SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Elektrizitätslehre (Physik)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

5. Juni 2012

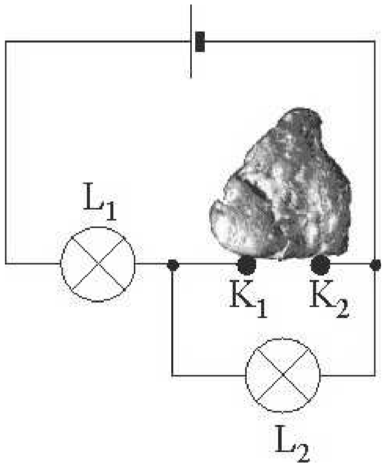
Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Elektrizitätslehre S1

1. Stromkreis

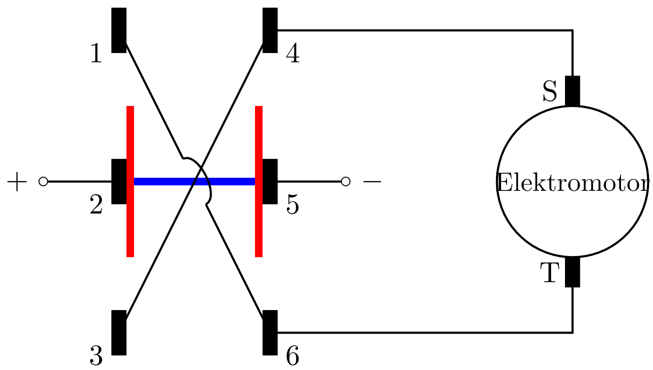
1.
- Wärmewirkung: Föhn, Heizlüfter, Boiler, Wasserkocher, Bügeleisen
- Leuchtwirkung: Leuchtdiode, Glühbirne
- magnetische Wirkung: Elektromagnet, Relais, Klingel
- chemische Wirkung: galvanische Abscheidung

2. 

Grundprinzip: Man benutzt den Goldklumpen als Schalter. Er überbrückt die beiden Kontakte K_1 und K_2. Wird der Goldklumpen gestohlen ist der Schalter offen.
Ist der Goldklumpen vorhanden, so schließt er (als guter elektrischer Leiter) die Lampe L_2 kurz, der Strom fließt durch L_1 und den Goldklumpen. Wird der Goldklumpen gestohlen, so ist kein Leiter zwischen K_1 und K_2, der Strom fließt durch L_1 und L_2.

3. (a) Es leuchten alle vier Lämpchen. Dabei leuchten jeweils L1 und L4 bzw. L2 und L3 gleich hell. L1 und L4 leuchten heller als L2 und L3: Der Strom der durch L1 bzw. L4 fließt teilt sich zu gleichen Teilen auf L2 und L3 auf.

   (b) Jetzt leuchten nur noch L1 und L4 (gleich hell). L2 und L3 sind kurzgeschlossen (durch den geschlossenen Schalter S überbrückt).

4. 

2. Ladung und Stromstärke

1. Gemeinsam ist den drei Phänomenen ein Ungleichgewicht. Daraus resultieren Ströme, die aufrecht erhalten werden, bis sich das System im Gleichgewicht befindet.

   Beim Blitz fließen elektrische Ladungen aufgrund eines Ladungsunterschieds (Potenzialunterschieds) zwischen Wolke und Erde.

   Der Pudding kühlt sich ab und das Kühlwasser erwärmt sich bis zum Temperaturausgleich.

   Die Luft strömt solange aus dem Fahrradschlauch aus, bis der Druck im Reifen dem äußeren Luftdruck entspricht.

2. $N = \frac{Q}{e} = 3{,}0 \cdot 10^9$

3. (a) $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{27\,\mathrm{C}}{60\,\mathrm{s}} = 0{,}45\,\mathrm{A}$

   (b) $\Delta Q = I\Delta t = 3\,\mathrm{A} \cdot 3600\,\mathrm{s} = 10800\,\mathrm{As} \approx 1{,}1 \cdot 10^4\,\mathrm{C}$

   (c) $\Delta t = \frac{\Delta Q}{I} = \frac{5\,\mathrm{As}}{2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{A}} = 2{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{s} \approx 6{,}9\,\mathrm{h}$

   (d) $\Delta Q = I\Delta t = 4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{A} \cdot 1\,\mathrm{s} = 4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$, $n = \frac{\Delta Q}{e} = \frac{4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = 2{,}5 \cdot 10^{11}$

4. (a) $m = 6{,}24 \cdot 10^{18} \cdot 1{,}79 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg} = 1{,}12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} = 1{,}12\,\mathrm{mg}$

   (b) $\Delta t = \frac{6{,}24 \cdot 10^{18}}{10^9\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 6{,}24 \cdot 10^9\,\mathrm{s} = \frac{6{,}24 \cdot 10^9\,\mathrm{a}}{3600 \cdot 24 \cdot 365{,}25} \approx 198\,\mathrm{a}$

5. (a) Zum Knoten: $I_{\text{hinein}} = (0{,}238 + 39{,}8 + 2{,}7)\,\mathrm{mA} = 42{,}738\,\mathrm{mA}$
   Vom Knoten weg: $I_{\text{heraus}} = (50 + 0{,}048 + 3{,}14 + 19{,}4)\,\mathrm{mA} = 72{,}588\,\mathrm{mA}$

   I_1 fließt zum Knoten: $I_1 = (72{,}588 - 42{,}738)\,\mathrm{mA} = 29{,}85\,\mathrm{mA}$

   Der größte Fehler der gegebenen Ströme ist $0{,}5\,\mathrm{mA}$ (bei $0{,}050\,\mathrm{A}$), daher Runden auf ganze mA: $I_1 \approx 30\,\mathrm{mA}$.

   (b) $I_1 = 1{,}8\,\mathrm{A}$, $I_2 = 1{,}8\,\mathrm{A} - 0{,}3\,\mathrm{A} = 1{,}5\,\mathrm{A}$, $I_4 = 1{,}5\,\mathrm{A} - 1{,}2\,\mathrm{A} = 0{,}3\,\mathrm{A}$ (nach oben)

   $I_3 = 0{,}3\,\mathrm{A} + 0{,}3\,\mathrm{A} = 0{,}6\,\mathrm{A}$

   (c) $I_1 = 201\,\mu\mathrm{A}$, $I_2 = 180 I_1 = 36{,}18\,\mathrm{mA}$, $I_4 = I_5 = I_1 + I_2 = 36{,}381\,\mathrm{mA}$

   $I_3 = I_5 - 0{,}001\,\mathrm{mA} = 36{,}38\,\mathrm{mA}$

6. (a) $I_2 = I_3 - I_1 = 113\,\mathrm{mA} - 36\,\mathrm{mA} = 77\,\mathrm{mA} = 0{,}077\,\mathrm{A}$

   (b) $\Delta Q_1 = 5 \cdot 60\,\mathrm{s} \cdot 0{,}036\,\mathrm{A} = 10{,}8\,\mathrm{C} \approx 11\,\mathrm{C}$

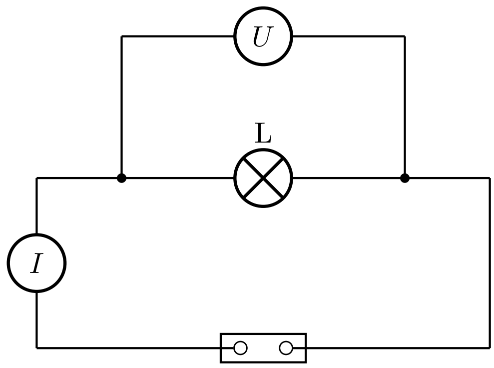
   Zahl der Elektronen: $n = \dfrac{\Delta Q_1}{e} = 6{,}7 \cdot 10^{19}$

   (c) $\Delta Q_2 = 2 \cdot 10^{20} \cdot e = 32\,\mathrm{As}$

   $$\Delta t = \frac{\Delta Q_2}{I_2} = \frac{32\,\mathrm{As}}{0{,}077\,\mathrm{A}} = 4{,}2 \cdot 10^2\,\mathrm{s} = 7{,}0\,\mathrm{min}$$

3. Spannung - Stromstärke - Widerstand

1. (a) Schaltskizze:



   (b) $R = \frac{3{,}2\,\mathrm{V}}{0{,}24\,\mathrm{A}} = 15\,\Omega$

2. $8\,\mathrm{V}; -8\,\mathrm{V}; 0; 4\,\mathrm{V}$.

3. Mögliche Lösungen:

(a) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{40\,\Omega} + \dfrac{1}{10\,\Omega} = \dfrac{5}{40\,\Omega} = \dfrac{1}{8\,\Omega}$

$R = 8\,\Omega$

(b) $\dfrac{1}{R'} = \dfrac{1}{20\,\Omega} + \dfrac{1}{10\,\Omega} + \dfrac{1}{10\,\Omega} = \dfrac{5}{20\,\Omega} = \dfrac{1}{4\,\Omega}$

$R = R' + R' = 8\,\Omega$

(c) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{40\,\Omega} + \dfrac{1}{40\,\Omega} + \dfrac{1}{40\,\Omega} = \dfrac{5}{40\,\Omega} = \dfrac{1}{8\,\Omega}$

$R = 8\,\Omega$

(d) $\dfrac{1}{R_1} = \dfrac{1}{30\,\Omega} + 3 \cdot \dfrac{1}{10\,\Omega} = \dfrac{10}{30\,\Omega} = \dfrac{1}{3\,\Omega}$

$R_2 = \dfrac{10\,\Omega}{2} = 5\,\Omega,\ R = R_1 + R_2 = 8\,\Omega$

(e) $\dfrac{1}{R_1} = \dfrac{1}{15\,\Omega} + \dfrac{1}{10\,\Omega} = \dfrac{5}{30\,\Omega} = \dfrac{1}{6\,\Omega}$

$R_2 = \dfrac{10\,\Omega}{5} = 2\,\Omega,\ R = R_1 + R_2 = 8\,\Omega$

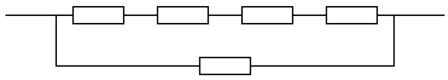
(f) $\dfrac{1}{R_1} = \dfrac{1}{30\,\Omega} + \dfrac{1}{30\,\Omega} + \dfrac{1}{10\,\Omega} = \dfrac{1}{6\,\Omega}$

$R_2 = \dfrac{10\,\Omega}{5} = 2\,\Omega,\ R = R_1 + R_2 = 8\,\Omega$

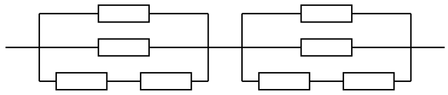
(g) $R = \dfrac{10\,\Omega}{2} + \dfrac{10\,\Omega}{5} + \dfrac{10\,\Omega}{10} = 8\,\Omega$

(h) $R = 4 \cdot \dfrac{10\,\Omega}{5} = 8\,\Omega$

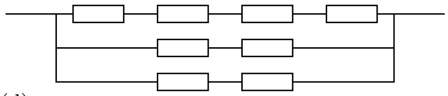
(a)



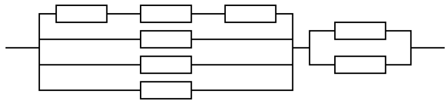
(b)



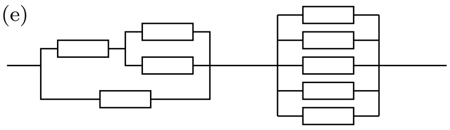
(c)



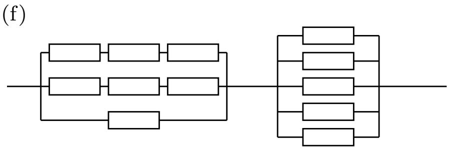
(d)



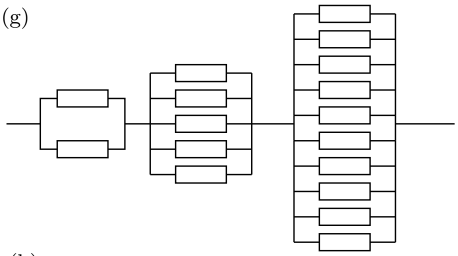
(e)



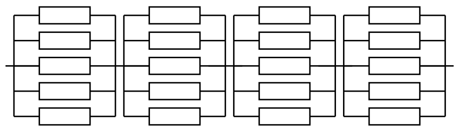
(f)



(g)



(h)

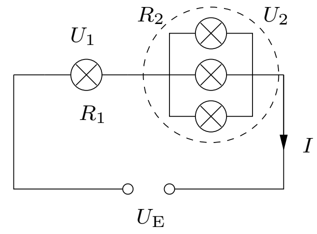


4. (a) $P = U_\mathrm{S} I_\mathrm{S} = \dfrac{U_\mathrm{S}^2}{R_\mathrm{L}} \quad\Longrightarrow\quad R_\mathrm{L} = \dfrac{U_\mathrm{S}^2}{P} = \dfrac{115^2\,\mathrm{V}^2}{125\,\mathrm{W}} = 105{,}8\,\Omega \approx 106\,\Omega$

(b) $R_\mathrm{ges} = \dfrac{R_\mathrm{L}}{2} + \dfrac{R_\mathrm{L}}{3} = \dfrac{5}{6} R_\mathrm{L} = 88{,}2\,\Omega, \quad I = \dfrac{U_\mathrm{E}}{R_\mathrm{ges}} = 2{,}61\,\mathrm{A}$

$U_1 = \dfrac{R_\mathrm{L}}{2} \cdot I = 138\,\mathrm{V}, \quad U_2 = \dfrac{R_\mathrm{L}}{3} \cdot I = 92{,}0\,\mathrm{V}$

(c) Die linken Lampen (U_1) sind überlastet.

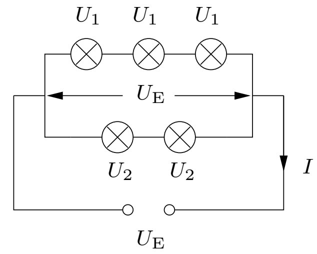


$$R_{\text{ges}} = R_{\text{L}} + \frac{R_{\text{L}}}{3} = \frac{4}{3}R_{\text{L}} = 141\,\Omega, \quad I = \frac{U_{\text{E}}}{R_{\text{L}}} = 1{,}63\,\text{A}$$

$$U_1 = \frac{R_{\text{L}}}{2} \cdot I = 172{,}5\,\text{V}, \quad U_2 = \frac{R_{\text{L}}}{3} \cdot I = 57{,}5\,\text{V}$$

$\Longrightarrow$ Die linke Lampe brennt sofort durch und dann brennt keine Lampe mehr.

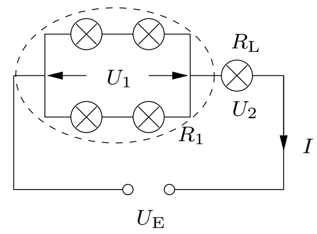
(d) 1. Möglichkeit:



$$U_1 = \frac{U_{\text{E}}}{3} = 76{,}7\,\text{V},$$

$$U_2 = \frac{U_{\text{E}}}{2} = 115\,\text{V}$$

2. Möglichkeit:



$$R_1 = \frac{R_{\text{L}} + R_{\text{L}}}{2} = R_{\text{L}}$$

$$U_1 = U_2 = \frac{U_{\text{E}}}{2} = 115\,\text{V}$$

An den vier linken Lampen liegt jeweils die Spannung $\frac{U_1}{2} = 57{,}5\,\text{V}$.

5. (a) $R = \frac{U}{I} = \frac{220\,\text{V}}{0{,}11\,\text{A}} = 2{,}0\,\text{k}\Omega$

(b) $I = \frac{U}{R} = \frac{15\,0000\,\text{V}}{35\,\frac{\text{V}}{\text{A}}} = 4{,}3 \cdot 10^2\,\text{A}$

(c) $U = RI = 48 \cdot 10^3\,\Omega \cdot 25 \cdot 10^{-6}\,\text{A} = 1{,}2\,\text{V}$

(d) $I = \frac{U}{R} = \frac{230\,\text{V}}{18\,\frac{\text{V}}{\text{A}}} = 13\,\text{A}$

(e) $U = RI = 2{,}5 \cdot 10^3\,\Omega \cdot 10 \cdot 10^{-3}\,\text{A} = 25\,\text{V}$

6.

	R_1 in Ω	R_2 in Ω	R in Ω	U_1 in V	U_2 in V	U in V	I in A
(a)	80	120	200	4	6	10	0,05
(b)	150	10	160	5	0,33	5,33	0,033
(c)	$9 \cdot 10^5$	30	$9 \cdot 10^5$	299,99	0,01	300	$3{,}3 \cdot 10^{-4}$
(d)	1000	?	?	0,001	1,999	2	$1 \cdot 10^{-6}$
(e)	1000	4000	5000	100	400	500	0,1
(f)	50	-6	44	?	?	220	5
(g)	?	80	?	?	6,4	?	0,8

zu (f): nicht möglich, da $R_2 < 0$

zu (g): nicht möglich, da $I = \frac{U_2}{R_2} = 0{,}08\,\text{A} \neq 0{,}8\,\text{A}$

7. $R + R + 100\,\Omega + R + 200\,\Omega + R + 300\,\Omega + R + 400\,\Omega = \dfrac{U}{I} = 1150\,\Omega$

   $5R + 1000\,\Omega = 1150\,\Omega \quad \Longrightarrow \quad R = 30\,\Omega$

   $U_1 = 30\,\Omega \cdot I = 6\,\text{V}$, $U_2 = 26\,\text{V}$, $U_2 = 46\,\text{V}$, $U_2 = 66\,\text{V}$, $U_2 = 86\,\text{V}$

   Probe: $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = U$

8. R_1, R_2 parallel: $R_{12} = 7{,}5\,\Omega$

   R_5, R_6 in Reihe: $R_{56} = 10\,\Omega$

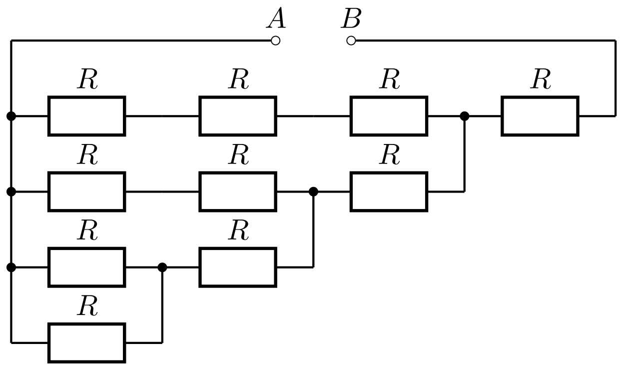
   R_3, R_4, R_{56} parallel: $R_{3456} = 2{,}5\,\Omega$

   R_{12}, R_{3456} in Reihe: $R_{123456} = 10\,\Omega$

9. (a) $R_1 = \dfrac{1 \cdot R \cdot R_0}{1 \cdot R + R_0} = \dfrac{3}{2}\,R$

   (b) $R_2 = \dfrac{2 \cdot R \cdot R_1}{2 \cdot R + R_1} = \dfrac{13}{7}\,R$

   (c)



   $R_3 = \dfrac{3 \cdot R \cdot R_2}{3 \cdot R + R_2} = \dfrac{73}{34}\,R$

   (d) $R_{n+1} = \dfrac{(n+1) \cdot R \cdot R_n}{(n+1) \cdot R + R_n}$

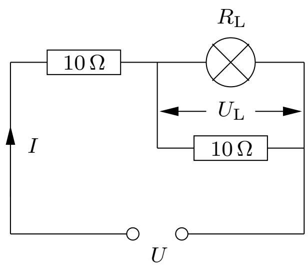
10. (a) $\dfrac{12\,\text{V} - 11\,\text{V}}{0{,}020\,\Omega + 0{,}010\,\Omega + 0{,}020\,\Omega} = 20{,}0\,\text{A}$

    (b) $\dfrac{12\,\text{V} + 11\,\text{V}}{0{,}020\,\Omega + 0{,}010\,\Omega + 0{,}020\,\Omega} = 460\,\text{A}$

11. Parallelschaltung aus $3{,}0\,\Omega$ und $1{,}0\,\Omega$ ergibt $R_1 = 0{,}75\,\Omega$.
    Reihenschaltung aus $1{,}25\,\Omega$ und R_1 ergibt $2{,}0\,\Omega$.
    Parallelschaltung aus $2{,}0\,\Omega$ und $6{,}0\,\Omega$ ergibt $R_{\text{ges}} = 1{,}5\,\Omega$.

12. Bei der Parallelschaltung von R_3 zu R_1 bzw. R_2 sinkt der Gesamtwiderstand der Schaltung, also nimmt die Gesamtstromstärke zu. In jedem Teilstromkreis ist aber die Spannung gleich der Klemmenspannung der Batterie, d. h. dass I_1 und I_2 sich nicht verändern.

13. Sollstrom durch die Lampe: $I_0 = \dfrac{1{,}35\,\mathrm{VA}}{4{,}5\mathrm{V}} = 0{,}30\,\mathrm{A}$

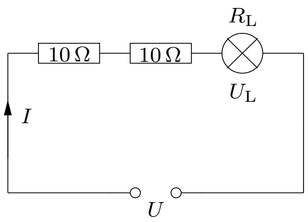


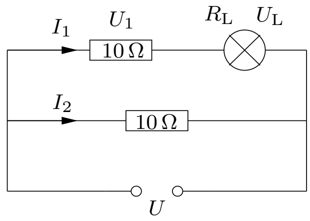
Lampenwiderstand: $R_\mathrm{L} = \dfrac{4{,}5\mathrm{V}}{0{,}3\,\mathrm{A}} = 15\,\Omega$

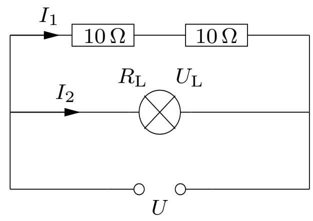
$R_\mathrm{ges} = 10\,\Omega + \dfrac{10 \cdot 15\,\Omega}{10+15} = 16\,\Omega, \quad I = \dfrac{U}{R_\mathrm{ges}} = 0{,}75\,\mathrm{A}$

$U_\mathrm{L} = 0{,}75\,\mathrm{A} \cdot 6\,\Omega = 4{,}5\,\mathrm{V}$

Schaltungen, die nicht zum Ziel führen:







$R_\mathrm{ges} = 35\,\Omega$

$I = \dfrac{U}{R_\mathrm{ges}} = 0{,}343\,\mathrm{A}$

$U_\mathrm{L} = \dfrac{15}{35} \cdot 12\,\mathrm{V} = 5{,}14\,\mathrm{V}$

$R_\mathrm{oben} = 25\,\Omega$

$I_1 = \dfrac{U}{R_\mathrm{oben}} = 0{,}48\,\mathrm{A}$

$U_\mathrm{L} = \dfrac{15}{25} \cdot 12\,\mathrm{V} = 7{,}2\,\mathrm{V}$

$U_\mathrm{L} = 12\,\mathrm{V}$

14. (a) $R_{2\|3} = \dfrac{1 \cdot 2\,\Omega}{1+2} = \dfrac{2}{3}\,\Omega, \qquad R_{123} = R_1 + R_{2\|3} = \dfrac{5}{3}\,\Omega$

$$R_\mathrm{AB} = \frac{R_{123} \cdot R_4}{R_{123} + R_4} = \frac{\frac{5}{3} \cdot 5\,\Omega}{\frac{20}{3}} = \frac{25}{20}\,\Omega = 1{,}25\,\Omega$$

(b) $U_2 = R_2 I_2 = 3\,\mathrm{V}, \qquad I_3 = \dfrac{U_2}{R_3} = 1{,}5\,\mathrm{A}, \qquad I_1 = I_2 + I_3 = 4{,}5\,\mathrm{A}$

$U_1 = R_1 I_1 = 4{,}5\,\mathrm{V}, \qquad U_\mathrm{AB} = U_1 + U_2 = 7{,}5\,\mathrm{V}$

15. $\dfrac{9{,}0\,\mathrm{V} - 2{,}1\,\mathrm{V}}{10\,\mathrm{mA}} = 0{,}69\,\mathrm{k\Omega}$

4. Elektrische Arbeit und Leistung

1. (a) $P_0 = U_0 I_0 \quad \Longrightarrow \quad I_0 = \dfrac{P_0}{U_0} = \dfrac{46\,\mathrm{VA}}{23\,\mathrm{V}} = 2\,\mathrm{A} \quad \Longrightarrow \quad R_\mathrm{L} = \dfrac{U_0}{I_0} = 11{,}5\,\Omega$

   (b) $R_\mathrm{ges} = R + R_\mathrm{L} = 101{,}5\,\Omega, \quad I = \dfrac{U}{R_\mathrm{ges}} = 2{,}266\,\mathrm{A}, \quad U_\mathrm{L} = R_\mathrm{L} I = 26{,}1\,\mathrm{V}$

   Maximal zulässiger Wert: $U_\mathrm{L,max} = 1{,}02 \cdot 23\,\mathrm{V} = 23{,}46\,\mathrm{V} \quad \Longrightarrow \quad U_\mathrm{L}$ zu groß.

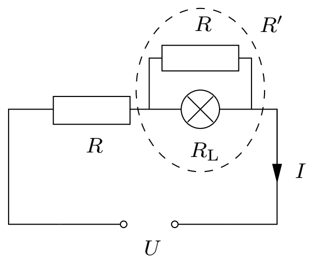
   $P = UI = 528\,\mathrm{W}$

   $P_R = U_R I = (U - U_\mathrm{L}) I = 206{,}6\,\mathrm{V} \cdot 2{,}266\,\mathrm{A} = 468{,}16\,\mathrm{W}, \quad \dfrac{P_R}{P} = 88{,}7\,\%$

   (c) $R' = \dfrac{R_\mathrm{L} R}{R_\mathrm{L} + R} = \dfrac{90 \cdot 11{,}5}{101{,}5}\,\Omega = 10{,}197\,\Omega$

   $R_\mathrm{ges} = R + R' = 100{,}197\,\Omega$

   $I = \dfrac{U}{R_\mathrm{ges}} = 2{,}295\,\mathrm{A}, \quad U_\mathrm{L} = R' I = 23{,}41\,\mathrm{V} < U_\mathrm{L,max}$

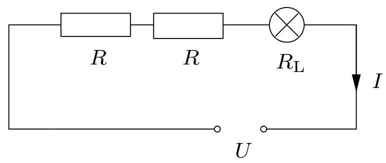


   Schlechtere Lösung:

   $R_\mathrm{ges} = 2R + R_\mathrm{L} = 191{,}5\,\Omega$

   $I = \dfrac{U}{R_\mathrm{ges}} = 1{,}201\,\mathrm{A}$

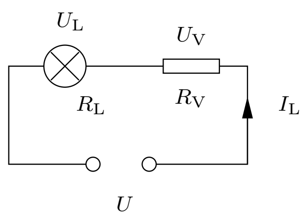
   $U_\mathrm{L} = R_\mathrm{L} I = 13{,}8\,\mathrm{V}$



2. (a) $R_\mathrm{L} = \dfrac{U_\mathrm{L}}{I_\mathrm{L}} = \dfrac{24\,\mathrm{V}}{2,5\,\mathrm{A}} = 9{,}60\,\Omega, \quad P_\mathrm{L} = U_\mathrm{L} I_\mathrm{L} = 60{,}0\,\mathrm{W}.$

   (b) $R_\mathrm{ges} = \dfrac{U}{I_\mathrm{L}} = 92{,}0\,\Omega$

   $R_\mathrm{V} = R_\mathrm{ges} - R_\mathrm{L} = 82{,}4\,\Omega$



   (c) $U_\mathrm{V} = R_\mathrm{V} \cdot I_\mathrm{L} = 206\,\mathrm{V}$ oder $U_\mathrm{V} = U - U_\mathrm{L} = 206\,\mathrm{V}$

   $P_\mathrm{V} = U_\mathrm{V} \cdot I_\mathrm{L} = 515\,\mathrm{W}$

Gesamtleistung der Stromquelle: $P_{\text{ges}} = U \cdot I_{\text{L}} = P_{\text{L}} + P_{\text{V}} = 575\,\text{W}$

$\eta = \dfrac{P_{\text{L}}}{P_{\text{ges}}} = \dfrac{60}{575} = 0{,}104 = 10{,}4\,\%$

3. $U_{\text{R}} = U - U_1 = 200\,\text{V} \quad I_1 = \dfrac{U_{\text{R}}}{R} = 1{,}60\,\text{A} \quad R_{\text{L}} = \dfrac{U_1}{I_1} = 20{,}0\,\Omega$

   $P = UI = U \cdot \dfrac{U}{R_{\text{L}}} = \dfrac{U^2}{R_{\text{L}}} = \dfrac{232^2\,\text{V}^2}{20{,}0\,\frac{\text{V}}{\text{A}}} = 2691\,\text{VA} \approx 2{,}69\,\text{kW}$

4. (a) $230\,\text{V} \cdot 0{,}10\,\text{A} \cdot 20 \cdot 3600\,\text{s} = 1{,}7\,\text{MJ}$
   (b) $230\,\text{V} \cdot 0{,}10\,\text{A} \cdot 20\,\text{h} \cdot 18\,\frac{\text{Cent}}{\text{kWh}} \cdot 365 = 30\,€$
   (c) $55 \cdot 10^6 \cdot 23\,\text{W} > 1100\,\text{W}$

5. (a) $U = \dfrac{W}{Q} = \dfrac{3\,\text{J}}{0{,}06\,\text{C}} = 50\,\text{V}$
   (b) $Q = \dfrac{W}{U} = \dfrac{2\,\text{J}}{220\,\frac{\text{J}}{\text{C}}} = 9{,}09\,\text{mC}$

6. (a) $W_{\text{k}} = eU = 8{,}01 \cdot 10^{-16}\,\text{J}, \quad v^2 = \dfrac{2W_{\text{k}}}{m_{\text{e}}} = 1{,}76 \cdot 10^{15}\,\dfrac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \quad \Longrightarrow \quad v = 4{,}19 \cdot 10^7\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$
   (b) $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 3{,}84 \cdot 10^7\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}, \quad W_{\text{k}} = \dfrac{m_{\text{p}}}{2}\,v^2 = 1{,}23 \cdot 10^{-12}\,\text{J}, \quad U = \dfrac{W_{\text{k}}}{e} = 7{,}70\,\text{MV}$

7. $\dfrac{m_p}{2}\,v^2 = eU \quad \Longrightarrow \quad U = \dfrac{m_p v^2}{2e} = 3{,}8 \cdot 10^6\,\text{V}$

8. $P_{\text{mech}} = 0{,}6 \cdot 230\,\text{V} \cdot 10\,\text{A} = 1380\,\text{W}, \quad W = mgh = P \cdot \Delta t \quad \Longrightarrow \quad \Delta t = \dfrac{mgh}{P} = 13\,\text{s}$

9. $\Delta t = \dfrac{W}{P} = \dfrac{c_{\text{Wasser}} m \Delta T}{UI} = \dfrac{4190\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\,\text{K}} \cdot 1\,\text{kg} \cdot 86\,\text{K}}{230\,\text{V} \cdot 3{,}5\,\text{A}} = 4{,}5 \cdot 10^2\,\text{s} = 7{,}5\,\text{min}$

10. $I = \dfrac{P}{U} = 0{,}26\,\text{A}, \quad R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{U^2}{P} = 8{,}8 \cdot 10^2\,\Omega$

11. $R = \dfrac{U}{I} = 46\,\Omega, \quad P = UI = 1{,}2\,7kW, \quad W = QU = 4{,}1 \cdot 10^6\,\text{J}$

    $t = \dfrac{Q}{I} = 3600\,\text{s} = 1{,}0\,\text{h}$

12. $I = \dfrac{Q}{t} = 4{,}5\,\text{A}, \quad U = \dfrac{P}{I} = \dfrac{Pt}{Q} = 220\,\text{V}, \quad R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{Pt^2}{Q^2} = 48\,\Omega, \quad W = Pt = 11\,\text{kJ}$

13. $W = 0{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 335\,\dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} + 0{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 60\,\mathrm{K} \cdot 4{,}19\,\dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} = 235\,\mathrm{kJ}, \quad U = 230\,\mathrm{V}$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{235\,\mathrm{kJ}}{300\,\mathrm{s}} = 782\,\mathrm{W} = UI \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{P}{U} = 3{,}4\,\mathrm{A}, \quad R = \frac{U}{I} = 68\,\Omega$$

14. (a) $P = \dfrac{W}{t}, \quad U = \dfrac{P}{I} = \dfrac{W}{It}, \quad R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{W}{I^2 t}$

(b) $P = \dfrac{W}{t} = UI = RI^2 \quad \Longrightarrow \quad I = \sqrt{\dfrac{W}{Rt}}, \quad U = RI = \sqrt{\dfrac{WR}{t}}$

15. Mit $P = 1{,}05\,\mathrm{W}$ und der Lampenspannung $U_\mathrm{L} = 3{,}5\,\mathrm{V}$ folgt für den Sollstrom durch die Lampe $I = \dfrac{P}{U_\mathrm{L}} = 0{,}3\,\mathrm{A}$.

Der Widerstand der Lampe ist $R_\mathrm{L} = \dfrac{U_\mathrm{L}}{I} = 11{,}7\,\Omega$.

Der Gesamtwiderstand der Reihenschaltung ist $R_\mathrm{ges} = R + R_\mathrm{L} = \dfrac{230\,\mathrm{V}}{0{,}3\mathrm{A}} = 766{,}7\,\Omega$.

$R = R_\mathrm{ges} - R_\mathrm{L} = 755\,\Omega$

Die Gesamtleistung ist $P_\mathrm{ges} = 230\ \mathrm{V} \cdot I^2 = 20{,}7\,\mathrm{W}$, die Nutzleistung $P = 1{,}05\,\mathrm{W}$ und die Verlustleistung $P_\mathrm{V} = P_\mathrm{ges} - P = 19{,}65\,\mathrm{W}$.

$\dfrac{P_\mathrm{V}}{P_\mathrm{ges}} = 94{,}9\,\%, \ \dfrac{P_\mathrm{V}}{P} = 1{,}87 \cdot 10^3\,\%$

16. $P = 75\% \cdot \dfrac{mgh}{\Delta t} = 0{,}75 \cdot \dfrac{84\,000\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 200\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 1{,}24 \cdot 10^8\,\mathrm{W} = 124\,\mathrm{MW}$

$I = \dfrac{P}{U} = \dfrac{124\,\mathrm{MVA}}{0{,}11\,\mathrm{MV}} = 1{,}1 \cdot 10^3\,\mathrm{A}$

$25\% \cdot mgh = c_\mathrm{Wasser} m \Delta T \quad \Longrightarrow \quad \Delta T = \dfrac{0{,}25\,gh}{c_\mathrm{Wasser}} = \dfrac{0{,}25 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 200\,\mathrm{m}}{4190\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}} = 0{,}12\,\mathrm{K}$

17. Energieverbrauch in einem Jahr:

$$W = NUIt = 1{,}8 \cdot 10^8 \cdot 230\,\mathrm{V} \cdot 0{,}045\,\mathrm{A} \cdot 365{,}25 \cdot 24\,\mathrm{h} = 1{,}6 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kWh}$$

Kosten pro Jahr:

$$k = 1{,}6 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kWh} \cdot 0{,}17\,\frac{€}{\mathrm{kWh}} = 2{,}8 \cdot 10^9\,€$$

Benötigte Gesamtleistung:

$$P = NUI = 1{,}8 \cdot 10^8 \cdot 230\,\mathrm{V} \cdot 0{,}045\,\mathrm{A} = 1{,}9\,\mathrm{GW}$$

Man benötigt $\frac{P}{36\,\mathrm{MW}} \approx 53$ Wasserkraftwerke oder $\frac{P}{0{,}9\,\mathrm{GW}} \approx 2$ Kernkraftwerke.

18. $P = UI = \frac{U^2}{R} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{U^2}{P} = \frac{230^2\,\mathrm{V}^2}{690\,\mathrm{VA}} = 76{,}7\,\Omega$

$I = \frac{P}{U} = 3{,}0\,\mathrm{A}, \quad Q = It = 3{,}0\,\mathrm{A} \cdot 3600\,\mathrm{s} = 10800\,\mathrm{C}, \quad n = \frac{Q}{e} = 6{,}75 \cdot 10^{22}$

19. (a) Erwärmung des Generators und der Umgebung.

(b) Pro Sekunde: $W_\mathrm{p} = mgh = 500\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 3\,\mathrm{m} = 14715\,\mathrm{J}$

$$0{,}2mgh = mc_{\mathrm{H_2O}}\Delta T \quad \Longrightarrow \quad \Delta T = \frac{0{,}2gh}{c_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{0{,}2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 3\,\mathrm{m}}{4190\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}} = 1{,}4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}$$

(c) $P_\mathrm{e} = 0{,}7 \cdot \frac{W_\mathrm{p}}{\Delta t} = \frac{0{,}7 \cdot 14715\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{s}} = 1{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{W} = UI \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{P_\mathrm{e}}{U} = 45\,\mathrm{A}$

20. $90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad W = \frac{m}{2}v^2 = 2{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{J}, \quad P = \frac{W}{t} = 12500\,\mathrm{W} = 12{,}5\,\mathrm{kW}$

$P = UI \cdot 80\% \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{P}{0{,}8\,U} = 78{,}125\,\mathrm{A} \approx 78\,\mathrm{A}$

21. (a) $I = \frac{P}{U} = 0{,}56\,\mathrm{A}, \quad R = \frac{U}{I} = 6{,}5\,\Omega$

(b) Die am Aufzug umgesetzte mechanische Leistung ist

$$P_\mathrm{m} = 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}1) \cdot UI = \frac{mgh}{\Delta t}$$

$$I = \frac{mgh}{0{,}81\,\Delta t\,U} = \frac{1200\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 3{,}6\,\mathrm{m}}{0{,}81 \cdot 2{,}5\,\mathrm{s} \cdot 218\,\mathrm{V}} = 96\,\mathrm{A}$$

Mit Beschleunigung:

$$I = \frac{mgh + \frac{m}{2}v^2}{0{,}81\,\Delta t\,U} = \frac{42379{,}2\,\mathrm{J} + 12150\,\mathrm{J}}{0{,}81 \cdot 2{,}5\,\mathrm{s} \cdot 218\,\mathrm{V}} = 124\,\mathrm{A}$$

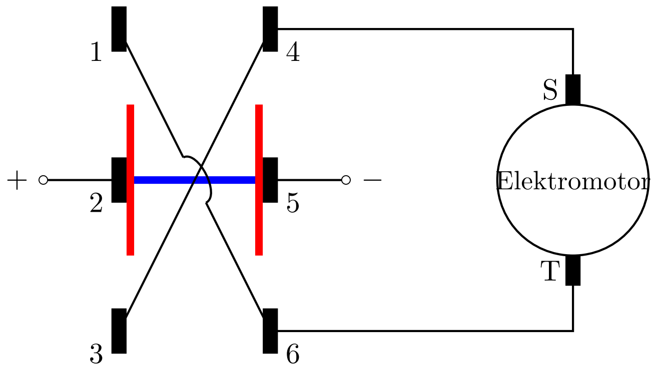
22. Aus einer Schätzung, Messung bzw. aus einem Tabellenwerk:

$m = 1\,\mathrm{kg}, t = 4\,\mathrm{min}, U = 230\,\mathrm{V}, c = 4{,}2\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g\,K}}, \vartheta_0 = 20°\mathrm{C}, \vartheta_1 = 100°\mathrm{C}$

$U\,I\,t = c\,m\Delta\vartheta \quad \Rightarrow \quad I = \frac{c\,m\,\Delta\vartheta}{U\,t} = 6\,\mathrm{A}$

23. $U\,I\,t = c\,m\Delta\vartheta \quad \Rightarrow \quad I = \frac{c\,m\,\Delta\vartheta}{U\,t} = 6{,}0\,\mathrm{A}$

5. Magnetfeld und Strom

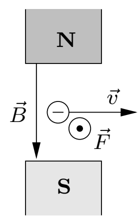
1. 

2. (a) Der Nagel zieht die Büroklammern an.
   (b) Es werden weniger Büroklammern angezogen.
   (c) Der Nagel zieht nichts mehr an.

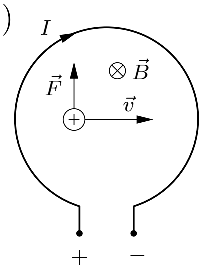
3. Rechte-Hand-Regel für positive Teilchen:

Daumen	:	$\vec{v}$
Zeigefinger	:	$\vec{B}$
Mitelfinger	:	$\vec{F}$

(a)



(b)



6. Induktion

1. Magnetfeld in der linken Spule in die Zeichenebene

   (a) $R \uparrow \Rightarrow I \downarrow$, d. h. Magnetfeld erniedrigt sich in der rechten Schleife. Der Induktionsstrom in der rechten Schleife ist parallel zum bestehenden Magnetfeld, um der Abnahme entgegenzuwirken. Der Strom fließt im Uhrzeigersinn.

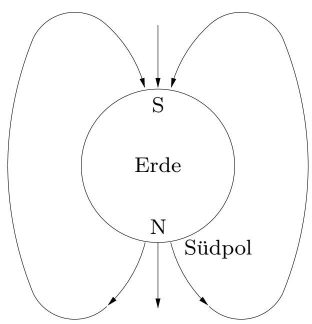
   (b) $R \downarrow \Rightarrow I \uparrow$, d. h. Magnetfeld ernöht sich in der rechten Schleife. Der Induktionsstrom in der rechten Schleife ist entgegengesetzt zum bestehenden Magnetfeld, um der Zunahme entgegenzuwirken. Der Strom fließt gegen den Uhrzeigersinn.

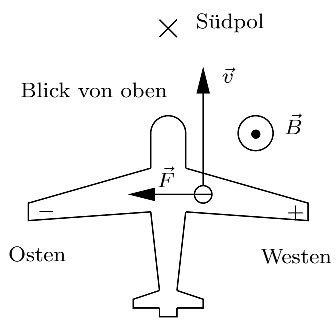
2. (a) Durch das Schütteln der Lampe wird eine Änderung des Magnetfeldes innerhalb der Spule hervorgerufen und dadurch eine Spannung induziert.

   (b) Z. B. einen Magent an eine Feder hängen, und zu Schwingung anregen. Der Magent pendelt dann in eine Spule hinein und heraus und indiziert dort eine Spannung, die mit einem Voltmeter nachgewiesen werden kann.

   (c) Für einen fünfminütigen Dauerbetrieb ist ein Energiespeicher (Akkumulator oder Kondensator) notwendig. Dieser kann nur durch Gleichstrom geladen werden. Deshalb ist eine Gleichrichtung des Induktionsstroms notwendig. Dies kann mit einer Diode erreicht werden

3. Der geografische Südpol ist der magnetische Nordpol der Erde. Die magnetischen Feldlinien zeigen in der Nähe des Südpols also vom Boden nach oben.

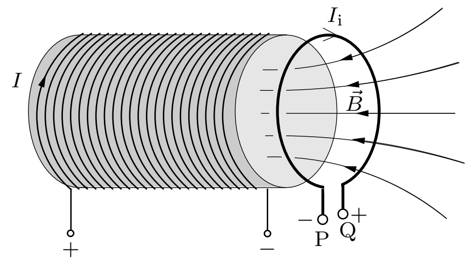




Wegen der negativen Ladung des Elektrons verwenden wir die „Linke-Hand-Regel“:
$\vec{v}$: Daumen, $\vec{B}$: Zeigefinger, $\vec{F}$: Mittelfinger.

Die Kraft auf ein Elektron zeigt also noch Osten, d.h. die östliche Flügelspitze lädt sich negativ, die westliche positiv auf.

4. Der Spulenstrom fließt von plus nach minus, das Spulenfeld zeigt von rechts nach links.
   Lenzsche Regel: „Der Induktionsstrom I_{i} fließt so, dass er der Feldänderung durch die Leiterschleife entgegenwirkt.“
   Da $\vec{B}$ schwächer wird, zeigt das vom Induktionsstrom erzeugte Feld $\vec{B}_{\mathrm{i}}$ in die gleiche Richtung wie $\vec{B}$, P wird also negativ und Q positiv.

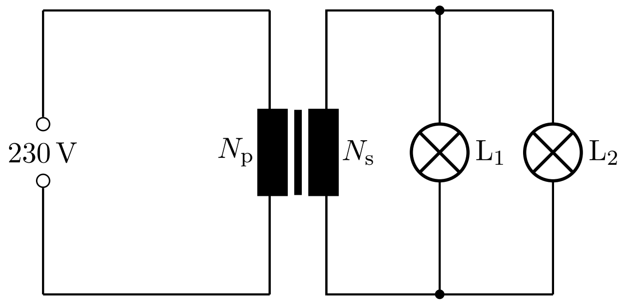
   Der Eisenkern bewirkt ein größeres Magnetfeld und damit auch eine größere Induktionsspannung.

7. Transformator

1. $6{,}0\,\mathrm{V}\cdot I_\mathrm{p} = 2\cdot R\cdot\left(\frac{I_\mathrm{p}}{20}\right)^2 + 3{,}8\,\mathrm{W} \quad\Rightarrow\quad I_\mathrm{p} = 0{,}65\,\mathrm{A}; 98\%$

2. (a) Wechselspannung, sonst ergibt sich kein dauerhaftes sich änderndes Magnetfeld, welches sowohl die Primär– als auch die Sekundärspule durchsetzt.

   (b) Skizze:



   (c) $\frac{U_\mathrm{s}}{U_\mathrm{p}} = \frac{230}{24}$; $N_\mathrm{s} = 230, N_\mathrm{p} = 24.$

   (d) $U_\mathrm{p}\,I_\mathrm{p}\cdot 0{,}90 = 2\cdot 12\,\mathrm{W} \quad\Rightarrow\quad I_\mathrm{p} = \dfrac{2\cdot 12\,\mathrm{W}}{0{,}90\cdot 230\,\mathrm{V}} = 1{,}2\,\mathrm{A}, P_\mathrm{p} = 27\,\mathrm{W}, I_\mathrm{s} = 1{,}0\,\mathrm{A}$

3. Zwei Spulen sind um einen gemeinsamen Eisenkern gewickelt. Ein Wechselstrom durch die Primärspule erzeugt ein sich mit der Zeit veränderndes Magnetfeld, das wegen des Eisenkerns (Ausrichtung der Elementarmagnete) auch die Sekundärspule durchdringt. Dadurch wird an den Enden der Sekundärspule eine Spannung induziert.

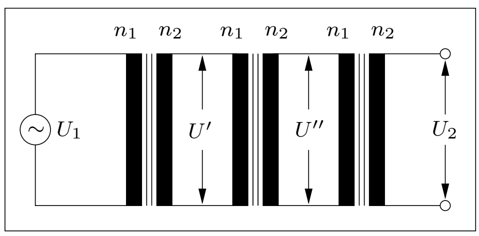
4. Zwei Spulen sind um einen gemeinsamen Eisenkern gewickelt. Ein Wechselstrom durch die Primärspule erzeugt ein sich mit der Zeit veränderndes Magnetfeld, das wegen des Eisenkerns (Ausrichtung der Elementarmagnete) auch die Sekundärspule durchdringt. Dadurch wird an den Enden der Sekundärspule eine Spannung induziert.

5. (a) $\dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{U_2}{U_1} \quad\Longrightarrow\quad n_2 = \dfrac{U_2 n_1}{U_1} = \dfrac{648\,000\,\mathrm{V}\cdot 400}{3\,\mathrm{V}} = 8{,}64\cdot 10^7$

   (b) $\dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{U'}{U_1} = \dfrac{U''}{U'} = \dfrac{U_2}{U''} \quad\Longrightarrow$

$$U_2 = \frac{n_2}{n_1}U'' = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 U' = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^3 U_1$$

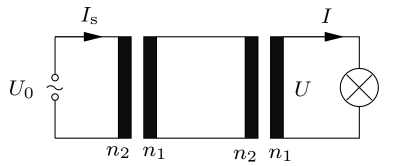
$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^3 = \frac{U_2}{U_1} \quad\Longrightarrow$$



$$n_2 = \sqrt[3]{\frac{U_2}{U_1}} \cdot n_1 = \sqrt[3]{216\,000} \cdot 400 = 60 \cdot 400 = 24\,000$$

6. (a) Mit $k = \dfrac{n_2}{n_1} = 5$ ist $U_{\text{min}} = \dfrac{U_0}{k^3} = 1{,}84\,\text{V}$ und $U_{\text{max}} = U_0 \cdot k^3 = 28\,750\,\text{V}$.

   (b) $U = \dfrac{U_0}{k^2} = 9{,}2\,\text{V}$

   Ist I_L der Strom, der bei $U_L = 10\,\text{V}$ durch die Lampe fließt und R der Widerstand der Lampe, dann gilt:

   $$P_L = U_L I_L \quad \Longrightarrow \quad I_L = \frac{P_L}{U_L} = 2{,}0\,\text{A}$$

   $$R = \frac{U_L}{I_L} = 5{,}0\,\Omega$$

   Bei $U = 9{,}2\,\text{V}$ fließt der Strom $I = \dfrac{U}{R} = 1{,}84\,\text{A}$ durch die Lampe.

   $$I_s = \frac{I}{k^2} = 0{,}074\,\text{A} = 74\,\text{mA}$$

Teil II.

Elektrostatik S2

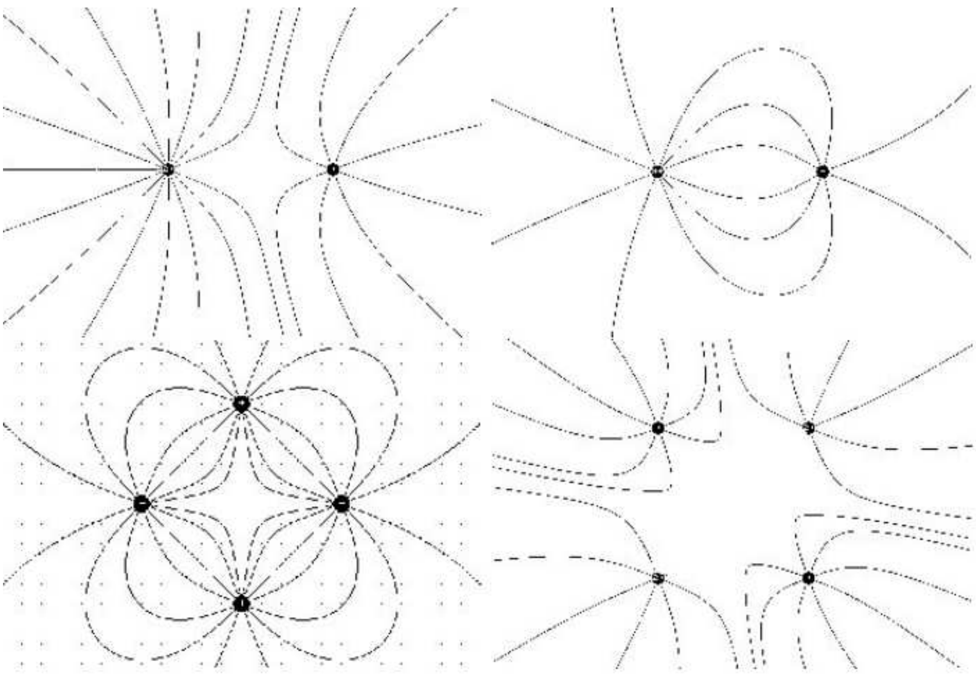
8. Das elektrische Feld

1. $E \approx 2 \cdot 10^7 \frac{V}{m}$, die Feldstärke ist größer als bei einem Blitz; die Durchschlagfeldstärke der Membran ist sehr hoch

2. Oberfläche $= 2\cdot$ Fläche des Kammes $\approx 2 \cdot (15cm \cdot 2,5cm) \approx 10^{-2}m^2 \Rightarrow \sigma = 10^{-5}\frac{C}{m^2} \Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 6 \cdot 10^5 \frac{V}{m}$

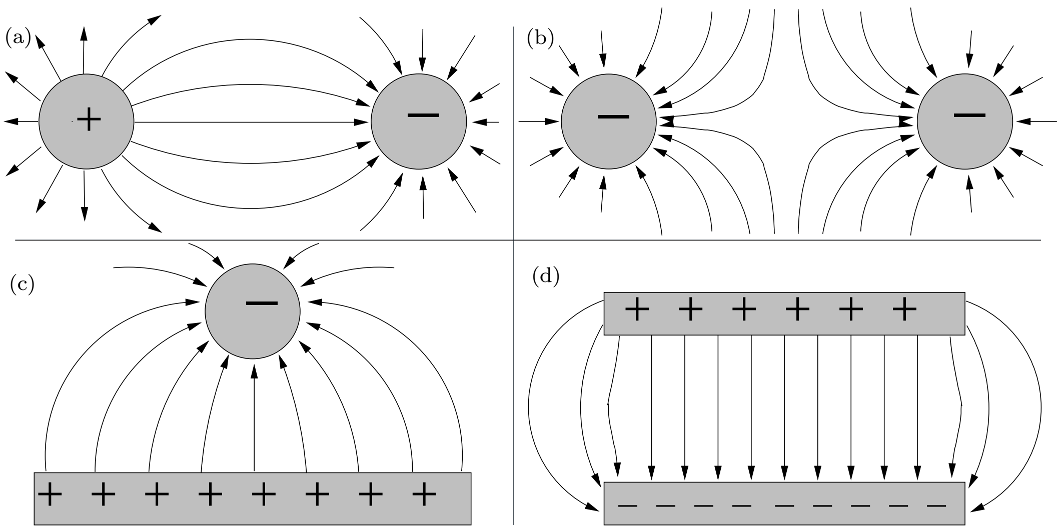
   Der Wert ist plausibel, denn in der Nähe eines geladenen Kammes knistert es, d. h. die Durchschlagsfeldstärke von Luft wird überschritten.

3. .



4. 3

5.

6. 

7. Das Superpositionsprinzip gilt für Kräfte und damit auch für Feldstärken (q ist eine Testladung am Ort $\vec{r}$ und $\vec{F}(\vec{r})$ ist die Kraft auf q):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} = \frac{1}{q} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu(\vec{r}) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\vec{F}_\nu(\vec{r})}{q} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{E}_\nu(\vec{r})$$

8. $a = \frac{F}{m} = \frac{Q\,E}{m} = 0{,}16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

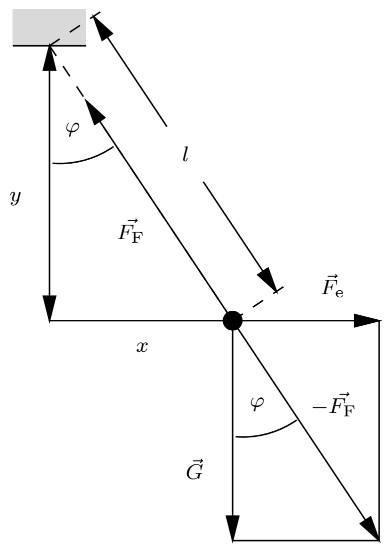
9. Die Kugel ist in Ruhe, d.h. die Gesamtkraft auf die Kugel ist null ($\vec{F}_\mathrm{F}$ ist die Fadenkraft):

$$\vec{F}_\mathrm{e} + \vec{G} + \vec{F}_\mathrm{F} = 0$$

Damit ist $-\vec{F}_\mathrm{F}$ parallel zum Faden und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt

$$\frac{F_\mathrm{e}}{G} = \frac{Q\,E}{m\,g} = \frac{x}{y} = \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}$$

$$E = \frac{x\,m\,g}{Q\sqrt{l^2 - x^2}} = 245\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

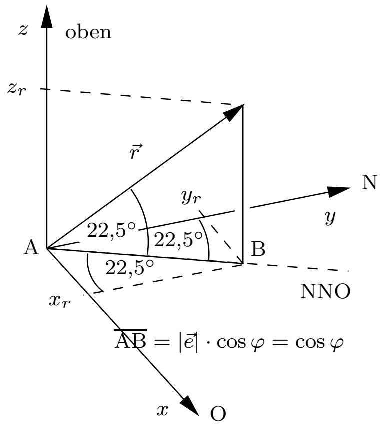


10. (a) Der Einheitsvektor in Feldrichtung ist $\vec{e} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\mathrm{PQ}|} = \frac{1}{3\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{E} = E\cdot\vec{e} = 5000\sqrt{6}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1{,}22\cdot10^4\\-2{,}45\cdot10^4\\1{,}22\cdot10^4\end{pmatrix}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

(b) $\vec{e}$ ist ein Einheitsvektor, der in die Richtung von $\vec{v}$ zeigt. Mit $\varphi = 22{,}5^\circ$ und $|\vec{e}| = 1$ folgt aus der Abbildung $\overline{\mathrm{AB}} = \cos\varphi$ und damit

$$\vec{e} = \begin{pmatrix}\sin\varphi\cos\varphi\\ \cos^2\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$



Probe:

$$e = |\vec{e}| = \sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^4\varphi + \sin^2\varphi} =$$
$$= \sqrt{\cos^2\varphi\,\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{1} + \sin^2\varphi} = 1$$

$$\vec{v} = v\cdot\vec{e} = v\begin{pmatrix}\sin\varphi\cos\varphi\\ \cos^2\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}81{,}3\\196\\88{,}0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

11. (a) $\Delta n_Q = \frac{Q}{e}\cdot\alpha\Delta t$

$A = \frac{q}{e}\cdot A_0$

$\Delta n_q = \frac{A}{4\pi r^2}\Delta n_Q = \frac{qA_0}{4\pi e r^2}\cdot\frac{Q\alpha\Delta t}{e} = \frac{qQA_0\alpha\Delta t}{4\pi e^2 r^2}$

$\Delta v = \Delta n_q\cdot\frac{v_0 m_{\mathrm{e}}}{m} = \frac{qQA_0\alpha v_0 m_{\mathrm{e}}\Delta t}{4\pi m e^2 r^2}$

Kraft auf B: $F = ma = m\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{A_0\alpha v_0 m_{\mathrm{e}}}{4\pi e^2}\cdot\frac{qQ}{r^2}$. Das entspricht genau dem Coulombgesetz, wenn

$$\varepsilon_0 = \frac{e^2}{A_0\alpha v_0 m_{\mathrm{e}}} \quad \text{oder} \quad A_0\alpha v_0 = \frac{e^2}{m_{\mathrm{e}}\varepsilon_0}$$

ist.

(b) $\alpha = \frac{1}{t_{\mathrm{p}}} = 7{,}4\cdot10^{42}\,\frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad v_0 = \frac{e^2}{m_{\mathrm{e}}\varepsilon_0 A_0\alpha} = 1{,}7\cdot10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

(c) $A = A_0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\Delta n_q}{\Delta t} = \frac{e^2 A_0\alpha}{4\pi e^2 r^2} = \frac{A_0\alpha}{4\pi r^2} = 1{,}0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

Die Wechselwirkung mit den IPAs erfolgt für große Entfernungen sprunghaft!

$$a_{\mathrm{Coulomb}} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2 m_{\mathrm{e}}} = 1{,}754 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \quad a_{\mathrm{IPA}} = \frac{v_0}{1\,\mathrm{s}} = 1{,}724 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

9. Das Coulombsche Gesetz

1. $\dfrac{Q_1\,Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r^2} = \dfrac{Q_2\,Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,(40\,\text{cm} - r)^2} \quad \Rightarrow \quad Q_2\,r^2 = Q_1\,(40\,\text{cm} - r)^2$

   Die Lösungen dieser Gleichung sind $r = \left(-80\sqrt{5} - 160\right)$ cm $\approx -3{,}4$ m oder $r = \left(80\sqrt{5} - 160\right)$ cm ≈ 19 cm.

2. Richtung: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, Betrag: $\dfrac{\sqrt{13}\,e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a^2}$, Beschleunigung: $5{,}0 \cdot 10^3\,\text{ms}^{-2}$.

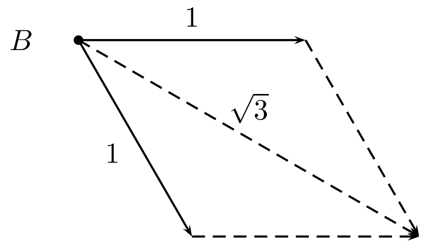
3. (a) $A\left(-1{,}5\middle| -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(1{,}5\middle| -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), C\left(0\middle|\sqrt{3}\right)$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CB} &= \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{(-e)^2}{a^2}\,\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{(-e)^2}{a^2}\,\frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|} \\
&= \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{a^2}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}\right) \\
&= \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{a^2}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{a^2}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also ist die Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und der Betrag $\dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\dfrac{e^2}{a^2}\,\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\dfrac{e^2}{a^2} = 4{,}4 \cdot 10^{-25}$ N.

Alternative:

Mit dem Kosinussatz erhält man für die Länge der Diagonalen $\sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(120°)} = \sqrt{3}$. Also ist die Summe der beiden Kräfte auf die Ladung in B $\sqrt{3}$–mal so groß wie eine einzelne Kraft. Somit ist die Kraft auf die Ladung in B:



$$F_B = \sqrt{3}\,\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{a^2}$$

(b) Die Richtung von $\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CB}$ und von $\overrightarrow{BO}$ sind entgegengerichtet.

$$\frac{3\sqrt{3}}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{a^2} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q\,e}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{a^2} = \frac{3}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q\,e}{a^2}$$

$$\sqrt{3}\,e = q$$

Bemerkung: Eine solche Ladung existiert nicht, da frei vorkommende Ladungen nur als ganzzahlige Vielfache der Elementarladung e vorkommen.

4. (a) $1,25 \cdot 10^{36}$

   (b) $F = 9 \cdot 10^9 N$; um eine Gewichtskraft mit gleicher Stärke zu erhalten benötigt man eine Masse von $10^9 kg$, etwas der Masse von einer Million PKWs.

   (c) Gemeinsamkeiten:

   - wirkt ohne mechanischen Kontakt und materielles Medium
   - zwei Wechselwirkungspartner (Ladung/Masse)
   - Kraftrichtung parallel zur Verbindungsrichtung der Quellen
   - Superpositionsprinzip
   - Abstandsgesetz $\frac{1}{r^2}$

   Unterschiede:

	Coulombkraft	Graviationskraft
Ursache	zwei Ladungen	zwei Massen
Kraftrichtung	Anziehung und Abstoßung	nur Anziehung
Stärke	groß	klein
Abschirmbarkeit	ja	nein
Bedeutung	Zusammenhalt der Atome, Moleküle, Kristalle	Zusammenhalt des Makrokosmos

5. $F = 230N$, entspricht der Gewichtskraft einer Masse $23kg$, (z. B. $23l$ Wasser, Schäferhund, Kleinkind). Dies ist in Anbetracht der kleinen Protonenmasse sehr groß.

6. (a) Q_3 liegt in der Symmetrieebene von Q_1 und Q_2 mit Abstand r zum Koordinatenursprung $\Rightarrow$
   $F_a = \frac{2r}{0{,}03m} \cdot \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 \cdot ((0{,}03m)^2 + r^2)} = 6 \cdot 10^{-7} Nm \frac{r}{(0{,}03m)^2 + r^2}$

   (b) 1. Fall: $-0,03m < x < 0,03m \Rightarrow F_b = \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(0{,}03m+x)^2} - \frac{1}{(0{,}03m-x)^2}\right) = -5,4 \cdot 10^{-10} Nm^3 \frac{x}{((0{,}03m)^2 - x^2)^2}$

2. Fall: $0,03m < x \Rightarrow F_b = \frac{Q_1Q_3}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{(0{,}03m+x)^2} + \frac{1}{(0{,}03m-x)^2}) = 1,8{\cdot}10^{-8}Nm^2\frac{(0{,}03m)^2+x^2)}{((0{,}03m)^2-x^2)^2}$

3. Fall: $0,03m < x \Rightarrow F_b = -\frac{Q_1Q_3}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{(0{,}03m+x)^2} - \frac{1}{(0{,}03m-x)^2}) = -1,8{\cdot}10^{-8}Nm^2\frac{(0{,}03m)^2+x^2)}{((0{,}03m)^2-x^2)^2}$

7. $m = 1,86 \cdot 10^{-9kg}$

8. $F = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} = 34\,\mathrm{N}, \quad a = \dfrac{F}{m_\mathrm{p}} = 2{,}0 \cdot 10^{28}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

9. (a) $a = \dfrac{2\,e \cdot e}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2\,m_\mathrm{e}} = 5{,}6 \cdot 10^{21}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

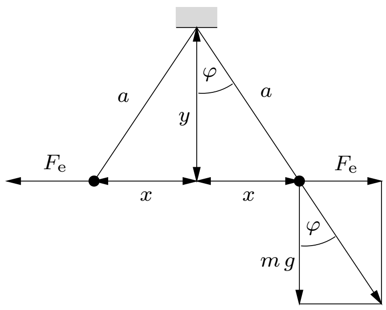
   (b) Mit $m = 1\,\mathrm{kg}$, $\varrho_\mathrm{Cu} = 8930\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, der Masse $M = 1{,}06 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$ eines Kupferatoms und der Ordnungszahl 29 von Kupfer folgt $Q = \dfrac{29 \cdot e \cdot 1\,\mathrm{kg}}{M} = 4{,}4 \cdot 10^7\,\mathrm{C}$. Der Radius einer Kugel ist $R = \left(\dfrac{3\,m}{4\,\pi\,\varrho_\mathrm{Cu}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3{,}0\,\mathrm{cm}$.

$$F = \frac{Q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(3R)^2} = 2{,}1 \cdot 10^{27}\,\mathrm{N}$$

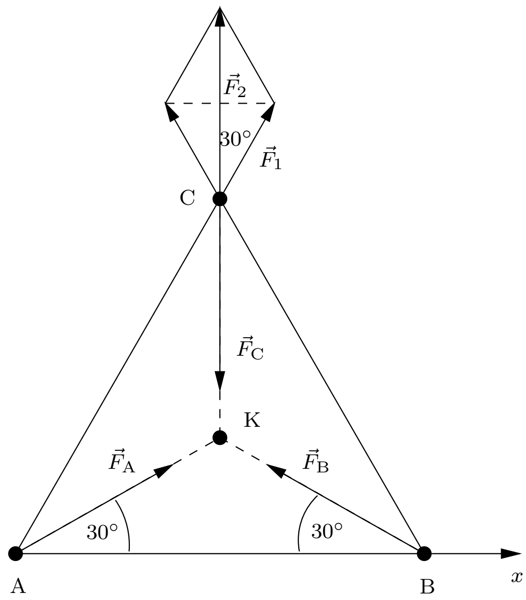
10. Laden der Kugeln: Mit einem Pol der Spannungsquellen verbinden, den anderen Pol erden!

$$\frac{F_\mathrm{e}}{m\,g} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad F_\mathrm{e} = \frac{k\,Q^2}{(2\,x)^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad Q = \sqrt{\frac{4\,m\,g\,x^3}{k\,\sqrt{a^2 - x^2}}} = 8{,}8 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$$



11. Der Betrag der Kraft des Elektrons A auf das Elektron C ist $F_1 = \dfrac{k\,e^2}{a^2}$. Die Elektronen A und B üben auf das Elektron C die Kraft F_2 aus:



$$F_2 = 2 \cdot F_1 \cos 30^\circ = \\ = 2 \cdot F_1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{k\,e^2\sqrt{3}}{a^2}$$

Der Betrag der Gesamtkraft auf das Elektron C ist mit $r = \overline{\mathrm{KC}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$$F_C = F_{\mathrm{Kern}} - F_2 = \\ = \frac{k \cdot 3\,e \cdot e}{r^2} - \frac{k\,e^2\sqrt{3}}{a^2} = \frac{k\,e^2}{a^2}\,(9 - \sqrt{3})$$

Wegen $F_A = F_B = F_C$ ist

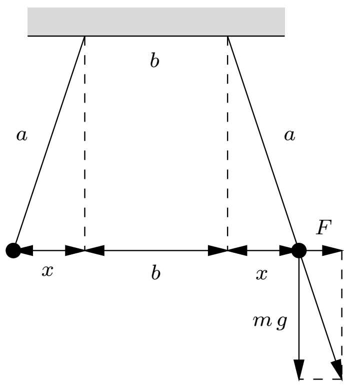
$$\vec{F}_A = \frac{F_C}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{F}_B = \frac{F_C}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{F}_C = F_C\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

Die Gesamtkraft auf den Kern ist $F_K = -(F_A + F_B + F_C) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Das System ist im Gleichgewicht, wenn

$$F_C = \frac{3\,k \cdot Q_{\mathrm{Kern}}\,e}{a^2} - \frac{k\,e^2\sqrt{3}}{a^2} = 0, \quad \text{d.h. für} \quad Q_{\mathrm{Kern}} = \frac{e}{\sqrt{3}}$$

12.



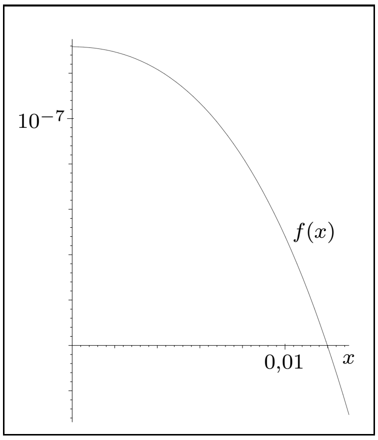
$$\frac{F}{m\,g} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad F = \frac{k\,Q^2}{(2\,x + b)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad F = \frac{m\,g\,x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{k\,Q^2}{(2\,x + b)^2}$$

Quadrieren und umformen:

$$f(x) = \left(\frac{k\,Q^2}{m\,g}\right)^2 \cdot \left(a^2 - x^2\right) - x^2 \cdot (2\,x + b)^4 = 0$$

Zur Lösung dieser Gleichung zeichnet man $f(x)$ und verbessert die gefundene Nullstelle durch Probieren mit dem Taschenrechner: $x \approx 1{,}2\,\mathrm{cm}$

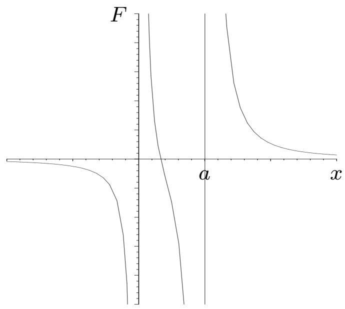


13. (a) $\vec{e} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{RS}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|} = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \underbrace{\dfrac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|^2}}_{2{,}34\cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}}\cdot\vec{e} = \begin{pmatrix}5{,}39\\7{,}19\\21{,}6\end{pmatrix}\cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$

(b) $\vec{e} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{RS}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|} = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}-12\\3\\-4\end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \underbrace{\dfrac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|^2}}_{-1{,}40\cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}}\cdot\vec{e} = \begin{pmatrix}12{,}9\\-3{,}24\\4{,}31\end{pmatrix}\cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}$

14. (a) $F(x) = \dfrac{k\,Q_1\,q}{x^2}\cdot\operatorname{sgn}(x) + \dfrac{k\,Q_2\,q}{(x-a)^2}\cdot\operatorname{sgn}(x-a)$

$$F(x) = \begin{cases} -k\,q\,Q_1\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{(x-a)^2}\right) & \text{für } x<0\\ k\,q\,Q_1\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{(x-a)^2}\right) & \text{für } 0<x<a\\ k\,q\,Q_1\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{(x-a)^2}\right) & \text{für } x>a \end{cases}$$

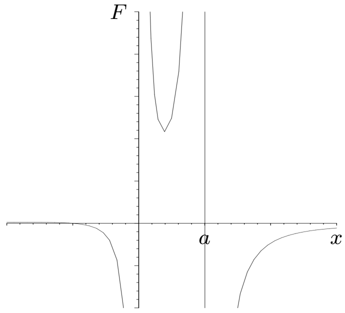


Für $x < 0$ ist $F(x) < 0$ und für $x > a$ ist $F(x) > 0$, d.h. Nullstelle von F nur im Bereich $0 < x < a$:

$\Longrightarrow 4\,x^2 = (x-a)^2 \quad \Longrightarrow \quad |2\,x| = |x-a|$

$\Longrightarrow 2\,x = a - x \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{a}{3}$

(b) $F(x) = \dfrac{k\,Q_1\,q}{x^2} \cdot \operatorname{sgn}(x) + \dfrac{k\,Q_2\,q}{(x-a)^2} \cdot \operatorname{sgn}(x-a)$



$$F(x) = \begin{cases} -k\,q\,Q_1 \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{(x-a)^2} \right) & \text{für } x < 0 \\ k\,q\,Q_1 \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{(x-a)^2} \right) & \text{für } 0 < x < a \\ k\,q\,Q_1 \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{(x-a)^2} \right) & \text{für } x > a \end{cases}$$

Für $0 < x < a$ ist $F(x) > 0$ und für $x > a$ ist $F(x) < 0$, d.h. Nullstelle von F nur im Bereich $x < 0$:

$\Longrightarrow 4\,x^2 = (x-a)^2 \quad \Longrightarrow \quad |2\,x| = |x-a|$

$\Longrightarrow -2\,x = a - x \quad \Longrightarrow \quad x = -a$

10. Das Feld von Punktladungen

1. $\tan\alpha = \dfrac{q\,E}{m\,g} \quad \Rightarrow \quad q = \dfrac{m\,g\,\tan\alpha}{E} = 8{,}2\,\mathrm{nC}.$

2. (a) $1,25 \cdot 10^{36}$

   (b) $F = 9 \cdot 10^9 N$; um eine Gewichtskraft mit gleicher Stärke zu erhalten benötigt man eine Masse von $10^9 kg$, etwas der Masse von einer Million PKWs.

   (c) Gemeinsamkeiten:

   - wirkt ohne mechanischen Kontakt und materielles Medium
   - zwei Wechselwirkungspartner (Ladung/Masse)
   - Kraftrichtung parallel zur Verbindungsrichtung der Quellen
   - Superpositionsprinzip
   - Abstandsgesetz $\frac{1}{r^2}$

   Unterschiede:

	Coulombkraft	Graviationskraft
Ursache	zwei Ladungen	zwei Massen
Kraftrichtung	Anziehung und Abstoßung	nur Anziehung
Stärke	groß	klein
Abschirmbarkeit	ja	nein
Bedeutung	Zusammenhalt der Atome, Moleküle, Kristalle	Zusammenhalt des Makrokosmos

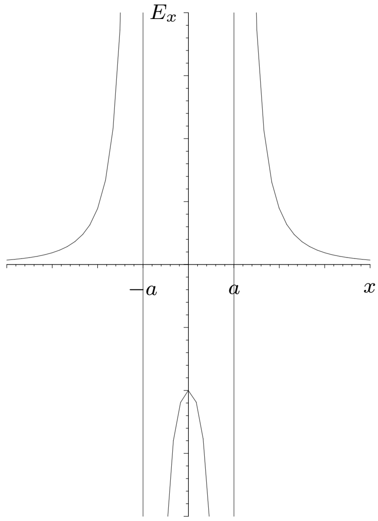
3. (a) $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left[\dfrac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z \end{pmatrix} - \dfrac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x+a \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]$

   (b) $\vec{E}(\vec{r_1}) = \begin{pmatrix} -0{,}06 \\ 2{,}2 \\ 2{,}2 \end{pmatrix} \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

   (c) $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left[\dfrac{1}{|x-a|^3} \begin{pmatrix} x-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{|x+a|^3} \begin{pmatrix} x+a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$E_y = E_z = 0,\ E_x(x) = \dfrac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left(\dfrac{x-a}{|x-a|^3} - \dfrac{x+a}{|x+a|^3} \right),\ E(x) = |E_x(x)|$

Drei Fälle für $E_x(x)$:



$$E_x(x) = \begin{cases} -\dfrac{Q\,a\,x}{\pi\,\varepsilon_0\,(x^2-a^2)^2} & \text{für } x < -a \\[2ex] -\dfrac{Q\,(x^2+a^2)}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,(x^2-a^2)^2} & \text{für } -a < x < a \\[2ex] \dfrac{Q\,a\,x}{\pi\,\varepsilon_0\,(x^2-a^2)^2} & \text{für } x > a \end{cases}$$

Für $x \gg a$ kann man a^2 in der Differenz im Nenner gegen x^2 vernachlässigen und es gilt

$$E(x) = |E_x(x)| \approx \frac{Q\,a}{\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x^3}$$

(d) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{-Q\,a}{2\,\pi\varepsilon_0 \cdot [a^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

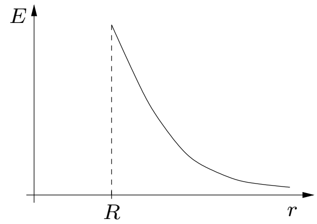
$$|\vec{E}| = \frac{|Q\,a|}{2\,\pi\varepsilon_0 \cdot [a^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

(e) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{Q}{2\,\pi\varepsilon_0 \cdot [a^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$|\vec{E}| = \frac{|Q| \cdot \sqrt{x^2+y^2}}{2\,\pi\varepsilon_0 \cdot [a^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

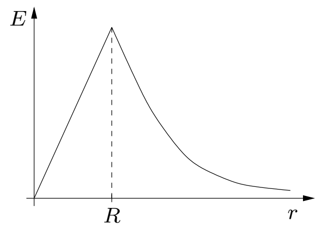
11. Feld ausgedehnter Ladungen, Satz von Gauß

1. $Q(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq r < R \\ Q & \text{für } r > R \end{cases}$

   $$E(r) = \frac{Q(r)}{4\,\pi\varepsilon_0\, r^2} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq r < R \\ \dfrac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\, r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

2. $Q(r) = \begin{cases} Q \cdot \dfrac{r^3}{R^3} & \text{für } 0 \leqq r \leqq R \\ Q & \text{für } r > R \end{cases}$

   $$E(r) = \frac{Q(r)}{4\,\pi\varepsilon_0\, r^2} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\, R^3} \cdot r & \text{für } 0 \leqq r < R \\ \dfrac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\, r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

3. Die Ladung in einer dünnen Kugelschale mit Radius r und der Dicke $\mathrm{d}r$ ist

   $$\mathrm{d}Q = \varrho(r) \cdot 4\,\pi\, r^2\, \mathrm{d}r$$

   Ist $Q(r)$ die Gesamtladung innerhalb einer Kugel mit Radius r, dann ist also

   $$Q'(r) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r} = 4\,\pi\, \varrho(r)\, r^2$$

   Nach Gauss ist (E_0 ist das konstante Feld)

   $$Q'(r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(4\,\pi\varepsilon_0\, E_0\, r^2\right) = 8\,\pi\varepsilon_0\, E_0\, r = 4\,\pi\, \varrho(r)\, r^2 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(r) = \frac{2\,\varepsilon_0\, E_0}{r}$$

4. Die Ladung in einer dünnen Schicht der Dicke $\mathrm{d}r$ auf dem Zylindermantel mit Radius r und Höhe h ist

   $$\mathrm{d}Q = \varrho(r) \cdot 2\,\pi\, r\, h\, \mathrm{d}r$$

   Ist $Q(r)$ die Gesamtladung innerhalb eines Zylinders mit Radius r und Höhe h, dann ist also

   $$Q'(r) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r} = 2\,\pi\, \varrho(r)\, h\, r$$

Nach Gauss ist (E_0 ist das konstante Feld)

$$Q'(r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,(2\,\pi\varepsilon_0\,E_0\,h\,r) = 2\,\pi\varepsilon_0\,E_0\,h = 2\,\pi\,\varrho(r)\,h\,r \quad\Longrightarrow\quad \varrho(r) = \frac{\varepsilon_0\,E_0}{r}$$

5. (a) Aus Aufgabe 2 folgt für das Feld des Elektrons

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{-e}{4\,\pi\varepsilon_0\,R^3}\cdot r & \text{für } 0 \leqq r < R \\ \dfrac{-e}{4\,\pi\varepsilon_0\,r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

In einem mit dem Elektron fest verbundenen Koordinatensystem wirkt dann für $r < R$ auf das Proton die Kraft

$$F(r) = E(r)\cdot e = -D\cdot r \quad \text{mit} \quad D = \frac{e^2}{4\,\pi\varepsilon_0\,R^3}$$

Nach Newton 3 (Actio gegengleich Reactio) wirkt dann in einem mit dem Proton verbundenen System die gleiche rücktreibende Kraft auf das Elektron. Da das Proton praktisch in Ruhe bleibt, ist als schwingende Masse die Elektronenmasse einzusetzen:

$$f = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{D}{m_\mathrm{e}}} = \frac{e}{4\,\pi\,R\sqrt{\pi\,\varepsilon_0\,m_\mathrm{e}\,R}} = 2{,}5\cdot 10^{15}\,\mathrm{Hz}$$

(b) Mit dem äußeren Feld E^* ist die Gesamtkraft auf das Proton

$$F_\mathrm{ges}(r) = E^*\,e - \frac{e^2}{4\,\pi\varepsilon_0\,R^3}\cdot r$$

$$F_\mathrm{ges}(r) = 0 \quad\Longrightarrow\quad r = \frac{4\,\pi\varepsilon_0\,R^3\,E^*}{e} = 6{,}9\cdot 10^{-17}\,\mathrm{m}$$

6. (a) $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\dfrac{|z|}{z}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\mathrm{sgn}(z)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(b) $\vec{E} = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ für $0 < z < a$, das Feld ist null für $z < 0$ und $z > a$.

(c) $\sigma = \dfrac{Q}{r^2\,\pi} \quad\Longrightarrow\quad E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0\,\pi\,r^2}$

7. $Q(r) = 4\,\pi\displaystyle\int_0^r \varrho(x)\,x^2\,\mathrm{d}x = 4\,\pi\,\alpha\int_0^r x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{8\,\pi\,\alpha}{5}\,r^{\frac{5}{2}}, \quad E(r) = \frac{Q(r)}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = \frac{2\,\alpha}{5\,\varepsilon_0}\cdot\sqrt{r}$

8. Aus dem Gauss folgt für das Feld einer Ladung Q_1: $E(r) = \dfrac{Q_1}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}$. Damit gilt für die Kraft auf eine zweite Ladung Q_2 in der Entfernung r von Q_1: $F(r) = Q_2\,E(r) = \dfrac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}$.

9. (a) Wir nehmen an, dass es einen Punkt P gibt, in dem q im Gleichgewicht ist. Wir denken uns eine Kugel um P, die so klein ist, dass keine der felderzeugenden Ladungen in ihr liegt. In einer kleinen Umgebung von P muss das von den Punktladungen Q_1 bis Q_n erzeugte Feld $\vec{E}$ dann zum Punkt P hinzeigen, d.h. der Fluss durch die Kugeloberfläche ist nicht null. Nach Gauss müsste sich dann in der Kugel eine felderzeugende Ladung befinden: Widerspruch!

   (b) Da es im Feld von Punktladungen keine stabile Gleichgewichtslage geben kann, ist sie nur im Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung möglich. Ein Beispiel ist die homogen geladene Kugel, in deren Mittelpunkt eine Punktladung mit entgegengesetztem Vorzeichen im Gleichgewicht ist (siehe Aufgabe 5).

10. (a) Die Ladung innerhalb einer Kugelschale mit Radius r ist

$$q(r) = \begin{cases} \dfrac{Qr^3}{R^3} & \text{für } r \leqq R \\ Q & \text{für } R < r < 2R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

   (b)

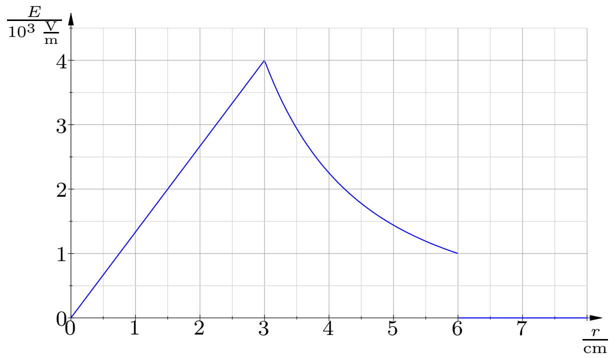
$$E(r) = \frac{q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\cdot r = E_0 \cdot \dfrac{r}{R} & \text{für } r \leqq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = E_0 \cdot \dfrac{R^2}{r^2} & \text{für } R < r < 2R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

$$E_0 = 4{,}00 \cdot 10^3\,\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E(4\,\text{cm}) = \frac{9E_0}{16} = 2{,}25 \cdot 10^3\,\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E(5\,\text{cm}) = \frac{9E_0}{25} = 1{,}44 \cdot 10^3\,\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E(6\,\text{cm}) = \frac{E_0}{4} = 1{,}00 \cdot 10^3\,\frac{\text{N}}{\text{C}}$$



   (c) $\vec{E}$ zeigt von M weg, die Kraft $\vec{F} = -e\vec{E}$ also immer zu M hin, d.h.

$$F(r) = -\frac{E_0 e}{R}\cdot r = -D\cdot r \quad \text{mit} \quad D = \frac{E_0 e}{R} = 2{,}14 \cdot 10^{-14}\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Rücktreibende lineare Kraft $\Longrightarrow$ harmonische Schwingung mit

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_\mathrm{e}}} = 1{,}53 \cdot 10^8 \, \frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4{,}10 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

12. Arbeit im elektrischen Feld

1. (a) $W_{12} = e \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = e \cdot \begin{pmatrix} 0{,}11\,\mathrm{m} \\ 0{,}02\,\mathrm{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -200 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = -4\,\mathrm{eV} = -6{,}4 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

   (b) $W_{12} = e \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = e \cdot \begin{pmatrix} 0{,}11\,\mathrm{m} \\ 0{,}02\,\mathrm{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 15\,\mathrm{eV} = 2{,}4 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}$

2. $r_1 = \left| \begin{pmatrix} -3\,\mathrm{cm} \\ 4\,\mathrm{cm} \end{pmatrix} \right| = 5\,\mathrm{cm}, \quad r_2 = \left| \begin{pmatrix} 8\,\mathrm{cm} \\ 6\,\mathrm{cm} \end{pmatrix} \right| = 10\,\mathrm{cm}, \quad W_{12} = -9{,}0 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J}$

3. (a)

$$\begin{aligned} W_{45} &= \frac{Q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{3a} - \frac{1}{2a} \right) - \frac{2\,Q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5a^2}} - \frac{1}{\sqrt{2a^2}} \right) = \\ &= \frac{Q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \frac{32}{a}\,\mathrm{Jm} \end{aligned}$$

   (b) $W_{45} = \frac{Q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{3a} - \frac{1}{2a} \right) = \frac{Q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{15}{a}\,\mathrm{Jm}$

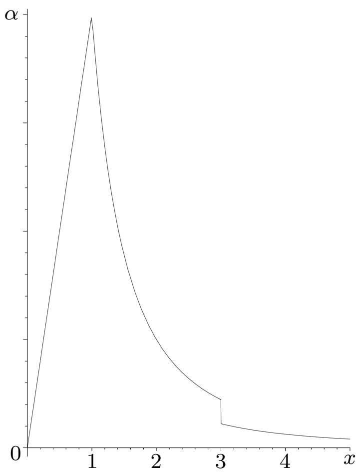
4. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{cm}; \quad W_{\mathrm{AB}} = -q\,\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

   (a) $W_{\mathrm{AB}} = 1{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J}$

   (b) $\vec{E} = 800\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{\vec{r_0}}{|\vec{r_0}|} = \begin{pmatrix} 288 \\ 384 \\ 640 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

$$W_{\mathrm{AB}} = -3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{As} \cdot \begin{pmatrix} 288 \\ 384 \\ 640 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}03 \\ -0{,}05 \\ 0{,}02 \end{pmatrix} \mathrm{m} = -6{,}7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J}$$

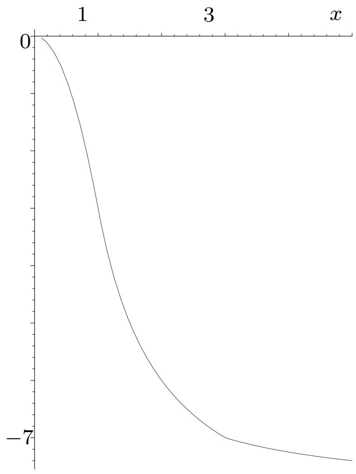
5. (a) $Q(r) = \begin{cases} 2\,Q \cdot \dfrac{r^3}{R^3} & \text{für } 0 \leqq r \leqq R \\ 2\,Q & \text{für } R < r \leqq 3\,R \\ Q & \text{für } r > 3\,R \end{cases}$



$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,R^3} \cdot r & \text{für } 0 \leqq r \leqq R \\ \dfrac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} & \text{für } R < r \leqq 3\,R \\ \dfrac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} & \text{für } r > 3\,R \end{cases}$$

$$E(x) = \begin{cases} \alpha \cdot x & \text{für } 0 \leqq x \leqq 1 \\ \dfrac{\alpha}{x^2} & \text{für } 1 < x \leqq 3 \\ \dfrac{\alpha}{2\,x^2} & \text{für } x > 3 \end{cases} \quad \text{mit } \alpha = 4 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

(b) $r = x \cdot R \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = R \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}r = R\,\mathrm{d}x$



$$W = -q \cdot \int_0^r E(\tilde{r})\,\mathrm{d}\tilde{r} = -q\,R \cdot \int_0^x E(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}$$

$$x < 1: \quad W(x) = -q\,R\,\alpha \cdot \int_0^x \tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{x} = -\frac{\beta}{2}\,x^2$$

$$1 < x < 3: \quad W(x) = W(1) - q\,R\,\alpha \cdot \int_1^x \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\tilde{x}^2} =$$

$$= -\frac{\beta}{2} - \beta\left(-\frac{1}{x} + 1\right) = \beta \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\right)$$

$$x > 3: \quad W(x) = W(3) - \frac{q\,R\,\alpha}{2} \cdot \int_3^x \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\tilde{x}^2} = -\frac{7\,\beta}{6} - \frac{\beta}{2}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\beta}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{8}{3}\right)$$

x	0,5	1	2	3	6	∞
$\frac{W}{\mathrm{J}}$	−0,75	−3	−6	−7	−7,5	−8

(c) $W(0) = W(\infty) + \dfrac{m}{2}\,v^2 \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\dfrac{2\,(W(0) - W(\infty))}{m}} = 80{,}0\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$W(2R) = W(6R) + \dfrac{m}{2}\,v^2 \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\dfrac{2\,(W(2R) - W(6R))}{m}} = 34{,}6\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

6. (a) $$E(r) = \begin{cases} \dfrac{-e}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R^3}\cdot r & \text{für } 0 \leqq r \leqq R \\ \dfrac{-e}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_\mathrm{I} &= -e\cdot\int_0^\infty E(r)\,\mathrm{d}r = \frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R^3}\cdot\int_0^R r\,\mathrm{d}r + \frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\cdot\int_R^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \\ &= \frac{e^2}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,R} + \frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R} = \frac{3\,e^2}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,R} \end{aligned}$$

$$R = \frac{3\,e}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,E_\mathrm{I}} = 1{,}59\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

(b) $\dfrac{m}{2}\,v_0^2 = W_\mathrm{I} \quad\Longrightarrow\quad v = \sqrt{\dfrac{2\,W_\mathrm{I}}{m}} = 2{,}19\cdot 10^6\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

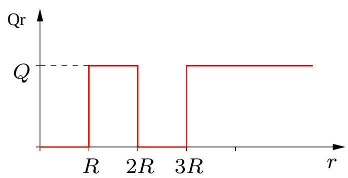
7. (a) $230\,\mathrm{V}\cdot 0{,}10\,\mathrm{A}\cdot 20\cdot 3600\,\mathrm{s} = 1{,}7\,\mathrm{MJ}$
   (b) $230\,\mathrm{V}\cdot 0{,}10\,\mathrm{A}\cdot 20\,\mathrm{h}\cdot 18\,\frac{\mathrm{Cent}}{\mathrm{kWh}}\cdot 365 = 30\,€$
   (c) $55\cdot 10^6\cdot 23\,\mathrm{W} > 1100\,\mathrm{W}$

8. (a) Gaußscher Satz: Ist Φ der elektrische Fluss durch eine geschlossene Fläche und Q die gesamte Ladung innerhalb der Fläche, dann gilt $\Phi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$.

   Radialsymmetrisch: Kugelfläche mit Radius r als geschlossene Fläche und $Q(r)$ als Ladung innerhalb:

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} \quad\Longrightarrow\quad E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

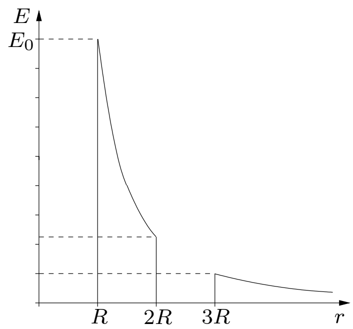
   (b) Die Feldstärke in der Leiterkugel ist null $\Longrightarrow Q(r) = 0$ für $r < R \quad\Longrightarrow\quad Q$ sitzt auf der Oberfläche der Leiterkugel.



   Die Feldstärke in der Leiterschale ist null $\Longrightarrow Q(r) = 0$ für $2R < r < 3R \quad\Longrightarrow\quad -Q$ sitzt auf der Innenfläche und Q auf der Außenfläche der Leiterschale.

   (c)

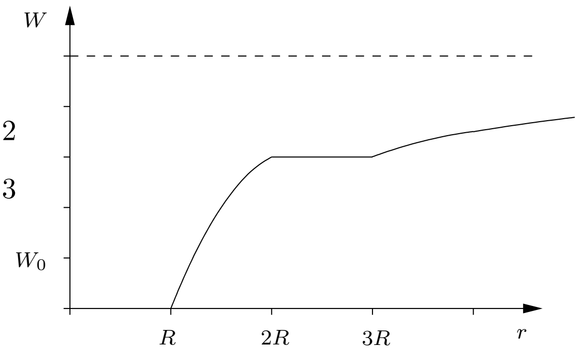
$$E = \begin{cases} 0 & \text{für } r < R \text{ bzw. } x < 1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{E_0}{x^2} & \text{für } R < r < 2R \text{ bzw. } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{für } 2R < r < 3R \text{ bzw. } 2 < x < 3 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{E_0}{x^2} & \text{für } r > 3R \text{ bzw. } x > 3 \end{cases}$$



(d) Aus $\quad W = -q \int\limits_0^r E(\tilde{r})\,\mathrm{d}\tilde{r} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_0^r \frac{\mathrm{d}\tilde{r}}{r^2}$ folgt:

$$W(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < R \\ -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_R^r \frac{\mathrm{d}\tilde{r}}{\tilde{r}^2} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) & \text{für } R < r < 2R \\ W(2R) = -\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R} & \text{für } 2R < r < 3R \\ W(2R) - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{3R}^r \frac{\mathrm{d}\tilde{r}}{\tilde{r}^2} = -\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3R} - \frac{1}{r}\right) = & \\ \quad = -\frac{5qQ}{24\pi\varepsilon_0 R} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{für } r > 3R \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{cases} 0 & \text{bzw. } x < 1 \\ W_0\left(6 - \frac{6}{x}\right) & \text{bzw. } 1 < x < 2 \\ 3W_0 & \text{bzw. } 2 < x < 3 \\ W_0\left(5 - \frac{6}{x}\right) & \text{bzw. } x > 3 \end{cases}$$

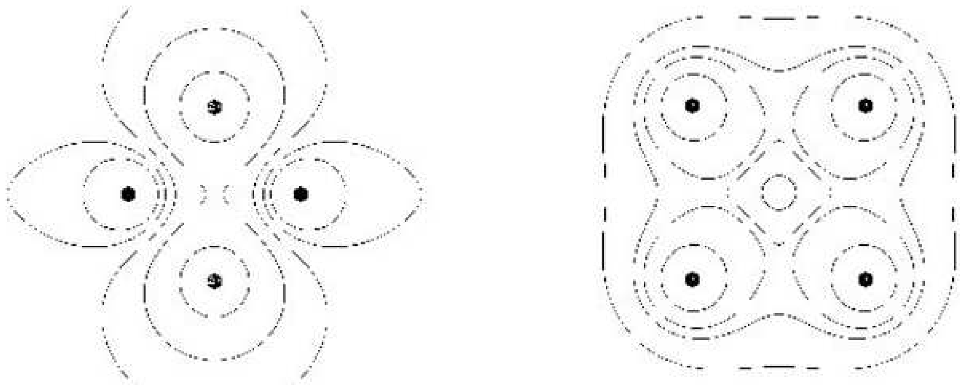


(e) $W(R) + 0 = W(4R) + \frac{m}{2}v^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{m}{2}v^2 = -W(4R) = \frac{7Qe}{48\pi\varepsilon_0 R} = 8{,}40 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

$$v = \sqrt{\frac{-2W(4R)}{m_\mathrm{p}}} = 3{,}17 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

13. Das Potential des elektrischen Feldes

1. .



2. (a) $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{P_0A}} = \begin{pmatrix} a_x - x_0 \\ a_y - y_0 \\ a_z - z_0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{P_0B}} = \begin{pmatrix} b_x - x_0 \\ b_y - y_0 \\ b_z - z_0 \end{pmatrix}$

   $\varphi_\mathrm{A} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P_0A}} = (z_0 - a_z)\,E, \quad \varphi_\mathrm{B} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P_0B}} = (z_0 - b_z)\,E$

   ${\varphi_\mathrm{A}}' = (z_0' - a_z)\,E, \quad {\varphi_\mathrm{B}}' = (z_0' - b_z)\,E$

   $U_\mathrm{AB} = \varphi_\mathrm{B} - \varphi_\mathrm{A} = (a_z - b_z)\,E = {\varphi_\mathrm{B}}' - {\varphi_\mathrm{A}}'$

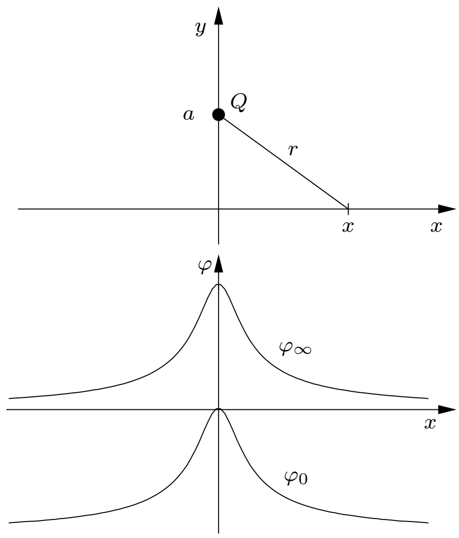
   (b) $\varphi_\mathrm{A} = -6\,\mathrm{V}$, $\varphi_\mathrm{B} = -15\,\mathrm{V}$, ${\varphi_\mathrm{A}}' = -12\,\mathrm{V}$, ${\varphi_\mathrm{B}}' = -21\,\mathrm{V}$, $U_\mathrm{AB} = -9\,\mathrm{V}$

3. $\varphi_\mathrm{A} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}03 \\ 0{,}01 \end{pmatrix} \mathrm{m} = -0{,}09\,\mathrm{V}$

   $\varphi_\mathrm{B} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}01 \end{pmatrix} \mathrm{m} = 0{,}05\,\mathrm{V}$

   $U_\mathrm{AB} = \varphi_\mathrm{B} - \varphi_\mathrm{A} = 0{,}14\,\mathrm{V}$

4. Bezugspunkt ∞:



$$\varphi_\infty(x) = \frac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Bezugspunkt O:

$$\varphi_0(x) = \varphi_\infty(x) + C$$

$$\varphi_0(0) = 0 = \varphi_\infty(0) + C$$

$$\Longrightarrow \quad C = -\varphi_\infty(0) = -\frac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\, a}$$

$$\varphi_0(x) = \frac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{a}\right)$$

$$U_{\mathrm{RS}} = \varphi_\infty(9\,\mathrm{cm}) - \varphi_\infty(5\,\mathrm{cm}) = 92\,\mathrm{V}$$

5. (a) Die Entfernung von A oder B zum Punkt $(x|y|0)$ ist $R = \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$.

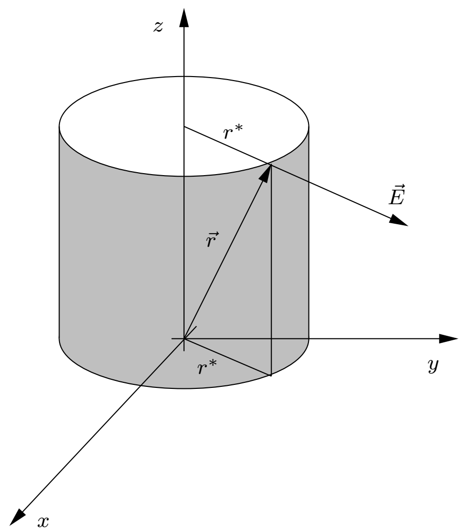
$$\varphi(x, y) = \frac{2\,Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R} = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}$$

(b) $\overline{\mathrm{OR}} = \overline{\mathrm{OS}} = 65\,\mathrm{cm} \quad \Longrightarrow \quad U_{\mathrm{RS}} = \varphi(\mathrm{S}) - \varphi(\mathrm{R}) = 0$

(c) $U(r) = U_{\mathrm{OP}} = \varphi(\mathrm{P}) - \varphi(\mathrm{O}) = \dfrac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,\sqrt{r^2 + a^2}} - \dfrac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,a}$

$$U(\infty) = -\frac{e}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,a} = -2{,}88 \cdot 10^6\,\mathrm{V}$$

6. Der Punkt $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ hat von der z-Achse den Abstand $r^* = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nach Gauss ist der Betrag der Feldstärke im Abstand r^* von der z-Achse



$$E(r^*) = \frac{\varrho}{2\pi\varepsilon_0 r^*}$$

Der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{E}$ ist

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\varrho}{2\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

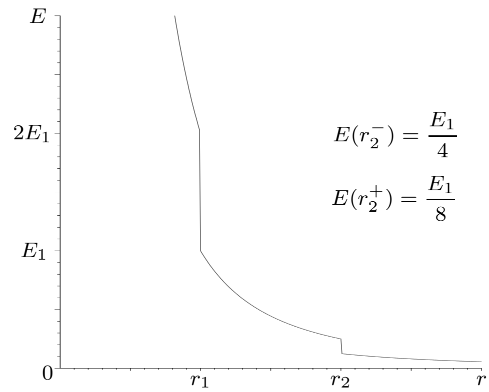
Wählt man einen Punkt mit dem Abstand r_0 von der z-Achse als Bezugspunkt des Potentials, dann ist das Potential im Abstand r^* von der z-Achse

$$\varphi(r^*) = -\int\limits_{r_0}^{r^*} E(\overline{r})\,\mathrm{d}\overline{r} = -\frac{\varrho}{2\pi\varepsilon_0} \int\limits_{r_0}^{r^*} \frac{\mathrm{d}\overline{r}}{\overline{r}} = -\frac{\varrho}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r^*}{r_0}$$

7.

(a) $$Q(r) = \begin{cases} 4\,e & \text{für } 0 \leqq r < r_1 \\ 2\,e & \text{für } r_1 \leqq r < r_2 \\ e & \text{für } r > r_2 \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{e}{\pi\,\varepsilon_0\,r^2} & \text{für } 0 \leqq r < r_1 \\ \dfrac{e}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} & \text{für } r_1 < r < r_2 \\ \dfrac{e}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} & \text{für } r > r_2 \end{cases}$$



(b) Mit $r_2 = 2\,r_1$ folgt

$$U_{\infty\,1} = U_{\infty\,2} + U_{2\,1} = \frac{e}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r_2} + \frac{2\,e}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{3\,e}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,r_1} = 108\,\mathrm{V} \approx 1{,}1 \cdot 10^2\,\mathrm{V}$$

(c) $$\frac{m_\mathrm{p}}{2}\,v^2 = e \cdot U_{\infty\,1}, \quad v = \sqrt{\frac{2\,e\,U_{\infty\,1}}{m_\mathrm{p}}} = 1{,}4 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad a = \frac{e^2}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,m_\mathrm{p}\,r_1^2} = 6{,}9 \cdot 10^{20}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

8. $\dfrac{F_{\mathrm{e}}}{F_{\mathrm{g}}} = \dfrac{e^2 r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2 G m_{\mathrm{e}} m_{\mathrm{p}}} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 G m_{\mathrm{e}} m_{\mathrm{p}}} = 2{,}27 \cdot 10^{39}$

14. Kondensatoren

1. $C_{12} = \dfrac{C_1\,C_2}{C_1\,C_2} = 1{,}6\,\mu\mathrm{F}$

   $C_{34} = \dfrac{C_3\,C_4}{C_3\,C_4} = 1{,}\overline{3}\,\mu\mathrm{F}$

   $C_{1234} = C_{12} + C_{34} = 2{,}9\,\mu\mathrm{F}$

2. (a) $C = \varepsilon_0\,\dfrac{A}{d} = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}} \cdot \dfrac{(0{,}18\,\mathrm{m})^2}{0{,}0040\,\mathrm{m}} = 72\,\mathrm{pF}$

   $W = \frac{1}{2}\,C\,U^2 = 8{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J} = 8{,}1\,\mathrm{mJ}$

   $Q = C\,U = 1{,}1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C} = 1{,}1\,\mu\mathrm{C}$

   (b) Durch die Verdoppelung des Abstandes der Platten, halbiert sich die Kapazität und da der Kondensator vom Netzgerät getrennt ist, ändert sich die Ladung nicht. Wegen $U = \frac{Q}{C}$ verdoppelt sich die Spannung.

   (c) $W_{\mathrm{mech}} = \Delta W_{\mathrm{elektrisch}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{C}{2}\,(2\,U)^2 - \dfrac{1}{2}\,C\,U^2 = \dfrac{1}{2}\,C\,U^2 = 8{,}1\,\mathrm{mJ}$

3. (a) $Q = C\,U = 0{,}13\,\mathrm{kC}$, $W_{\mathrm{elektrisch}} = \frac{1}{2}\,C\,U^2 = 0{,}40\,\mathrm{kJ}$.

   (b) $C = \varepsilon_0\,\frac{A}{d} \quad\Rightarrow\quad A = \dfrac{d\,C}{\varepsilon_0} = 2{,}5\,\mathrm{km}^2$.

   (c) Die beiden Kondensatoren sind in Reihe zu schalten. Die Kapazität dieser Reihenschaltung ist 11 F.

   (d) $P = \dfrac{U^2}{R} \quad\Rightarrow\quad R = \dfrac{U^2}{P} = 29\,\Omega$

   $U\,(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{R\,C}} \quad\Rightarrow\quad 0{,}90\,U_0 = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{R\,C}} \quad\Rightarrow\quad t = -R\,C\,\ln 0{,}90 = 33\,\mathrm{s}$

15. Energie des elektrischen Feldes

1. (a) $E(R_\mathrm{K}) = \dfrac{Q_\mathrm{max}}{4\pi\varepsilon_0 R_\mathrm{K}^2} = E_0 \quad \Longrightarrow \quad Q_\mathrm{max} = 4\pi\varepsilon_0 R_\mathrm{K}^2 E_0 = 1{,}00 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{C}$

   (b) $R_\mathrm{M} + R_\mathrm{K} \approx R_\mathrm{M} \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \dfrac{F_\mathrm{e} - F_\mathrm{G}}{m} = \dfrac{\dfrac{Q_\mathrm{max} Q_\mathrm{M}}{4\pi\varepsilon_0 R_\mathrm{M}^2} - \dfrac{GMm}{R_\mathrm{M}^2}}{m}$

   $$Q_\mathrm{M} = \left(ma_0 + \frac{GMm}{R_\mathrm{M}^2}\right) \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0 R_\mathrm{M}^2}{Q_\mathrm{max}} = \left(a_0 R_\mathrm{M}^2 + GM\right) \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0 m}{Q_\mathrm{max}} = 2{,}00 \cdot 10^9\,\mathrm{C}$$

   (c) Potential einer Kugel mit Ladung Q für $r \geqq R$: $\quad \varphi(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

   Spannung zwischen Kugeloberfläche und ∞: $\quad U = \varphi(r) - \varphi(\infty) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

   $$\Longrightarrow \quad C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

   $$W_\mathrm{M} = \frac{Q_\mathrm{M}^2}{2C_\mathrm{M}} = \frac{Q_\mathrm{M}^2}{8\pi\varepsilon_0 R_\mathrm{M}} = 1{,}0 \cdot 10^{22}\,\mathrm{J}, \quad W_\mathrm{K} = \frac{Q_\mathrm{max}^2}{2C_\mathrm{K}} = \frac{Q_\mathrm{max}^2}{8\pi\varepsilon_0 R_\mathrm{K}} = 1{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{J}$$

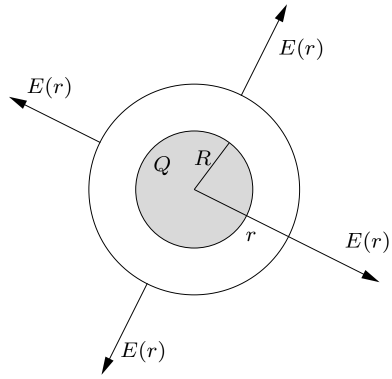
   (d) $W_p(r) = -\dfrac{GMm}{r} + \dfrac{Q_\mathrm{M} Q_\mathrm{max}}{4\pi\varepsilon_0 r}$

   $$\frac{m}{2} v^2 = W_p(R_\mathrm{M}) - W_p(\infty) = W_p(R_\mathrm{M}) = \frac{Q_\mathrm{M} Q_\mathrm{max}}{4\pi\varepsilon_0 R_\mathrm{M}} - \frac{GMm}{R_\mathrm{M}} = ma_0 R_\mathrm{M}$$

   $$v = \sqrt{2a_0 R_\mathrm{M}} = 3{,}9 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

16. Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld

1. (a) Wir denken uns eine Kugelfläche A mit Radius r um den Mittelpunkt der Metallkugel. Aus Symmetriegründen steht das von Q erzeugte Feld $\vec{E}$ auf dieser Fläche senkrecht und $E = |\vec{E}|$ hängt nur von r ab. Daher ist der Fluss durch A



$$\Phi = E(r) \cdot A = 4\pi r^2 E(r)$$

Nach dem Gaussschen Satz ist

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

d.h.

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(b) Mit $m = m_\mathrm{e}$ und $q = -e$ gilt

$$\frac{m}{2}v^2 + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{m}{2} \cdot 0^2 + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

$$v = \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 m} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R}\right)} = \sqrt{\frac{Qe}{2\pi\varepsilon_0 m} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right)} = 3{,}1 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(c) $a_1 = a(r_0) = \dfrac{F(r_0)}{m} = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 m r_0^2} = 7{,}9 \cdot 10^{12}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Wegen $r_0 = 4R$ ist $a_2 = a(R) = 16a_1 = 1{,}3 \cdot 10^{14}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Unter der Annahme einer konstanten Beschleunigung wären die Flugzeiten des Elektrons für die Strecke $s = r_0 - R = 15\,\mathrm{cm}$:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a_1}} = 1{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s} \quad \text{und} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2s}{a_2}} = \frac{t_1}{4} = 4{,}9 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

$\Delta y_2 < \Delta y < \Delta y_1$ mit $\Delta y_1 = \dfrac{g}{2}t_1^2 = 1{,}9 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m}$ und $\Delta y_2 = \dfrac{\Delta y_1}{16} = 1{,}2 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$

2. (a) Polung: plus unten

(b) $\frac{m}{2}v_0^2 = eU_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{mv_0^2}{e} = 2U_0, \qquad v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$

Flugzeit: $\Delta t = \frac{L}{v_0 \cos\varphi}$, Beschleunigung: $a_y = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{md}$

Geschwindigkeit in y-Richtung bei $x = L$: $v_1 = v_0 \sin\varphi - \frac{eU}{md} \cdot \frac{L}{v_0 \cos\varphi} = 0$

$$U = \frac{mv_0^2 d \sin\varphi\cos\varphi}{eL} = \frac{2U_0 d \sin\varphi\cos\varphi}{L} = \frac{U_0 d \sin 2\varphi}{L}$$

(c) $y_1 = v_{y0}\Delta t - \frac{a_y}{2}\Delta t^2 = v_0 \sin\varphi \cdot \frac{L}{v_0\cos\varphi} - \frac{eU}{2md} \cdot \frac{L^2}{v_0^2\cos^2\varphi} = L\tan\varphi - \frac{UL^2}{4U_0 d\cos^2\varphi}$

Mit $U = \frac{2U_0 d \sin\varphi\cos\varphi}{L}$ folgt $y_1 = L\tan\varphi - \frac{2U_0 dL^2 \sin\varphi\cos\varphi}{4U_0 dL\cos^2\varphi} = \frac{L}{2}\tan\varphi$

(d) $y_1 = \frac{L}{2}\tan\varphi < \frac{d}{2} \quad \Longrightarrow \quad \tan\varphi < \frac{d}{L} \quad \Longrightarrow \quad \tan\varphi_{\max} = \frac{d}{L}$

(e) $U(\varphi') = U(\varphi) \Longrightarrow \sin(2\varphi') = \sin(2\varphi) \Longrightarrow 2\varphi' = 180^\circ - 2\varphi \Longrightarrow \varphi' = 90^\circ - \varphi$

(f) $U = \frac{200\,\mathrm{V} \cdot 0{,}06\,\mathrm{m} \cdot \sin 30^\circ}{0{,}2\,\mathrm{m}} = 30\,\mathrm{V}, \quad y_1 = \frac{0{,}2\,\mathrm{m}}{2} \cdot \tan 15^\circ = 2{,}7\,\mathrm{cm} < \frac{d}{2}$ (ja)

$\varphi' = 75^\circ, \quad y_1' = 10\,\mathrm{cm} \cdot \tan 75^\circ = 37{,}3\,\mathrm{cm} > \frac{d}{2}$ (nein) $\quad \varphi_{\max} = \arctan\frac{d}{L} = 17{,}7^\circ$

3. (a) $m = m_e: \quad \frac{m}{2}v_0^2 = eU \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 5{,}93 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$Q = -CU_1 = -\frac{\varepsilon_0 L^2}{d} \cdot \beta U = -1{,}42 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C} \qquad (C = 3{,}54 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F})$

(b) Bewegung in x-Richtung: $t_1 = \frac{L}{v_0\cos\varphi}$

Beschleunigung in y-Richtung: $a = -\frac{eE}{m} = -\frac{eU_1}{md} = -\frac{e\beta U}{md} \quad \Longrightarrow$

$$t_1 v_0 \sin\varphi - \frac{e\beta U}{2md}t_1^2 = t_1\left(v_0\sin\varphi - \frac{e\beta U}{2md}t_1\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{2mdv_0\sin\varphi}{e\beta U}$$

$$\frac{L}{v_0\cos\varphi} = \frac{2mdv_0\sin\varphi}{e\beta U} \quad \Longrightarrow \quad 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi = \frac{Le\beta U}{d\,\underbrace{mv_0^2}_{2eU}} = \frac{Le\beta U}{2deU} = \frac{L\beta}{2d}$$

(c) Energiesatz: $\frac{m}{2}v_0^2 = eEy_0 + \frac{m}{2}v_0^2\cos^2\varphi \quad \Longrightarrow$

$$y_0 = \frac{mv_0^2}{2eE}(1 - \cos^2\varphi) = \frac{2eU}{2eE}\sin^2\varphi = \frac{Ud}{\beta U}\sin^2\varphi = \frac{d}{2\beta}\left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 2\varphi}\right)$$

$$y_0 = \frac{d}{2\beta}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{L^2\beta^2}{4d^2}}\right) = \frac{d}{0{,}8}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{16}{25}}\right) = \frac{d}{2} = 1{,}25\,\mathrm{cm}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{L\beta}{2d} = 2\beta = 0{,}8 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 26{,}6^\circ$$

$$t_1 = \frac{L}{v_0 \cos\varphi} = 1{,}89 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

17. Die Elementarladung – Millikan

1. -

18. Laden und Entladen von Kondensatoren

Teil III.

Elektrodynamik S2

19. Ladung und Stromstärke

1. Die frei bewegliche Ladung in einem Leiterstück der Länge $\Delta s = v\,\Delta t$ (v ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen) ist $\Delta Q = \varrho\,A\,\Delta s$. Mit $\Delta Q = I\,\Delta t$ folgt

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\varrho\,A\,\Delta t} = \frac{\Delta I}{\varrho\,A} = \frac{j}{\varrho}$$

2. Die Zahl der Cu-Atome im Leitervolumen ΔV ist $n = \dfrac{\sigma\,\Delta V}{m}$. Damit folgt für die Dichte der frei beweglichen Ladung

$$\varrho = \frac{1{,}27 \cdot n\,e}{\Delta V} = \frac{1{,}27 \cdot \sigma\,e}{m}$$

Mit $j = \dfrac{I}{A}$ ist dann

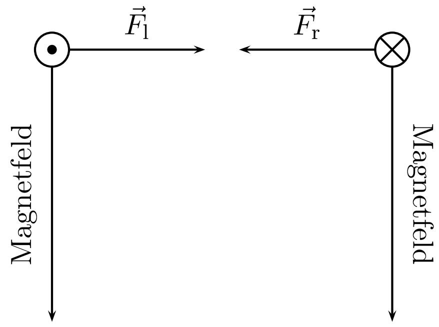
$$v = \frac{j}{\varrho} = \frac{m\,I}{1{,}27 \cdot \sigma\,e\,A} = 0{,}0467\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$$

3. $\dot{Q}(t) = I(t) \quad \Longrightarrow \quad Q(t) = \dfrac{5\,\mathrm{A}}{3\,\mathrm{s}^2} \cdot t^3 \quad \Longrightarrow \quad \Delta Q = Q(3\,\mathrm{s}) - Q(1\,\mathrm{s}) = 43{,}3\,\mathrm{C}$

20. Kraft auf einen Leiter

21. Lorentzkraft

1. Am Ort der rechten Leiterschaukel weist das Magnetfeld nach unten. Die Elektronen im Leiter erfahren eine Kraft nach links. Dadurch entsteht ein Strom. Dabei weist die technische Stromrichtung in die Zeichenebene. Am Ort des linken Leiters weist dann die technische Stromrichtung aus der Zeichenebene. Die Kraft ist nach Vorraussetzung nach rechts gerichtet. Mit der ,,rechten Hand–Regel" findet man dann, dass das Magnetfeld nach unten gerichtet ist.



2. Durch die Bewegung der rechten Leiterschaukel nach links wird in dieser ein Strom induziert, wobei die technische Stromrichtung aus der Zeichenebene weist. Weil beide Leiterschaukeln leitend miteinander verbunden sind, fließt auch in der linken Leiterschaukel ein Strom. Dieser ist in der linken Leiterschaukel in die Zeichenebene gerichtet. Ein stromdurchflossener Leiter in einem Magnetfeld erfährt eine Kraft. Mit der ,,rechten–Hand–Regel" findet man, dass die Kraft auf die linke Leiterschaukel nach rechts weist.

3. (a) $E_0 = \frac{q_\mathrm{max}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad \Longrightarrow \quad q_\mathrm{max} = 4\pi E_0 \varepsilon_0 R^2 = 1{,}1 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{C}$

   (b) $F_1 = q v_1 B_\mathrm{E} = 4{,}8 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{N}, \quad m = \frac{4\pi}{3} R^3 \varrho = 3{,}4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{kg}$

   $mg = 3{,}3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N} = 6{,}8 \cdot 10^5 F_1$

   (c) $$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = q \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{mT}}{\mathrm{s}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot 10^{-13}\,\mathrm{N}$$

   $F = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} \cdot 10^{-13}\,\mathrm{N} = 1{,}3 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{N}$

   $a = \frac{F}{m} = 0{,}39\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{v^2}{r} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{v^2}{a} = 64\,\mathrm{m}$

22. Induktionsgesetz

1. (a) Q negativ, P positiv. Begründung mit Lorentzkraft.

   (b) Magnetischer Fluss:

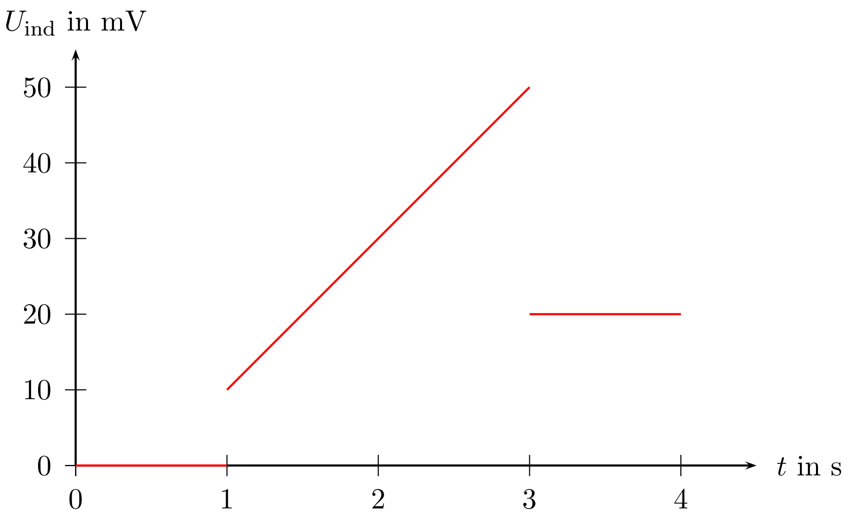
$$|\Phi(t)| = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad 0 \leqq t < 1\,\mathrm{s} \\ a\,(v\,t - 0{,}020\,\mathrm{m}) \cdot 0{,}25\,\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{s}} \cdot t, & \text{falls} \quad 1\,\mathrm{s} \leqq t < 3\,\mathrm{s} \\ a^2 \cdot 0{,}25\,\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{s}} \cdot t, & \text{falls} \quad 3\,\mathrm{s} \leqq t \end{cases}$$

   Induzierte Spannung:

$$|U_{\mathrm{ind}}(t)| = \left|N\,\dot{\Phi}(t)\right| = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad 0 \leqq t < 1\,\mathrm{s} \\ N\,\left(2\,a\,v \cdot 0{,}25\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{s}} \cdot t - a \cdot 0{,}020\,\mathrm{m} \cdot 0{,}25\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{s}}\right), & \text{falls} \quad 1\,\mathrm{s} \leqq t < 3\,\mathrm{s} \\ N\,a^2 \cdot 0{,}25\,\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{s}}, & \text{falls} \quad 3\,\mathrm{s} \leqq t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad 0 \leqq t < 1\,\mathrm{s} \\ 20\,\mathrm{mV} \cdot t - 10\mathrm{mV}, & \text{falls} \quad 1\,\mathrm{s} \leqq t < 3\,\mathrm{s} \\ 20\,\mathrm{mV}, & \text{falls} \quad 3\,\mathrm{s} \leqq t \end{cases}$$

   t–U_{ind}–Diagramm:



   (c) $50 \cdot 4\,B\,\frac{U_{\mathrm{ind}}}{R}\,a = m\,\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{50 \cdot 4\,a\,B\,(4{,}0\,\mathrm{s})\;U_{\mathrm{ind}}\,(4{,}0\,\mathrm{s})}{R\,m} = 2{,}7 \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

2. (a) Für $t \geqq t_2 = 15\,\mathrm{s}$ ist der Leiterrahmen nicht mehr im Magnetfeld und daher $\Phi(t) = 0$. Für $t < t_2$ gilt:

$$A(t) = b(a - vt)$$

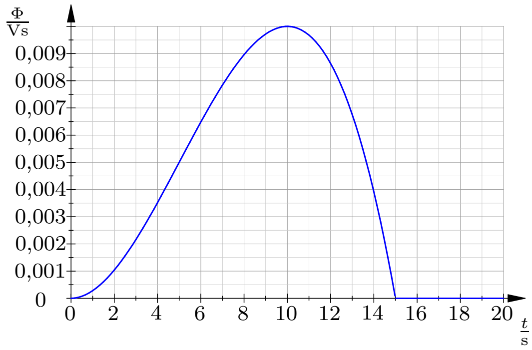
$$\Phi(t) = B(t)A(t) = \alpha b t^2 (a - vt)$$

$$\Phi(t) = \alpha b (a t^2 - v t^3)$$

$$\dot{\Phi}(t) = \alpha b t (2a - 3vt)$$

$$\dot{\Phi}(t) = 0 \implies t_0 = 0 \text{ (Minimum)}$$

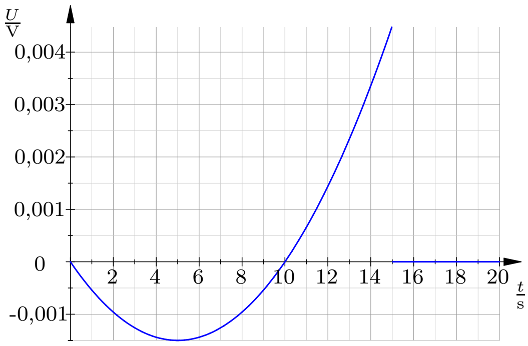
$$\text{oder } t_1 = \frac{2a}{3v} = 10\,\mathrm{s} \text{ (Maximum)}$$



$$\Phi(t) = 10^{-2}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}} \cdot t^2 \left(3 - 0{,}2\,\frac{1}{\mathrm{s}}t\right)$$

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	2	4	6	8	10	12	14	15
$\frac{\Phi}{\mathrm{mT}}$	0	1,04	3,52	6,48	8,96	10	8,64	3,92	0

(b) Für $t \in [0; 10\,\mathrm{s}]$ ist $\Phi(t)$ steigend, das vom Induktionsstrom erzeugte Feld $\vec{B}_\mathrm{i}$ muss entgegengesetzt zu $\vec{B}$ orientiert sein (Lenzsche Regel). Der Induktionsstrom würde (wenn P und Q leitend verbunden wären) entgegen dem Uhrzeigersinn fließen, d.h. P ist negativ. Für $t \in [0; 10\,\mathrm{s}]$ ist also $U(t) < 0$, d.h.



$$U(t) = -\dot{\Phi}(t) = -\alpha b t (2a - 3vt)$$

$$U(t) = \begin{cases} 6 \cdot 10^{-4}\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{sm}} \cdot t\left(0{,}1\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}t - 1\right) & \text{für } t < t_2 \\ 0 & \text{für } t > t_2 \end{cases}$$

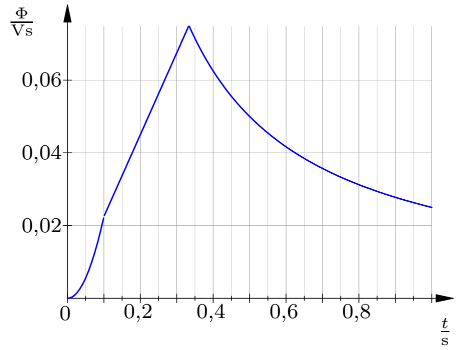
$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	5	10	15
$\frac{U}{\mathrm{mV}}$	0	-1,5	0	4,5

3. $B = \dfrac{U_0 \cdot T}{2\,\pi\,N\,A} = \dfrac{4{,}8\,\mathrm{V} \cdot 0{,}020\,\mathrm{s}}{2\,\pi \cdot 50 \cdot 30 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}} = 0{,}10\,\mathrm{T}$.

4. (a) $\dfrac{g}{2}t_2^2 = b \quad \implies \quad t_2 = \sqrt{\dfrac{2b}{g}} = \sqrt{\dfrac{1 \cdot \mathrm{s}^2}{9}} = 0{,}333\,\mathrm{s}$

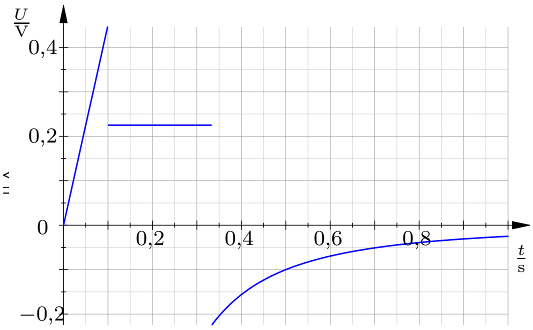
(b)

$$A(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}bgt^2 & \text{für } 0 \leqq t \leqq t_2 \\ b^2 & \text{für } t > t_2 \end{cases}$$



$$\Phi(t) = \begin{cases} \dfrac{B_0bgt^2}{2} = 2{,}25\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}} \cdot t^2 & \text{für } 0 \leqq t \leqq \\ \dfrac{B_0bgt}{2\alpha} = 0{,}225\,\mathrm{V} \cdot t & \text{für } t_1 < t < \\ \dfrac{B_0b^2}{\alpha t} = \dfrac{0{,}025\,\mathrm{Vs}^2}{t} & \text{für } t > t_2 \end{cases}$$

(c) Für $0 < t < t_1$ zeigt die Lorentzkraft auf die Elektronen des unteren Leiters nach links, d.h. Strom nach rechts, P positiv, $U > 0$.



$$\dot{\Phi}(t) = \begin{cases} B_0bgt = 4{,}5\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}} \cdot t & \text{für } 0 \leqq t \leqq \\ \dfrac{B_0bg}{2\alpha} = 0{,}225\,\mathrm{V} & \text{für } t_1 < t \\ -\dfrac{B_0b^2}{\alpha t^2} = -\dfrac{0{,}025\,\mathrm{Vs}^2}{t^2} & \text{für } t > t_2 \end{cases}$$

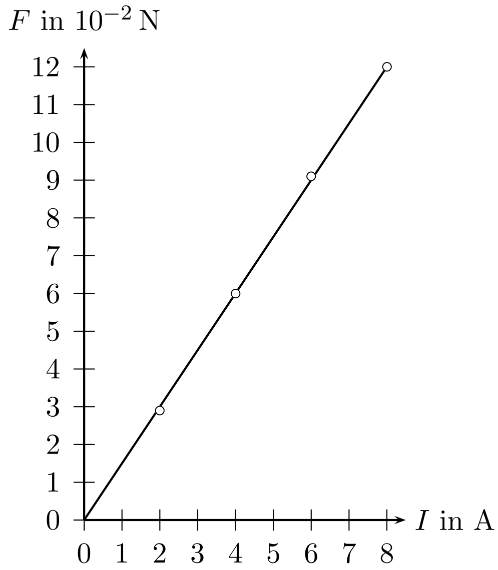
Vorzeichen von $U \quad \Longrightarrow \quad U(t) = \dot{\Phi}(t)$

(d) Strom im unteren Leiter nach rechts, Lorentzkraft auf den Leiter nach oben (also bremsend) $\Longrightarrow \quad t_2' > t_2$.

23. Magnetfeld von Strömen

1. (a) Kraft auf linken Leiter nach links, auf rechten nach rechts und auf unteren nach unten.

   (b)



   F ist direkt proportional zu I.

   (c) $F \sim I \cdot \ell$

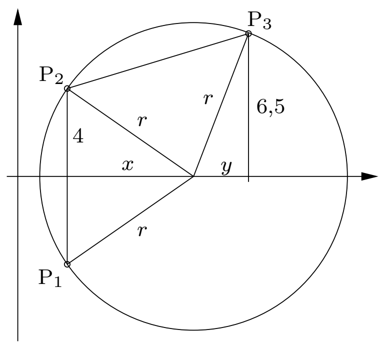
   (d) $B = \dfrac{F}{I\,\ell} = \dfrac{12 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}}{8{,}0\,\mathrm{A} \cdot 0{,}20\,\mathrm{m}} = 0{,}075\,\mathrm{T} = 75\,\mathrm{mT}$

24. Induktivität und Energie des Magnetfeldes

1. (a) $B_0 = \mu_0 \cdot \dfrac{nI_0}{a} \quad \Longrightarrow \quad n = \dfrac{B_0 a}{\mu_0 I_0} = 2{,}1 \cdot 10^3$

$$L = \mu_0 \cdot \frac{n^2 A}{a} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{La}{\mu_0 n^2} = 32\,\mathrm{m}^2 \quad \Longrightarrow \quad r_0 = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 3{,}2\,\mathrm{m}$$

(b) $y = 8{,}25\,\mathrm{cm} - x$



$x^2 + (4\,\mathrm{cm})^2 = r^2$

$y^2 + (6{,}5\,\mathrm{cm})^2 = (8{,}25\,\mathrm{cm} - x)^2 + (6{,}5\,\mathrm{cm})^2 = r^2$

$(8{,}25\,\mathrm{cm})^2 - 16{,}5\,\mathrm{cm}\cdot x + x^2 + (6{,}5\,\mathrm{cm})^2 = x^2 + (4\,\mathrm{cm})^2$

$$x = \frac{(8{,}25\,\mathrm{cm})^2 + (6{,}5\,\mathrm{cm})^2 - (4\,\mathrm{cm})^2}{16{,}5\,\mathrm{cm}} = 5{,}72\,\mathrm{cm}$$

$r = \sqrt{x^2 + (4\,\mathrm{cm})^2} = 6{,}98\,\mathrm{cm}$

$$\frac{mv^2}{r} = evB_0 \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{erB_0}{m} = 2{,}67 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$eU_\mathrm{p} = \frac{m}{2}v^2 \quad \Longrightarrow \quad U_\mathrm{p} = \frac{mv^2}{2e} = \frac{er^2B_0^2}{2m} = 3{,}7 \cdot 10^6\,\mathrm{V}$$

(c) $W_0 = Aa \cdot \dfrac{B_0^2}{2\mu_0} = \dfrac{1}{2}LI_0^2 = 2{,}7 \cdot 10^9\,\mathrm{J}, \qquad \Delta t = \dfrac{W}{P} = \dfrac{2{,}7 \cdot 10^9\,\mathrm{J}}{10^5\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}} = 2{,}7 \cdot 10^4\,\mathrm{s} = 7{,}5\,\mathrm{h}$

(d) Spannung am Widerstand gleich Induktionsspannung:

$$RI = -L\dot{I} \quad \Longrightarrow \quad \dot{I} = -\frac{R}{L}I$$

$$\dot{I}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_0\,e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right) = -\frac{R}{L}I_0\,e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = -\frac{R}{L}I(t)$$

Die Anfangsbedingung $I(0) = I_0$ passt. $\quad \dfrac{R}{L} = \dfrac{1}{140\,000\,\mathrm{s}} = 7{,}14 \cdot 10^{-6}\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}.$

$$W(t_1) = \frac{1}{2}LI(t_1)^2 = \frac{1}{2}LI_0^2 e^{-\frac{2R}{L}\cdot t_1} = W_0\,e^{-\frac{2R}{L}\cdot t_1} = W_1$$

$$t_1 = -\frac{L}{2R}\ln\frac{W_1}{W_0} = \frac{L}{2R}\ln\frac{W_0}{W_1} = 5{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{s} = 1{,}5 \cdot 10^2\,\mathrm{h}$$

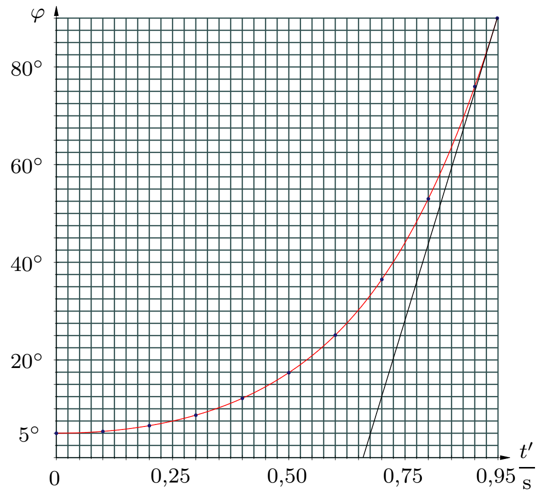
$$I_1 = I(t_1) = I_0\,e^{-\frac{R}{L}\cdot t_1} = 3{,}8 \cdot 10^2\,\mathrm{A}$$

(e) $B(t) = \frac{\mu_0 n}{a} \cdot I(t) = \frac{\mu_0 n}{a} \cdot I_0 e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = B_0 e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \quad \Longrightarrow \quad \Phi(t) = b^2 n' B(t) = b^2 n' B_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$

$$U'(t) = |\dot{\Phi}(t)| = U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \quad \text{mit} \quad U_0 = \frac{b^2 n' B_0 R}{L} = 0{,}29\,\mathrm{V}$$

(f) $\Phi(t) = b^2 n' B(t) \cos\varphi \quad \Longrightarrow$

$$U' = -\dot{\Phi} = -b^2 n' (\dot{B} \cos\varphi - B \dot{\varphi} \sin\varphi) =$$
$$= b^2 n' B \left(\frac{R}{L} \cos\varphi + \dot{\varphi} \sin\varphi \right)$$



Im Intervall $0 < t' < 0{,}95\,\mathrm{s}$ ist $\cos\varphi$ fallend, $\sin\varphi$ steigend und

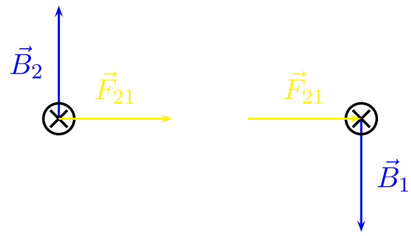
$$B(t) \approx B(t_2) = 3{,}1\,\mathrm{T}$$

praktisch konstant. Maximales $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} \approx \frac{\frac{\pi}{2}}{0{,}29\,\mathrm{s}} = 5{,}4\,\frac{1}{\mathrm{s}} \gg \frac{R}{L}$$

$$U'_{\max} \approx b^2 n' B(t_2) \dot{\varphi} = 1{,}7 \cdot 10^5\,\mathrm{V}$$

2. Ein stromdurchflossener Leiter ist von einem kreisförmigen Magnetfeld umgeben. Dieses Magnetfeld ist auch am Ort der jeweils anderen Leiters vorhanden. Ein stromdurchflossener Leiter erfährt in einem Magnetfeld eine Kraft, die sogenannte Lorentzkraft. Ihre Richtung ermitteln wir mit der Rechten–Hand–Regel.



3. $1{,}0\,\mathrm{mH}$.

4. $-4{,}8\,\mathrm{V}$.

5. $0{,}20\,\mathrm{A}$; $5{,}8\,\mathrm{ms}$; $12\,\mathrm{ms}$.

6. $R = 8{,}0\,\Omega$, $L = 0{,}33\,\mathrm{H}$

7. (a) $L = \frac{\mu_0 n^2 r^2 \pi}{a} = 3{,}0\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{A}^2} = 3{,}0\,\mathrm{H}, \qquad W_0 = \frac{1}{2} L I_0^2 = 96\,\mathrm{J}$

   (b) $I(t_1) = I_0\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L} t_1} = I_0\,\mathrm{e}^{-0{,}10\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,t_1} = 0{,}1\,I_0 \quad \Longrightarrow \quad -0{,}10\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,t_1 = -\ln 10$

$$t_1 = 10 \ln 10\,\mathrm{s} = 23\,\mathrm{s}$$

25. Wechselstrom und Effektivwerte

1. (a) Für $-t_1 \leqq t \leqq t_1$ lautet die Gleichung von U:

$$U(t) = U_0 \left(1 - \frac{t^2}{t_1^2}\right)$$

Mit $T = t_1 + t_2 = t_1 + \alpha t_1 = (1+\alpha)t_1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle U \rangle &= \frac{1}{T} \int_{-t_1}^{t_2} U(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2U_0}{T} \int_0^{t_1} \left(1 - \frac{t^2}{t_1^2}\right) \mathrm{d}t = \frac{2U_0}{T} \left[t - \frac{t^3}{3t_1^2}\right]_0^{t_1} = \\
&= \frac{2U_0}{T} \left(t_1 - \frac{t_1}{3}\right) = \frac{4U_0 t_1}{3(1+\alpha)t_1} = \frac{4U_0}{3(1+\alpha)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\mathrm{eff}}^2 = \left\langle U^2 \right\rangle &= \frac{2}{T} \int_0^{t_1} U(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{2U_0^2}{T} \int_0^{t_1} \left(1 - \frac{t^2}{t_1^2}\right)^2 \mathrm{d}t = \\
&= \frac{2U_0^2}{T} \int_0^{t_1} \left(1 - \frac{2t^2}{t_1^2} + \frac{t^4}{t_1^4}\right) \mathrm{d}t = \frac{2U_0^2}{T} \left[t - \frac{2t^3}{3t_1^2} + \frac{t^5}{5t_1^4}\right]_0^{t_1} = \\
&= \frac{2U_0^2}{T} \left(t_1 - \frac{2t_1}{3} + \frac{t_1}{5}\right) = \frac{2U_0^2}{1+\alpha} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{16U_0^2}{15(1+\alpha)}
\end{aligned}$$

$$U_{\mathrm{eff}} = \frac{4U_0}{\sqrt{15(1+\alpha)}}$$

(b) $$\frac{4}{\sqrt{15(1+\alpha)}} = 0{,}6 = \frac{3}{5} \quad \Longrightarrow \quad \frac{16}{15(1+\alpha)} = \frac{9}{25} \quad \Longrightarrow \quad 1+\alpha = \frac{16 \cdot 25}{15 \cdot 9} = \frac{80}{27}$$

$$\alpha = \frac{53}{27} \approx 1{,}96$$

(c)

$$\begin{aligned}
\langle U \rangle = U_{\mathrm{eff}} \quad &\Longleftrightarrow \quad 3(1+\alpha) = \sqrt{15(1+\alpha)} \\
&\Longleftrightarrow \quad 9(1+\alpha)^2 = 15(1+\alpha) \\
&\Longleftrightarrow \quad 9(1+\alpha) = 15 \\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{nicht möglich}
\end{aligned}$$

2. $\overline{U} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T U(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int\limits_0^{\alpha T} \frac{U_0}{\alpha T}\cdot t\,\mathrm{d}t = \frac{U_0}{\alpha T^2}\cdot\frac{\alpha^2 T^2}{2} = \frac{\alpha}{2}\,U_0$

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T U(t)^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^{\alpha T} \frac{U_0^2}{\alpha^2 T^2}\cdot t^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{U_0^2}{\alpha^2 T^3}\cdot\frac{\alpha^3 T^3}{3}} = \sqrt{\frac{\alpha}{3}\,U_0^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{3}}\,U_0$$

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{2} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{\frac{\alpha}{3}} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \alpha = \frac{3}{4}$$

26. Wechselstromwiderstände

27. Elektromagnetische Schwingungen

1. $Q_0 = C\,U_0 = 0{,}16\,\mathrm{mC}$, $L = \dfrac{T^2}{4\,\pi^2\,C} = \dfrac{(0{,}22\,\mathrm{s})^2}{4\cdot\pi^2\cdot 2{,}0\cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}} = 6{,}1\cdot 10^2\,\mathrm{H}$, $I_0 = \omega\,Q_0 = \dfrac{Q_0}{\sqrt{LC}} = 4{,}6\,\mathrm{mA}$; der Betrag der maximalen Stromstärke wird zu den Zeiten $\frac{1}{4}\cdot 0{,}22\,\mathrm{s}$ und $\frac{3}{4}\cdot 0{,}22\,\mathrm{s}$ erreicht. $E = \frac{1}{2}\,C\,U_0^2 = 6{,}4\,\mathrm{mJ}$.

2. $16\,\mathrm{kHz} < f < 22\,\mathrm{kHz}$.

3. $12\,\mathrm{mH}$.

28. Elektromagnetische Wellen

1. (a) $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{N}}{\text{A}^2}, \quad \varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}, \quad \text{H} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \frac{\text{Nm}}{\text{A}^2}$

$$L = \frac{\mu_0 n^2 A_\text{S}}{l} = 2{,}0 \cdot 10^{-6}\,\text{H}, \qquad C = \frac{\varepsilon_0 A_\text{K}}{x}, \qquad f = \frac{c}{\lambda} = 1{,}00 \cdot 10^8\,\frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{\varepsilon_0 A_\text{K}}{x} = \frac{1}{\omega^2 L}$$

$$x = \varepsilon_0 A_\text{K} \omega^2 L = \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0 c^2}_{1} \cdot 4\pi^2 \cdot \frac{A_\text{K} A_\text{S} n^2}{\lambda^2 l} = 2{,}00\,\text{mm}$$

(b) Länge der Saite: $s = \frac{\lambda}{4} = 0{,}75\,\text{m}$

Wellenlänge der Schallwelle: $\lambda_\text{s} = 2s = 1{,}5\,\text{m}$

Geschwindigkeit der mech. Welle: $v = \lambda_\text{s} \cdot f_\text{a} = 660\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

2. (a) $\lambda_\text{D} = \frac{c}{f_\text{D}} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{9 \cdot 10^8\,\frac{1}{\text{s}}} = 0{,}333\,\text{m}, \quad \lambda_\text{E} = \frac{c}{f_\text{E}} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{18 \cdot 10^8\,\frac{1}{\text{s}}} = 0{,}167\,\text{m}$

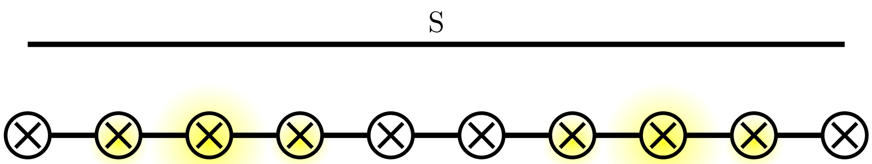
(b) $c_\text{S} = \lambda f = 220\,\frac{1}{\text{s}} \cdot 1{,}559\,\text{m} = 343\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1{,}23 \cdot 10^3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

(c) $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{\frac{800}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{400\,000\,\text{m}} = 5{,}55 \cdot 10^{-4}\,\frac{1}{\text{s}} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{1}{f} = 1800\,\text{s} = 30\,\text{min}$

3. (a) E und S sollten parallel sein.

(b) E und S sollten diesselbe Länge haben.

(c)



4. (a) $W_\text{a} = 4\pi r_\text{E}^2 S_\odot \cdot 1\,\text{a} = 3{,}87 \cdot 10^{26}\,\text{W} \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s} = 1{,}2 \cdot 10^{34}\,\text{J}$

(b) $\dfrac{r^2}{r_{\mathrm{E}}^2} = \dfrac{S_\odot}{S} \quad \Longrightarrow \quad r = r_{\mathrm{E}}\sqrt{\dfrac{S_\odot}{S}} = r_{\mathrm{E}} \cdot 3{,}7 \cdot 10^6 = 5{,}6 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m} = 59\,\mathrm{LJ}$

$1\,\mathrm{LJ} = 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\,\dfrac{1}{\mathrm{s}} \cdot c = 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$

29. Interferenz

1. (a) Maximum der einen Lichtquelle beim 1. Beugungsminimum der anderen:

   $$A \sin \varepsilon = 1{,}22 \cdot \lambda \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon \approx \sin \varepsilon = \frac{1{,}22 \cdot \lambda}{A} = 7{,}44 \cdot 10^{-8} = (4{,}26 \cdot 10^{-6})^\circ = 0{,}015''$$

   Auf dem Mond: $x = \varepsilon \cdot r = 7{,}44 \cdot 10^{-8} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m} = 28{,}3\,\mathrm{m}$

   (b) $\cos \varphi = \frac{s}{a}$. Die cos-Funktion ist im Bereich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ monoton fallend, d.h. dem größeren φ entspricht das kleinere s:

   $$\cos(\varphi + \Delta\varphi) \approx \cos \varphi - \Delta\varphi \cdot \sin \varphi \approx \frac{s - \Delta s}{a} = \frac{s - \lambda}{a} = \frac{s}{a} - \frac{\lambda}{a} = \cos \varphi - \frac{\lambda}{a}$$

   $$\Delta\varphi \approx \frac{\lambda}{a \sin \varphi}$$

   Im günstigsten Fall ($\varphi = 90^\circ$, d.h. $\sin \varphi = 1$) gilt

   $$\Delta\varphi \approx \frac{\lambda}{a} = 2{,}5 \cdot 10^{-9} = (1{,}43 \cdot 10^{-7})^\circ = 0{,}00052''$$

   Auf dem Mond: $x = \Delta\varphi \cdot r = 2{,}5 \cdot 10^{-9} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m} = 0{,}95\,\mathrm{m}$

2. (a) Feld im Leiter: $\vec{E}_{\mathrm{L}} = \vec{o} = \vec{E}_{\mathrm{e}} + \vec{E}_{\mathrm{r}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}_{\mathrm{r}} = -\vec{E}_{\mathrm{e}}$

   $E_{\mathrm{r}} = E_0 \sin(kx - \omega t + \Phi) = -E_{\mathrm{e}} = -E_0 \sin(kx - \omega t) \quad \Longrightarrow \quad \Phi = \pi$

   (b) Gangunterschied: $\delta = 2 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{4} + h^2} - x + \frac{\lambda}{2} = k \cdot \lambda$

   $$4\left(\frac{x^2}{4} + h^2\right) = \left(x + \left(k - \frac{1}{2}\right))\lambda\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad 4h^2 = 2x\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda + \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2$$

   $$\Longrightarrow \quad x = x_k = \frac{4h^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2}{2\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt zwei Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
4h^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4\,\mathrm{m}^2 &= (2k-1) \cdot 245\,\mathrm{m}^2 \\
4h^2 - \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4\,\mathrm{m}^2 &= (2k+1) \cdot 187\,\mathrm{m}^2 \\
4h^2 + \left(-k^2 + k - \frac{1}{4}\right) \cdot 4\,\mathrm{m}^2 &= 490\,\mathrm{m}^2 \cdot k - 245\,\mathrm{m}^2 \\
-4h^2 + \left(k^2 + k + \frac{1}{4}\right) \cdot 4\,\mathrm{m}^2 &= -374\,\mathrm{m}^2 \cdot k - 187\,\mathrm{m}^2 \\
k \cdot 8\,\mathrm{m}^2 &= 116\,\mathrm{m}^2 \cdot k - 432\,\mathrm{m}^2 \\
k &= 4
\end{aligned}
$$

In eine der Ausgangsgleichungen eingesetzt folgt $h = 21\,\mathrm{m}$.

3. (a) Gangunterschied: $\delta = a + \sqrt{a^2 + x^2} - x + \dfrac{\lambda}{2}$

   (b)
$$
\delta = k \cdot \lambda \quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
\sqrt{a^2 + x_k^2} &= \left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda - a + x_k = \beta - a + x_k \\
a^2 + x_k^2 &= \beta^2 - 2a\beta + a^2 + 2(\beta - a)x_k + x_k^2 \\
0 &= \beta^2 - 2a\beta + 2(\beta - a)x_k \\
x_k &= \frac{\beta(2a - \beta)}{2(\beta - a)} = \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda\left[2a - \left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda\right]}{2\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda - a\right]}
\end{aligned}
$$

   (c) $\beta = a + \sqrt{a^2 + x^2} - x_k > 0$, da Strecke kürzeste Verbindung zweier Punkte.

$$
x_k > 0 \text{ und } \beta > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2a - \beta}{2(\beta - a)} > 0 \quad \Longleftrightarrow
$$

$$
\begin{gathered}
(2a - \beta > 0 \ \wedge\ \beta - a > 0) \ \vee\ (2a - \beta < 0 \ \wedge\ \beta - a < 0) \\
(2a > \beta \ \wedge\ \beta > a) \ \vee\ (2a < \beta \ \wedge\ \beta < a) \\
a < \beta = \left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda < 2a \qquad\qquad \text{(nicht möglich wegen } a > 0\text{)}
\end{gathered}
$$

   (d) $a < \underbrace{\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda}_{\beta} < 2a \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{a}{\lambda} + \dfrac{1}{2} < k < \dfrac{2a}{\lambda} + \dfrac{1}{2}$

$$
\frac{a}{\lambda} = 5 \quad \Longrightarrow \quad 5{,}5 < k < 10{,}5 \quad \Longrightarrow \quad 6 \leqq k \leqq 10
$$

k	6	7	8	9	10
x_k in m	123,75	37,92	18,75	9,11	2,64

4. (a) $\lambda = \frac{c}{f} = 3{,}00\,\mathrm{m}, \quad d\sin\varphi_k = k\lambda, \quad \sin\varphi_k = k \cdot \frac{\lambda}{d} = 0{,}6k$

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \arcsin 0{,}6 = 36{,}9^\circ, \quad \varphi_{-1} = -\varphi_1$$

(b) Der Gangunterschied der beiden Strahlen ist

$$\delta = b + d\sin\varphi_k' - r = b + d\sin\varphi_k' - \sqrt{b^2 + d^2} = 5\,\mathrm{m} \cdot \sin\varphi_k' - 1\,\mathrm{m} = k\lambda$$

$$\sin\varphi_k' = \frac{1\,\mathrm{m} + k \cdot 3\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m}} = 0{,}2 + 0{,}6k$$

$$|0{,}2 + 0{,}6k| \leqq 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 \leqq 0{,}2 + 0{,}6k \leqq 1 \quad \Longrightarrow \quad -2 \leqq k \leqq 1$$

$$\begin{aligned} \varphi_{-2}' &= \arcsin(-1) = -90^\circ, & \varphi_{-1}' &= \arcsin(-0{,}4) = -23{,}6^\circ \\ \varphi_0' &= \arcsin(0{,}2) = 11{,}5^\circ, & \varphi_1' &= \arcsin(0{,}8) = 53{,}1^\circ \end{aligned}$$

(c) $r - b = k\lambda$ mit $k \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow$

$$\sqrt{b^2 + d^2} = b + k\lambda \quad \Longrightarrow \quad b^2 + d^2 = b^2 + 2bk\lambda + k^2\lambda^2$$

$$b = \frac{d^2 - k^2\lambda^2}{2k\lambda} = \frac{25 - 9k^2}{6k}\,\mathrm{m} \overset{(k=1)}{=} = \frac{8}{3}\,\mathrm{m} = 2{,}67\,\mathrm{m}$$

30. Beugung

1. (a) $a \sin\varphi = 1{,}22\lambda \quad \Longrightarrow$

$$y = a + 2b\tan\varphi = a + \frac{2b\sin\varphi}{\cos\varphi} = a + \frac{2b\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = a + \frac{2b\cdot\frac{1{,}22\lambda}{a}}{\sqrt{1-\frac{1{,}22^2\lambda^2}{a^2}}}$$

$$\lambda \ll a \quad \Longrightarrow \quad \frac{1{,}22^2\lambda^2}{a^2} \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad 1-\frac{1{,}22^2\lambda^2}{a^2} \approx 1 \quad \Longrightarrow \quad y \approx a + \frac{2{,}44\,b\lambda}{a}$$

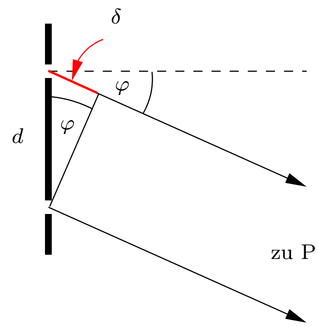
(b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a} = 1 - \dfrac{2{,}44\,b\lambda}{a^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = a_0 = \sqrt{2{,}44\,b\lambda}$

$$y_{\min} = y(a_0) = a_0 + \frac{2{,}44\,b\lambda}{\sqrt{2{,}44\,b\lambda}} = a_0 + \sqrt{2{,}44\,b\lambda} = 2a_0 = 2\sqrt{2{,}44\,b\lambda}$$

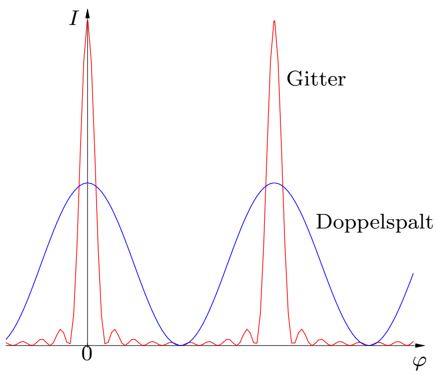
(c) $y_{\min} = 2\sqrt{2{,}44\cdot 0{,}2\cdot 5\cdot 10^{-7}}\,\mathrm{m} = 9{,}9\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = 0{,}99\,\mathrm{mm}$

2. (a) Der Gangunterschied der beiden parallelen Strahlen (weit entfernter Beobachter P) ist $\delta = d\sin\varphi$. Maxima der Intensität gibt es für $\delta = k\lambda$ mit $k \in \mathbb{Z}$, d.h.

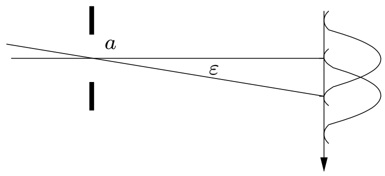
$$\sin\varphi_k = \frac{k\lambda}{d}$$



(b) Der Graf der Intensität des Doppelspalts ist überhöht gezeichnet!



(c) n gleichphasige und gleichstarke Einzelsender äquidistant über die Spaltbreite verteilt und dann $n \to \infty$.



(d) Wegen der Beugung an der Eintrittsöffnung sind die Bilder der punktförmigen Gegenstände keine Punkte, sondern Scheibchen. Zwei dieser Scheibchen können noch als getrennet wahrgenommen werden, wenn das Hauptmaximum des einen Punktes auf das erste Minimum des anderen Punktes fällt:

$$a \sin \varepsilon = 1{,}22\lambda$$

Mit $a = 10\,\mathrm{m}$ und $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$ ist $\varepsilon \ll 1$:

$$\frac{R}{2r} = \tan\frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{\sin\varepsilon}{2} = \frac{1{,}22\lambda}{2a}$$

Mit $1\,\mathrm{LJ} = 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$ folgt

$$r = \frac{Ra}{1{,}22\lambda} = 2{,}05 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m} = 217\,\mathrm{LJ}$$