SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Grundlagen (Physik)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

1. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Weltbilder **3**

2 Ungenaue Größen **4**

3 Absoluter und relativer Fehler **5**

4 Umrechnen von Einheiten **7**

1 Weltbilder

1. Naturgesetzte können prinzipiell nicht bewiesen werden. Sie sind ,,Erfindungen" von Menschen, mit deren Hilfe Vorhersagen möglich werden. An der Gültigkeit der Vorhersagen von Naturgesetzen werden diese gemessen.
   Oder:
   Auf der Basis von Naturgesetzen werden Vorhersagen getroffen, die in Experimenten überprüft werden können. Erfolgt eine Bestätigung der Vorhersage, steigt das Vertrauen in das Naturgesetz.

2 Ungenaue Größen

1. (a) Hat der ungenaueste Summand n Dezimalen, dann ist sein Fehler $5\cdot 10^{-(n+1)}$. Da sich die Fehler zum Gesamtfehler Δx addieren, gilt $\Delta x > 5\cdot 10^{-(n+1)}$, d.h. das Ergebnis hat höchstens so viele Dezimalen wie der ungenaueste Summand.

   Wir betrachten eine gerundete Zahl mit z geltenden Ziffern, v vor und n nach dem Komma: $a = \underbrace{\overbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet}^{v},\overbrace{\bullet\bullet\bullet}^{n}}_{z}$. Der absolute Fehler der Zahl ist $\Delta a = 5\cdot 10^{-(n+1)}$. Aus $10^{v-1} \leqq a < 10^{v}$ folgt für den relativen Fehler von a:

   $$\frac{\Delta a}{10^{v}} < \delta_a \leqq \frac{\Delta a}{10^{v-1}}$$

   Einsetzen von von $\Delta a = 5\cdot 10^{-(n+1)}$ liefert mit $z = v + n$

   $$5\cdot 10^{-(z+1)} < \delta_a \leqq 5\cdot 10^{-z}$$

   Für den relativen Fehler einer Zahl a mit z geltenden Ziffern gilt also $\delta_a \approx 10^{-z}$. Da sich bei Produkten und Quotienten die relativen Fehler addieren, ist der Gesamtfehler größer als der größte Einzelfehler, die Zahl der geltenden Ziffern des Ergebnisses also höchstens gleich der Zahl der geltenden Ziffern des ungenauesten Faktors.

   (b) Die Ziffern nach dem senkrechten Strich sind nicht mehr gültig:

   $2\,a + 3\,b = 4{,}608 + 0{,}0136|8 = 4{,}62168 \approx 4{,}622$

   $a^2 + b^2 = 5{,}308|416 + 0{,}0000207|936 = 5{,}308|436794 = 5{,}308$

   $(b+c)\cdot d = (0{,}00456 + 0,0035)\cdot 1{,}004\cdot 10^8 = 0{,}0080|6\cdot 1{,}004\cdot 10^8 = 80|9224 \approx 8{,}1\cdot 10^5$

   $a\cdot d = 2{,}313|216\cdot 10^8 \approx 2{,}313\cdot 10^8$

   $\sqrt{d} + \dfrac{a-b}{c} = 1001|9{,}98 + \dfrac{2{,}299|44}{0{,}0035} = 1001|9{,}98 + 65|6{,}98 = 1067|6{,}96290 \approx 1{,}068\cdot 10^4$

   $d\cdot c^3 = 1{,}004\cdot 10^8\cdot 4{,}2|875\cdot 10^{-8} = 4{,}3|0465 \approx 4{,}3$

   $d\cdot e^2 = 1{,}004\cdot 10^8\cdot 2{,}|5\cdot 10^{-15} = 2{,}|51\cdot 10^{-7} \approx 3\cdot 10^{-7}$

   $\dfrac{a}{b} + 100\,b = 505{,}|2631579 + 0{,}456 \approx 505 + 0{,}456 = 505{,}|456 \approx 505$

   $\dfrac{a}{b} + 100\,b = 505{,}|2631579 + 0{,}456 = 505{,}|7191579 \approx 506$

   $\dfrac{c^2}{e^2} = \dfrac{0{,}000012|25}{2{,}|5\cdot 10^{-15}} \approx \dfrac{0{,}000012}{3\cdot 10^{-15}} = 4\cdot 10^9$

   $\dfrac{c^2}{e^2} = \dfrac{0{,}000012|25}{2{,}|5\cdot 10^{-15}} = 4{,}|9\cdot 10^9 \approx 5\cdot 10^9$

3 Absoluter und relativer Fehler

1. $t = (3 \cdot 365 + 1 + 31 + 28 + 23{,}5)\,\mathrm{d} = 1178{,}5\,\mathrm{d} = 101822400\,\mathrm{s}$

$$\delta_{\mathrm{rel}} = \frac{17\,\mathrm{s}}{t} = 1{,}67 \cdot 10^{-7}$$

2. $[t] = \dfrac{(1{,}13 + 1{,}24 + 1{,}22 + 1{,}17 + 1{,}20 + 1{,}15 + 1{,}18 + 1{,}26)\,\mathrm{s}}{8} = 1{,}19375\,\mathrm{s}$

   $\Delta t = 0{,}06625\,\mathrm{s}$, $\delta_{\mathrm{rel}} = \dfrac{\Delta t}{[t]} = 0{,}0555$, Ergebnis sinnvoll gerundet: $t = (1{,}19 \pm 0{,}07)\,\mathrm{s}$

3. $U_{\mathrm{max}} = 10{,}2\,\mathrm{V}$, $U_{\mathrm{min}} = 9{,}8\,\mathrm{V}$, $I_{\mathrm{max}} = 0{,}201\,\mathrm{A}$, $I_{\mathrm{min}} = 0{,}199\,\mathrm{A}$

   $R_{\mathrm{max}} = \dfrac{U_{\mathrm{max}}}{I_{\mathrm{min}}} = 51{,}256\,\Omega$, $R_{\mathrm{min}} = \dfrac{U_{\mathrm{min}}}{I_{\mathrm{max}}} = 48{,}756\,\Omega$ $[R] = \dfrac{R_{\mathrm{min}} + R_{\mathrm{max}}}{2} = 50{,}0\,\Omega$

   $\Delta R = R_{\mathrm{max}} - [R] = 1{,}25\,\Omega$, $\delta_{\mathrm{rel}} = \dfrac{\Delta R}{[R]} = 0{,}025 = 2{,}5\,\% = 2\,\% + 0{,}5\,\%$

4. $$a_{\mathrm{max}} = [a] + \Delta a, \quad a_{\mathrm{min}} = [a] - \Delta a, \quad b_{\mathrm{max}} = [b] + \Delta b, \quad b_{\mathrm{min}} = [b] - \Delta b$$

   Die relativen Fehler von a und b sind: $\delta_a = \dfrac{\Delta a}{[a]}$ und $\delta_b = \dfrac{\Delta b}{[b]}$.

   Für das Produkt $T = a\,b$ gilt:

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{max}} &= a_{\mathrm{max}} \cdot b_{\mathrm{max}} = [a]\,[b] + 2\,[a]\,\Delta b + 2\,[b]\,\Delta a + \Delta a\,\Delta b \\ T_{\mathrm{min}} &= a_{\mathrm{min}} \cdot b_{\mathrm{min}} = [a]\,[b] - 2\,[a]\,\Delta b - 2\,[b]\,\Delta a + \Delta a\,\Delta b \end{aligned}$$

$$[T] = \frac{T_{\mathrm{max}} + T_{\mathrm{min}}}{2} = [a]\,[b] + \Delta a\,\Delta b \qquad \Delta T = T_{\mathrm{max}} - [T] = [a]\,\Delta b + [b]\,\Delta a$$

$$\delta_{\mathrm{rel}} = \frac{\Delta T}{[T]} = \frac{[a]\,\Delta b + [b]\,\Delta a}{[a]\,[b] + \Delta a\,\Delta b} = \frac{\dfrac{[a]}{\Delta a} + \dfrac{[b]}{\Delta b}}{1 + \dfrac{\Delta a\,\Delta b}{[a]\,[b]}} = \frac{\delta_a + \delta_b}{1 + \delta_a\,\delta_b}$$

   Wegen $\Delta a \ll [a]$ und $\Delta b \ll [b]$ gilt $\delta_a \ll 1$ und $\delta_b \ll 1$, d.h. $1 + \delta_a\,\delta_b \approx 1$:

$$\delta_{\mathrm{rel}} \approx \delta_a + \delta_b$$

   Für den Quotienten $T = \dfrac{a}{b}$ gilt:

$$T_{\mathrm{max}} = \frac{a_{\mathrm{max}}}{b_{\mathrm{min}}} = \frac{[a] + \Delta a}{[b] - \Delta b} \qquad T_{\mathrm{min}} = \frac{a_{\mathrm{min}}}{b_{\mathrm{max}}} = \frac{[a] - \Delta a}{[b] + \Delta b}$$

$$[T] = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2} = \frac{[a]\,[b] + \Delta a\,\Delta b}{([b] + \Delta b)\,([b] - \Delta b)}$$

$$\Delta T = T_{\max} - [T] = \frac{[a]\,\Delta b + [b]\,\Delta a}{([b] + \Delta b)\,([b] - \Delta b)}$$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{\Delta T}{[T]} = \frac{[a]\,\Delta b + [b]\,\Delta a}{[a]\,[b] + \Delta a\,\Delta b} = \frac{\delta_a + \delta_b}{1 + \delta_a\,\delta_b} \approx \delta_a + \delta_b \quad \text{(wie bei } T = a\,b\text{)}$$

5. (a) $\Delta T = \Delta T_0 + \Delta T_{\text{L}} = \Delta T_0 + 10^{-14} \cdot T, \quad \Delta T_0 = \dfrac{1\,\text{s}}{9\,192\,631\,770} \approx 1{,}09 \cdot 10^{-10}\,\text{s}$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1{,}09 \cdot 10^{-10}\,\text{s}}{T} + 10^{-14}$$

T	$1\,\text{ns}$	$1\,\mu\text{s}$	$1\,\text{s}$	$1\,\text{a} = 31\,536\,000\,\text{s}$
ΔT	$\approx \Delta T_0$	$\approx \Delta T_0$	$\approx \Delta T_0$	$3{,}15 \cdot 10^{-7}\,\text{s}$
δ_{rel}	$10{,}9\,\%$	$0{,}01\,\%$	$1{,}1 \cdot 10^{-10}$	$\approx 10^{-14}$

(b) $\dfrac{\Delta T_0}{T} + 10^{-14} = 2 \cdot 10^{-14} \quad \Longrightarrow \quad T = 10^{14}\,\Delta T_0 = 10\,878\,\text{s} = 3\,\text{a}\,1\,\text{min}\,18\,\text{s}$

(c) Mit der exakten Lichtgeschwindigkeit $c = 299792458\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ gilt $s_{\max} = (T + \Delta T) \cdot c$ und $s_{\min} = (T - \Delta T) \cdot c$ und damit $[s] = [T] \cdot c$ und $\Delta s = \Delta T \cdot c$. Der relative Fehler der Längenmessung ist dann gleich dem relativen Fehler der Zeitmessung:

$$\delta_s = \frac{\Delta s}{s} = \frac{c\,\Delta T}{c\,T} = \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta T_0}{T} + 10^{-14} = \frac{c\,\Delta T_0}{s} + 10^{-14} = \frac{3{,}26\,\text{cm}}{s} + 10^{-14}$$

$$\Delta s = c\,\Delta T + 10^{-14} \cdot s = 3{,}26\,\text{cm} + 10^{-14} \cdot s$$

s	$1\,\text{m}$	$1\,\text{km}$	$1\,\text{LJ} = 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\text{m}$
Δs	$3{,}26\,\text{cm}$	$3{,}26\,\text{cm}$	$94{,}6\,\text{m}$
$\dfrac{\Delta s}{s}$	$3{,}26\,\%$	$0{,}00326\,\%$	$1 \cdot 10^{-14}$

4 Umrechnen von Einheiten

1. (a) $15{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
   (b) $7{,}2126\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 25{,}965\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$
   (c) $0{,}735499\,\mathrm{kW}$
   (d) $69{,}0\,\mathrm{hPa}$
   (e) $132{,}84\,\mathrm{Pa}$