -u_2' = v$

(b) Energiesatz in S': $2\gamma mc^2 = (2m + M)c^2 + W_{\mathrm{k,ges}}$'

$M$ ist dann maximal, wenn $W_{\mathrm{k,ges}}' = 0$, d.h. wenn alle Teilchen ruhen.

(c) $\overline{u} = 0 \oplus v = v \quad\Longrightarrow\quad W = \gamma(2m + M)c^2 = \gamma W'$

In S': $2\gamma mc^2 = (2m + M)c^2 \quad\Longrightarrow\quad \gamma = 1 + \dfrac{M}{2m}$

In S: $W = 2mc^2 + W_\mathrm{k} = \gamma(2m + M)c^2 = \gamma W' = 2\gamma^2 mc^2 \quad\Longrightarrow\quad \gamma^2 = \dfrac{W_\mathrm{k}}{2mc^2} + 1$

(d) $\dfrac{M}{2m} = \gamma - 1 = \sqrt{1 + \alpha} - 1, \quad W_\mathrm{k} \gg mc^2 \quad\Longrightarrow\quad \alpha \gg 1 \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{M}{2m} \approx \sqrt{\alpha}$

(e) Mit $m = m_\mathrm{p}$ ist $2mc^2 = 1{,}877\,\mathrm{GeV}$. $\overline{M} = \frac{M}{2} = m(\sqrt{1 + \alpha} - 1) \approx m\sqrt{\alpha}$

| $W_\mathrm{k}$ | $\alpha$ | $\frac{\overline{M}}{m_\mathrm{p}}$ | $\frac{\overline{M}c^2}{\mathrm{GeV}}$ | $\frac{W_\mathrm{k}}{2\overline{M}c^2}$ |
|---|---|---|---|---|
| 6,4 GeV | 3,41 | 1,10 | 1,03 | 3,10 |
| 900 GeV | 480 | 20,9 | 19,6 | 22,9 |
| 7 TeV | 3730 | 60,1 | 56,4 | 62,1 |

Mit $\beta_0 = \dfrac{u}{c}$ und $\gamma_0 = \sqrt{1 - \beta_0^2}$ folgt:

$W = (\gamma_0 + 1)mc^2 = \gamma W' = 2\gamma^2 mc^2 \quad\Longrightarrow\quad \gamma_0 = 2\gamma^2 - 1$

$\gamma_0^2 - 1 = 4\gamma^2(\gamma^2 - 1) = 4\alpha(1+\alpha)$

$$\frac{\gamma_0 m u^2}{r} = euB \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{mc}{re}\gamma_0\beta_0 = \frac{mc}{re}\sqrt{\gamma_0^2 - 1} = \frac{mc}{re} \cdot 2\sqrt{\alpha(1+\alpha)} \approx \frac{mc}{re} \cdot 2\alpha$$

$$B \approx \frac{mc}{re} \cdot \frac{2W_\mathrm{k}}{2mc^2} = \frac{W_\mathrm{k}}{rec} = 5{,}43\,\mathrm{T}$$

(f) $W_\mathrm{k} = 2mc^2(\gamma^2 - 1) = 2mc^2\left[\left(1 + \frac{M}{2m}\right)^2 - 1\right] = Mc^2\left(2 + \frac{M}{2m}\right) = 2\overline{M}c^2\left(2 + \frac{\overline{M}}{m}\right)$

p$\overline{\text{p}}$: $\overline{M} = m \quad \Longrightarrow \quad W_\mathrm{k} = 6mc^2 = 5{,}63\,\mathrm{GeV} = 3 \cdot 2\overline{M}c^2$

Higgs: $W_\mathrm{k} = 10^3\,\mathrm{GeV} \cdot \left(2 + \frac{500}{0{,}938}\right) = 535\,\mathrm{TeV} = 535 \cdot 2\overline{M}c^2$

(g) Der Preis $x$ ist zum Radius der Anlagen proportional:

$$\frac{x}{x'} = \frac{r}{2r'} = \frac{\frac{mc}{eB}\sqrt{\gamma_0^2 - 1}}{2 \cdot \frac{mc}{eB}\sqrt{\gamma^2 - 1}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\gamma_0^2 - 1}{\gamma^2 - 1}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4\alpha(1+\alpha)}{\alpha}} = \sqrt{1+\alpha} = \gamma = 1 + \frac{\overline{M}}{m}$$

Für $\overline{M}c^2 = 500\,\mathrm{GeV}$: $\dfrac{x}{x'} = 534$.

Ein Festtargetbeschleuniger mit der gleichen Schwerpunktsenergie wie der LHC ($\overline{M}c^2 = 7\,\mathrm{TeV}$) würde 7460 mal soviel kosten wie der LHC, sein Umfang wäre ungefähr $4 \cdot 10^5$ km.