SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Mechanik (Physik)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

23. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Statik

1. Gewichtskraft

1. (a) Gewichtskraft auf dem Mond: 122N. Also würde er höher springen als auf der Erde.
   (b) $m = \frac{76kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{1{,}6\frac{m}{s^2}} = 466kg$

2. (a) $F = 206N$
   (b) Die ortsunabhängige Masse ist nach wie vor 21 kg. Über die ortsabhängige Gewichtskraft kann er keine Aussage machen, da er den Ortsfaktor nicht kennt.
   (c) Der Astronaut benötigt z. B. eine kalibrierte (geeichte) Federwaage, mit der er die Gewichtskraft bestimmen kann.
   (d) Wenn er ein Drittel der Körner verzehrt, bleiben noch zwei Drittel der Körner übrig. Da die Zahl der Körner proportional zur Masse ist, gilt: $m' = \frac{2}{3} \cdot m = 14kg$
   (e) $F' = m' \cdot g_P \Rightarrow g_P = \frac{206N}{14kg} = 15\frac{N}{kg}$

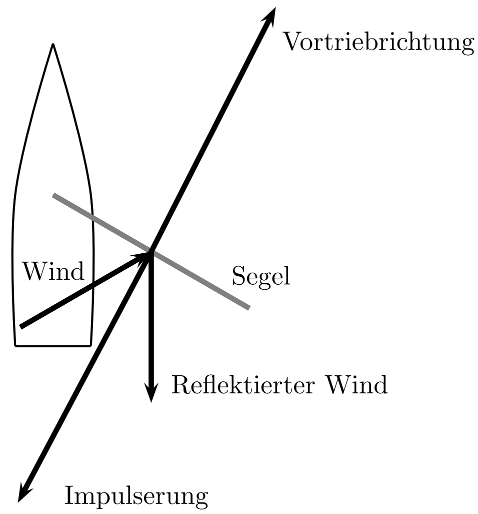
3. Am Boden hängen die Tragflächen durch das Gewicht des Triebwerks und das Eigengewicht nach unten durch. Im Flug hängt ein Flugzeug sozusagen an den Tragflächen (wird durch den Auftrieb an den Tragflächen hochgehoben), diese biegen sich also nach oben durch (außen am meisten). Bei der Boeing 707 liegt die Durchbiegung der Tragflächenspitze (gegenüber der Position am Boden) beim Geradeausflug in ruhiger Luft bei einem Meter. Die Grenzdurchbiegung liegt bei 3m aufwärts und 0,9m abwärts.

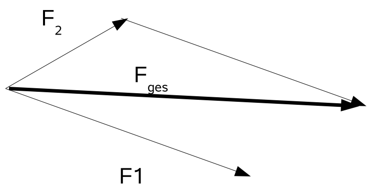
4. (a) $9{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} : \left(\frac{11}{4}\right)^2 = 1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
   (b) $9{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 22 = 2{,}0 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
   (c) $9{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} : \left(\frac{11}{4}\right)^2 \cdot 22 = 26\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

5. $3{,}73\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{17{,}2}{0{,}107} : \left(\frac{3{,}8}{0{,}533}\right)^2 = 11{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

2. Kräftezerlegung

1. Wegen der idealisierenden Annahme des ebenen Segels wird der Wind nach dem Reflexionsgesetz reflektiert. Durch die Reflexion erhalten wir eine Impulserung, die eine Kraft bewirkt. Wegen actio gegengleich reactio erhalten wir die angegebene Vortriebrichtung. Die Vortriebrichtung steht somit immer senkrecht auf dem Segel.

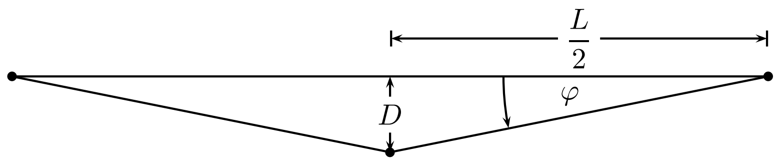


2. 

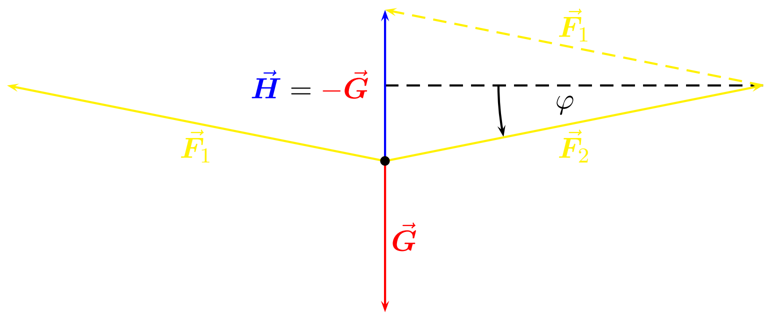
3. $10,4kN$

4. $304N$

5. (a) 90N
   (b) Kraft wird kleiner

6. 

Es gilt $\tan\varphi = \dfrac{2\,D}{L}$



Es gilt mit $F = F_1 = F_2$

$$\sin\varphi = \frac{G}{2\,F}$$

Nun gilt für kleine Winkel φ: $\quad \sin\varphi \approx \tan\varphi$, also

$$\frac{G}{2\,F} = \frac{2\,D}{L} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{L}{D}\cdot\frac{G}{4} \approx \frac{L}{D}\cdot\frac{m\cdot 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{1\,\mathrm{kN}} = \frac{L}{D}\cdot\frac{\frac{m}{\mathrm{kg}}}{400}$$

Weitere interessante Tatsachen:

- Durch Wippen auf der slackline vergrößert sich die Belastung um das 1,5– bis 2–fache.
- Beim Klettern benutzte Bänder haben eine Reißfestigkeit von 10 kN bis 20 kN.
- Durch einen Knoten im Seil verringert sich die Reißum etwa 50%.

3. Reibungskraft

1. (a) Zugkraft: Teil der Kette, der über die Tischkante nach unten hängt (Länge l_u)

   Reibungskraft: Teil der Kette, der auf dem Tisch liegt (Länge l_o)

   (b) $\mu m \frac{l_o}{l} g = m \frac{l_u}{l} g \Rightarrow \mu = \frac{l_u}{l_o} = \frac{10cm}{40cm} = 0,25$

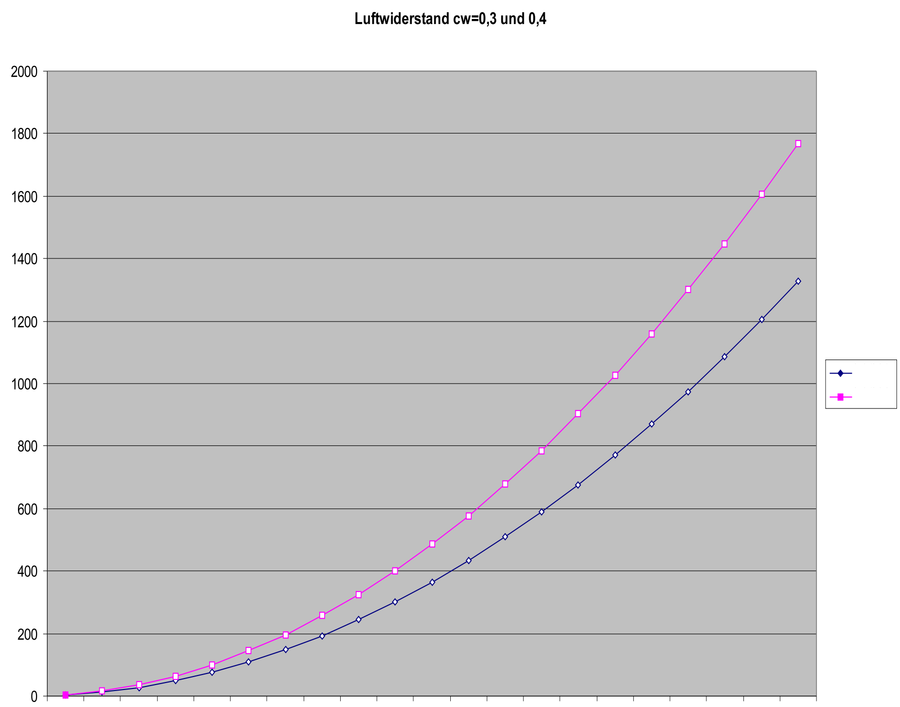
   (c) i. Länge wird größer

   ii. keine Veränderung, da nur das Massenverhältnis der beiden Teile eingeht

2. Die anfangs ruhenden Flugzeugräder müssen beim Aufsetzen erst in Bewegung versetzt werden, deswegen schlittern sie anfangs über die Landebahn, mit entsprechend großem Abrieb (und Reibungswärme), den man als Qualm sieht. Beim Aufsetzen bewegt sich der Untergrund gegen das Flugzeug, und die Reifen ruhen anfänglich; beim Kavalierstart ruht der Untergrund anfänglich gegen das Auto, und die Reifen bewegen sich; in beiden Fällen gibt es eine Relativbewegung von Reifen und Untergrund, mit entsprechenden Begleiterscheinungen durch Reibung (Abrieb, Qualmen, Quietschen).

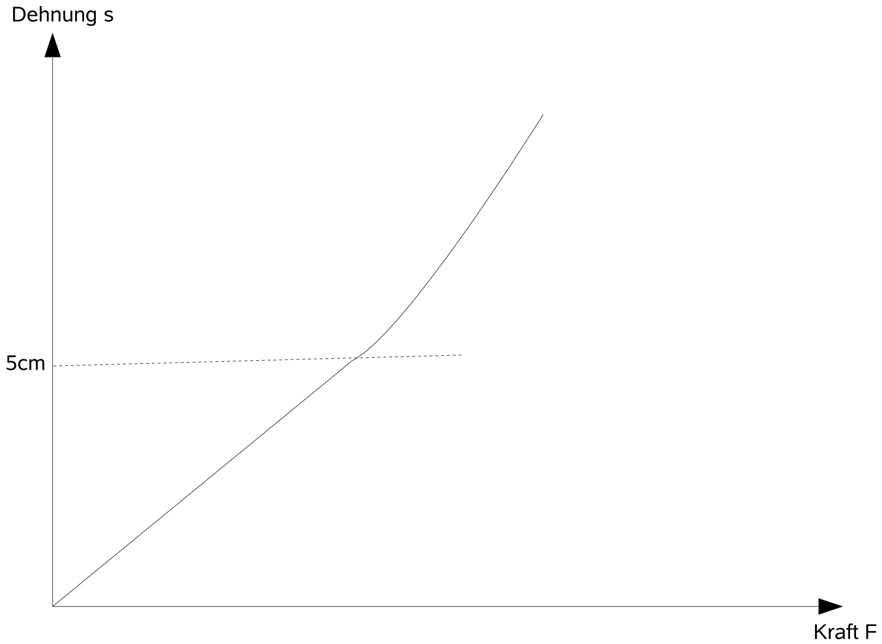
3. .

v	F_L	v	F_L
10	3,009259	10	4,012346
20	12,037037	20	16,049383
30	27,083333	30	36,111111
40	48,148148	40	64,197531
50	75,231481	50	100,308642
60	108,333333	60	144,444444
70	147,453704	70	196,604938
80	192,592593	80	256,790123
90	243,750000	90	325,000000
100	300,925926	100	401,234568
110	364,120370	110	485,493827
120	433,333333	120	577,777778
130	508,564815	130	678,086420
140	589,814815	140	786,419753
150	677,083333	150	902,777778
160	770,370370	160	1027,160494
170	869,675926	170	1159,567901
180	975,000000	180	1300,000000
190	1086,342593	190	1448,456790
200	1203,703704	200	1604,938272
210	1327,083333	210	1769,444444


Luftwiderstand cw=0,3 und 0,4
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0

4. Hookesches Gesetz

1. Wenn die Federhärte D kleiner wird, heißt dies, dass $D = \frac{F}{s}$ kleiner wird. Damit wird die Steigung der Kurve im F-s-Diagramm ($\frac{\Delta s}{\Delta F}$) größer.



2. (a) Die Federdehnung auf dem Mond ist ein Sechstel von der auf der Erde. Damit ist der Ortsfaktor auf dem Mond ein Sechstel von dem auf der Erde: $9,8\frac{m}{s^2} : 6 = 1,6\frac{m}{s^2}$

   (b) $D = \frac{F}{s} = 65,4\frac{N}{m}$

   (c) $F_{Stein} = 5,9N$, $m = 3,7kg$. Die Masse des Normkörpers ist auf dem Mond auch 1kg. Bei einem Fußtritt wird der Normkörper beschleunigt und für die dazu notwendige Kraft ist entscheidend welche Körpermasse vorliegt. Der Fußtritt schmerzt also auf dem Mond genauso wie auf der Erde.

5. Kraftwandler

1. (a) $F = \frac{1}{2^n} \cdot G$; $s = 2^n \cdot h$

   (b)

   (c) experimentell bestimmte Zugkraft ist größer, wegen Reibung und Gewicht der Rollen

2. (a) Bernd soll näher zum Mittelpunkt der Wippe rutschen, dann kann er mit Clara wippen. Bernd ist schwerer als Clara. Bei geeigneten Abständen der Kinder zum Drehpunkt ist die Wippe dennoch im Gleichgewicht. Durch Störung des Gleichgewichtes können die Kinder wippen. Das ist möglich durch Abstoßen (zusätzliche Kraft) oder durch Verlagerung der Schwerpunkte (Änderung der Abstände zum Drehpunkt).

   (b) Beim ersten Mal ist das Zerbrechen ohne großen Kraftaufwand durchzuführen. Die zwei entstandenen kürzeren Stücke sind nur mit einem deutlich höheren Kraftaufwand zu zerbrechen. Das Streichholz kann in diesem Fall als ein zweiseitiger Hebel angesehen werden. Beim ersten Bruch sind die beiden Hebelarme noch länger (geringerer Kraftaufwand). Beim Zerbrechen der kurzen Stücke sind die Hebelarme kürzer (größerer Kraftaufwand).

3. 450 N; 780 N.

4. $F = \frac{1}{6}\,(5{,}6\,\mathrm{kg} + 3 \cdot 0{,}120\mathrm{kg}) \cdot g = 9{,}7\,\mathrm{N}$.

5. 250 N; 8,0 m; 2,0 kJ.

6. Dichte

1. (a) $m = 12t$, $G = 0,12MN$
   (b) Bei der Umwandlung von Schnee in Wasser bleibt die Masse (12t) erhalten. Die Masse der Luft kann vernachlässigt werden. $\Rightarrow 12000l$
   (c) Aus $60m^3$ Schnee entstehen $12m^3$ Wasser, also müssen in Schnee $48m^3$ Luft enthalten sein. Also sind $\frac{4}{5}$ des Schneevolumens Luft. Damit sind in $1dm^3 = 1000cm^3$ Schnee $800cm^3$ Luft enthalten.

2. $7,6\%$

3. (a) $\varrho \approx \frac{m}{V} = \frac{A \cdot m_{\mathrm{N}}}{\frac{4}{3} \cdot \left(r_0 \cdot \sqrt[3]{A}\right)^3 \cdot \pi} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{m_{\mathrm{N}}}{r_0^3} = 1{,}5 \cdot 10^{17}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, wobei $r_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$.
   (b) $1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{kg}$; ≈ 97 Mio.
   (c) $r \approx \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m_{\mathrm{Erde}}}{4\pi \cdot \varrho}} = 214\,\mathrm{m}$

7. Druck

1. Der Kabinendruck bei Reiseflughöhe beträgt nur ca. 80% des Normaldrucks, die Behälter werden aber unter Normaldruck befüllt. Sie stehen also während des Fluges gegenüber der Kabine unter Überdruck.

2. (a) $785\frac{N}{m^2}$
   (b) $1,3\frac{kN}{cm^2}$
   (c) $1,3m$

3. Solange der Eimer ganz oder teilweise im Wasser ist, hilft der Auftrieb den Eimer zu heben.

4. (a) Der Kraftmesser zeigt die Gewichtskraft auf das Metallstück (und den Faden) an, die Waage die Masse des gefüllten Zylinders.
   (b) Nach dem Eintauchen wird die angezeigte Kraft aufgrund der Auftriebskraft verringert. Der Auftrieb bewirkt andererseits eine Erhöhung der Anzeige der Waage.

5. $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}} = 12500\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad \Longrightarrow \quad F = ma = 0{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 12500\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 5{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$

   $p = \dfrac{F}{A} = \dfrac{5{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{N}}{20 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2} = 2{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{Pa} = 2{,}5 \cdot 10^2\,\mathrm{MPa}$

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13. $p = \varrho_{\mathrm{Wasser}} g h = 1000\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}81\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 5\,\mathrm{m} = 49050\,\mathrm{Pa} \approx 491\,\mathrm{hPa}$

    $F = pA = 49050\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = 19{,}62\,\mathrm{N} \approx 19{,}6\,\mathrm{N}$

$$F = Dx \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{F}{D} = \frac{19{,}62\,\mathrm{N}}{196\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = 0{,}100\,\mathrm{m} = 10{,}0\,\mathrm{cm}$$

14. Auftrieb = Gewichtskraft des verdrängten Wassers:

$$F_\mathrm{A} = \varrho_\mathrm{Wasser} V g = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \cdot \underbrace{5 \cdot 7 \cdot 9}_{315}\,\mathrm{cm}^3 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 0{,}315\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 3{,}09\,\mathrm{N}$$

$$F_2 = F_1 - F_\mathrm{A} = 8{,}35\,\mathrm{N} - 3{,}09\,\mathrm{N} = 5{,}26\,\mathrm{N}$$

Teil II.

Kinematik

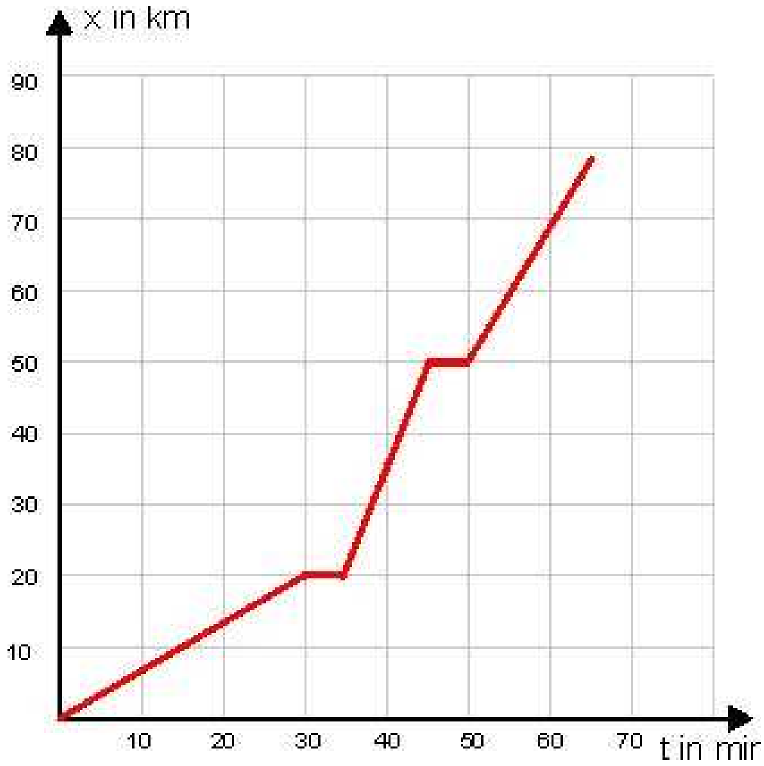
8. Gleichförmige Bewegung

1. (a) $v = 126\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 35{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad \Delta x = v\Delta t \quad \Longrightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{200\,\mathrm{m}}{35{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 5{,}71\,\mathrm{s}$

   (b) $Dx_1 = m_1 g \quad \Longrightarrow \quad D = \frac{m_1 g}{x_1} = \frac{0{,}05\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}{7{,}5\,\mathrm{cm}} = 0{,}065\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}} = 6{,}5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

   $Dx_2 = m_2 g \quad \Longrightarrow \quad m_2 = \frac{Dx_2}{g} = \frac{\frac{m_1 g}{x_1}\cdot x_2}{g} = \frac{m_1 x_2}{x_1} = 32\,\mathrm{g}$

2. (a) Zeit-Orts-Diagramm.



   (b) Zwischen Tutzing und Weilheim ist der Zug am schnellsten, da dort die Steigung der Geraden am größten ist.

   Zwischen München und Tutzing ist der Zug am langsamsten, da dort die Steigung der Geraden am kleinsten ist.

   (c) $v = \frac{x}{t} = \frac{78km}{1{,}083h} = 72\frac{km}{h}$

   (d) $t = \frac{x}{v} = \frac{60km}{72\frac{km}{h}} = 50min$

3. (a) $\frac{-18-(-30)}{1-0}=12,\ \frac{-12-(-18)}{1{,}5-1}=12,\ \frac{8-(-12)}{3-1{,}5}=\frac{40}{3}\neq 12,\ \frac{20-8}{4-3}=12$
$\Longrightarrow$ nicht gleichförmig!

   (b) gleichförmig!

4. (a) $v=1\,\frac{\text{cm}}{\text{h}}=\frac{1}{360\,000}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}=2{,}\overline{7}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}=10^{-5}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}=0{,}24\,\frac{\text{m}}{\text{d}}$

   (b) $c=3\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}=1{,}08\cdot 10^9\,\frac{\text{km}}{\text{h}}=300\,\frac{\text{mm}}{\text{ns}}$

   (c) $v_1=75\,\frac{\text{Trara}}{\text{Triri}}=937\,500\,\frac{\text{Trari}}{\text{Truru}},\ v_2=75\,\frac{\text{Trara}}{\text{Truru}}=375\,\frac{\text{Trari}}{\text{Triri}}$

5. (a) $v=\frac{(82{,}5-65)\,\text{km}}{(8\cdot 60+20)\,\text{s}}=\frac{17{,}5\,\text{km}}{500\,\text{s}}=35\,\frac{\text{m}}{\text{s}}=126\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

   (b) $x(t)=x_0+v\cdot t,\ x_0=x(t)-v\,t=65\,\text{km}-35\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot(11\cdot 60+28)\,\text{s}=40{,}92\,\text{km}\approx 41\,\text{km}$

   (c) $t_0=\frac{x_0}{v}=1169\,\text{s}\approx 1{,}2\cdot 10^3\,\text{s}$

6. Die Startzeit sei $t_0=0$.

$x_1(t)=30\,\text{km}+80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot t$

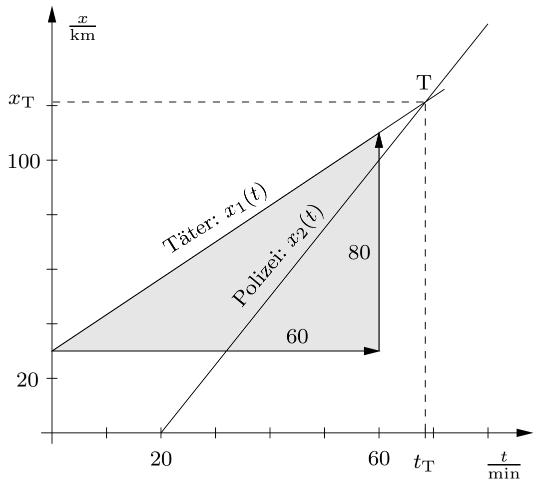
$x_2(t)=0\,\text{km}+150\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot(t-\frac{1}{3}\,\text{h})=$

$=-50\,\text{km}+150\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot t$

Treffpunkt: $x_1(t)=x_2(t)\quad\Longrightarrow$

$t_\text{T}=\frac{8}{7}\,\text{h}\approx 1\,\text{h}\,9\,\text{min}$

$x_\text{T}=121\,\text{km}$



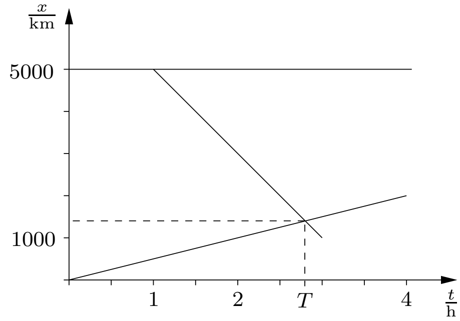
7. R_1: $x_1(t)=500\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot t$

R_2: $x_2(t)=5000\,\text{km}-2000\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot(t-1\,\text{h})=$

$=7000\,\text{km}-2000\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot t$

$x_1(T)=x_2(T)\quad\Longrightarrow\quad T=2{,}8\,\text{h}$

$x(T)=1400\,\text{km}$



8. $x_\mathrm{D}(t) = 11{,}2\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot (t - 1\,\mathrm{h}) = 11{,}2\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t - 11{,}2\,\mathrm{km}$

$x_\mathrm{K}(t) = 14{,}4\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot (t - 7\,\mathrm{h}) = 14{,}4\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t - 100{,}8\,\mathrm{km}$

$x_\mathrm{D}(T) = x_\mathrm{K}(T) \quad \Longrightarrow \quad T = 28\,\mathrm{h}$ (4 : 00 am nächsten Tag)

$X = x_\mathrm{D}(T) = 302{,}4\,\mathrm{km} \approx 302\,\mathrm{km}$

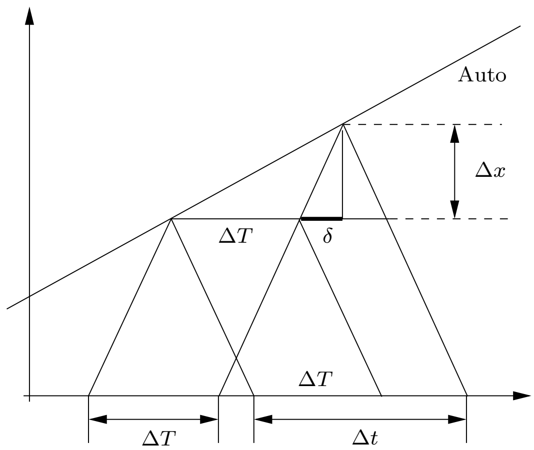
9. $\delta = \frac{1}{2}(\Delta t - \Delta T)$

$\Delta t_1 = \Delta T + \delta = \frac{1}{2}(\Delta t + \Delta T)$

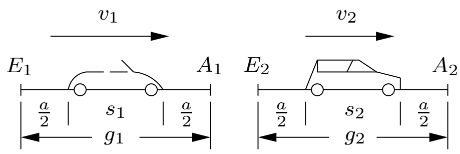
$\Delta x = c \cdot \delta$

$v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t_1} = \dfrac{c(\Delta t - \Delta T)}{\Delta t + \Delta T}$

$v = \dfrac{c}{16} = 21{,}25\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 76{,}5\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$



10. (a) Wir denken uns die Autos vorne und hinten um je einen halben Sicherheitsabstand verlängert. Wenn der Anfang A_1 des verlängerten Autos 1 auf das Ende E_2 des verlängerten Autos 2 trifft beginnt der Überholvorgang (Zeitnulpunkt). Der Überholvorgang endet zur Zeit T, wenn E_1 auf A_2 trifft.



$A_2: \quad x_2(t) = g_2 + v_2 t$

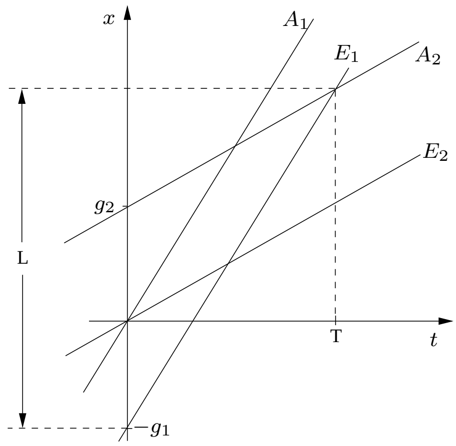
$E_1: \quad x_1(t) = -g_1 + v_1 t$

Aus $x_1(T) = x_2(T)$ folgt

$$T = \frac{g_1 + g_2}{v_1 - v_2} = \frac{s_1 + s_2 + 2a}{v_1 - v_2}$$

und damit

$$L = v_1 T = \frac{v_1(s_1 + s_2 + 2a)}{v_1 - v_2}$$



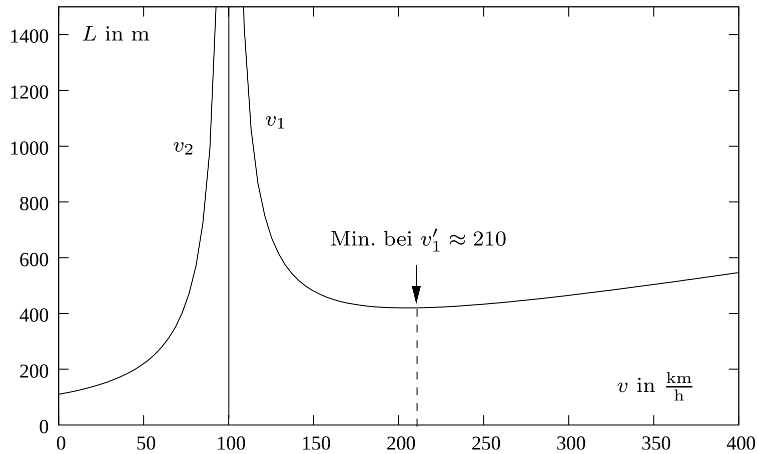
(b) Der Geschwindigkeit $v_1 = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ entspricht der Sicherheitsabstand $a = 50\,\mathrm{m}$, d.h.

$$\alpha = \frac{a}{v_1} = \frac{50\,\mathrm{m}}{100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = \frac{50\,\mathrm{m} \cdot 3600\,\mathrm{s}}{100\,000\,\mathrm{m}} = 1{,}8\,\mathrm{s} = 0{,}0005\,\mathrm{h}$$

(c) Im Folgenden seien v_1' und v_2' die reinen Zahlenwerte der Geschwindigkeiten, d.h. $v_1 = v_1' \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und $v_2 = v_2' \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

$$L = \frac{v_1(s_1 + s_2 + 2\alpha v_1)}{v_1 - v_2} = \frac{v_1' \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}(10\,\mathrm{m} + 0{,}001\,\mathrm{h}\cdot v_1' \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}})}{v_1' \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = \frac{v_1'(10 + v_1')}{v_1' - 100}\,\mathrm{m}$$

v_1'	105	110	120	140	160	200	300
L in m	2415	1320	780	525	453	420	465



(d) $$L = \frac{v_1(s_1 + s_2 + 2\alpha v_1)}{v_1 - v_2} = \frac{100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}(10\,\mathrm{m} + 0{,}001\,\mathrm{h}\cdot 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}})}{100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - v_2' \,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = \frac{11000}{100 - v_2'}\,\mathrm{m}$$

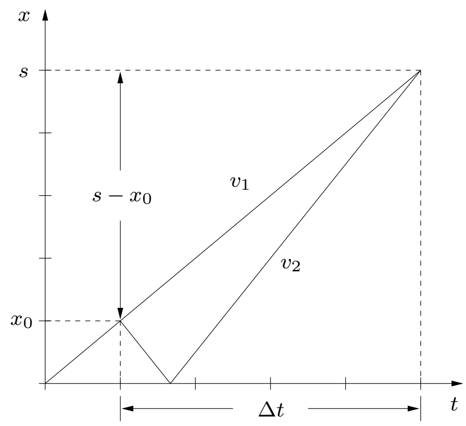
v_2'	0	10	50	70	80	90	95
L in m	110	122	220	367	550	1100	2200

11. In der Zeit Δt, in der Herr Wilhelm die Strecke $s - x_0$ mit der Geschwindigkeit v_1 zurücklegt, läuft Kathi mit der Geschwindigkeit v_2 die Strecke $s + x_0$:

$$\Delta t = \frac{s - x_0}{v_1} = \frac{s + x_0}{1{,}5\,v_1}$$

$$1{,}5\,s - 1{,}5\,x_0 = s + x_0$$

$$x_0 = \frac{0{,}5\,s}{2{,}5} = \frac{s}{5} = 0{,}2\,s$$

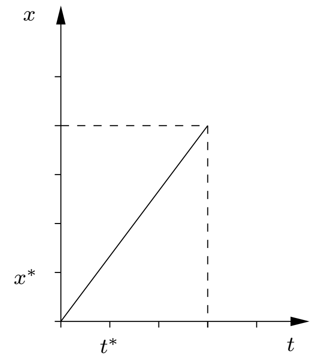


12.

(a) Da Weltlinien zu gleichen Geschwindigkeiten parallel sind, können wir annehmen, dass unsere Weltlinie durch den Ursprung geht:

$$\tan\varphi = \frac{\frac{x}{x^*}\,\text{cm}}{\frac{t}{t^*}\,\text{cm}} = \frac{xt^*}{tx^*} = \frac{vt^*}{x^*}$$

(b) $v = 24\,\frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \tan\varphi = 0{,}6, \quad \varphi = 31^\circ$



13. Wohnmobil: $x(t) = v_1 t$,

$x_1 = x(t_1) = v_1 t_1 = 70\,\text{km}$

Willi zurück zur Wohnung:

$x_{\text{w}1}(t) = x_1 - v_2(t - t_1)$

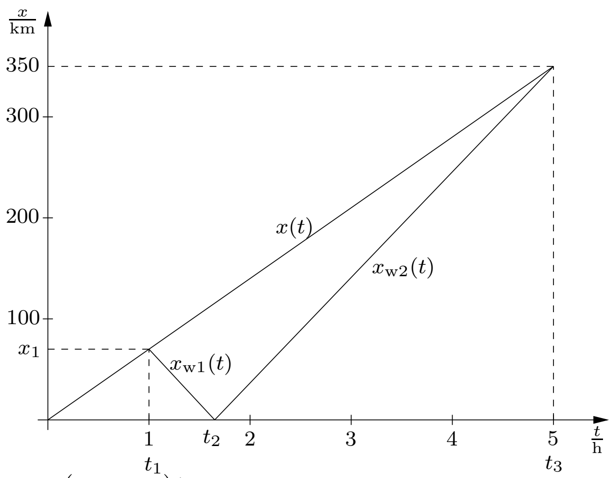
Willi erreicht die Wohnung zur Zeit

$t_2 = t_1 + \frac{v_1 t_1}{v_2} = 1\frac{2}{3}\,\text{h} = 1\,\text{h}\,40\,\text{min}$

Willi verfolgt Wohnmobil:

$x_{\text{w}2}(t) = v_2\,(t - t_2)$

Treffpunkt zur Zeit t_3 am Ort x_3:



$$v_1 t_3 = v_2\,(t_3 - t_2) \quad \Longrightarrow \quad t_3 = \frac{v_2 t_2}{v_2 - v_1} = \frac{(v_2 + v_1)t_1}{v_2 - v_1} = 5\,\text{h}, \quad x_3 = v_1 t_3 = 350\,\text{km}$$

14. (b) Geschw. Bond: $v_2 = -500\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Geschw. Rakete: $v_3 = -1200\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

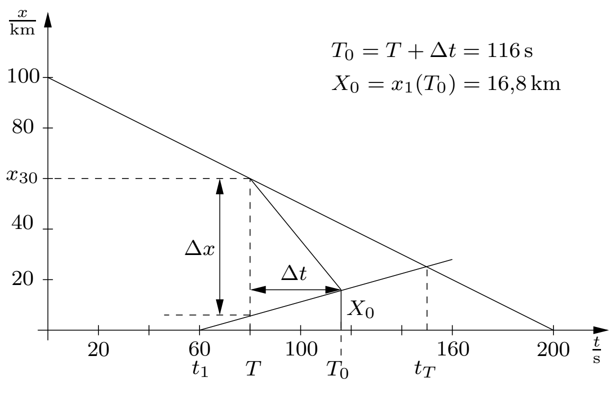
Blofield: $x_1(t) = v_1(t - t_1)$

Bond: $x_2(t) = x_{20} + v_2 t$

$$x_1(t_T) = x_2(t_T) \Longrightarrow$$

$$t_T = \frac{x_{20} + v_1 t_1}{v_1 - v_2} = \frac{118000\,\text{m}}{800\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = $$

$$= 147{,}5\,\text{s}, \quad x_T = 26{,}25\,\text{km}$$



(c) Rakete startet zur Zeit T am Ort $x_{30} = x_2(T) = x_{20} + v_2 T$.

In der Zeitspanne $\Delta t = 36\,\text{s}$ legt die Rakete $\Delta x_3 = 43200\,\text{m}$ und Blofield $\Delta x_1 = 10800\,\text{m}$ zurück. Zur Zeit T sind Blofield und Rakete also $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_3 = 54000\,\text{m}$ voneinander entfernt:

$$x_2(T) - x_1(T) = x_{20} + v_2 T - v_1(T - t_1) = \Delta x$$

$$T = \frac{x_{20} + v_1 t_1 - \Delta x}{v_1 - v_2} = \frac{(100000 + 18000 - 54000)\,\mathrm{m}}{800\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{64000\,\mathrm{m}}{800\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 80\,\mathrm{s}$$

15. (a) Umkehrpunkte Fiffi:

$$T_1 = \frac{t_1 + t_2}{2} = 30\,\mathrm{s}$$

$$T_2 = \frac{t_2 + t_3}{2} = 100\,\mathrm{s}$$

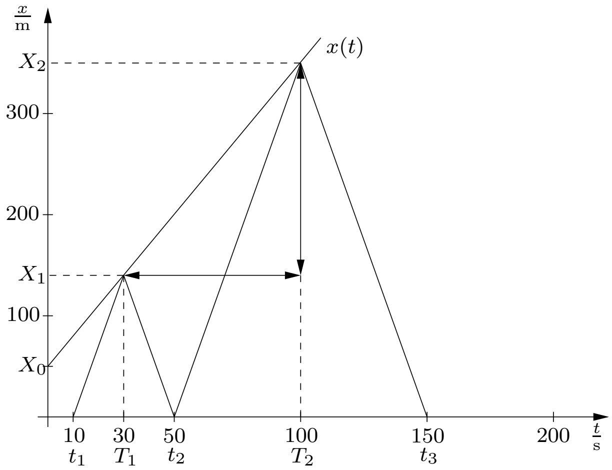
$$X_1 = 7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (T_1 - t_1) = 140\,\mathrm{m}$$

$$X_2 = 7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (T_2 - t_2) = 350\,\mathrm{m}$$

Herr Gsundsama:

$$v = \frac{X_2 - X_1}{T_2 - T_1} = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$x(t) = X_1 + v(t - T_1) = \underbrace{50\,\mathrm{m}}_{x_0} + vt$$

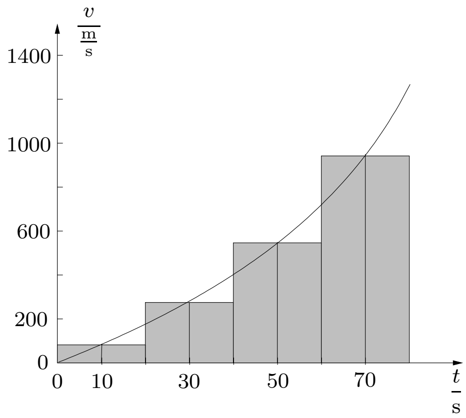


(b) $T_3 = \frac{t_4 + t_5}{2} = 350\,\mathrm{s}$, $\quad X_3 = x(T_3) = 1100\,\mathrm{m}$, $\quad v_{\mathrm{Fiffi}} = \frac{X_3}{T_3 - t_4} = \frac{22}{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 26{,}4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

16. $\Delta t = 80\,\mathrm{s} : 4 = 20\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned}\Delta x \approx{} & [v(10\,\mathrm{s}) + v(30\,\mathrm{s}) + \\ & + v(50\,\mathrm{s}) + v(70\,\mathrm{s})] \cdot 20\,\mathrm{s} = \\ = {} & [82{,}36 + 278{,}82 + 541{,}85 + \\ & + 941{,}18] \cdot 20\,\mathrm{m} = 36884\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

$$\delta_{\mathrm{rel}} = \frac{36884 - 37375}{37375} = -1{,}3\%$$



17. Für die Geschwindigkeit ergibt sich eine individuelle Lüsung. Im Wesentlichen wird hier die Momentangeschwindigkeit ermittelt. Abweichungen von der Momentangeschwindigkeit, die das Tachometer anzeigt, sind darin begründet, dass die mittlere Geschwindigkeit auf einer Wegstrecke von 50 m gemessen wird, dass die Zeitmessung ungenau ist und dass ein Tachometer in der Regel ,,vorgeht".

18. (a) $v = \frac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v} = \frac{199\,\mathrm{km}}{150\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = 1{,}33\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{h}\,20\,\mathrm{min}$

(b) t bezeichnet ausgehend von 10.00 Uhr die Fahrzeit nach der sich die beiden Zge begegnen. Damit gilt:

$$v \cdot t + v \cdot (t - 15\,\mathrm{min}) = 180\,\mathrm{km}$$

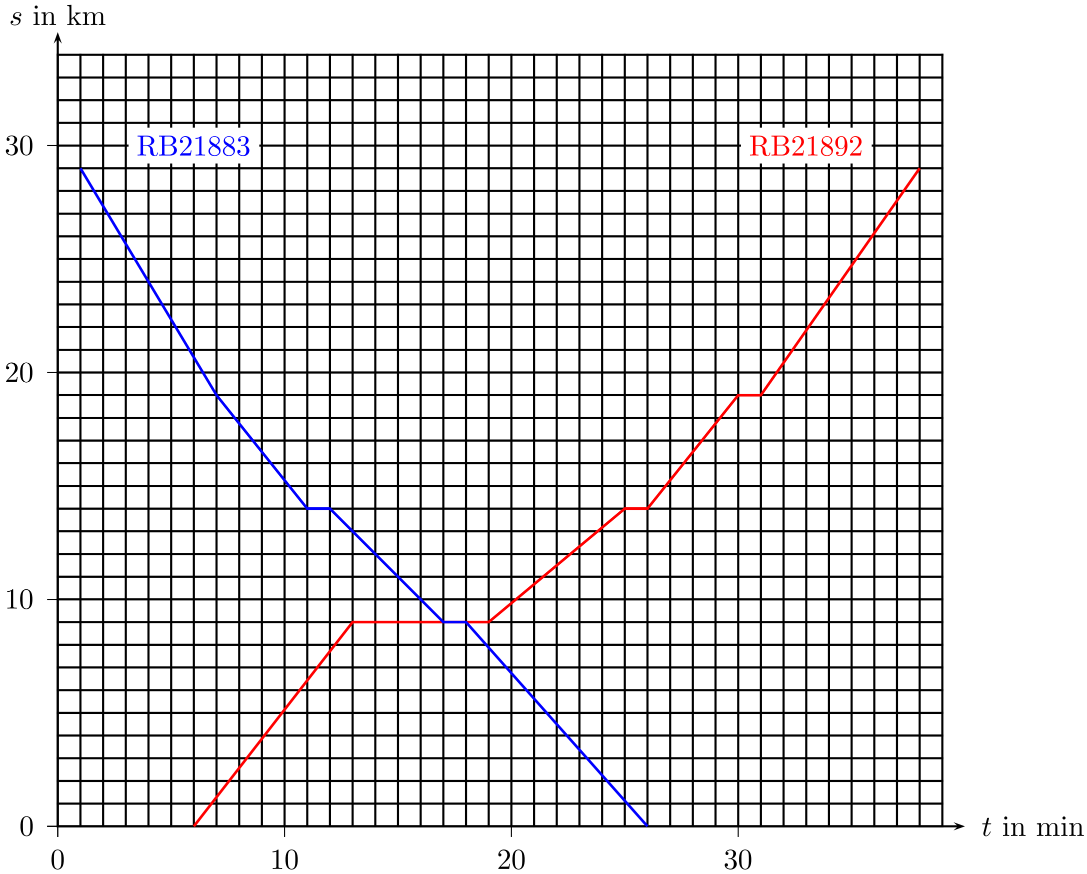
$$2\,v\,t - 45\,\text{km} = 180\,\text{km}$$

$$2\,v\,t = 225\,\text{km}$$

$$t = \frac{225\,\text{km}}{360\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 37{,}5\,\text{min}$$

Die Zge begegnen sich um 10.38 Uhr.

19. (a) t–s–Diagramm: 0 auf der t–Achse entspricht der Uhrzeit 6:50 Uhr.



(b) RB21883:

Garmisch–Partenkirchen–Oberau:

$$\frac{9\,\text{km} - 0\,\text{km}}{7\,\text{h}\,16\,\text{min} - 7\,\text{h}\,8\,\text{min}} = \frac{9\,\text{km}}{8\,\text{min}} = 67{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Oberau–Eschenlohe:

$$\frac{14\,\text{km} - 9\,\text{km}}{7\,\text{h}\,7\,\text{min} - 7\,\text{h}\,2\,\text{min}} = \frac{5\,\text{km}}{5\,\text{min}} = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Eschenlohe–Ohlstadt:

$$\frac{19\,\text{km} - 14\,\text{km}}{7\,\text{h}\,1\,\text{min} - 6\,\text{h}\,57\,\text{min}} = \frac{5\,\text{km}}{4\,\text{min}} = 75\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ohlstadt–Murnau:

$$\frac{29\,\text{km} - 19\,\text{km}}{6\,\text{h}\,57\,\text{min} - 6\,\text{h}\,51\,\text{min}} = \frac{10\,\text{km}}{6\,\text{min}} = 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

RB21892:

Garmisch–Partenkirchen–Oberau:

$$\frac{9\,\text{km} - 0\,\text{km}}{7\,\text{h}\,3\,\text{min} - 6\,\text{h}\,56\,\text{min}} = \frac{9\,\text{km}}{7\,\text{min}} = 77\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Oberau–Eschenlohe:

$$\frac{14\,\text{km} - 9\,\text{km}}{7\,\text{h}\,15\,\text{min} - 7\,\text{h}\,9\,\text{min}} = \frac{5\,\text{km}}{6\,\text{min}} = 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Eschenlohe–Ohlstadt:

$$\frac{19\,\text{km} - 14\,\text{km}}{7\,\text{h}\,20\,\text{min} - 7\,\text{h}\,16\,\text{min}} = \frac{5\,\text{km}}{4\,\text{min}} = 75\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ohlstadt–Murnau:

$$\frac{29\,\text{km} - 19\,\text{km}}{7\,\text{h}\,28\,\text{min} - 7\,\text{h}\,21\,\text{min}} = \frac{10\,\text{km}}{7\,\text{min}} = 86\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

(c) Beide Züge sind auf dem Abschnitt von Eschenlohe nach Oberau am schnellsten. Im Diagramm erkennt man das, dass auf diesen Abschnitten die Linien am steilsten sind.

(d) Das Warten eines Zuges erkennt man im Diagramm, dass die Linie waagrecht verläuft. Die beiden Züge fahren aneinander vorbei, wenn sich ihre Linien schneiden.

Man könnte die RB21892 4 Minuten später losfahren lassen.

(e) Die beiden Züge sollten dann in Eschenlohe aneinander vorbeifahren. Die RB21892 ist um 7:15 Uhr in Eschenlohe, die RB21883 normalerweise um 7:01 Uhr.

Das heißt die RB21883 sollte dazu 14 Minuten Verspätung haben.

20.

21. (a) Vervollständige die nachstehende Tabelle:

Feldnummer	Körner auf Feld		Körner auf Brett	
	als Zahl	als 2–er Potenz	Zahl	mit einer 2–er Potenz geschrieben
1	1	2^0	1	$2^1 - 1$
2	2	2^1	3	$2^2 - 1$
3	4	2^2	7	$2^3 - 1$
4	8	2^3	15	$2^4 - 1$
5	16	2^4	31	$2^5 - 1$
6	32	2^5	63	$2^6 - 1$
...	...	...	...	...
63		2^{62}		$2^{63} - 1$
64		2^{63}		$2^{64} - 1$

(b) Es befinden sich $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ Reiskörner auf dem Schachbrett.

Diese haben eine Masse von etwa $m = 922\,337\,203\,685\,477\,\mathrm{kg}$.

Sie nehmen ein Volumen von $V = \frac{m}{\varrho} = \frac{922\,337\,203\,685\,477\,\mathrm{kg}}{1{,}39 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \approx 663\,551\,945\,097\,\mathrm{m}^3$

Dafür brauchen wir $\frac{663\,551\,945\,097\,\mathrm{m}^3}{105\,\mathrm{m}^3} = 6\,319\,542\,334$ Waggons.

Diese haben eine Länge von $6\,319\,542\,334 \cdot 16{,}52\,\mathrm{m} \approx 104\,398\,839\,\mathrm{km}$.

In Worten: Etwa 104 Millionen Kilometer!

(c) Am Bahnübergang muss man $\frac{104\,398\,839\,\mathrm{km}}{100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} \approx 1\,043\,988\,\mathrm{h} \approx 119\,\mathrm{a}$ warten.

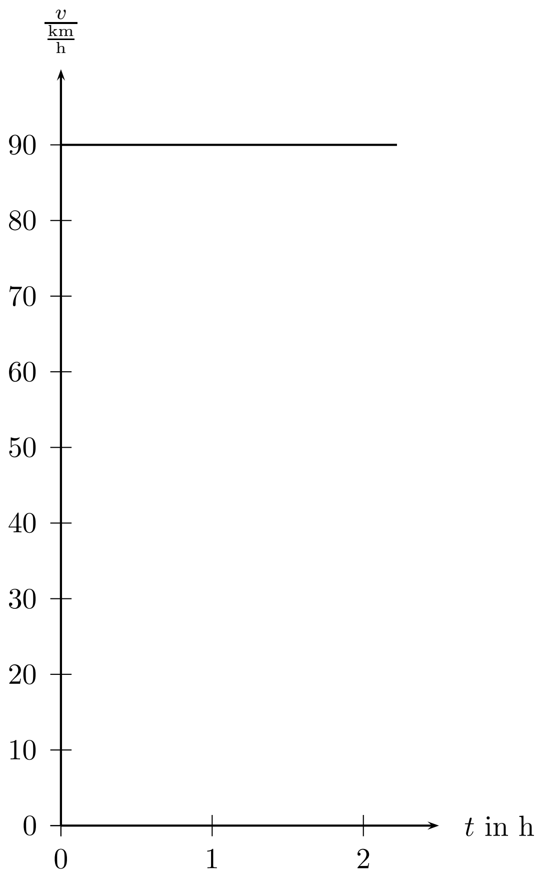
Hinweis: Die Ergebnisse wurden mit einem Computeralgebra–System über alle Maßen genau berechnet. Selbstverständlich können die Ergebnisse auch unter Verwendung von 10–er–Potenzen formuliert werden.

9. Weg im tv-Diagramm

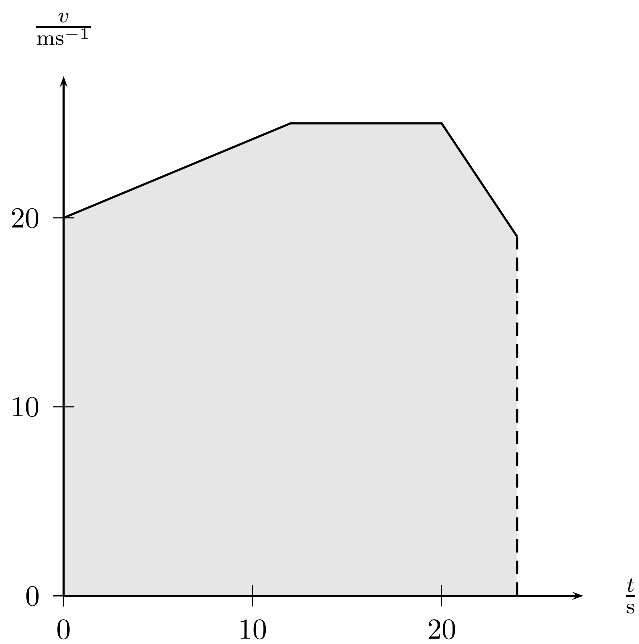
1. (a) .
   (b) $15km$, $30km$
   (c) $180km/h$
   (d) $\frac{8km}{2min} = 240km/h$
   (e) Größte Änderung des zurückgelegten Weges heißt größte Geschwindigkeit. Diese heißt maximale Steigung des Zeit-Orts-Graphe, also bei $0s$.
   Kleinste änderung nach analogen Argumenten zwischen $1,5s$ und $2,5s$, $5s$ und $6s$ und ab $9s$.

2. (a) maximale Beschleunigung, maximale Geschwindigkeit
   (b) größte Steigung, Maximum
   (c) .
   (d) Maximum, Nullstelle

3.



4. (a) $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}, 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.



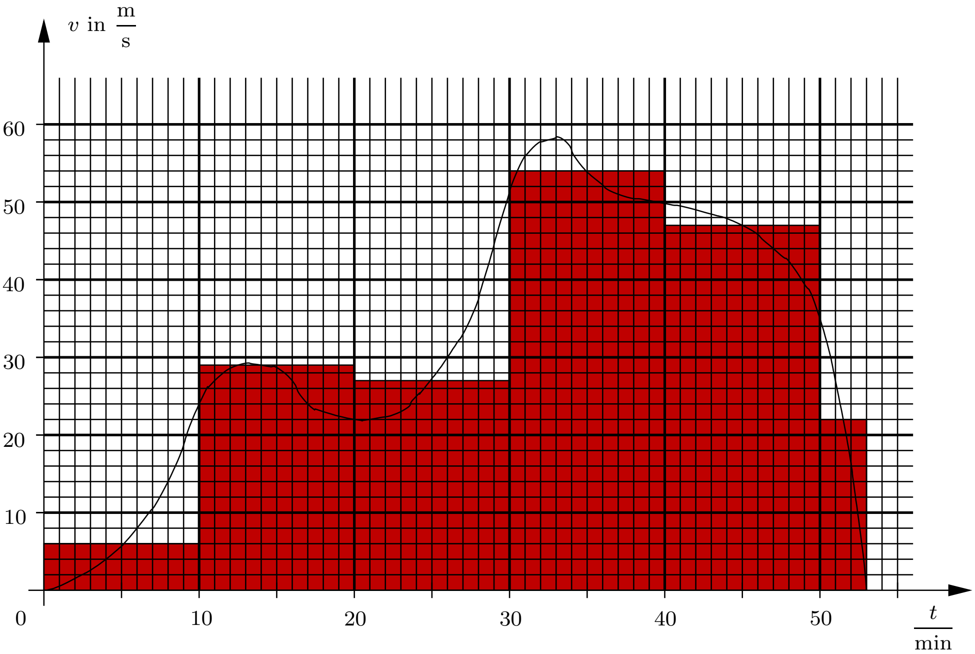
(b) $\dfrac{25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{12\,\mathrm{s}} = 0{,}42\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

(c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (12\,\mathrm{s})^2 + 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 12\,\mathrm{s} + 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 8{,}0\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot \left(-1{,}5\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) \cdot (4{,}0\,\mathrm{s})^2 + 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4{,}0\,\mathrm{s} =$
$558\,\mathrm{m} = 0{,}60\,\mathrm{km}$

5. (a) $\Delta x =$ „Fläche unter tv-Diagramm“ $= 25\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1{,}5\,\mathrm{s} + \dfrac{1}{2} \cdot 25\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4\,\mathrm{s} = 87{,}5\,\mathrm{m}$

(b) $v(t) = 25\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \dfrac{25}{4}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (t - 1{,}5\,\mathrm{s}) = 34{,}375\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 6{,}25\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t$

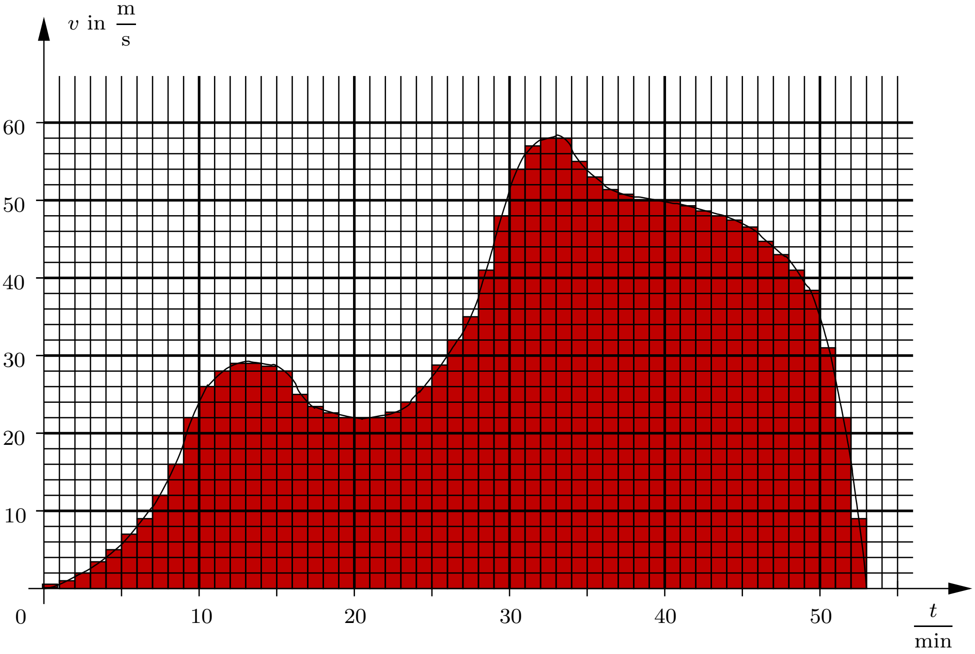
6. (a)



$\Delta x = (6 + 29 + 27 + 54 + 47)\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 600\,\mathrm{s} + 22\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 180\,\mathrm{s} = 101{,}76\,\mathrm{km}$

Verbrauch: $\dfrac{12{,}3\,l}{101{,}76\,\mathrm{km}} = 12{,}1\,\dfrac{\mathrm{l}}{100\,\mathrm{km}}$

(b)



$\Delta x = (1+2+3+5+7+9+12+16+22+28+29+29+29+28+25+23+23+22+22+22+23+24+26+29+32+35+41+48+54+57+58+58+55+53+51+51+50+50+50+49+48+47+47+45+43+41+38+31+22+9)\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 60\,\text{s} = 101{,}82\,\text{km}$

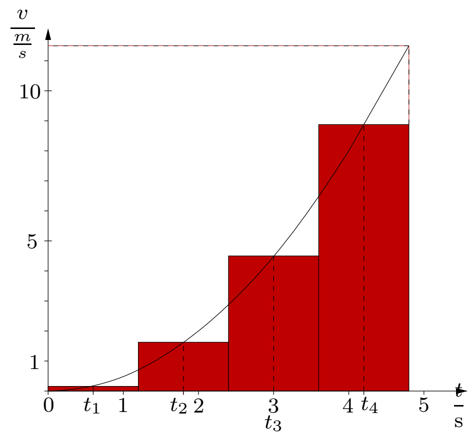
Verbrauch: $\dfrac{12{,}3\,l}{101{,}82\,\text{km}} = 12{,}1\,\dfrac{\text{l}}{100\,\text{km}}$

Abweichung: $\delta_{\text{rel}} = \dfrac{101,76 - 101{,}82}{101{,}82} = -0{,}06\,\%$

7. $t_1 = 0{,}6\,\text{s}$, $t_2 = 1{,}8\,\text{s}$, $t_3 = 3{,}0\,\text{s}$, $t_4 = 4{,}2\,\text{s}$, $\Delta t = 1{,}2\,\text{s}$

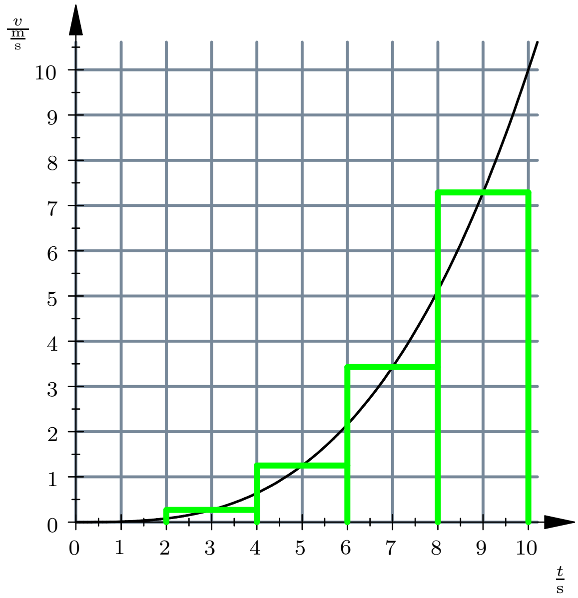
$$\begin{aligned}\Delta x &= (v(t_1) + v(t_2) + v(t_3) + v(t_4)) \cdot \Delta t = \\ &= (0{,}18 + 1{,}62 + 4{,}5 + 8{,}82)\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1{,}2\,\text{s} = \\ &= 18{,}144\,\text{m}\end{aligned}$$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{18{,}144 - 18{,}432}{18{,}432} = -1{,}56\,\%$$



8. (a)

t in s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	0	0,01	0,08	0,27	0,64	1,25	2,16	3,43	5,12	7,29	10



(b) $\Delta t = \dfrac{10\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s}}{4} = 2\,\mathrm{s}$

$\Delta x = \Delta t\,[v(3\,\mathrm{s}) + v(5\,\mathrm{s}) + v(7\,\mathrm{s}) + v(9\,\mathrm{s})] = 2\,\mathrm{s}\cdot \underbrace{\left[0{,}27\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1{,}25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 3{,}43\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 7{,}29\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]}_{12{,}24\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} =$

$24{,}48\,\mathrm{m}$

(c) $\delta_{\mathrm{rel}} = \dfrac{\Delta x - \Delta x_{\mathrm{exakt}}}{\Delta x_{\mathrm{exakt}}} = \dfrac{24{,}48 - 24{,}96}{24{,}96} = -0{,}019 = -1{,}9\%$

10. Beschleunigte Bewegung

1. $s = \frac{a}{2}t^2$ und $v = at \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{a}{2} \cdot \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{v^2}{2s} = 1{,}6 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

   $t = \frac{v}{a} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$

2. $a = \frac{v}{t} = \frac{100}{3{,}6 \cdot 10{,}8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2{,}57\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \qquad s = \frac{a}{2}t^2 = \frac{vt}{2} = 150\,\mathrm{m}$

3. $t = \frac{v}{a} = \frac{72}{3{,}6 \cdot 0{,}1}\,\mathrm{s} = 200\,\mathrm{s}, \qquad s = \frac{a}{2}t^2 = 2000\,\mathrm{m}$

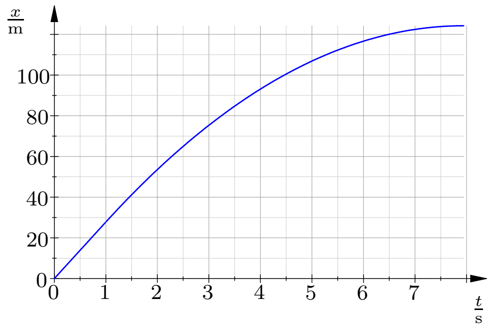
4. Der Anhalteweg ist

   $$s = v_0 \cdot 1\,\mathrm{s} + \frac{v_0^2}{2|a|} =$$

   $$= \frac{100\,\mathrm{m}}{3{,}6\,\mathrm{s}} \cdot 1\mathrm{s} + \frac{100^2\,\mathrm{m}^2}{2 \cdot 3{,}6^2\,\mathrm{s}^2 \cdot 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 124\,\mathrm{m}$$

   Das Reh hat noch einmal Glück gehabt.

   $$x(t) = \begin{cases} v_0 t & \text{für } t \leqq 1\,\mathrm{s} \\ v_0 t + \frac{a}{2}(t - 1\,\mathrm{s})^2 & \text{für } t > 1\,\mathrm{s} \end{cases}$$



5. (a) $\frac{a}{2} \cdot (2\,\mathrm{s})^2 = 1\,\mathrm{m} \quad \Longrightarrow \quad a = 0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

   $v_\mathrm{M} = \frac{9\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}} = 4{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

   (b) $v_\mathrm{M}(t) = 4{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad v_\mathrm{R}(t) = at$

   $x_\mathrm{M}(t) = 10\,\mathrm{m} + v_\mathrm{M}t, \quad x_\mathrm{R}(t) = \frac{a}{2}\,t^2$

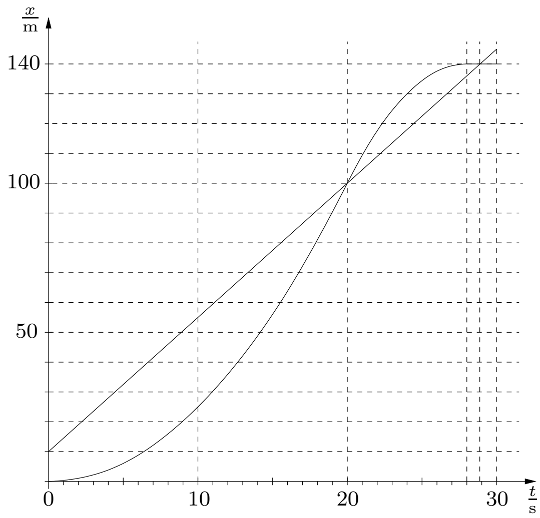
   (c) $\frac{a}{2}\,t^2 = 10\,\mathrm{m} + v_\mathrm{M}t \quad \Big| \cdot \frac{2}{a}$

   $t^2 - 18\,\mathrm{s} \cdot t + (9\,\mathrm{s})^2 = 40\,\mathrm{s}^2 + 81\,\mathrm{s}^2$

   $t = t_3 = 9\,\mathrm{s} \underset{(-)}{+} 11\,\mathrm{s} = 20\,\mathrm{s}$

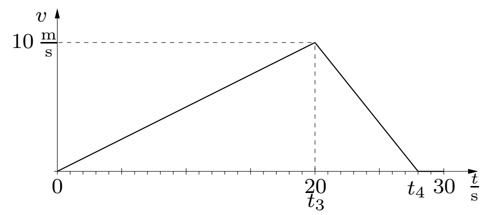
   $x_3 = 10\,\mathrm{m} + 90\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{m}$

   $v_3 = v_\mathrm{R}(t_3) = at_3 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$



(d) $\Delta t = \dfrac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{|a'|} = 8\,\mathrm{s}, \quad t_4 = 28\,\mathrm{s}$

$x_\mathrm{R}(t_4) = x_3 + \dfrac{1}{2} v_3 \Delta t = 140\,\mathrm{m}$



(e) $x_\mathrm{R}(t) = x_3 + v_3(t - t_3) + \dfrac{a'}{2}(t - t_3)^2$

$x_\mathrm{R}(t) = -350\,\mathrm{m} + 35\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 0{,}625\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$

t in s	5	10	24	26
x_R in m	6,25	25	130	137,5

$x_\mathrm{L}(t_5) = 140\,\mathrm{m} \quad \Longrightarrow \quad t_5 = 28{,}89\,\mathrm{s}$

6. (a) $x_\mathrm{L}(t) = 90\,\mathrm{m} + v_\mathrm{L} t, \quad x_\mathrm{R}(t) = \dfrac{a}{2} t^2$

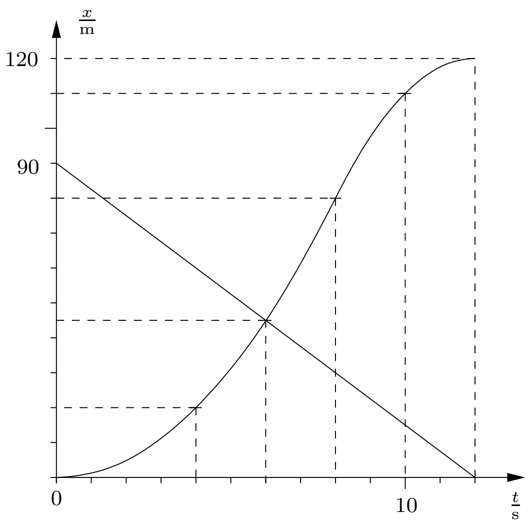
$\dfrac{a}{2} t^2 = 90\,\mathrm{m} + v_\mathrm{L} t \quad \Big| \cdot \dfrac{2}{a}$

$t^2 + 6\,\mathrm{s} \cdot t + (3\,\mathrm{s})^2 = 72\,\mathrm{s}^2 + 9\,\mathrm{s}^2$

$t = t_1 = -3\,\mathrm{s} \,{}^{+}_{(-)}\, 9\,\mathrm{s} = 6{,}00\,\mathrm{s}$

$x_1 = 90\,\mathrm{m} - 45\,\mathrm{m} = 45{,}0\,\mathrm{m}$

$v_1 = a t_1 = 15{,}0\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$



(b) $t_2 = \dfrac{v_2}{a} = 8{,}00\,\mathrm{s}, \ \Delta t = \dfrac{v_2}{|a'|} = 4{,}00\,\mathrm{s}$

$x_2 = x_\mathrm{R}(t_2) = \frac{a}{2} t_2^2 = 80\,\mathrm{m}$

$t_3 = t_2 + \Delta t = 12{,}0\mathrm{s}$

$x_\mathrm{R}(4\,\mathrm{s}) = 20\,\mathrm{m}$. Für $t > t_2$ gilt:

$$x_\mathrm{R}(t) = x_2 + v_2(t - t_2) + \frac{a'}{2}(t - t_2)^2 = 80\,\mathrm{m} + 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (t - 8\,\mathrm{s}) - 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(t - 8\,\mathrm{s})^2 =$$
$$= -2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 + 60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 240\,\mathrm{m}$$

$x_\mathrm{R}(10\,\mathrm{s}) = (80 + 40 - 10)\,\mathrm{m} = 110\,\mathrm{m}, \quad x_\mathrm{R}(12\,\mathrm{s}) = (80 + 80 - 40)\,\mathrm{m} = 120\,\mathrm{m}$

7. 1,7

8. (a) Es ist möglich, einer Person hinterherzuspringen und sie im freien Fall einzuholen. Man braucht aber hohe Athletik oder eine gute Ausbildung, um den freien Fall derart als Skysurfing zu steuern.

(b) Eine saubere und stabile Freifallhaltung kann man in der Regel nicht ohne umfangreiches Training erlangen. Kämpfe in der Luft, Freifallformationen und zielgerichtetes Skysurfing sind ohne Training nicht möglich.

(c) Wird der Schirm geöffnet, so tritt eine Bremsbeschleunigung in Höhe von durchschnittlich $20\frac{m}{s^2}$ auf, was fast dem Dreifachen bei einer Vollbremsung im Auto entspricht. Bereits im Auto kann man nur durch einen Sicherheitsgurt gehalten werden. Deshalb ist ein Festhalten mit reiner Muskelkraft unmöglich.

(d) Ein Fallschirmspringer wird durch das Öffnen des Schirms nicht wieder nach oben gezogen. In der Filmaufnahme entsteht der Eindruck dadurch, dass der gefilmte Springer (James Bond) stark abgebremst wird, während der Kameramann mit gleich bleibender Geschwindigkeit $v = 200\frac{km}{h}$ weiter fällt.

(e) Bei einem Sprung aus $4.000m$ Höhe dauert der freie Fall etwas mehr als 60 Sekunden. Die Filmsezene ist somit aus Aufnahmen mehrerer Sprünge zusammengeschnitten worden. Ein mehrminütiger Fall wäre nur aus einer derart großen Absprunghöhe möglich, dass die Springer einen aufwendigen Kälteschutz und eine Sauerstoffversorgung benötigten.

9. (a) Die Beschleunigungen g senkrecht zur Erdoberfläche und a parallel zur Erdoberfläche werden vektoriell zur Gesamtbeschleunigung addiert. In dem entstehenden rechtwinkligen Dreieck gilt $\tan\alpha = \frac{a}{g}$. Hieraus folgt die Behauptung.

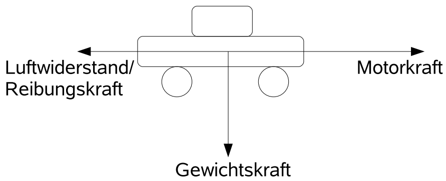
(b) $a \approx 1,7\frac{m}{s^2}$ bzw. $a \approx 6,2\frac{km}{hs}$. Der Ablesefehler beim Goniometer kann auf $\pm 30\%$ ($\pm 3°$) geschätzt werden, der des resultierenden Beschleunigungswertes dann ebenso.

(c) Für kleine Winkel gilt: $\tan\alpha \approx \alpha$.

α in °	0	5	10	15	20	25
a in $\frac{km}{hs}$	0	3,09	6,23	9,46	12,85	16,47

(d) Es gilt $t = \frac{v}{a} \approx 300\frac{km}{h}/6\frac{km}{hs} = 50s$ (in Übereinstimmung mit der Beobachtung). Die Startbahn muß mindestens so lang sein wie die Strecke $s = \frac{1}{2}a \cdot t^2$ die das Flugzeug in dieser Zeit zurücklegt. Mit den erhaltenen Werten gilt $s = \frac{1}{2} \cdot 1,7\frac{m}{s^2} \cdot (50s)^2 \approx 2000m$. Aus Sicherheitsgründen (insbesondere für Startabbruch und Notbremsung) sind wirkliche Startbahnen lünger (z. B. Frankfurt a.M.: 3600m).

10. (a) Die Beschleunigung ist ein Maß dafür, wie sich die Geschwindigkeit im Laufe der Zeit ändert; Beschleunigung ist die Änderung der Geschwindigkeit dividiert durch die zugehörige Zeit
    (b) $43\frac{km}{h}$, $79\frac{km}{h}$
    (c) $a = \frac{22\frac{m}{s} - 12\frac{m}{s}}{5s} = 2\frac{m}{s^2}$
    (d) .



11. (a) Es wirkt die Gewichtskraft, also $g = 9,81\frac{m}{s^2}$
    (b) $v = 49\frac{m}{s} = 177\frac{km}{h}$
    (c) 0s bis 15s: Es wirken Gewichtskraft und Luftwiderstand. Der Luftwiderstand ist kleiner als die Gewichtskraft und nimmt mit zunehmender Geschwindigkeit zu. Damit nimmt die Gesamtkraft (d. h. auch die Beschleunigung) und damit die Steigung der Kurve im t-v-Diagramm ab.
    20s bis 25s: konstante Geschwindigkeit, d. h. Gesamtkraft ist Null, d. h. Luftwiderstand ist genausogroß wie Gewichtskraft.
    18s bis 31s: Geschwindigkeit nimmt deutlich ab, d. h. Luftwiderstandskraft muss deutlich erhöht werden: Fallschirms wird geöffnet.

12. (a) $G = mg = 2055000kg \cdot 9,81\frac{m}{s^2} = 201595500N = 20\,160kN$
    (b) $F_{ges} = F - G = 32\,600kN - 20\,160kN = 12\,440kN$
    $a = \frac{F_{ges}}{m} = \frac{12\,440\,000N}{2055\,000kg} = 6,1\frac{m}{s^2}$
    (c) $v = at = 6,1\frac{m}{s^2} \cdot 10s = 61\frac{m}{s} = 219\frac{km}{h}$

13. (a) $a = \frac{-46\frac{m}{s}}{2s} = -23\frac{m}{s^2} = -2,3 \cdot g$
    (b) $a = -7,4\frac{m}{s^2} = -0,76 \cdot g$
    (c) i. $h(20s) = 800m - 5\frac{m}{s} \cdot 20s = 700m$
    ii. $h(t) = 800m - 5\frac{m}{s} \cdot t = 100m \Rightarrow 140s$
    iii. $t = 160s$

14. (a) Es ist möglich, einer Person hinterherzuspringen und sie im freien Fall einzuholen. Eine größere Beschleunigung erhält man, z. B. durch einen deutlich geringeren Luftwiderstand. Man braucht aber hohe Athletik oder eine gute Ausbildung, um den freien Fall derart als Skysurfing zu steuern.
    (b) Eine saubere und stabile Freifallhaltung kann man in der Regel nicht ohne umfangreiches Training erlangen. Kämpfe in der Luft, Freifallformationen und zielgerichtetes Skysurfing sind ohne Training nicht möglich.
    (c) Wird der Schirm geöffnet, so tritt eine Bremsbeschleunigung in Höhe von durchschnittlich $20\frac{m}{s^2}$ auf, was fast dem Dreifachen bei einer Vollbremsung im Auto entspricht. Bereits im Auto kann man nur durch einen Sicherheitsgurt gehalten werden. Deshalb ist ein Festhalten mit reiner Muskelkraft schlichtweg unmöglich.
    (d) Ein Fallschirmspringer wird durch das Öffnen des Schirms nicht wieder nach oben gezogen. In der Filmaufnahme entsteht der Eindruck dadurch, dass der gefilmte Springer (James Bond) stark abgebremst wird, während der Kameramann mit gleich bleibender Geschwindigkeit $v = 200\frac{km}{h}$ weiter fällt.
    (e) Bei einem Sprung aus 4.000 m Höhe dauert der freie Fall etwas mehr als 60 Sekunden. Die Filmsezene ist somit aus Aufnahmen mehrerer Sprünge zusammengeschnitten worden. Ein mehrminütiger Fall wäre nur aus einer derart großen Absprunghöhe möglich, dass die Springer einen aufwendigen Kälteschutz und eine Sauerstoffversorgung benötigten.

15. (a) Z.B. unter der Autobahnbrücke fährt er am Motarradfahrer vorbei, der ihn später wieder überholt
    (b) Z.B. der LKW fährt beim Start an ihm vorbei und wird später wieder von ihm überholt
    (c) gleichförmige Bewegung des LKW entspricht Abb. (a)

        beschleunigte Bewegung des Motorradfahrers entspricht Abb. (c)
    (d)
    (e) $v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow t = \frac{2v}{a}$, hier: $t = 10s$

16. $a = \frac{120\,\mathrm{km/h} - 80\,\mathrm{km/h}}{15{,}8\,\mathrm{s}} = 0{,}70\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
17. $v = a\,t = 0{,}25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 120\,\mathrm{s} = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$
18. 46 s
19. $2{,}4 \cdot 6{,}1\,\mathrm{s} = 15\,\mathrm{s}$; wegen der Rollreibung und dem mit der Geschwindigkeit zunehmenden Luftwiderstand nimmt die Beschleunigung (bei maximaler und somit konstanter Leistung) stetig ab. Nach Erreichen der Höchstgeschwindigkeit ist sie sogar 0.

20. Die U–Bahn fährt aus Gründen des Fahrkomforts stets mit konstanter Beschleunigung (dies ist eine idealisierte Annahme).

(a) Zeichne das zur Bewegung gehörige v–t– und das a–t–Diagramm.

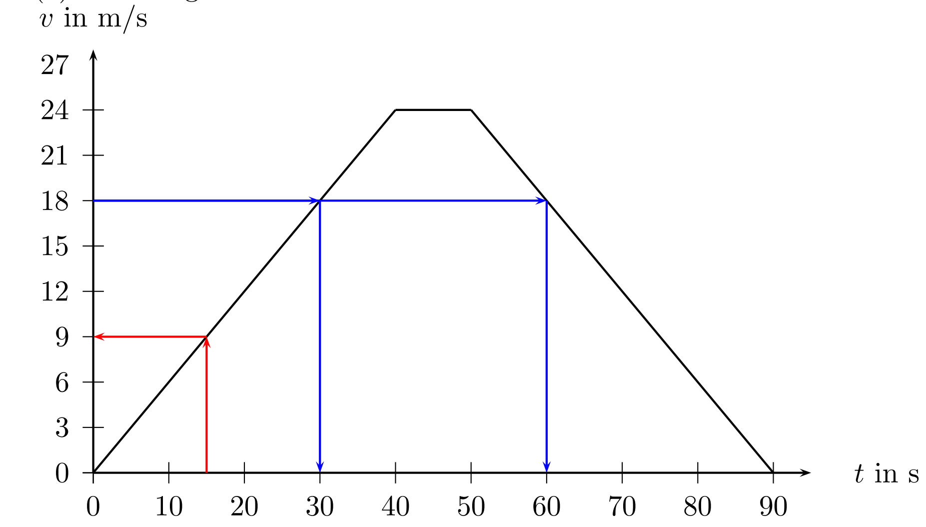
(b) Ermittle grafisch und rechnerisch welche Geschwindigkeit die U–Bahn zur Zeit 15 s hat.

(c) Zu welchen Zeitpunkten beträgt die Geschwindigkeit der U–Bahn $64{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

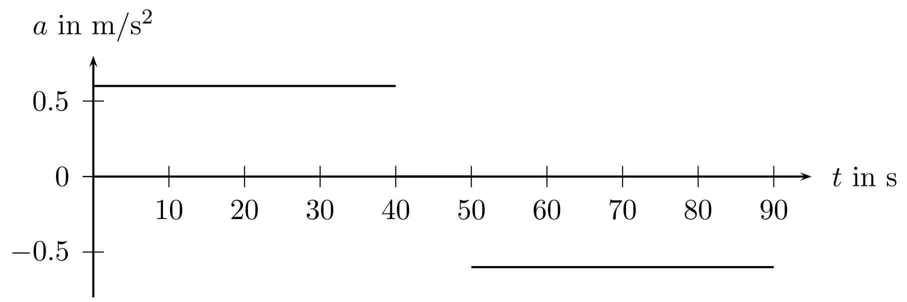
(d) Welche durchschnittliche Geschwindigkeit hat die U–Bahn während der Zeitdauer von 0 bis 40 s?

(e) Wie weit sind die beiden Haltestellen voneinander entfernt?

(a) t–v–Diagramm



t–a–Diagramm



(b) $9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

(c) $64{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 18\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t_1 = \frac{v}{a} = 30\,\text{s}$, $t_2 = 60\,\text{s}$

(d) $12\,\text{m/s}$

(e) $2 \cdot 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 40\,\text{s} + 24\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10\,\text{s} = 1{,}2\,\text{km}$

21. (a) $15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3{,}6 = 54\,\frac{\text{km}}{\text{h}} > 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

(b) $-0{,}33\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $0{,}50\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

(c) 2,7 km; 5,6 km

22.

Zeit t in s	Weg x in m	Geschwindigkeit v in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	Beschleunigung a in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
0	0		
1,50	0,680	0,453	
3,00	2,71	1,35	0,600
4,50	6,12	2,27	0,613
6,00	10,9	3,19	0,609
7,50	17,0	4,07	0,587
9,00	24,4	4,93	0,578
10,5	33,1	5,80	0,578
12,0	43,1	6,67	0,578
13,5	54,4	7,53	0,578
15,0	67,1	8,37	0,622

23.

11. Freier Fall

1. (a) $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(344\frac{m}{s})^2}{2\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}} = 6,03 \cdot 10^3 m$

   (b) $m \cdot g = \frac{1}{2} \cdot c_W \cdot A \cdot \varrho_{Luft} \cdot v^2 \Rightarrow$

   $\varrho_L = \frac{2mg}{c_W A v^2} = \frac{2\cdot 100kg\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{0{,}35\cdot 1{,}0m^2\cdot(344\frac{m}{s})^2} = 47\frac{g}{m^3}$

   Dies ist in der natürlichen Atmosphäre etwa in 24000m Höhe erreicht.

   (c) Im Kräftegleichgewicht ist die Auftriebskraft gleich der Gewichtskraft. Die Auftriebskraft ist genau so groß wie die Gewichtskraft der verdrängten Luft. Die Formelsammlung ergibt:

   Dichte von Helium unter Normalbedingungen: $\varrho_{He} = 0,179\frac{kg}{m^3}$

   Dichte von Luft unter Normalbedingungen: $\varrho_{Luft} = 1,293\frac{kg}{m^3}$

   Dichte von Luft 40 000m Höhe: $\varrho_{Luft} = 4\frac{g}{m^3}$

   Das Dichteverhältnis $\frac{\varrho_{He}}{\varrho_{Luft}} = 0,138$ ist von der Höhe unabhängig.

   $m_{Ballon} \cdot g + m_{He} \cdot g = m_{Luft} \cdot g \Rightarrow$

   $V_{Ballon} = \frac{m_{Ballon}}{(1-0{,}138)\cdot\varrho_{Luft}} = 290 \cdot 10^3 m^3 \Rightarrow$

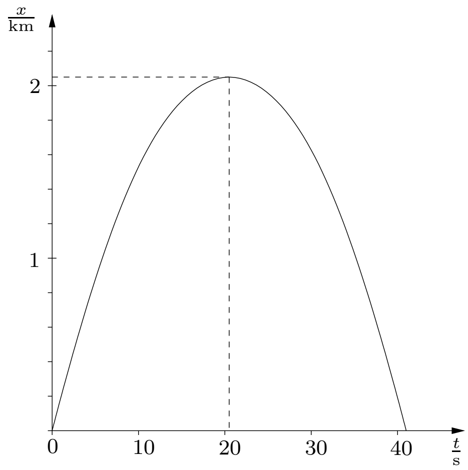
   $r = 41m \Rightarrow m_{He} = 121kg$

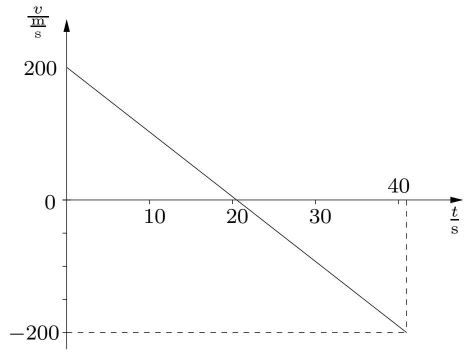
2. $h = \frac{g}{2}t^2 \quad \Longrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3{,}50\,\mathrm{s} \quad \Longrightarrow \quad v = gt = \sqrt{2gh} = 34{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 124\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

3. $h = \frac{v^2}{2g} = 20{,}4\,\mathrm{m}$

4. $h = \frac{v_0^2}{2g} = 2{,}04\,\mathrm{km}, \qquad v_\mathrm{a} = -v_0$

   Zeit bis zur maximalen Höhe: $t_h = \frac{v_0}{g} = 20{,}4\,\mathrm{s} \quad \Longrightarrow \quad t_\mathrm{a} = 2t_h = 40{,}8\,\mathrm{s}$





5. $x_0 = x(t_0) = \dfrac{a}{2}t_0^2 = 78{,}48\,\text{m}, \qquad v_0 = at_0 = 52{,}32\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{a}{2}t^2 = 8{,}72\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t^2 & \text{für } x \leqq t_0 \\ x_0 + v_0(t-t_0) - \frac{g}{2}(t-t_0)^2 = -4{,}905\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t^2 + 81{,}75\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot t - 122{,}625\,\text{m} & \text{für } x > t_0 \end{cases}$$

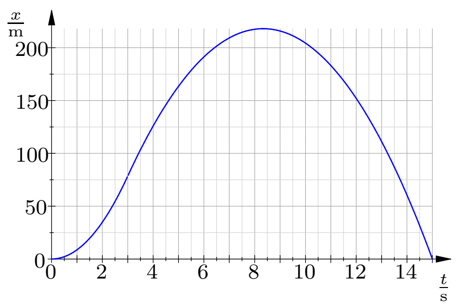
$$v(t) = \begin{cases} at = 8{,}72\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t & \text{für } x \leqq t_0 \\ v_0 - g(t-t_0) = 81{,}75\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t & \text{für } x > t_0 \end{cases}$$

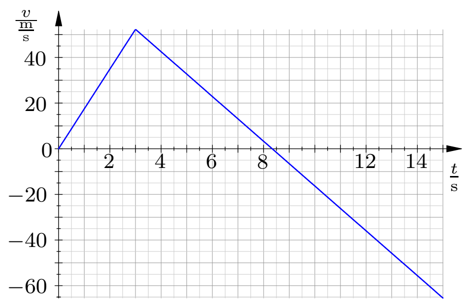
Maximale Höhe h zur Zeit $t_1 \quad\Longrightarrow\quad v(t_1) = 0 \quad\Longrightarrow\quad t_1 = 8{,}33\,\text{s}$

$h = x(t_1) = 218\,\text{m}$

Aufprall am Boden zur Zeit t_2: Entweder die quadratische Gleichung lösen oder einfacher die Fallzeit aus der Höhe h zu t_1 addieren: $t_2 = t_1 + \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 15{,}0\,\text{s}$

Aufprallgeschwindigkeit: $v_2 = v(t_2) = -65{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$





6. (a) $x_\text{k}(t) = h - \dfrac{g}{2}t_1^2 = x_1 \quad\Longrightarrow\quad t_1 = \sqrt{\dfrac{2(h-x_1)}{g}} = 3{,}00\,\text{s}$

$v_\text{A} = \dfrac{x_1}{t_1} = 15{,}0\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} = 54{,}0\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}, \qquad v_1 = -gt_1 = -30{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = -108\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Relativ zum Aufzug ist die Aufprallgeschwindigkeit $v_1 - v_\text{A} = -45{,}0\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

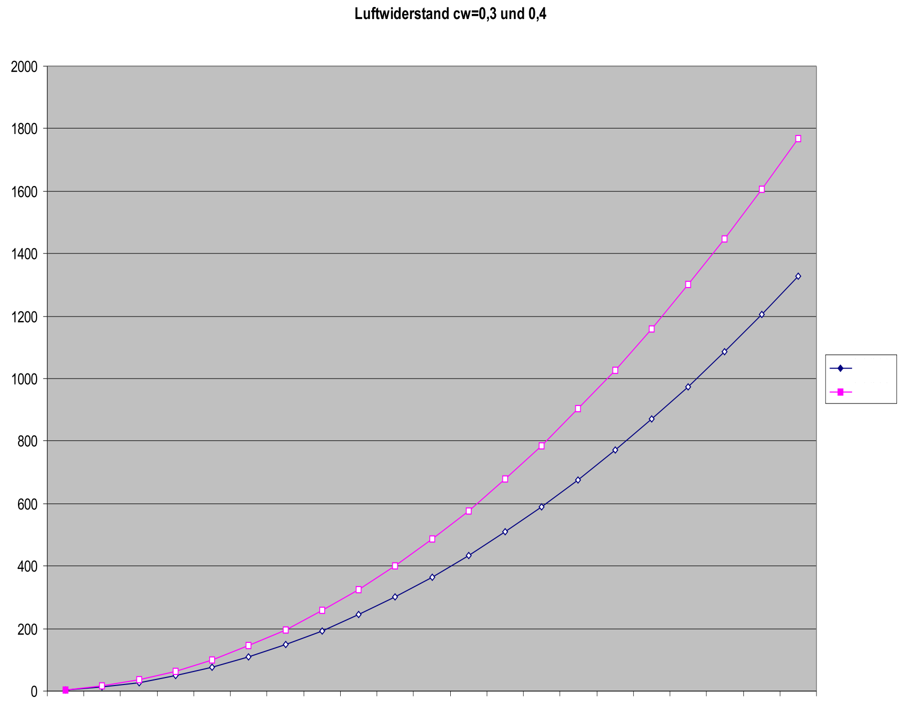
(b) $v_{\mathrm{H1}} = v_{\mathrm{A}}, \qquad v_{\mathrm{H}}(t) = v_{\mathrm{A}} - g(t - t_1), \qquad v_{\mathrm{H}}(t_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_2 = t_1 + \frac{v_{\mathrm{A}}}{g} = 4{,}50\,\mathrm{s}$

$$x_{\mathrm{H2}} = x_{\mathrm{H}}(t_2) = \underbrace{x_1 - 1\,\mathrm{m}}_{44\mathrm{m}} + \underbrace{v_{\mathrm{A}}(t_2 - t_1)}_{22{,}5\,\mathrm{m}} - \underbrace{\frac{g}{2}(t_2 - t_1)^2}_{11{,}25\,\mathrm{m}} = 55{,}25\,\mathrm{m}$$

$$\frac{m}{2}v_{\mathrm{H3}}^2 = mgx_{\mathrm{H2}} \quad \Longrightarrow \quad v_{\mathrm{H3}} = -\sqrt{2gx_{\mathrm{H2}}} = -\sqrt{1105}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -33{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

7. .

v	F_L	v	F_L
10	3,009259	10	4,012346
20	12,037037	20	16,049383
30	27,083333	30	36,111111
40	48,148148	40	64,197531
50	75,231481	50	100,308642
60	108,333333	60	144,444444
70	147,453704	70	196,604938
80	192,592593	80	256,790123
90	243,750000	90	325,000000
100	300,925926	100	401,234568
110	364,120370	110	485,493827
120	433,333333	120	577,777778
130	508,564815	130	678,086420
140	589,814815	140	786,419753
150	677,083333	150	902,777778
160	770,370370	160	1027,160494
170	869,675926	170	1159,567901
180	975,000000	180	1300,000000
190	1086,342593	190	1448,456790
200	1203,703704	200	1604,938272
210	1327,083333	210	1769,444444


Luftwiderstand cw=0,3 und 0,4
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0

8.

12. Bezugssysteme - Galileitransformation

1. -

Teil III.

Dynamik

13. Newtonsche Gesetze

1. $a = \frac{F}{m} = \frac{3{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{N}}{4{,}05 \cdot 10^5\,\mathrm{kg} + 415 \cdot 75\,\mathrm{kg}} = 0{,}69\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

2. Auf die Insassen wirken beim Aufprall gerade keine Kräfte. Aufgrund des Trägheitsgesetzes behalten die Insassen zunächst ihre Geschwindigkeit in Fahrtrichtung bei. Wenn das Auto zum Stillstand gekommen ist ,,bewegen" sie sich durch die Windschutzscheibe, sofern sie nicht etwa vorher durch einen Gurt gezwungen werden ihren Zustand der gleichförmigen Bewegung zu ändern.

3. (a)

$$\begin{aligned}(m_\mathrm{A} - m)\; g &= (m + m_\mathrm{A})\; a \\ m &= m_\mathrm{A}\,\frac{g-a}{g+a} \\ m &= \frac{9{,}8 - 1{,}2}{9{,}8 + 1{,}2} \cdot \left(1{,}4 \cdot 10^3 + 16 \cdot 75\right)\,\mathrm{kg} = 2{,}0\,\mathrm{t}\end{aligned}$$

   (b) v ist die Geschwindigkeit bei der der Bremsvorgang beginnt. Dann gilt mit der 3. Bewegungsgleichung:

$$v^2 = 2\,a\;(h - 4{,}0\,\mathrm{m}) \quad \text{und} \qquad v^2 = 2\,\tilde{a}\,4{,}0\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \tilde{a} = 3 \cdot a = 3{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

4. Die Geschwindigkeit ist konstant, wenn die Gesamtkraft auf den Körper null ist:

$$-mg + Cv^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{mg}{C}} = \begin{cases} -63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -226\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} & \text{(Schirm geschlossen)} \\ -7{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -25\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} & \text{(Schirm offen)} \end{cases}$$

5. Der Sprinter kann nur dann eine beschleunigende Kraft erfahren, wenn er Kontakt mit dem Boden hat. Damit die mittlere beschleunigende Kraft dann 150 N ist, muss die beschleunigende Kraft während dieser Zeit bedeutend größer sein.

6. $|v_1| = \dfrac{6\,\mathrm{cm}}{0{,}20\,\mathrm{s}} = 30\,\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}, \quad |v_2| = \dfrac{9\,\mathrm{cm}}{0{,}20\,\mathrm{s}} = 45\,\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}, \quad m_2 = \dfrac{|v_1|}{|v_2|} \cdot m_1 = \dfrac{30}{45} \cdot 36\,\mathrm{g} = 24\,\mathrm{g}$

7. Als Nullpunkt der potentiellen Energie der Gravitation wählen wir $y_0 = 0$, d.h.

$$W_\mathrm{p}(y) = mgy$$

Da die Kugel nicht an der Feder befestigt ist, ist die Spannenergie der Feder in Abhängigkeit von y:

$$W_\mathrm{F}(y) = \begin{cases} \frac{D}{2}(d-y)^2 & \text{für } y \leqq d \\ 0 & \text{für } y > d \end{cases}$$

Da die Gesamtenergie W_ges konstant ist (Energiesatz), gilt

$$W_\mathrm{p}(y) + W_\mathrm{F}(y) + W_\mathrm{kin}(y) = W_\mathrm{ges} = \text{konstant}$$

Im tiefsten Punkt ($y = 0$) ruht die Kugel, d.h. ihre kinetische Energie ist null. Da dort auch die potentielle Energie null ist, lautet der Energiesatz für $y = 0$:

$$\underbrace{W_\mathrm{p}(0)}_{0} + \underbrace{W_\mathrm{F}(0)}_{\frac{D}{2}d^2} + \underbrace{W_\mathrm{kin}(0)}_{0} = W_\mathrm{ges}$$

oder

$$W_\mathrm{ges} = \frac{D}{2}d^2 = 2{,}7\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}2^2\,\mathrm{m}^2 = 0{,}108\,\mathrm{J}$$

Im höchsten Punkt ($y = y_2$) sind die kinetische und die Federenergie null:

$$mg(y_2 - y_0) = W_\mathrm{ges} \quad \Longrightarrow \quad y_2 = \frac{W_\mathrm{ges}}{mg} + y_0 = \frac{0{,}108\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}}{0{,}01\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}} = 1{,}20\,\mathrm{m}$$

$$W_\mathrm{kin}(y) = W_\mathrm{ges} - W_\mathrm{p}(y) - W_\mathrm{F}(y) = \begin{cases} W_\mathrm{kin,1} & \text{für } y \leqq y_1 \\ W_\mathrm{kin,2} & \text{für } y > y_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_\mathrm{kin,1}(y) &= \frac{D}{2}d^2 - mgy - \frac{D}{2}(y-d)^2 = -\frac{D}{2}y^2 + (Dd - mg)y = \\ &= -2{,}7\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}\,y^2 + 0{,}9819\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}}\,y \\ W_\mathrm{kin,2}(y) &= \frac{D}{2}d^2 - mgy = 0{,}108\,\mathrm{J} - 0{,}0981\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}}\,y \end{aligned}$$

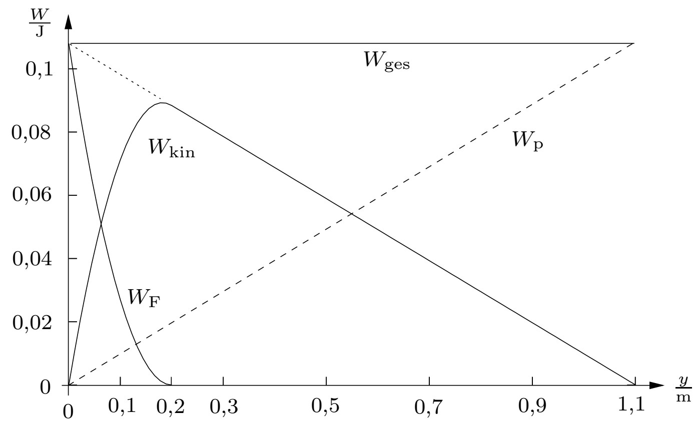
Die Kugel wird schneller, wenn die Gesamtkraft $F(y)$ auf sie positiv ist, d.h. wenn die Federkraft F_D größer als die Gewichtskraft ist. Wenn die Gesamtkraft auf die Kugel negativ ist ($F_\mathrm{D} < mg$), dann wird die Kugel wieder langsamer. Ihre maximale Geschwindigkeit erreicht die Kugel also am Ort y_3 mit $F(y_3) = 0$ bzw.

$$F_\mathrm{D}(y_3) = D(d - y_3) = mg \quad \Longrightarrow \quad y_3 = d - \frac{mg}{D} = 18{,}2\,\mathrm{cm}$$

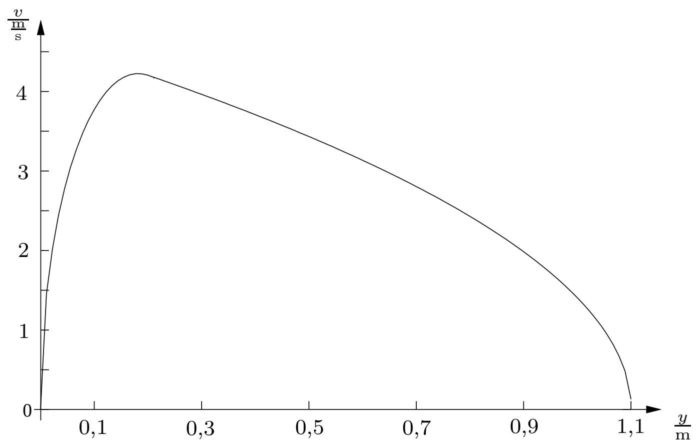
Die maximale kinetische Energie ist

$$W_\mathrm{kin,max} = W_\mathrm{kin,1}(y_3) = \frac{D}{2}\left(d - \frac{mg}{D}\right)^2 = 0{,}0893\,\mathrm{J}$$

$$\frac{m}{2}v_\mathrm{max}^2 = W_\mathrm{kin,max} \quad \Longrightarrow \quad v_\mathrm{max} = \sqrt{\frac{2W_\mathrm{kin,max}}{m}} = 4{,}23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$



$$v(y) = \sqrt{\frac{2W_{\text{kin}}}{m}}$$



Die Steigung des Grafen von $v(y)$ ist bei $y_0 = 0{,}1\,\mathrm{m}$ und bei $y_2 = 1{,}2\,\mathrm{m}$ unendlich. Das bedeutet aber nicht, dass die Beschleunigung $a(y)$ an diesen Stellen unendlich ist, da es sich ja um ein yv- und nicht um ein tv-Diagramm handelt. Die Beschleunigung erhält man am einfachsten über die Kraft:

$$a(y) = \frac{F(y)}{m} = \begin{cases} \frac{D(d-y)}{m} - g & \text{für } y \leqq d \\ -g & \text{für } y > d \end{cases}$$

8. Die Gewichtskraft von m_1 muss beide Massen beschleunigen und die Reibung von m_2 überwinden:

$$m_1 g = (m_1 + m_2)a + \mu m_2 g \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2}\, g$$

Die Fadenspannung ist gleich der Kraft auf die Masse m_2:

$$F_{\mathrm{S}} = a m_2 + \mu m_2 g = \frac{m_1 m_2 (1 + \mu)}{m_1 + m_2}\, g$$

Oder: Die Fadenspannung ist gleich der Kraft, die von der Gewichtskraft von m_1 übrig bleibt, wenn die zur Beschleunigung von m_1 nötige Kraft subtrahiert wird (das ist die Gewichtskraft im beschleunigten Bezugssystem):

$$F_\mathrm{S} = m_1 g - m_1 a = m_1(g-a) = \frac{m_1 m_2 (1+\mu)}{m_1+m_2}\, g$$

Konstante Geschwindigkeit, wenn $a = 0$, d.h. wenn $m_1 = \mu m_2$.

9. $(m_2 + m_1)\ a = (m_2 - m_1)\ g \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_2}\, g = 0{,}0200\, g = 0{,}196\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

14. Kräfte

1. $F = ma = 1{,}40 \cdot 10^5\,\mathrm{N}$

2. $a = \dfrac{F}{m} = 1{,}70\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \qquad t = \dfrac{v}{a} = \dfrac{100\,\mathrm{m}}{3{,}6\,\mathrm{s} \cdot 1{,}70\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 16{,}3\,\mathrm{s}$

3. $\frac{3}{7}\,g$

4. $v_0 = 30\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad \Delta x = \dfrac{a}{2}t^2$ und $v_0 = at \quad \Longrightarrow \quad \Delta x = \dfrac{v_0^2}{2a} \quad \Longrightarrow$

   $a = \dfrac{v_0^2}{2\Delta x} = 300\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 30{,}6g \quad \Longrightarrow \quad F = ma = 21{,}0\,\mathrm{kN}$

   Es wirkt die 30,6-fache Gewichtskraft, allerdings nur für die Zeitspanne $\Delta t = \frac{v_0}{a} = 0{,}10\,\mathrm{s}$.

5. $50\,\mathrm{kg}$

6. Bei gleichen Reibungszahlen μ, gleichen Geschwindigkeiten v und gleichen Masse m sind die Reibungskräfte

   $$F_\mathrm{E} = \mu m g_\mathrm{Erde} \quad \text{und} \quad F_\mathrm{M} = \mu m g_\mathrm{Mond} \approx \frac{1}{6} \cdot F_\mathrm{E}$$

   uns damit die Beträge der Beschleunigungen

   $$a_\mathrm{E} = \mu g_\mathrm{Erde} \quad \text{und} \quad a_\mathrm{M} = \mu g_\mathrm{Mond} \approx \frac{1}{6} \cdot a_\mathrm{E}.$$

   Die Bremswege sind also

   $$s_\mathrm{E} = \frac{v^2}{2a_\mathrm{E}} \quad \text{und} \quad s_\mathrm{M} = \frac{v^2}{2a_\mathrm{M}} \approx \frac{v^2}{2 \cdot \frac{1}{6}a_\mathrm{E}} = 6s_\mathrm{E}$$

7. $s = \dfrac{v_0^2}{2|a|} \quad \Longrightarrow \quad |a| = \dfrac{v_0^2}{2s} = 1{,}0\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \qquad F = \mu m g = m|a| \quad \Longrightarrow \quad \mu = \dfrac{|a|}{g} = 0{,}10$

8. Die Geschwindigkeit ist konstant, wenn die Gesamtkraft auf den Körper null ist:

   $$-mg + Cv^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{mg}{C}} = \begin{cases} -63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -226\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} & \text{(Schirm geschlossen)} \\ -7{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -25\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} & \text{(Schirm offen)} \end{cases}$$

9. $G_\mathrm{Erde} = \frac{81}{3{,}7^2} \cdot G_\mathrm{Mond} \approx 6 \cdot G_\mathrm{Mond}$

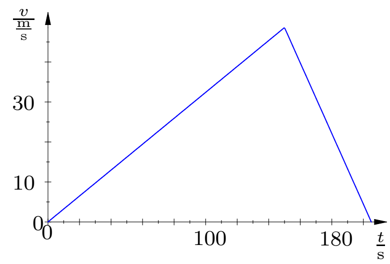
10. $\frac{330\,000}{110^2} \approx 27$

11. Der Erdradius ist etwa 3,7–mal so groß wie der Mondradius. Also vergrößert sich die Gewichtskraft nicht nur um den Faktor 81, sondern sie verringert sich auch um den Faktor $3{,}7^2$. Dies ergibt eine Vergrößerung der Gewichtskraft eines Körpers auf der Erde im Vergleich zum Mond um etwa den Faktor sechs.

12. (a) Die maximale Antriebskraft ist die Haftreibungskraft der Lok:

$$Ma = \mu_{\mathrm{H}} mg \qquad \Longrightarrow \qquad a = \mu_{\mathrm{H}} \frac{m}{M} g = 0{,}324\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

(b) $v_1 = v(t_1) = at_1 = 48{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 175\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

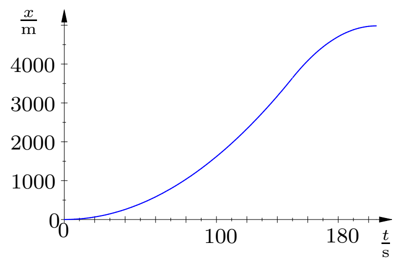


Die Bremsverzögerung (Betrag der Beschleunigung beim Bremsen) ist

$$a' = \frac{\mu M g}{M} = \mu g = 0{,}883\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Mit der Bremszeit $\Delta t = \frac{v_1}{a'} = 55{,}0\,\mathrm{s}$ ist der Bremsweg

$$s = \frac{a'}{2}\Delta t^2 = \frac{v_1^2}{2a'} = 1{,}34\,\mathrm{km}$$



$$x(t) = \begin{cases} \frac{a}{2}\,t^2 & \text{für } t \leqq t_1 \\ x_1 + v_1(t - t_1) - \frac{a'}{2}(t - t_1)^2 & \text{für } t > t_1 \end{cases}$$

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	100	150	170	205
$\frac{x}{\mathrm{m}}$	0	1620	3645	4440	4983

(c) Die Steigung der Strecke ist $\tan\varphi = \frac{0{,}22\,\mathrm{km}}{11\,\mathrm{km}} = 0{,}02$, d.h. $\varphi = 1{,}15°$.

Mit dem Hangabtrieb $F_{\mathrm{H}} = Mg\sin\varphi$ und der Normalkraft der Lok $F_{\mathrm{N}} = mg\cos\varphi$ ist die maximale Antriebskraft beim Bergauffahren

$$F = \mu_{\mathrm{H}} mg\cos\varphi - Mg\sin\varphi = Ma$$

Der Zug schafft also noch die Beschleunigung

$$a = \left(\mu_{\mathrm{H}} \frac{m}{M}\cos\varphi - \sin\varphi\right) g = 0{,}128\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Maximale Steigung:

$$\tan\varphi_{\max} = \frac{\mu_{\mathrm{H}} m}{M} = 0{,}033 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_{\max} = 1{,}89°$$

15. Numerische Lösung der Bewegungsgleichung

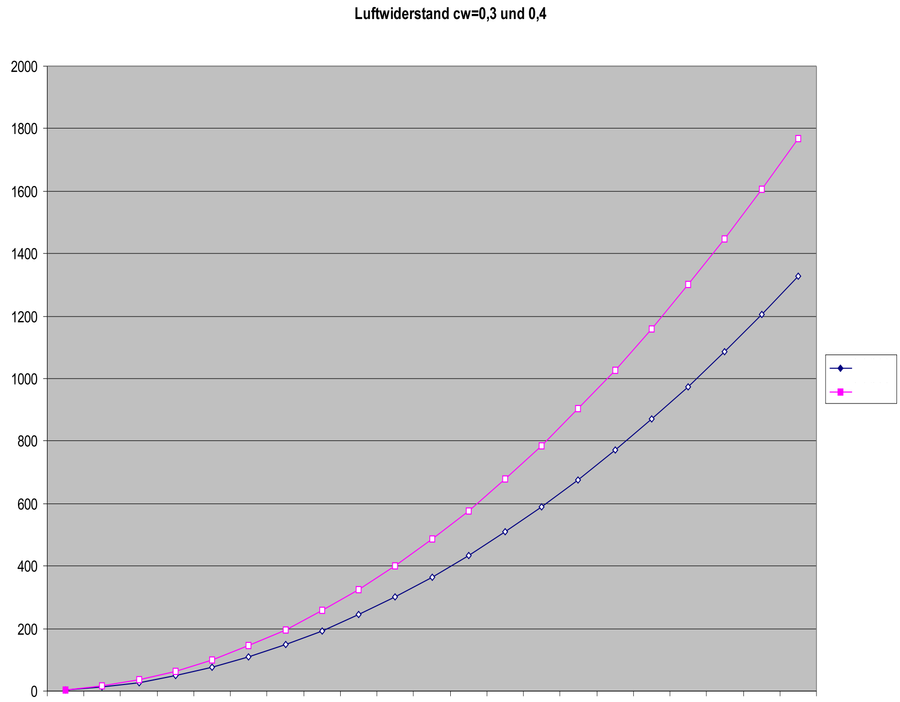
1. (a) Beim Absprung gilt $F_{ges} = G$ und damit Beschleunigung, also Geschwindigkeitszunahme;
   mit zunehmender Geschwindigkeit steigt Luftwiderstand und $F_{ges} = G - F_L$ sinkt, bis sich gg. ein Kräftegleichgewicht einstellt; dann bleibt v konstant

   (b) $775N$, $9,7\frac{m}{s^2}$

   (c) $4981m$

2. .

v	F_L	v	F_L
10	3,009259	10	4,012346
20	12,037037	20	16,049383
30	27,083333	30	36,111111
40	48,148148	40	64,197531
50	75,231481	50	100,308642
60	108,333333	60	144,444444
70	147,453704	70	196,604938
80	192,592593	80	256,790123
90	243,750000	90	325,000000
100	300,925926	100	401,234568
110	364,120370	110	485,493827
120	433,333333	120	577,777778
130	508,564815	130	678,086420
140	589,814815	140	786,419753
150	677,083333	150	902,777778
160	770,370370	160	1027,160494
170	869,675926	170	1159,567901
180	975,000000	180	1300,000000
190	1086,342593	190	1448,456790
200	1203,703704	200	1604,938272
210	1327,083333	210	1769,444444



3. (a) Tabellenblatt:

	A	B
1	t in s	v in m/s
2	0,00	0
3	0,20	`=B2+9,81*(A3-A2)`
4	0,40	`=B3+9,81*(A4-A3)`
5	0,60	`=B4+9,81*(A5-A4)`
...	...	...
12	2,00	$19{,}62\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

(b) Bestätigung mit der zugehörigen Bewegungsgleichung:
$v\,(t) = g \cdot t \quad \Rightarrow \quad v\,(2{,}00\,\mathrm{s}) = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2{,}00\,\mathrm{s} = 19\,(,62)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$

4. (a) Gesichtskraft $G = mg =$ konstant;
Luftwiderstandskraft $F_K = \frac{1}{2} c_W \rho v^2 A$; Luftwiderstandskraft steigt an, bis diese den Wert der Gewischtskraft erreicht

(b) Geschwindigkeit nimmt zu solange Luftwiderstand kleiner als Gewichtskraft; Zunahme verlangsamt sich

(c) $v = gt = 9,81\frac{m}{s^2} \cdot 4,5 \cdot 60s = 2649\frac{m}{s}$
$t = \frac{v_{max}}{g} = \frac{\frac{988m}{3{,}6s}}{9{,}81\frac{m}{s^2}} = 28s$

(d) Schätzung: $A = 0,5m \cdot 0,2m = 0,1m^2$,
$F_L = \frac{1}{2}c_W \rho v^2 A = \frac{1}{2} \cdot 0,78 \cdot 0,5\frac{kg}{m^3} \cdot 0,1m^2 = 1m5kN$
$F_L = G = mg \Rightarrow m = 150kg$

(e) Iteration

5. Mit $\Delta t = 0{,}001\,\mathrm{s}$ folgt

$$v(t_1) \approx \frac{x\left(t_1 + \frac{\Delta t}{2}\right) - x\left(t_1 - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} = \frac{\left(3{,}0005^3 - 2{,}9995^3\right)\,\mathrm{m}}{10 \cdot 0{,}001\,\mathrm{s}} = 2{,}700\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Mit $t_2 = t_1 - \frac{\Delta t}{2} = 2{,}9995\,\mathrm{s}$ und $t_3 = t_1 + \frac{\Delta t}{2} = 3{,}0005\,\mathrm{s}$ folgt

$$v(t_2) \approx \frac{x\left(t_2 + \frac{\Delta t}{2}\right) - x\left(t_2 - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} = \frac{\left(3{,}000^3 - 2{,}999^3\right)\,\mathrm{m}}{10 \cdot 0{,}001\,\mathrm{s}} = 2{,}6991\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v(t_3) \approx \frac{x\left(t_3 + \frac{\Delta t}{2}\right) - x\left(t_3 - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} = \frac{\left(3{,}001^3 - 3{,}000^3\right)\,\mathrm{m}}{10 \cdot 0{,}001\,\mathrm{s}} = 2{,}7009\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$a(t_1) \approx \frac{v(t_3) - v(t_2)}{\Delta t} = 1{,}800\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

6. Theoretisch wird durch

$$v(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

oder das genauere

$$v(t) \approx \frac{x\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - x\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t}$$

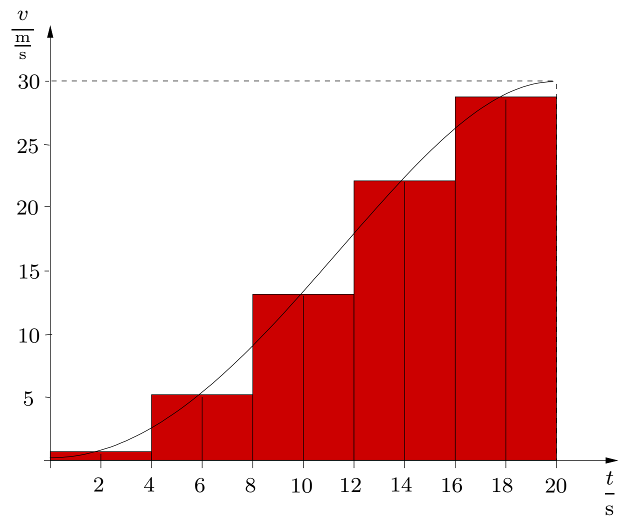
$v(t)$ umso genauer berechnet, je kleiner Δt gewählt wird. Die begrenzte Stellenzahl des Taschenrechners setzt der Genauigkeit aber eine Grenze, da im Zähler des Bruches zwei fast gleiche Terme voneinander subtrahiert werden:

Δt (in s)	$x(t+\Delta t)$ (in m)	$x(t)$ (in m)	$x(t+\Delta t) - x(t)$ (in m)	$v(t) \approx \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ (in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$)
			exakt:	0,5403023059
10^{-8}	0,841 470 9902	0,841 470 9848	0,000 000 0054	0,54
10^{-6}	0,841 471 5251	0,841 470 9848	0,000 000 5403	0,5403
10^{-4}	0,841 525 0108	0,841 470 9848	0,000 054 0260	0,540260 ≈ 0,5403
10^{-3}	0,842 010 8663	0,841 470 9848	0,000 539 8814	0,5398814 ≈ 0,54

Fazit: „Δt ungfähr halbe Taschenrechnergenauigkeit“, d.h. bei einem zehnstelligen Rechner wählt man $\Delta t = 10^{-5}$.

7. (a)

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{v}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$
0	0
2	0,597
4	2,352
6	5,157
8	8,832
10	13,125
12	17,712
14	22,197
16	26,112
18	28,917
20	30,0



(b) $\Delta t = \frac{20\,\mathrm{s}}{5} = 4\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned}\Delta x &= [v(2\,\mathrm{s}) + v(6\,\mathrm{s}) + v(10\,\mathrm{s}) + v(14\,\mathrm{s}) + v(18\,\mathrm{s})]\,\Delta t = \\ &= [0,597 + 5,157 + 13,125 + 22,197 + 28,917]\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4\,\mathrm{s} = \\ &= 69{,}993\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4\,\mathrm{s} = 279{,}972\,\mathrm{m} \approx 280\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

(c) Mit $\Delta t = 0{,}001\,\mathrm{s}$ folgt:

$$\begin{aligned}a_1 = a(6\,\mathrm{s}) &\approx \frac{v(6{,}0005\,\mathrm{s}) - v(5{,}9995\,\mathrm{s})}{0{,}001\,\mathrm{s}} = \frac{5{,}157819027\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 5{,}156181027\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}001\,\mathrm{s}} = \\ &= \frac{0{,}001638\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}001\,\mathrm{s}} = 1{,}638\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\end{aligned}$$

(d) Δx entspricht der Fläche unter dem Grafen und a_1 der Steigung der Kurve im Punkt $(6\,\mathrm{s}\,|\,v(6\,\mathrm{s}))$.

8. (a) Die Masse der beschleunigten Luft ist

$$m_\mathrm{L} = \varrho c_\mathrm{w} A \Delta x$$

Vom Körper wird an der Luft die Arbeit $W = F_\mathrm{L}\Delta x$ verrichtet, die in kinetische Energie der Luft verwandelt wird:

$$F_\mathrm{L}\Delta x = \frac{1}{2} m_\mathrm{L} v^2 = \frac{1}{2}\varrho c_\mathrm{w} A \Delta x v^2 \quad \Longrightarrow \quad F_\mathrm{L} = \frac{1}{2}\varrho c_\mathrm{w} A v^2$$

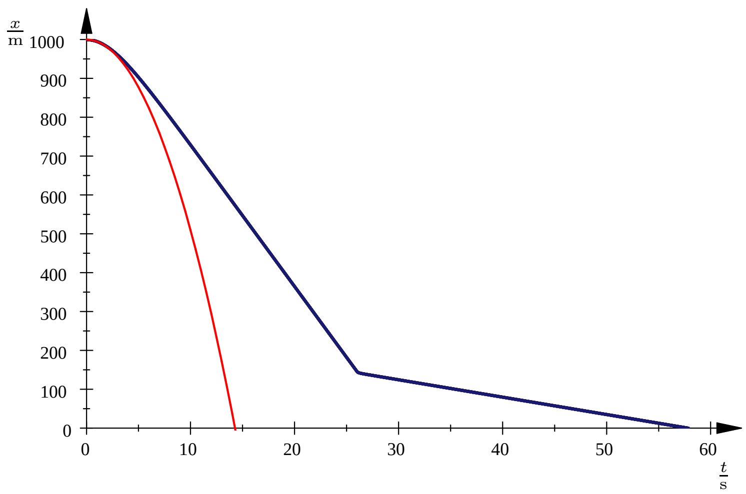
(b) $F = -g - \mathrm{sgn}(v) \cdot \frac{1}{2}\varrho c_\mathrm{w} A v^2 \quad \Longrightarrow$

$$a(x, v, t) = \begin{cases} -g - \mathrm{sgn}(v) C_1 v^2 & \text{für } t \leqq t_1 \\ -g - \mathrm{sgn}(v) C_2 v^2 & \text{für } t > t_1 \end{cases}$$

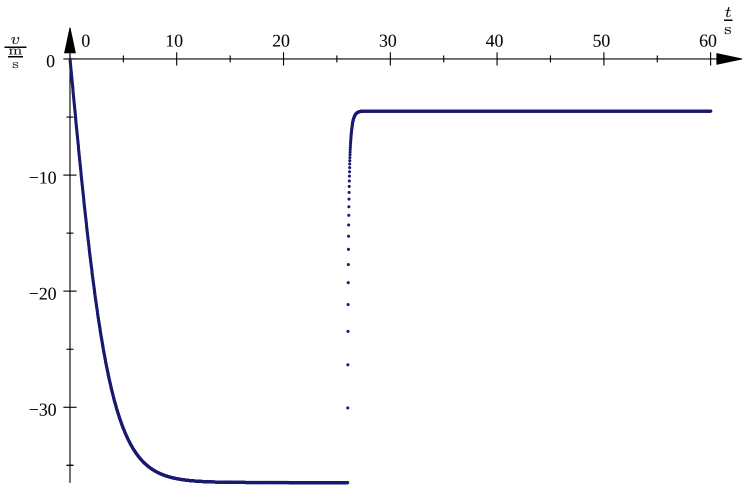
mit $C_1 = \frac{\varrho}{2m} c_{\mathrm{w1}} A_1 = 0{,}00774\,\frac{1}{\mathrm{m}}$ und $C_2 = \frac{\varrho}{2m} c_{\mathrm{w2}} A_2 = 0{,}4902\,\frac{1}{\mathrm{m}}$

Es folgt eine Umsetzung der numerischen Lösung mit MuPAD. Verwendet wird ein Halbschrittverfahren:

```
reset():
DIGITS := 20;
m := 70;
cw1 := 0.84;
cw2 := 1.33;
rho := 1.29;
A1 := 1;
A2 := 40;
C1 := rho/2/m*cw1*A1;
C2 := rho/2/m*cw2*A2;
g := 9.81;
a1 := (x,v,t) -> -g-sign(v)*C1*v^2;
a2 := (x,v,t) -> -g-sign(v)*C2*v^2;
t1 := 26;
a := (x,v,t) -> piecewise([t<=t1,a1(x,v,t)],[t>t1,a2(x,v,t)]);
x[0] := 1000;
v[0] := 0;
t[0] := 0;
dt := 0.01;
n := 6200;
for i from 1 to n do
  t[i] := i*dt;
  vs := v[i-1]+a(x[i-1],v[i-1],t[i-1])*dt/2;
  xs := x[i-1]+v[i-1]*dt/2;
  v[i] := v[i-1]+a(xs,vs,t[i-1]+dt/2)*dt;
  x[i] := x[i-1]+vs*dt;
end_for;
Kv := [t[i],v[i]] $ i=0..n:
Kx := [t[i],x[i]] $ i=0..n:
Px := plot::PointList2d([Kx],ViewingBoxYRange=0..x[0],PointSize = 0.5):
plot(Px,Pxx)
```




```
Pv := plot::PointList2d([Kv], PointSize = 0.5):
plot(Pv);
```




```
KF := [t[i],F(x[i],v[i],t[i])] $ i=0..n:
PF := plot::PointList2d([KF], PointSize = 0.5):
plot(PF);
```

(c) Die Geschwindigkeit ist konstant, wenn die Gesamtkraft auf den Körper null ist:

$$-mg + C_1 * v_1^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{mg}{C_1}} = -35{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -128\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$-mg + C_2 * v_2^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{mg}{C_2}} = -4{,}47\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -16{,}1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

(d) i.
```
v1  := -sqrt(g/C1);
-35.6011497070686788 67
0.99*v1;
-35.2451
v[960];
-35.2442
v[961];
-35.2461
```

Er erreicht 99 % von v_1 zur Zeit 9,6 s.

ii.
```
x[6196];
0.018012
x[6197];
-0.026723
```

Er landet zur Zeit 62,0 s.

iii.
```
aa(2600);
-0.0000234886
aa(2601);
416.388
```

Direkt nach dem Öffnen des Fallschirms ist die Beschleunigung maximal:

$$a_{\text{max}} = 416\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 42{,}4\,g$$

In der Realitat tritt diese hohe Beschleunigung nicht auf, da sich der Fallschirm nicht schlagartig öffnet.

16. Schwingungen

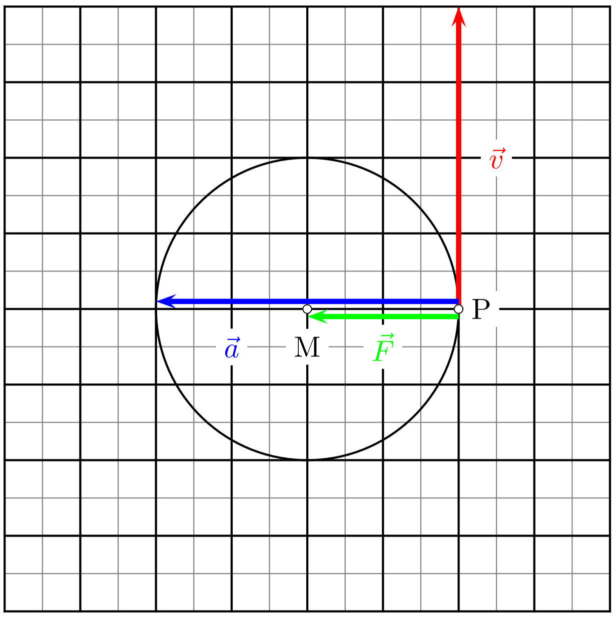
1. periodische Bewegung mit Rückstellkraft proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage
2. (a) $T = 0,63s$
   (b) $v = 0,5\frac{m}{s}$
3. $F = -mg\sin\alpha \approx -mg\alpha_{Bogenmaß} = -mg\frac{s}{l}$
   Bewegungsgleichung für Fadenpendel: $a = -\frac{g}{l}s \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

17. Krummlinige Bewegungen

1. (a) $11m$
   (b) $70\frac{m}{s}$
   (c) i. $\overrightarrow{F_L}$ und $\overrightarrow{v}$ tangential zur Bahnkurve
       ii. F_L steigt, da v steigt, Richtung ändert sich (wird vertikaler)
       iii. Abweichung von Parabelform; Flugweiter verkürzt sich

2. (a) $8{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
   (b) $-25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

3.

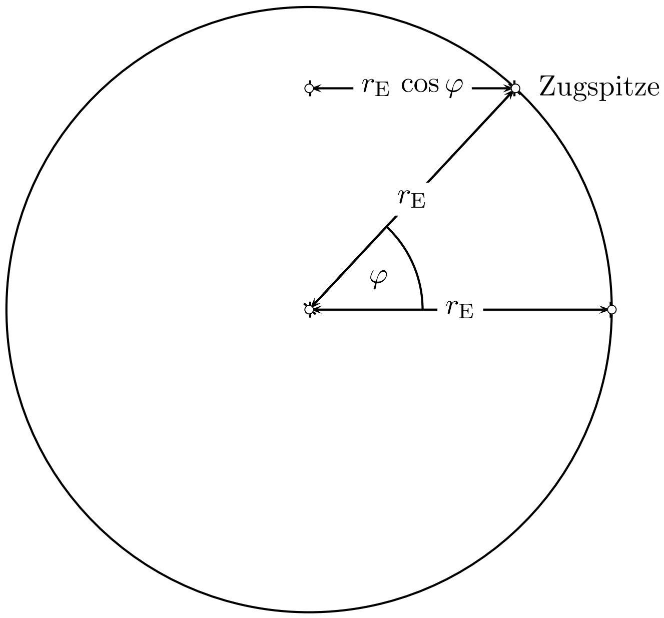


4. Mit der Abschätzung 20 m für den Radius der Kreisbahn folgt
   $\frac{m\,v^2}{r} = 15\,m\,g \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{15\,r\,g} = 54{,}2494239601\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 54\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 195\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$
   $v = 2\,\pi\,r\,f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{v}{2\,\pi\,r} = 1{,}4\,\mathrm{Hz}$

5. Der Betrag der Geschwindigkeit ist zwar konstant, aber die ihre Richtung ändert sich fortwährend.

6. (a) $\dfrac{2\,\pi\,r_{\mathrm{E}}}{24\,\mathrm{h}} = 1{,}7 \cdot 10^3\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

   (b) $\dfrac{2\,\pi\,r_{\mathrm{E}} \cos 47^\circ 25' 20''}{24\,\mathrm{h}} = 1{,}5 \cdot 10^3\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

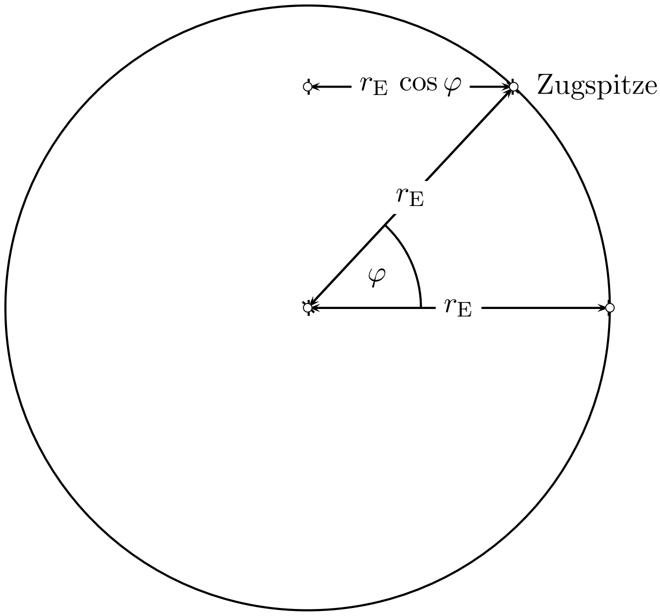


7. Der Betrag der Geschwindigkeit ist zwar konstant, aber die ihre Richtung ändert sich fortwährend.

8.

(a) $\dfrac{2\,\pi\,r_{\mathrm{E}}}{24\,\mathrm{h}} = 1{,}7\cdot 10^3\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

(b) $\dfrac{2\,\pi\,r_{\mathrm{E}}\cos 47^\circ 25' 20''}{24\,\mathrm{h}} = 1{,}5\cdot 10^3\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$



9. (a) $v = \sqrt{2\,g\,d} = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Aufgrund von Reibung und Luftwiderstand entstehen Energieverluste, so dass der Zug den höchsten Punkt nicht erreichen und abstürzen würde.

(b) $v = \sqrt{\frac{g\,d}{2}} = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 9{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Die Geschwindigkeit ist stets tangential bezüglich der Kreisbahn.

Das ist die Hälfte der in vorigen Teilaufgabe errechneten Geschwindigkeit. Also ist es nicht möglich, dass die gesamte Zentripetalkraft nur von der Gravitationskraft aufgebracht wird.

(c) $a_{\mathrm{Z}} = \frac{m\,v^2}{r} + m\,g = \frac{m\,2\,g\,d}{r} + m\,g = 5\,g$. Dieser Wert stimmt „recht” gut mit dem angegeben Wert überein.

(d) Durch eine Zerlegung der Gravitationskraft in die Tangential– und Radialkomponente findet man, dass der Anteil fortwährend zunimmt. Von B nach D drückt die Radialkompontente der Gravitationskraft auf die Fahrbahn und von D nach F wird die Kraft mit der der Zug auf die Fahrbahn gedrückt wird durch die Radialkomponente vermindert.

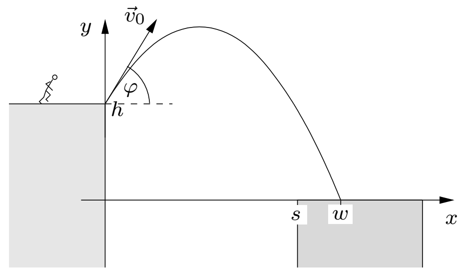
10. Erdmasse M: $m\,g = G\,\dfrac{m\,M}{r_E^2} \quad\Rightarrow\quad M = \dfrac{g\,r_E^2}{G}$,

dabei ist m der Wert einer beliebigen Masse, und r_E der Erdradius, sowie wie G die Gravitationskonstante und g die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche.

Sonnenmasse $M_\odot$: Die Gravitationskraft zwischen Erde und Sonne liefert die für die (näherungsweise) Kreisbewegung der Erde um die Sonne nötige Zentripetalkraft.

Somit lässt sich aus $G\,\frac{M_E\,M_\odot}{r^2} = M_E\,\omega^2\,r$ der Wert $M_\odot$ für die Masse der Sonne berechnen, wobei die Gravitationskonstante G, die Masse der Erde M_E und der Abstand Erde–Sonne r bekannt sein müssen (ω ist die Winkelgeschwindigkeit für die Bewegung der Erde um die Sonne).

11. Mit $v_0 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_{x0} = v_0\cos\varphi$ und $v_{y0} = v_0\sin\varphi$ folgt für die Sprungdauer t:



$$y(t) = h + (v_0\sin\varphi)\cdot t - \frac{g}{2}t^2 = 0$$

mit der Lösung

$$t = \frac{1}{g}\left[v_0\sin\varphi \overset{+}{\underset{(-)}{}} \sqrt{2gh + (v_0\sin\varphi)^2}\right]$$

Die Weite des Sprungs ist

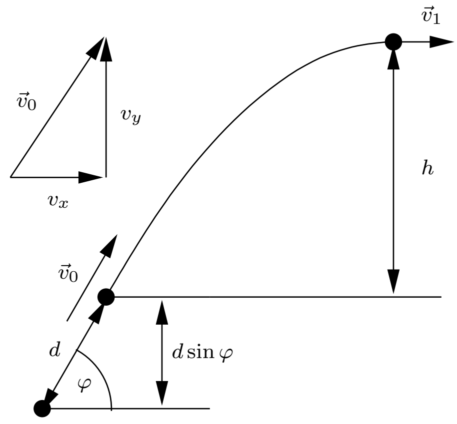
$$w = (v_0\cos\varphi)\cdot t = \frac{v_0\cos\varphi}{g}\left[v_0\sin\varphi + \sqrt{2gh + (v_0\sin\varphi)^2}\right]$$

φ	0	10°	11°	20°	30°	40°	45°
$\frac{w}{\mathrm{m}}$	10,1	11,8	12,0	13,3	14,2	14,2	13,9

12. (a) $\frac{D}{2}d^2 = \frac{m}{2}v_0^2 + mgd \quad\Longrightarrow\quad v_0 = \sqrt{\frac{Dd^2}{m} - 2gd} = 9{,}90\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$$\frac{D}{2}d^2 = mg(h+d) \quad\Longrightarrow\quad h = \frac{Dd^2}{2mg} - d = 7{,}50\,\mathrm{m} - 2{,}50\,\mathrm{m} = 5{,}00\,\mathrm{m}$$

(b) $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0\cos\varphi \\ v_0\sin\varphi \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\frac{D}{2}d^2 = \frac{m}{2}v_0^2 + mgd\sin\varphi \quad\Longrightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{Dd^2}{m} - 2gd\sin\varphi} = 10{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\frac{m}{2}v_0^2 = mgh + \frac{m}{2}v_{x0}^2 \quad\Longrightarrow$$

$$h = \frac{v_0^2 - v_{x0}^2}{2g} = \frac{v_0^2(1-\cos^2\varphi)}{2g} = \frac{v_0^2\sin^2\varphi}{2g}$$

$$h = 4{,}00\,\mathrm{m}$$

Die Ergebnisse von (a) erhält man mit $\varphi = 90°$.

13. Haftreibungskoeffizient $\mu_\mathrm{H} = \tan 35° = 0{,}70$; Drehfrequenz $f = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{m_\mathrm{H}\,g}{r}} = 1{,}3\,\mathrm{Hz}$.

14. (a) ,,Fallzeit" des Stuntman: $h = \frac{1}{2}\,g\,t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2\,h}{g}} = 3{,}2\,\mathrm{s}$.

    Stuntman und LKW begegnen sich mit einer Relativgeschwindigkeit vom Betrag $90\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

    Beim Auftreffen auf dem Boden ist der Stuntman $100\,\mathrm{m} - 25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3{,}2\,\mathrm{s} = 80\,\mathrm{m}$ vom Lastwagen entfernt.

    (b) Damit der Stuntman auf dem Lastwagen landen kann muss dieser die fehlenden 20 m durch eine Beschleunigung ,,kompensieren".

$$\frac{1}{2}\,a \cdot (3{,}2\,\mathrm{s})^2 = 20\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{40\,\mathrm{m}}{(3{,}2\,\mathrm{s})^2} = 4{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

.

18. Energie und Leistung

1. $140\,\mathrm{m}, 150\,\mathrm{m}$

2. Die Basiseinheit der Stromstärke ist das Ampere und GW ist eine Einheit der Leistung. Wir exportieren weder Strom noch Leistung, sondern Energie. Eine Einheit der Energie istübrigens die Kilowattstunde (kWh). Diese Einheit solltest du auch auf der Rechnung des Energieversorgers deiner Eltern finden.

3. (a) $2{,}0 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J} = 5{,}8 \cdot 10^{7}\,\mathrm{kWh}$
   (b) $63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
   (c) $165\,\mathrm{MW}$
   (d) 75%

4. (a) $F_{ges} = 2,0kN$; $a = 5,7\frac{m}{s^2}$
   (b) $E_{pot1} = 48kJ$
   (c) $E_{pot,Tonne} \downarrow$, $E_{pot,Dachdecker} \uparrow$,$E_{kin,Tonne} \uparrow$, $E_{kin,Dachdecker} \uparrow$,
   (d) $E_{pot2} = 13kJ$
   (e) $v = 14\frac{m}{s}$

5. (a) $F_{ges} = 0,49kN$; $a = 4,9\frac{m}{s^2}$
   (b) $E_{pot,Tonne} = 4,4kJ$, $E_{pot,Dachdecker} = 13kJ$
   (c) $E_{kin1} = 13kJ - 4,4kJ = 8,6kJ$; $v = 13\frac{m}{s}$
   (d) $E_{kin2} = 19\frac{m}{s}$

6.

7. In ca. 35 cm Höhe ist E_{kin} maximal, sie beträgt etwa $1,2kJ$. Das sind ca. 84% der Gesamtenergie.

8. Die Geschwindigkeit beträgt in etwa $8\frac{m}{s}$. Die kinetische Energie beträgt in etwa $1,1kJ$

9.

10. (a) Die verrichtete Arbeit ist $3,8kJ$.

(b) Der Zuwachs an Höhenenergie ist ebenfalls $3,8kJ$.

11. Der Elektromotor bringt die Energie

$$W = 0{,}8 \cdot 50 \cdot \left(\frac{m}{2}v_1^2 - \frac{m}{2}v_2^2\right) = 0{,}8 \cdot 25 \cdot 800\,\mathrm{kg} \cdot \left(15^2 - 5^2\right)\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 3{,}2\,\mathrm{MJ}$$

auf die Straße. Das ergibt eine Einsparung von $\dfrac{3{,}2}{9}\,\mathrm{l} = 0{,}36\,\mathrm{l}$.

12. (a) $G = 0,2N$, $\Delta s = \frac{G}{D} = \frac{0{,}2N}{1\frac{N}{m}} = 0,2m$, $l_0 = l_1 - \Delta s = 10cm$

(b) Z. B.: verschiedene Massestücke (Masse m_i) an die Feder hängen und die zugehörige Dehnung Δs_i messen; jeweils Federhärte $D = \frac{m_i \cdot g}{\Delta s_i}$ berechnen und Mittelwert bilden

ODER s-F-Diagramm zeichnen und Steigung der Ausgleichsgerade bestimmen

(c)

(d) $E_{sp} = \frac{1}{2}Ds^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\frac{N}{m} \cdot 1,9m^2 = 1,8J$

(e) $E_{pot} = E_{sp} = mgh \Rightarrow h = \frac{1{,}8J}{0{,}02kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}} = 9,2m$

(f) Auftreffgeschwindigkeit hängt davon ab, wie weit über dem Boden das Massestück zu Beginn ist; Annahme: Massestück ist zu Beginn $1m$ über dem Boden $\Rightarrow$

$E_{kin} = E_{sp} + E_{pot,1m} = 1,8J + 0,02kg \cdot 9,81\frac{m}{s^2} \cdot 1m = 2,0J$,

$v^2 = \frac{2E_{kin}}{m} \Rightarrow v = 14\frac{m}{s}$

13. (a) $W_\mathrm{H} = mgh = 70\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 27\,\mathrm{m} = 1{,}85 \cdot 10^4\,\mathrm{J}$

(b) Während des Sprungs wirkt immer die Gewichtskraft $F_\mathrm{G} = mg$ auf den Kletterer und zwar über die ganze Strecke h. Deshalb wird am Kletterer die Arbeit $\Delta W = mgh$ verrichtet und diese wird in kinetische Energie verwandelt.

(c) $mgh = \dfrac{m}{2}v^2 \quad \Longrightarrow \quad v^2 = 2gh = 530\,\dfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = 23{,}0\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 82{,}9\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

14. (a) Die kinetische Energie des Waggons wandelt sich in die Spannenergie der Feder um.

(b) $\dfrac{m}{2}v^2 = \dfrac{D}{2}\Delta x^2 \quad \Longrightarrow \quad D = \dfrac{mv^2}{\Delta x^2} = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}52^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{0{,}65^2\,\mathrm{m}^2} = 9{,}6 \cdot 10^3\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

15. $1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{dm}^3 \quad \Longrightarrow \quad m = 200 \cdot 1000\,\mathrm{kg} = 200\,000\,\mathrm{kg}$

$\Delta W = mgh = 294{,}3\,\mathrm{MJ}$

$P_\mathrm{W} = \dfrac{\Delta W}{\Delta t} = \dfrac{mgh}{\Delta t} = \dfrac{294{,}3\,\mathrm{MJ}}{90\,\mathrm{s}} = 3{,}27\,\mathrm{MW}$

$P_\mathrm{e} = 0{,}8 \cdot P_\mathrm{W} = 2{,}62\,\mathrm{MW}$

16. Die mechanische Leistung des Motors ist $P_\mathrm{m} = \eta P_\mathrm{e} = 39\,\mathrm{W}$.

$$\Delta W = P_\mathrm{m}\Delta t = \frac{D}{2}\Delta x^2$$

$$\Delta t = \frac{D\Delta x^2}{2P_\mathrm{m}} = \frac{3900\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}\cdot 25\,\mathrm{cm}^2}{2\cdot 39\,\mathrm{W}} = \frac{2500\,\mathrm{N\,cm\,s}}{2\,\mathrm{J}} = \frac{25\,\mathrm{N\,m\,s}}{2\,\mathrm{N\,m}} = 12{,}5\,\mathrm{s}$$

17. $F = F_\mathrm{A} - F_\mathrm{R} = 2100\,\mathrm{N} \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{F}{m} = \frac{2100\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}}{900\,\mathrm{kg}} = 2{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$$F_\mathrm{R} = \mu m g \quad\Longrightarrow\quad \mu = \frac{F_\mathrm{R}}{mg} = \frac{400\,\mathrm{N}}{900\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} = 0{,}045$$

18. (a) Am Ort x_0 ist nur die potentielle Energie des Kletterers größer als null. Zwischen x_0 und x_1 wird W_p immer kleiner und verwandelt sich in kinetische Energie; die Spannenergie des Seils ist immer noch null. Zwischen x_0 und x_1 verwandelt sich die restliche potentielle und die kinetische Energie in Spannenergie, bis zum Schluss bei x_2 die ganze anfängliche potentielle Energie in Spannenergie umgewandelt wurde.

(b) Die Höhe h des Kletterers über dem tiefsten Punkt ist $h = 9\,\mathrm{m} - x$, d.h.

$$W_\mathrm{p} = mgh = mg(9\,\mathrm{m} - x) = mg\cdot 9\,\mathrm{m} - mgx$$

Das ist eine lineare Funktion von x.

(c) $W_\mathrm{S}(x) = 0$ für $0 \leqq x \leqq x_1$. $\quad W\mathrm{S}(x_2) = 9000\,\mathrm{J}$.

(d) $W_\mathrm{ges} = 9000\,\mathrm{J}$.

Aus dem Energiesatz

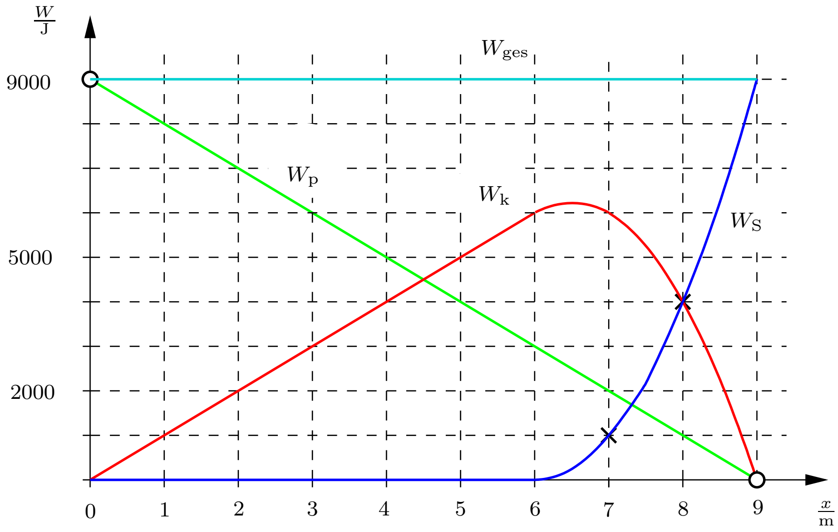
$$W_\mathrm{p} + W_\mathrm{k} + W_\mathrm{S} = W_\mathrm{ges}$$

folgt

$$W_\mathrm{k}(x) = W_\mathrm{ges}(x) - W_\mathrm{p}(x) - W_\mathrm{S}(x)$$

$\frac{x}{\mathrm{m}}$	$\frac{W_\mathrm{ges}(x)}{\mathrm{J}}$	$\frac{W_\mathrm{p}(x)}{\mathrm{J}}$	$\frac{W_\mathrm{S}(x)}{\mathrm{J}}$	$\frac{W_\mathrm{k}(x)}{\mathrm{J}}$
0	9000	9000	0	0
6	9000	3000	0	6000
7	9000	2000	1000	6000
8	9000	1000	4000	4000
9	9000	0	9000	0

$$\frac{m}{2}v^2 = mgx_1 \quad\Longrightarrow\quad v^2 = 2gx_1 = 120\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \quad\Longrightarrow\quad v = 11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 39\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$



(e) Die maximale Seildehnung ist $\Delta x = 3\,\mathrm{m}$.

$$W_{\text{ges}} = mgx_2 \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{W_{\text{ges}}}{gx_2} = \frac{9000\,\mathrm{J}}{10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 9\,\mathrm{m}} = 100\,\mathrm{kg}$$

$$\frac{D}{2}\Delta x^2 = W_{\text{ges}} = mgx_2 \quad \Longrightarrow \quad D = \frac{2mgx_2}{\Delta x^2} = \frac{2 \cdot 9000\,\mathrm{J}}{9\,\mathrm{m}^2} = 2000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Die Geschwindigkeit wird größer, solange die Beschleunigung nach unten (in Richtung der x-Achse) zeigt, d.h. $a(x) > 0$ für $x < x_3$ und $a(x) < 0$ für $x > x_3$. Es gilt also $a(x_3) = 0$ und damit $F(x_3) = 0$.

$$F(x_3) = mg - D \cdot \Delta x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta x_3 = \frac{mg}{D} = \frac{100\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}{2000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = 0{,}5\,\mathrm{m}$$

Es gilt also $x_3 = x_1 + \Delta x_3 = 6{,}5\,\mathrm{m}$

19. $W_{\text{k}} = \frac{m}{2}v^2 = 9000\,\mathrm{kg} \cdot \left(5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 225000\,\mathrm{J} = 2 \cdot \frac{D}{2}x^2 = Dx^2$

$x^2 = \frac{W_{\text{k}}}{D} = 0{,}09\,\mathrm{m}, \qquad x = 0{,}3\,\mathrm{m}$

20. (a) $W_{\text{h}} = (m + m_1)gh = 115\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 7{,}2\,\mathrm{m} = 8{,}1\,\mathrm{kJ}$

(b) $W = 120\,\mathrm{N} \cdot 80\,\mathrm{m} = 9600\,\mathrm{J} = 9{,}6\,\mathrm{kJ}$

(c) $W = \frac{m}{2}v^2 = \frac{0{,}025\,\mathrm{kg}}{2} \cdot 410^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 2{,}1 \cdot 10^3\,\mathrm{J} = 2{,}1\,\mathrm{kJ}$

(d) $W = \frac{D}{2}\Delta x^2 = \frac{4500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{2} \cdot 0{,}064^2\,\mathrm{m}^2 = 9{,}2\,\mathrm{J}$

21. (a) $\frac{m}{2}v^2 = mgh \quad\Longrightarrow\quad v^2 = 2gh = 470{,}88\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \quad\Longrightarrow\quad v = 21{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 78{,}1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

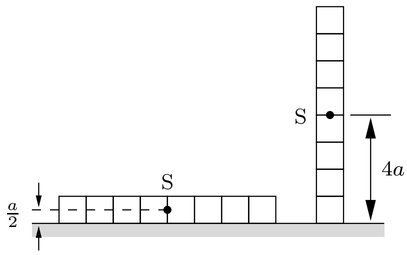
(b) $\frac{m}{2}v^2 = \frac{D}{2}\Delta x^2 \quad\Longrightarrow\quad m = \frac{D\Delta x^2}{v^2} = \frac{9{,}6\cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}65^2\,\mathrm{m}^2}{0{,}52^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 1{,}50\cdot 10^4\,\mathrm{kg}$

22. (a) Der erste Würfel bleibt liegen, also $h_1 = 0$, der zweite Würfel wird um $h_2 = a$ gehoben, der dritte um $h_3 = 2a$ usw.:

$$\begin{aligned} W &= mgh_1 + mgh_2 + \ldots + mgh_8 = mg(a + 2a + \ldots + 7a) = \\ &= mga(1+2+3+4+5+6+7) = 28mga = 13{,}2\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

(b) Wenn der Turm am Boden liegt, ist der Schwerpunkt in der Höhe $h_1 = \frac{a}{2}$, beim senkrecht stehenden Turm in der Höhe $h_2 = 4a$. Der Schwerpunkt wird um $h_2 - h_1$ gehoben:

$$W = 8mg\left(4a - \frac{a}{2}\right) = 8mg\cdot\frac{7a}{2} = 28mga$$



23. (a) $W_1 = 2\cdot m_1 g\left(\frac{a_1}{2} - \frac{b}{2}\right) = 90\,000\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\cdot 2{,}7\,\mathrm{m} = 2{,}38\cdot 10^6\,\mathrm{J}$

$W_2 = m_2 g a_1 = 32\,000\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\cdot 7\,\mathrm{m} = 2{,}20\cdot 10^6\,\mathrm{J}$

$W_{\mathrm{ges}} = W_1 + W_2 = 4{,}58\cdot 10^6\,\mathrm{J}$

(b) $80\,\%\cdot P_{\mathrm{e}}\cdot\Delta t = W_2 \quad\Longrightarrow\quad \Delta t = \frac{W_2}{0{,}8\,P_{\mathrm{e}}} = \frac{2{,}20\cdot 10^6\,\mathrm{J}}{8000\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}} = 275\,\mathrm{s}$

(c) $\frac{m}{2}v^2 = mga_1 \quad\Longrightarrow\quad v^2 = 2ga_1 = 2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 7\,\mathrm{m} = 137{,}34\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$

$\Longrightarrow\quad v = 11{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 42\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

24. (a) Die Reibungskraft (Rollreibung und Luftwiderstand) wirkt der Antriebskraft entgegen, die Gesamtkraft auf das Auto ist null.

$$F_{\mathrm{ges}} = F_{\mathrm{A}} - F_{\mathrm{R}} = ma = 0 \quad\Longrightarrow\quad a = 0 \quad\Longrightarrow\quad v = \text{konstant}$$

(b) $P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F_{\mathrm{A}}\cdot\Delta x}{\Delta t} = F_{\mathrm{A}}\cdot v = 400\,\mathrm{N}\cdot 35\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 14\,\mathrm{kW}$

25. Energie ...

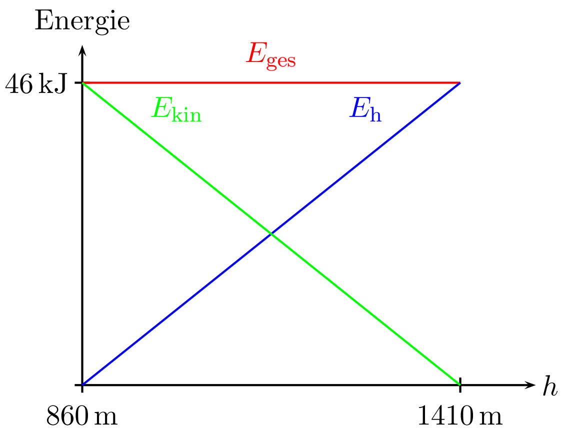
... ist gespeicherte Arbeit	w	... ist Leistung pro Zeit	f
... hat die Einheit $\frac{\mathrm{J}^2}{\mathrm{Nm}}$	w	... ist Zeit mal Leistung	w
... hat die Einheit Ws	w	... ist Kraft durch Weg	f
... hat die Einheit N · cm	w	... ist in einem abgeschlossenen System konstant	w

Raum für erforderliche Nebenrechnungen:

$\frac{\mathrm{J}^2}{\mathrm{Nm}} = \frac{\mathrm{J}^2}{\mathrm{J}} = \mathrm{J}, \qquad \mathrm{Ws} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{J}$

26. (a) $P = \frac{m\,g\,h}{t} = \frac{85\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 550\,\mathrm{m}}{1620\,\mathrm{s}} = 0{,}28\,\mathrm{kW}$

(b)



27. (a) $6 \cdot F = G + 3 \cdot 50\,\mathrm{N} \quad \Rightarrow \quad G = 2400\,\mathrm{N} - 150\,\mathrm{N} = 2{,}25\,\mathrm{kN}$

(b) Seille $\ell = 6 \cdot 2{,}0\,\mathrm{m} = 12\,\mathrm{m}$

Arbeit: $W = F \cdot 12\,\mathrm{m} = 400\,\mathrm{N} \cdot 12\,\mathrm{m} = 48\,\mathrm{kJ}$

(c) Wirkungsgrad $\eta = \frac{W_{\text{Nutzen}}}{W_{\text{Aufwand}}} \cdot 100\% = \frac{2250\,\mathrm{N} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m}}{2400\,\mathrm{N} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m}} = 94\%$

28.
- Bergab: Die Frequenz mit der ein Profi tritt ist etwa 200 $\frac{1}{\mathrm{min}}$. Die größte Übersetzung die er zur Verfügung hat ist 53 : 12 und der Radumfang beträgt 2,00 m.

  Der Berg soll nicht so steil sein, dass der Rennradfahrer nicht mehr treten muss.

  $v = 200\,\frac{1}{\mathrm{min}} \cdot \frac{53}{12} \cdot 2{,}00\,\mathrm{m} = 29{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 106\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

- Bergauf: Ein Radprofi kann etwa eine Dauerleistung von 500 W erbringen.

  Wir sehen von Reibungsverlusten und vom Luftwiderstand ab und nehmen an, dass die Steigung 10% beträgt. Die Masse des Radfahrers inclusive Rennrad soll 85 kg betragen.

$$P = \frac{m\,g\,h}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{m\,g\,h}{P} = \frac{m\,g\cdot 0{,}1\cdot \ell}{P}$$

$$v = \frac{\ell}{t} = \frac{\ell\cdot P}{m\,g\cdot 0{,}1\cdot \ell} = \frac{P}{m\,g\cdot 0{,}1} = 6{,}00\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 21{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

29. (a) Die Gewichtskraft der herabfahrenden Bahn und der ihn ihr enthaltenen Passagiere wird genutzt um die talwärts stehende Bahn samt Passagiere hinaufzuziehen.

    Energieeinsparung: $8100\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{ms}^{-2}\cdot 83\,\text{m} = 6{,}6\,\text{MJ}$. Die Kosten fr diese Energie betragen 33 Cent. Somit braucht es einen nicht zu wundern, dass alle anderen als Wasserballastbahnen konzipierten Bergbahnen in Deutschland inzwischen auf elektrischen Betrieb umgestellt haben. Auch bei der Nerobergbahn war dies geplant, aber der Ausbruch des 2. Weltkriegs durchkreuzte dieses Vorhaben.

    (b) Damit die Bahn funktioniert muss der Wagen an der Bergstation eine größere Masse haben, als der Wagen an der Talstation. Andererseits soll sie gerade so viel größer sein wie nötig, da Wasser das mit hinunter genommen wird, wieder nach oben gepumpt werden muss. Um die zuzuladende Wassermenge zu berechnen muss der Fahrer des Wagens an der Bergstation eigentlich sogar die Masse aller seiner Fahrgäste, die Masse der Fahrgäste im talseitigen Wagon und sämtliche Reibungsverluste kennen. Außerdem muss er Masse zum Beschleunigen seines Wagens einplanen.

    (c) Leistung: $P = \frac{m\,g\,h}{t} = \frac{\varrho\,V\,g\,h}{t} = \frac{65\cdot 10^3\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{ms}^{-2}\cdot 83\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 15\,\text{kW}$

    Zeit: $t = \frac{7}{65}\cdot 1\,\text{h} = 6{,}5\,\text{min}$

    (d) Fahrtdauer: $t = \frac{s}{v} = \frac{438\,\text{m}}{10\,\text{kmh}^{-1}} = 3{,}5\,\text{min}$

    (e) Zwar dauert es etwa doppelt so lang die 7000 l Wasser hinaufzupumpen wie die Bahn unterwegs ist, aber man kann wohl getrost davon ausgehen, dass die Zeit zwischen zwei Fahrten größer als 4 Minuten ist, wenn man vor allem bedenkt, dass das Wasser in die Wagen bzw. aus ihnen gepumpt werden muss.

    Der Grund für das große Wasservolumen der Vorratsbehälter dürfte darin liegen den Betrieb auch dann sicherzustellen, wenn die Pumpe ausfällt. So kann man 32 ($\lfloor 220 : 7\rfloor + 1$) Fahrten ohne Pumpenbetrieb durchführen, wenn man kein Wasser wegschütten will.

    (f) $t = \frac{v}{a} = \frac{v}{\frac{F}{2\,m+\Delta m}} = \frac{v}{\frac{\sin\alpha\cdot g\,\Delta m}{2\,m+\Delta m}} = \frac{2\,m+\Delta m}{\Delta m}\cdot\frac{v}{\sin\alpha\cdot g} \quad\Rightarrow\quad \Delta m = \frac{2\,m\,v}{\sin\alpha\cdot g\,t - v}\cdot m = \frac{2\,m\,v}{0{,}19\cdot g\,t - v}\cdot m = 0{,}76\,\text{t}$

    Sofern der Sinus noch ist bekannt ist muss die Hangabtriebskraft entweder über eine maßtäbliche Zeichnung oder über die Ähnlichkeit von Dreiecken ermittelt werden.

    (g) Die Steigung der Strecke ist nicht konstant. So beträgt die maximale Steigung der Bahn 26%.

30. (a) $m = A\,v\,t\,\varrho$

    (b) $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\,m\,\left(v_1^2 - v_2^2\right) = \frac{1}{2}\,A\,v\,t\,\varrho\,\left(v_1^2 - v_2^2\right), P = \frac{1}{2}\,A\,v\,\varrho\,\left(v_1^2 - v_2^2\right)$

(c) $P = P_0 \cdot \frac{1}{2}\,(1+x)\left(1-x^2\right)$

Hinweis: $c_P = \frac{1}{2}\,(1+x)\left(1-x^2\right)$ wird Leistungsbeiwert genannnt.

(d) Ermittlung von $x = \frac{1}{3}$ entweder mit den Mitteln der Differentialrechnung oder durch Ablesen aus einem x–$\frac{P}{P_0}$–Diagramm ($x \in [0;1]$, $\frac{P}{P_0} \in [0;0{,}8]$).

(e) $P = \frac{16}{27}\,P_0 = 1{,}6\,\mathrm{MW}$

Hinweis: Bei Geschwindigkeiten größer als $16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ treten Turbolenzen auf so, dass P praktisch auch in etwa die maximale Leistung ist.

31. (a) $5{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
   (b) $1{,}3 \cdot 10^5\,\mathrm{W}$
   (c) $62\%; 32°$
   (d) $0{,}53\,G$
   (e) $4{,}9\,\mathrm{t}$

32. Wir gehen davon aus, dass wir einen wunderschönen Sommertag haben. Wir pflastern unser Auto mit Solarmodulen des Flächeninhalts $2\,\mathrm{m}^2$. Die Solarkonstante ist $1{,}4\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2}$, wobei effektiv nur etwa $1\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2}$ am Boden ankommt. Der Wirkungsgrad eines Solarmoduls ist etwa 20%, so dass 0,4 kW an Leistung zu Verfügung stehen.

Beim eco–Shell–Marathon wurde das sogenannte urban–concept eingeführt, bei dem Wagen verwendet werden, deren Konstruktion sich etwas mehr an der Realität orientieren als die der Standardklasse.

Bei einer Geschwindigkeit von $25\,\mathrm{kmh}^{-1}$ kommt man mit einem Liter Benzin 800 km weit. Der Brennwert eines Liters Benzin beträgt $29\,\frac{\mathrm{MJ}}{\ell}$, das sind etwa $6{,}5\,\frac{\mathrm{kWH}}{\mathrm{kg}}$.

Die Zeit um die 800 km zurückzulegen ist 32 h und die erforderliche Leistung $\frac{6{,}5\,\mathrm{kWh}}{32\,\mathrm{h}} \approx 0{,}20\,\mathrm{kW}$, so dass es prinzipiell möglich wäre doppelt so schnell zu fahren wie beim eco–Shell–Marathon.

33. $t = \dfrac{W}{P} = \dfrac{m\,g\,h}{P} = \dfrac{12 \cdot 10^9\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 350\,\mathrm{m}}{1060 \cdot 10^6\,\mathrm{W}} = 11\,\mathrm{h}$

34. Individuelle Lösung.

19. Impuls

1. $v_2 = 69\frac{m}{s}$

2. (a) nach dem Aufprall schießt der Tischtennisball schnell nach oben

   (b) Phase 1: beide Bälle bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit beschleunigt nach unten
   Phase 2: Basketball mach elastischen Stoß am Boden und bewegt sich wieder nach oben
   Phase 3: Basketball stößt von unten auf den sich nach unten bewegenden Tischtennisballball
   Aus Energie- und Impulserhaltung ergibt sich, dass die Geschwindigkeit des Tischtennisballs nach Phase drei hoch ist

3. (a) $a = \frac{v}{t} = \frac{25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{7{,}5\,\mathrm{s}} = 3{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \qquad F = ma = 3{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$

   $s = \frac{a}{2}\,t^2 = \frac{vt}{2} = 93{,}75\,\mathrm{m} \approx 94\,\mathrm{m}$

   (b) $mv = (M+m)V \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{mv}{M+m} = 0{,}20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

   (c) $\frac{m}{2}v^2 = mgh \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = 14{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 50{,}4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

4. Tatsächliche Geschwindigkeit der Kugel: $v_\mathrm{k} \approx \frac{4\,\mathrm{m}}{0{,}04\,\mathrm{s}} = 100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

   Tatsächliche Geschwindigkeit des Opfers: $v \approx \frac{2\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

   Opfergeschwindigkeit ($m \approx 70\,\mathrm{kg}$) nach Impulssatz: v'

   $m_\mathrm{k}v_\mathrm{k} = (m+m_\mathrm{k})v' \quad \Longrightarrow \quad v' \approx \frac{m_\mathrm{k}}{m+m_\mathrm{k}}v_\mathrm{k} = 0{,}014\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

   Kugelgeschwindigkeit nach Impulssatz: $v_\mathrm{k}' \approx \frac{m+m_\mathrm{k}}{m_\mathrm{k}}v = 14\,000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

   $nm_\mathrm{k}v_\mathrm{k} = (m+nm_\mathrm{k})v \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{mv}{m_\mathrm{k}(v_\mathrm{k}-v)} = 143$

   Der Schütze erfährt die gleiche Änderung des Impulsbetrages wie das Opfer, d.h. er müsste nach rechts fliegen!

5. (a) Wahl der x-Achse so, dass die Rakete beim Start bei $x = 0$ ist.

Rakete: $x_1(t) = v_1 t + \frac{a}{2}t^2$, Darth Vader: $x_2(t) = s + v_2 t$

$$v_1 t + \frac{a}{2}t^2 = s + v_2 t \quad \Longrightarrow$$

$$t^2 - 2\frac{(v_2 - v_1)}{a}t + \frac{(v_2 - v_1)^2}{a^2} = \frac{2s}{a} + \frac{(v_2 - v_1)^2}{a^2} = \frac{2sa + (v_2 - v_1)^2}{a^2}$$

$$t = \frac{v_2 - v_1}{a} \underset{(-)}{+} \frac{1}{a}\sqrt{2sa + (v_2 - v_1)^2} = \frac{100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \underset{(-)}{+} \frac{1}{50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\sqrt{4400\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + \left(100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} =$$

$$= 2\,\mathrm{s} \underset{(-)}{+} \frac{1}{50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\sqrt{14400\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2})^2} = 2\,\mathrm{s} \underset{(-)}{+} \frac{120\,\mathrm{s}}{50} = 4{,}4\,\mathrm{s}$$

Treffpunkt: $x_2(4{,}4\,\mathrm{s}) = 44\,\mathrm{m} + 500\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4{,}4\,\mathrm{s} = 2244\,\mathrm{m}$

Aufprallgeschwindigkeit: $v_\mathrm{R} = v_1 + at = 400\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4{,}4\,\mathrm{s} = 620\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Aufprallgeschwindigkeit: $v_\mathrm{a} = v_\mathrm{R} - v_2 = 120\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

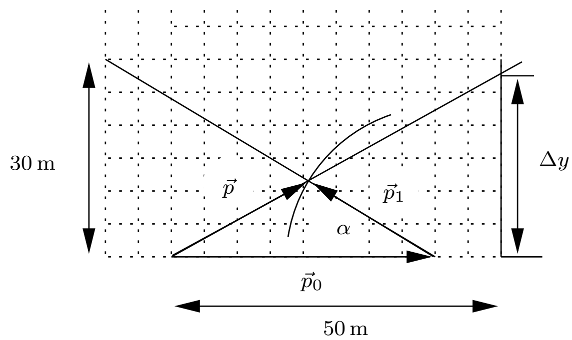
(b) Zur Zeit $t = 0$ ist die Masse der Rakete $m(0) = m_0$, d.h. die Antriebskraft zur Zeit $t = 0$ ist $F_0 = m_0 a = 7500\,\mathrm{N}$. Da die Raketenmasse immer kleiner wird (Ausstoß der Treibgase), wird wegen $a =$ konstant auch $F(t) = m(t) \cdot a$ immer kleiner.

(c) Nach dem Impulssatz sind die Beträge der Impulsänderungen von Rakete und Treibgasen gleich:

$$\Delta p_\mathrm{Rakete} = m(\Delta t)v(\Delta t) \approx m_0 a \Delta t = F_0 \Delta t = \Delta m u \quad \Longrightarrow \quad \Delta m \approx \frac{F_0 \Delta t}{u} = 0{,}83\,\mathrm{kg}$$

6. (a) $p_0 = |\vec{p}_0| = m_0 v_0 = 1{,}6 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$

$p_1 = |\vec{p}_1| = m_1 v_1 = 9{,}0 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$



(b) $\tan\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha = 31{,}0°$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -p_1\cos\alpha \\ p_1\sin\alpha \end{pmatrix}$

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -7{,}7 \cdot 10^5 \\ 4{,}6 \cdot 10^5 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} p_0 - p_1\cos\alpha \\ p_1\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}3 \cdot 10^5 \\ 4{,}6 \cdot 10^5 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$$

$$\tan\varphi = \frac{p_y}{p_x} = 0{,}559 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 29{,}2°, \quad \Delta y = s\tan\varphi = 27{,}95\,\mathrm{m} \approx 28\,\mathrm{m}$$

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = 9{,}49 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}, \; v = \frac{p}{m_0 + m_1} = \frac{p}{2{,}6 \cdot 10^4\,\mathrm{kg}} = 36{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

7.

$$\begin{aligned}
\text{Impulssatz:}\quad & 2mv = 2mu_1 + mu_2 & \Longrightarrow\quad & 2v = 2u_1 + u_2 & (1)\\
\text{Energiesatz:}\quad & mv^2 = mu_1^2 + \frac{m}{2}u_2^2 & \Longrightarrow\quad & 2v^2 = 2u_1^2 + u_2^2 & (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)\text{ in }(1):\quad 2u_1^2 + 4(v-u_1)^2 &= 2v^2\\
6u_1^2 - 8vu_1 &= -2v^2\\
u_1^2 - 2\cdot\frac{2}{3}u_1 v + \left(\frac{2v}{3}\right)^2 &= -\frac{v^2}{3} + \frac{4v^2}{9} = \frac{v^2}{9}\\
u_1 &= \frac{v}{3} \quad \vee \quad [u_1 = v]\\
u_2 = 2(v-u_1) &= \frac{4}{3}\,v
\end{aligned}$$

8. (a) K_1 befindet sich um $h = \ell\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ oberhalb von K_2.

$$\tfrac{1}{2}\,m\,v_1^2 = m\,g\,h \quad\Rightarrow\quad v_1 = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2\,g\,\ell\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \sqrt{g\,\ell\,\left(2-\sqrt{3}\right)} = 0{,}73\,\mathrm{ms}^{-1}$$

(b) Mit dem Energie– und Impulserhaltungssatz erhält man $v_1' = 0, v_2' = v_1$.

20. Harmonische Schwingungen und Wellen

20.1. Harmonische Schwingung

1. (a) Bei einer normalen Bodenwaage wirkt der Schwerkraft eines Körpers die Bodendruckkraft entgegen, die im Spaceshuttle fehlt.

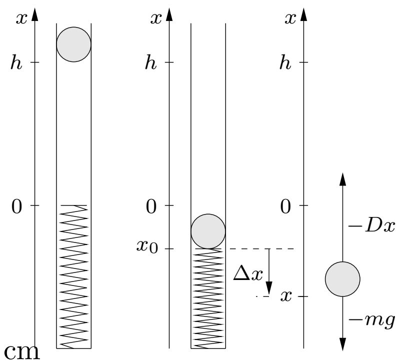
   (b) Dieses Gerät, in dem die Astronautin festgeschnallt ist, stellt zusammen mit der Feder ein harmonisches Federpendel dar, dessen Masse die Summe aus Astronautenmasse und Gestellmasse ist.

   (c) Unter den Bedingungen der Mikrogravitation („Schwerelosigkeit") spielt die Orientierung (horizontal) keine Rolle – alle Raumrichtungen sind im Gegensatz zu einem Experiment auf der Erdoberfläche gleichberechtigt.

   (d) Wenn sich die Astronautin nicht festschnallt, besteht keine Verbindung zwischen Gestell und Astronautin und bereits die kleinsten Kräfte führen dazu, dass sie aus dem Gestell wegbeschleunigt wird und damit keine Messung möglich ist.

   (e) Für ein Federpendel gilt: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow D = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$
   Setzt man die Periodendauer von 0,5s und die Masse von 100 kg für Gestell plus Astronautenmasse an, so ergibt sich $16 \cdot 10^3 \frac{N}{m}$

2. (a) $\omega = \sqrt{\dfrac{D}{m}} = 22{,}1\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}$, $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0{,}284\,\mathrm{s}$



   Für $x \leqq 0$ ist die Kraft auf die Kugel ($-Dx$ ist positiv, zeigt also nach oben)

$$F(x) = -Dx - mg$$

   In der Gleichgewichtslage (Nullpunkt der Schwingung) x_0 gilt

$$F(x_0) = -Dx_0 - mg = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = -\frac{mg}{D} = -2{,}00\,\mathrm{cm}$$

   Für $x \leqq 0$ ist die Kraft auf die Kugel ($mg = -Dx_0$)

$$F(x) = -Dx - mg = -Dx + Dx_0 = -D(x - x_0) = -D\Delta x$$

mit $\Delta x = x - x_0$. Für $x \leqq 0$ ist die Bewegung der Kugel also tatsächlich eine harmonische Schwingung um x_0.

Pot. Energie mit Bezugsp. $x = 0$: $\quad W_0(x) = mgx + \frac{D}{2}x^2$

Pot. Energie mit Bezugsp. x_0: $\quad W_\mathrm{p}(x) = W_0(x) - W_0(x_0) = mg(x - x_0) + \frac{D}{2}(x^2 - x_0^2)$

$$W_\mathrm{p}(x) = mg(x - x_0) + \frac{D}{2}(x - x_0)(x + x_0) = mg\Delta x + \frac{D}{2}\Delta x(2x_0 + \Delta x) =$$
$$= mg\Delta x + \underbrace{Dx_0}_{-mg}\Delta x + \frac{D}{2}(\Delta x)^2 = \frac{D}{2}(\Delta x)^2$$

Die Gesamtenergie der Schwingung berechnen wir bei $x = 0$:

$$W(0) = W_\mathrm{p}(0) + \underbrace{W_\mathrm{kin}(0)}_{mgh} = \frac{D}{2}x_0^2 + mgh = \frac{D}{2}x_0^2 - Dx_0h$$

Mit der Amplitude A ist der tiefste Punkt der Kugel bei $x_0 - A$. Wegen $W_\mathrm{kin}(x_0 - A) = 0$ und $W_\mathrm{p}(x_0 - A) = \frac{D}{2}A^2$ folgt aus dem Energiesatz

$$W(x_0 - A) = W(0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{D}{2}A^2 = \frac{D}{2}x_0^2 - Dx_0h \quad \Longrightarrow \quad A = \sqrt{x_0(x_0 - 2h)} = 5{,}00\,\mathrm{cm}$$

(b) Für $x \leqq 0$ gilt $x(t) = x_0 - A\cos\omega t$. Aus $x(t_1) = 0$ folgt

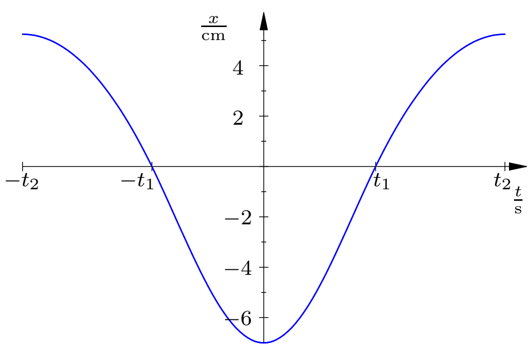
$$\cos\omega t_1 = \frac{x_0}{A} \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 0{,}0895\,\mathrm{s}$$

Fallzeit für die Höhe h:

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}103\,\mathrm{s}$$

Damit ist $t_2 = t_1 + \tau = 0{,}193\,\mathrm{s}$. Die gesamte Schwingungsdauer ist

$$T_\mathrm{ges} = 2t_2 = 0{,}386\,\mathrm{s}.$$



$$x(t) = \begin{cases} h - \frac{g}{2}(t + t_2)^2 & \text{für } -t_2 \leqq t \leqq -t_1 \\ x_0 - A\cos\omega t & \text{für } -t_1 < t < t_1 \\ h - \frac{g}{2}(t - t_2)^2 & \text{für } t_1 \leqq t \leqq t_2 \end{cases}$$

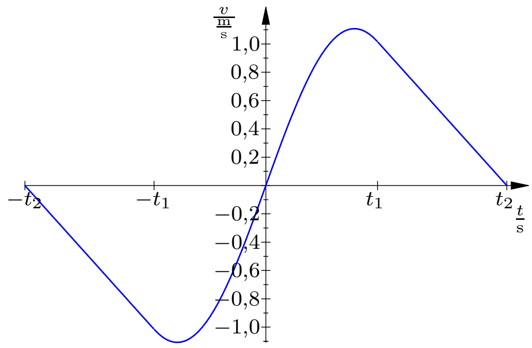
(c) Für die Glattheit der Kurve müssen wir zeigen, dass $\lim\limits_{t \to t_1^-} \dot{x}(t) = \lim\limits_{t \to t_1^+} \dot{x}(t)$:

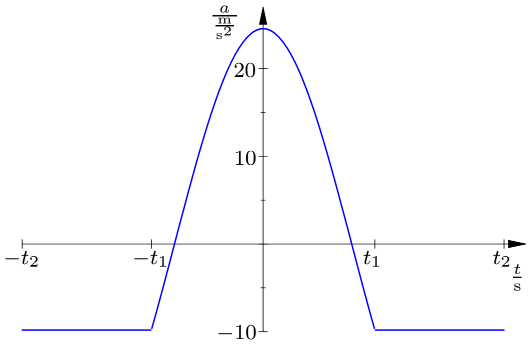
$$\lim_{t \to t_1^-} \dot{x}(t) = \lim_{t \to t_1^-} (A\omega \sin\omega t) = A\omega\sin\omega t_1 = A\omega\sqrt{1 - \cos^2\omega t_1} = A\omega\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{A^2}} =$$
$$= \omega\sqrt{A^2 - x_0^2} = \omega\sqrt{-2x_0h} = \sqrt{\frac{D}{m} \cdot 2 \cdot \frac{mg}{D} \cdot h} = \sqrt{2gh}$$

$$\lim_{t\to t_1^+} \dot{x}(t) = \lim_{t\to t_1^+} (-g(t-t_2)) = -g(t_1-t_2) = g\tau = \sqrt{2gh}$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \begin{cases} -g(t+t_2) & \text{für } -t_2 \leqq t \leqq -t_1 \\ A\omega \sin \omega t & \text{für } -t_1 < t < t_1 \\ -g(t-t_2) & \text{für } t_1 \leqq t \leqq t_2 \end{cases}$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \begin{cases} -g & \text{für } -t_2 \leqq t \leqq -t_1 \\ A\omega^2 \cos \omega t & \text{für } -t_1 < t < t_1 \\ -g & \text{für } t_1 \leqq t \leqq t_2 \end{cases}$$





3. (a) $\frac{m}{2} v_0^2 = \frac{D}{2} A^2 \quad \Longrightarrow \quad A = v_0 \sqrt{\frac{m}{D}} = 0{,}500\,\text{m}$

   $t_1 = \frac{T}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{D}} = 0{,}500\,\text{s}$

   (b) $x(t) = A \sin \omega t \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 3{,}14\,\frac{1}{\text{s}} \quad \Longrightarrow \quad x(t_2) = 0{,}5\,\text{m} \cdot \sin 0{,}785 = 0{,}353\,\text{m}$

   $v(t) = A\omega \cos \omega t \quad \Longrightarrow \quad v(t_2) = 1{,}57\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 0{,}785 = 1{,}11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

   (c) Zur Zeit $\frac{T}{2} = 1{,}00\,\text{s}$ löst sich der Wagen am Ort $x = 0$ von der Feder:

$$x(t_3) = -v_0 \left(t_2 - \frac{T}{2}\right) = -1{,}57\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1\,\text{s} = -1{,}57\,\text{m}$$

4. (a) $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = 0{,}8087\,\frac{1}{\text{s}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 7{,}77\,\text{s}; \quad T_2 = \frac{T}{4} = 1{,}94\,\text{s}$

   $y_1 = h - L\cos\varphi_1 = 12{,}0\,\text{m}; \quad y_2 = h - L = 10{,}0\,\text{m}$

   $\Delta y = y_1 - y_2 = h - L\cos\varphi_1 = 2{,}0\,\text{m}$

   Geschwindigkeit in 2: $\frac{m}{2} v_2^2 = mg\Delta y \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \sqrt{2g\Delta y} = 6{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

   Fallzeit: $\frac{g}{2}\tau_2^2 = y_2 \quad \Longrightarrow \quad \tau_2 = \sqrt{\frac{2y_2}{g}} = 1{,}43\,\text{s} \quad \Longrightarrow \quad t_2 = T_2 + \tau_2 = 3{,}37\,\text{s}$

$$x_2 = v_2\tau_2 = 2\sqrt{y_2\Delta y} = 2\sqrt{(h-L)L(1-\cos\varphi_1)} = 9{,}0\,\mathrm{m}$$
$$x_4 = v_2(t_4 - T_2) = 6{,}6\,\mathrm{m}, \quad y_4 = y_2 - \tfrac{g}{2}(t_4 - T_2)^2 = 4{,}5\,\mathrm{m}, \quad \mathrm{P}\,(6{,}6\,\mathrm{m}|4{,}5\,\mathrm{m})$$

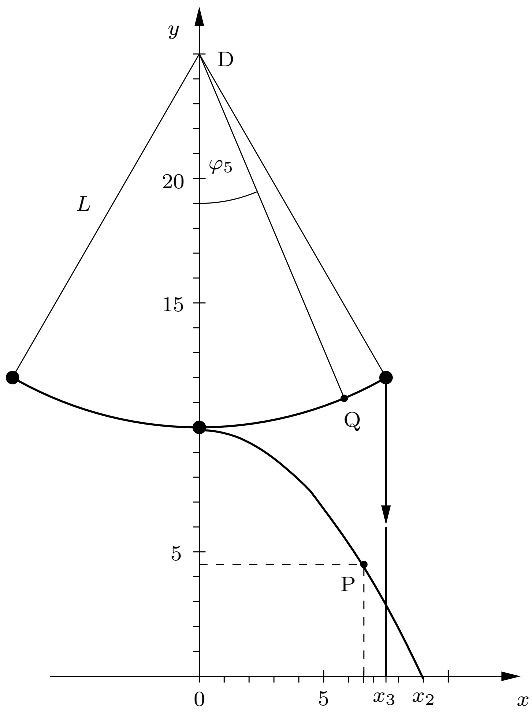
(b) $v_3 = 0$, d.h. freier Fall: $\tau_3 = \sqrt{\dfrac{2y_1}{g}} = 1{,}56\,\mathrm{s} \quad\Longrightarrow\quad t_3 = T_3 + \tau_3 = 5{,}44\,\mathrm{s}$

$$\varphi_3 = 30^\circ \quad\Longrightarrow\quad x_3 = L\sin\varphi_3 = \frac{L}{2} = 7{,}5\,\mathrm{m}$$
$$\varphi(t) = -30^\circ\cos\omega t \quad\Longrightarrow\quad \varphi_5 = \varphi(t_4) = 22{,}6^\circ = 0{,}395$$
$$x_5 = L\sin\varphi_5 = 5{,}8\,\mathrm{m}, \quad y_5 = h - L\cos\varphi_5 = 11{,}2\,\mathrm{m}, \quad \mathrm{Q}\,(5{,}8\,\mathrm{m}|11{,}2\,\mathrm{m})$$

(c) Kurve zu (a) ($\overline{t} = t - T_2$):

$$x(\overline{t}) = v_2\overline{t} \quad\Longrightarrow\quad \overline{t} = \frac{x}{v_2}$$
$$y(\overline{t}) = y_2 - \frac{g}{2}\overline{t}^2 \quad\Longrightarrow$$
$$y = y_2 - \frac{g}{2v_2^2}x^2$$
$$y = 10\,\mathrm{m} - 0{,}1244\,\frac{1}{\mathrm{m}}\,x^2$$

$\frac{x}{\mathrm{m}}$	0	2	4	6	8
$\frac{y}{\mathrm{m}}$	10	9,5	8,0	5,5	2,0



5. (a) $\dfrac{m}{2}\,v_1^2 + \dfrac{D}{2}\,x_1^2 = \dfrac{D}{2}\,A^2 \quad\Longrightarrow\quad v_1^2 + \dfrac{D}{m}\,x_1^2 = \dfrac{D}{m}\,A^2 \quad\Longrightarrow\quad v_1^2 + \omega^2 x_1^2 = \omega^2 A^2$

$$\omega = \frac{v_1}{\sqrt{A^2 - x_1^2}} = \frac{24\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}}{12\,\mathrm{cm}} = 2{,}00\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$
$$x(t) = -A\cos\omega t$$

(b) $x(t_1) = -13\,\mathrm{cm}\cdot\cos\omega t_1 = 5\,\mathrm{cm} \quad\Longrightarrow\quad \cos\omega t_1 = -\dfrac{5}{13} \quad\Longrightarrow\quad \omega t_1 = 1{,}966$

$$t_1 = 0{,}983\,\mathrm{s}$$

(c) $x(t_3) = -13\,\mathrm{cm}\cdot\cos 6 = -12{,}5\,\mathrm{cm}, \quad v(t_3) = A\omega\sin\omega t_3 = 26\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\cdot\sin 6 = -7{,}26\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$

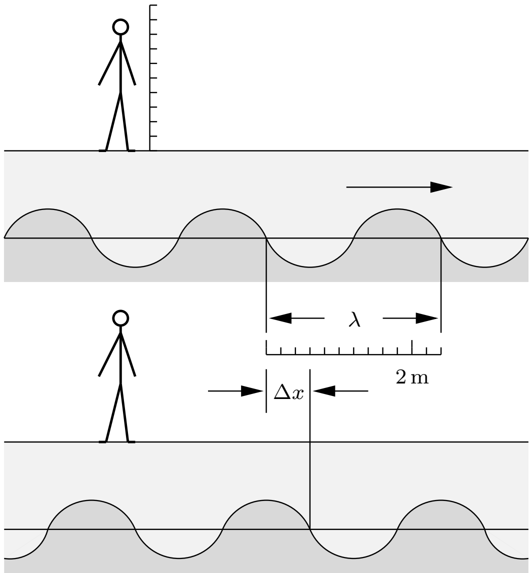
20.2. Wellen

1. $\Delta x = 0{,}6\,\mathrm{m} \quad \Longrightarrow$

   $v = \dfrac{0{,}6\,\mathrm{m}}{0{,}5\,\mathrm{s}} = 1{,}2\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

   $\lambda = 2{,}4\,\mathrm{m} \quad \Longrightarrow$

   $f = \dfrac{v}{\lambda} = 0{,}5\,\mathrm{Hz}$



2. (a) $\lambda_\mathrm{D} = \dfrac{c}{f_\mathrm{D}} = \dfrac{3{,}00\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9\cdot 10^8\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 0{,}333\,\mathrm{m}, \quad \lambda_\mathrm{E} = \dfrac{c}{f_\mathrm{E}} = \dfrac{3{,}00\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{18\cdot 10^8\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 0{,}167\,\mathrm{m}$

   (b) $c_\mathrm{S} = \lambda f = 220\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}\cdot 1{,}559\,\mathrm{m} = 343\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}23\cdot 10^3\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

   (c) $f = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{\frac{800}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{400\,000\,\mathrm{m}} = 5{,}55\cdot 10^{-4}\,\dfrac{1}{\mathrm{s}} \quad \Longrightarrow \quad T = \dfrac{1}{f} = 1800\,\mathrm{s} = 30\,\mathrm{min}$

3. Wenn an den Wänden gearbeitet wird, wird der Schall von diesen weitergeleitet. Da Stein den Schall besser leitet als Luft, hört man diese Geräusche viel deutlicher.

4. $\dfrac{2{,}00\,\mathrm{cm}}{0{,}500\,\mathrm{s} - 0{,}250\,\mathrm{s}} = 8{,}00\,\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$

21. Himmelsmechanik und Gravitation

21.1. Astronomisches Weltbild

1. $R = \dfrac{b}{\varphi} = \dfrac{800\,\text{km}}{7{,}2 \cdot \frac{\pi}{180}} \approx 6{,}4 \cdot 10^3\,\text{km}$

   Schiffe, kreisförmiger Schatten bei Mondfinsternissen

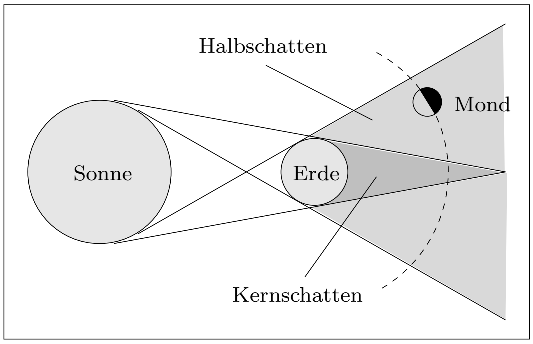
   heute: Blick aus einem Raumschiff

2. $\dfrac{\overline{\text{ES}}}{\overline{\text{EM}}} = \dfrac{1}{\cos\varphi} = 19{,}1;$ in Wirklichkeit: $\dfrac{\overline{\text{ES}}}{\overline{\text{EM}}} = \dfrac{1{,}496 \cdot 10^8\text{km}}{3{,}844 \cdot 10^5\,\text{km}} = 389$

   $\cos\varphi' = \dfrac{\overline{\text{EM}}}{\overline{\text{ES}}} = \dfrac{3{,}844 \cdot 10^5\,\text{km}}{1{,}496 \cdot 10^8\text{km}} = 0{,}00257 \quad\Longrightarrow\quad \varphi' = 89{,}85°$

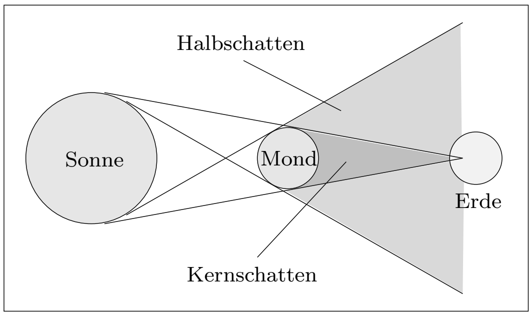
   Ein kleiner Fehler beim Winkel bewirkt einen sehr großen Fehler im Verhältnis $\frac{\overline{\text{ES}}}{\overline{\text{EM}}}$.

3. (a) **Mondfinsternis:**

   Wenn Sonne, Mond und Erde (fast) auf einer Geraden liegen, gibt es eine Finsternis. Eine Mondfinsternis kann es nur bei Vollmond, eine Sonnenfinsternis nur bei Neumond geben. Außerdem muss der Mond bei einer Finsternis in der Erdbahnebene liegen. Bei der Mondfinsternis liegt der Mond im Schatten der Erde.

   Sonnenfinsternis:

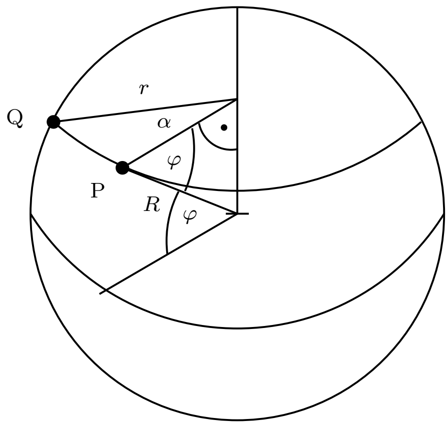
   Bei der Sonnenfinsternis liegt der Beobachtungsort auf der Erde im Schatten des Mondes. Der Sichtbarkeitsbereich einer totalen Sonnenfinsternis ist nicht sehr groß und hängt von den momentanen Entfernungen Erde-Mond und Erde-Sonne ab.

   (b) Ist die Erde zu weit vom Mond entfernt, dann ist der scheinbare Durchmesser (Winkeldurchmesser) des Mondes kleiner als der der Sonne und man beobachtet eine **ringförmige** Sonnenfinsternis. Ungefähr aber erscheint der Mond genauso groß wie die Sonne. Aus dem Strahlensatz folgt dann

$$\frac{R_\odot}{R_{\text{Mond}}} = \frac{1\,\text{AE}}{r_{\text{Mond}}} \quad \Longrightarrow$$

$$R_\odot = \frac{1\,\text{AE} \cdot R_{\text{Mond}}}{r_{\text{Mond}}} = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m} \cdot 1{,}738 \cdot 10^{6}\,\text{m}}{3{,}84 \cdot 10^{8}\,\text{m}} = 6{,}8 \cdot 10^{8}\,\text{m}$$

4.



(a) $\varphi = 39°$, $\alpha = 104°$, $R = 6378\,\text{km}$

$r = R\cos\varphi = 4957\,\text{km}$

$a = \overline{\text{PQ}} = 2 \cdot r \sin\frac{\alpha}{2} = 7812\,\text{km}$

(b) $\varepsilon = \sphericalangle \text{PMQ} = \gamma - \beta = 1{,}000°$

Sinussatz: $\dfrac{r_\text{p}}{a} = \dfrac{\sin(180° - \gamma)}{\sin\varepsilon}$

$$r_\text{p} = \frac{a\sin 116°}{\sin 1°} = 4{,}02 \cdot 10^{5}\,\text{km}$$

(c) $\delta = \left(\dfrac{29}{60} + \dfrac{43{,}5}{3600}\right)^{\circ} = 0{,}49542°$

$$R_\text{M} = r_\text{p} \tan\frac{\delta}{2} = 1{,}74 \cdot 10^{3}\,\text{km}$$

5. $a = \dfrac{1\,\text{AE}}{\tan 1''} = 206264{,}80624548\,\text{AE}$ $\qquad b = \dfrac{1\,\text{AE}}{\sin 1''} = 206264{,}80624790\,\text{AE}$

$b - a = 2{,}42 \cdot 10^{-6}\,\text{AE} = 363\,\text{km} \quad \Longrightarrow \quad \delta_{\text{rel}} = \dfrac{b-a}{b} = 1{,}2 \cdot 10^{-11}$

6.

	LJ	Parsec	AE	m	φ
Sirius	8,65	2,65			
ε-Eridani		3,30			
Barnards Stern				$5{,}66 \cdot 10^{16}$	
α-Centauri			$2{,}75 \cdot 10^{5}$		
Altair					$0{,}198''$

7.

8.

9.

21.2. Keplergesetzte

1. (a) $v = \dfrac{2{,}8'}{360 \cdot 60'} \cdot \dfrac{2\,r\,\pi}{30 \cdot 86\,400\,\mathrm{S}} = 4{,}2\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$

   (b) $v = \sqrt{G\,M\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a}\right)} \Rightarrow a = \dfrac{G\,M\,r}{2\,G\,M - r\,v^2} = 5{,}5 \cdot 10^2\,\mathrm{AE}$

   (c) Perihel $(1-e)\,a = 82\,\mathrm{AE}$

   Aphel $(1+e)\,a = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{AE}$

2. Große Halbachse der Ellipse von S2: $a = 0{,}125 \cdot 8{,}33 \cdot 10^3\,\mathrm{AU} = 1041{,}25\,\mathrm{AU}$.

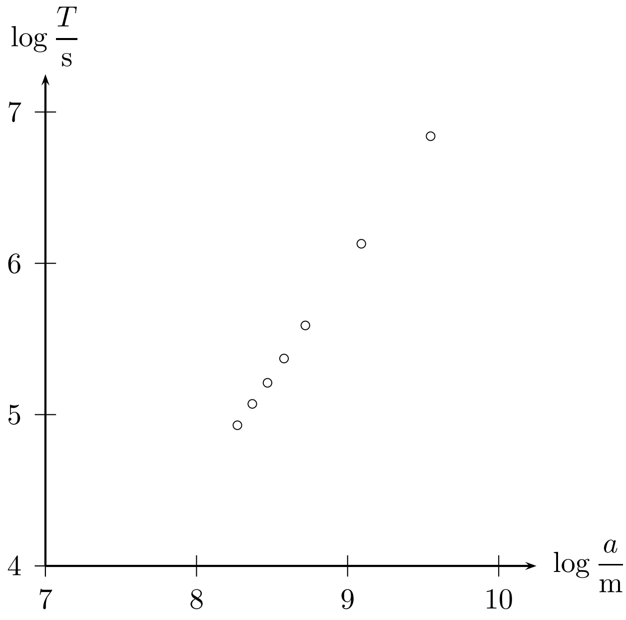
   Aus dem dritten Keplergesetz folgt: $M = \dfrac{4\,\pi^2\,a^3}{\gamma\,T^2} = 4{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{M}_\odot$. Dabei wurde davon ausgegangen, dass die Bahn von S2 näherungsweise kreisförmig ist, obwohl die numerische Exzentrizität der Ellipse 0,88 beträgt. Das erhaltene Ergebnis stimmt auch recht gut mit dem Literaturwert von $4{,}31 \cdot 10^6\,\mathrm{M}_\odot$ überein.

3. (a) Mit diesen Abkürzungen erhält man einen bekannten funktionalen Zusammenhang in der Mathematik. Wie wird dieser genannt und welche Gestalt hat der zugehörige Graph in einem x–y–Koordinatensystem.

   (b) Erstelle aus der Tabelle für die sieben größten Trabanten des Saturn ein $\log T$–$\log a$–Diagramm. Ermittle die Steigung und den y–Achsenabschnitt der sich ergebenden Kurve. Welche Werte ergeben sich für m und n?

   (c) Im dritten Kepelerschen Gesetz ist die Konstante C durch $\frac{4\,\pi^2}{\gamma\,M}$ gegeben. Dabei bezeichnet $\gamma = 6{,}62 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$ die Gravitationskonstante und M die Masse des Zentralkörpers, in unserm Fall also die des Saturn. Ermittle unter Verwendung des Ergebnisses aus der vorigen Teilaufgabe die Masse des Saturn.

   (a) Mit den Abkürzungen gilt $y = s\,x + t$, d.h. es liegt ein affiner Zusammenhang zwischen x und y vor. Der zugehörige Graph ist bekanntlich eine Gerade.



(b)

Wählen wir den ersten und letzten Punkt im Koordinatensystem um ein Steigungsdreieck zu zeichnen, so erhalt für die Steigung

$$\frac{6{,}84 - 4{,}93}{6{,}55 - 5{,}27} = 1{,}49$$

Man kann also vermuten, dass $\frac{n}{m} = 1{,}5 = \frac{3}{2}$ und somit $n = 3$ und $m = 2$ ist. Unter Verwendung der linearen Regression erhält man unter der Berücksichtigung, dass man 3 geltende Ziffern hat wirklich 1,50.

4. $a \approx \sqrt[3]{\left(\frac{T}{4\pi}\right)^2 \gamma M_\odot} = 2{,}0 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} = 0{,}14\,\mathrm{AU}$

5. (a) Daten von Encke:

Größe	Wert
Perihel	0,339 AE
Aphel	4,097 AE
Numerische Exzentrizität	$\varepsilon = 0{,}847$
Umlaufdauer	$T = 3\,\mathrm{a}\,110\,\mathrm{d}$
Geschwindigkeit im Perihel	$69{,}53\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Große Halbachse	$a = 2{,}218\,\mathrm{AE}$
Kleine Halbachse	$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = 1{,}179\,\mathrm{AE}$
Lineare Exzentrizität	$e = 1{,}879\,\mathrm{AE}$
Letzter Periheldurchgang	7.8.2010

Große Halbachse $a = \dfrac{0{,}339\,\mathrm{AU} + 4{,}097\,\mathrm{AU}}{2} = 2{,}218\,\mathrm{AU} = 3{,}0318\,128 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}.$

$$T^2 \approx \frac{4\,\pi^2}{G\,M_\odot}\,a^3 \quad \Rightarrow \quad T \approx 2\,\pi\,\sqrt{\frac{a^3}{G\,M_\odot}} \quad \Rightarrow \quad T \approx 1206\,\mathrm{d}$$

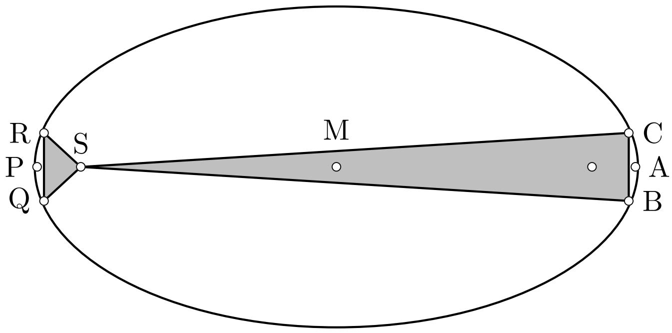
.

Alternative: $\dfrac{T_{\mathrm{Erde}}^2}{a_{\mathrm{Erde}}^3} = \dfrac{T_{\mathrm{Enke}}^2}{a_{\mathrm{Enke}}^3} \quad \Rightarrow \quad T_{\mathrm{Enke}} = \left(\dfrac{a_{\mathrm{Enke}}}{a_{\mathrm{Erde}}}\right)^{1,5} T_{\mathrm{Erde}}$

(b) Exakte Lösung:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{A}}^2 - \frac{G\,m\,M_\odot}{r_{\mathrm{A}}} = \frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{P}}^2 - \frac{G\,m\,M_\odot}{r_{\mathrm{P}}} \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{A}} = \sqrt{v_{\mathrm{P}}^2 - 2\,M_\odot\,G\,\left(\frac{1}{r_{\mathrm{P}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{A}}}\right)} = 5{,}75\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Abschätzung:



Es gilt der Keplersche Flächensatz: In gleichen Zeiten überstreicht der Radius gleiche Flächen. Offensichtlich haben die Ellipsensektoren SRQ und SBC unterschiedliche Flächeninhalte. Also ist die Zeit t_{P}, die der Komet benötigt um von Q nach R zu kommen deutlich kleiner als die Zeit t_{A} für seinen Weg von C nach B. Unter den Annahmen, dass sich die Geschwindigkeit in der Nähe der der Punkte P und A nur sehr wenig ändert und dass die Flächeninhalte der Ellipsensektoren gleich den Flächeninhalten der zugehörigen Dreiecke sind erhalten wir:

$$\frac{A_{\Delta\mathrm{SRQ}}}{t_{\mathrm{P}}} = \frac{A_{\Delta\mathrm{SBC}}}{t_{\mathrm{A}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{\mathrm{RQ}} \cdot 0{,}339\,\mathrm{AE}}{t_{\mathrm{P}}} = \frac{\overline{\mathrm{CB}} \cdot 4{,}097\mathrm{AE}}{t_{\mathrm{A}}}$$

Mit

$$v_{\mathrm{P}} \approx \frac{\overline{\mathrm{RQ}}}{t_{\mathrm{P}}} \qquad \text{und} \qquad v_{\mathrm{A}} \approx \frac{\overline{\mathrm{CB}}}{t_{\mathrm{P}}}$$

ergibt sich

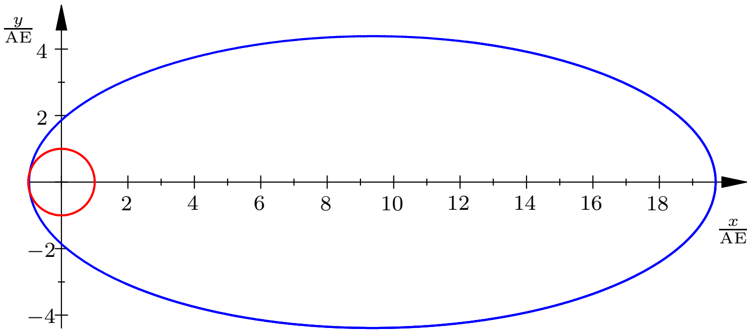
$$v_{\mathrm{A}} \approx \frac{0{,}339\,\mathrm{AU}}{4{,}097\mathrm{CB}} \cdot v_{\mathrm{P}} = 5{,}75\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Dieser Wert stimmt sogar bis auf drei geltenden Ziffern mit dem exakt berechneten überein.

6. (a) $\dfrac{T^2}{a^3} = C_\odot = 1\,\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{AE}^3} \quad\Longrightarrow\quad a = \sqrt[3]{\dfrac{T^2}{C_\odot}} = 10{,}335\,\mathrm{AE}$

$d = a - r_1 = 9{,}359\,\mathrm{AE} \quad\Longrightarrow\quad b = \sqrt{a^2 - d^2} = 4{,}386\,\mathrm{AE}$

$r_2 = a + d = 19{,}694\,\mathrm{AE}$



(b) $d = ea \quad\Longrightarrow\quad r_{\min} = a - d = a(1-e) \quad\Longrightarrow\quad a = \dfrac{r_{\min}}{1-e} = 187\,\mathrm{AE}$

$b = a\sqrt{1-e^2} = 18{,}5\,\mathrm{AE}$

$\dfrac{T^2}{a^3} = C_\odot = 1\,\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{AE}^3} \quad\Longrightarrow\quad T = \sqrt{a^3 C_\odot} = 2{,}56 \cdot 10^3\,\mathrm{a}$

7. (a) $\dfrac{T_{\mathrm{Eu}}^2}{a_{\mathrm{Eu}}^3} = \dfrac{T_{\mathrm{Io}}^2}{a_{\mathrm{Io}}^3} = C_{\mathrm{Jup}} = 4{,}17 \cdot 10^{-17}\,\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{km}^3} \quad\Longrightarrow$

$a_{\mathrm{Eu}} = \sqrt[3]{\dfrac{T_{\mathrm{Eu}}^2 a_{\mathrm{Io}}^3}{T_{\mathrm{Io}}^2}} = a_{\mathrm{Io}}\sqrt[3]{\dfrac{T_{\mathrm{Eu}}^2}{T_{\mathrm{Io}}^2}} = 1{,}59\,a_{\mathrm{Io}} = 6{,}71 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$

(b) $a = \dfrac{r_1 + r_2}{2} = 5 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$

$\dfrac{T^2}{a^3} = C_{\mathrm{Jup}} \quad\Longrightarrow\quad T = \sqrt{a^3 C_{\mathrm{Jup}}} = 2{,}28\,\mathrm{d}$

$d = a - r_1 = 3 \cdot 10^5\,\mathrm{km} = ea \quad\Longrightarrow\quad e = \dfrac{d}{a} = 0{,}6$

$b = \sqrt{a^2 - d^2} = a\sqrt{1-e^2} = 0{,}8\,a = 4 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$

(c) $r_4 = \overline{\mathrm{ES_2}} = 2a - r_3 = 6{,}8 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$

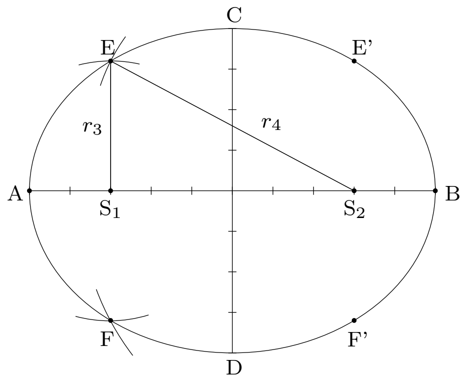
$\mathrm{k}(\mathrm{S}_1, r_3) \cap \mathrm{k}(\mathrm{S}_2, r_4) = \{\mathrm{E{,}F}\}$

$\overline{\mathrm{S_1S_2}} = 2d = 6 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$

$r_3^2 + \overline{\mathrm{S_1S_2}}^2 = 46{,}24 \cdot 10^{10}\,\mathrm{km}^2$

$r_4^2 = 6{,}8^2 \cdot 10^{10}\,\mathrm{km}^2 = r_3^2 + \overline{\mathrm{S_1S_2}}^2 \quad \Longrightarrow$

$\sphericalangle \mathrm{S_2S_1E} = 90°$



8. (a) $r_{\min} = \dfrac{c\Delta t_{\min}}{2} + R_\mathrm{E} + R_\mathrm{M} = 363296\,\mathrm{km}$

$r_{\max} = \dfrac{c\Delta t_{\max}}{2} + R_\mathrm{E} + R_\mathrm{M} = 405504\,\mathrm{km}$

$a_\mathrm{M} = \dfrac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = 384400\,\mathrm{km}$

$d_\mathrm{M} = a_\mathrm{M} - r_{\min} = 21104\,\mathrm{km}, \qquad e_\mathrm{M} = \dfrac{d_\mathrm{M}}{a_\mathrm{M}} = 0{,}0549$

$b_\mathrm{M} = \sqrt{a_\mathrm{M}^2 - d_\mathrm{M}^2} = 383820\,\mathrm{km}$

(b) $T = d_{\mathrm{sid}} = 86164\,\mathrm{s}, \qquad \dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{T_\mathrm{M}^2}{a_\mathrm{M}^3} \quad \Longrightarrow \quad a = a_\mathrm{M}\left(\dfrac{T}{T_\mathrm{M}}\right)^{\frac{2}{3}} = 42298\,\mathrm{km}$

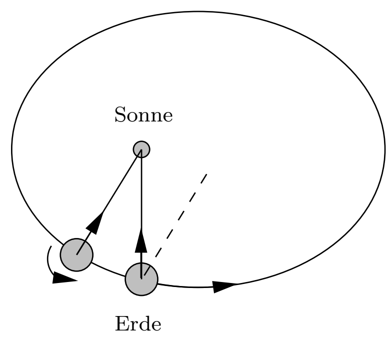
über Erdoberfläche: $x = a - R_\mathrm{E} = 35920\,\mathrm{km}$

(c) Ein Jahr hat 365,25 24 h-Tage und 366,25 Sterntage:

$$365{,}25 \cdot 24\,\mathrm{h} = 366{,}25 \cdot d_{\mathrm{sid}}$$

$$d_{\mathrm{sid}} = \frac{365{,}25}{366{,}25} \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 86164\,\mathrm{s}$$

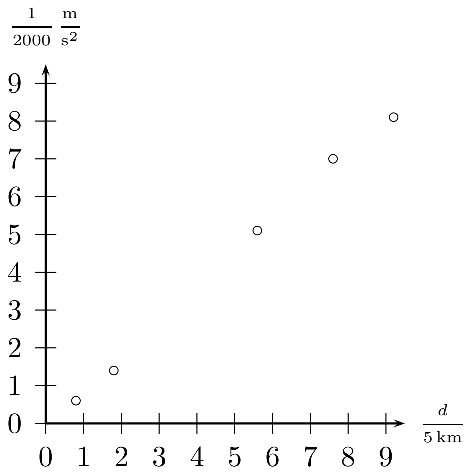
$$d_{\mathrm{sid}} = 23\,\mathrm{h}\,56\,\mathrm{min}\,4\,\mathrm{s}$$



21.3. Gravitationsgesetz

1. (a) $2{,}6 \cdot 10^3\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

(b)



Vermutung: d und g sind direkt proportional. D.h. in gleichem Maß wie der Durchmesser eines Himmelskörpers wächst, so wächst auch die Fallbeschleunigung an seiner Oberfläche, sofern die Dichte konstant bleibt.

(c) $g = \gamma\,\frac{M}{r^2} = \gamma\,\frac{\frac{4}{3}\,r^3\,\pi}{r^2} = \frac{4}{3}\,\pi\,\gamma\,r.$

2.

3.

4. Mit einer beliebigen Masse m muss

$$G\,\frac{m\,m_\mathrm{E}}{r_1^2} = G\,\frac{m\,m_\mathrm{M}}{r_2^2}$$
$$r_1 + r_2 = r$$

gelten. Dies führt auf die quadratische Gleichung

$$m_\mathrm{E}\,(r - r_1)^2 = m_\mathrm{M}\,r_1^2,$$

die die Lösungen $r_1 = 3{,}46 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$ und $r_1 = 4{,}32 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$ besitzt.

5. $r = \sqrt{\frac{1000\,G\,m_\mathrm{E}}{g}} = 2{,}02 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$

6. (a) $9{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} : \left(\frac{11}{4}\right)^2 = 1{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
   (b) $9{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 22 = 2{,}0 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
   (c) $9{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} : \left(\frac{11}{4}\right)^2 \cdot 22 = 26\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

7. $3{,}73\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{17{,}2}{0{,}107} : \left(\frac{3{,}8}{0{,}533}\right)^2 = 11{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$

8. $\sqrt[3]{320} \cdot 274\,\mathrm{ms}^{-2} = 1{,}87 \cdot 10^3\,\mathrm{ms}^{-2}$

9. $1{,}6\, g_{\mathrm{Erde}} \leqq g_{\mathrm{Glieseg}} \leqq 3{,}0\, g_{\mathrm{Erde}}$

10. (a) $g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{G \cdot \frac{4\pi}{3}\varrho r^3}{r^2} = \frac{4\pi G\varrho}{3} \cdot r$

    (b) $\frac{mv_{\mathrm{i}}^2}{r} = mg(r) \quad \Longrightarrow \quad \frac{4\pi^2 r^2}{rT_{\mathrm{i}}^2} = \frac{4\pi G\varrho}{3} \cdot r \quad \Longrightarrow \quad T_{\mathrm{i}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\varrho}}$

    $\frac{v_{\mathrm{i}}^2}{r} = g(r) \quad \Longrightarrow \quad v_{\mathrm{i}} = \sqrt{\frac{4\pi G\varrho}{3}} \cdot r$

    (c) Ein Punkt des Tunnels dreht sich im Inertialsystem mit der Geschwindigkeit v_0, der Satellit hat im rotierenden System die Geschwindigkeit v_{r}:

$$v_{\mathrm{r}} = v_{\mathrm{i}} - v_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2r\pi}{T_{\mathrm{r}}} = \frac{2r\pi}{T_{\mathrm{i}}} - \frac{2r\pi}{T_0}$$

$$\frac{1}{T_{\mathrm{r}}} = \frac{1}{T_{\mathrm{i}}} - \frac{1}{T_0} \quad \Longrightarrow \quad T_{\mathrm{r}} = \frac{T_0 T_{\mathrm{i}}}{T_0 - T_{\mathrm{i}}}$$

11. (a) Mit der Mondmasse M, der Sondenmasse m und $r = R + h$ gilt:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = \frac{4m\pi^2 r^2}{rT^2} = \frac{4m\pi^2 r}{T^2} \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = 4{,}80 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$$

$$g(R) = \frac{GM}{R^2} = \frac{4\pi^2 r^3}{R^2 T^2} = \frac{4\pi^2 (R+h)^3}{R^2 T^2}$$

Mit $T = 10\,004\,\mathrm{s}$ ist

$$g(R) = \frac{4\pi^2 \cdot (2{,}01 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^3}{(1{,}569 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \cdot 10\,004\,\mathrm{s})^2} = 1{,}30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

    (b) $x = \frac{g}{2} t^2 \quad \Longrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2x}{g}} = 5{,}55\,\mathrm{s}$