SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Elektrizitätslehre (Physik)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

5. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Elektrizitätslehre S1

1. Stromkreis

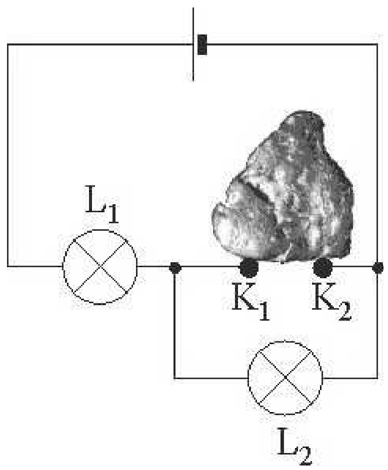
1. Wirkung des elektrischen Stroms Welche Wirkungen des elektrischen Stroms gibt es? Gib für jede Wirkung eine Anwendung an.

Lösung:
- Wärmewirklung: Föhn, Heizlüfter, Boiler, Wasserkocher, Bügeleisen
- Leuchtwirkung: Leuchtdiode, Glühbirne
- magnetische Wirkung: Elektromagnet, Relais, Klingel
- chemische Wirkung: galvanische Abscheidung

2. Herr Schlaumeier besitzt einen großen Goldklumpen. Um ihn vor Dieben zu schützen entwirft er eine elektrische Schaltung, die zwei Kontrolllampen enthalten sollte.
   - Die Lampe L_1 soll mit ihrem Leuchten anzeigen, dass die Schaltung in Betrieb ist.
   - Bei Entfernung des Goldklumpens soll die zweite Lampe L_2 aufleuchten. Mache einen möglichst einfachen Vorschlag für eine - im Prinzip - geeignete Schaltung.

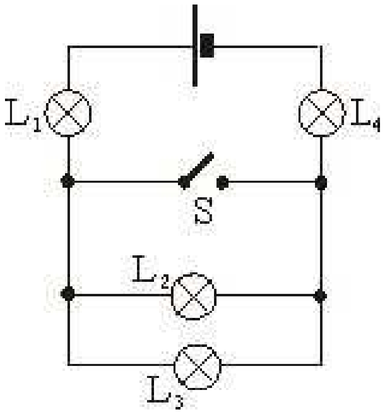
   Quelle: Julia Pürkner

Lösung:



Grundprinzip: Man benutzt den Goldklumpen als Schalter. Er überbrückt die beiden Kontakte K_1 und K_2. Wird der Goldklumpen gestohlen ist der Schalter offen.
Ist der Goldklumpen vorhanden, so schließt er (als guter elektrischer Leiter) die Lampe L_2 kurz, der Strom fließt durch L_1 und den Goldklumpen. Wird der Goldklumpen gestohlen, so ist kein Leiter zwischen K_1 und K_2, der Strom fließt durch L_1 und L_2.

3.



1. Stromkreis

Im nebenstehenden Stromkreis befinden sich vier baugleiche Lämpchen, eine Stromquelle und ein Schalter.

(a) Welche Lämpchen leuchten, wenn der Schalter S geöffnet ist? Vergleiche die Helligkeit der Lämpchen untereinander und gib hierfür eine Begründung an.

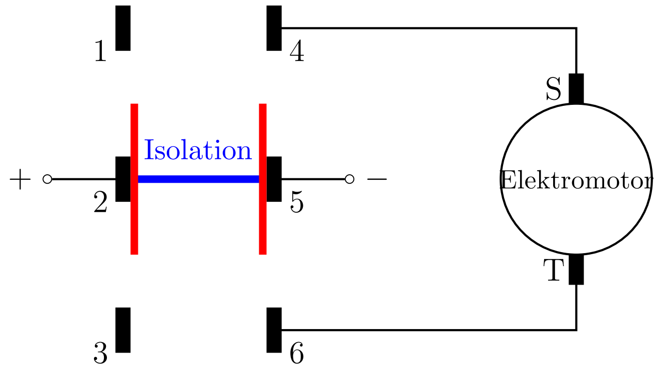
(b) Nun wird der Schalter geschlossen. Beantworte die Frage von Teilaufgabe (a) für diesen Fall.

Quelle: Julia Pürkner

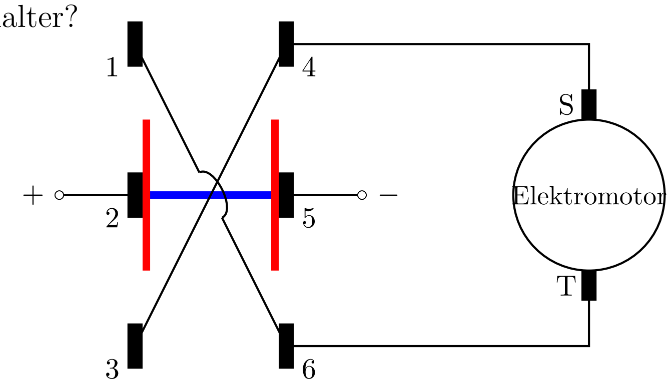
Lösung: (a) Es leuchten alle vier Lämpchen. Dabei leuchten jeweils L1 und L4 bzw. L2 und L3 gleich hell. L1 und L4 leuchten heller als L2 und L3: Der Strom der durch L1 bzw. L4 fließt teilt sich zu gleichen Teilen auf L2 und L3 auf.

(b) Jetzt leuchten nur noch L1 und L4 (gleich hell). L2 und L3 sind kurzgeschlossen (durch den geschlossenen Schalter S überbrückt).

4. Ein DPDT („Double Pole Double Throw") oder 2–poliger Wechselschalter ist ein Schalter, den man für Elektromotoren benutzt, die mit Gleichstrom betrieben werden.
Der Schalter hat sechs Anschlüsse 1, 2, 3, 4, 5 und 6. An den Anschluss 2 kommt der Pluspol und an den Anschluss 5 der Minuspol einer Batterie. Der Anschluss 4 wird über den Schleifkontakt S und der Anschluss 6 über den Schleifkontakt T mit dem Elektromotor verbunden. Das blau–rot gezeichnete, leitende Teil des Schalters kann über einen Schieber vertikal in der Zeichenebene bewegt werden. In der gezeichneten Position des blau–roten Teils soll keine Spannung am Motor liegen. Wird der Schieber nach oben bewegt, so dass er mit 1, 2, 4 und 5 Kontakt hat, dann soll der Pluspol an T und der Minuspol an S liegen. Wird der Schieber aus der gezeichneten Position nach unten bewegt, so dass das blau–rot gezeichnete Teil Kontakt mit 2, 3, 5 und 6 hat, dann soll der Pluspol an S und der Minuspol an T liegen.
Damit der Schalter wie beschrieben funktioniert sind noch zwei Verbindungen unter den Anschlüssen des Schalters nötig. Zeichne diese ein. Welchen Zweck erfüllt der Schalter?



Lösung:



2. Ladung und Stromstärke

1. **Ströme**
   - Bei einem Gewitter treten Blitze zwischen Gewitterwolken und Boden auf.
   - Ein Topf mit heißem Pudding wird in eine Schüssel mit kaltem Wasser gestellt.
   - Aus einem aufgepumpten Fahrradschlauch wird das Ventil herausgezogen.

   Was haben diese drei Phänomene miteinander zu tun? Gehe auch auf die jeweilige Ursache dieser Phänomene ein.

   Quelle: Bildungsstandards im Fach Physik für den Mittleren Schulabschluss, Beschluss vom 16.12.2004

Lösung: Gemeinsam ist den drei Phänomenen ein Ungleichgewicht. Daraus resultieren Ströme, die aufrecht erhalten werden, bis sich das System im Gleichgewicht befindet.

Beim Blitz fließen elektrische Ladungen aufgrund eines Ladungsunterschieds (Potenzialunterschieds) zwischen Wolke und Erde.

Der Pudding kühlt sich ab und das Kühlwasser erwärmt sich bis zum Temperaturausgleich.

Die Luft strömt solange aus dem Fahrradschlauch aus, bis der Druck im Reifen dem äußeren Luftdruck entspricht.

2. Wie viele Elektronen müssen von einer elektrisch neutralen Metallkugel abfließen, damit sie die Ladung $Q = 4{,}8 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$ trägt?

Lösung: $N = \dfrac{Q}{e} = 3{,}0 \cdot 10^9$

3. (a) Durch ein Radiogerät fließt in einer Minute die Ladung $27\,\mathrm{C}$. Berechne die Stromstärke!

   (b) Welche Ladung fließt in einer Stunde durch ein Bügeleisen, wenn die Stromstärke $3{,}0\,\mathrm{A}$ beträgt?

   (c) In welcher Zeit fließt durch eine Glimmlampe bei der Stromstärke $I = 0{,}20\,\mathrm{mA}$ die Ladung $5{,}0\,\mathrm{C}$?

   (d) Durch einen Transistor fließt ein Strom der Stärke $I = 0{,}040\,\mu\mathrm{A}$. Wie viele Elektronen wandern in einer Sekunde durch den Transistor?

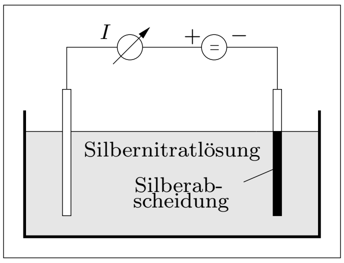
Lösung: (a) $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{27\,\mathrm{C}}{60\,\mathrm{s}} = 0{,}45\,\mathrm{A}$

(b) $\Delta Q = I\Delta t = 3\,\mathrm{A} \cdot 3600\,\mathrm{s} = 10800\,\mathrm{As} \approx 1{,}1 \cdot 10^4\,\mathrm{C}$

(c) $\Delta t = \dfrac{\Delta Q}{I} = \dfrac{5\,\mathrm{As}}{2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{A}} = 2{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{s} \approx 6{,}9\,\mathrm{h}$

(d) $\Delta Q = I\Delta t = 4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{A} \cdot 1\,\mathrm{s} = 4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$, $n = \dfrac{\Delta Q}{e} = \dfrac{4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = 2{,}5 \cdot 10^{11}$

4. Um ein Strommessgerät zu eichen, muss ein Strom von genau 1 A hergestellt werden, d.h. in einer Sekunde müssen genau $6{,}24 \cdot 10^{18}$ Elektronen durch den Leiterquerschnitt fließen. Teilaufgabe (b) zeigt, dass es unmöglich ist, diese riesige Zahl von Elektronen einzeln abzuzählen. Leitet man Strom durch eine Silbernitratlösung ($AgNO_3$), dann scheidet sich an der negativen Elektrode (Kathode) Silber ab, und zwar pro Elektron im Stromkreis genau ein Silberatom. Mit der bekannten Masse



$$M = 1{,}79 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$$

des Silberatoms kann aus der Masse m des abgeschiedenen Silbers die Zahl N der durch den Leiter geflossenen Elektronen berechnet werden.

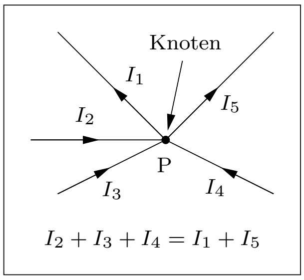
(a) Wieviel Silber wird von einem Strom der Stärke 1,00 A in einer Sekunde abgeschieden?

(b) Ein elektronisches Zählgerät ist in der Lage, pro Sekunde eine Milliarde Elektronen zu zählen. Wie viele Jahre braucht dieses Gerät, um alle Elektronen der Ladung $Q = 1\,\mathrm{C}$ zu zählen?

Lösung: (a) $m = 6{,}24 \cdot 10^{18} \cdot 1{,}79 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg} = 1{,}12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} = 1{,}12\,\mathrm{mg}$

(b) $\Delta t = \dfrac{6{,}24 \cdot 10^{18}}{10^9\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 6{,}24 \cdot 10^9\,\mathrm{s} = \dfrac{6{,}24 \cdot 10^9\,\mathrm{a}}{3600 \cdot 24 \cdot 365{,}25} \approx 198\,\mathrm{a}$

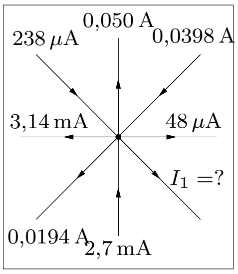
5. Es ist eine experimentell abgesicherte Tatsache, dass sich ein Verzweigungspunkt P (*Knoten*) einer elektrischen Schaltung nicht auflädt, d.h. die pro Sekunde in den Knoten hineinfließende Ladung muss gleich der pro Sekunde vom Knoten abfließenden Ladung sein. Da aber „Ladung pro Zeit" nichts anderes als die Stromstärke ist, gilt folgende Regel:



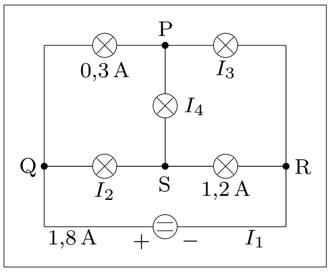
Die Summe der in einen Knoten P hineinfließenden Ströme ist gleich der Summe der von P abfließenden Ströme. (**1. Kirchhoff'sche Regel**)

Berechne alle in den folgenden Zeichnungen angegebenen Stromstärken!

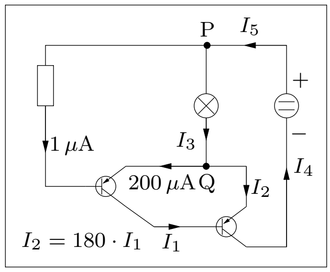
(a)



(b)



(c)



Lösung: (a) Zum Knoten: $I_{\text{hinein}} = (0{,}238 + 39{,}8 + 2{,}7)\,\text{mA} = 42{,}738\,\text{mA}$
Vom Knoten weg: $I_{\text{heraus}} = (50 + 0{,}048 + 3{,}14 + 19{,}4)\,\text{mA} = 72{,}588\,\text{mA}$

I_1 fließt zum Knoten: $I_1 = (72{,}588 - 42{,}738)\,\text{mA} = 29{,}85\,\text{mA}$

Der größte Fehler der gegebenen Ströme ist 0,5 mA (bei 0,050 A), daher Runden auf ganze mA: $I_1 \approx 30\,\text{mA}$.

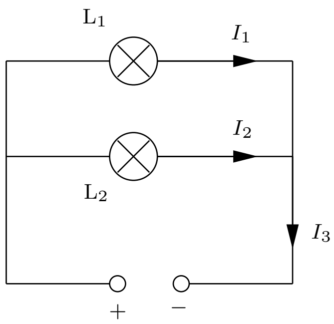
(b) $I_1 = 1{,}8\,\text{A}$, $I_2 = 1{,}8\,\text{A} - 0{,}3\,\text{A} = 1{,}5\,\text{A}$, $I_4 = 1{,}5\,\text{A} - 1{,}2\,\text{A} = 0{,}3\,\text{A}$ (nach oben)

$I_3 = 0{,}3\,\text{A} + 0{,}3\,\text{A} = 0{,}6\,\text{A}$

(c) $I_1 = 201\,\mu\text{A}$, $I_2 = 180 I_1 = 36{,}18\,\text{mA}$, $I_4 = I_5 = I_1 + I_2 = 36{,}381\,\text{mA}$

$I_3 = I_5 - 0{,}001\,\text{mA} = 36{,}38\,\text{mA}$

6. In nebenstehender Schaltung sind die Stromstärken $I_1 = 36\,\text{mA}$ und $I_3 = 0{,}113\,\text{A}$ bekannt.
   (a) Berechne I_2.
   (b) Wie viele Elektronen fließen in fünf Minuten durch die Lampe L_1?
   (c) In welcher Zeit fließen $2{,}0 \cdot 10^{20}$ Elektronen durch die Lampe L_2?



Lösung: (a) $I_2 = I_3 - I_1 = 113\,\text{mA} - 36\,\text{mA} = 77\,\text{mA} = 0{,}077\,\text{A}$

(b) $\Delta Q_1 = 5 \cdot 60\,\text{s} \cdot 0{,}036\,\text{A} = 10{,}8\,\text{C} \approx 11\,\text{C}$

Zahl der Elektronen: $n = \dfrac{\Delta Q_1}{e} = 6{,}7 \cdot 10^{19}$

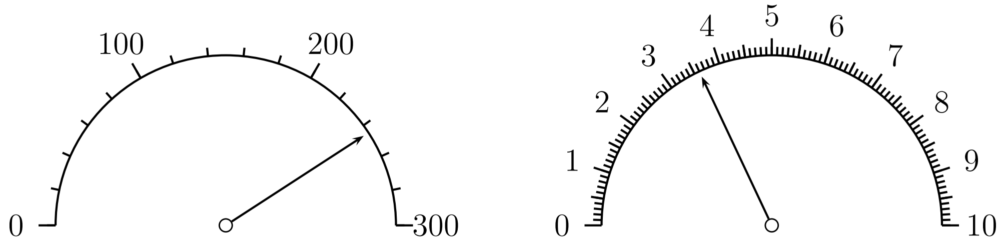
(c) $\Delta Q_2 = 2 \cdot 10^{20} \cdot e = 32\,\text{As}$

$$\Delta t = \frac{\Delta Q_2}{I_2} = \frac{32\,\text{As}}{0{,}077\,\text{A}} = 4{,}2 \cdot 10^2\,\text{s} = 7{,}0\,\text{min}$$

3. Spannung - Stromstärke - Widerstand

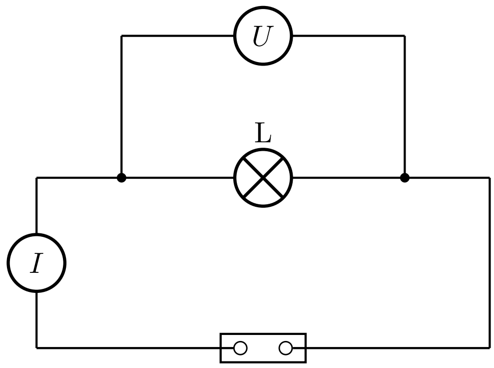
1. (a) Es soll der Widerstand einer Glühbirne experimentell ermittelt werden. Zeichne die zugehörige Schaltskizze.

   (b) Die Skalen, der in diesem Versuch verwendeten Messinstrumente zeigen folgende Werte an:



   Der Messbereich des Gerätes, das zur linken Skala gehört ist 300 mA und der des Gerätes, das zur rechten Skala gehört ist 10 V. Berechne den Wert des elektrischen Widerstands der Glühbirne.

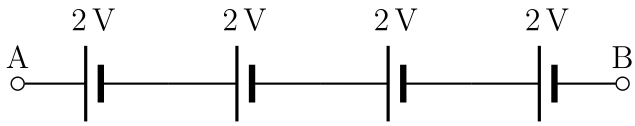
Lösung: (a) Schaltskizze:



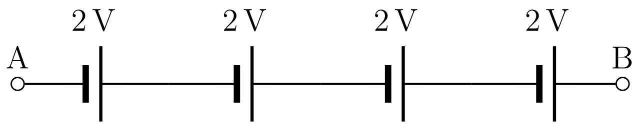
(b) $R = \frac{3{,}2\,\mathrm{V}}{0{,}24\,\mathrm{A}} = 15\,\Omega$

2. Berechne jeweils die Spannung der gegebenen Anordnung von Batterien zwischen A und B.

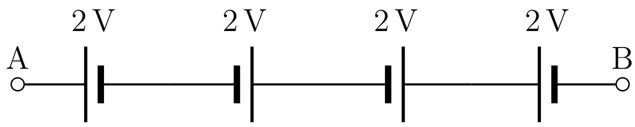
   (a)



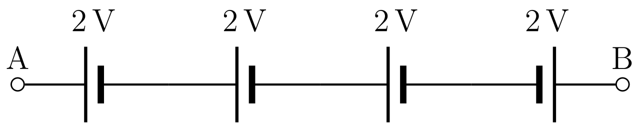
(b)



(c)



(d)



Lösung: $8\,\mathrm{V}; -8\,\mathrm{V}; 0; 4\,\mathrm{V}$.

3. Inge hat eine ganze Schachtel voll mit $10\,\Omega$-Widerständen. Wie kann sie daraus mit möglichst wenig Materialverbrauch einen $8\,\Omega$-Widerstand zusammenbauen?

   Dokumentiere alle deine Versuche mit Schaltplan und Berechnung des Gesamtwiderstandes!

Lösung: Mögliche Lösungen:

(a) $\frac{1}{R} = \frac{1}{40\,\Omega} + \frac{1}{10\,\Omega} = \frac{5}{40\,\Omega} = \frac{1}{8\,\Omega}$

$R = 8\,\Omega$

(b) $\frac{1}{R'} = \frac{1}{20\,\Omega} + \frac{1}{10\,\Omega} + \frac{1}{10\,\Omega} = \frac{5}{20\,\Omega} = \frac{1}{4\,\Omega}$

$R = R' + R' = 8\,\Omega$

(c) $\frac{1}{R} = \frac{1}{40\,\Omega} + \frac{1}{40\,\Omega} + \frac{1}{40\,\Omega} = \frac{5}{40\,\Omega} = \frac{1}{8\,\Omega}$

$R = 8\,\Omega$

(d) $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{30\,\Omega} + 3 \cdot \frac{1}{10\,\Omega} = \frac{10}{30\,\Omega} = \frac{1}{3\,\Omega}$

$R_2 = \frac{10\,\Omega}{2} = 5\,\Omega,\ R = R_1 + R_2 = 8\,\Omega$

(e) $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{15\,\Omega} + \frac{1}{10\,\Omega} = \frac{5}{30\,\Omega} = \frac{1}{6\,\Omega}$

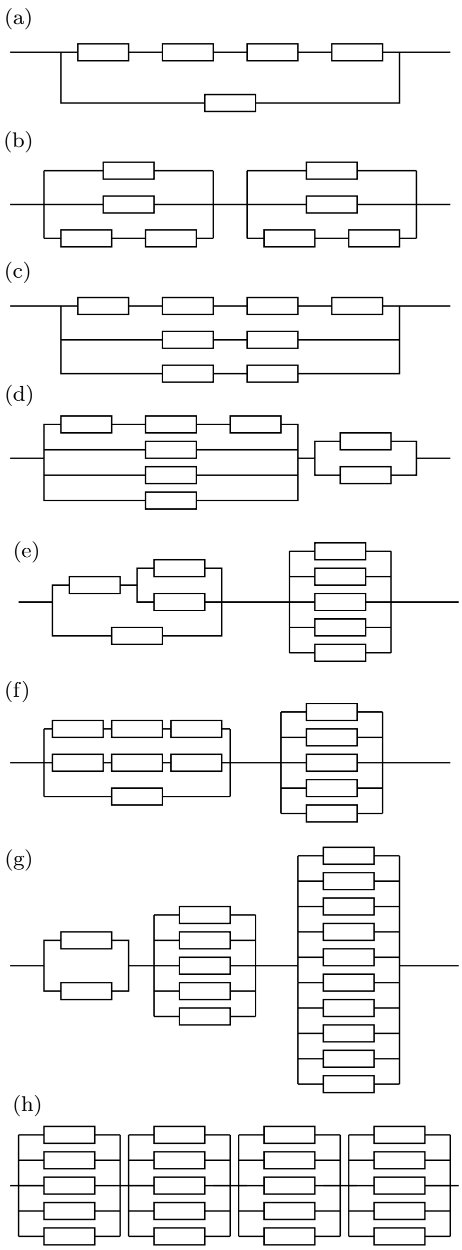
$R_2 = \frac{10\,\Omega}{5} = 2\,\Omega,\ R = R_1 + R_2 = 8\,\Omega$

(f) $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{30\,\Omega} + \frac{1}{30\,\Omega} + \frac{1}{10\,\Omega} = \frac{1}{6\,\Omega}$

$R_2 = \frac{10\,\Omega}{5} = 2\,\Omega,\ R = R_1 + R_2 = 8\,\Omega$

(g) $R = \frac{10\,\Omega}{2} + \frac{10\,\Omega}{5} + \frac{10\,\Omega}{10} = 8\,\Omega$

(h) $R = 4 \cdot \frac{10\,\Omega}{5} = 8\,\Omega$

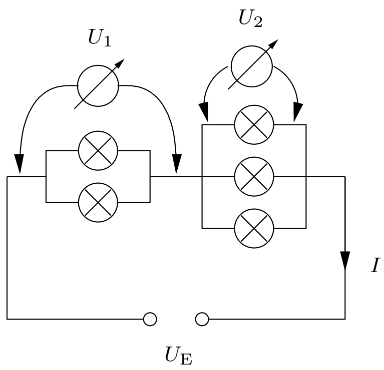


4. In den USA hat die Netzspannung den Wert $U_{\mathrm{S}} = 115\,\mathrm{V}$. Sam bringt fünf Glühlampen aus den USA mit nach Deutschland und möchte sie ans europäische Stromnetz ($U_{\mathrm{E}} = 230\,\mathrm{V}$) anschließen. Die baugleichen Lampen tragen die Aufschrift $115\,\mathrm{V}/125\,\mathrm{W}$.

(a) Berechne den Widerstand R_{L} einer Lampe.

(b) Sam probiert es mit nebenstehender Schaltung. Berechne den Gesamtwiderstand R_{ges} und den Gesamtstrom I. Welche Spannungen U_1 und U_2 zeigen die beiden Messgeräte an?

(c) Welche Lampen sind überlastet? Eine der überlasteten Lampen brennt durch. Erkläre genau (mit Rechnungen), was dann mit den anderen Lampen geschieht.



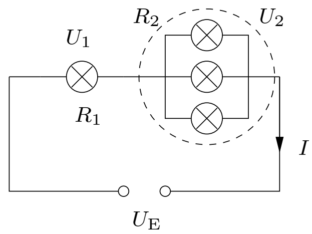
(d) Suche eine Schaltung aller fünf Lampen, bei der mindestens eine Lampe an der Sollspannung U_{S} liegt und die anderen Lampen nicht überlastet sind. Dokumentiere deine Versuche mit den dazugehörenden Rechnungen.

Lösung: (a) $P = U_{\mathrm{S}} I_{\mathrm{S}} = \dfrac{U_{\mathrm{S}}^2}{R_{\mathrm{L}}} \quad \Longrightarrow \quad R_{\mathrm{L}} = \dfrac{U_{\mathrm{S}}^2}{P} = \dfrac{115^2\,\mathrm{V}^2}{125\,\mathrm{W}} = 105{,}8\,\Omega \approx 106\,\Omega$

(b) $R_{\mathrm{ges}} = \dfrac{R_{\mathrm{L}}}{2} + \dfrac{R_{\mathrm{L}}}{3} = \dfrac{5}{6} R_{\mathrm{L}} = 88{,}2\,\Omega, \quad I = \dfrac{U_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{ges}}} = 2{,}61\,\mathrm{A}$

$U_1 = \dfrac{R_{\mathrm{L}}}{2} \cdot I = 138\,\mathrm{V}, \quad U_2 = \dfrac{R_{\mathrm{L}}}{3} \cdot I = 92{,}0\,\mathrm{V}$

(c) Die linken Lampen (U_1) sind überlastet.

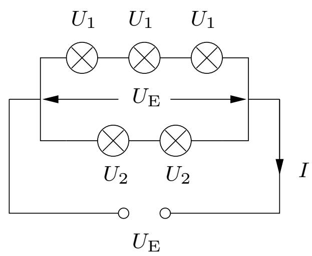


$R_{\mathrm{ges}} = R_{\mathrm{L}} + \dfrac{R_{\mathrm{L}}}{3} = \dfrac{4}{3} R_{\mathrm{L}} = 141\,\Omega, \quad I = \dfrac{U_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{L}}} = 1{,}63\,\mathrm{A}$

$U_1 = \dfrac{R_{\mathrm{L}}}{2} \cdot I = 172{,}5\,\mathrm{V}, \quad U_2 = \dfrac{R_{\mathrm{L}}}{3} \cdot I = 57{,}5\,\mathrm{V}$

$\Longrightarrow$ Die linke Lampe brennt sofort durch und dann brennt keine Lampe mehr.

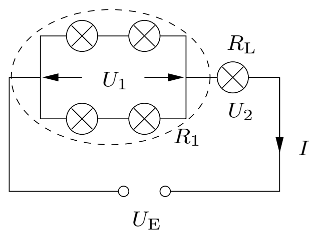
(d) 1. Möglichkeit:



$U_1 = \dfrac{U_{\mathrm{E}}}{3} = 76{,}7\,\mathrm{V},$

$U_2 = \dfrac{U_{\mathrm{E}}}{2} = 115\,\mathrm{V}$

2. Möglichkeit:



$R_1 = \dfrac{R_{\mathrm{L}} + R_{\mathrm{L}}}{2} = R_{\mathrm{L}}$

$U_1 = U_2 = \dfrac{U_{\mathrm{E}}}{2} = 115\,\mathrm{V}$

An den vier linken Lampen liegt jeweils die Spannung $\dfrac{U_1}{2} = 57{,}5\,\mathrm{V}$.

5. (a) Welchen Widerstand R hat eine Glühlampe, die an der Spannung $U = 220\,\mathrm{V}$ von einem Strom der Stärke $I = 0{,}11\,\mathrm{A}$ durchflossen wird?

(b) Die Bundesbahn fährt mit der Spannung $U = 15\,000\,\mathrm{V}$. Der Widerstand des Motors einer Lok beträgt $R = 35\,\Omega$. Welcher Strom I fließt durch den Motor?

(c) Welche Spannung U liegt an dem Widerstand $R = 48\,\mathrm{k}\Omega$, der von einem Strom der Stärke $I = 25\,\mu\mathrm{A}$ durchflossen wird?

(d) Der Motor einer starken Bohrmaschine hat den Widerstand $R = 18\,\Omega$. Welche Stromstärke muss die Sicherung mindestens aushalten?

(e) Der menschliche Körper hat, je nach Hautfeuchtigkeit, einen Widerstand von $2{,}5\,\mathrm{k}\Omega$ bis $10\,\mathrm{k}\Omega$. Stromstärken ab ungefähr $10\,\mathrm{mA}$ können für den Menschen schon lebensgefährdend sein. Ab welcher Spannung muss man also aufpassen?

Lösung: (a) $R = \frac{U}{I} = \frac{220\,\mathrm{V}}{0{,}11\,\mathrm{A}} = 2{,}0\,\mathrm{k}\Omega$

(b) $I = \frac{U}{R} = \frac{15\,0000\,\mathrm{V}}{35\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}} = 4{,}3 \cdot 10^2\,\mathrm{A}$

(c) $U = RI = 48 \cdot 10^3\,\Omega \cdot 25 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{A} = 1{,}2\,\mathrm{V}$

(d) $I = \frac{U}{R} = \frac{230\,\mathrm{V}}{18\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}} = 13\,\mathrm{A}$

(e) $U = RI = 2{,}5 \cdot 10^3\,\Omega \cdot 10 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A} = 25\,\mathrm{V}$

6. Die Widerstände R_1 und R_2 liegen hintereinander an der Spannung U, mit U_1 bzw. U_2 werden die Teilspannungen an R_1 bzw. R_2 bezeichnet. Berechne die fehlenden Größen:

	R_1 in Ω	R_2 in Ω	R in Ω	U_1 in V	U_2 in V	U in V	I in A
(a)	80	120	?	?	?	10	?
(b)	150	10	?	5	?	?	?
(c)	?	30	?	?	0,01	300	?
(d)	1000	?	?	0,001	?	2	?
(e)	?	?	5000	?	400	?	0,1
(f)	50	?	?	?	?	220	5
(g)	?	80	?	?	6,4	?	0,8

Lösung:

	R_1 in Ω	R_2 in Ω	R in Ω	U_1 in V	U_2 in V	U in V	I in A
(a)	80	120	200	4	6	10	0,05
(b)	150	10	160	5	0,33	5,33	0,033
(c)	$9 \cdot 10^5$	30	$9 \cdot 10^5$	299,99	0,01	300	$3{,}3 \cdot 10^{-4}$
(d)	1000	?	?	0,001	1,999	2	$1 \cdot 10^{-6}$
(e)	1000	4000	5000	100	400	500	0,1
(f)	50	-6	44	?	?	220	5
(g)	?	80	?	?	6,4	?	0,8

zu (f): nicht möglich, da $R_2 < 0$

zu (g): nicht möglich, da $I = \dfrac{U_2}{R_2} = 0{,}08\,\mathrm{A} \neq 0{,}8\,\mathrm{A}$

7. Von fünf in Reihe geschalteten Widerständen ist jeder um $100\,\Omega$ größer als sein Vorgänger. Wie groß sind diese Widerstände, wenn bei einer angelegten Spannung von $U = 230\,\mathrm{V}$ ein Strom der Stärke $I = 0{,}20\,\mathrm{A}$ fließt? Berechne auch die Teilspannungen an den einzelnen Widerständen.

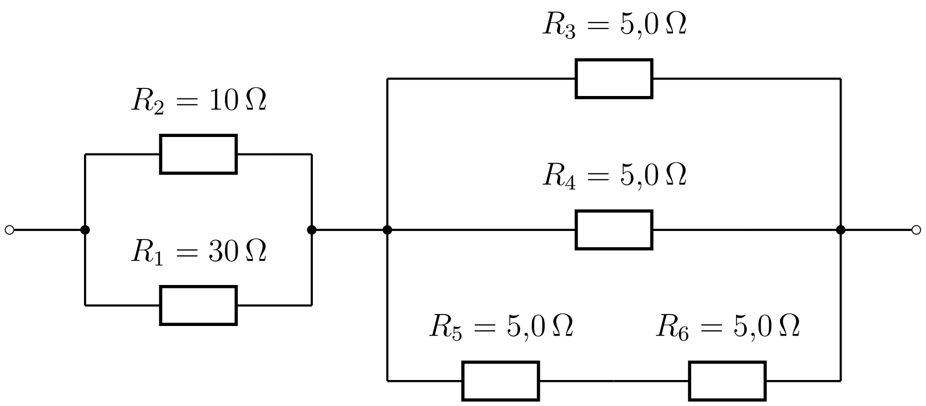
Lösung: $R + R + 100\,\Omega + R + 200\,\Omega + R + 300\,\Omega + R + 400\,\Omega = \dfrac{U}{I} = 1150\,\Omega$

$5R + 1000\,\Omega = 1150\,\Omega \quad \Longrightarrow \quad R = 30\,\Omega$

$U_1 = 30\,\Omega \cdot I = 6\,\mathrm{V}$, $U_2 = 26\,\mathrm{V}$, $U_2 = 46\,\mathrm{V}$, $U_2 = 66\,\mathrm{V}$, $U_2 = 86\,\mathrm{V}$

Probe: $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = U$

8. Berechne den Ersatzwiderstand der nachstehend abgebildeten Schaltung.



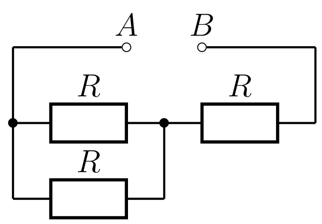
Lösung: R_1, R_2 parallel: $R_{12} = 7{,}5\,\Omega$

R_5, R_6 in Reihe: $R_{56} = 10\,\Omega$

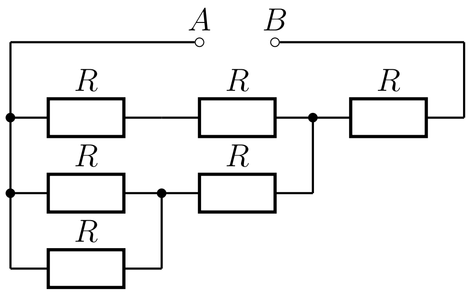
R_3, R_4, R_{56} parallel: $R_{3456} = 2{,}5\,\Omega$

R_{12}, R_{3456} in Reihe: $R_{123456} = 10\,\Omega$

9. (a) Berechne den Ersatzwiderstand R_1 zwischen A und B.



(b) Berechne den Ersatzwiderstand R_2 zwischen A und B unter Verwendung des Ergebnisses der vorhergehenden Teilaufgabe.



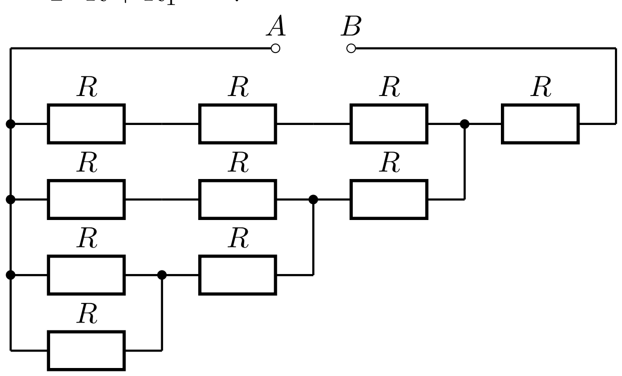
(c) Die ersten beiden Schaltungen kann man als Elemente einer Folge von Schaltungen auffassen. Zeichne das nächste Element dieser Folge und berechne den Widerstand R_3 dieser Schaltung.

(d) Wir legen $R_0 = R$ fest. Wie lautet dann die Formel zur Berechnung von R_{n+1} aus R und R_n $(n \in \mathbb{N})$?

Lösung: (a) $R_1 = \dfrac{1 \cdot R \cdot R_0}{1 \cdot R + R_0} = \dfrac{3}{2} R$

(b) $R_2 = \dfrac{2 \cdot R \cdot R_1}{2 \cdot R + R_1} = \dfrac{13}{7} R$

(c)



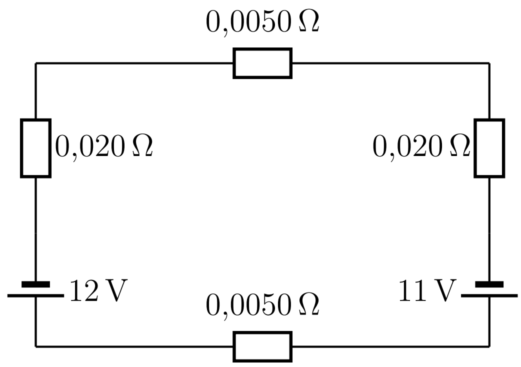
$$R_3 = \frac{3 \cdot R \cdot R_2}{3 \cdot R + R_2} = \frac{73}{34} R$$

(d) $R_{n+1} = \dfrac{(n+1) \cdot R \cdot R_n}{(n+1) \cdot R + R_n}$

10. Die Batterie eines liegen gebliebenen Pkws ist entladen und hat eine Quellenspannung von 11 V. Die Batterie mit der der liegen gebliebene Pkw gestartet werden soll, ist voll aufgeladen und hat eine Klemmenspannung von 12 V. Der Innenwiderstand einer Batterie beträgt jeweils 0,020 Ω und der Widerstand je eines Starthilfekabels 0,0050 Ω. Die nebenstehende Schaltskizze gibt die Situation für gegeneinander geschaltete Batterien wieder. Berechne den Strom beim Fremdstarten für

    (a) gegeneinandergeschaltete Batterien,

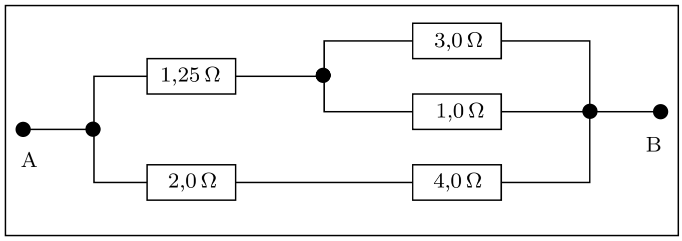
    (b) gleichgeschaltete Batterien.



Lösung: (a) $\dfrac{12\,\mathrm{V} - 11\,\mathrm{V}}{0{,}020\,\Omega + 0{,}010\,\Omega + 0{,}020\,\Omega} = 20{,}0\,\mathrm{A}$

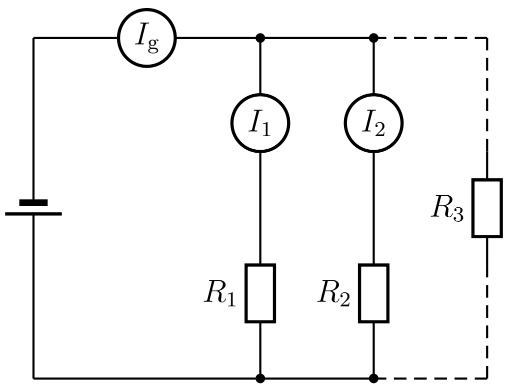
(b) $\dfrac{12\,\mathrm{V} + 11\,\mathrm{V}}{0{,}020\,\Omega + 0{,}010\,\Omega + 0{,}020\,\Omega} = 460\,\mathrm{A}$

11. Berechne den Gesamtwiderstand R_{AB} der nebenstehend gezeichneten Schaltung!



Lösung: Parallelschaltung aus 3,0 Ω und 1,0 Ω ergibt $R_1 = 0{,}75\,\Omega$.
Reihenschaltung aus 1,25 Ω und R_1 ergibt 2,0 Ω.
Parallelschaltung aus 2,0 Ω und 6,0 Ω ergibt $R_{\mathrm{ges}} = 1{,}5\,\Omega$.

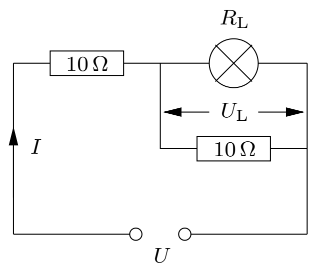
12. In der nebenstehenden Schaltung sind zwei Widerstände R_1 und R_2 parallel geschaltet. Durch den Widerstand R_1 fließt ein Strom der Stärke I_1 und durch den Widerstand R_2 ein Strom der Stärke I_2. Nun wird ein dritter Widerstand R_3 zu R_1 bzw. R_2 parallel geschaltet. Welche Aussage kann man dann über die Gesamtstromstärke I_g und die Teilstromstärken I_1, I_2 machen (Begründung)?



Lösung: Bei der Parallelschaltung von R_3 zu R_1 bzw. R_2 sinkt der Gesamtwiderstand der Schaltung, also nimmt die Gesamtstromstärke zu. In jedem Teilstromkreis ist aber die Spannung gleich der Klemmenspannung der Batterie, d. h. dass I_1 und I_2 sich nicht verändern.

13. Du hast ein Glühlämpchen mit der Aufschrift 4,5 V / 1,35 W, zwei 10 Ω-Widerstände und eine 12 V-Autobatterie. Finde eine Schaltung aus den gegebenen Bauteilen, mit der das Lämpchen ohne Schaden zu nehmen betrieben werden kann. Dokumentiere alle deine Versuche mit Schaltplan und Berechnung der Lampenspannung U_L.

Lösung: Sollstrom durch die Lampe: $I_0 = \dfrac{1{,}35\,\mathrm{VA}}{4{,}5\mathrm{V}} = 0{,}30\,\mathrm{A}$

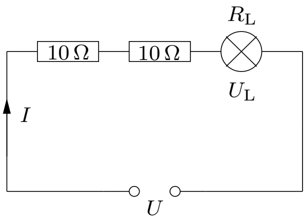


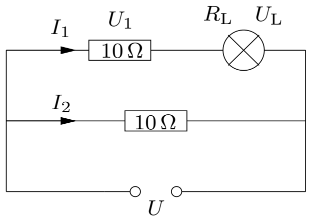
Lampenwiderstand: $R_L = \dfrac{4{,}5\mathrm{V}}{0{,}3\,\mathrm{A}} = 15\,\Omega$

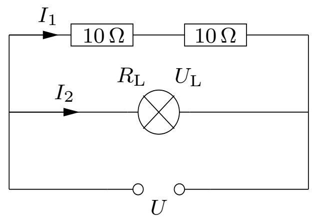
$R_{ges} = 10\,\Omega + \dfrac{10 \cdot 15\,\Omega}{10 + 15} = 16\,\Omega, \quad I = \dfrac{U}{R_{ges}} = 0{,}75\,\mathrm{A}$

$U_L = 0{,}75\,\mathrm{A} \cdot 6\,\Omega = 4{,}5\,\mathrm{V}$

Schaltungen, die nicht zum Ziel führen:







$R_{ges} = 35\,\Omega$

$I = \dfrac{U}{R_{ges}} = 0{,}343\,\mathrm{A}$

$U_L = \dfrac{15}{35} \cdot 12\,\mathrm{V} = 5{,}14\,\mathrm{V}$

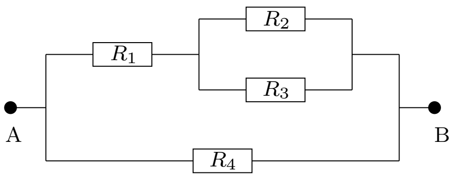
$R_{oben} = 25\,\Omega$

$I_1 = \dfrac{U}{R_{oben}} = 0{,}48\,\mathrm{A}$

$U_L = \dfrac{15}{25} \cdot 12\,\mathrm{V} = 7{,}2\,\mathrm{V}$

$U_L = 12\,\mathrm{V}$

14. In nebenstehender Schaltung gilt $R_1 = 1{,}0\,\Omega$, $R_2 = 1{,}0\,\Omega$, $R_3 = 2{,}0\,\Omega$ und $R_4 = 5{,}0\,\Omega$. Durch R_1 fließt der Strom I_1, durch R_2 der Strom I_2 usw.



(a) Berechne den Gesamtwiderstand R_{AB} zwischen den Punkten A und B.

(b) Wie groß ist die Spannung U_{AB} zwischen den Punkten A und B, wenn durch R_2 der Strom $I_2 = 3{,}0\,\mathrm{A}$ fließt?

Lösung: (a) $R_{2\|3} = \dfrac{1 \cdot 2\,\Omega}{1 + 2} = \dfrac{2}{3}\,\Omega, \qquad R_{123} = R_1 + R_{2\|3} = \dfrac{5}{3}\,\Omega$

$$R_{\mathrm{AB}} = \frac{R_{123} \cdot R_4}{R_{123} + R_4} = \frac{\frac{5}{3} \cdot 5\,\Omega}{\frac{20}{3}} = \frac{25}{20}\,\Omega = 1{,}25\,\Omega$$

(b) $U_2 = R_2 I_2 = 3\,\mathrm{V}, \qquad I_3 = \dfrac{U_2}{R_3} = 1{,}5\,\mathrm{A}, \qquad I_1 = I_2 + I_3 = 4{,}5\,\mathrm{A}$

$U_1 = R_1 I_1 = 4{,}5\,\mathrm{V}, \qquad U_{\mathrm{AB}} = U_1 + U_2 = 7{,}5\,\mathrm{V}$

15. Für eine Standard–LED ist die zulässige Betriebsspannung 2,1 V. Dabei fließt durch die LED ein Strom der Stärke 10 mA. Welchen Vorwiderstand muss man wählen, wenn für den Betrieb der LED nur eine Batterie mit einer Klemmenspannung von 9,0 V zur Verfügung steht?

Lösung: $\dfrac{9{,}0\,\mathrm{V} - 2{,}1\,\mathrm{V}}{10\,\mathrm{mA}} = 0{,}69\,\mathrm{k\Omega}$

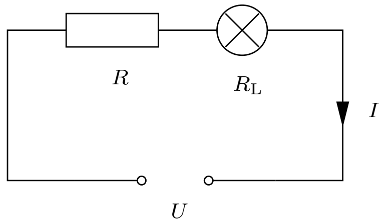
4. Elektrische Arbeit und Leistung

1. Tom möchte eine Glühbirne mit der Aufschrift $23\,\mathrm{V}/46\,\mathrm{W}$ an das Haushaltsnetz ($U = 230\,\mathrm{V}$) anschließen. Er hat dazu zwei Präzisionswiderstände mit dem jeweiligen Wert $R = 90{,}0\,\Omega$. Die Spannung U_L an der Lampe soll natürlich möglichst genau $23\,\mathrm{V}$ sein, darf diesen Wert aber auf keinen Fall um mehr als zwei Prozent überschreiten.

   (a) Berechne den Widerstand R_L der Lampe.

   (b) Tom probiert es mit nebenstehender Schaltung. Überprüfe durch Rechnung, ob die Forderungen erfüllt sind. Wieviel Prozent der Leistung der Stromquelle gehen in R verloren?

   (c) Suche eine bessere Schaltung. Dokumentiere deine Versuche durch Schaltpläne und die notwendigen Berechnungen.



Lösung: (a) $P_0 = U_0 I_0 \quad\Longrightarrow\quad I_0 = \dfrac{P_0}{U_0} = \dfrac{46\,\mathrm{VA}}{23\,\mathrm{V}} = 2\,\mathrm{A} \quad\Longrightarrow\quad R_\mathrm{L} = \dfrac{U_0}{I_0} = 11{,}5\,\Omega$

(b) $R_\mathrm{ges} = R + R_\mathrm{L} = 101{,}5\,\Omega, \quad I = \dfrac{U}{R_\mathrm{ges}} = 2{,}266\,\mathrm{A}, \quad U_\mathrm{L} = R_\mathrm{L} I = 26{,}1\,\mathrm{V}$

Maximal zulässiger Wert: $U_\mathrm{L,max} = 1{,}02 \cdot 23\,\mathrm{V} = 23{,}46\,\mathrm{V} \quad\Longrightarrow\quad U_\mathrm{L}$ zu groß.

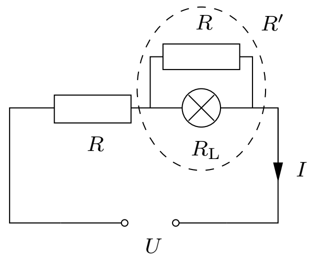
$P = UI = 528\,\mathrm{W}$

$P_R = U_R I = (U - U_\mathrm{L})I = 206{,}6\,\mathrm{V} \cdot 2{,}266\,\mathrm{A} = 468{,}16\,\mathrm{W}, \quad \dfrac{P_R}{P} = 88{,}7\,\%$

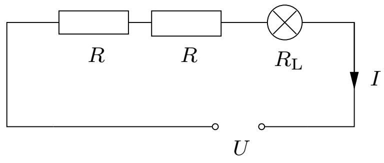
(c) $R' = \dfrac{R_\mathrm{L} R}{R_\mathrm{L} + R} = \dfrac{90 \cdot 11{,}5}{101{,}5}\,\Omega = 10{,}197\,\Omega$

$R_\mathrm{ges} = R + R' = 100{,}197\,\Omega$

$I = \dfrac{U}{R_\mathrm{ges}} = 2{,}295\,\mathrm{A}, \quad U_\mathrm{L} = R' I = 23{,}41\,\mathrm{V} < U_\mathrm{L,max}$



Schlechtere Lösung:



$R_{ges} = 2R + R_L = 191{,}5\,\Omega$

$I = \dfrac{U}{R_{ges}} = 1{,}201\,\mathrm{A}$

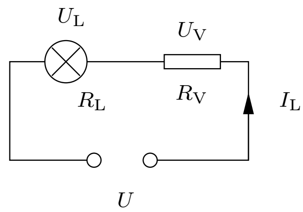
$U_L = R_L I = 13{,}8\,\mathrm{V}$

2. Eine Halogenlampe wird normalerweise mit der Spannung $U_L = 24{,}0\,\mathrm{V}$ betrieben und dabei vom Stom $I_L = 2{,}50\,\mathrm{A}$ durchflossen.
   (a) Berechne den Widerstand R_L der Lampe und die in der normal betriebenen Lampe umgesetzte Leistung P_L.
   (b) Um die Lampe am Stromnetz ($U = 230\,\mathrm{V}$) zu betreiben, wird ein Widerstand R_V vorgeschaltet. Zeichne ein beschriftetes Schaltbild und berechne R_V so, dass die Lampe wieder im Normalbetrieb läuft.
   (c) Welche Spannung U_V liegt an R_V? Welche Leistung P_V geht im Vorschaltwiderstand verloren? Wie groß ist demnach der Wirkungsgrad der Schaltung?

Lösung: (a) $R_L = \dfrac{U_L}{I_L} = \dfrac{24\,\mathrm{V}}{2,5\,\mathrm{A}} = 9{,}60\,\Omega, \quad P_L = U_L I_L = 60{,}0\,\mathrm{W}.$

(b) $R_{ges} = \dfrac{U}{I_L} = 92{,}0\,\Omega$

$R_V = R_{ges} - R_L = 82{,}4\,\Omega$



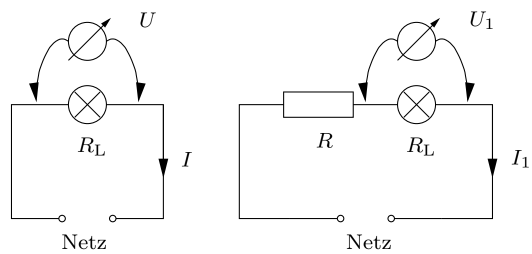
(c) $U_V = R_V \cdot I_L = 206\,\mathrm{V}$ oder $U_V = U - U_L = 206\,\mathrm{V}$

$P_V = U_V \cdot I_L = 515\,\mathrm{W}$

Gesamtleistung der Stromquelle: $P_{ges} = U \cdot I_L = P_L + P_V = 575\,\mathrm{W}$

$\eta = \dfrac{P_L}{P_{ges}} = \dfrac{60}{575} = 0{,}104 = 10{,}4\,\%$

3. Jörg möchte die Leistung seines Superscheinwerfers bestimmen. Da der Strommessbereich seines Vielfachmessgerätes defekt ist, kann er nur Spannungen messen. Außerdem besitzt er noch einen Präzisionswiderstand mit dem Wert $R = 125\,\Omega$. Jörg misst zuerst die Netzspannung $U = 232\,\mathrm{V}$ und



dann die Spannung $U_1 = 32{,}0\,\mathrm{V}$ am Scheinwerfer, wenn dieser mit R in Reihe ans Netz angeschlossen wird. Berechne zuerst die Spannung U_R am Widerstand R, die Stromstärke I_1 und dann den Widerstand R_L des Scheinwerfers und seine Leistung P, wenn er ohne den Widerstand R an U angeschlossen wird.

Lösung: $U_\mathrm{R} = U - U_1 = 200\,\mathrm{V} \quad I_1 = \dfrac{U_\mathrm{R}}{R} = 1{,}60\,\mathrm{A} \quad R_\mathrm{L} = \dfrac{U_1}{I_1} = 20{,}0\,\Omega$

$$P = UI = U \cdot \frac{U}{R_\mathrm{L}} = \frac{U^2}{R_\mathrm{L}} = \frac{232^2\,\mathrm{V}^2}{20{,}0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}} = 2691\,\mathrm{VA} \approx 2{,}69\,\mathrm{kW}$$

4. Durch ein Fernsehgerät, das im Stand–by–Betrieb mit einer Spannung von 230 V betrieben wird, fließen 0,10 A.
   (a) Wie viel elektrische Energie in der Einheit 1 J wird verbraucht, wenn das Fernsehgerät 20,0 h lang im Stand–by–Betrieb läuft?
   (b) Der Preis für 1,00 kWh beträgt 18,0 Cent. Wie viel kostet der Betrieb des Fernsehgeräts in 1,00 a, wenn es pro Tag 20,0 h im Stand–by–Betrieb läuft?
   (c) Ein modernes Kernkraftwerk hat eine Leistung von etwa 1100 MW. In Deutschland gibt es etwa 55 Millionen Haushalte. Jeder Haushalt ist mit etwa 1,5 Fernsehgeräten ausgestattet. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass in jedem Haushalt 1 Fernsehgerät rund um die Uhr im Stand–by–Betrieb läuft. Zeige durch Rechnung, dass man durch Abschalten aller Fernsehgeräte, die im Stand–by–Betrieb laufen, ein Kernkraftwerk einsparen könnte!

Lösung: (a) $230\,\mathrm{V} \cdot 0{,}10\,\mathrm{A} \cdot 20 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 1{,}7\,\mathrm{MJ}$

(b) $230\,\mathrm{V} \cdot 0{,}10\,\mathrm{A} \cdot 20\,\mathrm{h} \cdot 18\,\frac{\mathrm{Cent}}{\mathrm{kWh}} \cdot 365 = 30\,€$

(c) $55 \cdot 10^6 \cdot 23\,\mathrm{W} > 1100\,\mathrm{W}$

5. (a) Welche Spannung erteilt der Ladung $Q = 0{,}060\,\mathrm{C}$ die Energie $W = 3{,}0\,\mathrm{J}$?
   (b) Welcher Ladung wird beim durchlaufen der Spannung $U = 220\,\mathrm{V}$ die Energie $W = 2{,}00\,\mathrm{J}$ übertragen?

Lösung: (a) $U = \dfrac{W}{Q} = \dfrac{3\,\mathrm{J}}{0{,}06\,\mathrm{C}} = 50\,\mathrm{V}$

(b) $Q = \dfrac{W}{U} = \dfrac{2\,\mathrm{J}}{220\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}} = 9{,}09\,\mathrm{mC}$

6. (a) In einer Fernsehröhre werden zunächst ruhende Elektronen von der Spannung $U = 5000\,\mathrm{V}$ beschleunigt. Berechne die kinetische Energie W_k und die Geschwindigkeit v der Elektronen nach der Beschleunigung.
   (b) Ein Proton soll in $\Delta t = 10\,\mathrm{s}$ von der Erde zum Mond fliegen ($\Delta s = 384000\,\mathrm{km}$). Von welcher Spannung U muss das Proton beschleunigt werden?

Lösung: (a) $W_\mathrm{k} = eU = 8{,}01 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{J}, \quad v^2 = \frac{2W_\mathrm{k}}{m_\mathrm{e}} = 1{,}76 \cdot 10^{15}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \quad \Longrightarrow \quad v = 4{,}19 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

(b) $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 3{,}84 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad W_\mathrm{k} = \frac{m_\mathrm{p}}{2}\,v^2 = 1{,}23 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}, \quad U = \frac{W_\mathrm{k}}{e} = 7{,}70\,\mathrm{MV}$

7. Für ein Experiment müssen ruhende Protonen auf die Geschwindigkeit $v = 2{,}7 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beschleunigt werden. Welche Spannung U müssen die Protonen dazu durchlaufen?

Lösung: $\frac{m_p}{2}\,v^2 = eU \quad \Longrightarrow \quad U = \frac{m_p v^2}{2e} = 3{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{V}$

8. Ein Elektromotor wird an eine normale Steckdose angeschlossen, die mit 10 A abgesichert ist. In welcher minimalen Zeit Δt kann der Motor mit dem Wirkungsgrad $\eta = 60\,\%$ drei Zementsäcke der Gesamtmasse $m = 150\,\mathrm{kg}$ vom Boden in den 3. Stock ($h = 12\,\mathrm{m}$) befördern?

Lösung: $P_\mathrm{mech} = 0{,}6 \cdot 230\,\mathrm{V} \cdot 10\,\mathrm{A} = 1380\,\mathrm{W}, \quad W = mgh = P \cdot \Delta t \quad \Longrightarrow \quad \Delta t = \frac{mgh}{P} = 13\,\mathrm{s}$

9. Ein Tauchsieder ist an eine Haushaltssteckdose angeschlossen und wird von einem Strom der Stärke $I = 3{,}5\,\mathrm{A}$ durchflossen. In welcher Zeit Δt kann mit dem Tauchsieder ein Liter Wasser der Temperatur 14 °C zum Kochen gebracht werden?

Lösung: $\Delta t = \frac{W}{P} = \frac{c_\mathrm{Wasser} m \Delta T}{UI} = \frac{4190\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} \cdot 1\,\mathrm{kg} \cdot 86\,\mathrm{K}}{230\,\mathrm{V} \cdot 3{,}5\,\mathrm{A}} = 4{,}5 \cdot 10^2\,\mathrm{s} = 7{,}5\,\mathrm{min}$

10. Auf einer Glühbirne steht 230 V / 60 W. Welcher Strom I fließt durch die Glühbirne und welchen Widerstand R hat sie?

Lösung: $I = \frac{P}{U} = 0{,}26\,\mathrm{A}, \quad R = \frac{U}{I} = \frac{U^2}{P} = 8{,}8 \cdot 10^2\,\Omega$

11. Durch einen Fernseher fließt bei $U = 230\,\mathrm{V}$ und $I = 5{,}0\,\mathrm{A}$ in der Zeit t die Ladung $Q = 1{,}8 \cdot 10^4\,\mathrm{C}$. Berechne den Widerstand R des Gerätes, die Leistungsaufnahme P, die verbrauchte elektrische Energie W und die Einschaltdauer t.

Lösung: $R = \frac{U}{I} = 46\,\Omega, \quad P = UI = 1{,}27 kW, \quad W = QU = 4{,}1 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$

$t = \frac{Q}{I} = 3600\,\mathrm{s} = 1{,}0\,\mathrm{h}$

12. Durch eine Filmleuchte ($P = 1000\,\mathrm{W}$) fließt in 11 s die Ladung 50 C. Berechne U, I, R und W!

Lösung: $I = \frac{Q}{t} = 4{,}5\,\mathrm{A}, \quad U = \frac{P}{I} = \frac{Pt}{Q} = 220\,\mathrm{V}, \quad R = \frac{U}{I} = \frac{Pt^2}{Q^2} = 48\,\Omega, \quad W = Pt = 11\,\mathrm{kJ}$

13. Ein Tauchsieder soll 400 g Eis von 0 °C in 5 min in Wasser von 60 °C verwandeln. Welchen Widerstand R muss der Tauchsieder haben?

Lösung: $W = 0{,}4\,\mathrm{kg}\cdot 335\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} + 0{,}4\,\mathrm{kg}\cdot 60\,\mathrm{K}\cdot 4{,}19\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} = 235\,\mathrm{kJ}, \quad U = 230\,\mathrm{V}$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{235\,\mathrm{kJ}}{300\,\mathrm{s}} = 782\,\mathrm{W} = UI \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{P}{U} = 3{,}4\,\mathrm{A}, \quad R = \frac{U}{I} = 68\,\Omega$$

14. An einem Widerstand R liegt für die Zeit t die Spannung U und es fließt der Strom I. P ist die Leistung der Stromquelle in dieser Zeit und W die gesamte in dieser Zeitspanne am Widerstand R umgesetzte Energie.
    (a) Berechne P, R und U aus I, W und t.
    (b) Berechne P, I und U aus R, W und t.

Lösung: (a) $P = \frac{W}{t}, \quad U = \frac{P}{I} = \frac{W}{It}, \quad R = \frac{U}{I} = \frac{W}{I^2 t}$

(b) $P = \frac{W}{t} = UI = RI^2 \quad \Longrightarrow \quad I = \sqrt{\frac{W}{Rt}}, \quad U = RI = \sqrt{\frac{WR}{t}}$

15. Auf einer Glühbirne steht 3,5 V / 1,05 W. Welchen Widerstand R_V muss man vorschalten, damit das Lämpchen an 230 V angeschlossen werden kann? Wieviel Prozent der Gesamtleistung gehen am Widerstand verloren? Wieviel Prozent sind das von der Nutzleistung?

Lösung: Mit $P = 1{,}05\,\mathrm{W}$ und der Lampenspannung $U_L = 3{,}5\,\mathrm{V}$ folgt für den Sollstrom durch die Lampe $I = \frac{P}{U_L} = 0{,}3\,\mathrm{A}$.

Der Widerstand der Lampe ist $R_L = \frac{U_L}{I} = 11{,}7\,\Omega$.

Der Gesamtwiderstand der Reihenschaltung ist $R_{ges} = R + R_L = \frac{230\,\mathrm{V}}{0{,}3\mathrm{A}} = 766{,}7\,\Omega$.

$R = R_{ges} - R_L = 755\,\Omega$

Die Gesamtleistung ist $P_{ges} = 230\ \mathrm{V}\cdot I^2 = 20{,}7\,\mathrm{W}$, die Nutzleistung $P = 1{,}05\,\mathrm{W}$ und die Verlustleistung $P_V = P_{ges} - P = 19{,}65\,\mathrm{W}$.

$\frac{P_V}{P_{ges}} = 94{,}9\,\%$, $\frac{P_V}{P} = 1{,}87\cdot 10^3\,\%$

16. **Strom aus Wasserkraft**
    Vom Walchensee fließen pro Sekunde $84\,\mathrm{m}^3$ Wasser in Druckrohren zum $h = 200\,\mathrm{m}$ tiefer gelegenen Kraftwerk, das die anfängliche potentielle Energie des Wassers mit einem Wirkungsgrad von 75% in elektrische Energie verwandelt. Welche elektrische Leistung P kann das Kraftwerk abgeben? Um wieviel Grad ist das Wasser nach

dem Kraftwerk wärmer als im Walchensee? Welcher Strom fließt in der vom Werk abgehenden 110-kV-Leitung?

Lösung: $P = 75\% \cdot \frac{mgh}{\Delta t} = 0{,}75 \cdot \frac{84\,000\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 200\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 1{,}24 \cdot 10^8\,\mathrm{W} = 124\,\mathrm{MW}$

$$I = \frac{P}{U} = \frac{124\,\mathrm{MVA}}{0{,}11\,\mathrm{MV}} = 1{,}1 \cdot 10^3\,\mathrm{A}$$

$$25\% \cdot mgh = c_{\mathrm{Wasser}} m \Delta T \quad \Longrightarrow \quad \Delta T = \frac{0{,}25\,gh}{c_{\mathrm{Wasser}}} = \frac{0{,}25 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 200\,\mathrm{m}}{4190\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}} = 0{,}12\,\mathrm{K}$$

17. **Vom Unsinn der Standby-Schaltungen**

Damit der moderne „Homo faulentius“ seinen Leib nicht mehr vom Sofa erheben muss, sind die meisten Fernseh- und Stereogeräte mit Standby-Schaltungen ausgestattet, d.h. sie lassen sich mit der Fernbedienung vom normalen Betrieb in den Schlafmodus (Standby) und wieder zurück schalten (Videorekorder lassen sich überhaupt nicht ausschalten). Im Standby-Betrieb fließt im Durchschnitt der Strom $I = 45\,\mathrm{mA}$ durch ein Gerät. Was kostet der jährliche „Rund-um-die-Uhr-Standby-Betrieb“ von $N = 1{,}8 \cdot 10^8$ Geräten (Deutschland) bei einem Preis von 17 Cent pro Kilowattstunde? Wie viele Wasserkraftwerke mit der mittleren Leistung 36 MW (Walchensee) bzw. Kernkraftwerke mit der Leistung 900 MW (Isar I) sind zum Standby-Betrieb der deutschen Geräte nötig?

Lösung: Energieverbrauch in einem Jahr:

$$W = NUIt = 1{,}8 \cdot 10^8 \cdot 230\,\mathrm{V} \cdot 0{,}045\,\mathrm{A} \cdot 365{,}25 \cdot 24\,\mathrm{h} = 1{,}6 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kWh}$$

Kosten pro Jahr:

$$k = 1{,}6 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kWh} \cdot 0{,}17\,\frac{€}{\mathrm{kWh}} = 2{,}8 \cdot 10^9\,€$$

Benötigte Gesamtleistung:

$$P = NUI = 1{,}8 \cdot 10^8 \cdot 230\,\mathrm{V} \cdot 0{,}045\,\mathrm{A} = 1{,}9\,\mathrm{GW}$$

Man benötigt $\frac{P}{36\,\mathrm{MW}} \approx 53$ Wasserkraftwerke oder $\frac{P}{0{,}9\,\mathrm{GW}} \approx 2$ Kernkraftwerke.

18. **Wie viele Elektronen man zum Bügeln braucht**

Ein Bügeleisen nimmt die Leistung $P = 690\,\mathrm{W}$ auf. Welchen Widerstand R hat das Gerät? Wie viele Elektronen (Elementarladung: $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,C$) fließen pro Stunde durch das Bügeleisen?

Lösung: $P = UI = \frac{U^2}{R} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{U^2}{P} = \frac{230^2\,\mathrm{V}^2}{690\,\mathrm{VA}} = 76{,}7\,\Omega$

$$I = \frac{P}{U} = 3{,}0\,\mathrm{A}, \quad Q = It = 3{,}0\,\mathrm{A} \cdot 3600\,\mathrm{s} = 10800\,\mathrm{C}, \quad n = \frac{Q}{e} = 6{,}75 \cdot 10^{22}$$

19. Ein Bach, der pro Sekunde $0{,}50\,\mathrm{m}^3$ Wasser führt, stürzt in einem Rohr $h = 3{,}0\,\mathrm{m}$ in die Tiefe und treibt den Generator eines kleinen Wasserkraftwerks an. 70% der potentiellen Energie des Wassers werden dabei in elektrische Energie verwandelt, 20% gehen in innere Energie des Wassers über.
    (a) Was passiert mit den restlichen 10% der potentiellen Energie des Wassers?
    (b) Um welche Temperaturdifferenz ΔT ist das Wasser nach dem Generator wärmer als vorher? ($c_{\mathrm{H_2O}} = 4{,}19\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}}$)
    (c) Welche maximale elektrische Leistung P_e kann der Generator abgeben? Wie groß ist die Stromstärke I bei dieser maximalen Leistung, wenn die Spannung des Generators $U = 230\,\mathrm{V}$ beträgt?

Lösung: (a) Erwärmung des Generators und der Umgebung.

(b) Pro Sekunde: $W_\mathrm{p} = mgh = 500\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\cdot 3\,\mathrm{m} = 14715\,\mathrm{J}$

$$0{,}2mgh = mc_{\mathrm{H_2O}}\Delta T \quad\Longrightarrow\quad \Delta T = \frac{0{,}2gh}{c_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{0{,}2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\cdot 3\,\mathrm{m}}{4190\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}} = 1{,}4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}$$

(c) $P_\mathrm{e} = 0{,}7\cdot\dfrac{W_\mathrm{p}}{\Delta t} = \dfrac{0{,}7\cdot 14715\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{s}} = 1{,}0\cdot 10^4\,\mathrm{W} = UI \quad\Longrightarrow\quad I = \dfrac{P_\mathrm{e}}{U} = 45\,\mathrm{A}$

20. Ein Elektroauto der Masse $m = 800\,\mathrm{kg}$ beschleunigt in $20\,\mathrm{s}$ von null auf $90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Der Motor des Fahrzeugs wird mit der Spannung $U = 200\,\mathrm{V}$ betrieben und hat den Wirkungsgrad 80%. Von welchem mittleren Strom I wird der Motor während des Beschleunigungsvorgangs durchflossen?

Lösung: $90\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 25\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\quad W = \dfrac{m}{2}v^2 = 2{,}5\cdot 10^5\,\mathrm{J},\quad P = \dfrac{W}{t} = 12500\,\mathrm{W} = 12{,}5\,\mathrm{kW}$

$$P = UI\cdot 80\% \quad\Longrightarrow\quad I = \frac{P}{0{,}8\,U} = 78{,}125\,\mathrm{A} \approx 78\,\mathrm{A}$$

21. (a) Eine LED-Lampe liegt an der Spannung $U = 3{,}6\,\mathrm{V}$ und dabei wird die elektrische Leistung $P = 2{,}0\,\mathrm{W}$ in der Lampe umgesetzt. Von welchem Strom I wird die Lampe durchflossen und welchen Widerstand R hat sie?
    (b) Ein Aufzug der Masse $m = 1200\,\mathrm{kg}$ wird von einem Elektromotor mit dem Wirkungsgrad $\eta = 90\,\%$ in $\Delta t = 2{,}5\,\mathrm{s}$ mit konstanter Geschwindigkeit um die Höhe $h = 3{,}6\,\mathrm{m}$ gehoben. Dabei gehen $10\,\%$ der vom Motor erbrachten mechanischen Energie durch Reibung verloren. Von welchem Strom I wird der Motor durchflossen, der an der Spannung $U = 218\,\mathrm{V}$ liegt?

    Wie groß ist I, wenn der Aufzug (bei konstanter Leistung) zusätzlich noch von null auf $v = 4{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beschleunigt wird?

Lösung: (a) $I = \dfrac{P}{U} = 0{,}56\,\mathrm{A},\quad R = \dfrac{U}{I} = 6{,}5\,\Omega$

(b) Die am Aufzug umgesetzte mechanische Leistung ist

$$P_{\mathrm{m}} = 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}1) \cdot UI = \frac{mgh}{\Delta t}$$

$$I = \frac{mgh}{0{,}81\,\Delta t\,U} = \frac{1200\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 3{,}6\,\mathrm{m}}{0{,}81 \cdot 2{,}5\,\mathrm{s} \cdot 218\,\mathrm{V}} = 96\,\mathrm{A}$$

Mit Beschleunigung:

$$I = \frac{mgh + \frac{m}{2}v^2}{0{,}81\,\Delta t\,U} = \frac{42379{,}2\,\mathrm{J} + 12150\,\mathrm{J}}{0{,}81 \cdot 2{,}5\,\mathrm{s} \cdot 218\,\mathrm{V}} = 124\,\mathrm{A}$$

22. Welche Stromstärke fließt durch einen an das Haushaltsnetz angeschlossenen elektrischen Wasserkocher, wenn man Wasser zum Sieden bringt?

Lösung: Aus einer Schätzung, Messung bzw. aus einem Tabellenwerk:

$m = 1\,\mathrm{kg}, t = 4\,\mathrm{min}, U = 230\,\mathrm{V}, c = 4{,}2\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g\,K}}, \vartheta_0 = 20°\mathrm{C}, \vartheta_1 = 100°\mathrm{C}$

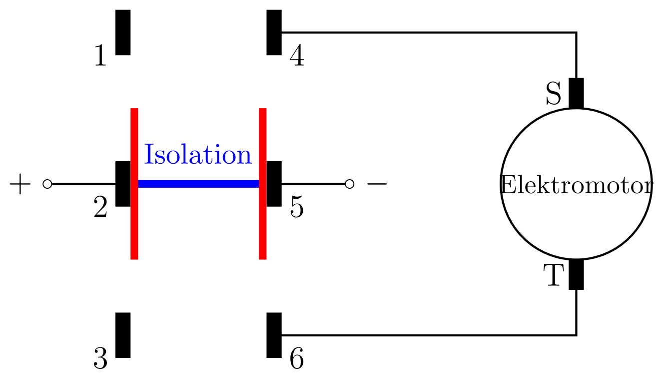
$U\,I\,t = c\,m\Delta\vartheta \quad \Rightarrow \quad I = \frac{c\,m\,\Delta\vartheta}{U\,t} = 6\,\mathrm{A}$

23. Du füllst in einen an das Haushaltnetz ($U = 230\,\mathrm{V}$) angeschlossenen Wasserkocher $1{,}0\,\mathrm{l}$ Wasser (Dichte von Wasser $\varrho = 1{,}0\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$, spezifische Wärme von Wasser $c = 4{,}2\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g\,K}}$) der Temperatur $\vartheta_0 = 20°\mathrm{C}$. Es vergehen 4,0 Minuten bis das Wasser zu sieden beginnt. Welche Stromstärke fließt durch den Wasserkocher?

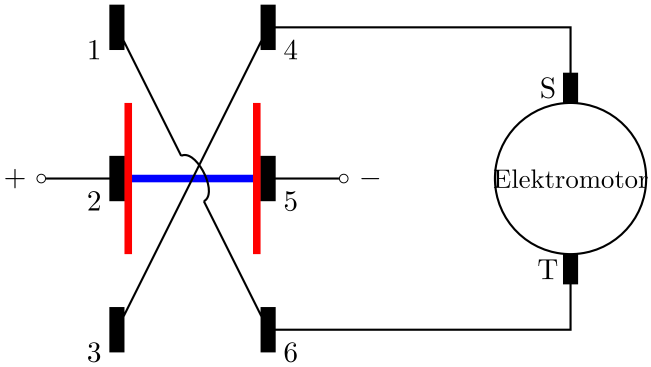
Lösung: $U\,I\,t = c\,m\Delta\vartheta \quad \Rightarrow \quad I = \frac{c\,m\,\Delta\vartheta}{U\,t} = 6{,}0\,\mathrm{A}$

5. Magnetfeld und Strom

1. Ein DPDT („Double Pole Double Throw") oder 2–poliger Wechselschalter ist ein Schalter, den man für Elektromotoren benutzt, die mit Gleichstrom betrieben werden.
Der Schalter hat sechs Anschlüsse 1, 2, 3, 4, 5 und 6. An den Anschluss 2 kommt der Pluspol und an den Anschluss 5 der Minuspol einer Batterie. Der Anschluss 4 wird über den Schleifkontakt S und der Anschluss 6 über den Schleifkontakt T mit dem Elektromotor verbunden. Das blau–rot gezeichnete, leitende Teil des Schalters kann über einen Schieber vertikal in der Zeichenebene bewegt werden. In der gezeichneten Position des blau–roten Teils soll keine Spannung am Motor liegen. Wird der Schieber nach oben bewegt, so dass er mit 1, 2, 4 und 5 Kontakt hat, dann soll der Pluspol an T und der Minuspol an S liegen. Wird der Schieber aus der gezeichneten Position nach unten bewegt, so dass das blau–rot gezeichnete Teil Kontakt mit 2, 3, 5 und 6 hat, dann soll der Pluspol an S und der Minuspol an T liegen.
Damit der Schalter wie beschrieben funktioniert sind noch zwei Verbindungen unter den Anschlüssen des Schalters nötig. Zeichne diese ein. Welchen Zweck erfüllt der Schalter?



Lösung:

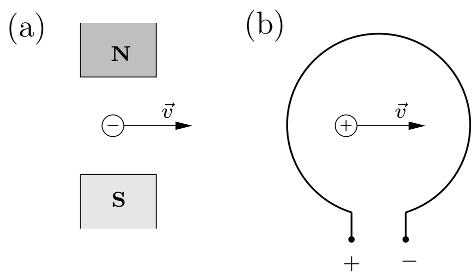


2. Ein Nagel wird 20 Mal von einem Draht umwickelt. Die Drahtenden werden an eine Batterie angeschlossen. Nun hält man den Nagel an ein Häufchen Büroklammern.
   (a) Was passiert?
   (b) Was passiert, wenn man den Nagel nur 10 Mal umwickelt und dann an die Büroklammern hält?
   (c) Was passiert, wenn man Nagel und Batterie trennt?

   Quelle: Julia Pürkner

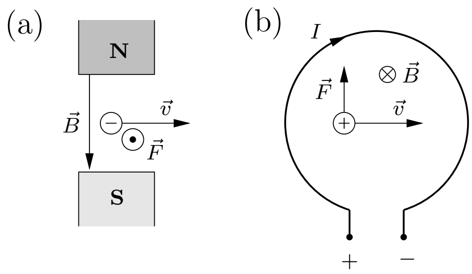
Lösung: (a) Der Nagel zieht die Büroklammern an.
(b) Es werden weniger Büroklammern angezogen.
(c) Der Nagel zieht nichts mehr an.

3. Ermittle in nachvolziehbarer Weise (Hilfsgrößen einzeichnen!) die Richtung der Kraft $\vec{F}$ auf das bewegte geladene Teilchen. Beschreibe kurz die dabei verwendete Regel.



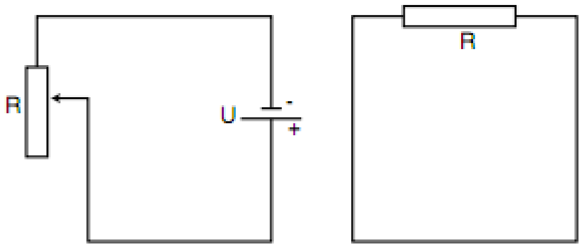
Lösung: Rechte-Hand-Regel für positive Teilchen:

Daumen	:	$\vec{v}$
Zeigefinger	:	$\vec{B}$
Mitelfinger	:	$\vec{F}$



6. Induktion

1. Die beiden in der Abb. dargestellten Kreise befinden sich so hintereinander, dass sich ihre magnetischen Feldlinien durchdringen. In welche Richtung fließt der induzierte Strom im rechten Stromkreis, wenn der Widerstand im linken Kreis
   (a) erhöht wird?
   (b) erniedrigt wird?



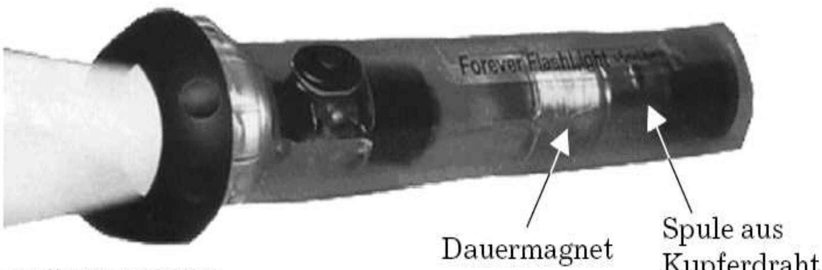
Lösung: Magnetfeld in der linken Spule in die Zeichenebene

(a) $R\uparrow \Rightarrow I\downarrow$, d. h. Magnetfeld erniedrigt sich in der rechten Schleife. Der Induktionsstrom in der rechten Schleife ist parallel zum bestehenden Magnetfeld, um der Abnahme entgegenzuwirken. Der Strom fließt im Uhrzeigersinn.

(b) $R\downarrow \Rightarrow I\uparrow$, d. h. Magnetfeld ernöht sich in der rechten Schleife. Der Induktionsstrom in der rechten Schleife ist entgegengesetzt zum bestehenden Magnetfeld, um der Zunahme entgegenzuwirken. Der Strom fließt gegen den Uhrzeigersinn.

2. **Batterielose Taschenlampe**

   In einem Katalog wird eine neuartige Taschenlampe angeboten: Weltneuheit: Immer einsatzbereit. Kurze Zeit in Längsrichtung schütteln (siehe Abbildung) reicht aus, und schon hat man Dauerlicht.



Quelle: Kommission

(a) Erklären Sie, warum durch das Schütteln eine elektrische Spannung erzeugt werden kann.

(b) Planen Sie ein Experiment, mit dem die Erzeugung einer solchen Spannung demonstriert werden kann.

(c) Geben Sie weitere Bauteile an, die außer Spule und Magnet noch zum Betrieb dieser Lampe notwendig sind. Begründen Sie Ihre Auswahl. Fertigen Sie eine Schaltskizze der Lampe an.

Quelle: Bildungsstandards im Fach Physik für den Mittleren Schulabschluss, Beschluss vom 16.12.2004

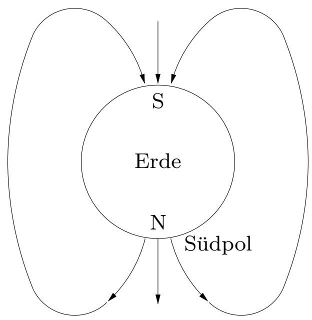
Lösung: (a) Durch das Schütteln der Lampe wird eine Änderung des Magnetfeldes innerhalb der Spule hervorgerufen und dadurch eine Spannung induziert.

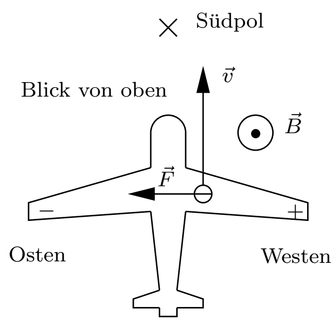
(b) Z. B. einen Magent an eine Feder hängen, und zu Schwingung anregen. Der Magent pendelt dann in eine Spule hinein und heraus und indiziert dort eine Spannung, die mit einem Voltmeter nachgewiesen werden kann.

(c) Für einen fünfminütigen Dauerbetrieb ist ein Energiespeicher (Akkumulator oder Kondensator) notwendig. Dieser kann nur durch Gleichstrom geladen werden. Deshalb ist eine Gleichrichtung des Induktionsstroms notwendig. Dies kann mit einer Diode erreicht werden

3. Ein Flugzeug fliegt über der Antarktis in konstanter Höhe genau auf den Südpol zu. Erkläre ganz genau anhand von Skizzen und bekannten Gesetzen, deren Name und Inhalt anzugeben ist, welche Flügelspitze sich wie auflädt.

Lösung: Der geografische Südpol ist der magnetische Nordpol der Erde. Die magnetischen Feldlinien zeigen in der Nähe des Südpols also vom Boden nach oben.



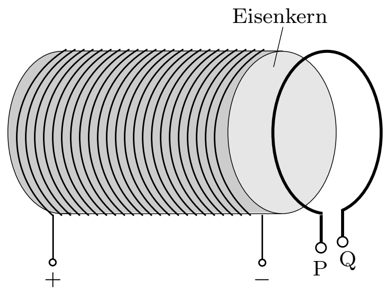


Wegen der negativen Ladung des Elektrons verwenden wir die „Linke-Hand-Regel“:

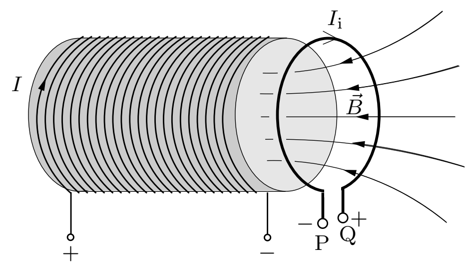
$\vec{v}$: Daumen, $\vec{B}$: Zeigefinger, $\vec{F}$: Mittelfinger.

Die Kraft auf ein Elektron zeigt also noch Osten, d.h. die östliche Flügelspitze lädt sich negativ, die westliche positiv auf.

4. Der Strom durch die Spule in nebenstehender Abbildung wird abgeschaltet. Welche Polung hat die Induktionsspannung in der Leiterschleife kurz nach dem Abschalten? Zitiere die verwendete Regel (Name und Inhalt) und erläutere Schritt für Schritt, wie du zu deinem Ergebnis kommst. Welche Wirkung hat der Eisenkern der Spule auf die Induktionsspannung?



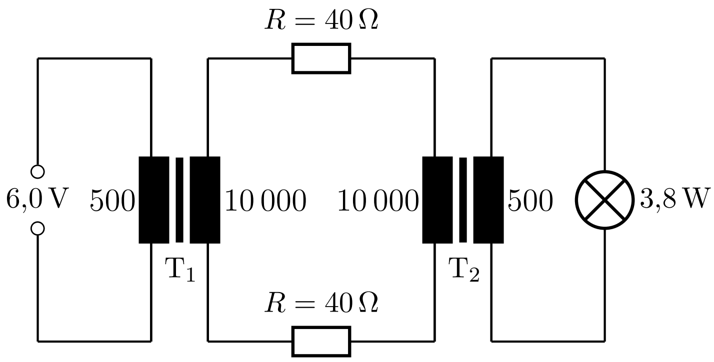
Lösung: Der Spulenstrom fließt von plus nach minus, das Spulenfeld zeigt von rechts nach links.
Lenzsche Regel: „Der Induktionsstrom I_i fließt so, dass er der Feldänderung durch die Leiterschleife entgegenwirkt.“
Da $\vec{B}$ schwächer wird, zeigt das vom Induktionsstrom erzeugte Feld $\vec{B}_\mathrm{i}$ in die gleiche Richtung wie $\vec{B}$, P wird also negativ und Q positiv.



Der Eisenkern bewirkt ein größeres Magnetfeld und damit auch eine größere Induktionsspannung.

7. Transformator

1. Nebenstehend ist eine Schaltskizze zu einem Modellversuch zur Energieübertragung mit der Hochspannungstechnik abgebildet. Berechne die zum Betrieb der Glühlampe erforderliche Primärstromstärke, wenn der Wirkungsgrad der beiden Transformatoren jeweils 100% ist. Welcher Wirkungsgrad ergibt sich daraus für die Energieübertragung?



Lösung: $6{,}0\,\mathrm{V} \cdot I_\mathrm{p} = 2 \cdot R \cdot \left(\frac{I_\mathrm{p}}{20}\right)^2 + 3{,}8\,\mathrm{W} \quad \Rightarrow \quad I_\mathrm{p} = 0{,}65\,\mathrm{A}; 98\%$

2. An einem Transformator liegt primärseitig die Netzspannung $U = 230\,\mathrm{V}$. Sekundärseitig sollen zwei parallel geschaltete Halogenlampen ($U = 24\,\mathrm{V}$; $P = 12\,\mathrm{W}$) an den Transformator angeschlossen werden.

   (a) Von welcher Art muss die Spannung primärseitig sein, damit der Transformator funktioniert? Begründe deine Antwort.

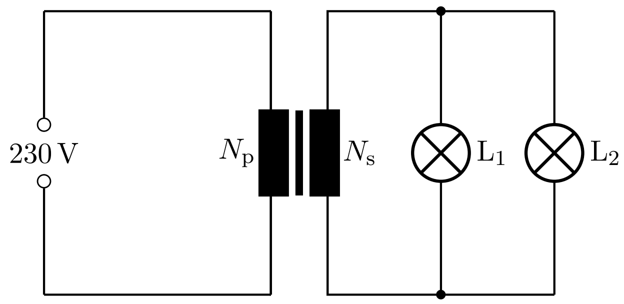
   (b) Skizziere die Schaltung.

   (c) Welchen Wert muss die Spannungsübersetzung haben. Gib eine Möglichkeit an, wie diese realisiert werden kann.

   (d) Es ist bekannt, dass der Wirkungsgrad des Transformators 90% beträgt. Berechne die Sekundärstromstärke, die Primärleistung und die Primärstromstärke.

Lösung: (a) Wechselspannung, sonst ergibt sich kein dauerhaftes sich änderndes Magnetfeld, welches sowohl die Primär– als auch die Sekundärspule durchsetzt.

(b) Skizze:



(c) $\frac{U_\mathrm{s}}{U_\mathrm{p}} = \frac{230}{24}$; $N_\mathrm{s} = 230, N_\mathrm{p} = 24$.

(d) $U_\mathrm{p}\, I_\mathrm{p} \cdot 0{,}90 = 2 \cdot 12\,\mathrm{W} \quad \Rightarrow \quad I_\mathrm{p} = \dfrac{2 \cdot 12\,\mathrm{W}}{0{,}90 \cdot 230\,\mathrm{V}} = 1{,}2\,\mathrm{A}, P_\mathrm{p} = 27\,\mathrm{W}, I_\mathrm{s} = 1{,}0\,\mathrm{A}$

3. Beschreibe den Aufbau eines Transformators und erkläre dann genau, wie die Spannung an der Sekundärspule entsteht. Verwende eine Skizze und achte auf eine logisch saubere Argumentation.

Lösung: Zwei Spulen sind um einen gemeinsamen Eisenkern gewickelt. Ein Wechselstrom durch die Primärspule erzeugt ein sich mit der Zeit veränderndes Magnetfeld, das wegen des Eisenkerns (Ausrichtung der Elementarmagnete) auch die Sekundärspule durchdringt. Dadurch wird an den Enden der Sekundärspule eine Spannung induziert.

4. Beschreibe den Aufbau eines Transformators und erkläre dann genau, wie die Spannung an der Sekundärspule entsteht. Verwende eine Skizze und achte auf eine logisch saubere Argumentation.

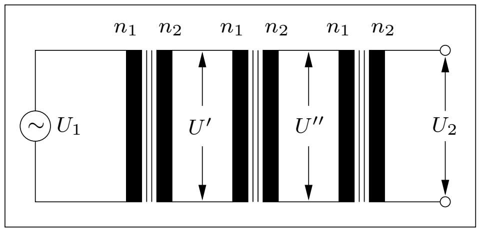
Lösung: Zwei Spulen sind um einen gemeinsamen Eisenkern gewickelt. Ein Wechselstrom durch die Primärspule erzeugt ein sich mit der Zeit veränderndes Magnetfeld, das wegen des Eisenkerns (Ausrichtung der Elementarmagnete) auch die Sekundärspule durchdringt. Dadurch wird an den Enden der Sekundärspule eine Spannung induziert.

5. Eine Wechselspannung $U_1 = 3{,}00\,\mathrm{V}$ soll auf $U_2 = 648\,000\,\mathrm{V}$ hochtransformiert werden.

   (a) Es wird ein Trafo verwendet, dessen Primärspule $n_1 = 400$ Windungen hat. Welche Windungszahl n_2 hat die Sekundärspule?

   (b) Es werden drei gleichartige Trafos mit $n_1 = 400$ verwendet; die Sekundärspule eines Trafos wird dabei an die Primärspule des nächsten Trafos angeschlossen. Welches (gleiche) n_2 hat jeder der drei Trafos?

Lösung: (a) $\dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{U_2}{U_1} \quad \Longrightarrow \quad n_2 = \dfrac{U_2 n_1}{U_1} = \dfrac{648\,000\,\mathrm{V} \cdot 400}{3\,\mathrm{V}} = 8{,}64 \cdot 10^7$



(b) $\dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{U'}{U_1} = \dfrac{U''}{U'} = \dfrac{U_2}{U''} \quad \Longrightarrow$

$$U_2 = \frac{n_2}{n_1} U'' = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 U' = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^3 U_1$$

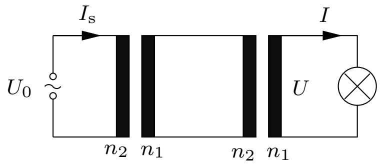
$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^3 = \frac{U_2}{U_1} \quad \Longrightarrow$$

$$n_2 = \sqrt[3]{\frac{U_2}{U_1}} \cdot n_1 = \sqrt[3]{216\,000} \cdot 400 = 60 \cdot 400 = 24\,000$$

6. Hans hat drei identische Trafos mit den Windungszahlen $n_1 = 270$ und $n_2 = 1350$.
   (a) Welche größte und welche kleinste Spannung kann Hans aus der Netzspannung $U_0 = 230\,\mathrm{V}$ herstellen?
   (b) Hans möchte eine Glühlampe mit der Aufschrift $10\,\mathrm{V}/20\,\mathrm{W}$ mit der Netzspannung betreiben. Mit welcher Schaltung aus seinen Trafos ist dies am besten möglich (Schaltplan mit Angabe der Windungszahlen)? Welcher Strom I_s fließt in diesem Fall aus der Steckdose?

Lösung: (a) Mit $k = \dfrac{n_2}{n_1} = 5$ ist $U_\mathrm{min} = \dfrac{U_0}{k^3} = 1{,}84\,\mathrm{V}$ und $U_\mathrm{max} = U_0 \cdot k^3 = 28\,750\,\mathrm{V}$.

(b) $U = \dfrac{U_0}{k^2} = 9{,}2\,\mathrm{V}$



Ist I_L der Strom, der bei $U_\mathrm{L} = 10\,\mathrm{V}$ durch die Lampe fließt und R der Widerstand der Lampe, dann gilt:

$$P_\mathrm{L} = U_\mathrm{L} I_\mathrm{L} \quad \Longrightarrow \quad I_\mathrm{L} = \frac{P_\mathrm{L}}{U_\mathrm{L}} = 2{,}0\,\mathrm{A}$$

$$R = \frac{U_\mathrm{L}}{I_\mathrm{L}} = 5{,}0\,\Omega$$

Bei $U = 9{,}2\,\mathrm{V}$ fließt der Strom $I = \dfrac{U}{R} = 1{,}84\,\mathrm{A}$ durch die Lampe.

$$I_\mathrm{s} = \frac{I}{k^2} = 0{,}074\,\mathrm{A} = 74\,\mathrm{mA}$$

Teil II.

Elektrostatik S2

8. Das elektrische Feld

1. In Muskel- und Nervenzellen besteht eine elektrische Spannung quer durch die Zellmembran. Die Größe der Spannung beträgt $90mV$ im Ruhezustand, die Dicke der Membran beträgt $4 - 5nm$. Berechne die Feldstärke, die über der Zellmembran herrscht und bewerte das Ergebnis.

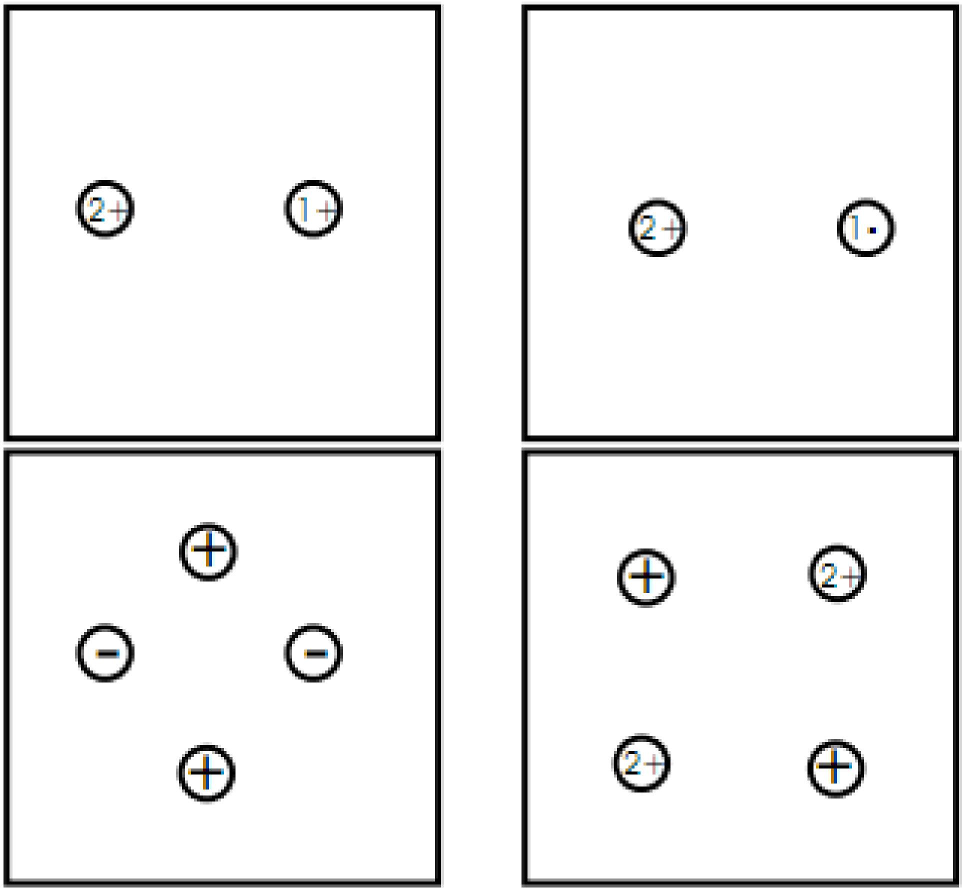
Lösung: $E \approx 2 \cdot 10^7 \frac{V}{m}$, die Feldstärke ist größer als bei einem Blitz; die Durchschlagfeldstärke der Membran ist sehr hoch

2. Ein durch Reibung aufgeladener Kamm trägt eine Ladung von $Q = 10^{-7}C$. Schätze die Feldstärke in der Umgebung des Kammes ab.

Lösung: Oberfläche = 2· Fläche des Kammes $\approx 2 \cdot (15cm \cdot 2,5cm) \approx 10^{-2}m^2 \Rightarrow \sigma = 10^{-5}\frac{C}{m^2} \Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 6 \cdot 10^5 \frac{V}{m}$

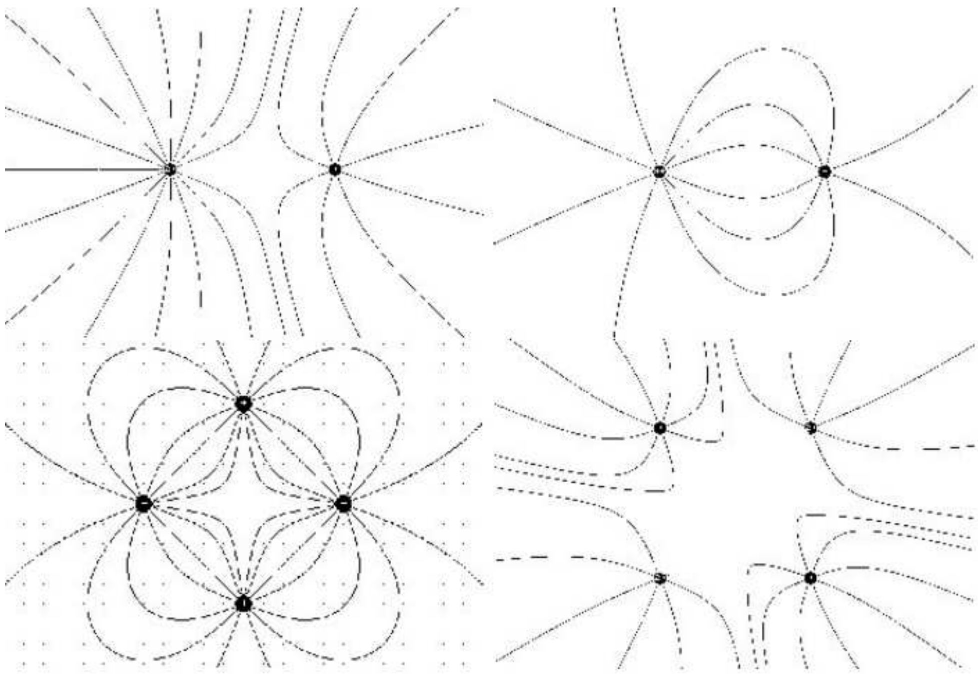
Der Wert ist plausibel, denn in der Nähe eines geladenen Kammes knistert es, d. h. die Durchschlagsfeldstärke von Luft wird überschritten.

3. Zeichne für folgende Ladungensverteilungen die Feldlinien ein.



Quelle: Elektrodynamik Sommer 2003, Prof. Thomas Müller, Universität Karlsruhe, Blatt 1

Lösung: .



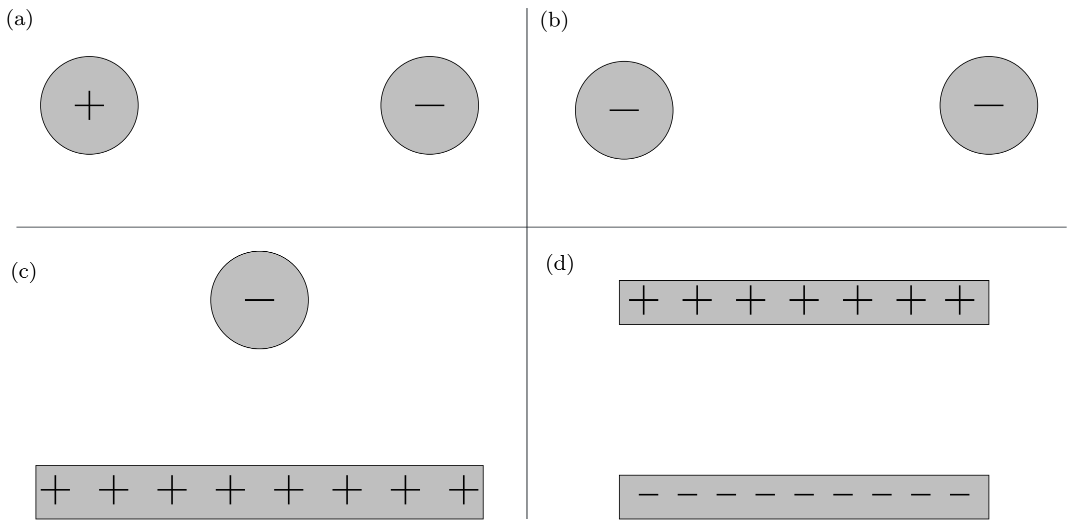
4. Ein Öltröpfchen der Masse $3 \cdot 10^{-11} g$ schwebt in einem Kondensator mit vertikalen Feldlinien. Die Kondensatorspannung beträgt $7400 V$, der Plattenabstand $12 mm$. Wie viele Elementarladungen sind auf dem Tröpfchen?

Lösung: 3

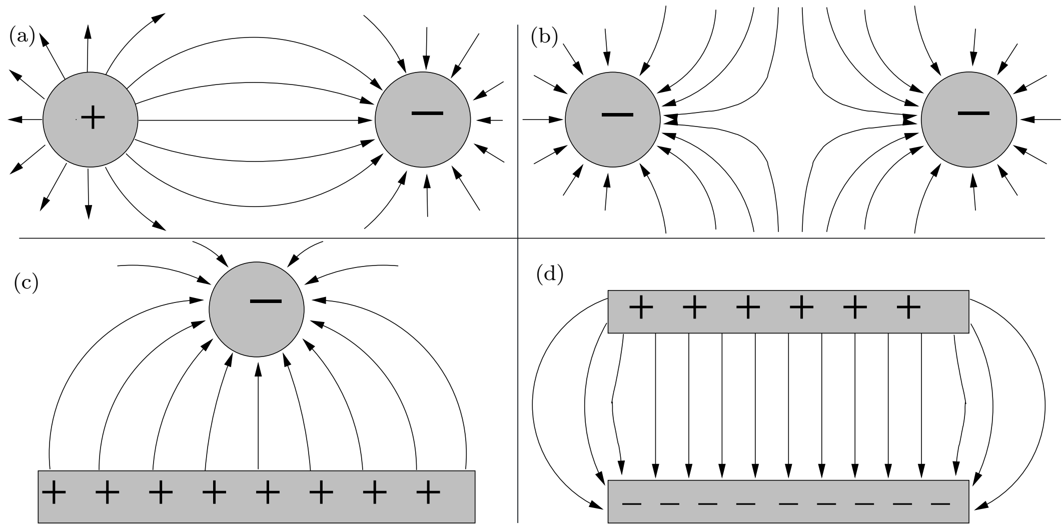
5. Finde im WWW fünf Seiten über Elmsfeuer. Davon sollten drei möglichst gut und zwei möglichst schlecht sein. Nenne die Gründe für deine Bewertung.

Lösung:

6. Zeichne die Feldlinienbilder folgender Ladungsverteilungen (Leiter sind grau). Achte auf Symmetrien.



Lösung:



7. $\vec{E}_1(\vec{r})$, ... , $\vec{E}_n(\vec{r})$ seien die Feldstärken der Punktladungen Q_1, ... , Q_n am Ort $\vec{r}$. Beweise das Superpositionsprinzip für Feldstärken:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{E}_\nu(\vec{r})}$$

Lösung: Das Superpositionsprinzip gilt für Kräfte und damit auch für Feldstärken (q ist eine Testladung am Ort $\vec{r}$ und $\vec{F}(\vec{r})$ ist die Kraft auf q):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} = \frac{1}{q} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu(\vec{r}) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\vec{F}_\nu(\vec{r})}{q} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{E}_\nu(\vec{r})$$

8. Welche Beschleunigung erhält eine kleine Alukugel der Masse $m = 0{,}50\,\mathrm{g}$ mit der Ladung $Q = 2{,}0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$ in einem elektrischen Feld der Feldstärke $E = 4{,}0 \cdot 10^{4}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$?

Lösung: $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{Q\,E}{m} = 0{,}16\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

9. Eine Kugel der Masse $m = 0{,}100\,\mathrm{g}$ trägt die Ladung $Q = 5{,}00 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ und hängt an einem $l = 2{,}00\,\mathrm{m}$ langen Faden. Die horizontale Auslenkung der Kugel in einem waagrechten und homogenen elektrischen Feld der Stärke E beträgt $x = 2{,}50\,\mathrm{cm}$. Berechne E!

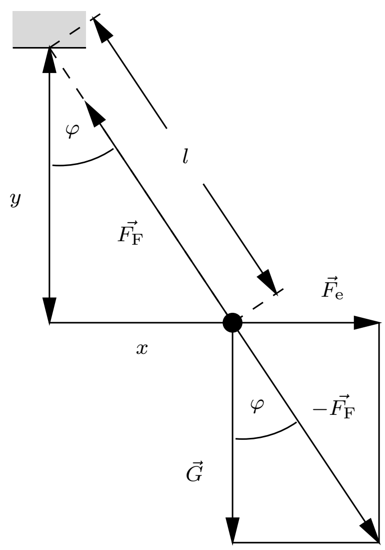
Lösung: Die Kugel ist in Ruhe, d.h. die Gesamtkraft auf die Kugel ist null ($\vec{F}_\mathrm{F}$ ist die Fadenkraft):

$$\vec{F}_\mathrm{e} + \vec{G} + \vec{F}_\mathrm{F} = 0$$

Damit ist $-\vec{F}_\mathrm{F}$ parallel zum Faden und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt

$$\frac{F_\mathrm{e}}{G} = \frac{Q\,E}{m\,g} = \frac{x}{y} = \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}$$

$$E = \frac{x\,m\,g}{Q\,\sqrt{l^2 - x^2}} = 245\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$



10. (a) Ein elektrisches Feld mit dem Betrag $E = 3{,}00 \cdot 10^{4}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ zeigt in die Richtung von $\mathrm{P}\,(-2{,}00\,\mathrm{m}|3{,}00\,\mathrm{m}|1{,}00\,\mathrm{m})$ nach $\mathrm{Q}\,(-5{,}00\,\mathrm{m}|-3{,}00\,\mathrm{m}|4{,}00\,\mathrm{m})$. Berechne $\vec{E}$.

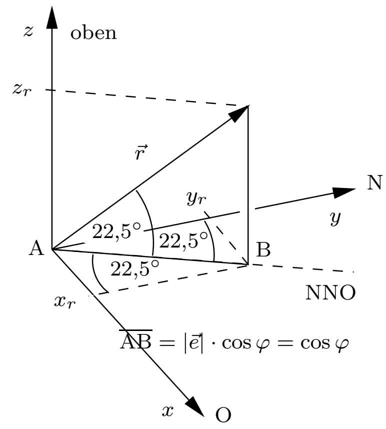
(b) Ein Flugzeug startet mit $v = 2{,}30 \cdot 10^{2}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ genau nach NNO mit einem Steigungswinkel von $\varphi = 22{,}5°$ gegen den Boden. Berechne $\vec{v}$.

Lösung: (a) Der Einheitsvektor in Feldrichtung ist $\vec{e} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\mathrm{PQ}|} = \dfrac{1}{3\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{E} = E \cdot \vec{e} = 5000\sqrt{6}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}22 \cdot 10^4 \\ -2{,}45 \cdot 10^4 \\ 1{,}22 \cdot 10^4 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

(b) $\vec{e}$ ist ein Einheitsvektor, der in die Richtung von $\vec{v}$ zeigt. Mit $\varphi = 22{,}5°$ und $|\vec{e}| = 1$ folgt aus der Abbildung $\overline{\mathrm{AB}} = \cos\varphi$ und damit

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\varphi \\ \cos^2\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$



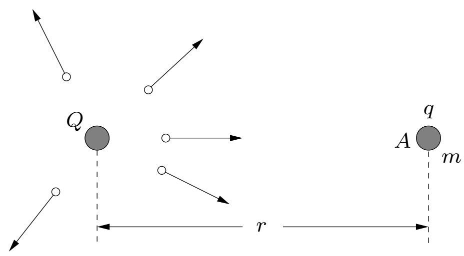
Probe:

$$e = |\vec{e}| = \sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^4\varphi + \sin^2\varphi} =$$
$$= \sqrt{\cos^2\varphi\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{1} + \sin^2\varphi} = 1$$

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e} = v \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\varphi \\ \cos^2\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81{,}3 \\ 196 \\ 88{,}0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

11. **Informationstheoretisches Modell der elektrischen Wechselwirkung**

In der Zeit Δt sendet jede Elementarladung $\Delta n = \alpha\Delta t$ Informationspakete (IPAs) gleichmäßig in alle Richtungen verteilt aus. Jedes Teilchen der Ladung q und der Masse m hat pro Elementarladung die „Antennenfläche“ A_0. Jedes IPA, das von einer Ladung Q ausgesandt wurde und auf die gesamte Antennenfläche A des Teilchens trifft, übermittelt die Information (m_e ist die Elektronenmasse):



$$\boxed{\text{„Erhöhe deine Geschwindigkeit in meine Bewegungsrichtung um } \frac{v_0 m_\mathrm{e}}{m}\text{, wenn du gleichnamig geladen bist wie mein Absender, sonst in die Gegenrichtung.“}}$$

(a) Beantworte zunächst folgende Fragen

- Wie viele IPAs Δn_Q sendet ein Teilchen A mit der Ladung Q in der Zeit Δt aus?
- Welche Antennenfläche A hat ein Teilchen B der Ladung q?
- Wie viele IPAs Δn_q treffen auf Teilchen B, wenn $\overline{\mathrm{AB}} = r$ ist?
- Welche Geschwindigkeitsänderung Δv erfährt B in der Zeit Δt?

und zeige dann, dass unser Modell das Coulombgesetz erklärt. Beweise dabei den Zusammenhang $A_0 \alpha v_0 m_\mathrm{e} \varepsilon_0 = e^2$.

(b) Wir nehmen an, dass eine Elementarladung pro Planckzeit $t_{\mathrm{p}} = 1{,}35 \cdot 10^{-43}\,\mathrm{s}$ ein IPA aussendet. Wie groß ist dann α? Für A_0 wählen wir die „klassische Elektronenfläche“ $A_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{m}^2$. Berechne v_0.

(c) Welche Abweichungen vom Coulombgesetz ergeben sich mit unserem Modell für große Entfernungen? Berechne dazu die Zahl der IPAs, die pro Sekunde an der Wechselwirkung zweier Elektronen in der Entfernung $r = 3{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ beteiligt sind. Vergleiche auch die Beschleunigungen a_{Coulomb} und a_{IPA} eines der beiden Elektronen, die nach beiden Theorien zu erwarten sind.

Lösung: (a) $\Delta n_Q = \dfrac{Q}{e} \cdot \alpha \Delta t$

$A = \dfrac{q}{e} \cdot A_0$

$\Delta n_q = \dfrac{A}{4\pi r^2} \Delta n_Q = \dfrac{qA_0}{4\pi e r^2} \cdot \dfrac{Q\alpha\Delta t}{e} = \dfrac{qQA_0\alpha\Delta t}{4\pi e^2 r^2}$

$\Delta v = \Delta n_q \cdot \dfrac{v_0 m_{\mathrm{e}}}{m} = \dfrac{qQA_0\alpha v_0 m_{\mathrm{e}}\Delta t}{4\pi m e^2 r^2}$

Kraft auf B: $F = ma = m \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{A_0\alpha v_0 m_{\mathrm{e}}}{4\pi e^2} \cdot \dfrac{qQ}{r^2}$. Das entspricht genau dem Coulombgesetz, wenn

$$\varepsilon_0 = \frac{e^2}{A_0\alpha v_0 m_{\mathrm{e}}} \quad \text{oder} \quad A_0\alpha v_0 = \frac{e^2}{m_{\mathrm{e}}\varepsilon_0}$$

ist.

(b) $\alpha = \dfrac{1}{t_{\mathrm{p}}} = 7{,}4 \cdot 10^{42}\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}, \qquad v_0 = \dfrac{e^2}{m_{\mathrm{e}}\varepsilon_0 A_0\alpha} = 1{,}7 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

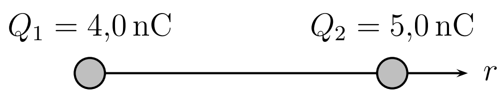
(c) $A = A_0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\Delta n_q}{\Delta t} = \dfrac{e^2 A_0\alpha}{4\pi e^2 r^2} = \dfrac{A_0\alpha}{4\pi r^2} = 1{,}0\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}$

Die Wechselwirkung mit den IPAs erfolgt für große Entfernungen sprunghaft!

$a_{\mathrm{Coulomb}} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2 m_{\mathrm{e}}} = 1{,}754 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \quad a_{\mathrm{IPA}} = \dfrac{v_0}{1\,\mathrm{s}} = 1{,}724 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

9. Das Coulombsche Gesetz

1. Bei $r = 0$ befindet sich eine Ladung $Q_1 = 4{,}0\,\mathrm{nC}$ und bei $r = 40\,\mathrm{cm}$ eine Ladung $Q_2 = 5{,}0\,\mathrm{nC}$ ortsfest, so dass sie sich nicht bewegen können.

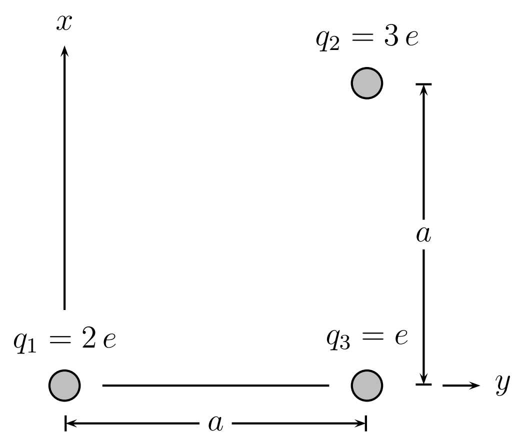


Wo muss eine Ladung Q platziert werden, damit sie sich nicht bewegt? Welchen Betrag und welches Vorzeichen muss Q haben?

Lösung: $\dfrac{Q_1\,Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r^2} = \dfrac{Q_2\,Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,(40\,\mathrm{cm} - r)^2} \quad \Rightarrow \quad Q_2\,r^2 = Q_1\,(40\,\mathrm{cm} - r)^2$

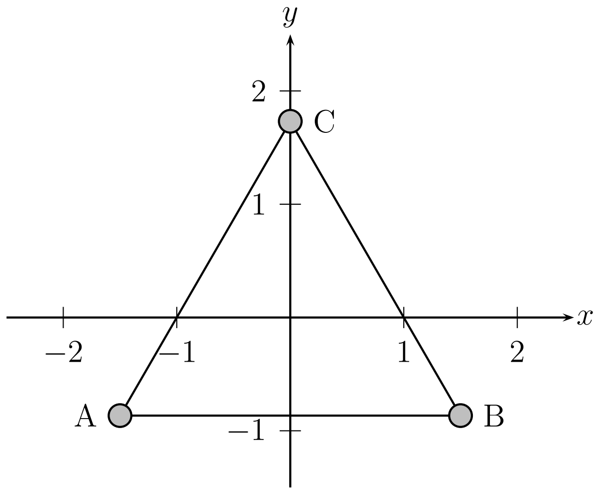
Die Lösungen dieser Gleichung sind $r = \left(-80\sqrt{5} - 160\right)\,\mathrm{cm} \approx -3{,}4\,\mathrm{m}$ oder $r = \left(80\sqrt{5} - 160\right)\,\mathrm{cm} \approx 19\,\mathrm{cm}$.

2. In $(0|0)$ befindet sich die Ladung $q_1 = 2\,e$, in $(a|a)$ die Ladung $q_2 = 3\,e$. q_1 und q_2 sind ortsfest. Bestimme Richtung und Betrag der Kraft, die $q_3 = e$ in $(a|0)$ erfährt in Abhängigkeit von a. Welche Beschleunigung würde die Ladung in q_1 erfahren, wenn es sich dabei um ein Proton handelt und $a = 10\,\mathrm{cm}$ ist?



Lösung: Richtung: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, Betrag: $\dfrac{\sqrt{13}\,e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a^2}$, Beschleunigung: $5{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{ms}^{-2}$.

3. In den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ΔABC der Seitenlänge $a = 3{,}0\,\mathrm{cm}$ befinden sich drei Elektronen.
   (a) Berechne den Betrag und die Richtung der Kraft auf das Elektron in B.
   (b) Welche Ladung müsste man in den Ursprung setzen, damit sich die Anordnung im Gleichgewicht befindet?



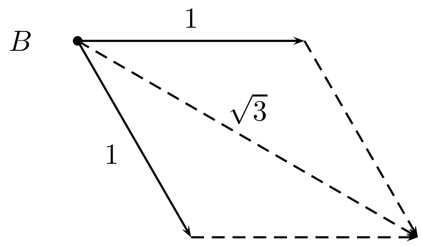
Lösung: (a) $A\left(-1{,}5\middle| -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(1{,}5\middle| -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), C\left(0\middle|\sqrt{3}\right)$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CB} &= \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{(-e)^2}{a^2}\,\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{(-e)^2}{a^2}\,\frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}\\
&= \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{a^2}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}\right)\\
&= \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{a^2}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}\right]\\
&= \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{a^2}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also ist die Richtung $\begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ und der Betrag $\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{a^2}\,\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{a^2} = 4{,}4 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{N}$.

Alternative:

Mit dem Kosinussatz erhält man für die Länge der Diagonalen $\sqrt{1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos(120^\circ)} = \sqrt{3}$.
Also ist die Summe der beiden Kräfte auf die Ladung in B $\sqrt{3}$–mal so groß wie eine einzelne Kraft. Somit ist die Kraft auf die Ladung in B:



$$F_B = \sqrt{3}\,\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{a^2}$$

(b) Die Richtung von $\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CB}$ und von $\overrightarrow{BO}$ sind entgegengerichtet.

$$\frac{3\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,e}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}$$
$$\frac{3\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a^2} = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,e}{a^2}$$
$$\sqrt{3}\,e = q$$

Bemerkung: Eine solche Ladung existiert nicht, da frei vorkommende Ladungen nur als ganzzahlige Vielfache der Elementarladung e vorkommen.

4. Coulombgesetz
   (a) Wie viel mal kleiner als die coulombsche Abstoßung ist die Gravitationskraft zwischen zwei Protonen?
   (b) Wie groß ist die Abstoßungskraft von zwei Ladungen von $1C$ im Abstand von $1m$? Finde einen anschaulichen Vergleich, der zeigt, ob das eine große oder eine kleine Kraft ist.
   (c) Welche Gemeinsamkeiten und Unterchiede bestehen zwischen Coulomb- und Gravitationsgesetz?

Lösung: (a) $1,25 \cdot 10^{36}$

(b) $F = 9 \cdot 10^9 N$; um eine Gewichtskraft mit gleicher Stärke zu erhalten benötigt man eine Masse von $10^9 kg$, etwas der Masse von einer Million PKWs.

(c) Gemeinsamkeiten:

- wirkt ohne mechanischen Kontakt und materielles Medium
- zwei Wechselwirkungspartner (Ladung/Masse)
- Kraftrichtung parallel zur Verbindungsrichtung der Quellen
- Superpositionsprinzip
- Abstandsgesetz $\frac{1}{r^2}$

Unterschiede:

	Coulombkraft	Graviationskraft
Ursache	zwei Ladungen	zwei Massen
Kraftrichtung	Anziehung und Abstoßung	nur Anziehung
Stärke	groß	klein
Abschirmbarkeit	ja	nein
Bedeutung	Zusammenhalt der Atome, Moleküle, Kristalle	Zusammenhalt des Makrokosmos

5. Mit welcher Kraft stoßen sich zwei Protonen in einem Heliumkern (Abstand $\approx 10^{-15}m$) ab? Ist das viel oder wenig?

Lösung: $F = 230N$, entspricht der Gewichtskraft einer Masse $23kg$, (z. B. $23l$ Wasser, Schäferhund, Kleinkind). Dies ist in Anbetracht der kleinen Protonenmasse sehr groß.

6. Zwei Punktladungen $Q_1 = Q_2 = 10^{-9}C$ befinden sich auf der x-Achse bei $x_1 = -3cm$ und bei $x_2 = 3cm$.
   (a) Eine dritte Punktladung $Q_3 = 10^{-9}C$ hat von den Ladungen den gleichen Abstand und liegt nicht unbedingt auf der x-Achse. Wie groß ist die auf die Ladung wirkende Kraft?
   (b) Die Ladung Q_3 befinde sich nun auf der x-Achse bei x. Skizziere den Verlauf der Kraft F(x) auf die Ladung Q_3.

Lösung: (a) Q_3 liegt in der Symmetrieebene von Q_1 und Q_2 mit Abstand r zum Koordinatenursprung $\Rightarrow$
$F_a = \frac{2r}{0{,}03m} \cdot \frac{Q_1Q_3}{4\pi\varepsilon_0 \cdot ((0{,}03m)^2+r^2)} = 6 \cdot 10^{-7} Nm \frac{r}{(0{,}03m)^2+r^2}$

(b) 1. Fall: $-0,03m < x < 0,03m \Rightarrow F_b = \frac{Q_1Q_3}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{(0{,}03m+x)^2} - \frac{1}{(0{,}03m-x)^2}) = -5,4 \cdot 10^{-10} Nm^3 \frac{x}{((0{,}03m)^2-x^2)^2}$

2. Fall: $0,03m < x \Rightarrow F_b = \frac{Q_1Q_3}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{(0{,}03m+x)^2} + \frac{1}{(0{,}03m-x)^2}) = 1,8 \cdot 10^{-8} Nm^2 \frac{(0{,}03m)^2+x^2)}{((0{,}03m)^2-x^2)^2}$

3. Fall: $0,03m < x \Rightarrow F_b = -\frac{Q_1Q_3}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{(0{,}03m+x)^2} - \frac{1}{(0{,}03m-x)^2}) = -1,8 \cdot 10^{-8} Nm^2 \frac{(0{,}03m)^2+x^2)}{((0{,}03m)^2-x^2)^2}$

7. Wie groß müsste die Masse eines Elektrons sein, damit die Gravitationskraft zwischen zwei Elektronen ebenso groß ist wie die Coulombkraft?

Lösung: $m = 1,86 \cdot 10^{-9kg}$

8. Zwei Protonen in einem Atomkern haben die gegenseitige Entfernung $r = 2{,}6 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$. Mit welcher Kraft stoßen sich die beiden Protonen ab? Wie groß wäre die Beschleunigung der Protonen, wenn keine anziehenden Kernkräfte vorhanden wären?

Lösung: $F = \dfrac{e^2}{4\,\pi\varepsilon_0\,r^2} = 34\,\mathrm{N}, \quad a = \dfrac{F}{m_\mathrm{p}} = 2{,}0 \cdot 10^{28}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

9. (a) Welche Beschleunigung erfährt ein Elektron ($m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$) in der Entfernung $d = 0{,}30\,\mathrm{nm}$ von einem He4-Kern (2 Protonen)?

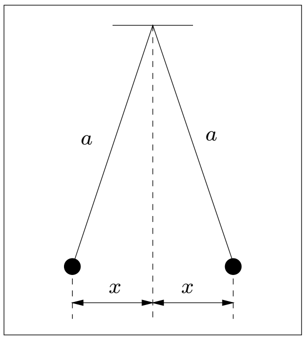
(b) Einer Kupferkugel der Masse $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ werden alle Elektronen entzogen und auf eine gleichartige Kugel transportiert. Mit welcher Kraft ziehen sich die beiden Kugeln an, wenn die Entfernung ihrer Mittelpunkte dem dreifachen Radius einer Kugel entspricht?

Lösung: (a) $a = \dfrac{2\,e\cdot e}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2\,m_\mathrm{e}} = 5{,}6\cdot 10^{21}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

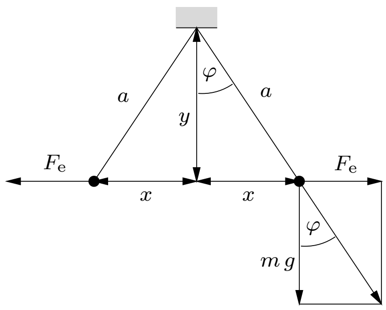
(b) Mit $m = 1\,\mathrm{kg}$, $\varrho_\mathrm{Cu} = 8930\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, der Masse $M = 1{,}06\cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$ eines Kupferatoms und der Ordnungszahl 29 von Kupfer folgt $Q = \dfrac{29\cdot e\cdot 1\,\mathrm{kg}}{M} = 4{,}4\cdot 10^7\,\mathrm{C}$. Der Radius einer Kugel ist $R = \left(\dfrac{3\,m}{4\,\pi\,\varrho_\mathrm{Cu}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3{,}0\,\mathrm{cm}$.

$$F = \frac{Q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(3R)^2} = 2{,}1\cdot 10^{27}\,\mathrm{N}$$

10. Zwei gleiche Alukugeln (jede hat die Masse $m = 2{,}0\,\mathrm{g}$) hängen an Fäden der Länge $a = 2{,}0\,\mathrm{m}$. Die sich berührenden Kugeln werden geladen (wie stellt man das an?) und stoßen sich dann ab. Berechne die Ladung Q einer Kugel aus $x = 2{,}6\,\mathrm{cm}$!



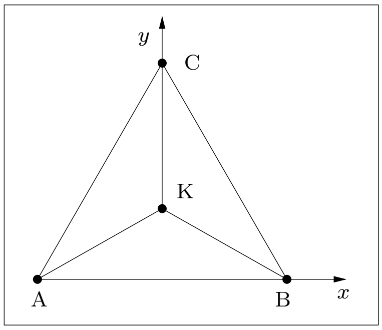
Lösung: Laden der Kugeln: Mit einem Pol der Spannungsquellen verbinden, den anderen Pol erden!



$$\frac{F_\mathrm{e}}{m\,g} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad F_\mathrm{e} = \frac{k\,Q^2}{(2\,x)^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad Q = \sqrt{\frac{4\,m\,g\,x^3}{k\,\sqrt{a^2 - x^2}}} = 8{,}8\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$$

11. An den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a sitzt je ein Elektron, im Schwerpunkt K des Dreiecks ruhen drei Protonen („Atomkern“). Berechne die Kräfte (Betrag und vektoriell) auf die Elektronen und auf den Kern! Für welche Kernladung wäre das System im Gleichgewicht?

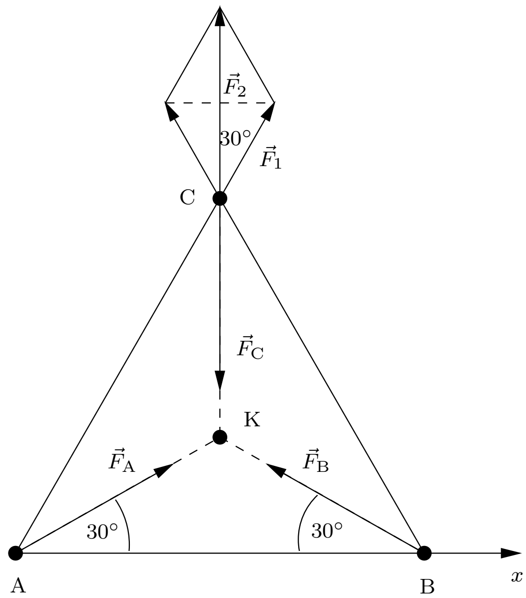


Lösung: Der Betrag der Kraft des Elektrons A auf das Elektron C ist $F_1 = \dfrac{k\,e^2}{a^2}$. Die Elektronen A und B üben auf das Elektron C die Kraft F_2 aus:

$$F_2 = 2 \cdot F_1 \cos 30° = \\ = 2 \cdot F_1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{k\,e^2\sqrt{3}}{a^2}$$

Der Betrag der Gesamtkraft auf das Elektron C ist mit $r = \overline{\mathrm{KC}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$$F_\mathrm{C} = F_\mathrm{Kern} - F_2 = \\ = \frac{k \cdot 3\,e \cdot e}{r^2} - \frac{k\,e^2\sqrt{3}}{a^2} = \frac{k\,e^2}{a^2}\,(9 - \sqrt{3})$$



Wegen $F_\mathrm{A} = F_\mathrm{B} = F_\mathrm{C}$ ist

$$\vec{F}_\mathrm{A} = \frac{F_\mathrm{C}}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{F}_\mathrm{B} = \frac{F_\mathrm{C}}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{F}_\mathrm{C} = F_\mathrm{C}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

Die Gesamtkraft auf den Kern ist $F_\mathrm{K} = -(F_\mathrm{A} + F_\mathrm{B} + F_\mathrm{C}) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Das System ist im Gleichgewicht, wenn

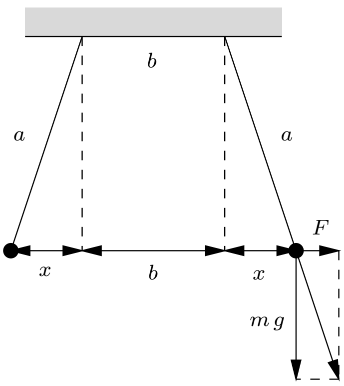
$$F_\mathrm{C} = \frac{3\,k \cdot Q_\mathrm{Kern}\,e}{a^2} - \frac{k\,e^2\sqrt{3}}{a^2} = 0, \quad \text{d.h. für} \quad Q_\mathrm{Kern} = \frac{e}{\sqrt{3}}$$

12. Zwei Schaumstoffkügelchen der jeweiligen Masse $m = 0{,}20\,\mathrm{g}$ hängen an Fäden der Länge $a = 1{,}0\,\mathrm{m}$, die Aufhängepunkte der Fäden sind $b = 15\,\mathrm{cm}$ voneinander entfernt. Berechne die Entfernung der Kugelmittelpunkte, wenn jede Kugel die Ladung $Q = 8{,}9 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$ trägt.

Lösung:

$$\frac{F}{m\,g}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad F=\frac{k\,Q^2}{(2\,x+b)^2}$$

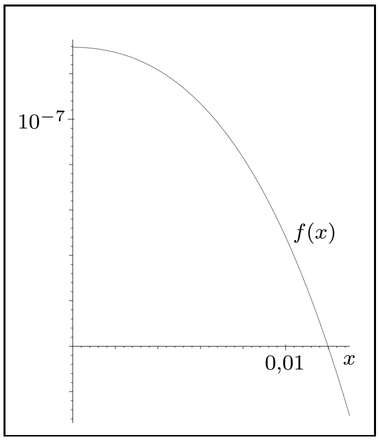
$$\Longrightarrow\quad F=\frac{m\,g\,x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{k\,Q^2}{(2\,x+b)^2}$$



Quadrieren und umformen:

$$f(x)=\left(\frac{k\,Q^2}{m\,g}\right)^2\cdot\left(a^2-x^2\right)-x^2\cdot(2\,x+b)^4=0$$

Zur Lösung dieser Gleichung zeichnet man $f(x)$ und verbessert die gefundene Nullstelle durch Probieren mit dem Taschenrechner: $x\approx 1{,}2\,\text{cm}$



13. Welche Kraft (Betrag und Vektor) übt die Ladung Q_1 am Ort R auf die Ladung Q_2 am Ort S aus?
    (a) $Q_1=1{,}69\cdot10^{-9}\,\text{C}$, $\text{R}\,(2{,}00\,\text{cm}|1{,}00\,\text{cm}|3{,}00\,\text{cm})$
    $Q_2=2{,}60\cdot10^{-9}\,\text{C}$, $\text{S}\,(5{,}00\,\text{cm}|5{,}00\,\text{cm}|15{,}00\,\text{cm})$
    (b) $Q_1=5{,}07\cdot10^{-9}\,\text{C}$, $\text{R}\,(2{,}00\,\text{cm}|1{,}00\,\text{cm}|3{,}00\,\text{cm})$
    $Q_2=-5{,}20\cdot10^{-9}\,\text{C}$, $\text{S}\,(-10{,}00\,\text{cm}|4{,}00\,\text{cm}|-1{,}00\,\text{cm})$

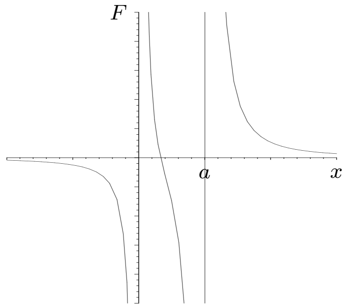
Lösung: (a) $$\vec e=\frac{\overrightarrow{\text{RS}}}{\left|\overrightarrow{\text{RS}}\right|}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix},\quad \vec F=\underbrace{\frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\left|\overrightarrow{\text{RS}}\right|^2}}_{2{,}34\cdot10^{-6}\,\text{N}}\cdot\vec e=\begin{pmatrix}5{,}39\\7{,}19\\21{,}6\end{pmatrix}\cdot10^{-7}\,\text{N}$$

(b) $$\vec e=\frac{\overrightarrow{\text{RS}}}{\left|\overrightarrow{\text{RS}}\right|}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-12\\3\\-4\end{pmatrix},\quad \vec F=\underbrace{\frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\left|\overrightarrow{\text{RS}}\right|^2}}_{-1{,}40\cdot10^{-5}\,\text{N}}\cdot\vec e=\begin{pmatrix}12{,}9\\-3{,}24\\4{,}31\end{pmatrix}\cdot10^{-6}\,\text{N}$$

14. Auf der x-Achse eines Koordinatensystems sitzen die Ladungen Q_1 und Q_2, Q_1 bei $x_1 = 0$ und Q_2 bei $x_2 = a$. $F(x)$ ist die Kraft auf eine positive Probeladung q, die sich auf der x-Achse am Ort x befindet. Schreibe $F(x)$ hin, zeichne ein qualitatives xF-Diagramm ($F < 0$, wenn F nach links zeigt) und suche den Ort x_0, an dem $F(x)$ Null ist:

(a) $Q_2 = 4\,Q_1 \quad , \quad Q_1 > 0$ (b) $Q_2 = -4\,Q_1 \quad , \quad Q_1 > 0$

Lösung: (a) $F(x) = \dfrac{k\,Q_1\,q}{x^2} \cdot \operatorname{sgn}(x) + \dfrac{k\,Q_2\,q}{(x-a)^2} \cdot \operatorname{sgn}(x-a)$



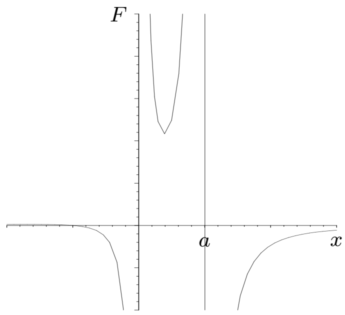
$$F(x) = \begin{cases} -k\,q\,Q_1 \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{(x-a)^2} \right) & \text{für } x < 0 \\ k\,q\,Q_1 \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{(x-a)^2} \right) & \text{für } 0 < x < a \\ k\,q\,Q_1 \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{(x-a)^2} \right) & \text{für } x > a \end{cases}$$

Für $x < 0$ ist $F(x) < 0$ und für $x > a$ ist $F(x) > 0$, d.h. Nullstelle von F nur im Bereich $0 < x < a$:

$$\Longrightarrow 4\,x^2 = (x-a)^2 \quad \Longrightarrow \quad |2\,x| = |x-a|$$

$$\Longrightarrow 2\,x = a - x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a}{3}$$

(b) $F(x) = \dfrac{k\,Q_1\,q}{x^2} \cdot \operatorname{sgn}(x) + \dfrac{k\,Q_2\,q}{(x-a)^2} \cdot \operatorname{sgn}(x-a)$



$$F(x) = \begin{cases} -k\,q\,Q_1 \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{(x-a)^2} \right) & \text{für } x < 0 \\ k\,q\,Q_1 \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{(x-a)^2} \right) & \text{für } 0 < x < a \\ k\,q\,Q_1 \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{(x-a)^2} \right) & \text{für } x > a \end{cases}$$

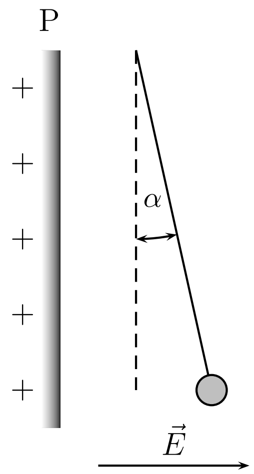
Für $0 < x < a$ ist $F(x) > 0$ und für $x > a$ ist $F(x) < 0$, d.h. Nullstelle von F nur im Bereich $x < 0$:

$$\Longrightarrow 4\,x^2 = (x-a)^2 \quad \Longrightarrow \quad |2\,x| = |x-a|$$

$$\Longrightarrow -2\,x = a - x \quad \Longrightarrow \quad x = -a$$

10. Das Feld von Punktladungen

1. Eine sehr große positiv geladene Platte P erzeugt ein (nahezu) konstantes elektrisches Feld der Stärke $E = 5{,}0 \cdot 10^4 \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$. In diesem Feld befindet sich ein geladenes Kügelchen der Masse $m = 2{,}0\,\mathrm{mg}$, das aus der Ruhelage um den Winkel $\alpha = 1{,}2^\circ$ ausgelenkt ist. Berechne die Ladung q des Kügelchens.



Lösung: $\tan\alpha = \dfrac{q\,E}{m\,g} \quad \Rightarrow \quad q = \dfrac{m\,g\,\tan\alpha}{E} = 8{,}2\,\mathrm{nC}.$

2. Coulombgesetz
   (a) Wie viel mal kleiner als die coulombsche Abstoßung ist die Gravitationskraft zwischen zwei Protonen?
   (b) Wie groß ist die Abstoßungskraft von zwei Ladungen von $1C$ im Abstand von $1m$? Finde einen anschaulichen Vergleich, der zeigt, ob das eine große oder eine kleine Kraft ist.
   (c) Welche Gemeinsamkeiten und Unterchiede bestehen zwischen Coulomb- und Gravitationsgesetz?

Lösung: (a) $1,25 \cdot 10^{36}$

(b) $F = 9 \cdot 10^9 N$; um eine Gewichtskraft mit gleicher Stärke zu erhalten benötigt man eine Masse von $10^9 kg$, etwas der Masse von einer Million PKWs.

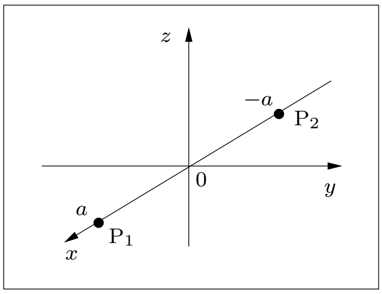
(c) Gemeinsamkeiten:
- wirkt ohne mechanischen Kontakt und materielles Medium
- zwei Wechselwirkungspartner (Ladung/Masse)
- Kraftrichtung parallel zur Verbindungsrichtung der Quellen
- Superpositionsprinzip

- Abstandsgesetz $\frac{1}{r^2}$

Unterschiede:

	Coulombkraft	Graviationskraft
Ursache	zwei Ladungen	zwei Massen
Kraftrichtung	Anziehung und Abstoßung	nur Anziehung
Stärke	groß	klein
Abschirmbarkeit	ja	nein
Bedeutung	Zusammenhalt der Atome, Moleküle, Kristalle	Zusammenhalt des Makrokosmos

3. Die Punktladungen $Q_1 = Q$ und $Q_2 = -Q$ sitzen an den Orten $\mathrm{P}_1\,(a|0|0)$ und $\mathrm{P}_2\,(-a|0|0)$. Das von Q_1 und Q_2 erzeugte Feld heißt **Dipolfeld**.



   (a) Drücke $\vec{E}(\vec{r})$ durch Q, x, y, z und a aus.

   (b) Berechne $\vec{E}(\vec{r_1})$ für $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$ cm,

   $a = 10\,\mathrm{cm}$ und $\dfrac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = 0{,}27\,\mathrm{Vm}$.

   (c) Berechne $\vec{E}(\vec{r})$ und $E(\vec{r}) = |\vec{E}(\vec{r})|$ auf der x-Achse, d.h. für $y = z = 0$. Unterscheide die Fälle $x < -a$, $-a < x < a$ und $x > a$. Skizziere die x-Koordinate $E_x(x)$ qualitativ für $Q > 0$. Mit welcher Potenz fällt $E(x)$ für $x \gg a$ ab?

   (d) Berechne $\vec{E}(\vec{r})$ und $E = |\vec{E}(\vec{r})|$ in der yz-Ebene, d.h. für $x = 0$. Mit welcher Potenz fällt $E(r)$ $(r = \sqrt{y^2 + z^2})$ für $r \gg a$ ab?

   (e) Berechne $\vec{E}(\vec{r})$ in der yz-Ebene, wenn $Q_1 = Q_2 = Q$ gilt. Mit welcher Potenz fällt $E(r)$ $(r = \sqrt{y^2 + z^2})$ für $r \gg a$ ab?

Lösung: (a) $$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x+a \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]$$

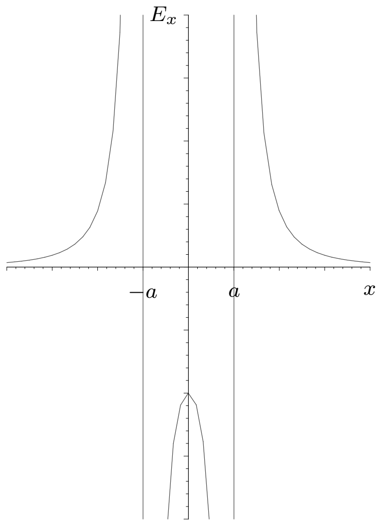
(b) $$\vec{E}(\vec{r_1}) = \begin{pmatrix} -0{,}06 \\ 2{,}2 \\ 2{,}2 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

(c) $$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{|x-a|^3} \begin{pmatrix} x-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{|x+a|^3} \begin{pmatrix} x+a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$E_y = E_z = 0,\; E_x(x) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{x-a}{|x-a|^3} - \frac{x+a}{|x+a|^3} \right),\; E(x) = |E_x(x)|$$

Drei Fälle für $E_x(x)$:

$$E_x(x) = \begin{cases} -\dfrac{Q\,a\,x}{\pi\,\varepsilon_0\,(x^2-a^2)^2} & \text{für } x < -a \\[2ex] -\dfrac{Q\,(x^2+a^2)}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,(x^2-a^2)^2} & \text{für } -a < x < a \\[2ex] \dfrac{Q\,a\,x}{\pi\,\varepsilon_0\,(x^2-a^2)^2} & \text{für } x > a \end{cases}$$



Für $x \gg a$ kann man a^2 in der Differenz im Nenner gegen x^2 vernachlässigen und es gilt

$$E(x) = |E_x(x)| \approx \frac{Q\,a}{\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x^3}$$

(d) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{-Q\,a}{2\,\pi\varepsilon_0 \cdot [a^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$|\vec{E}| = \frac{|Q\,a|}{2\,\pi\varepsilon_0 \cdot [a^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

(e) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{Q}{2\,\pi\varepsilon_0 \cdot [a^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

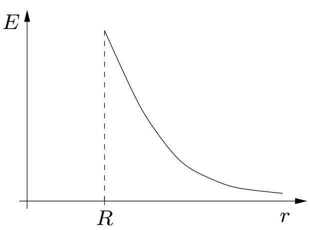
$$|\vec{E}| = \frac{|Q| \cdot \sqrt{x^2+y^2}}{2\,\pi\varepsilon_0 \cdot [a^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

11. Feld ausgedehnter Ladungen, Satz von Gauß

1. **Homogen geladene Kugelfläche**

   Berechne den Betrag $E(r)$ der Feldstärke im Innen- und Außenraum einer Kugel mit Radius R, deren Oberfläche gleichmäßig verteilt die Ladung Q trägt.
   Zeichne ein qualitatives rE-Diagramm.

Lösung: $Q(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq r < R \\ Q & \text{für } r > R \end{cases}$

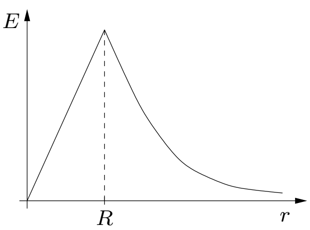


$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\,\pi\varepsilon_0\, r^2} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq r < R \\ \dfrac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\, r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

2. **Homogen geladene Kugel**

   Berechne den Betrag $E(r)$ der Feldstärke im Innen- und Außenraum einer Kugel mit Radius R, die gleichmäßig über das ganze Volumen verteilt die Ladung Q trägt.
   Zeichne ein qualitatives rE-Diagramm.

Lösung: $Q(r) = \begin{cases} Q \cdot \dfrac{r^3}{R^3} & \text{für } 0 \leqq r \leqq R \\ Q & \text{für } r > R \end{cases}$



$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\,\pi\varepsilon_0\, r^2} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\, R^3} \cdot r & \text{für } 0 \leqq r < R \\ \dfrac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\, r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

3. Für welche radialsymmetrische Ladungsverteilung $\varrho(r)$ ist das elektrische Feld im ganzen Raum **betragsmäßig** konstant? Warum ist dieses Feld trotzdem nicht homogen?

Lösung: Die Ladung in einer dünnen Kugelschale mit Radius r und der Dicke $\mathrm{d}r$ ist

$$\mathrm{d}Q = \varrho(r) \cdot 4\,\pi\, r^2\, \mathrm{d}r$$

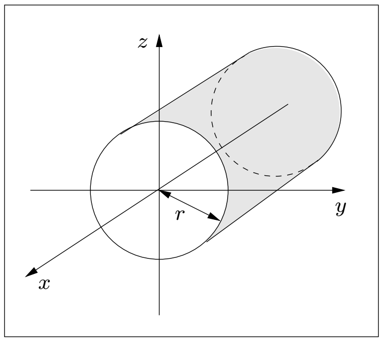
Ist $Q(r)$ die Gesamtladung innerhalb einer Kugel mit Radius r, dann ist also

$$Q'(r) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r} = 4\,\pi\, \varrho(r)\, r^2$$

Nach Gauss ist (E_0 ist das konstante Feld)

$$Q'(r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(4\,\pi\varepsilon_0\,E_0\,r^2\right) = 8\,\pi\varepsilon_0\,E_0\,r = 4\,\pi\,\varrho(r)\,r^2 \quad\Longrightarrow\quad \varrho(r) = \frac{2\,\varepsilon_0\,E_0}{r}$$

4. Eine Zylinderfläche mit Radius r um die x-Achse ist die Punktmenge



$$Z = \{\mathrm{P}(\,x\,|\,y\,|\,z\,)\,|\,y^2 + z^2 = r^2\}$$

Eine Ladungsverteilung heißt **zylindersymmetrisch**, wenn die Ladungsdichte $\varrho(r)$ auf jeder Zylinderfläche um die x-Achse konstant ist. Für welche zylindersymmetrische Ladungsverteilung $\varrho(r)$ ist das elektrische Feld im ganzen Raum **betragsmäßig** konstant? Verwende als Gauß'sche Fläche die Oberfläche eines Zylinders der Höhe h!

Lösung: Die Ladung in einer dünnen Schicht der Dicke dr auf dem Zylindermantel mit Radius r und Höhe h ist

$$\mathrm{d}Q = \varrho(r)\cdot 2\,\pi\,r\,h\,\mathrm{d}r$$

Ist $Q(r)$ die Gesamtladung innerhalb eines Zylinders mit Radius r und Höhe h, dann ist also

$$Q'(r) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r} = 2\,\pi\,\varrho(r)\,h\,r$$

Nach Gauss ist (E_0 ist das konstante Feld)

$$Q'(r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(2\,\pi\varepsilon_0\,E_0\,h\,r\right) = 2\,\pi\varepsilon_0\,E_0\,h = 2\,\pi\,\varrho(r)\,h\,r \quad\Longrightarrow\quad \varrho(r) = \frac{\varepsilon_0\,E_0}{r}$$

5. **Modell des Wasserstoffatoms**

Ein einfaches Modell des H-Atoms sieht folgendermaßen aus: Das Elektron ist eine homogen geladene Kugel ($R \approx 10^{-10}\,\mathrm{m}$), in deren Mittelpunkt das Proton (Punktladung) sitzt.

(a) Warum führt das Elektron eine harmonische Schwingung aus, wenn es etwas aus seiner Ruhelage ausgelenkt wird? Das Proton bleibt dabei wegen seiner sehr viel größeren Masse praktisch in Ruhe! Berechne die Frequenz f, mit der das Elektron schwingt.

(b) Welches äußere Feld muss am Ort des H-Atoms mindestens wirken, damit es ionisiert werden kann? Um welchen Bruchteil des Atomradiuses R verschiebt sich der Kern bei dem äußeren Feld $E^* = 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ aus seiner Ruhelage (**Polarisation**)?

Lösung: (a) Aus Aufgabe 2 folgt für das Feld des Elektrons

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{-e}{4\,\pi\varepsilon_0\,R^3}\cdot r & \text{für } 0 \leqq r < R \\ \dfrac{-e}{4\,\pi\varepsilon_0\,r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

In einem mit dem Elektron fest verbundenen Koordinatensystem wirkt dann für $r < R$ auf das Proton die Kraft

$$F(r) = E(r)\cdot e = -D\cdot r \quad \text{mit} \quad D = \frac{e^2}{4\,\pi\varepsilon_0\,R^3}$$

Nach Newton 3 (Actio gegengleich Reactio) wirkt dann in einem mit dem Proton verbundenen System die gleiche rücktreibende Kraft auf das Elektron. Da das Proton praktisch in Ruhe bleibt, ist als schwingende Masse die Elektronenmasse einzusetzen:

$$f = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{D}{m_\mathrm{e}}} = \frac{e}{4\,\pi\,R\sqrt{\pi\,\varepsilon_0\,m_\mathrm{e}\,R}} = 2{,}5\cdot 10^{15}\,\mathrm{Hz}$$

(b) Mit dem äußeren Feld E^* ist die Gesamtkraft auf das Proton

$$F_\mathrm{ges}(r) = E^*\,e - \frac{e^2}{4\,\pi\varepsilon_0\,R^3}\cdot r$$

$$F_\mathrm{ges}(r) = 0 \quad\Longrightarrow\quad r = \frac{4\,\pi\varepsilon_0\,R^3\,E^*}{e} = 6{,}9\cdot 10^{-17}\,\mathrm{m}$$

6. **Geladene Ebenen**

(a) Die xy-Ebene trägt eine Ladung mit der konstanten Flächenladungsdichte σ. Welches Feld $\vec{E}$ wird von dieser Ladungsverteilung erzeugt?

(b) Die xy-Ebene trägt eine Ladung mit der konstanten Flächenladungsdichte $\sigma_1 > 0$, die zur xy-Ebene parallele Ebene durch den Punkt P $(0|0|a)$ trägt eine Ladung mit $\sigma_2 = -\sigma_1$. Welches Feld $\vec{E}$ wird von dieser Ladungsverteilung erzeugt?

(c) Ein Kondensator besteht aus zwei kreisförmigen Platten (Radius r) im Abstand $d \ll r$; die Platten tragen gleichmäßig verteilt die Ladung Q bzw. $-Q$. Welches Feld herrscht zwischen den Platten?

Lösung: (a) $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\dfrac{|z|}{z}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\mathrm{sgn}(z)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(b) $\vec{E} = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ für $0 < z < a$, das Feld ist null für $z < 0$ und $z > a$.

(c) $\sigma = \dfrac{Q}{r^2\,\pi} \quad\Longrightarrow\quad E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0\,\pi\,r^2}$

7. Berechne die Feldstärke $E(r)$ der radialsymmetrischen Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte
$$\varrho(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{r}}\,.$$
Zeichne den qualitativen Verlauf von $\varrho(r)$ und $E(r)$! Welche Benennung hat α?

Lösung: $Q(r) = 4\,\pi \int\limits_0^r \varrho(x)\,x^2\,\mathrm{d}x = 4\,\pi\,\alpha \int\limits_0^r x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{8\,\pi\,\alpha}{5}\,r^{\frac{5}{2}}, \quad E(r) = \frac{Q(r)}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = \frac{2\,\alpha}{5\,\varepsilon_0}\cdot\sqrt{r}$

8. Im Unterricht haben wir gezeigt, dass der Gauß'sche Satz aus dem Coulomb'schen Gesetz folgt. Beweise die Umkehrung! (Damit sind Gauß und Coulomb äquivalent!)

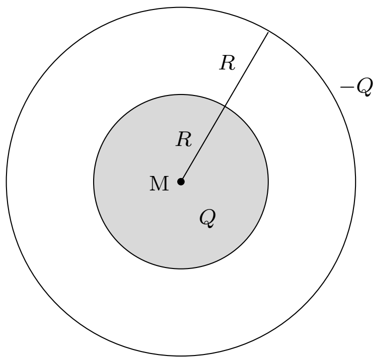
Lösung: Aus dem Gauss folgt für das Feld einer Ladung Q_1: $E(r) = \frac{Q_1}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}$. Damit gilt für die Kraft auf eine zweite Ladung Q_2 in der Entfernung r von Q_1: $F(r) = Q_2\,E(r) = \frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}$.

9. Auf die Punktladung q wirkt nur die Kraft der Punktladungen Q_1, $Q_2\,\ldots$, Q_n.
   (a) Beweise mit Hilfe des Gauß'schen Satzes, dass es keine Anordnung der Punktladungen gibt, für die q in einer **stabilen** Gleichgewichtslage wäre!
   (b) Trotz des Ergebnisses von Teilaufgabe (a) gibt es rein elektrostatische Gleichgewichtslagen für eine Punktladung q. Für welche Art von Ladungsverteilung ist das nur möglich? Durchforste die schon gerechneten Aufgaben nach einem Beispiel!

Lösung:
(a) Wir nehmen an, dass es einen Punkt P gibt, in dem q im Gleichgewicht ist. Wir denken uns eine Kugel um P, die so klein ist, dass keine der felderzeugenden Ladungen in ihr liegt. In einer kleinen Umgebung von P muss das von den Punktladungen Q_1 bis Q_n erzeugte Feld $\vec{E}$ dann zum Punkt P hinzeigen, d.h. der Fluss durch die Kugeloberfläche ist nicht null. Nach Gauss müsste sich dann in der Kugel eine felderzeugende Ladung befinden: Widerspruch!

(b) Da es im Feld von Punktladungen keine stabile Gleichgewichtslage geben kann, ist sie nur im Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung möglich. Ein Beispiel ist die homogen geladene Kugel, in deren Mittelpunkt eine Punktladung mit entgegengesetztem Vorzeichen im Gleichgewicht ist (siehe Aufgabe 5).

10. Eine aus einem speziellem Nanomaterial gefertigte Kugel mit Mittelpunkt M und dem Radius $R = 3{,}00\,\mathrm{cm}$ trägt kontinuierlich über das Volumen verteilt die positive Ladung $Q = 4{,}01\cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$. Konzentrisch zur Kugel ist eine dünne, leitende Kugelschale mit Radius $2R$ angeordnet, die die Ladung $-Q$ trägt.



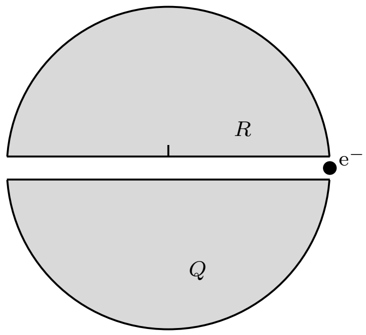
(a) Mit $q(r)$ bezeichnen wir die Ladung innerhalb einer Kugel mit Mittelpunkt M und Radius r. Drücke $q(r)$ durch R, r und Q aus und unterscheide dabei drei Fälle.

(b) Drücke den Betrag $E(r)$ der elektrischen Feldstärke in der Entfernung r von M durch

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

R und r aus.
Zeichne den Grafen von $E(r)$ im Intervall $r \in [0\,;\,8\,\mathrm{cm}]$ ($E = E_0 \mathrel{\widehat{=}} 4\,\mathrm{cm}$).

(c) Durch den Mittelpunkt der Kugel ist ein dünner Kanal gebohrt. Zeige, dass ein in der nebenstehenden Abbildung zunächst ruhendes Elektron eine harmonische Schwingung ausführt und berechne deren Schwingungsdauer T.



Lösung: (a) Die Ladung innerhalb einer Kugelschale mit Radius r ist

$$q(r) = \begin{cases} \dfrac{Qr^3}{R^3} & \text{für } r \leqq R \\ Q & \text{für } R < r < 2R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

(b)

$$E(r) = \frac{q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\cdot r = E_0\cdot\dfrac{r}{R} & \text{für } r \leqq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = E_0\cdot\dfrac{R^2}{r^2} & \text{für } R < r < 2R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

$$E_0 = 4{,}00 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

$$E(4\,\mathrm{cm}) = \frac{9E_0}{16} = 2{,}25 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

$$E(5\,\mathrm{cm}) = \frac{9E_0}{25} = 1{,}44 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

$$E(6\,\mathrm{cm}) = \frac{E_0}{4} = 1{,}00 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

(c) $\vec{E}$ zeigt von M weg, die Kraft $\vec{F} = -e\vec{E}$ also immer zu M hin, d.h.

$$F(r) = -\frac{E_0 e}{R} \cdot r = -D \cdot r \quad \text{mit} \quad D = \frac{E_0 e}{R} = 2{,}14 \cdot 10^{-14}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Rücktreibende lineare Kraft $\Longrightarrow$ harmonische Schwingung mit

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_\mathrm{e}}} = 1{,}53 \cdot 10^8\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4{,}10 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

12. Arbeit im elektrischen Feld

1. Berechne die Arbeit für die Überführung eines Elektrons (eines ^{4}He-Kerns) von $P_1\,(-5{,}0\,\mathrm{cm}|2{,}0\,\mathrm{cm})$ nach $P_2\,(6{,}0\,\mathrm{cm}|4{,}0\,\mathrm{cm})$ im Feld

$$\text{(a)}\quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -200 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \qquad \text{(b)}\quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Lösung: (a) $W_{12} = e \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = e \cdot \begin{pmatrix} 0{,}11\,\mathrm{m} \\ 0{,}02\,\mathrm{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -200 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = -4\,\mathrm{eV} = -6{,}4 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

(b) $W_{12} = e \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = e \cdot \begin{pmatrix} 0{,}11\,\mathrm{m} \\ 0{,}02\,\mathrm{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 15\,\mathrm{eV} = 2{,}4 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}$

2. Die Ladung $Q = 10^{-8}\,\mathrm{C}$ sitzt fest am Ort $P_0\,(-2\,\mathrm{cm}|-2\,\mathrm{cm})$. Berechne die Arbeit für die Überführung der Ladung $q = 10^{-10}\,\mathrm{C}$ von $P_1\,(-5{,}0\,\mathrm{cm}|2{,}0\,\mathrm{cm})$ nach $P_2\,(6{,}0\,\mathrm{cm}|4{,}0\,\mathrm{cm})$!

Lösung: $r_1 = \left|\begin{pmatrix} -3\,\mathrm{cm} \\ 4\,\mathrm{cm} \end{pmatrix}\right| = 5\,\mathrm{cm}, \quad r_2 = \left|\begin{pmatrix} 8\,\mathrm{cm} \\ 6\,\mathrm{cm} \end{pmatrix}\right| = 10\,\mathrm{cm}, \quad W_{12} = -9{,}0 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J}$

3. Die drei Punktladungen Q_1, Q_2 und Q_3 sitzen fest an den Orten $P_1\,(0|a)$, $P_2\,(-a|0)$ und $P_3\,(0|-a)$. Berechne die Arbeit für die Überführung der Ladung q von $P_4\,(a|0)$ nach $P_5\,(2a|0)$.

   (a) $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$, $Q_3 = Q$ und $q = -Q$ mit $Q = 10^{-4}\,\mathrm{C}$

   (b) $Q_1 = Q$, $Q_2 = Q$, $Q_3 = -Q$ und $q = Q$ mit $Q = 10^{-4}\,\mathrm{C}$

Lösung: (a)

$$\begin{aligned} W_{45} &= \frac{Q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{3a} - \frac{1}{2a}\right) - \frac{2\,Q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5a^2}} - \frac{1}{\sqrt{2a^2}}\right) = \\ &= \frac{Q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{32}{a}\,\mathrm{Jm} \end{aligned}$$

(b) $W_{45} = \frac{Q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{3a} - \frac{1}{2a}\right) = \frac{Q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{a}\,\mathrm{Jm}$

4. Berechne die Überführungsarbeit W_{AB} im homogenen Feld $\vec{E}$ für die Bewegung der Ladung $q = 3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ von $A\,(-1{,}0\,\mathrm{cm}|3{,}0\,\mathrm{cm}|3{,}0\,\mathrm{cm})$ nach $B\,(2{,}0\,\mathrm{cm}|-2{,}0\,\mathrm{cm}|5{,}0\,\mathrm{cm})$.

(a) $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 800 \\ 0 \end{pmatrix} \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

(b) $\vec{E}$ zeigt in die Richtung von $\vec{r_0} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$ m und $|\vec{E}| = 800\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

Lösung: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ cm; $\quad W_{\mathrm{AB}} = -q\,\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(a) $W_{\mathrm{AB}} = 1{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J}$

(b) $\vec{E} = 800\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \dfrac{\vec{r_0}}{|\vec{r_0}|} = \begin{pmatrix} 288 \\ 384 \\ 640 \end{pmatrix} \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

$$W_{\mathrm{AB}} = -3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{As} \cdot \begin{pmatrix} 288 \\ 384 \\ 640 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}03 \\ -0{,}05 \\ 0{,}02 \end{pmatrix} \mathrm{m} = -6{,}7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J}$$

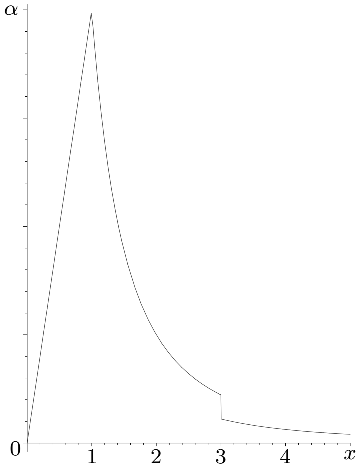
5. Eine homogen geladene Kugel (Mittelpunkt M) mit dem Radius $R = 5{,}00\,\mathrm{m}$ trägt die Gesamtladung $2Q$ mit $Q = 5{,}564 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}$. Auf einer zur Kugel konzentrischen Kugelschale mit dem Radius $3R$ befindet sich gleichmäßig verteilt die Ladung $-Q$. Eine kleine Styroporkugel der Masse $m = 2{,}50\,\mathrm{g}$ trägt die Ladung $q = 3{,}00 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$. r sei die Entfernung von M, das Verhältnis von r zu R sei x: $x = \dfrac{r}{R}$.

   (a) Berechne den Betrag E der Feldstärke, ausgedrückt durch x und die Konstante $\alpha = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}$. Zeichne $E(x)$.

   (b) W ist die potentielle Energie der Ladung q bezüglich $r = 0$. Berechne $W(x)$ unter Benützung der Abkürzung $\beta = q\,\alpha\,R$. Berechne speziell $W\left(\frac{R}{2}\right)$, $W(R)$, $W(2R)$, $W(3R)$, $W(6R)$ und $W(\infty)$. Zeichne $W(x)$.

   (c) Die Styroporkugel startet bei r_0 mit $v_0 = 0$ und erreicht r mit der Geschwindigkeit v. Berechne v für $r_0 = 0$ und $r = \infty$ bzw. $r_0 = 2\,R$ und $r = 6\,R$.

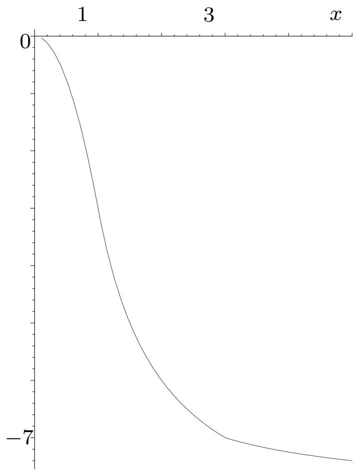
Lösung: (a) $Q(r)=\begin{cases} 2\,Q\cdot\dfrac{r^3}{R^3} & \text{für } 0\leqq r\leqq R\\ 2\,Q & \text{für } R<r\leqq 3\,R\\ Q & \text{für } r>3\,R\end{cases}$



$$E(r)=\frac{Q(r)}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}=\begin{cases}\dfrac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,R^3}\cdot r & \text{für } 0\leqq r\leqq R\\ \dfrac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} & \text{für } R<r\leqq 3\,R\\ \dfrac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} & \text{für } r>3\,R\end{cases}$$

$$E(x)=\begin{cases}\alpha\cdot x & \text{für } 0\leqq x\leqq 1\\ \dfrac{\alpha}{x^2} & \text{für } 1<x\leqq 3\\ \dfrac{\alpha}{2\,x^2} & \text{für } x>3\end{cases}\quad \text{mit } \alpha=4\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

(b) $r=x\cdot R \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=R \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}r=R\,\mathrm{d}x$



$$W=-q\cdot\int_0^r E(\tilde r)\,\mathrm{d}\tilde r=-q\,R\cdot\int_0^x E(\tilde x)\,\mathrm{d}\tilde x$$

$$x<1:\quad W(x)=-q\,R\,\alpha\cdot\int_0^x \tilde x\,\mathrm{d}\tilde x=-\frac{\beta}{2}\,x^2$$

$$1<x<3:\quad W(x)=W(1)-q\,R\,\alpha\cdot\int_1^x\frac{\mathrm{d}\tilde x}{\tilde x^2}=$$

$$=-\frac{\beta}{2}-\beta\left(-\frac{1}{x}+1\right)=\beta\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\right)$$

$$x>3:\quad W(x)=W(3)-\frac{q\,R\,\alpha}{2}\cdot\int_3^x\frac{\mathrm{d}\tilde x}{\tilde x^2}=-\frac{7\,\beta}{6}-\frac{\beta}{2}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)=\frac{\beta}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{8}{3}\right)$$

x	0,5	1	2	3	6	∞
$\frac{W}{\mathrm{J}}$	−0,75	−3	−6	−7	−7,5	−8

(c) $W(0)=W(\infty)+\dfrac{m}{2}\,v^2 \quad\Longrightarrow\quad v=\sqrt{\dfrac{2\,(W(0)-W(\infty))}{m}}=80{,}0\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$W(2R)=W(6R)+\dfrac{m}{2}\,v^2 \quad\Longrightarrow\quad v=\sqrt{\dfrac{2\,(W(2R)-W(6R))}{m}}=34{,}6\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

6. Wir betrachten noch einmal das einfache Modell des Wasserstoffatoms aus Aufgabe (5):

- Das Elektron ist eine homogen geladene Kugel mit Radius R
- Das Proton sitzt als Punktladung im Zentrum des Elektrons

(a) Die Ionisierungsenergie, d.h. die Arbeit zur vollständigen Trennung von Kern und Elektron, beträgt beim H-Atom $W_\mathrm{I} = 13{,}6\,\mathrm{eV} = 13{,}6 \cdot 1\,e \cdot 1\,\mathrm{V}$. Berechne aus diesem Wert den Radius R des H-Atoms.

(b) Welche Geschwindigkeit v_0 muss das Proton im Zentrum des Elektrons mindestens besitzen, um das Elektron vollständig verlassen zu können, wenn das Elektron, wie auch immer das realisiert wird, an seinem Ort in Ruhe bleibt.

Lösung: (a) $E(r) = \begin{cases} \dfrac{-e}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot r & \text{für } 0 \leqq r \leqq R \\ \dfrac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$

$$W_\mathrm{I} = -e \cdot \int_0^\infty E(r)\,\mathrm{d}r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot \int_0^R r\,\mathrm{d}r + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_R^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} =$$

$$= \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$$R = \frac{3e}{8\pi\varepsilon_0 E_\mathrm{I}} = 1{,}59 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

(b) $\dfrac{m}{2} v_0^2 = W_\mathrm{I} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\dfrac{2W_\mathrm{I}}{m}} = 2{,}19 \cdot 10^6\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

7. Durch ein Fernsehgerät, das im Stand–by–Betrieb mit einer Spannung von 230 V betrieben wird, fließen 0,10 A.

(a) Wie viel elektrische Energie in der Einheit 1 J wird verbraucht, wenn das Fernsehgerät 20,0 h lang im Stand–by–Betrieb läuft?

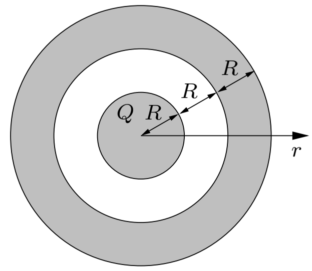
(b) Der Preis für 1,00 kWh beträgt 18,0 Cent. Wie viel kostet der Betrieb des Fernsehgeräts in 1,00 a, wenn es pro Tag 20,0 h im Stand–by–Betrieb läuft?

(c) Ein modernes Kernkraftwerk hat eine Leistung von etwa 1100 MW. In Deutschland gibt es etwa 55 Millionen Haushalte. Jeder Haushalt ist mit etwa 1,5 Fernsehgeräten ausgestattet. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass in jedem Haushalt 1 Fernsehgerät rund um die Uhr im Stand–by–Betrieb läuft. Zeige durch Rechnung, dass man durch Abschalten aller Fernsehgeräte, die im Stand–by–Betrieb laufen, ein Kernkraftwerk einsparen könnte!

Lösung: (a) $230\,\mathrm{V} \cdot 0{,}10\,\mathrm{A} \cdot 20 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 1{,}7\,\mathrm{MJ}$

(b) $230\,\mathrm{V} \cdot 0{,}10\,\mathrm{A} \cdot 20\,\mathrm{h} \cdot 18\,\frac{\mathrm{Cent}}{\mathrm{kWh}} \cdot 365 = 30$ €

(c) $55 \cdot 10^6 \cdot 23\,\mathrm{W} > 1100\,\mathrm{W}$



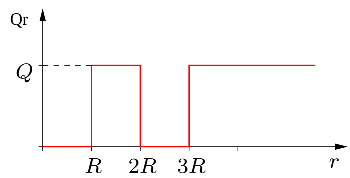
8. Eine leitende Vollkugel mit Radius R ist von einer ebenfalls leitenden Kugelschale mit Innenradius $r_1 = 2R$ und Außenradius $r_2 = 3R$ konzentrisch umgeben. Die Kugel trägt die positive Ladung Q, die Schale die Gesamtladung $Q_{\mathrm{S}} = 0$.
   (a) Zitiere den Satz von Gauß in der allgemeinen Form und speziell für eine radialsymmetrische Ladungsverteilung.
   (b) Verwende einen Satz über die Feldstärke im Inneren von Leitern und den Satz von Gauß und bestimme unter genauer Protokollierung deiner Gedankengänge die Ladungsverteilung auf den Leitern. Skizziere dazu auch den Grafen von $Q(r)$ (Ladung innerhalb einer Kugel mit Radius r.)
   (c) Schreibe einen Ausdruck für die elektrische Feldstärke $E(r)$ hin (Fallunterscheidung). Drücke E durch $E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ und $x = \dfrac{r}{R}$ aus. Zeichne ohne großen Rechenaufwand den Grafen von $E(r)$ im Intervall $0 \leqq r \leqq 4R$ mit $R \mathrel{\hat{=}} 2\,\mathrm{cm}$ und $E(R) \mathrel{\hat{=}} 9\,\mathrm{cm}$.
   (d) Berechne die potentielle Energie $W(r)$ einer Ladung q mit dem Kugelmittelpunkt als Nullpunkt. Drücke W durch $W_0 = -\dfrac{Qq}{24\pi\varepsilon_0 R}$ und $x = \dfrac{r}{R}$ aus. Zeichne den Grafen von $W(r)$ im Intervall $0 \leqq r \leqq 4R$ mit $R \mathrel{\hat{=}} 2\,\mathrm{cm}$ und $W_0 \mathrel{\hat{=}} 1\,\mathrm{cm}$.
   (e) Welche Geschwindigkeit hat ein Proton, das sich von der Oberfläche der inneren Kugel löst und durch ein feines Loch die Schale durchdringt, an einem Ort mit $r = 4R$ für $R = 10\,\mathrm{cm}$ und $Q = 1{,}0 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$?

Lösung: (a) Gaußscher Satz: Ist Φ der elektrische Fluss durch eine geschlossene Fläche und Q die gesamte Ladung innerhalb der Fläche, dann gilt $\Phi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$.

Radialsymmetrisch: Kugelfläche mit Radius r als geschlossene Fläche und $Q(r)$ als Ladung innerhalb:

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} \quad\Longrightarrow\quad E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

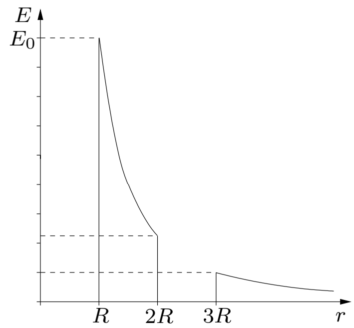
(b) Die Feldstärke in der Leiterkugel ist null $\Longrightarrow Q(r) = 0$ für $r < R \quad\Longrightarrow\quad Q$ sitzt auf der Oberfläche der Leiterkugel.



Die Feldstärke in der Leiterschale ist null $\Longrightarrow Q(r) = 0$ für $2R < r < 3R \quad\Longrightarrow\quad -Q$ sitzt auf der Innenfläche und Q auf der Außenfläche der Leiterschale.

(c)

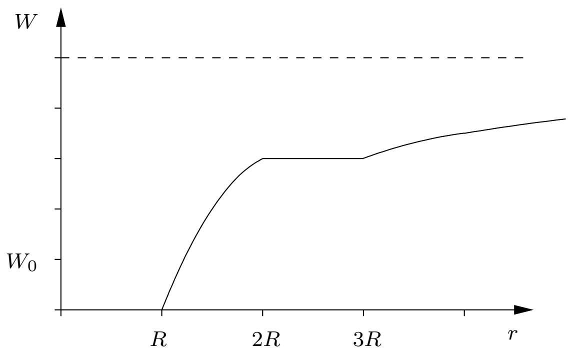
$$E = \begin{cases} 0 & \text{für } r < R \text{ bzw. } x < 1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{E_0}{x^2} & \text{für } R < r < 2R \text{ bzw. } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{für } 2R < r < 3R \text{ bzw. } 2 < x < 3 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{E_0}{x^2} & \text{für } r > 3R \text{ bzw. } x > 3 \end{cases}$$



(d) Aus $W = -q\int\limits_0^r E(\tilde{r})\,\mathrm{d}\tilde{r} = -\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^r \dfrac{\mathrm{d}\tilde{r}}{r^2}$ folgt:

$$W(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < R \\ -\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_R^r \dfrac{\mathrm{d}\tilde{r}}{\tilde{r}^2} = -\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{r}\right) & \text{für } R < r < 2R \\ W(2R) = -\dfrac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R} & \text{für } 2R < r < 3R \\ W(2R) - \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{3R}^r \dfrac{\mathrm{d}\tilde{r}}{\tilde{r}^2} = -\dfrac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R} - \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{3R} - \dfrac{1}{r}\right) = & \\ \quad = -\dfrac{5qQ}{24\pi\varepsilon_0 R} + \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{für } r > 3R \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{cases} 0 & \text{bzw. } x < 1 \\ W_0\left(6 - \dfrac{6}{x}\right) & \text{bzw. } 1 < x < 2 \\ 3W_0 & \text{bzw. } 2 < x < 3 \\ W_0\left(5 - \dfrac{6}{x}\right) & \text{bzw. } x > 3 \end{cases}$$

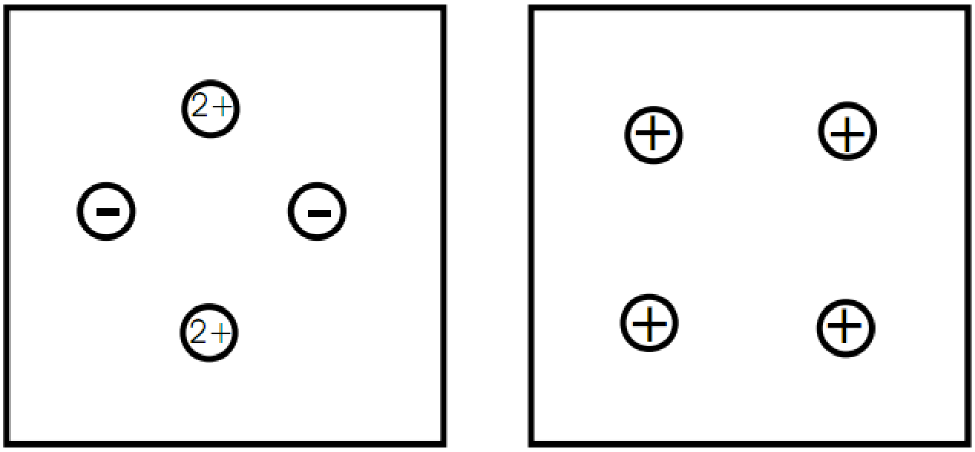


(e) $W(R) + 0 = W(4R) + \dfrac{m}{2}v^2 \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{m}{2}v^2 = -W(4R) = \dfrac{7Qe}{48\pi\varepsilon_0 R} = 8{,}40 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

$$v = \sqrt{\frac{-2W(4R)}{m_\mathrm{p}}} = 3{,}17 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

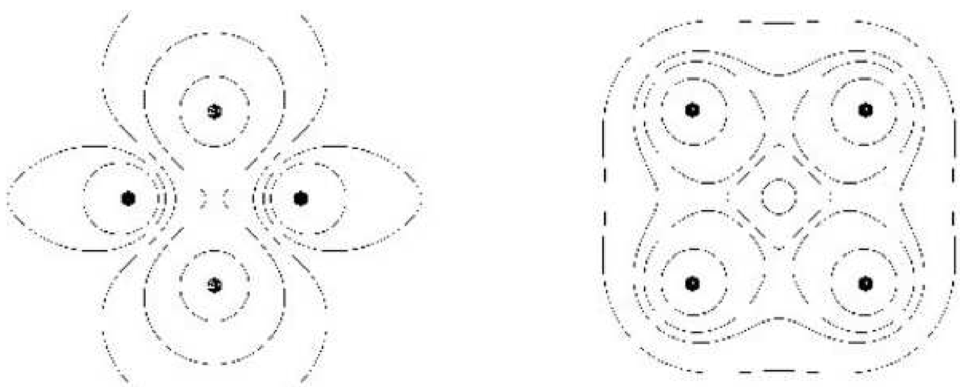
13. Das Potential des elektrischen Feldes

1. Zeichne für folgende Ladungensverteilungen die Äquipotentiallinien ein.



Quelle: Elektrodynamik Sommer 2003, Prof. Thomas Müller, Universität Karlsruhe, Blatt 1

Lösung: .



2. $\vec{E}$ ist ein homogenes Feld parallel zur z-Achse mit $E_z = E$.
   (a) Berechne das Potential φ_A bzw. φ_B in A $(a_x|a_y|a_z)$ bzw. B $(b_x|b_y|b_z)$ bezüglich des Punktes P$_0$ $(x_0|y_0|z_0)$ sowie φ'_A bzw. φ'_B bezüglich P$'_0$ $(x'_0|y'_0|z'_0)$. Berechne die Spannung U_AB in B bezüglich A einmal mit φ und einmal mit φ'.

(b) Berechne die Größen aus Teilaufgabe (a) speziell für $E = E_z = 300\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, $\mathrm{P}_0\,(0|0|0)$, $\mathrm{P}_0'\,(1\,\mathrm{cm}|3\,\mathrm{cm}|-2\,\mathrm{cm})$, $\mathrm{A}\,(1\,\mathrm{cm}|-2\,\mathrm{cm}|2\,\mathrm{cm})$ und $\mathrm{B}\,(-3\,\mathrm{cm}|4\,\mathrm{cm}|5\,\mathrm{cm})$.

Lösung: (a) $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{P_0A}} = \begin{pmatrix} a_x - x_0 \\ a_y - y_0 \\ a_z - z_0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{P_0B}} = \begin{pmatrix} b_x - x_0 \\ b_y - y_0 \\ b_z - z_0 \end{pmatrix}$

$$\varphi_\mathrm{A} = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0A}} = (z_0 - a_z)\,E, \quad \varphi_\mathrm{B} = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0B}} = (z_0 - b_z)\,E$$

$$\varphi_\mathrm{A}' = (z_0' - a_z)\,E, \quad \varphi_\mathrm{B}' = (z_0' - b_z)\,E$$

$$U_\mathrm{AB} = \varphi_\mathrm{B} - \varphi_\mathrm{A} = (a_z - b_z)\,E = \varphi_\mathrm{B}' - \varphi_\mathrm{A}'$$

(b) $\varphi_\mathrm{A} = -6\,\mathrm{V}$, $\varphi_\mathrm{B} = -15\,\mathrm{V}$, $\varphi_\mathrm{A}' = -12\,\mathrm{V}$, $\varphi_\mathrm{B}' = -21\,\mathrm{V}$, $U_\mathrm{AB} = -9\,\mathrm{V}$

3. Berechne im homogenen Feld $\vec{E} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ das Potential bezüglich des Ursprungs in den Punkten $\mathrm{A}\,(-3\,\mathrm{cm}|1\,\mathrm{cm})$ und $\mathrm{B}\,(4\,\mathrm{cm}|1\,\mathrm{cm})$. Berechne die Spannung U_AB in B bezüglich A.

Lösung: $\varphi_\mathrm{A} = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\cdot\begin{pmatrix} -0{,}03 \\ 0{,}01 \end{pmatrix}\mathrm{m} = -0{,}09\,\mathrm{V}$

$$\varphi_\mathrm{B} = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\cdot\begin{pmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}01 \end{pmatrix}\mathrm{m} = 0{,}05\,\mathrm{V}$$

$$U_\mathrm{AB} = \varphi_\mathrm{B} - \varphi_\mathrm{A} = 0{,}14\,\mathrm{V}$$

4. Am Ort $\mathrm{A}\,(0|a)$ befindet sich die Punktladung Q. Berechne das Potential $\varphi(x)$ auf der x-Achse, wenn einmal ein unendlich ferner Punkt und ein anderes Mal der Ursprung als Bezugspunkt gewählt wird. Skizziere die Grafen der beiden Potentialfunktionen für $Q > 0$. Berechne U_RS für $\mathrm{R}\,(5\,\mathrm{cm}|0)$, $\mathrm{S}\,(9\,\mathrm{cm}|0)$, $Q = -10^{-8}\,\mathrm{C}$ und $a = 12\,\mathrm{cm}$.

Lösung: Bezugspunkt ∞:

$$\varphi_\infty(x) = \frac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Bezugspunkt O:

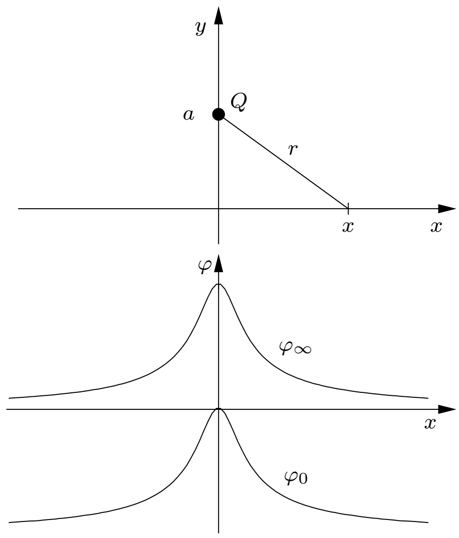
$$\varphi_0(x) = \varphi_\infty(x) + C$$

$$\varphi_0(0) = 0 = \varphi_\infty(0) + C$$

$$\Longrightarrow \quad C = -\varphi_\infty(0) = -\frac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\,a}$$

$$\varphi_0(x) = \frac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{a}\right)$$

$$U_\mathrm{RS} = \varphi_\infty(9\,\mathrm{cm}) - \varphi_\infty(5\,\mathrm{cm}) = 92\,\mathrm{V}$$



5. An den Orten A $(0|0|a)$ und B $(0|0|-a)$ befindet sich jeweils die Punktladung Q.
   (a) Berechne das Potential $\varphi(x, y)$ in der xy-Ebene, wenn ein unendlich ferner Punkt als Bezugspunkt gewählt wird.
   (b) Berechne U_{RS} für R $(33\,\mathrm{cm}|56\,\mathrm{cm}|0)$ und S $(16\,\mathrm{cm}|63\,\mathrm{cm}|0)$.
   (c) r sei die Entfernung des Punktes P $(x|y|0)$ vom Ursprung O. Berechne die Spannung $U(r) = U_{\mathrm{OP}}$ in P bezüglich O. Wie groß ist $U(\infty)$ für $Q = e$ und $a = 10^{-15}\,\mathrm{m}$?

Lösung: (a) Die Entfernung von A oder B zum Punkt $(x|y|0)$ ist $R = \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$.

$$\varphi(x, y) = \frac{2\,Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R} = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}$$

(b) $\overline{\mathrm{OR}} = \overline{\mathrm{OS}} = 65\,\mathrm{cm} \quad \Longrightarrow \quad U_{\mathrm{RS}} = \varphi(\mathrm{S}) - \varphi(\mathrm{R}) = 0$

(c) $$U(r) = U_{\mathrm{OP}} = \varphi(\mathrm{P}) - \varphi(\mathrm{O}) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,\sqrt{r^2 + a^2}} - \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,a}$$

$$U(\infty) = -\frac{e}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,a} = -2{,}88 \cdot 10^6\,\mathrm{V}$$

6. Berechne das Feld $\vec{E}(\vec{r})$ und das Potential $\varphi(\vec{r})$ der geladenen z-Achse mit der konstanten Längenladungsdichte $\varrho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}z}$.

Lösung: Der Punkt $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ hat von der z-Achse den Abstand $r^* = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nach Gauss ist der Betrag der Feldstärke im Abstand r^* von der z-Achse

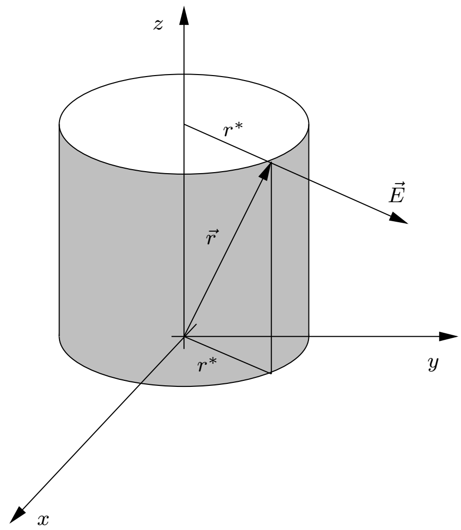
$$E(r^*) = \frac{\varrho}{2\pi\varepsilon_0 r^*}$$

Der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{E}$ ist

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\varrho}{2\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$



Wählt man einen Punkt mit dem Abstand r_0 von der z-Achse als Bezugspunkt des Potentials, dann ist das Potential im Abstand r^* von der z-Achse

$$\varphi(r^*) = -\int_{r_0}^{r^*} E(\overline{r})\,\mathrm{d}\overline{r} = -\frac{\varrho}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r^*}\frac{\mathrm{d}\overline{r}}{\overline{r}} = -\frac{\varrho}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r^*}{r_0}$$

7. **Das Be$^+$-Ion**

Ein einfaches Modell des Be$^+$-Ions:

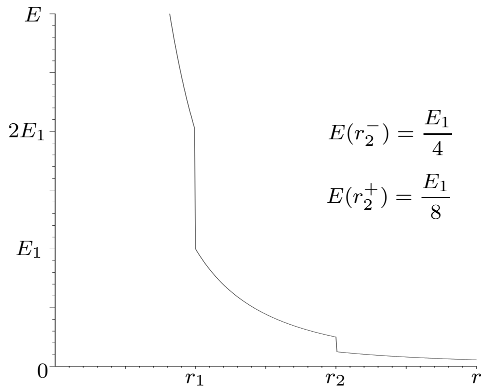
$Q_1 = 4\,e$ als Punktladung im Zentrum
$Q_2 = -2\,e$ auf einer Kugelfläche um das Zentrum mit dem Radius r_1
$Q_3 = {-e}$ auf einer Kugelfläche um das Zentrum mit dem Radius $r_2 = 2\,r_1$

(a) Berechne die Feldstärke $E(r)$, ausgedrückt durch e, r_1 und Naturkonstanten. Zeichne den Verlauf von $E(r)$ mit $r_1 \mathrel{\widehat{=}} 2\,\mathrm{cm}$ und $E_1 = \lim\limits_{r\to r_1^+} E(r) \mathrel{\widehat{=}} 2\,\mathrm{cm}$.

(b) Berechne die Spannung $U_{\infty 1}$ am Ort der inneren Elektronenschale bezüglich eines unendlich weit entfernten Punktes zunächst allgemein und dann für $r_1 = 2{,}0\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$.

(c) Bei dieser Teilaufgabe darf vereinfachend angenommen werden, dass das Ion in Ruhe bleibt: Mit welcher Geschwindigkeit muss ein Proton zentral auf ein Be$^+$-Ion geschossen werden, damit es die innere Elektronenschale gerade noch erreicht? Welche Beschleunigung erfährt das Proton ganz knapp vor dem Erreichen der inneren Schale?

Lösung:



(a) $$Q(r) = \begin{cases} 4\,e & \text{für } 0 \leqq r < r_1 \\ 2\,e & \text{für } r_1 \leqq r < r_2 \\ e & \text{für } r > r_2 \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{e}{\pi\,\varepsilon_0\,r^2} & \text{für } 0 \leqq r < r_1 \\ \dfrac{e}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} & \text{für } r_1 < r < r_2 \\ \dfrac{e}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} & \text{für } r > r_2 \end{cases}$$

(b) Mit $r_2 = 2\,r_1$ folgt

$$U_{\infty 1} = U_{\infty 2} + U_{2 1} = \frac{e}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r_2} + \frac{2\,e}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{3\,e}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,r_1} = 108\,\mathrm{V} \approx 1{,}1\cdot 10^2\,\mathrm{V}$$

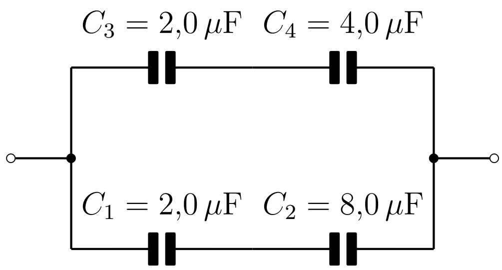
(c) $$\frac{m_\mathrm{p}}{2}\,v^2 = e\cdot U_{\infty 1},\quad v = \sqrt{\frac{2\,e\,U_{\infty 1}}{m_\mathrm{p}}} = 1{,}4\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\quad a = \frac{e^2}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,m_\mathrm{p}\,r_1^2} = 6{,}9\cdot 10^{20}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

8. Berechne das Verhältnis aus elektrischer Kraft und Gravitationskraft auf das Elektron im Wasserstoffatom. Der Radius des H-Atoms ist $r = 5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$.

Lösung: $\dfrac{F_\mathrm{e}}{F_\mathrm{g}} = \dfrac{e^2 r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2 G m_\mathrm{e} m_\mathrm{p}} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 G m_\mathrm{e} m_\mathrm{p}} = 2{,}27 \cdot 10^{39}$

14. Kondensatoren

1. Berechne die Gesamtkapazität der nebenstehenden Anordnung von Kondensatoren.



Lösung: $C_{12} = \dfrac{C_1\,C_2}{C_1\,C_2} = 1{,}6\,\mu\text{F}$

$C_{34} = \dfrac{C_3\,C_4}{C_3\,C_4} = 1{,}\overline{3}\,\mu\text{F}$

$C_{1234} = C_{12} + C_{34} = 2{,}9\,\mu\text{F}$

2. Ein Kondensator besteht aus zwei quadratischen Platten der Kantenlänge $a = 18\,\text{cm}$, die einen Abstand von $d = 4{,}0\,\text{mm}$ haben und zwischen denen sich Luft befindet. Der Kondensator wird mit einem Netzgerät, das auf die Spannung $U = 15\,\text{kV}$ eingestellt wird, geladen. Anschließend wird der Kondensator vom Netzgerät getrennt.

   (a) Berechne die Kapizität C des Kondensators, die elektrische Energie die in ihm gespeichert ist und die Ladung, die sich auf einer seiner Platten befindet.

   Nun wird der Plattenabstand verdoppelt.

   (b) Wie groß ist jetzt die Spannung zwischen den Platten des Kondensators?

   (c) Berechne die mechanísche Arbeit, die nötig ist um den Plattenabstand zu verdoppeln.

Lösung: (a) $C = \varepsilon_0\,\dfrac{A}{d} = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{\text{C}}{\text{V}\cdot\text{m}} \cdot \dfrac{(0{,}18\,\text{m})^2}{0{,}0040\,\text{m}} = 72\,\text{pF}$

$W = \frac{1}{2}\,C\,U^2 = 8{,}1 \cdot 10^{-3}\,\text{J} = 8{,}1\,\text{mJ}$

$Q = C\,U = 1{,}1 \cdot 10^{-6}\,\text{C} = 1{,}1\,\mu\text{C}$

(b) Durch die Verdoppelung des Abstandes der Platten, halbiert sich die Kapazität und da der Kondensator vom Netzgerät getrennt ist, ändert sich die Ladung nicht. Wegen $U = \frac{Q}{C}$ verdoppelt sich die Spannung.

(c) $W_{\mathrm{mech}} = \Delta W_{\mathrm{elektrisch}} = \frac{1}{2}\frac{C}{2}\,(2\,U)^2 - \frac{1}{2}\,C\,U^2 = \frac{1}{2}\,C\,U^2 = 8{,}1\,\mathrm{mJ}$

3. Ein Gold Cap ist ein Kondensator sehr großer Kapazität. Für einen speziellen Gold Cap ist die die Spannung 6,0 V und die Kapazität 22 F.

   (a) Berechne die Ladung und die Energie, die im Kondensator gespeichert sind.

   (b) Wie groß müsste der Flächeninhalt eines Plattenkondensators mit Plattenabstand 1,0 mm sein, damit er die gleiche Kapazität wie der gegebene Gold Cap hat. Gib dein Ergebnis in der Einheit $1\,\mathrm{km}^2$ an.

   Gold Caps werden unter anderem dazu genutzt um den Betrieb von elektrischen Geräten sicherzustellen, wenn das elektrische Netz ausfällt oder nicht zur Verfügung steht. Sie übernehmen also die Aufgabe von Akkus, haben gegenüber diesen aber den Vorteil, dass man sie praktisch unendlich oft laden und entladen kann.

   (c) Es soll eine elektrische Zahnbürste, die mit einer Spannung von 12 V betrieben werden muss, durch eine geeignete Kombination von zwei Gold Caps, betrieben werden. Wie sind die beiden Kondensatoren dazu zu schalten und wie groß ist Kapazität dieser Kombination?

   (d) Die elektrische Zahnbürste hat eine Leistung von 5,0 W. Wie groß ist der Widerstand der Zahnbürste und nach welcher Zeit ist die Spannung an den Gold Caps um 10% abgefallen? Der Innenwiderstand der Gold Caps darf dabei vernachlässigt werden.

Lösung: (a) $Q = C\,U = 0{,}13\,\mathrm{kC}$, $W_{\mathrm{elektrisch}} = \frac{1}{2}\,C\,U^2 = 0{,}40\,\mathrm{kJ}$.

(b) $C = \varepsilon_0\,\frac{A}{d} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{d\,C}{\varepsilon_0} = 2{,}5\,\mathrm{km}^2$.

(c) Die beiden Kondensatoren sind in Reihe zu schalten. Die Kapazität dieser Reihenschaltung ist 11 F.

(d) $P = \frac{U^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{U^2}{P} = 29\,\Omega$

$U\,(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{R\,C}} \quad \Rightarrow \quad 0{,}90\,U_0 = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{R\,C}} \quad \Rightarrow \quad t = -R\,C\,\ln 0{,}90 = 33\,\mathrm{s}$

15. Energie des elektrischen Feldes

1. Ein (verrückter?) Wissenschaftler will den Mond (Radius: $R_\mathrm{M} = 1738\,\mathrm{km}$, Masse: $M = 7{,}35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$) aufladen, bis er eine negative Ladung mit dem Betrag Q_M trägt. Eine kugelförmige Raumkapsel mit dem Radius $R_\mathrm{K} = 3{,}00\,\mathrm{m}$ (Aluminiumhaut) und der Masse $m = 1{,}00 \cdot 10^4\,\mathrm{kg}$ soll dann knapp über der Mondoberfläche negativ geladen und durch die elektrische Kraft ins All befördert werden.

   (a) Die elektrische Feldstärke an der Oberfläche der Raumkapsel darf den Betrag $E_0 = 1{,}00 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ nicht überschreiten, da sonst Elektronen entweichen. Welchen Betrag Q_max darf die Ladung der Kapsel demnach nicht überschreiten?

   Zur Kontrolle: $Q_\mathrm{max} = 1{,}00 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{C}$

   (b) Die Kapsel trägt nun die maximal mögliche Ladung. Wie groß muss Q_M sein, damit die Kapsel an der Mondoberfläche mit der Beschleunigung $a_0 = 4{,}34\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ nach oben startet?

   Zur Kontrolle: $Q_\mathrm{M} = 2{,}00 \cdot 10^9\,\mathrm{C}$

   (c) Leite die Formel $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ für die Kapazität einer freistehenden Kugel mit Radius R her.

   Welche Energie W_M muss zum Aufladen des Mondes, welche (W_K) zum Laden der Kapsel aufgebracht werden?

   (d) Welche Geschwindigkeit v hat die Kapsel weit weg vom Mond ($r \to \infty$)?

Lösung: (a) $E(R_\mathrm{K}) = \dfrac{Q_\mathrm{max}}{4\pi\varepsilon_0 R_\mathrm{K}^2} = E_0 \quad \Longrightarrow \quad Q_\mathrm{max} = 4\pi\varepsilon_0 R_\mathrm{K}^2 E_0 = 1{,}00 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{C}$

(b) $R_\mathrm{M} + R_\mathrm{K} \approx R_\mathrm{M} \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \dfrac{F_\mathrm{e} - F_\mathrm{G}}{m} = \dfrac{\dfrac{Q_\mathrm{max} Q_\mathrm{M}}{4\pi\varepsilon_0 R_\mathrm{M}^2} - \dfrac{GMm}{R_\mathrm{M}^2}}{m}$

$$Q_\mathrm{M} = \left(m a_0 + \frac{GMm}{R_\mathrm{M}^2}\right) \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0 R_\mathrm{M}^2}{Q_\mathrm{max}} = \left(a_0 R_\mathrm{M}^2 + GM\right) \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0 m}{Q_\mathrm{max}} = 2{,}00 \cdot 10^9\,\mathrm{C}$$

(c) Potential einer Kugel mit Ladung Q für $r \geqq R$: $\quad \varphi(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Spannung zwischen Kugeloberfläche und ∞: $\quad U = \varphi(r) - \varphi(\infty) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$\Longrightarrow \quad C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$$W_\mathrm{M} = \frac{Q_\mathrm{M}^2}{2C_\mathrm{M}} = \frac{Q_\mathrm{M}^2}{8\pi\varepsilon_0 R_\mathrm{M}} = 1{,}0 \cdot 10^{22}\,\mathrm{J}, \quad W_\mathrm{K} = \frac{Q_\mathrm{max}^2}{2C_\mathrm{K}} = \frac{Q_\mathrm{max}^2}{8\pi\varepsilon_0 R_\mathrm{K}} = 1{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{J}$$

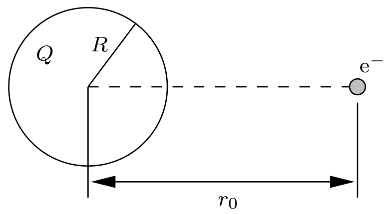
(d) $W_p(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{Q_{\mathrm{M}}Q_{\max}}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$\frac{m}{2}v^2 = W_p(R_{\mathrm{M}}) - W_p(\infty) = W_p(R_{\mathrm{M}}) = \frac{Q_{\mathrm{M}}Q_{\max}}{4\pi\varepsilon_0 R_{\mathrm{M}}} - \frac{GMm}{R_{\mathrm{M}}} = ma_0R_{\mathrm{M}}$

$v = \sqrt{2a_0R_{\mathrm{M}}} = 3{,}9 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

16. Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld

1. Eine Metallkugel mit dem Radius $R = 5{,}0\,\text{cm}$ trägt gleichmäßig über die Oberfläche verteilt die positive Ladung $Q = 2{,}0 \cdot 10^{-10}\,\text{C}$. In der horizontalen Entfernung $r_0 = 20\,\text{cm}$ vom Kugelmittelpunkt befindet sich ein momentan noch ruhendes Elektron. Die ganze Anordnung befindet sich im Vakuum.

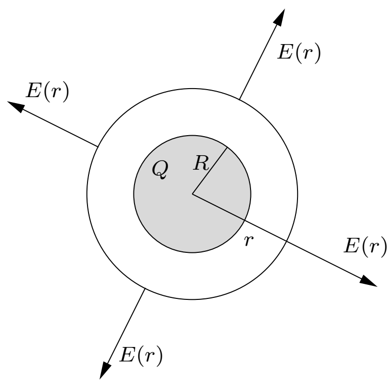


   (a) Beweise in nachvollziehbarer Weise, dass das Feld außerhalb der Kugel gleich dem Feld einer Punktladung Q im Mittelpunkt der Kugel ist.

   (b) Berechne die Geschwindigkeit v, mit der das Elektron auf die Kugel prallt.

   (c) Berechne die Beschleunigungen des Elektrons beim Start ($r = r_0$) und kurz vor dem Aufprall auf die Kugel ($r = R$). Schätze dann ab, um welche vertikale Strecke Δy das Elektron bei seinem Flug zur Kugel abgelenkt wird.

Lösung: (a) Wir denken uns eine Kugelfläche A mit Radius r um den Mittelpunkt der Metallkugel. Aus Symmetriegründen steht das von Q erzeugte Feld $\vec{E}$ auf dieser Fläche senkrecht und $E = |\vec{E}|$ hängt nur von r ab. Daher ist der Fluss durch A



$$\Phi = E(r) \cdot A = 4\pi r^2 E(r)$$

Nach dem Gaussschen Satz ist

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

d.h.

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(b) Mit $m = m_\text{e}$ und $q = -e$ gilt

$$\frac{m}{2}v^2 + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{m}{2} \cdot 0^2 + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

$$v = \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 m} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R}\right)} = \sqrt{\frac{Qe}{2\pi\varepsilon_0 m} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right)} = 3{,}1 \cdot 10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(c) $a_1 = a(r_0) = \dfrac{F(r_0)}{m} = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 m r_0^2} = 7{,}9 \cdot 10^{12}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

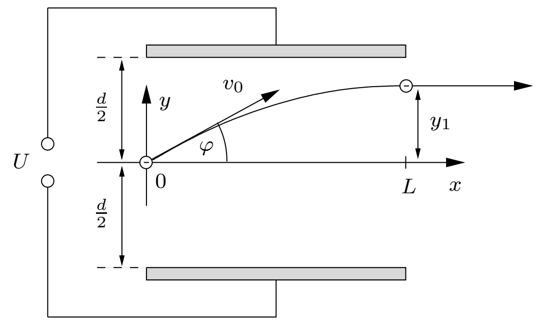
Wegen $r_0 = 4R$ ist $a_2 = a(R) = 16a_1 = 1{,}3 \cdot 10^{14}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Unter der Annahme einer konstanten Beschleunigung wären die Flugzeiten des Elektrons für die Strecke $s = r_0 - R = 15\,\mathrm{cm}$:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a_1}} = 1{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s} \quad \text{und} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2s}{a_2}} = \frac{t_1}{4} = 4{,}9 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

$$\Delta y_2 < \Delta y < \Delta y_1 \quad \text{mit} \quad \Delta y_1 = \frac{g}{2}t_1^2 = 1{,}9 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m} \quad \text{und} \quad \Delta y_2 = \frac{\Delta y_1}{16} = 1{,}2 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$$

2. Ein zunächst ruhendes Elektron wird von der Spannung U_0 auf v_0 beschleunigt. Dann wird das Elektron unter dem Winkel $\varphi > 0$ gegen die x-Achse in das homogene Feld E eines Plattenkondensators der Länge L eingeschossen (siehe Abb.). Die Spannung U an den Platten des Kondensators wird so gewählt, dass das Elektron den Kondensator parallel zur x-Achse verlässt.



(a) Wie muss U gepolt sein?

(b) Berechne U in Abhängigkeit von U_0, d, φ und L.

Zur Kontrolle: $U(\varphi) = \dfrac{2U_0 d \sin\varphi\cos\varphi}{L} = \dfrac{U_0 d \sin 2\varphi}{L}$

(c) Leite eine Formel für den Abstand y_1 zur x-Achse her, unter dem das Elektron den Kondensator parallel zur x-Achse verlässt.

Zur Kontrolle: $y_1 = \dfrac{L}{2}\tan\varphi$

(d) Für welchen maximalen Eintrittswinkel $\varphi_{\max}$ kann das Elektron den Kondensator gerade noch parallel zur x-Achse verlassen?

(e) Liegt die Spannung $U(\varphi)$ am Kondensator, dann gibt es, bei genügend großem d, neben φ noch einen weiteren möglichen Eintrittswinkel $\varphi' > 0$, bei dem das Elektron ebenfalls parallel zur x-Achse aus dem Kondensator fliegt. Wie hängen φ' und φ zusammen?

(f) U ist jetzt so eingestellt, dass ein durch $U_0 = 200\,\mathrm{V}$ beschleunigtes und unter $\varphi = 15°$ eintretendes Elektron ($L = 20\,\mathrm{cm}$, $d = 6\,\mathrm{cm}$) den Kondensator parallel zur x-Achse verlässt. Berechne U, y_1 und φ'. Kann das Elektron unter beiden Eintrittswinkeln φ und φ' den Kondensator verlassen?

Lösung: (a) Polung: plus unten

(b) $\frac{m}{2}v_0^2 = eU_0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{mv_0^2}{e} = 2U_0, \qquad v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$

Flugzeit: $\Delta t = \frac{L}{v_0\cos\varphi}$, Beschleunigung: $a_y = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{md}$

Geschwindigkeit in y-Richtung bei $x = L$: $v_1 = v_0\sin\varphi - \frac{eU}{md}\cdot\frac{L}{v_0\cos\varphi} = 0$

$$U = \frac{mv_0^2 d\sin\varphi\cos\varphi}{eL} = \frac{2U_0 d\sin\varphi\cos\varphi}{L} = \frac{U_0 d\sin 2\varphi}{L}$$

(c) $y_1 = v_{y0}\Delta t - \frac{a_y}{2}\Delta t^2 = v_0\sin\varphi\cdot\frac{L}{v_0\cos\varphi} - \frac{eU}{2md}\cdot\frac{L^2}{v_0^2\cos^2\varphi} = L\tan\varphi - \frac{UL^2}{4U_0 d\cos^2\varphi}$

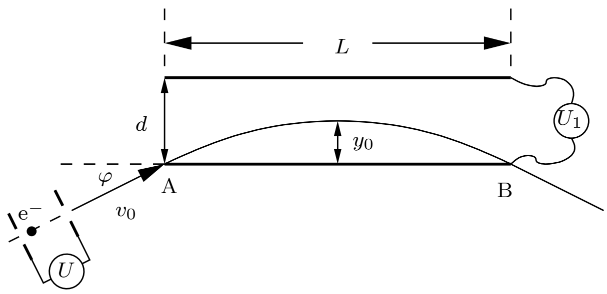
Mit $U = \frac{2U_0 d\sin\varphi\cos\varphi}{L}$ folgt $y_1 = L\tan\varphi - \frac{2U_0 dL^2\sin\varphi\cos\varphi}{4U_0 dL\cos^2\varphi} = \frac{L}{2}\tan\varphi$

(d) $y_1 = \frac{L}{2}\tan\varphi < \frac{d}{2} \quad\Longrightarrow\quad \tan\varphi < \frac{d}{L} \quad\Longrightarrow\quad \tan\varphi_{\max} = \frac{d}{L}$

(e) $U(\varphi') = U(\varphi) \Longrightarrow \sin(2\varphi') = \sin(2\varphi) \Longrightarrow 2\varphi' = 180^\circ - 2\varphi \Longrightarrow \varphi' = 90^\circ - \varphi$

(f) $U = \frac{200\,\mathrm{V}\cdot 0{,}06\,\mathrm{m}\cdot\sin 30^\circ}{0{,}2\,\mathrm{m}} = 30\,\mathrm{V}, \quad y_1 = \frac{0{,}2\,\mathrm{m}}{2}\cdot\tan 15^\circ = 2{,}7\,\mathrm{cm} < \frac{d}{2}$ (ja)

$\varphi' = 75^\circ, \quad y_1' = 10\,\mathrm{cm}\cdot\tan 75^\circ = 37{,}3\,\mathrm{cm} > \frac{d}{2}$ (nein) $\quad \varphi_{\max} = \arctan\frac{d}{L} = 17{,}7^\circ$



3. Ein Elektron wird von der Spannung $U = 100\,\mathrm{V}$ beschleunigt und tritt dann zur Zeit $t_0 = 0$ mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel φ (siehe Abbildung) direkt an der Kante A in das homogene Feld E eines Plattenkondensators ein ($L = 10{,}0\,\mathrm{cm}$, $d = 2{,}50\,\mathrm{cm}$). Der Winkel φ ist so gewählt, dass das Elektron den Kondensator zur Zeit t_1 direkt an der Kante B wieder verlässt. Die Spannung zwischen den *quadratischen* Kondensatorplatten ist $U_1 = \beta U$ mit $\beta = \frac{2}{5}$.

   Hilfen aus der Mathematik:

   $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha}\right)$$

   (a) Berechne v_0 und die Ladung Q auf der oberen Platte.

   (b) Berechne t_1 in allgemeinen Größen (keine Zahlenwerte) auf zwei Arten und leite damit die Beziehung $\sin 2\varphi = \frac{\beta L}{2d}$ her.

(c) Leite für die maximale Höhe y_0 des Elektrons (siehe Abbildung) aus dem Energiesatz die Beziehung

$$y_0 = \frac{d}{2\beta}\left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 2\varphi}\right)$$

her und berechne dann die numerischen Werte von t_1, φ und y_0.

Lösung: (a) $m = m_e$: $\quad \frac{m}{2}v_0^2 = eU \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 5{,}93 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$$Q = -CU_1 = -\frac{\varepsilon_0 L^2}{d} \cdot \beta U = -1{,}42 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C} \qquad (C = 3{,}54 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F})$$

(b) Bewegung in x-Richtung: $t_1 = \frac{L}{v_0 \cos\varphi}$

Beschleunigung in y-Richtung: $a = -\frac{eE}{m} = -\frac{eU_1}{md} = -\frac{e\beta U}{md} \quad \Longrightarrow$

$$t_1 v_0 \sin\varphi - \frac{e\beta U}{2md}t_1^2 = t_1\left(v_0\sin\varphi - \frac{e\beta U}{2md}t_1\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{2mdv_0\sin\varphi}{e\beta U}$$

$$\frac{L}{v_0\cos\varphi} = \frac{2mdv_0\sin\varphi}{e\beta U} \quad \Longrightarrow \quad 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi = \frac{Le\beta U}{d\,\underbrace{mv_0^2}_{2eU}} = \frac{Le\beta U}{2deU} = \frac{L\beta}{2d}$$

(c) Energiesatz: $\frac{m}{2}v_0^2 = eEy_0 + \frac{m}{2}v_0^2\cos^2\varphi \quad \Longrightarrow$

$$y_0 = \frac{mv_0^2}{2eE}(1 - \cos^2\varphi) = \frac{2eU}{2eE}\sin^2\varphi = \frac{Ud}{\beta U}\sin^2\varphi = \frac{d}{2\beta}\left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 2\varphi}\right)$$

$$y_0 = \frac{d}{2\beta}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{L^2\beta^2}{4d^2}}\right) = \frac{d}{0{,}8}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{16}{25}}\right) = \frac{d}{2} = 1{,}25\,\mathrm{cm}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{L\beta}{2d} = 2\beta = 0{,}8 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 26{,}6^\circ$$

$$t_1 = \frac{L}{v_0\cos\varphi} = 1{,}89 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

17. Die Elementarladung – Millikan

1. -

Lösung: -

18. Laden und Entladen von Kondensatoren

Teil III.

Elektrodynamik S2

19. Ladung und Stromstärke

1. Ist ΔQ die frei bewegliche Ladung eines Leiters im Volumen ΔV, dann nennt man

$$\varrho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

die **Dichte** der frei beweglichen Ladung. Fließt senkrecht durch die Fläche ΔA der Strom ΔI, dann heißt

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta A}$$

die **Stromdichte**.

In einem Draht mit dem Querschnitt A fließt ein räumlich und zeitlich konstanter Strom I. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Dichte ϱ der frei beweglichen Ladung, der Stromdichte j und der Elektronengeschwindigkeit v?

Lösung: Die frei bewegliche Ladung in einem Leiterstück der Länge $\Delta s = v\,\Delta t$ (v ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen) ist $\Delta Q = \varrho\, A\, \Delta s$. Mit $\Delta Q = I\,\Delta t$ folgt

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\varrho\, A\, \Delta t} = \frac{\Delta I}{\varrho\, A} = \frac{j}{\varrho}$$

2. Durch einen Kupferdraht mit dem Querschnitt $A = 5{,}00\,\mathrm{mm}^2$ fließt der Strom $I = 4{,}00\,\mathrm{A}$. Von jedem Cu-Atom der Masse $m = 1{,}06 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$ stammen im Mittel 1,27 Leitungselektronen. Berechne die Stromdichte j, die Dichte ϱ der frei beweglichen Ladung und die Driftgeschwindigkeit v der Elektronen! Die Dichte von Kupfer ist $\sigma = 8{,}93\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

Lösung: Die Zahl der Cu-Atome im Leitervolumen ΔV ist $n = \dfrac{\sigma\,\Delta V}{m}$. Damit folgt für die Dichte der frei beweglichen Ladung

$$\varrho = \frac{1{,}27 \cdot n\, e}{\Delta V} = \frac{1{,}27 \cdot \sigma\, e}{m}$$

Mit $j = \dfrac{I}{A}$ ist dann

$$v = \frac{j}{\varrho} = \frac{m\, I}{1{,}27 \cdot \sigma\, e\, A} = 0{,}0467\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$$

3. Ein Strom genügt dem Zeitgesetz

$$I(t) = 5{,}00\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$$

Welche Ladung fließt im Zeitintervall $[1\,\mathrm{s}\,;\,3\,\mathrm{s}]$ durch den Leiterquerschnitt?

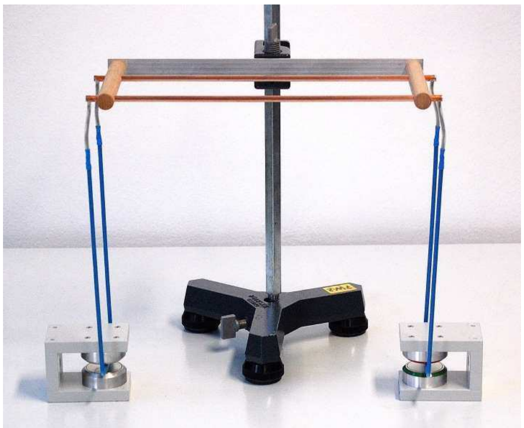
Lösung: $\dot{Q}(t) = I(t) \quad \Longrightarrow \quad Q(t) = \frac{5}{3}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^3 \quad \Longrightarrow \quad \Delta Q = Q(3\,\mathrm{s}) - Q(1\,\mathrm{s}) = 43{,}3\,\mathrm{C}$

20. Kraft auf einen Leiter

21. Lorentzkraft

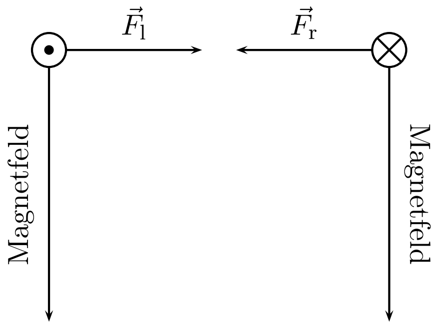
1. **Die Doppelleiterschaukel 1**

   Das nebenstehende Bild zeigt eine doppelte Leiterschaukel. Das sind zwei Leiterschaukeln, die leitend durch zwei Kupferstangen miteinander verbunden sind. Das horizontale Stück jeder der beiden Leiterschaukeln befindet sich jeweils im Feld eines sehr starken Permanentmagneten. Wir betrachten nun die rechte Leiterschaukel. Der Hufeisenmagnet hat unten einen Süd– und oben einen Nordpol. Nun wird die Leiterschaukel nach links bewegt. Daraufhin bewegt sich die linke Leiterschaukel nach rechts. Wie muss demzufolge das Magnetfeld des linken Hufeisenmagneten orientiert sein?



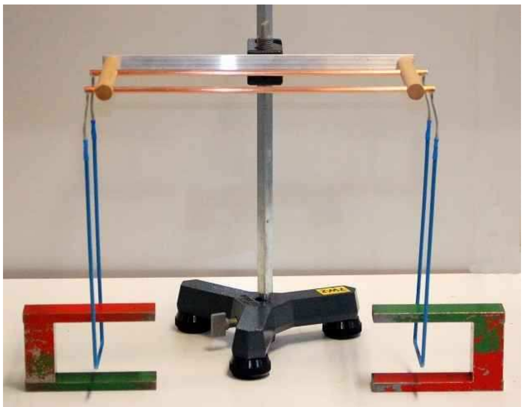
Doppelleiterschaukel

Lösung: Am Ort der rechten Leiterschaukel weist das Magnetfeld nach unten. Die Elektronen im Leiter erfahren eine Kraft nach links. Dadurch entsteht ein Strom. Dabei weist die technische Stromrichtung in die Zeichenebene. Am Ort des linken Leiters weist dann die technische Stromrichtung aus der Zeichenebene. Die Kraft ist nach Vorraussetzung nach rechts gerichtet. Mit der ,,rechten Hand–Regel" findet man dann, dass das Magnetfeld nach unten gerichtet ist.



2. **Die Doppelleiterschaukel 2**

Das nebenstehende Bild zeigt eine doppelte Leiterschaukel. Das sind zwei Leiterschaukeln, die leitend durch zwei Kupferstangen miteinander verbunden sind. Das horizontale Stück jeder der beiden Leiterschaukeln befindet sich jeweils im Feld eines Permanentmagneten. Nun wird die rechte Leiterschaukel nach links bewegt. Wieso und wohin bewegt sich der linke Teil der Doppelleiterschaukel, der sich im Magnetfeld befindet?



Doppelleiterschaukel

Lösung: Durch die Bewegung der rechten Leiterschaukel nach links wird in dieser ein Strom induziert, wobei die technische Stromrichtung aus der Zeichenebene weist. Weil beide Leiterschaukeln leitend miteinander verbunden sind, fließt auch in der linken Leiterschaukel ein Strom. Dieser ist in der linken Leiterschaukel in die Zeichenebene gerichtet. Ein stromdurchflossener Leiter in einem Magnetfeld erfährt eine Kraft. Mit der „rechten–Hand–Regel" findet man, dass die Kraft auf die linke Leiterschaukel nach rechts weist.

3. Ein kugelförmiges Staubkorn mit dem Radius $R = 1{,}0 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$ und der Dichte $\varrho = 0{,}80\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ trägt die Ladung $q = 1{,}0 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{C}$.

   (a) Welche maximale Ladung q_{max} könnte das Staubkorn tragen, wenn die elektrische Feldstärke an seiner Oberfläche $E_0 = 1{,}0 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ nicht überschreiten darf?

   (b) Das Staubkorn bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_1 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ senkrecht zu den Feldlinien des Erdmagnetfeldes ($B_{\text{Erd}} = 4{,}8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$). Welchen Betrag F_1 hat die Lorentzkraft auf das Teilchen? Vergleiche mit seiner Gewichtskraft!

   (c) Das Staubkorn bewegt sich jetzt mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ im Feld $\vec{B}$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{T}$$

   Berechne die Lorentzkraft $\vec{F}$ auf das Teilchen. Wie groß ist $F = |\vec{F}|$? Welchen Betrag a hat die Beschleunigung, die $\vec{F}$ dem Staubkorn verleiht?

   Wäre $\vec{F}$ die einzige Kraft auf das Teilchen, dann würde es eine Kreisbahn beschreiben. Welchen Radius r hätte diese Bahn?

Lösung: (a) $E_0 = \dfrac{q_{\text{max}}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad \Longrightarrow \quad q_{\text{max}} = 4\pi E_0 \varepsilon_0 R^2 = 1{,}1 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{C}$

(b) $F_1 = q v_1 B_{\mathrm{E}} = 4{,}8 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{N}, \quad m = \dfrac{4\pi}{3} R^3 \varrho = 3{,}4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{kg}$

$mg = 3{,}3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N} = 6{,}8 \cdot 10^5 F_1$

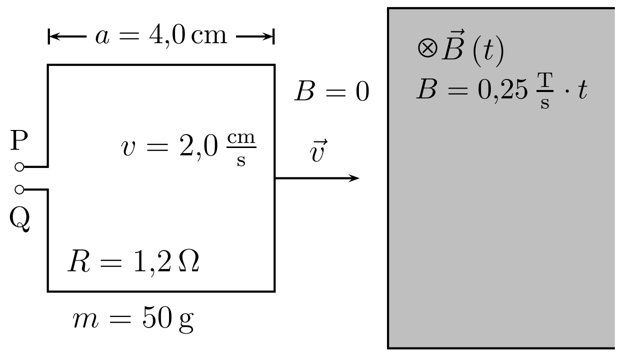
(c) $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = q \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{mT}}{\mathrm{s}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot 10^{-13}\,\mathrm{N}$

$F = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} \cdot 10^{-13}\,\mathrm{N} = 1{,}3 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{N}$

$a = \frac{F}{m} = 0{,}39\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{v^2}{r} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{v^2}{a} = 64\,\mathrm{m}$

22. Induktionsgesetz

1. Die nebenstehende Abbildung (Blick von vorn) zeigt eine Spule mit 50 Windungen von quadratischem Querschnitt mit Seitenlänge $a = 4{,}0\,\mathrm{cm}$ zum Zeitpunkt 0.
   Die Spule bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ vom Betrag $v = 2{,}0\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ nach rechts. Ihre rechte Begrenzung befindet sich zum Zeitpunkt 0 vom Rand eines scharf begrenzten Magnetfeldes 2,0 cm entfernt.



   Die magnetische Flussdichte $\vec{B}\,(t)$ wächst linear mit der Zeit t und ist bei Eintritt der Spule gerade 0.

   (a) Bestimme die Polarität der zwischen P und Q induzierten Spannung, während die Spule in das Magnetfeld eintritt (Begründung!).

   (b) Berechne den Betrag der zwischen P und Q induzierten Spannung $|U_{\mathrm{ind}}|$ und zeichne den Verlauf dieser Spannung in ein t–U_{ind}–Diagramm für $t \in [0; 4{,}0\,\mathrm{s}]$ (2 cm entsprechen 1 s).

   (c) Zum Zeitpunkt $t = 4{,}0\,\mathrm{s}$ werden die Enden der Spule kurzgeschlossen. Berechne den Betrag der Beschleunigung, die die Spule zu diesem Zeitpunkt erfährt. In welche Richtung ist diese Beschleunigung gerichtet? Mit welcher physikalischen Regel kann man dies begründen?

Lösung: (a) Q negativ, P positiv. Begründung mit Lorentzkraft.

(b) Magnetischer Fluss:

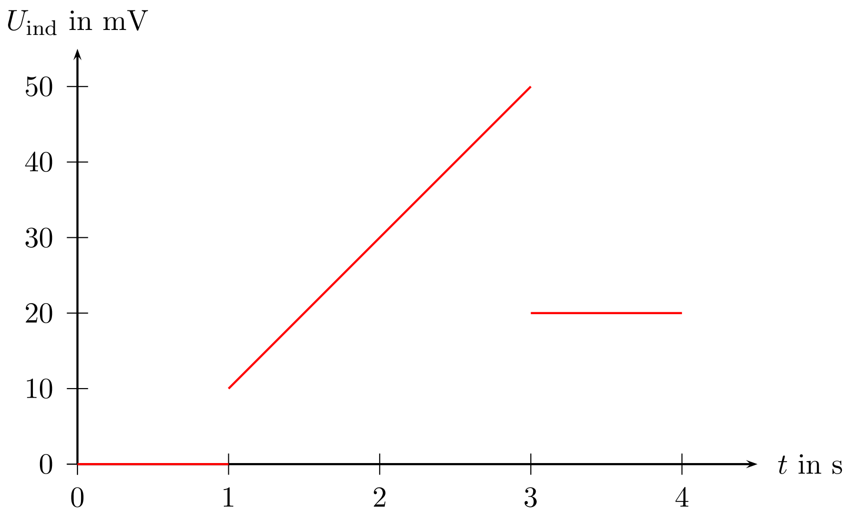
$$|\Phi(t)| = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad 0 \leqq t < 1\,\mathrm{s} \\ a\,(v\,t - 0{,}020\,\mathrm{m}) \cdot 0{,}25\,\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{s}} \cdot t, & \text{falls} \quad 1\,\mathrm{s} \leqq t < 3\,\mathrm{s} \\ a^2 \cdot 0{,}25\,\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{s}} \cdot t, & \text{falls} \quad 3\,\mathrm{s} \leqq t \end{cases}$$

Induzierte Spannung:

$$|U_{\text{ind}}(t)| = \left|N\,\dot{\Phi}(t)\right| = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad 0 \leqq t < 1\,\text{s} \\ N\,\left(2\,a\,v \cdot 0{,}25\frac{\text{T}}{\text{s}} \cdot t - a \cdot 0{,}020\,\text{m} \cdot 0{,}25\frac{\text{T}}{\text{s}}\right), & \text{falls} \quad 1\,\text{s} \leqq t < 3\,\text{s} \\ N\,a^2 \cdot 0{,}25\,\frac{\text{T}}{\text{s}}, & \text{falls} \quad 3\,\text{s} \leqq t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad 0 \leqq t < 1\,\text{s} \\ 20\,\text{mV} \cdot t - 10\text{mV}, & \text{falls} \quad 1\,\text{s} \leqq t < 3\,\text{s} \\ 20\,\text{mV}, & \text{falls} \quad 3\,\text{s} \leqq t \end{cases}$$

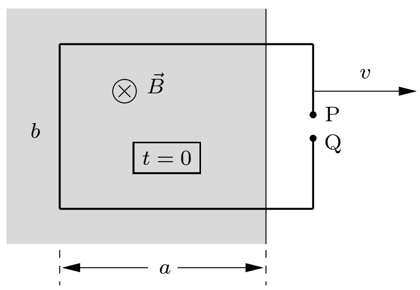
t–U_{ind}–Diagramm:



(c) $50 \cdot 4\,B\,\frac{U_{\text{ind}}}{R}\,a = m\,\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{50 \cdot 4\,a\,B\,(4{,}0\,\text{s})\;U_{\text{ind}}\,(4{,}0\,\text{s})}{R\,m} = 2{,}7 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

2. Ein rechteckiger Leiterrahmen der Breite $b = 20{,}0\,\text{cm}$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 2{,}00\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ aus einem scharf begrenzten Magnetfeld $\vec{B}$ mit dem Betrag

$$B(t) = \alpha t^2 \quad \text{und} \quad \alpha = 5{,}00 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{T}}{\text{s}^2}$$

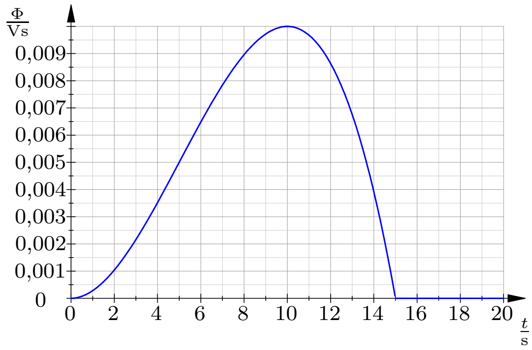


gezogen, die Eintauchtiefe zur Zeit $t = 0$ ist $a = 30{,}0\,\text{cm}$. Das Vorzeichen des magnetischen Flusses $\Phi(t)$ durch den Leiterrahmen ist positiv, die Induktionsspanung $U(t) = U_{\text{PQ}}$ ist positiv, wenn P positiv ist.

(a) Berechne $\Phi(t)$ im Zeitintervall $[0; 20\,\text{s}]$ und zeichne den Grafen dieser Funktion. Berechne dazu auch ihre Extremwerte (Maximum bei t_1).

(b) Bestimme anhand des Grafen von Φ das Vorzeichen von $U(t)$ im Intervall $[0; t_1]$ und berechne dann $U(t)$. Zeichne den Grafen von $U(t)$ im Intervall $[0; 20\,\mathrm{s}]$.

Lösung: (a) Für $t \geqq t_2 = 15\,\mathrm{s}$ ist der Leiterrahmen nicht mehr im Magnetfeld und daher $\Phi(t) = 0$. Für $t < t_2$ gilt:



$$A(t) = b(a - vt)$$

$$\Phi(t) = B(t)A(t) = \alpha b t^2 (a - vt)$$

$$\Phi(t) = \alpha b(at^2 - vt^3)$$

$$\dot{\Phi}(t) = \alpha b t(2a - 3vt)$$

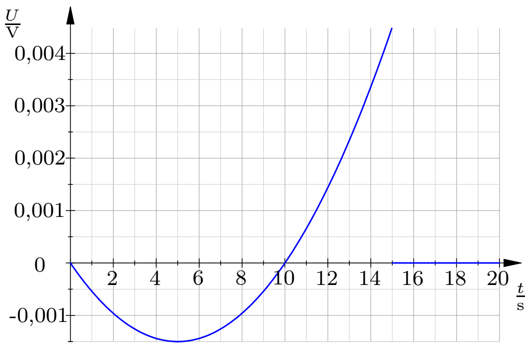
$$\dot{\Phi}(t) = 0 \implies t_0 = 0 \text{ (Minimum)}$$

$$\text{oder } t_1 = \frac{2a}{3v} = 10\,\mathrm{s} \text{ (Maximum)}$$

$$\Phi(t) = 10^{-2}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}} \cdot t^2 \left(3 - 0{,}2\,\frac{1}{\mathrm{s}}t\right)$$

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	2	4	6	8	10	12	14	15
$\frac{\Phi}{\mathrm{mT}}$	0	1,04	3,52	6,48	8,96	10	8,64	3,92	0

(b) Für $t \in [0; 10\,\mathrm{s}]$ ist $\Phi(t)$ steigend, das vom Induktionsstrom erzeugte Feld $\vec{B}_\mathrm{i}$ muss entgegengesetzt zu $\vec{B}$ orientiert sein (Lenzsche Regel). Der Induktionsstrom würde (wenn P und Q leitend verbunden wären) entgegen dem Uhrzeigersinn fließen, d.h. P ist negativ. Für $t \in [0; 10\,\mathrm{s}]$ ist also $U(t) < 0$, d.h.

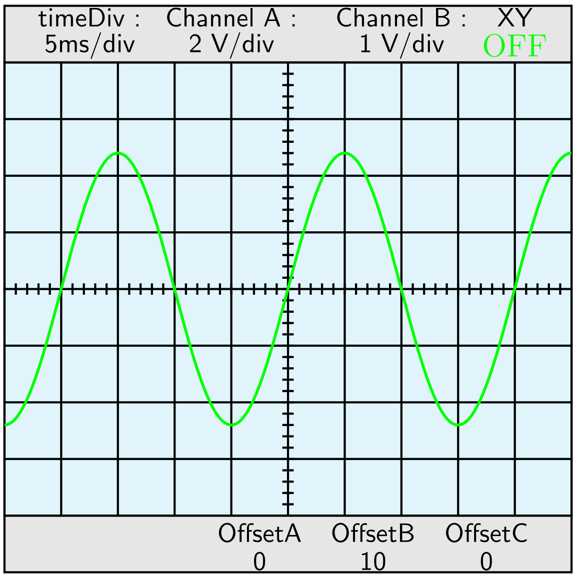


$$U(t) = -\dot{\Phi}(t) = -\alpha b t(2a - 3vt)$$

$$U(t) = \begin{cases} 6 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{sm}} \cdot t\left(0{,}1\,\frac{1}{\mathrm{s}}t - 1\right) & \text{für } t < t_2 \\ 0 & \text{für } t > t_2 \end{cases}$$

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	5	10	15
$\frac{U}{\mathrm{mV}}$	0	-1,5	0	4,5

3. In einem Magnetfeld dreht sich eine Spule mit 50 Windungen und der Spulenfläche $30\,\mathrm{cm}^2$. Dabei steht die Rotationsachse senkrecht zur Magnetfeldrichtung. Nebenstehend ist der zeitliche Verlauf der induzierten Spannung mit einem Oszilloskop sichtbar gemacht. Berechne den Betrag der Flussdichte des Magnetfeldes.



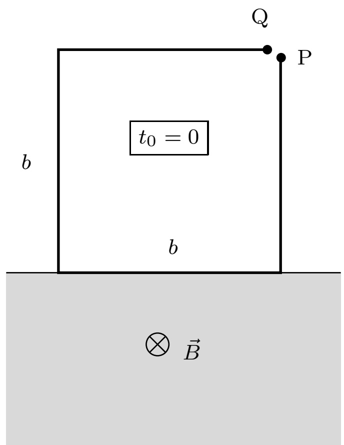
Lösung: $B = \dfrac{U_0 \cdot T}{2\,\pi\,N\,A} = \dfrac{4{,}8\,\mathrm{V} \cdot 0{,}020\,\mathrm{s}}{2\,\pi \cdot 50 \cdot 30 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}} = 0{,}10\,\mathrm{T}.$

4. Eine quadratische Leiterschleife ($b = 50{,}0\,\mathrm{cm}$) befindet sich zur Zeit $t_0 = 0$ mit der unteren Seite direkt am Rand eines scharf begrenzten, homogenen Magnetfeldes mit der Kraftflussdichte $\vec{B}$ und

$$B(t) = |\vec{B}| = \begin{cases} B_0 & \text{für } t \leqq t_1 = 0{,}100\,\mathrm{s} \\ \dfrac{B_0}{\alpha t} & \text{für } t > t_1 \end{cases}$$

mit

$$B_0 = 1{,}00\,\mathrm{T} \quad \text{und} \quad \alpha = 10{,}0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$



$\vec{B}$ steht senkrecht auf der Ebene, in der die Leiterschleife liegt und ist nach unten unbeschränkt. Die an den Enden P und Q der Leiterschleife induzierte Spannung U ist positiv, wenn P positiv ist. Zur Zeit $t = 0$ beginnt die Leiterschleife mit der Beschleunigung $g = 9{,}00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ nach unten zu fallen.

(a) Zeige, dass die Leiterschleife zur Zeit $t_2 = 0{,}333\,\mathrm{s}$ ganz in das Magnetfeld eintaucht.

(b) Berechne den magnetischen Fluss $\Phi(t)$ durch die Leiterschleife und zeichne den Grafen von Φ im Intervall $t_0 \leqq t \leqq 1\,\mathrm{s}$. Fallunterscheidung!

(c) Berechne $U(t)$ und zeichne den Grafen von U im Intervall $t_0 \leqq t \leqq 1\,\mathrm{s}$.

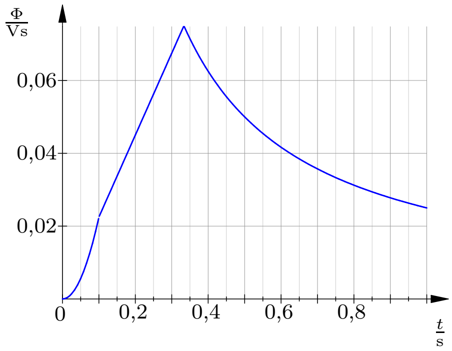
(d) Bei einer Wiederholung des Versuchs wird P mit Q leitend verbunden. Die Leiterschleife taucht zur Zeit t_2' ganz in das Magnetfeld ein. Untersuche, ob t_2' kleiner, gleich oder größer als t_2 ist.

Lösung: (a) $\frac{g}{2}t_2^2 = b \quad\Longrightarrow\quad t_2 = \sqrt{\frac{2b}{g}} = \sqrt{\frac{1 \cdot \mathrm{s}^2}{9}} = 0{,}333\,\mathrm{s}$

(b)

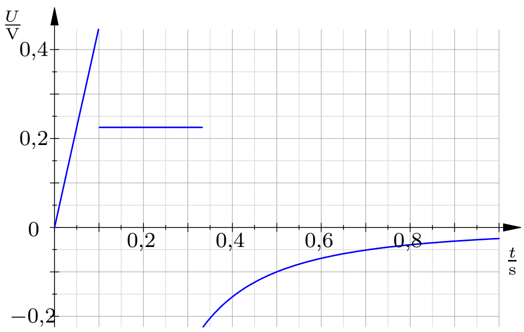
$$A(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}bgt^2 & \text{für } 0 \leqq t \leqq t_2 \\ b^2 & \text{für } t > t_2 \end{cases}$$

$$\Phi(t) = \begin{cases} \dfrac{B_0bgt^2}{2} = 2{,}25\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}} \cdot t^2 & \text{für } 0 \leqq t \leqq \\ \dfrac{B_0bgt}{2\alpha} = 0{,}225\,\mathrm{V} \cdot t & \text{für } t_1 < t < \\ \dfrac{B_0b^2}{\alpha t} = \dfrac{0{,}025\,\mathrm{Vs}^2}{t} & \text{für } t > t_2 \end{cases}$$



(c) Für $0 < t < t_1$ zeigt die Lorentzkraft auf die Elektronen des unteren Leiters nach links, d.h. Strom nach rechts, P positiv, $U > 0$.

$$\dot{\Phi}(t) = \begin{cases} B_0bgt = 4{,}5\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}} \cdot t & \text{für } 0 \leqq t \leqq \\ \dfrac{B_0bg}{2\alpha} = 0{,}225\,\mathrm{V} & \text{für } t_1 < t < \\ -\dfrac{B_0b^2}{\alpha t^2} = -\dfrac{0{,}025\,\mathrm{Vs}^2}{t^2} & \text{für } t > t_2 \end{cases}$$

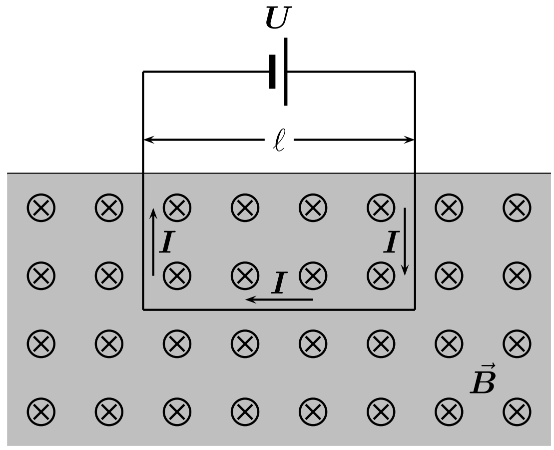


Vorzeichen von $U \quad\Longrightarrow\quad U(t) = \dot{\Phi}(t)$

(d) Strom im unteren Leiter nach rechts, Lorentzkraft auf den Leiter nach oben (also bremsend) $\Longrightarrow \quad t_2' > t_2$.

23. Magnetfeld von Strömen

1. Nebenstehend ist ein im Unterricht durchgeführter Versuch skizziert. Es befindet sich eine vom Strom I durchflossene Leiterschleife der horizontalen Ausdehnung ℓ in einem Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B}$.



   (a) Bestimme die Richtung der Kräfte auf sämtliche sich im Magnetfeld befindlichen Leiterstücke.

   (b) Nun soll die Kraft F auf das horizontale Leiterstück in Abhängigkeit der Stromstärke I quantitativ untersucht werden. Dabei ergaben sich folgende Messwerte:

I in A	0	2,0	4,0	6,0	8,0
F in 10^{-2} N	0	2,9	6,0	9,1	12

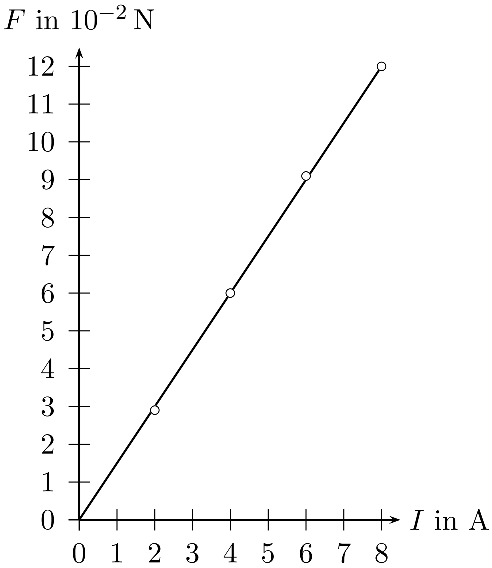
   Erstelle das zugehörige I–F–Diagramm. Welcher Zusammenhang zwischen der Stromstärke I und der Kraft F lässt sich damit belegen?

   (c) In einem weiteren Versuch wurde gefunden, dass die Kraft F und die Länge ℓ des Leiterstücks direkt proportional sind. Formuliere schließlich einen einzigen Zusammenhang zwischen den drei Größen I, ℓ und F.

   (d) Berechne den Betrag der magnetischen Flussichte B, wenn bekannt ist, dass die Versuchsergebnisse aus der Teilaufgabe b) mit einer Leiterschleife der horizontalen Ausdehnung $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ erzielt wurden.

Lösung: (a) Kraft auf linken Leiter nach links, auf rechten nach rechts und auf unteren nach unten.

(b)



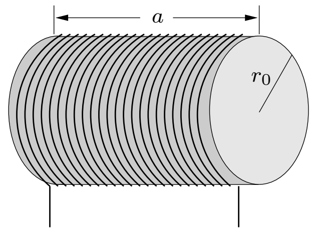
F ist direkt proportional zu I.

(c) $F \sim I \cdot \ell$

(d) $B = \dfrac{F}{I\,\ell} = \dfrac{12 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}}{8{,}0\,\mathrm{A} \cdot 0{,}20\,\mathrm{m}} = 0{,}075\,\mathrm{T} = 75\,\mathrm{mT}$

24. Induktivität und Energie des Magnetfeldes

1. Das CMS (Compact Muon Solenoid) am CERN ist ein riesiger Teilchendetektor für den LHC (Large Hadron Collider). Das Kernstück des CMS ist ein supraleitender Elektromagnet der Länge $a = 13\,\mathrm{m}$ und mit der Induktivität $L = 14\,\mathrm{H}$. Bei der Stromstärke $I_0 = 1{,}95 \cdot 10^4\,\mathrm{A}$ durch die Wicklungen beträgt die Kraftflussdichte im Mittelpunkt der Spule $B_0 = 4{,}0\,\mathrm{T}$.



   (a) Berechne die Windungszahl n und den Radius r_0 der Spule.

   (b) Zu Testzwecken wird ein von der Spannug U_p beschleunigtes Proton senkrecht zu den Feldlinien in das Magnetfeld im Inneren der Spule geschossen. In einem geeigneten Koordinatensystem wird das Proton an folgenden Orten registriert: $\mathrm{P}_1\,(2{,}25\,\mathrm{cm}|-4{,}00\,\mathrm{cm})$, $\mathrm{P}_2\,(2{,}25\,\mathrm{cm}|4{,}00\,\mathrm{cm})$ und $\mathrm{P}_3\,(10{,}50\,\mathrm{cm}|6{,}50\,\mathrm{cm})$.

   Zeichne die drei Punkte in ein Koordinatensystem (Maßstab 1:1), ermittle durch Konstruktion und durch Rechnung den Radius r der Protonenbahn und berechne dann U_p.

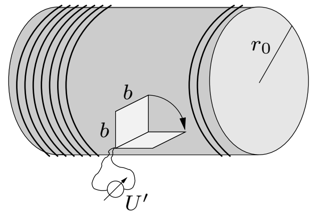
   (c) Welchen Energieinhalt W_0 hat das Magnetfeld der Spule? Wie lange kann man tausend 100-Watt-Lampen mit dieser Energie betreiben?

   (d) Durch einen Unfall wird zur Zeit $t = 0$ die Spannungsquelle der Spule kurzgeschlossen. Dadurch bricht die Spannung zusammen und zwischen den Enden der Spule liegt der Widerstand $R = 0{,}10\,\mathrm{m\Omega}$ (hauptsächlich der Widerstand der Zuleitungen, die Wicklungen sind ja supraleitend). Stelle die Differentialgleichung für den Strom $I(t)$ auf (kurze Begründung!) und zeige, dass

$$I(t) = I_0\, e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

   eine Lösung mit den passenden Anfangsbedingungen ist. Zu welcher Zeit t_1 ist der Energieinhalt des Spulenfeldes noch $W_1 = 1{,}0\,\mathrm{MJ}$? Wie groß ist die Stromstärke zu dieser Zeit?

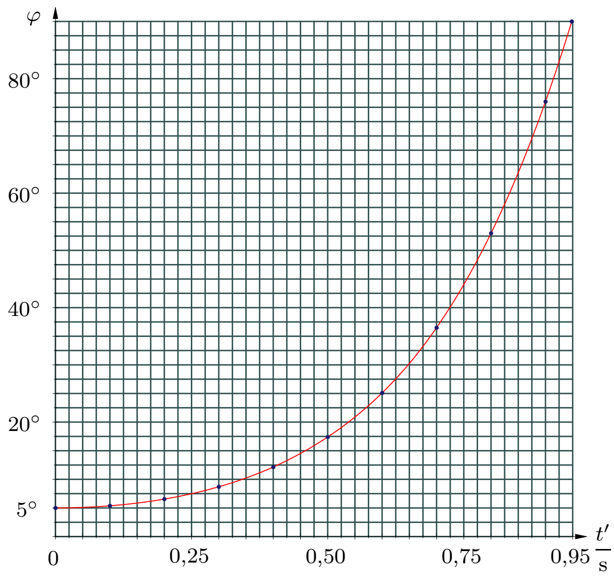
(e) Zur Überwachung des Feldstärkeabfalls nach dem Unfall wird eine quadratische Spule mit der Kantenlänge $b = 1{,}0\,\mathrm{m}$ und $n' = 10^4$ Windungen senkrecht zu den magnetischen Feldlinien ins Innere der Spule gebracht. Berechne den Betrag $U'(t)$ der Induktionsspannung an den Enden der quadratischen Spule. Berechne auch $U_0 = U'(0)$.



(f) Zur Zeit $t_2 = 10\,\mathrm{h}$ nach dem Unfall wird die quadratische Spule durch einen Stoß um $\varphi_0 = 5°$ aus der vertikalen Position ausgelenkt und kippt dann um. Nebenstehendes Diagramm zeigt den Kippwinkel φ in Abhängigkeit von der Kippzeit $t' = t - t_2$. Zeige, dass während des Kippens die Induktionsspannung

$$U' = b^2 n' B \left(\frac{R}{L}\cos\varphi + \dot{\varphi}\sin\varphi\right)$$

ist und ermittle anhand des Diagramms und einer geeigneten Näherung ihren maximalen Wert.



Lösung: (a) $B_0 = \mu_0 \cdot \dfrac{nI_0}{a} \quad \Longrightarrow \quad n = \dfrac{B_0 a}{\mu_0 I_0} = 2{,}1 \cdot 10^3$

$$L = \mu_0 \cdot \frac{n^2 A}{a} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{La}{\mu_0 n^2} = 32\,\mathrm{m}^2 \quad \Longrightarrow \quad r_0 = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 3{,}2\,\mathrm{m}$$

(b) $y = 8{,}25\,\mathrm{cm} - x$

$x^2 + (4\,\mathrm{cm})^2 = r^2$

$y^2 + (6{,}5\,\mathrm{cm})^2 = (8{,}25\,\mathrm{cm} - x)^2 + (6{,}5\,\mathrm{cm})^2 = r^2$

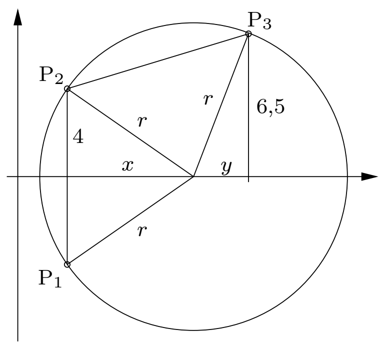
$(8{,}25\,\mathrm{cm})^2 - 16{,}5\,\mathrm{cm}\cdot x + x^2 + (6{,}5\,\mathrm{cm})^2 = x^2 + (4\,\mathrm{cm})^2$

$$x = \frac{(8{,}25\,\mathrm{cm})^2 + (6{,}5\,\mathrm{cm})^2 - (4\,\mathrm{cm})^2}{16{,}5\,\mathrm{cm}} = 5{,}72\,\mathrm{cm}$$

$r = \sqrt{x^2 + (4\,\mathrm{cm})^2} = 6{,}98\,\mathrm{cm}$

$$\frac{mv^2}{r} = evB_0 \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{erB_0}{m} = 2{,}67 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$eU_\mathrm{p} = \frac{m}{2}v^2 \quad \Longrightarrow \quad U_\mathrm{p} = \frac{mv^2}{2e} = \frac{er^2B_0^2}{2m} = 3{,}7 \cdot 10^6\,\mathrm{V}$$



(c) $W_0 = Aa \cdot \frac{B_0^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}LI_0^2 = 2{,}7 \cdot 10^9\,\mathrm{J}$, $\qquad \Delta t = \frac{W}{P} = \frac{2{,}7 \cdot 10^9\,\mathrm{J}}{10^5\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}} = 2{,}7 \cdot 10^4\,\mathrm{s} = 7{,}5\,\mathrm{h}$

(d) Spannung am Widerstand gleich Induktionsspannung:

$$RI = -L\dot{I} \quad \Longrightarrow \quad \dot{I} = -\frac{R}{L}I$$

$$\dot{I}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_0\,e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right) = -\frac{R}{L}I_0\,e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = -\frac{R}{L}I(t)$$

Die Anfangsbedingung $I(0) = I_0$ passt. $\qquad \frac{R}{L} = \frac{1}{140\,000\,\mathrm{s}} = 7{,}14 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$

$$W(t_1) = \frac{1}{2}LI(t_1)^2 = \frac{1}{2}LI_0^2 e^{-\frac{2R}{L}\cdot t_1} = W_0\,e^{-\frac{2R}{L}\cdot t_1} = W_1$$

$$t_1 = -\frac{L}{2R}\ln\frac{W_1}{W_0} = \frac{L}{2R}\ln\frac{W_0}{W_1} = 5{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{s} = 1{,}5 \cdot 10^2\,\mathrm{h}$$

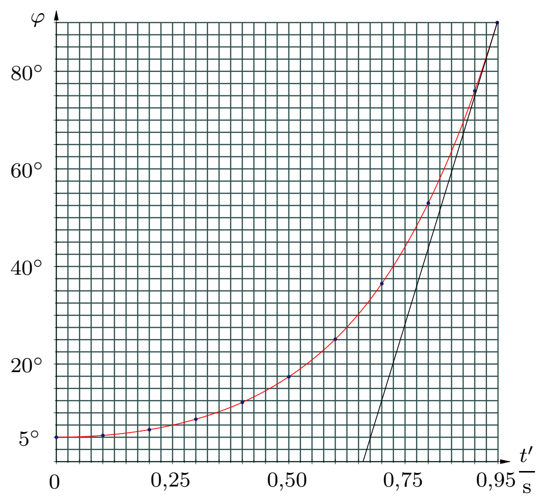
$$I_1 = I(t_1) = I_0\,e^{-\frac{R}{L}\cdot t_1} = 3{,}8 \cdot 10^2\,\mathrm{A}$$

(e) $B(t) = \frac{\mu_0 n}{a} \cdot I(t) = \frac{\mu_0 n}{a} \cdot I_0 e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = B_0 e^{-\frac{R}{L}\cdot t} \quad \Longrightarrow \quad \Phi(t) = b^2 n' B(t) = b^2 n' B_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$

$U'(t) = |\dot{\Phi}(t)| = U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} \quad$ mit $\quad U_0 = \frac{b^2 n' B_0 R}{L} = 0{,}29\,\mathrm{V}$

(f) $\Phi(t) = b^2 n' B(t)\cos\varphi \quad \Longrightarrow$

$$U' = -\dot{\Phi} = -b^2 n'(\dot{B}\cos\varphi - B\dot{\varphi}\sin\varphi) =$$
$$= b^2 n' B\left(\frac{R}{L}\cos\varphi + \dot{\varphi}\sin\varphi\right)$$



Im Intervall $0 < t' < 0{,}95\,\mathrm{s}$ ist $\cos\varphi$ fallend, $\sin\varphi$ steigend und

$$B(t) \approx B(t_2) = 3{,}1\,\mathrm{T}$$

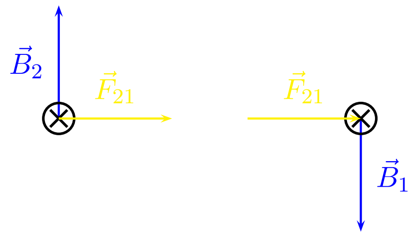
praktisch konstant. Maximales $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} \approx \frac{\frac{\pi}{2}}{0{,}29\,\mathrm{s}} = 5{,}4\,\frac{1}{\mathrm{s}} \gg \frac{R}{L}$$

$$U'_{\max} \approx b^2 n' B(t_2)\dot{\varphi} = 1{,}7 \cdot 10^5\,\mathrm{V}$$

2. In der nebenstehenden Zeichnung sind zwei stromdurchflossene, geradlinige Leiter abbgebildet (Blickrichtung in Richtung des Leiters; es ist die technische Stromrichtung eingezeichnet). Begründe, dass sich die beiden Leiter anziehen.

Lösung: Ein stromdurchflossener Leiter ist von einem kreisförmigen Magnetfeld umgeben. Dieses Magnetfeld ist auch am Ort der jeweils anderen Leiters vorhanden. Ein stromdurchflossener Leiter erfährt in einem Magnetfeld eine Kraft, die sogenannte Lorentzkraft. Ihre Richtung ermitteln wir mit der Rechten–Hand–Regel.



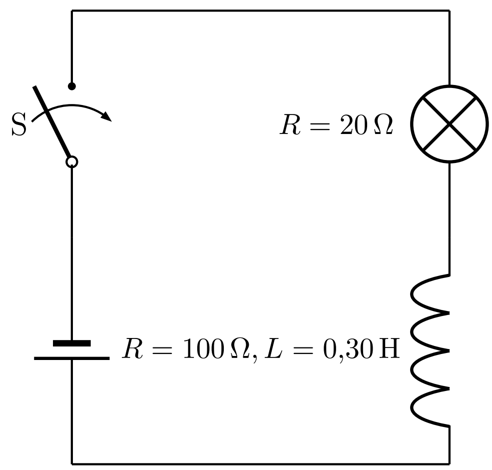
3. Ein zylinderförmige Spule, deren Querschnittsfläche einen Radius von 3,8 cm besitzt, hat eine Länge von 750 mm und eine Windungsdichte von $485\,\frac{1}{\mathrm{m}}$. Welche Induktivität besitzt die Spule?

Lösung: 1,0 mH.

4. Durch eine Spule der Induktivität 120 mH steigt die Stromstärke beginnend bei 0 linear mit der Zeit auf 6,0 A an. Berechne die Induktionsspannung, die zwischen den Enden der Spule auftritt.

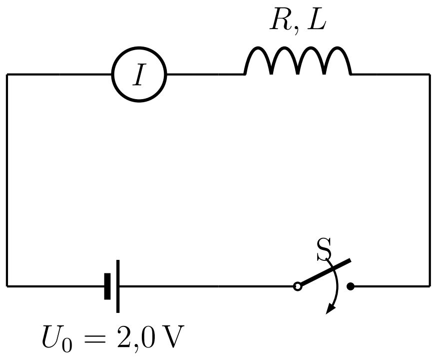
Lösung: −4,8 V.

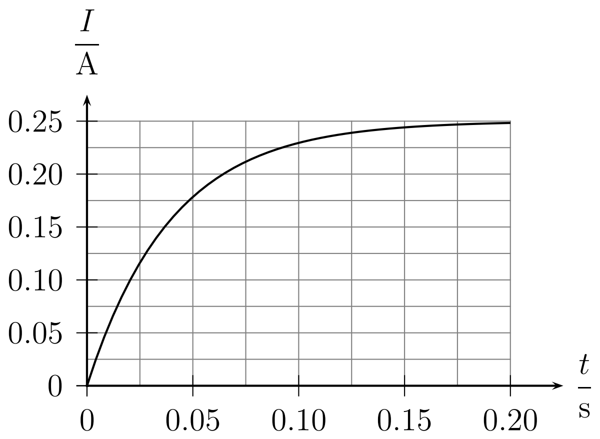
5. In der nebenstehend abgebildeten Schaltskizze liefert die Batterie eine Spannung von 24 V. Zur Zeit 0 wird der Schalter S geschlossen.
   (a) Berechne die maximale Stromstärke die sich (nach hinreichend langer Zeit) einstellt.
   (b) Nach welcher Zeit beträgt die Stromstärke 90% (99%) der maximalen Stromstärke?



Lösung: 0,20 A; 5,8 ms; 12 ms.

6. Um den Widerstand und die Induktivität einer Spule zu ermitteln wurde in dem Versuch, dessen zugehörige Schaltskizze unten links wiedergegeben ist, der Schalter S zum Zeitpunkt 0 geschlossen. Der zeitliche Verlauf der Stromstärke I wurde dabei mit einem Meßwerterfassungssystem aufgenommen und ist unten rechts wiedergegeben.





Berechne R und L. Dabei sind die Werte aller benötigten Größen der Schaltskizze und dem t–I–Diagramm zu entnehmen.

Lösung: $R = 8{,}0\,\Omega, L = 0{,}33\,\mathrm{H}$

7. Eine Spule der Länge $a = 21\,\mathrm{cm}$ mit kreisförmigem Querschnitt ($r = 2{,}0\,\mathrm{cm}$) und der Windungszahl $n = 2{,}00 \cdot 10^4$ wird vom Strom $I_0 = 8{,}0\,\mathrm{A}$ durchflossen.
   (a) Berechne die im Magnetfeld der Spule gespeicherte Energie W_0.
   (b) Zur Zeit $t_0 = 0$ wird die Spule von der Stromquelle getrennt und ihre Enden über den Widerstand $R = 0{,}301\,\Omega$ kurzgeschlossen. Zu welcher Zeit t_1 fließt der Strom $I_1 = 0{,}1\,I_0$ durch die Spule?

Lösung: (a) $L = \dfrac{\mu_0 n^2 r^2 \pi}{a} = 3{,}0\,\dfrac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{A}^2} = 3{,}0\,\mathrm{H}, \qquad W_0 = \dfrac{1}{2} L I_0^2 = 96\,\mathrm{J}$

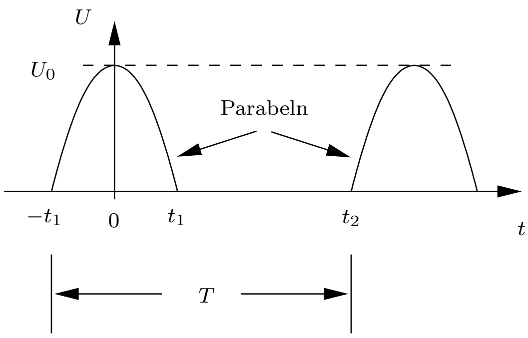
(b) $I(t_1) = I_0\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\,t_1} = I_0\,\mathrm{e}^{-0{,}10\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,t_1} = 0{,}1\,I_0 \quad \Longrightarrow \quad -0{,}10\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}\,t_1 = -\ln 10$

$$t_1 = 10 \ln 10\,\mathrm{s} = 23\,\mathrm{s}$$

25. Wechselstrom und Effektivwerte

1. Nebenstehende Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf einer periodischen Spannung $U(t)$. Dabei gilt

$$t_2 = \alpha t_1 \quad \text{mit} \quad \alpha \geqq 1$$



   (a) Berechne den Mittelwert $\langle U \rangle$ und den Effektivwert U_{eff} von U, ausgedrückt durch α und U_0.

   (b) Für welches α ist $U_{\text{eff}} = 0{,}6 \cdot U_0$?

   (c) Untersuche, ob $\langle U \rangle = U_{\text{eff}}$ sein kann.

Lösung: (a) Für $-t_1 \leqq t \leqq t_1$ lautet die Gleichung von U:

$$U(t) = U_0 \left(1 - \frac{t^2}{t_1^2}\right)$$

Mit $T = t_1 + t_2 = t_1 + \alpha t_1 = (1+\alpha)t_1$ gilt:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{T}\int\limits_{-t_1}^{t_2} U(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2U_0}{T}\int\limits_0^{t_1}\left(1 - \frac{t^2}{t_1^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{2U_0}{T}\left[t - \frac{t^3}{3t_1^2}\right]_0^{t_1} =$$

$$= \frac{2U_0}{T}\left(t_1 - \frac{t_1}{3}\right) = \frac{4U_0 t_1}{3(1+\alpha)t_1} = \frac{4U_0}{3(1+\alpha)}$$

$$U_{\text{eff}}^2 = \left\langle U^2 \right\rangle = \frac{2}{T}\int\limits_0^{t_1} U(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{2U_0^2}{T}\int\limits_0^{t_1}\left(1 - \frac{t^2}{t_1^2}\right)^2 \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2U_0^2}{T}\int\limits_0^{t_1}\left(1 - \frac{2t^2}{t_1^2} + \frac{t^4}{t_1^4}\right)\mathrm{d}t = \frac{2U_0^2}{T}\left[t - \frac{2t^3}{3t_1^2} + \frac{t^5}{5t_1^4}\right]_0^{t_1} =$$

$$= \frac{2U_0^2}{T}\left(t_1 - \frac{2t_1}{3} + \frac{t_1}{5}\right) = \frac{2U_0^2}{1+\alpha}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{16U_0^2}{15(1+\alpha)}$$

$$U_{\text{eff}} = \frac{4U_0}{\sqrt{15(1+\alpha)}}$$

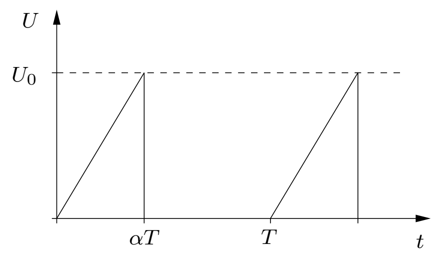
(b) $\dfrac{4}{\sqrt{15(1+\alpha)}} = 0{,}6 = \dfrac{3}{5} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{16}{15(1+\alpha)} = \dfrac{9}{25} \quad\Longrightarrow\quad 1+\alpha = \dfrac{16\cdot 25}{15\cdot 9} = \dfrac{80}{27}$

$$\alpha = \frac{53}{27} \approx 1{,}96$$

(c)

$$\begin{aligned}\langle U\rangle = U_{\text{eff}} \quad &\Longleftrightarrow \quad 3(1+\alpha) = \sqrt{15(1+\alpha)}\\ &\Longleftrightarrow \quad 9(1+\alpha)^2 = 15(1+\alpha)\\ &\Longleftrightarrow \quad 9(1+\alpha) = 15\\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3} < 1 \quad\Longrightarrow\quad \text{nicht möglich}\end{aligned}$$

2. Ein Funktionsgenerator erzeugt eine periodische Dreiecksspannung $U(t)$ wie in nebenstehender Abbildung ersichtlich ($\alpha < 1$). Berechne den Mittelwert $\overline{U}$ und den Effektivwert U_{eff} der Spannung. Für welches α ist $U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{2}$?



Lösung: $\overline{U} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T U(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\int_0^{\alpha T} \dfrac{U_0}{\alpha T}\cdot t\,\mathrm{d}t = \dfrac{U_0}{\alpha T^2}\cdot\dfrac{\alpha^2 T^2}{2} = \dfrac{\alpha}{2}\,U_0$

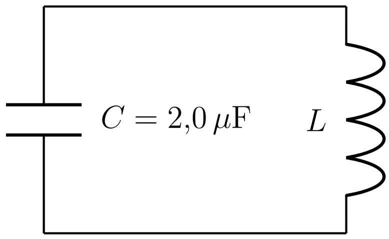
$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U(t)^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} \frac{U_0^2}{\alpha^2 T^2}\cdot t^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{U_0^2}{\alpha^2 T^3}\cdot\frac{\alpha^3 T^3}{3}} = \sqrt{\frac{\alpha}{3}\,U_0^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{3}}\,U_0$$

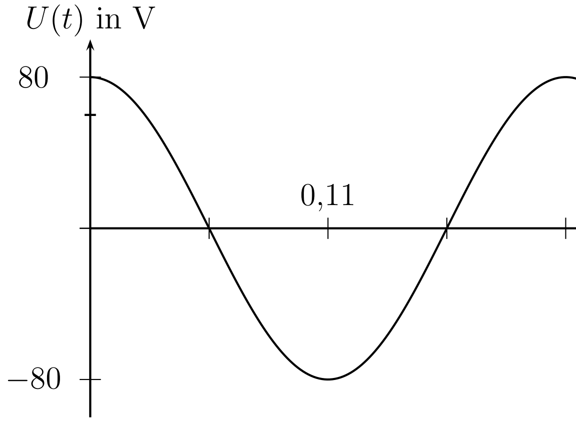
$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{2} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{\frac{\alpha}{3}} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \alpha = \frac{3}{4}$$

26. Wechselstromwiderstände

27. Elektromagnetische Schwingungen

1. Unten links ist das Schaltbild eines idealen elektromagnetischen Schwingkreises abgebildet. Im Diagramm unten rechts ist der zeitliche Verlauf der Spannung am Kondensator wiedergegeben.





Berechne die Ladung, die zur Zeit 0 im Kondensator gespeichert ist und die Induktivität L der Spule. Wie groß ist der Betrag der maximalen Stromstärke und zu welchen Zeiten wird diese während der ersten Periode beobachtet? Welche Energie steckt in dem elektromagnetischen Schwingkreis? Sämtliche zur Bearbeitung der Aufgabe benötigten Größen sind den beiden Abbildungen zu entnehmen.

Lösung: $Q_0 = C\,U_0 = 0{,}16\,\mathrm{mC}$, $L = \dfrac{T^2}{4\,\pi^2\,C} = \dfrac{(0{,}22\,\mathrm{s})^2}{4\cdot\pi^2\cdot 2{,}0\cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}} = 6{,}1\cdot 10^2\,\mathrm{H}$, $I_0 = \omega\,Q_0 = \dfrac{Q_0}{\sqrt{LC}} = 4{,}6\,\mathrm{mA}$; der Betrag der maximalen Stromstärke wird zu den Zeiten $\frac{1}{4}\cdot 0{,}22\,\mathrm{s}$ und $\frac{3}{4}\cdot 0{,}22\,\mathrm{s}$ erreicht. $E = \frac{1}{2}\,C\,U_0^2 = 6{,}4\,\mathrm{mJ}$.

2. Zum Aufbau eines idealen elektromagnetischen Schwingkreises wird ein Keramik–Kondensator der Kapazität 2200 pF und eine Radialfestinduktivität von 33 mH verwendet. Der Kondensator weist eine Toleranz von 20% und die Induktivität von 10% auf. Zwischen welchen Grenzen wird die Eigenfrequenz des Schwingkreises liegen?

Lösung: $16\,\mathrm{kHz} < f < 22\,\mathrm{kHz}$.

3. Ein ungedämpter Schwingkreis hat eine Frequenz von 0,726 kHz. Berechne die Induktivität der Schwingkreisspule, wenn der Kondensator im Schwingkreis eine Kapazität von 4,0 μF hat.

Lösung: 12 mH.

28. Elektromagnetische Wellen

1. **Geheimsender von James Bond**

   Der Schwingkreis eines UKW-Senders besteht aus einer Spule der Länge $l = 5{,}00\,\mathrm{cm}$ mit der Querschnittsfläche $A_\mathrm{S} = 2{,}00\,\mathrm{cm}^2$ und mit $n = 20$ Windungen und aus einem Plattenkondensator mit der Plattenfläche $A_\mathrm{K} = 2{,}85\,\mathrm{cm}^2$ und dem Plattenabstand x.

   (a) Berechne x so, dass der Sender Strahlung mit der Wellenlänge $\lambda = 3{,}00\,\mathrm{m}$ aussendet.

   (b) Der Sender ist in einer Gitarre versteckt, eine Saite der Gitarre wird als Sendeantenne verwendet (induktive Ankopplung an ein Ende der Saite, d.h. an diesem Ende ist ein Strommaximum). Ist der Sender in Betrieb, dann schwingt der „Saitendipol“ genau in der Grundschwingung, zupft James an der Saite, dann erklingt der Kammerton ($f_\mathrm{a} = 440\,\mathrm{Hz}$). Wie groß ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit v einer mechanischen Welle auf der „Antennensaite“?

Lösung: (a) $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2},\quad \varepsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}},\quad \mathrm{H} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{A}^2}$

$$L = \frac{\mu_0 n^2 A_\mathrm{S}}{l} = 2{,}0\cdot 10^{-6}\,\mathrm{H},\qquad C = \frac{\varepsilon_0 A_\mathrm{K}}{x},\qquad f = \frac{c}{\lambda} = 1{,}00\cdot 10^8\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}\quad\Longrightarrow\quad C = \frac{\varepsilon_0 A_\mathrm{K}}{x} = \frac{1}{\omega^2 L}$$

$$x = \varepsilon_0 A_\mathrm{K}\omega^2 L = \underbrace{\varepsilon_0\mu_0 c^2}_{1}\cdot 4\pi^2\cdot\frac{A_\mathrm{K}A_\mathrm{S}n^2}{\lambda^2 l} = 2{,}00\,\mathrm{mm}$$

(b) Länge der Saite: $s = \frac{\lambda}{4} = 0{,}75\,\mathrm{m}$

Wellenlänge der Schallwelle: $\lambda_\mathrm{s} = 2s = 1{,}5\,\mathrm{m}$

Geschwindigkeit der mech. Welle: $v = \lambda_\mathrm{s}\cdot f_\mathrm{a} = 660\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

2. (a) Ein D-Netz-Handy sendet auf der Frequenz $f_\mathrm{D} = 900\,\mathrm{MHz}$, die Frequenz im E-Netz ist $f_\mathrm{E} = 1{,}8\,\mathrm{GHz}$. Berechne die Wellenlängen der beiden Handystrahlungen.

   (b) Eine Schallwelle hat die Frequenz $f = 220\,\mathrm{Hz}$ und die Wellenlänge $\lambda = 1{,}559\,\mathrm{m}$. Berechne die Schallgeschwindigkeit.

   (c) Ein Tsunami mit der Wellenlänge $\lambda = 400\,\mathrm{km}$ breitet sich mit der Geschwindigkeit $v = 800\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ aus. In welcher Zeit T schwingt ein Boot auf dem Tsunami einmal vollständig auf und ab?

Lösung: (a) $\lambda_\mathrm{D} = \frac{c}{f_\mathrm{D}} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9 \cdot 10^8\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 0{,}333\,\mathrm{m}, \quad \lambda_\mathrm{E} = \frac{c}{f_\mathrm{E}} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{18 \cdot 10^8\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 0{,}167\,\mathrm{m}$

(b) $c_\mathrm{S} = \lambda f = 220\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 1{,}559\,\mathrm{m} = 343\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}23 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

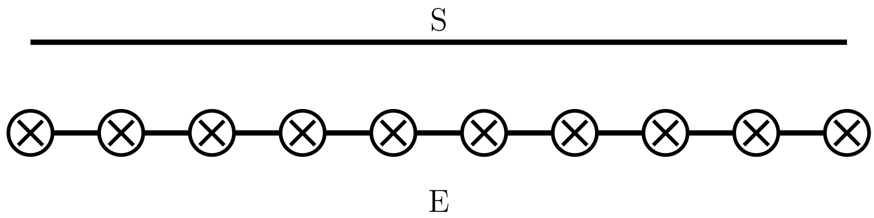
(c) $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{\frac{800}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{400\,000\,\mathrm{m}} = 5{,}55 \cdot 10^{-4}\,\frac{1}{\mathrm{s}} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{1}{f} = 1800\,\mathrm{s} = 30\,\mathrm{min}$

3. In der unten stehenden Abbildung symbolisiert S einen Stabdipol, der zur ersten Oberschwingung angeregt wird. Mit dem Empfänger E, der sich in unmittelbarer Nähe zu S befindet, weist man durch die darauf angebrachten Glübirnen die Stromstärke nach.

   (a) Welche Lagebeziehung sollte E bezüglich S haben, damit der Empfang optimal ist?

   (b) Welche Länge sollte E für ein bestmögliches Versuchsergebnis haben?

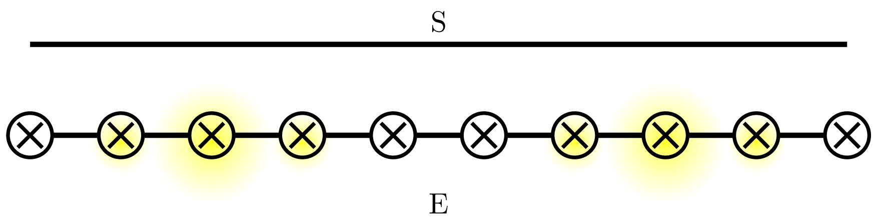
   (c) Skizziere die Helligkeitsverteilung, die sich für die auf E angebrachten Glühbirnen ergibt.



Lösung: (a) E und S sollten parallel sein.

(b) E und S sollten diesselbe Länge haben.

(c)



4. Die Intensität (Bestrahlungsstärke) der $r_\mathrm{E} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\mathrm{m}$ von der Erde entfernten Sonne beträgt am Ort der Erde (außerhalb der Atmosphäre) $S_\odot = 1367\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$.

   (a) Welche Energie W_a strahlt die Sonne in einem Jahr aus?

(b) In welcher Entfernung (in LJ) kann die Sonne gerade noch mit freiem Auge beobachtet werden, wenn dazu am Ort des Beobachters die Intensität der Sonnenstrahlung $S = 9{,}9 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ betragen muss?

Lösung: (a) $W_{\mathrm{a}} = 4\pi r_{\mathrm{E}}^2 S_{\odot} \cdot 1\,\mathrm{a} = 3{,}87 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W} \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 1{,}2 \cdot 10^{34}\,\mathrm{J}$

(b) $\dfrac{r^2}{r_{\mathrm{E}}^2} = \dfrac{S_{\odot}}{S} \quad \Longrightarrow \quad r = r_{\mathrm{E}}\sqrt{\dfrac{S_{\odot}}{S}} = r_{\mathrm{E}} \cdot 3{,}7 \cdot 10^6 = 5{,}6 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m} = 59\,\mathrm{LJ}$

$1\,\mathrm{LJ} = 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\,\dfrac{1}{\mathrm{s}} \cdot c = 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$

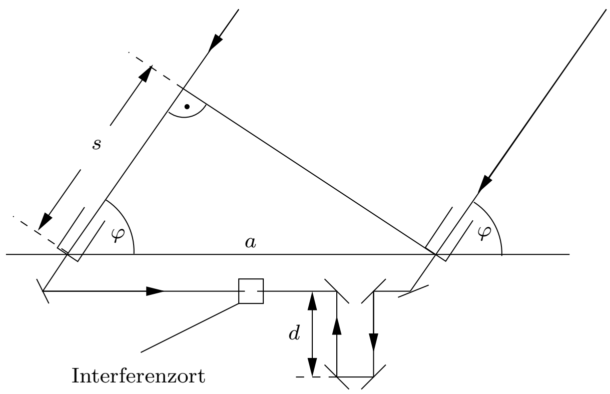
29. Interferenz

1. **Teleskope der ESO (European Southern Observatory)**

   Die Europäische Südsternwarte auf dem Cerro Paranal in Chile besteht unter anderem aus vier großen Teleskopen (VLT, Very Large Telescope) mit einem Spiegeldurchmesser von $A = 8{,}2\,\text{m}$ und drei beweglichen Teleskopen (AT, Auxiliary Telescope) mit $1{,}8\,\text{m}$ Spiegeldurchmesser. Als Beobachtungswellenlänge ist immer $\lambda = 500\,\text{nm}$ zu wählen.

   (a) Welchen Winkelabstand ε dürfen zwei punktförmige Lichtquellen haben, die mit dem VLT gerade noch als getrennte Objekte wahrgenommen werden? Welche Entfernung hätten diese beiden Lichtquellen auf dem Mond (380 000 km von der Erde entfernt)?

   (b) Ein VLT und ein AT sind wie in nebenstehender Abbildung positioniert, der Abstand der Teleskope ist $a = 200\,\text{m}$. Das Licht, das die Teleskope von einem Stern auffangen, wird über ein Spiegelsystem ins Interferenzlabor geleitet. Am Interferenzbild erkennt man, wenn die Delaystrecke $2d$ exakt gleich dem Gangunterschied s der Teilstrahlen ist.



   Ebenfalls durch interferometrische Methoden kann d so genau gemessen werden, dass der Fehler bei der Bestimmung von s in der Größenordnung einer Wellenlänge liegt, d.h. $\Delta s = \lambda$. Wie lautet der Zusammenhang zwischen dem Positionswinkel φ des Sterns, s und a? Beweise mit der Näherungsformel $f(x+h) \approx f(x) + h \cdot f'(x)$ und unter der Annahme, dass a exakt bekannt ist, für den Fehler von φ:

$$\Delta\varphi \approx \frac{\lambda}{a \sin\varphi}\,.$$

   Wie weit dürfen zwei Gegenstände auf dem Mond voneinander entfernt sein, um unter günstigsten Umständen mit der Anordnung aus beiden Teleskopen noch getrennt wahrgenommen werden zu können? Welchem Winkelabstand entspricht das?

Lösung: (a) Maximum der einen Lichtquelle beim 1. Beugungsminimum der anderen:

$$A \sin \varepsilon = 1{,}22 \cdot \lambda \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon \approx \sin \varepsilon = \frac{1{,}22 \cdot \lambda}{A} = 7{,}44 \cdot 10^{-8} = (4{,}26 \cdot 10^{-6})^\circ = 0{,}015''$$

Auf dem Mond: $x = \varepsilon \cdot r = 7{,}44 \cdot 10^{-8} \cdot 3{,}8 \cdot 10^8\,\mathrm{m} = 28{,}3\,\mathrm{m}$

(b) $\cos \varphi = \frac{s}{a}$. Die cos-Funktion ist im Bereich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ monoton fallend, d.h. dem größeren φ entspricht das kleinere s:

$$\cos(\varphi + \Delta\varphi) \approx \cos \varphi - \Delta\varphi \cdot \sin \varphi \approx \frac{s - \Delta s}{a} = \frac{s - \lambda}{a} = \frac{s}{a} - \frac{\lambda}{a} = \cos \varphi - \frac{\lambda}{a}$$

$$\Delta\varphi \approx \frac{\lambda}{a \sin \varphi}$$

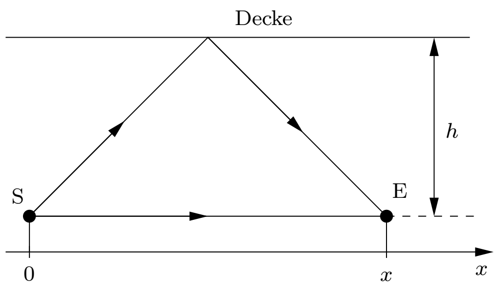
Im günstigsten Fall ($\varphi = 90^\circ$, d.h. $\sin \varphi = 1$) gilt

$$\Delta\varphi \approx \frac{\lambda}{a} = 2{,}5 \cdot 10^{-9} = (1{,}43 \cdot 10^{-7})^\circ = 0{,}00052''$$

Auf dem Mond: $x = \Delta\varphi \cdot r = 2{,}5 \cdot 10^{-9} \cdot 3{,}8 \cdot 10^8\,\mathrm{m} = 0{,}95\,\mathrm{m}$

2. (a) Erläutere anhand einer Skizze, warum es bei der Reflexion einer elektromagnetischen Welle an einer Leiterwand zu einem Phasensprung kommt. Wie groß ist dieser?

(b) Ein großer Hangar ist oben von einer Aludecke abgeschlossen. Der Sender S strahlt elektromagnetische Wellen der Wellenlänge $\lambda = 2{,}00\,\mathrm{m}$ ab. Der Empfänger E wird in Höhe des Senders entlang der x-Achse bewegt. Unter anderem beobachtet man zwei benachbarte Empfangsmaxima bei $x_k = 122{,}5\mathrm{m}$ und bei $x_{k+1} = 93{,}5\mathrm{m}$. Beweise, dass für die Orte der Maxima $x_k = \frac{4h^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2}{2\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda}$ gilt und berechne dann k und die Höhe h der Decke über den Antennen.



Lösung: (a) Feld im Leiter: $\vec{E}_\mathrm{L} = \vec{o} = \vec{E}_\mathrm{e} + \vec{E}_\mathrm{r} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}_\mathrm{r} = -\vec{E}_\mathrm{e}$

$$E_\mathrm{r} = E_0 \sin(kx - \omega t + \Phi) = -E_\mathrm{e} = -E_0 \sin(kx - \omega t) \quad \Longrightarrow \quad \Phi = \pi$$

(b) Gangunterschied: $\delta = 2 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{4} + h^2} - x + \frac{\lambda}{2} = k \cdot \lambda$

$$4\left(\frac{x^2}{4} + h^2\right) = \left(x + \left(k - \frac{1}{2}\right))\lambda\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad 4h^2 = 2x\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda + \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2$$

$$\Longrightarrow \quad x = x_k = \frac{4h^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2}{2\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt zwei Gleichungen:

$$4h^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4\,\mathrm{m}^2 = (2k-1)\cdot 245\,\mathrm{m}^2$$

$$4h^2 - \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4\,\mathrm{m}^2 = (2k+1)\cdot 187\,\mathrm{m}^2$$

$$4h^2 + \left(-k^2 + k - \frac{1}{4}\right) \cdot 4\,\mathrm{m}^2 = 490\,\mathrm{m}^2\cdot k - 245\,\mathrm{m}^2$$

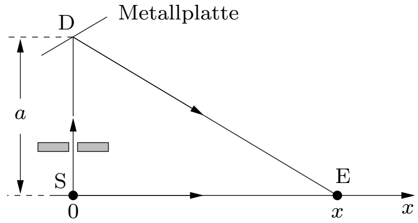
$$-4h^2 + \left(k^2 + k + \frac{1}{4}\right) \cdot 4\,\mathrm{m}^2 = -374\,\mathrm{m}^2\cdot k - 187\,\mathrm{m}^2$$

$$k\cdot 8\,\mathrm{m}^2 = 116\,\mathrm{m}^2\cdot k - 432\,\mathrm{m}^2$$

$$k = 4$$

In eine der Ausgangsgleichungen eingesetzt folgt $h = 21\,\mathrm{m}$.

3. Ein senkrecht zur Zeichenebene stehender Dipol im Ursprung O eines Koordinatensystems sendet mit der Wellenlänge λ. Eine um den Punkt D $(0|a)$ auf der y-Achse drehbare Metallplatte reflektiert ein schmales Strahlenbündel zum Empfänger bei E $(x|0)$ auf der *positiven* x-Achse.



   (a) Berechne den Gangunterschied δ der beiden in E eintreffenden Wellen. Wähle den Ansatz so, dass $\delta > 0$ gilt.

   (b) Beweise für die Orte mit maximaler Intensität auf der x-Achse:

$$x_k = \frac{\beta(2a-\beta)}{2(\beta-a)} \quad \text{mit} \quad \beta = \left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z}$$

   (c) Warum muss $\beta > 0$ gelten? Beweise, dass aus $x_k > 0$ die Einschränkung $a < \beta < 2a$ folgt.

   (d) Berechne die Orte aller Intensitätsmaxima auf der positiven x-Achse für die speziellen Werte $a = 25{,}0\,\mathrm{m}$ und $\lambda = 5{,}00\,\mathrm{m}$.

Lösung: (a) Gangunterschied: $\delta = a + \sqrt{a^2+x^2} - x + \dfrac{\lambda}{2}$

(b) $\delta = k\cdot\lambda \quad \Longrightarrow$

$$\sqrt{a^2+x_k^2} = \left(k-\frac{1}{2}\right)\lambda - a + x_k = \beta - a + x_k$$

$$a^2 + x_k^2 = \beta^2 - 2a\beta + a^2 + 2(\beta-a)x_k + x_k^2$$

$$0 = \beta^2 - 2a\beta + 2(\beta-a)x_k$$

$$x_k = \frac{\beta(2a-\beta)}{2(\beta-a)} = \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\lambda\left[2a - \left(k-\frac{1}{2}\right)\lambda\right]}{2\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\lambda - a\right]}$$

(c) $\beta = a + \sqrt{a^2 + x^2} - x_k > 0$, da Strecke kürzeste Verbindung zweier Punkte.

$$x_k > 0 \text{ und } \beta > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2a-\beta}{2(\beta - a)} > 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$(2a - \beta > 0 \wedge \beta - a > 0) \vee (2a - \beta < 0 \wedge \beta - a < 0)$$

$$(2a > \beta \wedge \beta > a) \vee (2a < \beta \wedge \beta < a)$$

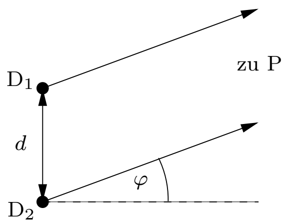
$$a < \beta = \left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda < 2a \qquad \text{(nicht möglich wegen } a > 0\text{)}$$

(d) $a < \underbrace{\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda}_{\beta} < 2a \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{\lambda} + \frac{1}{2} < k < \frac{2a}{\lambda} + \frac{1}{2}$

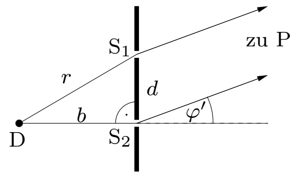
$$\frac{a}{\lambda} = 5 \quad \Longrightarrow \quad 5{,}5 < k < 10{,}5 \quad \Longrightarrow \quad 6 \leqq k \leqq 10$$

k	6	7	8	9	10
x_k in m	123,75	37,92	18,75	9,11	2,64

4. (a) Zwei Dipole D_1 und D_2, deren Achsen senkrecht zur Zeichenebene stehen, schwingen gleichphasig und gleich stark mit der Frequenz $f = 0{,}100\,\text{GHz}$, der Abstand der Dipolachsen ist $d = 5{,}00\,\text{m}$. Für welche Winkel φ_k ($-90° \leqq \varphi_k \leqq 90°$) hat die Strahlungsintensität in einem weit entfernten Punkt P Maxima?



(b) In einer zweiten Anordnung wird nur ein Sendedipol verwendet, dessen Strahlung auf zwei enge Spalte mit Abstand $d = 5{,}00\,\text{m}$ fällt (siehe nebenstehende Abbildung). Für welche Winkel φ'_k gibt es hier Maxima der Strahlungsintensität, wenn $b = \overline{DS_2} = 12{,}00\,\text{m}$ ist?



(c) Für welche Wahl von $b = \overline{DS_2}$ sind die Maximumswinkel beider Anordnungen gleich ($\varphi_k = \varphi'_k$)?

Lösung: (a) $\lambda = \frac{c}{f} = 3{,}00\,\text{m}, \quad d \sin\varphi_k = k\lambda, \quad \sin\varphi_k = k \cdot \frac{\lambda}{d} = 0{,}6k$

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \arcsin 0{,}6 = 36{,}9°, \quad \varphi_{-1} = -\varphi_1$$

(b) Der Gangunterschied der beiden Strahlen ist

$$\delta = b + d\sin\varphi'_k - r = b + d\sin\varphi'_k - \sqrt{b^2 + d^2} = 5\,\text{m} \cdot \sin\varphi'_k - 1\,\text{m} = k\lambda$$

$$\sin\varphi'_k = \frac{1\,\text{m} + k \cdot 3\,\text{m}}{5\,\text{m}} = 0{,}2 + 0{,}6k$$

$$|0{,}2 + 0{,}6k| \leqq 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 \leqq 0{,}2 + 0{,}6k \leqq 1 \quad \Longrightarrow \quad -2 \leqq k \leqq 1$$

$$\varphi'_{-2} = \arcsin(-1) = -90°, \qquad \varphi'_{-1} = \arcsin(-0{,}4) = -23{,}6°$$
$$\varphi'_{0} = \arcsin(0{,}2) = 11{,}5°, \qquad \varphi'_{1} = \arcsin(0{,}8) = 53{,}1°$$

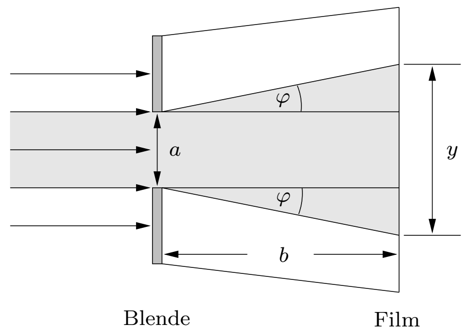
(c) $r - b = k\lambda$ mit $k \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow$

$$\sqrt{b^2 + d^2} = b + k\lambda \quad \Longrightarrow \quad b^2 + d^2 = b^2 + 2bk\lambda + k^2\lambda^2$$

$$b = \frac{d^2 - k^2\lambda^2}{2k\lambda} = \frac{25 - 9k^2}{6k}\,\mathrm{m} \overset{(k=1)}{=} = \frac{8}{3}\,\mathrm{m} = 2{,}67\,\mathrm{m}$$

30. Beugung

1. Das „Objektiv“ einer Lochkamera ist eine Blende mit einem kreisförmigen Loch mit dem Durchmesser a. Die Blende hat zum Film den Abstand b. Licht von einer weit entfernten Quelle (Stern) fällt senkrecht auf die Blende. Der Durchmesser y des Bildpunktes auf dem Film wird in guter Näherung wie in nebenstehender Abbildung ermittelt. Dabei ist φ der Winkel zum ersten Beugungsminimum bei sehr weit entferntem Schirm.



   (a) Drücke y durch a, b und λ aus. Vereinfache den gefundenen Term für $a \gg \lambda$.

   (b) Für welchen Wert a_0 von a ist y minimal? Drücke den minimalen Durchmesser y_{min} des Bildes durch b und λ aus.

   (c) Berechne y_{min} für $b = 20\,\text{cm}$ und $\lambda = 500\,\text{nm}$.

Lösung: (a) $a \sin\varphi = 1{,}22\lambda \quad \Longrightarrow$

$$y = a + 2b\tan\varphi = a + \frac{2b\sin\varphi}{\cos\varphi} = a + \frac{2b\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = a + \frac{2b \cdot \frac{1{,}22\lambda}{a}}{\sqrt{1-\frac{1{,}22^2\lambda^2}{a^2}}}$$

$$\lambda \ll a \quad \Longrightarrow \quad \frac{1{,}22^2\lambda^2}{a^2} \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{1{,}22^2\lambda^2}{a^2} \approx 1 \quad \Longrightarrow \quad y \approx a + \frac{2{,}44\,b\lambda}{a}$$

(b) $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a} = 1 - \frac{2{,}44\,b\lambda}{a^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = a_0 = \sqrt{2{,}44\,b\lambda}$$

$$y_{\text{min}} = y(a_0) = a_0 + \frac{2{,}44\,b\lambda}{\sqrt{2{,}44\,b\lambda}} = a_0 + \sqrt{2{,}44\,b\lambda} = 2a_0 = 2\sqrt{2{,}44\,b\lambda}$$

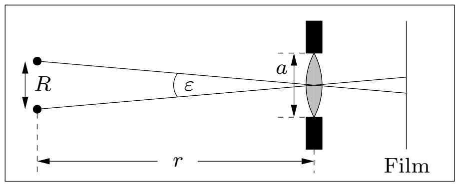
(c) $y_{\text{min}} = 2\sqrt{2{,}44 \cdot 0{,}2 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}\,\text{m} = 9{,}9 \cdot 10^{-4}\,\text{m} = 0{,}99\,\text{mm}$

2. (a) Leite anhand einer Skizze die Formel für die Winkel der Interferenzmaxima beim Doppelspalt her.

   (b) Zeige an einem Winkel-Intensitäts-Diagramm den Unterschied der Interferenzbilder zwischen Doppelspalt und Gitter.

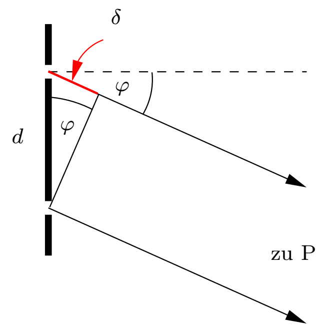
(c) Wie leitet man die Formel für die Intensität bei der Beugung am Einfachspalt der Breite a her? (Beschreibung der wesentlichen Gedankengänge, Herleitung *nicht* ausführen!)

(d) Ersetzt man in der Formel für das erste Minimum beim Einfachspalt der Breite a auf der rechten Seite $1 \cdot \lambda$ durch $1{,}22 \cdot \lambda$, dann hat man die Formel für das erste Minimum bei der Beugung an einer kreisförmigen Blende mit dem Durchmesser a. Erläutere, warum es einen minimalen Winkel ε gibt, unter dem zwei weit entfernte Punkte von einem Teleskop (Objektivdurchmesser a) gerade noch als getrennte Punkte aufgelöst werden können und leite eine Beziehung zwischen ε und a her. Mit dem gigantischen Keck-Teleskop auf Hawaii ($a = 10\,\mathrm{m}$) sucht man nach Planeten um ferne Sonnen. Bis zu welcher Entfernung r (in LJ) könnte ein Planet gerade noch entdeckt werden, der die gleiche Entfernung zum Stern hat wie die Erde zur Sonne (das Problem der unterschiedlichen Helligkeiten bleibe dahingestellt)? Verwende als Wellenlänge den Mittelwert des sichtbaren Bereichs!

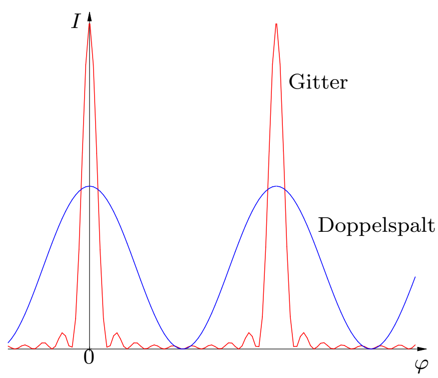


Lösung: (a) Der Gangunterschied der beiden parallelen Strahlen (weit entfernter Beobachter P) ist $\delta = d \sin\varphi$. Maxima der Intensität gibt es für $\delta = k\lambda$ mit $k \in \mathbb{Z}$, d.h.

$$\sin\varphi_k = \frac{k\lambda}{d}$$

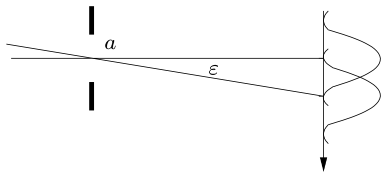


(b) Der Graf der Intensität des Doppelspalts ist überhöht gezeichnet!



(c) n gleichphasige und gleichstarke Einzelsender äquidistant über die Spaltbreite verteilt und dann $n \to \infty$.

(d) Wegen der Beugung an der Eintrittsöffnung sind die Bilder der punktförmigen Gegenstände keine Punkte, sondern Scheibchen. Zwei dieser Scheibchen können noch als getrennet wahrgenommen werden, wenn das Hauptmaximum des einen Punktes auf das erste Minimum des anderen Punktes fällt:



$$a \sin \varepsilon = 1{,}22\lambda$$

Mit $a = 10\,\mathrm{m}$ und $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$ ist $\varepsilon \ll 1$:

$$\frac{R}{2r} = \tan \frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{\sin \varepsilon}{2} = \frac{1{,}22\lambda}{2a}$$

Mit $1\,\mathrm{LJ} = 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$ folgt

$$r = \frac{Ra}{1{,}22\lambda} = 2{,}05 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m} = 217\,\mathrm{LJ}$$